

©Орешкина (Никольская) О. В., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-312-322

УДК 512.7

## О гипотезах Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенных произведений семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1

Орешкина (Никольская) О. В.

получена 24 декабря 2017

**Аннотация.** Доказаны гипотезы Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенного произведения двух неизотривиальных 1-параметрических семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 при некоторых условиях на вырожденные слои, ранги групп Нерона–Севери общих геометрических слоёв семейств и представления групп Ходжа в трансцендентных частях рациональных когомологий.

Пусть  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  ( $i = 1, 2$ ) – проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой  $C$ . Предположим, что дискриминантные локусы  $\Delta_i = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\}$  не пересекаются,  $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$ ,  $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$  для любого гладкого слоя  $X_{ks}$ , причём выполнены следующие условия:

(i) для любой точки  $\delta \in \Delta_i$  и преобразования Пикара–Лефшеца  $\gamma \in \text{GL}(H^2(X_{i\delta}, \mathbb{Q}))$ , ассоциированного с гладкой частью  $\pi'_i : X'_i \rightarrow C \setminus \Delta_i$  морфизма  $\pi_i$  и с обходом вокруг точки  $\delta \in C$ , имеем неравенство  $(\log(\gamma))^2 \neq 0$ ;

(ii) многообразия  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ), кривая  $C$  и структурные морфизмы  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  определены над некоторым конечнопорожденным подполем  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

Если для общих геометрических слоёв  $X_{1s}$  и  $X_{2s}$  выполнено хотя бы одно из следующих условий: (a)  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s})$  является нечетным числом,  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ; (b) кольцо  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$  – мнимое квадратичное поле,  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4$ ,  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$  – вполне вещественное поле или  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ; (c)  $[b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4, \text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}; b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})]$ , то для расслоенного произведения  $X_1 \times_C X_2$  верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного  $k$ -многообразия  $X_0$  с условием  $X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{\sim} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство  $H_{\text{ét}}^2(X_0 \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$  порождается классами дивизоров.

**Ключевые слова:** гипотезы Ходжа, Тэйта, Мамфорда–Тэйта, расслоенное произведение, группа Мамфорда–Тэйта,  $l$ -адическое представление

**Для цитирования:** Орешкина (Никольская) О. В., "О гипотезах Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенных произведений семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:3 (2018), 312–322.

### Об авторах:

Орешкина (Никольская) Ольга Владимировна, [orcid.org/0000-0002-6742-8453](http://orcid.org/0000-0002-6742-8453), канд. физ.-мат. наук, доцент, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000, Россия, e-mail: [rapichonok@yandex.ru](mailto:rapichonok@yandex.ru)

### Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-31-00266).

## Введение

Пусть  $X$  – гладкое проективное комплексное многообразие,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 0$ ,

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=2r} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

– разложение Ходжа. Гипотеза Ходжа [1] утверждает, что  $\mathbb{Q}$ -пространство

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$$

порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности  $r$  на  $X$ . Эта гипотеза верна для всех многообразий размерности  $\leq 3$ , для всех простых абелевых многообразий простой размерности [2], а также для некоторых других типов абелевых многообразий, перечисленных в обзоре [3], для гладких моделей расслоенных произведений некоторых неизотривиальных семейств  $K3$ -поверхностей над гладкой проективной кривой [4], [5], [6].

С другой стороны, гипотеза Мамфорда–Тэйта утверждает, что для любого гладкого проективного многообразия  $X_0$  над конечнопорождённым подполем  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$  алгебра Ли образа  $l$ -адического представления

$$\rho_l^{(n)} : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{ét}}^n(X_0 \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$$

изоморфна алгебре Ли  $\text{Lie MT}(H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l)$  группы  $l$ -адических точек группы Мамфорда–Тэйта  $\text{MT}(H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$  структуры Ходжа  $H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$  [7], [8].

Эта гипотеза верна, например, для  $K3$ -поверхностей [9] и абсолютно простых абелевых многообразий простой размерности [10], [11].

Наконец, гипотеза Тэйта об алгебраических циклах утверждает, что для любого гладкого проективного многообразия  $X_0$  над конечнопорождённым полем  $k$  и любого простого числа  $l \neq \text{char}(k)$   $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$H_{\text{ét}}^{2r}(X_0 \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(k^s/k)}$$

порождается классами алгебраических циклов коразмерности  $r$  на  $X_0$  [12].

Эта гипотеза верна для  $K3$ -поверхностей [9], для абелевых многообразий над конечными и числовыми полями в случае  $r = 1$  ([13], [14]), для абсолютно простых абелевых многообразий простой размерности над конечными полями [15], для регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 – слоёв неизотривиального гладкого семейства – в случае  $\text{char}(k) = 0$  [16].

Мы доказываем гипотезы Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенного произведения двух неизотривиальных 1-параметрических семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 при некоторых условиях на вырожденные слои, ранги групп Нерона–Севери общих геометрических слоёв семейств и представления групп Ходжа в трансцендентных частях рациональных когомологий.

Основными результатами являются теорема 1 и следствие 1.

Заметим, что в качестве гладких слоёв семейств могут быть  $K3$ -поверхности, а также минимальные регулярные поверхности основного типа (размерности Кодаиры  $\varkappa = 2$ ) с геометрическим родом 1, принадлежащие одному из следующих типов: (а) поверхности с  $K^2 \leq 2$ ; (б) поверхности с  $3 \leq K^2 \leq 8$ , модули которых лежат

в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова; (с) поверхности с  $K^2 = 3$  с кручением группы Пикара  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Автор благодарит С.Г. Танкеева за внимательное прочтение рукописи и интересные обсуждения.

## 1. Отображение периодов и группы Ходжа

### 1.1. Типы гладких слоев семейств поверхностей

Пусть  $V$  – гладкая проективная поверхность основного типа над конечнопорожденным полем  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$  с  $h^{2,0}(V \otimes_k \mathbb{C}) = 1$ . Если минимальная модель поверхности  $V \otimes_k \mathbb{C}$  принадлежит одному из следующих типов:

- (a) поверхности с  $q = 0$  и  $K^2 \leq 2$ ;
- (b) поверхности с  $q = 0$  и  $3 \leq K^2 \leq 8$ , модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова;
- (c) поверхности с  $q = 0$  и  $K^2 = 3$  с кручением группы Пикара  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ;
- (d) поверхности с  $q = 1$  и  $K^2 = 2$ ;
- (e) поверхности с  $q = 1$  и  $K^2 = 3$  и общим слоем отображения Альбанезе рода 3;
- (f) поверхности с  $q = 1$  и  $K^2 = 4$  в любой из восьми компонент модулей, описанных в работе Пигнателли [17],

то можно считать, что существует такой гладкий проективный  $k$ -морфизм  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  над некоторой гладкой связной базой  $\mathcal{S}$ , что отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа  $R^2 f_{\mathbb{C}*} \mathbb{Q}$ , непостоянно, причём многообразие  $V$  является слоем морфизма  $f$  над некоторой точкой  $s \in \mathcal{S}(k)$ , гипотеза Тэйта для дивизоров на  $V$  и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий степени 2 верны [16, теорема 9.3].

### 1.2. Определение групп Ходжа и Мамфорда–Тэйта

Пусть  $S$  – гладкое проективное многообразие. Рассмотрим разложение Ходжа

$$H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(S, \mathbb{C}),$$

где  $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$  – пространство гармонических форм типа  $(p, q)$ .

Пусть  $U^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$  – единичная окружность. Определим ее действие в  $H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  следующим образом:  $e^{i\theta}$  действует на  $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$  как умножение на число  $e^{i\theta(p-q)}$ . В итоге мы получаем морфизм групп

$$U^1 \xrightarrow{h} \mathrm{GL}(H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}).$$

**Определение 1.** Группой Ходжа структуры Ходжа  $H^n(S, \mathbb{Q})$  называется наименьшая алгебраическая  $\mathbb{Q}$ -подгруппа  $\mathrm{Hg}(H^n(S, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^n(S, \mathbb{Q}))$ , группа  $\mathbb{R}$ -точек которой содержит  $h(U^1)$ .

По теореме Лефшеца о дивизорах имеем:

$$H^2(S, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q}))} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) = \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$

где  $NS(S)$  – группа Нерона–Севери многообразия  $S$ .

Определим действие группы  $\mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$  в  $H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  следующим образом: элемент  $z \in \mathbb{C}^\times$  действует на  $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$  как умножение на число  $z^p \bar{z}^q$ . В итоге получаем морфизм групп

$$\mathbb{C}^\times \xrightarrow{h} \text{GL}(H^n(S, \mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

**Определение 2.** Группой Мамфорда–Тэйта  $\text{MT}(H^n(S, \mathbb{Q}))$  называется наименьшая алгебраическая  $\mathbb{Q}$ -подгруппа  $\text{MT}(H^n(S, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \text{GL}(H^n(S, \mathbb{Q}))$ , группа  $\mathbb{R}$ -точек которой содержит  $h(\mathbb{C}^\times)$ .

Описание группы  $\text{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q}))$  в случае, когда  $h^{2,0}(S) = 1$ , содержится в работе Ю.Г. Зархина [18].

### 1.3. Точки, общие в смысле Ходжа, непостоянное отображение периодов и бесконечная группа монодромии

**Лемма 1.** [19, п. 1.10]. Пусть  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  – гладкий проективный морфизм над гладкой связной комплексной кривой  $\mathcal{S}$ , слоями которого являются поверхности  $\mathcal{X}_s$  с  $h^{2,0}(\mathcal{X}_s) = 1$ . Если отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа  $R^2 f_* \mathbb{Q}$ , непостоянно, то существует такое счётное подмножество  $\Delta_{\text{countable}} \subset \mathcal{S}$ , что функция  $s \mapsto \text{rank } NS(\mathcal{X}_s)$  постоянна на множестве  $\mathcal{S} \setminus \Delta_{\text{countable}}$ .

По определению,  $s \in \mathcal{S} \setminus \Delta_{\text{countable}}$ , если и только если связная компонента единицы замыкания в  $\mathbb{Q}$ -топологии Зарисского образа представления монодромии  $\pi_1(\mathcal{S}, s) \rightarrow \text{GL}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$  является нормальной подгруппой группы Ходжа  $\text{Hg}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$  [20, §0, теорема о нормальной подгруппе]. Такие точки  $s$  называются общими в смысле Ходжа.

Лемма 1 позволяет заменять выражение ”точка, общая в смысле Ходжа” на выражение ”общая геометрическая точка”, где ”общность” точки означает ее принадлежность множеству  $\mathcal{S} \setminus \Delta_{\text{countable}}$  для некоторого счётного подмножества  $\Delta_{\text{countable}} \hookrightarrow \mathcal{S}$ .

**Предложение 1.** [20, §1, предложение 1.2]. Пусть  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  – гладкое проективное семейство поверхностей с  $h^{2,0} = 1$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

а) отображение периодов голоморфной 2-формы не является отображением  $\mathcal{S}$  в точку (другими словами, отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа  $R^2 f_* \mathbb{Q}$ , непостоянно);

б) образ представления монодромии  $\pi_1(\mathcal{S}, s) \rightarrow \text{GL}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$  бесконечен.

Мы называем проективное семейство  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$  гладких поверхностей, удовлетворяющее условиям предложения 1, неизотривиальным. Если  $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$  – его компактификация, то семейство  $\bar{f} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$  также называется неизотривиальным.

## 2. Доказательство основной теоремы

### 2.1. Формулировка основной теоремы

**Теорема 1.** Пусть  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  ( $i = 1, 2$ ) – проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной

кривой  $C$ . Предположим, что дискриминантные локусы

$$\Delta_i = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\} \quad (i = 1, 2)$$

не пересекаются,  $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$ ,  $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$  для любого гладкого слоя  $X_{ks}$ , причём выполнены следующие условия:

(i) любой вырожденный слой  $X_{i\delta} \subset X_i$  является объединением гладких неприводимых поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и геометрическим родом 0 (случай сильного вырождения);

(ii) замыкание образа монодромии  $\pi_1(C \setminus \Delta_i, s) \rightarrow \text{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$  в топологии Зариского является связной  $\mathbb{Q}$ -группой;

(iii) многообразия  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ), кривая  $C$  и структурные морфизмы  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  определены над некоторым конечнопорожденным подполем  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

Если для общих геометрических слоев  $X_{1s}$  и  $X_{2s}$  выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (a)  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s})$  является нечетным числом,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ;
- (b) кольцо  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$  – мнимое квадратичное поле,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4$ ,  
 $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$  – вполне вещественное поле или  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ;
- (c)  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4$ ,  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$ ,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ,

то для расслоенного произведения  $X_1 \times_C X_2$  верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного  $k$ -многообразия  $X_0$  с условием  $X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{\sim} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство  $H_{\text{ét}}^2(X_0 \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$  порождается классами дивизоров.

## 2.2. Морфизмы трансцендентных частей и представления монодромии

Положим  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ,  $C' = C \setminus \Delta \xrightarrow{j} C$ ,  $\pi'_i = \pi_i|_{\pi_i^{-1}(C')}$ :  $\pi_i^{-1}(C') \stackrel{\text{def}}{=} X'_i \rightarrow C'$ ,  $\pi : X_1 \times_C X_2 \rightarrow C$  – структурный морфизм расслоенного произведения,  $\pi' = \pi|_{\pi^{-1}(C')}$ :  $\pi^{-1}(C') \stackrel{\text{def}}{=} X' \rightarrow C'$ .

Всюду в дальнейшем  $G_i^{(2)}$  – замыкание в  $\mathbb{Q}$ -топологии Зариского образа представления монодромии  $\pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$ .

**Лемма 2.** При выполнении условий теоремы 1 для общих геометрических слоёв  $X_{1s}$ ,  $X_{2s}$  имеем:

$$\text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

Эта лемма доказана в [19, п. 2.3] для случая (а); в [5, лемма 2] для случая (b); в [6, п. 1.4] для случая (с).

### 2.3. Рациональные когомологии степени 2 и группы Нерона–Севери

Из леммы 2 легко получается следующий результат:

**Лемма 3.** [19, п. 2.8]. *Имеем:*  $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ ,  $H^2(X, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ .

Кроме того, согласно сильной теореме Лефшеца  $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \smile \text{cl}_{X_k}(H_k)$ , где  $H_k$  – гиперплоское сечение многообразия  $X_k$ . Поэтому из леммы 3 следует, что пространство  $H^4(X_k, \mathbb{Q})$  порождается алгебраическими классами когомологий.

### 2.4. Доказательство основной теоремы

Пусть

$$f : Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$$

– нормализация схемы  $\pi^{-1}(\Delta)$ . Тогда  $Z$  – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора  $\pi^{-1}(\Delta)$ . Поскольку  $f : Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$  – разрешение особенностей замкнутой подсхемы  $i_{\Delta} : \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$ , то имеется точная последовательность смешанных  $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [21, следствие (8.2.8)]:

$$H^2(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_{\Delta}f)_*} H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X', \mathbb{Q}),$$

где  $(i_{\Delta}f)_*$  – морфизм бистепени  $(1, 1)$  смешанных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker} [H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X', \mathbb{Q})].$$

Действуя по алгоритму п. 2.8 в [19], легко проверить, что имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* \text{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0,$$

в которой пространство  $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$  порождается образами алгебраических классов на  $X$ . Значит, для  $X$  верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

С другой стороны, поскольку пространство  $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$  порождается образами алгебраических классов на  $X$ , то из точности последовательности рациональных структур Ходжа [19, формула (2.16)]

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

следует, что

$$\text{Hg}(H^4(X, \mathbb{Q})) = \text{Hg}((i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}))$$

в силу тривиальности действия окружности  $U^1$  на алгебраических классах когомологий типа  $(2, 2)$ , поэтому согласно [3, лемма В.53] имеем

$$\begin{aligned} \text{MT}(H^4(X, \mathbb{Q})) &= G_m \cdot \text{Hg}(H^4(X, \mathbb{Q})) = G_m \cdot \text{Hg}((i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q})) = \\ &= \text{MT}((i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Значит, достаточно доказать гипотезу Мамфорда–Тэйта для когомологий степени 2 многообразия  $Z$ , являющегося несвязным объединением произведений вида

$S \times T$  или  $T \times S$ , где  $S$  – гладкая проективная поверхность с геометрическим родом 0,  $T$  – гладкая регулярная поверхность с геометрическим родом 1.

Заметим, что в силу формулы Кюннета  $H^2(S \times T, \mathbb{Q}) = H^2(S, \mathbb{Q}) \oplus H^2(T, \mathbb{Q})$ , потому что  $H^1(T, \mathbb{Q}) = 0$ .

С другой стороны,  $p_g(S) = 0$ , поэтому  $H^2(S, \mathbb{Q})$  порождается классами дивизоров. Значит, гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий четной степени сводится к гипотезе Мамфорда–Тэйта для поверхности  $T$ , а этот случай следует из результатов Моонена [16, теорема 9.3].

Наконец, хорошо известно, что из гипотезы Мамфорда–Тэйта для когомологий  $X_0$  чётной степени следует эквивалентность доказанной выше гипотезы Ходжа для  $X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2 = X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  и гипотезы Тэйта для  $X_0$  (с учётом леммы 3).

## 2.5. Следствие из основной теоремы

**Следствие 1.** Пусть  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  ( $i = 1, 2$ ) – проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой  $C$ . Предположим, что дискриминантные локусы

$$\Delta_i = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\} \quad (i = 1, 2)$$

не пересекаются,  $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$ ,  $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$  для любого гладкого слоя  $X_{ks}$ , причём выполнены следующие условия:

(i) для любой точки  $\delta \in \Delta_i$  и преобразования Пикара–Лефшеца

$$\gamma \in \text{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q})),$$

ассоциированного с гладкой частью  $\pi'_i : X'_i \rightarrow C \setminus \Delta_i$  морфизма  $\pi_i$  и с обходом вокруг точки  $\delta \in C$ , имеем неравенство  $(\log(\gamma))^2 \neq 0$ ;

(ii) многообразия  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ), кривая  $C$  и структурные морфизмы  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  определены над некоторым конечнопорожденным подполем  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

Если для общих геометрических слоев  $X_{1s}$  и  $X_{2s}$  выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (a)  $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s})$  является нечетным числом,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ;
- (b) кольцо  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$  – мнимое квадратичное поле,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4$ ,  
 $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$  – вполне вещественное поле или  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ;
- (c)  $[b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq 4, \text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}]$ ,  
 $b_2(X_{1s}) - \text{rank NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \text{rank NS}(X_{2s})$ ,

то для расслоенного произведения  $X_1 \times_C X_2$  верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного  $k$ -многообразия  $X_0$  с условием  $X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{\sim} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство  $H_{\text{ét}}^2(X_0 \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$  порождается классами дивизоров.

*Доказательство.* Пусть  $D^*$  – проколотый диск на  $C$  с центром  $\delta \in \Delta_i$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(D^*, s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  действует на когомологиях общего слоя  $X_{is}$ ,  $s \in D^*$ .

Обозначим через  $\gamma \in \text{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$  образ образующей группы  $\pi_1(D^*, s)$ , называемый *преобразованием Пикара–Лефшеца* или *локальным преобразованием монодромии*.

По условию следствия преобразование Пикара–Лефшеца  $\gamma$  удовлетворяет условию  $N^2 \neq 0$ , где  $N = \log(\gamma)$ . Это свойство сохраняется при переходе к подходящей гладкой проективной модели схемы  $X_i \times_C \tilde{C}$  над  $\tilde{C}$ , где  $\tilde{C} \rightarrow C$  – произвольное определённое над  $k$  разветвлённое накрытие кривой  $C$ . Действительно, можно считать, что отображение  $\tilde{C} \rightarrow C$  индуцирует отображение проколотых дисков  $\tilde{D}^* \rightarrow D^*$ , задаваемое формулой  $t = \tau^n$  в локальных координатах  $t$  и  $\tau$  на  $C$  и  $\tilde{C}$  соответственно (так, что точка  $\delta$  задается уравнением  $t = 0$ ). Морфизм  $\tilde{D}^* \rightarrow D^*$  не разветвлён, имеет степень  $n$  и определяет вложение  $\pi_1(\tilde{D}^*, \tilde{s}) \hookrightarrow \pi_1(D^*, s)$ , поэтому  $\tilde{\gamma} = \gamma^n$ . Остаётся заметить, что  $\log(\gamma^n) = n \log(\gamma)$ , так что  $(\log(\tilde{\gamma}))^2 \neq 0$ .

Используя в случае необходимости такую замену базы  $\tilde{C} \rightarrow C$ , мы можем считать, что выполнено условие (ii) теоремы 1.

Проверим, что в рассматриваемом случае можно считать выполненным условие (i) теоремы 1.

Действительно, в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [22, с. 53–54] мы можем считать, что все вырожденные слои морфизма  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  являются объединениями гладких неприводимых поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

Пусть  $X_{i\delta} = V_1 + \dots + V_n$ , где  $V_j$  – неприводимая компонента дивизора  $X_{i\delta}$ . Тогда по теореме Вик. С. Куликова [23, теорема 2.7] имеем:

$$p_g(X_{is}) = \sum_{j=1}^n p_g(V_j) + \frac{1}{2} \text{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_{i\delta})), \quad (2.1)$$

где в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} p_g(X_{is}) &\stackrel{\text{def}}{=} h^{2,0}(X_{is}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X_{is}, \Omega_{X_{is}}^2) = 1, \\ p_g(V_j) &\stackrel{\text{def}}{=} h^{2,0}(V_j) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(V_j, \Omega_{V_j}^2), \\ \text{ckh}^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \text{Coker} \left( \bigoplus_i H^1(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) \right), \\ h^2(\Pi(X_{i\delta})) &\stackrel{\text{def}}{=} \dim H^2(\Pi(X_{i\delta})), \end{aligned}$$

$\Pi(X_{i\delta})$  – полиэдр, ассоциированный с вырождением  $X_{i\delta} = V_1 + \dots + V_n$ . Кроме того,  $N^2 = (\log(\gamma))^2 = 0$  тогда и только тогда, когда  $h^2(\Pi(X_{i\delta})) = 0$  [23, теорема 2.7, (a)].

В нашем случае  $N^2 \neq 0$ , поэтому  $h^2(\Pi(X_{i\delta})) \neq 0$ . В силу формулы (2.1) и равенства  $p_g(X_{is}) = 1$  имеем равенства  $p_g(V_j) = 0$  для всех  $j$ . Значит, выполнено условие (i) теоремы 1.

Остаётся заметить, что если  $W \rightarrow V$  – сюръективный  $k$ -морфизм гладких проективных  $k$ -многообразий, то из гипотезы Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени многообразия  $W$  следует гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий



чётной степени многообразия  $V$  [24, следствие 4.4]. Это доказывает следствие 1, потому что из гипотезы Мамфорда–Тэйта для  $X_0$  следует эквивалентность доказанной выше гипотезы Ходжа для  $X_1 \times_C X_2 = X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  и гипотезы Тэйта для  $X_0$ .  $\square$

**Замечание 1.** Предположим, что общий слой  $X_{k\eta}$  морфизма  $\pi_k : X_k \rightarrow C$  ( $k = 1, 2$ ) имеет размерность Кодаиры  $\kappa(X_{k\eta}) = 2$  (другими словами, является поверхностью основного типа) и род кривой  $C$  больше 1. Тогда для расслоенного произведения  $X = X_1 \times_C X_2$  имеем в силу теоремы Каваматы [25, теорема 2] и теоремы Биркара [26, теорема 1.3]:

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_{1\eta} \times_{\kappa(\eta)} X_{2\eta}) + \kappa(C) \geq \kappa(X_{1\eta}) + \kappa(X_{2\eta}) + \kappa(C) = 5,$$

так что в рассматриваемом случае многообразие  $X$  является многообразием основного типа.

## Список литературы

- [1] Hodge W. V. D., “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, **1**, 1952, 182–192.
- [2] Танкеев С. Г., “Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 155–170; English transl.: Tankeev S. G., “Cycles on simple abelian varieties of prime dimension”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **20**:1 (1983), 157–171.
- [3] Gordon B. B., “A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties”, Appendix in: Lewis J. D., *A survey of the Hodge conjecture. 2 ed.*, CRM Monograph Series, **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, 297–356.
- [4] Никольская О. В., “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств К3 поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164; English transl.: Nikolskaya O. V., “On algebraic cycles on a fibre product of families of K3 surfaces”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 143–162.
- [5] Никольская О. В., “О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:2 (2014), 123–130; English transl.: Nikolskaya O. V., “On the geometry of a smooth model of a fibre product of families of K3 surfaces”, *Sbornik: Mathematics*, **205**:2 (2014), 269–276.
- [6] Никольская О. В., “Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств К3 поверхностей”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 738–746; English transl.: Nikolskaya O. V., “On algebraic cohomology classes on a smooth model of a fiber product of families of K3 surfaces”, *Math. Notes*, **96**:5 (2014), 745–752.
- [7] Mumford D., “Families of abelian varieties”, *Proc. of Symposium in Pure Math. AMS*, **IX** (1966), 347–351.
- [8] Serre J.-P., “Representations l-adiques”, *Algebraic number theory*, Papers contributed for the International Symposium, Kyoto, 1976, ed. S. Iyanaga, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo, 1977, 177–193.
- [9] Танкеев С. Г., “Поверхности типа К3 над числовыми полями и гипотеза Мамфорда–Тэйта. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:3 (1995), 179–206; English transl.: Tankeev S. G., “Surfaces of K3 type over number fields and the Mumford-Tate conjecture. II”, *Russian Akad. Sci. Izv. Math.*, **59**:3 (1995), 619–646.
- [10] Танкеев С. Г., “Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности над числовыми полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:6 (1987), 1214–1227; English transl.: Tankeev S. G., “Cycles on simple abelian varieties of prime dimension over number fields”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **31**:3 (1988), 527–540.

- [11] Pink R., “ $l$ -adic algebraic monodromy group cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture”, *J. reine. angew. Math.*, **495** (1998), 187–237.
  - [12] Tate J., “Algebraic cycles and poles of zeta functions”, *Arithmetical Algebraic Geometry*, Proc. Conf. Purdue Univ., 1963, Harper and Row, New York, 1965, 93–110.
  - [13] Tate J., “Endomorphisms of abelian varieties over finite fields”, *Invent. Math.*, **2** (1966), 134–144.
  - [14] Faltings G., “Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern”, *Invent. Math.*, **73:3** (1983), 349–366.
  - [15] Танкеев С. Г., “О циклах на абелевых многообразиях простой размерности над конечными и числовыми полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47:2** (1983), 356–365; English transl.: Tankeev S. G., “On cycles on abelian varieties of prime dimension over finite and number fields”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **22:2** (1984), 329–337.
  - [16] Moonen B., “On the Tate and Mumford-Tate conjectures in codimension one for varieties with  $h^{2,0} = 1$ ”, *Duke Math. J.*, **166:4** (2017), 739–799.
  - [17] Pignatelli R., “Some (big) irreducible components of the moduli space of minimal surfaces of general type with  $p_g = q = 1$  and  $K^2 = 4$ ”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **20:3** (2009), 207–226.
  - [18] Zarhin Yu. G., “Hodge groups of  $K3$  surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **341** (1983), 193–220.
  - [19] Никольская О. В., “Об алгебраических циклах на расслоенных произведениях неизотривиальных семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:4** (2016), 440–465; [Nikol’skaya O.V., “On algebraic cycles on fibre products of non-isotrivial families of regular surfaces with geometric genus 1”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **23:4** (2016), 440–465, (in Russian).]
  - [20] Мустафин Г. А., “Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49:5** (1985), 948–978; English transl.: Mustafin G. A., “Families of algebraic varieties and invariant cycles”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **27:2** (1986), 251–278.
  - [21] Deligne P., “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44** (1974), 5–77.
  - [22] Kempf G. et al., *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, **339**, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1973.
  - [23] Куликов Вик. С., “Вырождения  $K3$ -поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41:5** (1977), 1008–1042; English transl.: Kulikov Vic. S., “Degenerations of  $K3$  surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR–Izv.*, **11:5** (1977), 957–988.
  - [24] Танкеев С. Г., “Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66:2** (2002), 173–204; English transl.: Tankeev S. G., “The arithmetic and geometry of a generic hypersurface section”, *Izv. Math.*, **66:2** (2002), 393–424.
  - [25] Kawamata Y., “Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves”, *Invent. Math.*, **66:1** (1982), 57–71.
  - [26] Birkar C., “Iitaka conjecture  $C_{n,m}$  in dimension six”, *Compositio Mathematica*, **2009:6** (1979), 1442–1446.
-

**Oreshkina (Nikol'skaya) O. V.**, "On the Hodge, Tate and Mumford-Tate Conjectures for Fibre Products of Families of Regular Surfaces with Geometric Genus 1", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:3** (2018), 312–322.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2018-3-312-322

**Abstract.** The Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures are proved for the fibre product of two non-isotrivial 1-parameter families of regular surfaces with geometric genus 1 under some conditions on degenerated fibres, the ranks of the Néron - Severi groups of generic geometric fibres and representations of Hodge groups in transcendental parts of rational cohomology.

Let  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  ( $i = 1, 2$ ) be a projective non-isotrivial family (possibly with degeneracies) over a smooth projective curve  $C$ . Assume that the discriminant loci  $\Delta_i = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\}$  ( $i = 1, 2$ ) are disjoint,  $h^{2,0}(X_{k_s}) = 1$ ,  $h^{1,0}(X_{k_s}) = 0$  for any smooth fibre  $X_{k_s}$ , and the following conditions hold:

(i) for any point  $\delta \in \Delta_i$  and the Picard-Lefschetz transformation  $\gamma \in \text{GL}(H^2(X_{i_s}, \mathbb{Q}))$ , associated with a smooth part  $\pi'_i : X'_i \rightarrow C \setminus \Delta_i$  of the morphism  $\pi_i$  and with a loop around the point  $\delta \in C$ , we have  $(\log(\gamma))^2 \neq 0$ ;

(ii) the variety  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ), the curve  $C$  and the structure morphisms  $\pi_i : X_i \rightarrow C$  are defined over a finitely generated subfield  $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

If for generic geometric fibres  $X_{1_s}$  and  $X_{2_s}$  at least one of the following conditions holds:

(a)  $b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s})$  is an odd prime number,  $b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s}) \neq b_2(X_{2_s}) - \text{rank NS}(X_{2_s})$ ;

(b) the ring  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1_s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1_s})^{\perp}$  is an imaginary quadratic field,  $b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s}) \neq 4$ ,  $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2_s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2_s})^{\perp}$  is a totally real field or  $b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s}) > b_2(X_{2_s}) - \text{rank NS}(X_{2_s})$ ;

(c)  $[b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s}) \neq 4, \text{End}_{\text{Hg}(X_{1_s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1_s})^{\perp} = \mathbb{Q}; \quad b_2(X_{1_s}) - \text{rank NS}(X_{1_s}) \neq b_2(X_{2_s}) - \text{rank NS}(X_{2_s})$ ,

then for the fibre product  $X_1 \times_C X_2$  the Hodge conjecture is true, for any smooth projective  $k$ -variety  $X_0$  with the condition  $X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{\sim} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$  the Tate conjecture on algebraic cycles and the Mumford-Tate conjecture for cohomology of even degree are true.

**Keywords:** Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures, fibre product, Mumford-Tate group,  $l$ -adic representation

**On the authors:**

Olga V. Oreshkina (Nikol'skaya), [orcid.org/0000-0002-6742-8453](https://orcid.org/0000-0002-6742-8453), PhD,  
 A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University,  
 87 Gorky str., Vladimir, 600000, Russia, e-mail: [papichonok@yandex.ru](mailto:papichonok@yandex.ru).

**Acknowledgments:**

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Grant No 16-31-00266.