Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **1** (2010) 65–75

УДК 519.95

Двухшаговый экстраградиентный метод для задачи управления ресурсами

Зыкина А.В.[1], Меленьчук Н.В.[2]

Омский государственный технический университет

e-mail: avzykina@mail.ru, omsksuperman@rambler.ru

получена 13 ноября 2009

Ключевые слова: экстраградиентный метод, оптимизация, седловая точка, вариационное неравенство

Приведен двухшаговый экстраградиентный метод для решения несобственных задач линейного программирования, вариационных неравенств и смежных задач. Доказана сходимость метода в общем случае. Для задач линейного программирования доказана сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии.

1. Введение

В различных производственно-экономических системах значительное число решаемых задач тесно связано с эффективным использованием и распределением ограниченных ресурсов, необходимых для нормального функционирования таких систем. Пусть некоторая производственно-экономическая система располагает заданным количеством каких-либо ресурсов, под которыми подразумеваются материальные, трудовые, финансовые либо иные ресурсы, необходимые для функционирования системы. В случае нескольких потребителей (далее – технологических процессов) указанных ресурсов возникает следующая задача: распределить имеющееся количество ресурсов между технологическими процессами так, чтобы максимизировать суммарную эффективность или получаемый доход от этих процессов.

Предположим, что имеется t технологических процессов, каждому из которых поставлена в соответствие некоторая функция, оценивающая его эффективность. Для каждого из m ресурсов существует ограничение b_i на его общее количество. Матрицей $\bar{A}$ размерности $t \times m$ задаются технологические процессы. В качестве суммарной функции эффективности возьмем скалярное произведение $(\bar{c}, z)$, где z_i –

[1]Работа поддержана целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)", рег. номер 2.1.1/2763

[2]Работа поддержана целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)", рег. номер 2.1.1/2763

количество завершенных процессов i-го типа, $\bar{c}_i z_i$ – функция эффективности каждого i-го процесса, $i \in \overline{1,t}$.

Тогда можно составить следующую задачу оптимизации:

$$\begin{cases} (\bar{c}, z) \to \max, \\ \bar{A}z \leq b, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Задача эта широко известна, и существует множество методов её решения. Однако в случае противоречивости исходной модели (например, когда количество имеющихся ресурсов не позволяет выполнить выбранные технологические процессы) система ограничений будет несовместной, а соответствующая задача оптимизации становится несобственной [1]. Одним из подходов, предложенных академиком И.И. Ереминым [1, 2, 3] для коррекции таких задач, является параметризация исходной задачи и определение параметров, обеспечивающих разрешимость задачи. При этом можно дополнительно оптимизировать получаемую в результате коррекцию задачи. В таком случае можно поставить следующую задачу: определить минимальное добавочное количество ресурсов, которое позволит сделать эффективность максимальной. Обозначим такую добавку через Δb, тогда задача примет следующий вид:

$$\begin{cases} (\bar{c}, z) - (r, \Delta b) \to \max, \\ \bar{A}z \leq b + \Delta b, \\ z \geq 0, \\ \Delta b \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что в такой постановке мы можем задавать приоритет на использование тех или иных ресурсов, варьируя вектор r.

Введем обозначения $x = (z_1, ..., z_t, \Delta b_1, ..., \Delta b_m)$, $c = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_t, -r_1, ..., -r_m)$, A — матрица размера $n \times m$ $(n = t + m)$, полученная из матрицы $\bar{A}$ присоединением к последней единичной матрицы со знаком минус, т.е. $a_{i,j} = \bar{a}_{i,j}$ для $i \in \overline{1,t}, j \in \overline{1,m}$ и $a_{t+k,k} = -1$ для $k \in \overline{1,m}$, остальные нули. Запишем получившуюся задачу в удобном для решения виде (справа записана двойственная задача линейного программирования)

$$\begin{array}{ll} (c, x) \to max, & (b, y) \to min, \\ Ax \leq b, & A^T y \geq c, \\ x \geq 0, & y \geq 0, \end{array}$$

где $y \in R^m$, а A^T — транспонированная матрица A. Решение такого рода задач сводится к отысканию седловых точек соответствующей функции Лагранжа на множестве $x \geq 0, y \geq 0$

$$\min_{x \geq 0} \max_{y \geq 0} L(x, y), \;\; L(x, y) = (c, x) + (b, y) - (Ay, x). \tag{1}$$

2. Схема двухшагового экстраградиентного метода и его сходимость

Градиентные методы при решении задач оптимизации весьма распространены, однако для задач о седловых точках они сходятся только при наличии жестких предположений. Ослабить эти условия позволяют экстраградиентные методы [4, 5, 6]. В настоящей работе строится двухшаговый метод отыскания седловых точек, заключающийся в том, что направление движения алгоритма выбирается исходя из двух шагов. Таким образом мы делаем два шага, находим в последнем направление и используем его для шага из исходной точки.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $Q \subset R^n, S \subset R^m$ — подмножества евклидовых пространств; $\varphi(x, y)$ — числовая функция, заданная на $R^n \times R^m$. Требуется найти точку $[x^*, y^*] \in Q \times S$ (называемую седловой) такую, что

$$\begin{aligned} \varphi(x^*, y) &\le \varphi(x^*, y^*) \quad \forall\, y \in S, \\ \varphi(x^*, y^*) &\le \varphi(x, y^*) \quad \forall\, x \in Q. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что выполняются следующие условия:
а) множества Q и S замкнуты и выпуклы;
б) функция $\varphi(x, y)$ выпукла по x, вогнута по y, дифференцируема и её частные производные удовлетворяют условию Липшица на $Q \times S$, т.е.

$$\begin{aligned} \| \varphi_x(x, y) - \varphi_x(x', y') \| &\le L(\| x - x' \|^2 + \| y - y' \|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \| \varphi_y(x, y) - \varphi_y(x', y') \| &\le L(\| x - x' \|^2 + \| y - y' \|^2)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

в) множество $X^* \times Y^*$ седловых точек функции $\varphi(x, y)$ на $Q \times S$ непусто.

Двухшаговый экстраградиентный метод для отыскания седловых точек функции $\varphi(x, y)$ определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{x}^k &= P_Q(x^k - \alpha\varphi_x(x^k, y^k)), \\ \overline{y}^k &= P_S(y^k - \alpha\varphi_y(x^k, y^k)), \\ \widetilde{x}^k &= P_Q(\overline{x}^k - \alpha\varphi_x(\overline{x}^k, \overline{y}^k)), \\ \widetilde{y}^k &= P_S(\overline{y}^k - \alpha\varphi_y(\overline{x}^k, \overline{y}^k)), \\ x^{k+1} &= P_Q(x^k - \alpha\varphi_x(\widetilde{x}^k, \widetilde{y}^k)), \\ y^{k+1} &= P_S(y^k - \alpha\varphi_y(\widetilde{x}^k, \widetilde{y}^k)), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — числовой параметр; P_Q, P_S — операторы проектирования на соответствующие множества.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если выполняются предположения а) — в) и, кроме того:*
г) $0 < \alpha < 1/L$,
то найдётся седловая точка $[x^*, y^*] \in X^* \times Y^*$ *такая, что* $[x^k, y^k] \to [x^*, y^*]$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство.

Приведём исходную задачу к более удобному виду. В условиях теоремы точка $(x^*, y^*) \in Q \times S$ является седловой [7] тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$(\varphi_x(x^*, y^*), x - x^*) \geq 0, \quad \forall\, x \in Q,$$
$$(\varphi_y(x^*, y^*), y - y^*) \leq 0, \quad \forall\, y \in S.$$

Если обозначить $u = [x, y]$, $T(u) = [\varphi_x(x, y), -\varphi_y(x, y)]$, $\Theta = Q \times S$, то эти необходимые условия могут быть записаны так:

$$(T(u^*), u - u^*) \geq 0, \quad \forall\, u \in \Theta, \tag{3}$$

где $u^* = [x^*, y^*] \in U^* = X^* \times Y^*$.

Условие б) при этом означает, что оператор $T(u)$ является однозначно определённым, монотонным, т.е.

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq 0, \quad u, v \in \Theta, \tag{4}$$

и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица с константой L

$$\| T(u) - T(v) \| \leq L \| u - v \| . \tag{5}$$

Рассматриваемый итеративный процесс (2) может быть теперь записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overline{u}^k &= P_\Theta(u^k - \alpha T(u^k)), \\ \widetilde{u}^k &= P_\Theta(\overline{u}^k - \alpha T(\overline{u}^k), \\ u^{k+1} &= P_\Theta(u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k)). \end{aligned} \tag{6}$$

Необходимо показать, что последовательность $\{u^k\}$, определяемая соотношениями (6), сходится к некоторой точке $\hat{u} \in U^*$.

Для произвольного $u^* \in U^*$ оценим $\| u^{k+1} - u^* \|^2$. Воспользуемся для этого свойством проекции на выпуклое множество для любого u

$$(u - P_\Theta(u), v - P_\Theta(u)) \leq 0, \quad \forall\, v \in \Theta, \tag{7}$$

из которого следует: $\| u - v \|^2 \geq \| u - P_\Theta(u) \|^2 + \| v - P_\Theta(u) \|^2$, $\forall\, v \in \Theta$, $\forall\, u$, что при $v = u^*, u = u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k)$, согласно соотношениям (6), дает

$$\begin{aligned} \| u^{k+1} - u^* \|^2 &\leq \| u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - u^* \|^2 - \| u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - u^{k+1} \|^2 = \\ &= \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - u^{k+1} \|^2 - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), u^* - u^{k+1}). \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что из монотонности оператора $T(u)$ и неравенства (3) следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} 0 \leq (T(u) - T(u^*), u - u^*) = (T(u), u - u^*) - \\ - (T(u^*), u - u^*) \leq (T(u), u - u^*), \quad \forall\, u \in \Theta. \end{aligned} \tag{9}$$

В частности, неравенство (9) для $u = \widetilde{u}^k$ дает $(T(\widetilde{u}^k), u^* - \widetilde{u}^k) \le 0$, откуда следует оценка

$$(T(\widetilde{u}^k), u^* - u^{k+1}) = (T(\widetilde{u}^k), u^* - \widetilde{u}^k) + (T(\widetilde{u}^k), \widetilde{u}^k - u^{k+1}) \le (T(\widetilde{u}^k), \widetilde{u}^k - u^{k+1}). \quad (10)$$

Используем полученное неравенство (10) в цепи преобразований (8)

$$\begin{gathered}
\| u^{k+1} - u^* \|^2 \le \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - u^{k+1} \|^2 - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), u^* - u^{k+1}) = \\
= \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - \overline{u}^k \|^2 - \| \overline{u}^k - u^{k+1} \|^2 - \\
-2(u^k - \overline{u}^k, \overline{u}^k - u^{k+1}) - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \overline{u}^k - u^{k+1}) = \\
= \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - \widetilde{u}^k \|^2 - \| \widetilde{u}^k - \overline{u}^k \|^2 - \| \overline{u}^k - u^{k+1} \|^2 - \\
-2(u^k - \overline{u}^k, \overline{u}^k - u^{k+1}) - 2(u^k - \widetilde{u}^k, \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - \\
-2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \overline{u}^k - u^{k+1}) = \\
= \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - \widetilde{u}^k \|^2 - \| \widetilde{u}^k - \overline{u}^k \|^2 - \| \overline{u}^k - u^{k+1} \|^2 - \\
-2(u^k - \overline{u}^k, \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - 2(u^k - \overline{u}^k, \overline{u}^k - u^{k+1}) - 2(\overline{u}^k - \widetilde{u}^k, \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - \\
-2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) - 2\alpha(T(\widetilde{u}^k), \overline{u}^k - u^{k+1}) = \\
= \| u^k - u^* \|^2 - \| u^k - \widetilde{u}^k \|^2 - \| \widetilde{u}^k - \overline{u}^k \|^2 - \| \overline{u}^k - u^{k+1} \|^2 - 2(u^k - \overline{u}^k, \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) + \\
+2(u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - \overline{u}^k, u^{k+1} - \overline{u}^k) + 2(\overline{u}^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - \widetilde{u}^k, \overline{u}^k - \widetilde{u}^k). \quad (11)
\end{gathered}$$

Оценим предпоследнее скалярное произведение в выражении (11), разложив его на сумму двух других скалярных произведений, неположительность одного из них следует из (7) при $u = u^k - \alpha T(u^k)$, $v = u^{k+1}$; второе же оцениваем, используя неравенство Коши – Буняковского

$$\begin{aligned}
2(u^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - \overline{u}^k, u^{k+1} - \overline{u}^k) &= 2(u^k - \alpha T(u^k) - \overline{u}^k, u^{k+1} - \overline{u}^k) + \\
&+ 2(\alpha T(u^k) - \alpha T(\widetilde{u}^k), u^{k+1} - \overline{u}^k) \le 2(\alpha T(u^k) - \alpha T(\widetilde{u}^k), u^{k+1} - \overline{u}^k) \le \\
&\le 2\alpha \| T(u^k) - T(\widetilde{u}^k) \| \| u^{k+1} - \overline{u}^k \| . \quad (12)
\end{aligned}$$

Проделывая то же для последнего слагаемого в формуле, получим

$$2(\overline{u}^k - \alpha T(\widetilde{u}^k) - \widetilde{u}^k, \overline{u}^k - \widetilde{u}^k) \le 2\alpha \| T(\overline{u}^k) - T(\widetilde{u}^k) \| \| \widetilde{u}^k - \overline{u}^k \| . \quad (13)$$

В дальнейших преобразованиях понадобится равенство

$$\begin{aligned}
-2(u^k - \overline{u}^k, \widetilde{u}^k - \overline{u}^k) &= (\| u^k - \overline{u}^k \| + 2(u^k - \overline{u}^k, \overline{u}^k - \widetilde{u}^k) + \| \overline{u}^k - \widetilde{u}^k \|) - \\
&- \| u^k - \overline{u}^k \| - \| \overline{u}^k - \widetilde{u}^k \| = \| u^k - \widetilde{u}^k \| - \| u^k - \overline{u}^k \| - \| \overline{u}^k - \widetilde{u}^k \| \quad (14)
\end{aligned}$$

и неравенство

$$\| u^k - \widetilde{u}^k \|^2 + \| \overline{u}^k - u^{k+1} \|^2 \ge 2 \| u^k - \widetilde{u}^k \| \| \overline{u}^k - u^{k+1} \| . \quad (15)$$

Продолжим теперь основную цепочку неравенств (11), используя полученные неравенства (12), (15) и (13), а также то, что оператор $T(u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$
\begin{gathered}
\| u^{k+1}-u^* \|^2 \leq \| u^k-u^* \|^2 - \| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 - \| \widetilde{u}^k-\overline{u}^k \|^2 - 2(u^k-\overline{u}^k, \widetilde{u}^k-\overline{u}^k) - \\
- \| \overline{u}^k-u^{k+1} \|^2 \, 2\alpha L \| u^k-\widetilde{u}^k \| \| \overline{u}^k-u^{k+1} \| + 2\alpha L \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \| \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \| \leq \\
\leq \| u^k-u^* \|^2 - \| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 - \| \widetilde{u}^k-\overline{u}^k \|^2 - \| \overline{u}^k-u^{k+1} \|^2 - 2(u^k-\overline{u}^k, \widetilde{u}^k-\overline{u}^k) + \\
+ \alpha^2 L^2 \| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 + \| \overline{u}^k-u^{k+1} \|^2 + \alpha^2 L^2 \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \|^2 + \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \|^2 = \\
= \| u^k-u^* \|^2 - \| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 + (\| u^k-\widetilde{u}^k \| - \| u^k-\overline{u}^k \| - \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \|) + \\
+ \alpha^2 L^2 \| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 + \alpha^2 L^2 \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \|^2 = \\
= \| u^k-u^* \|^2 - (1-\alpha^2 L^2)(\| u^k-\widetilde{u}^k \|^2 + \| \overline{u}^k-\widetilde{u}^k \|^2) \leq \\
\leq \| u^k-u^* \|^2 - (1-\alpha^2 L^2) \| u^k-\overline{u}^k \|^2 .
\end{gathered}
$$

Последний переход возможен в силу того, что $1-\alpha^2L^2 > 0$ в условиях теоремы. Получаем основную оценку

$$
\| u^{k+1}-u^* \|^2 \leq \| u^k-u^* \|^2 - (1-\alpha^2 L^2) \| u^k-\overline{u}^k \|^2 . \tag{16}
$$

Из (16) следует, что

$$
\| u^k-\overline{u}^k \| \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty, \tag{17}
$$

а последовательность $\| u^k-u^* \|$ — невозрастающая и, следовательно, $\{u^k\}$ ограничена. В силу конечномерности рассматриваемого пространства и замкнутости множества Θ существует сходящаяся подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$

$$
u^{k_i} \to \hat{u} \quad \text{при} \quad k_i\to\infty, \quad \hat{u}\in\Theta. \tag{18}
$$

Рассмотрим функцию $\Phi(u) = \| u-\overline{u} \|^2$, где $\overline{u} = P_\Theta(u-\alpha T(u))$. Покажем, что если для $u=\widetilde{u}\in\Theta$ функция $\Phi(\widetilde{u})=0$, то $\widetilde{u}\in U^*$. Действительно, пусть $\Phi(\widetilde{u})=0$, т.е. $\widetilde{u}=P_\Theta(\widetilde{u}-\alpha T(\widetilde{u}))$. Тогда по свойству проекций (7) для всех v из Θ имеем $(\widetilde{u}-\alpha T(\widetilde{u})-\widetilde{u}, v-\widetilde{u}) \leq 0$, откуда получаем $(T(\widetilde{u}), v-\widetilde{u}) \geq 0, \ \forall\, v\in\Theta$. Согласно (3) это и означает, что $\widetilde{u}\in U^*$.

Из непрерывности функционала $\Phi(u)$ и утверждений (17) и (18) следует, что $\Phi(\hat{u})=0$, поэтому $\hat{u}\in U^*$. Так как $\{\| u^k-\hat{u} \|\}$ монотонна, то последовательность $\{u^k\}$ сходится к тому же пределу $\hat{u}$, что и подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$.
Теорема доказана.

Рассмотрим применение предложенного метода для решения других задач. Заметим, что в исходной задаче необходимые и достаточные условия были сформулированы в виде вариационного неравенства

$$
(h(z), v-z) \geq 0, \tag{19}
$$

где $z, v\in R^l$; $h(z)$ — оператор, переводящий R^l в R^l. Решением неравенства такого вида на множестве $\Omega\subset R^l$ называется всякая точка $z^*\in\Omega$ такая, что $(h(z^*), v-z^*) \geq 0, \ \forall\, v\in\Omega$. Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению вариационного неравенства (3). Двухшаговый экстраградиентный метод для решения вариационного неравенства (19) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{z}^k &= P_\Omega(z^k - \alpha h(z^k)), \\ \widetilde{z}^k &= P_\Omega(\overline{z}^k - \alpha h(\overline{z}^k)), \\ z^{k+1} &= P_\Omega(z^k - \alpha h(\widetilde{z}^k)). \end{aligned} \tag{20}$$

Учитывая, что в доказательстве теоремы 1 связь оператора $T(u)$ с исходной задачей о седловой точке никоим образом не используется, а только лишь накладываются условия его монотонности и существования константы Липшица, можно сформулировать более общий результат.

Теорема 2. *Пусть решается вариационное неравенство (19) на множестве* $\Omega \subset R^l$*, причем:*
а') Ω — замкнутое, выпуклое множество;
б') $h(z)$ — монотонный оператор: $(h(z) - h(v), z - v) \geq 0,\ \forall\, z, v \in \Omega$, удовлетворяющий условию Липшица: $\| h(z) - h(v) \| \leq L \| z - v \|,\ \forall\, z, v \in \Omega$;
в') множество решений Z^* неравенства (19) на Ω не пусто;
г') $0 < \alpha < 1/L$.
Тогда последовательность $\{z^k\}$, определяемая рекуррентными соотношениями (20), сходится к некоторому $\hat{z} \in Z^*$ — решению рассматриваемого вариационного неравенства.

3. Двухшаговый экстраградиентный метод для задач линейного программирования

Исследуем более подробно экстраградиентный метод для отыскания седловой точки билинейного функционала. Задачи линейного программирования являются задачами именно такого типа. Экстраградиентный метод для отыскания седловой точки билинейного функционала (1) на множестве $x \geq 0, y \geq 0$ может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{x}^k &= [x^k + \alpha(Ay^k - c)]^+, \\ \overline{y}^k &= [y^k - \alpha(A^T x^k - b)]^+, \\ \widetilde{x}^k &= [\overline{x}^k + \alpha(A\overline{y}^k - c)]^+, \\ \widetilde{y}^k &= [\overline{y}^k - \alpha(A^T \overline{x}^k - b)]^+, \\ x^{k+1} &= [x^k + \alpha(A\widetilde{y}^k - c)]^+, \\ y^{k+1} &= [y^k - \alpha(A^T \widetilde{x}^k - b)]^+, \end{aligned} \tag{21}$$

где $[p]^+ = max\{0, p\}$ для скаляра p и $[p]^+ = ([p_1]^+, [p_2]^+, ..., [p_l]^+)$ для вектора $p = (p_1, p_2, ..., p_l)$.

Относительно сходимости последовательности, определяемой рекуррентными соотношениями (21), докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Если*
а) билинейный функционал $(c, x) + (b, y) - (Ay, x)$ *имеет на множестве* $x \geq 0$, $y \geq 0$ *единственную седловую точку* $[x^*, y^*]$,
б) $0 < \alpha < 1/ \parallel A \parallel$,
то (x^k, y^k) *сходится со скоростью геометрической прогрессии:*

$$\parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 + \parallel y^{k+1} - y^* \parallel^2 \leq q(\parallel x^k - x^* \parallel^2 + \parallel y^k - y^* \parallel^2)$$

(явный вид q *выписан в доказательстве теоремы).*

Доказательство. Будем обозначать через a^i i-ю строку матрицы A, через $\overline{a}^j$ — j-й столбец матрицы A, через z_i — i-ю компоненту вектора $z = (z_1, ..., z_l)$. Пусть для седловой точки $[x^*, y^*]$ рассматриваемого нами функционала (1)

$$\begin{aligned} I^* &= \{i : (a^i, y^*) = c_i\}, \\ J^* &= \{j : (\overline{a}^j, x^*) = b_j\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда, как известно, из предположения единственности седловой точки следует, что

$$\begin{aligned} (a^i, y^*) < c_i, \quad x_i^* = 0 \quad i \bar{\in} I^*, \\ (\overline{a}^j, x^*) > b_j, \quad y_j^* = 0 \quad j \bar{\in} J^*, \\ x_i^* > 0, \quad i \in I^*, \\ y_j^* > 0, \quad j \in J^*. \end{aligned} \tag{23}$$

Выберем теперь столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы для всех $[x, y]$ из ε-окрестности $[x^*, y^*] : \parallel x - x^* \parallel^2 + \parallel y - y^* \parallel^2 \leq \varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} (\overline{a}^j, x) - b_j \geq \gamma > 0, \quad j \bar{\in} J^*, \\ (a^i, y) - c_i \leq -\gamma, \quad i \bar{\in} I^*, \\ x_i + \alpha(a^i y - c_i) \geq 0, \quad i \in I^*, \\ y_i - \alpha(\bar{a}^j x - b_j) \geq 0, \quad j \in J^*. \end{aligned} \tag{24}$$

Согласно (22),(23) и непрерывности рассматриваемых в (24) функций, такие $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся.

Нетрудно проверить, что для метода (21) выполнены все условия теоремы 1 (в частности, в качестве L можно взять $\parallel A \parallel$). Поэтому последовательность $\{[x^k, y^k]\}$ сходится, и для достаточно больших $k > K$ все точки $\{[x^k, y^k]\}, \{[\bar{x}^k, \bar{y}^k]\}, \{[\widetilde{x}^k, \widetilde{y}^k]\}$ будут находиться в рассматриваемой нами ε-окрестности $[x^*, y^*]$ и для них будут выполняться неравенства (24). Следовательно, для $k > K$

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} = [x_i^k + \alpha((a^i, \widetilde{y}^k) - c_i)]^+ \leq [x_i^k - \alpha\gamma]^+, \quad i \bar{\in} I^*, \\ y_j^{k+1} = [y_j^k - \alpha((\bar{a}^j, \widetilde{x}^k) - b_j)]^+ \leq [y_j^k - \alpha\gamma]^+, \quad j \bar{\in} J^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что через конечное число шагов окажется

$$\begin{aligned} x_i^k = 0, \quad i \bar{\in} I^*, \\ y_j^k = 0, \quad j \bar{\in} J^*, \quad \forall\, k > K_1 > K. \end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, при $k > K_1$ метод (21) примет вид

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_i^k &= x_i^k + \alpha((a^i, y^k) - c_i), \quad i \in I^*,\\
\overline{x}_i^k &= 0 \quad i \bar{\in} I^*,\\
\overline{y}_j^k &= y_j^k - \alpha((\bar{a}^j, x^k) - b_j), \quad j \in J^*,\\
\overline{y}_j^k &= 0 \quad j \bar{\in} J^*,\\
\widetilde{x}_i^k &= \bar{x}_i^k + \alpha((a^i, \bar{y}^k) - c_i), \quad i \in I^*,\\
\widetilde{x}_i^k &= 0 \quad i \bar{\in} I^*,\\
\widetilde{y}_j^k &= \bar{y}_j^k - \alpha((\bar{a}^j, \bar{x}^k) - b_j), \quad j \in J^*,\\
\widetilde{y}_j^k &= 0 \quad j \bar{\in} J^*,\\
x_i^{k+1} &= x_i^k + \alpha((a^i, \widetilde{y}^k) - c_i), \quad i \in I^*,\\
x_i^{k+1} &= 0 \quad i \bar{\in} I^*,\\
y_j^{k+1} &= y_j^k - \alpha((\bar{a}^j, \widetilde{x}^k) - b_j), \quad j \in J^*,\\
y_j^{k+1} &= 0 \quad j \bar{\in} J^*.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Если обозначить через v^k, w^k ненулевые компоненты соответственно x^k и y^k, а через B — матрицу, получающуюся из A вычеркиванием строк с номерами $i \bar{\in} I^*$ и столбцов $j \bar{\in} J^*$, то (26) можно записать

$$
\begin{aligned}
\overline{v}^k &= [v^k + \alpha(Bw^k - c)]^+,\\
\overline{w}^k &= [w^k - \alpha(B^T v^k - b)]^+,\\
\widetilde{v}^k &= [\overline{v}^k + \alpha(B\overline{w}^k - c)]^+,\\
\widetilde{w}^k &= [\overline{w}^k - \alpha(B^T \overline{v}^k - b)]^+,\\
v^{k+1} &= [v^k + \alpha(B\widetilde{w}^k - c)]^+,\\
w^{k+1} &= [w^k - \alpha(B^T \widetilde{v}^k - b)]^+.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

В силу предположения о единственности седловой точки матрица B квадратная и невырожденная размерности $\tilde{l} \leq min\{n, m\}$ и для неё

$$\| Bw \| \geq \frac{1}{\| B^{-1} \|} \| w \|, \quad \forall\, w \in R^{\tilde{l}}. \tag{28}$$

Используя равенства

$$B^T v^* = b, \quad Bw^* = c, \tag{29}$$

а также (28), получаем из (26) следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
\| \bar{v}^k - v^k \|^2 = \alpha^2 \| B(w^k - w^*) \|^2 \geq \frac{\alpha^2}{\| B^{-1} \|^2} \| w^k - w^* \|^2,\\
\| \bar{w}^k - w^k \|^2 \geq \frac{\alpha^2}{\| B^{-1} \|^2} \| v^k - v^* \|^2 .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Основная оценка (16), полученная в доказательстве теоремы 1, имеет для нашей задачи вид

$$\| v^{k+1} - v^* \|^2 + \| w^{k+1} - w^* \|^2 \leq \| v^k - v^* \|^2 + \| w^k - w^* \|^2 -$$
$$- (1 - \alpha^2 \| A \|^2)(\| \bar{v}^k - v^k \|^2 + \| \bar{w}^k - w^k \|^2).$$

Учитывая, что для рассматриваемой последовательности имеют место оценки (30), получаем из этого неравенства

$$\| v^{k+1} - v^* \|^2 + \| w^{k+1} - w^* \|^2 \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{\| B^{-1} \|^2}(1 - \alpha^2 \| A \|^2)\right)(\| v^k - v^* \|^2 + \| w^k - w^* \|^2).$$

Поскольку $1 - \alpha^2 \| A \|^2 > 0$ по условиям теоремы, то

$$q = 1 - \frac{\alpha^2}{\| B^{-1} \|^2}(1 - \alpha^2 \| A \|^2) < 1.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе представлен новый двухшаговый экстраградиентный метод решения вариационных неравенств и задач, сводимых к ним. Отличие предложенного метода от классических экстраградиентных методов [4] заключается в использовании в вычислительной схеме двух вспомогательных шагов, а не одного.

Список литературы

1. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.

2. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.

3. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Скарин В.Д., Хачай М.Ю. Математические методы в экономике. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 280 с.

4. Корпелевич Г.М. Экстаргградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, №4. С. 747-756.

5. Антипин А.С. Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, №9. С. 1291-1307.

6. Зыкина А.В. Обратная дополнительность в модели управления ресурсами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 11. С. 1968-1978.

7. Демьянов В.Ф., Певный А.Б. Численные методы отыскания седловых точек // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, №5. С. 1099-1127.

A doublestep extragradient method for solving a resource management problem

Zykina A.V., Melenchuk N.V.

Keywords: extragradient method, optimization, saddle point, variational inequality

In the article is proposed a doublestep extragradient method for solving nonintrinsic problems of linear programming, variational inequalities and some related problems. The convergence of this method in general case is proved. The convergence of the method at the rate of geometric progression is proved for the problems of linear programming.

Сведения об авторах:
Зыкина Анна Владимировна,
Омский государственный технический университет,
профессор, д-р физ.-мат. наук;
Меленьчук Николай Владимирович,
Омский государственный технический университет,
аспирант, младший научный сотрудник.