Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **3** (2009) 22–28

УДК 531.38

О спектральной задаче, возникающей в механике манипуляционных роботов

Войтицкий В.И.*, Злобина М.Ю.**, Кубышкин Е.П.***

**Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского*
***ОАО "Славнефть-ЯНОС"*
****Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

e-mail: voytitsky@gmail.ru, garnim@mail.ru, kubysh@uniyar.ac.ru

получена 20 апреля 2009

Ключевые слова: спектральная краевая задача, собственные функции, собственные значения, характеристическое уравнение

В полном объеме решена спектральная краевая задача специального вида, содержащая спектральный параметр в краевых условиях. Получено характеристическое уравнение для определения точек спектра, выведено энергетическое скалярное произведение, построена ортонормированная система собственных функций.

При изучении динамики механической системы, состоящей из твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня постоянного сечения с грузом на конце, являющейся механической моделью манипуляционного робота, переносящего груз, возникает следующая спектральная краевая задача:

$$v^{\mathrm{iv}}(x) - \frac{1}{J_0}(x + a_1)(a_1 v'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v''(1) = \lambda[(J_{10} + a_2^2 m)v'(1) + a_2 m v(1)] + \\ + \frac{1}{J_0}[J_{10} + a_2 m(1 + a_1 + a_2)](a_1 v'''(0) - v''(0)), \end{aligned} \tag{3}$$

$$-v'''(1) = \lambda m(v(1) + a_2 v'(1)) + \frac{m}{J_0}(1 + a_1 + a_2)(a_1 v'''(0) - v''(0)). \tag{4}$$

Здесь a_1, a_2, m, J_0, J_{10} — положительные параметры, имеющие конкретный физический смысл.

Ниже будем интересоваться характером спектра и свойствами собственных функций спектральной краевой задачи (1)-(4).

Запишем краевую задачу (1)-(4) в следующей матричной форме

$$\begin{pmatrix} v^{\mathrm{iv}}(x) \\ -v'''(1) \\ v''(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & a_2 m_2 \\ 0 & a_2 m_2 & J_2 + a_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{J_1}(a_1 v'''(0) - v''(0)) \begin{pmatrix} x + a_1 \\ m_2(1 + a_1 + a_2) \\ J_2 + a_2 m_2 (1 + a_1 + a_2) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$v(0) = v'(0) = 0.$$

Введём гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(0;1) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ с элементами $\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H}$ и действующие в $\mathcal{H}$ операторы

$$\mathcal{A}\widehat{v} = col(v^{\mathrm{iv}}, -v'''(1), v''(1)), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\widehat{v} \in \mathcal{H} :\ v(x) \in C^4[0;1],\ v(0) = v'(0) = 0\},$$

$$\mathcal{B}\widehat{v} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m & a_2 m \\ 0 & a_2 m & J_{10} + a_2^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \\ v'(1) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

Интегрируя по частям, замечаем, что

$$a_1 v'''(0) - v''(0) = -\left(\int_0^1 (a_1 + x) v^{\mathrm{iv}}(x) dx + (a_1 + 1)(-v'''(1)) + v''(1) \right) =$$

$$= -\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (6)$$

где $\widehat{f} = col(a_1 + x, a_1 + 1, 1) \in \mathcal{H}$. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} x + a_1 \\ m(1 + a_1 + a_2) \\ J_{10} + a_2 m (1 + a_1 + a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m & a_2 m \\ 0 & a_2 m & J_{10} + a_2^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + x \\ a_1 + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{B}\widehat{f}.$$

Таким образом, (5) может быть записана в виде

$$\mathcal{A}\widehat{v} + \frac{1}{J_0} \langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v} \rangle_{\mathcal{H}} \mathcal{B}\widehat{f} = \lambda \mathcal{B}\widehat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}). \quad (7)$$

Оператор $\mathcal{A}$ является симметричным и положительно определённым. Действительно, для $\widehat{v}, \widehat{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{u} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 v^{\mathrm{iv}}(x) u(x) dx - v'''(1) u(1) + v''(1) u'(1) = \int_0^1 v''(x) u''(x) dx =$$

$$= \int_0^1 v(x) u^{\mathrm{iv}}(x) dx - u'''(1) v(1) + u''(1) v'(1) = \langle \widehat{v}, \mathcal{A}\widehat{u} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Кроме того, для $\widehat{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 v''(x)^2 dx, \quad \langle \mathcal{A}\widehat{v}, \widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0, \tag{8}$$

т.е. оператор $\mathcal{A}$ положительный. Применяя теперь к (8) неравенство Фридрихса [1, с. 129], получим положительную определенность оператора $\mathcal{A}$. Расширяя его (по Фридрихсу) до самосопряженного положительно определенного оператора, получаем

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} : v(x) \in W^4(0;1),\ v(0) = v'(0) = 0\},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{\widehat{v} = col(v(x), v(1), v'(1)) \in \mathcal{H} : v(x) \in W^2(0;1),\ v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Согласно теоремам вложения Соболева [2] $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ компактно вложено в исходное пространство $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}^{-1}$ существует и является компактным в $\mathcal{H}$.

Оператор $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* > 0$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором в $\mathcal{H}$. Таким образом из (7) следует, что

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\widehat{v} + \frac{1}{J_0}\langle \widehat{f}, \mathcal{A}\widehat{v}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\widehat{v} \quad (\text{в } \mathcal{H}),$$
$$\mathcal{B}^{-1}\widehat{\eta} + \frac{1}{J_0}\langle \widehat{f}, \widehat{\eta}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \widehat{\eta} = \mathcal{A}\widehat{v} \in \mathcal{H}.$$

Очевидно, $\mathcal{P}_{\widehat{f}}\widehat{\eta} = \langle \widehat{f}, \widehat{\eta}\rangle_{\mathcal{H}}\widehat{f}$ является ортопроектором на одномерное подпространство $\mathrm{sp}\{\widehat{f}\}$, поэтому $\mathcal{P}_{\widehat{f}} = \mathcal{P}^*_{\widehat{f}} \geq 0$ ограничен в $\mathcal{H}$. Имеем задачу

$$\mathcal{C}\widehat{\eta} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\widehat{\eta} \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1} + \frac{1}{J_0}\mathcal{P}_{\widehat{f}}. \tag{9}$$

Здесь, очевидно, оператор $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* > 0$ ограничен и ограниченно обратим. На решениях задачи (9) имеем $\mathcal{C}\widehat{\eta} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, поэтому после замены получим

$$\mathcal{K}\widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{C}\mathcal{A}^{1/2}\widehat{\vartheta} = \lambda\widehat{\vartheta} \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \widehat{\vartheta} = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\eta} = \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}.$$

Оператор $\mathcal{K}^{-1}$ является положительным компактным самосопряжённым в $\mathcal{H}$. Согласно теореме Гильберта — Шмидта $\sigma(\mathcal{K}^{-1})$ состоит из изолированных конечнократных положительных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $+0$, а из соответствующих собственных элементов $\{\widehat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно составить ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Тогда спектр исходной спектральной задачи состоит из изолированных положительных собственных значений конечной кратности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, а система собственных элементов $\{\widehat{v}_k = \mathcal{A}^{-1/2}\widehat{\vartheta}_k \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Она образует ортонормированный базис в энергетическом пространстве оператора $\mathcal{A}$, при этом справедливы формулы ортогональности

$$\langle \widehat{v}_k, \widehat{v}_l\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}} = \langle \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_k, \mathcal{A}^{1/2}\widehat{v}_l\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widehat{\vartheta}_k, \widehat{\vartheta}_l\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}. \tag{10}$$

Для приложений важен конкретный вид скалярного произведения (10) в терминах функций $v_k(x)$ и характеристическое уравнение для определения λ_k. Приведем их вывод.

Пусть $v_k(x)$ и $v_l(x)$ — собственные функции спектральной краевой задачи (1)-(4), отвечающие собственным значениям λ_k и λ_l соответственно. Заменим в (1)-(4) выражение $a_1 v'''(0) - v''(0)$ интегральным выражением согласно (6). Подставив теперь в (1)-(4) $v_k(x)$ и λ_k, умножим (1) на $v_l(x)$ и проинтегрируем по отрезку [0,1]. В результате, используя формулу интегрирования по частям с учетом краевых условий (2)-(4), получим равенство

$$\int_0^1 v_k''(x)v_l''(x)dx = \lambda_k[(v_k, v_l) + mv_k(1)v_l(1) + (J_{10} + a_2^2 m)v_k'(1)v_l'(1) + a_2 m(v_k'(1)v_l(1)+$$
$$+v_k(1)v_l'(1)) - \frac{1}{J_0^*}((x + a_1, v_k)(x + a_1, v_l) + m(1 + a_1 + a_2)((x + a_1, v_k)v_l(1)+$$
$$+(x + a_1, v_l)v_k(1)) + (J_{10} + ma_2(1 + a_1 + a_2))((x + a_1, v_k)v_l'(1) + (x + a_1, v_l)v_k'(1))+$$
$$+m^2(1 + a_1 + a_2)^2 v_k(1)v_l(1) + (J_{10} + ma_2(1 + a_1 + a_2))^2 v_k'(1)v_l'(1)+$$
$$+m(J_{10} + ma_2(1 + a_1 + a_2))(1 + a_1 + a_2)(v_k(1)v_l'(1) + v_l(1)v_k'(1)))] =$$
$$= \lambda_k \langle v_k, v_l\rangle = \lambda_k \langle \widehat{v}_k, \widehat{v}_l\rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{A}}, \tag{11}$$

где

$$J_0^* = J_0 + \int_0^1 (x + a_1)^2 dx + m(1 + a_1 + a_2)^2 + J_{10}.$$

Поменяв $v_k(x)$ и $v_l(x)$ местами, получим равенство

$$\int_0^1 v_l''(x)v_k''(x)dx = \lambda_l \langle v_k, v_l\rangle. \tag{12}$$

При $\lambda_k \neq \lambda_l$, вычтя из (11) выражение (12), имеем $\langle v_k, v_l\rangle = 0$. Таким образом, выражение (11) определяет искомое скалярное произведение.

Остановимся на выводе характеристического уравнения для определения λ_k. Положим в уравнении (1) $\lambda = \beta^4$, а выражение $a_1 v'''(0) - v''(0)$ будем рассматривать как параметр. Тогда общее решение (1) запишется в виде

$$v(x) = A\,\mathrm{ch}(\beta x) + B\,\mathrm{sh}(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) - \frac{1}{J_0\beta^4}(x + a_1)(a_1 v'''(0) - v''(0)),$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Отсюда получаем

$$v''(0) = \beta^2(A - C), \quad v'''(0) = \beta^3(B - D),$$

что в результате дает

$$v(x) = A\,\mathrm{ch}(\beta x) + B\,\mathrm{sh}(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)-$$
$$-\frac{1}{J_0\beta^2}(x + a_1)(a_1\beta(B - D) - A + C). \tag{13}$$

Подставляя теперь (13) в краевые условия (2)-(4), получаем следующую систему линейных уравнений для определения A, B, C, D

$$\begin{cases}
(1+\dfrac{a_1}{J_0\beta^2})A-\dfrac{a_1^2}{J_0\beta}B+(1-\dfrac{a_1}{J_0\beta^2})C+\dfrac{a_1^2}{J_0\beta}D & = \ 0,\\
\dfrac{1}{J_0\beta^2}A+(\beta-\dfrac{a_1}{J_0\beta})B-\dfrac{1}{J_0\beta^2}C+(\beta+\dfrac{a_1}{J_0\beta})D & = \ 0,\\
(\operatorname{ch}\beta(1+\beta^2 a_2 m)+\beta^3\operatorname{sh}\beta(J_{10}+a_2^2 m))A+ & \\
+(\operatorname{sh}\beta(1+\beta^2 a_2 m)+\beta^3\operatorname{ch}\beta(J_{10}+a_2^2 m))B+ & \\
+(\cos\beta(-1+\beta^2 a_2 m)-\beta^3\sin\beta(J_{10}+a_2^2 m))C+ & \\
+(\sin\beta(-1+\beta^2 a_2 m)+\beta^3\cos\beta(J_{10}+a_2^2 m))D & = \ 0,\\
(\operatorname{sh}\beta(1+\beta^2 a_2 m)+\beta m\operatorname{ch}\beta)A+ & \\
+(\operatorname{ch}\beta(1+\beta^2 a_2 m)+\beta m\operatorname{sh}\beta)B+ & \\
+(\sin\beta(1-\beta^2 a_2 m)+\beta m\cos\beta)C+ & \\
+(\cos\beta(-1+\beta^2 a_2 m)+\beta m\sin\beta)D & = \ 0.
\end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Этот факт и дает характеристическое уравнение

$$\begin{gathered}
J_0\beta^{-4}-J_0J_{10}m+(((J_0-2(J_{10}+(a_2^2-a_1^2)m))\beta^{-4}+J_0J_{10}m)\cos\beta+\\
+(\beta^{-7}+2a_1m\beta^{-5}+(m(J_{10}-J_0)+a_1(a_1+2J_{10}+2a_2^2m))\beta^{-3}+\\
+(J_0J_{10}+m(a_2^2J_0+a_1^2J_{10}))\beta^{-1})\sin\beta)\operatorname{ch}\beta+\\
+((-\beta^{-7}+2a_1m\beta^{-5}+(m(J_0-J_{10})+a_1(a_1-2J_{10}-2a_2^2m))\beta^{-3}+\\
+(J_0J_{10}+m(a_2^2J_0+a_1^2J_{10}))\beta^{-1})\cos\beta+\\
+2((a_1+m)\beta^{-6}+a_1^2(J_{10}+a_2^2m)\beta^{-3}+a_1J_{10}m\beta^{-2})\sin\beta)\operatorname{sh}\beta=0,
\end{gathered}$$

положительные корни которого $\beta_n > 0$ однократны и определяют собственные значения $\lambda_n = \beta_n^4$ спектральной краевой задачи (1)-(4).

При этом нормированные собственные функции будут иметь следующий явный вид

$$v_n(x)=\frac{v_n^*(x)}{\langle v_n^*(x), v_n^*(x)\rangle^{1/2}},$$

где

$$\begin{gathered}
v_n^*(x)=A_n\operatorname{ch}(\beta_n x)+B_n\operatorname{sh}(\beta_n x)+C_n\cos(\beta_n x)+D_n\sin(\beta_n x)-\\
-\frac{1}{J_0\beta^2}(x+a_1)(a_1\beta(B_n-D_n)-A_n+C_n),
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \beta_n\big([2a_1\beta_n(m_2 + a_1(1-\beta_n^2 m_2 a_2)) - J_1\beta_n^3 m_2]\sin\beta_n + J_1\beta_n^3 m_2 \operatorname{sh}\beta_n + \\
&\quad + [2a_1(-1+\beta_n^2 m_2(a_1+a_2)) - J_1\beta_n^2(-1+\beta_n^2 m_2 a_2)]\cos\beta_n + J_1\beta_n^2(1+\beta_n^2 m_2 a_2)\operatorname{ch}\beta_n\big),\\
B_n &= [2\beta_n m_2 + (1+\beta_n^2 m_2 a_2)(2a_1\beta_n + J_1\beta_n^3)]\sin\beta_n - \beta_n^3 J_1(1+a_2\beta_n^2 m_2)\operatorname{sh}\beta_n + \\
&\quad + [2\beta_n^2 m_2(a_1+a_2) - 2 + \beta_n^4 J_1 m_2]\cos\beta_n - \beta_n^4 J_1 m_2 \operatorname{ch}\beta_n,\\
C_n &= -\beta_n\big(-J_1\beta_n^3 m_2\sin\beta_n + [2a_1\beta_n(m_2 + a_1(1+\beta_n^2 m_2 a_2)) + J_1\beta_n^3 m_2]\operatorname{sh}\beta_n + \\
&\quad + J_1\beta_n^2(1-\beta_n^2 m_2 a_2)\cos\beta_n + [2a_1(1+\beta_n^2 m_2(a_1+a_2)) + J_1\beta_n^2(1+\beta_n^2 m_2 a_2)]\operatorname{ch}\beta_n\big),\\
D_n &= -\big(\beta_n^3 J_1(1-a_2\beta_n^2 m_2)\sin\beta_n + [2\beta_n m_2 + (1+\beta_n^2 m_2 a_2)(2a_1\beta_n - J_1\beta_n^3)]\operatorname{sh}\beta_n + \\
&\quad + \beta_n^4 J_1 m_2\cos\beta_n + [2\beta_n^2 m_2(a_1+a_2) + 2 - \beta_n^4 J_1 m_2]\operatorname{ch}\beta_n\big).
\end{aligned}
$$

На рис. 1 приведены графики первых пяти собственных функций краевой задачи (1)-(4) для следующих значений параметров, взятых из одной прикладной задачи [3]: $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,05$; $J_0 = 0,3$; $J_{10} = 0,009375$; $m = 5,5224$. Соответствующие собственные значения: $\lambda_1 = 11,5811$; $\lambda_2 = 358,565$; $\lambda_3 = 3591,6292$; $\lambda_4 = 14483,1996$; $\lambda_5 = 39953,4574$.

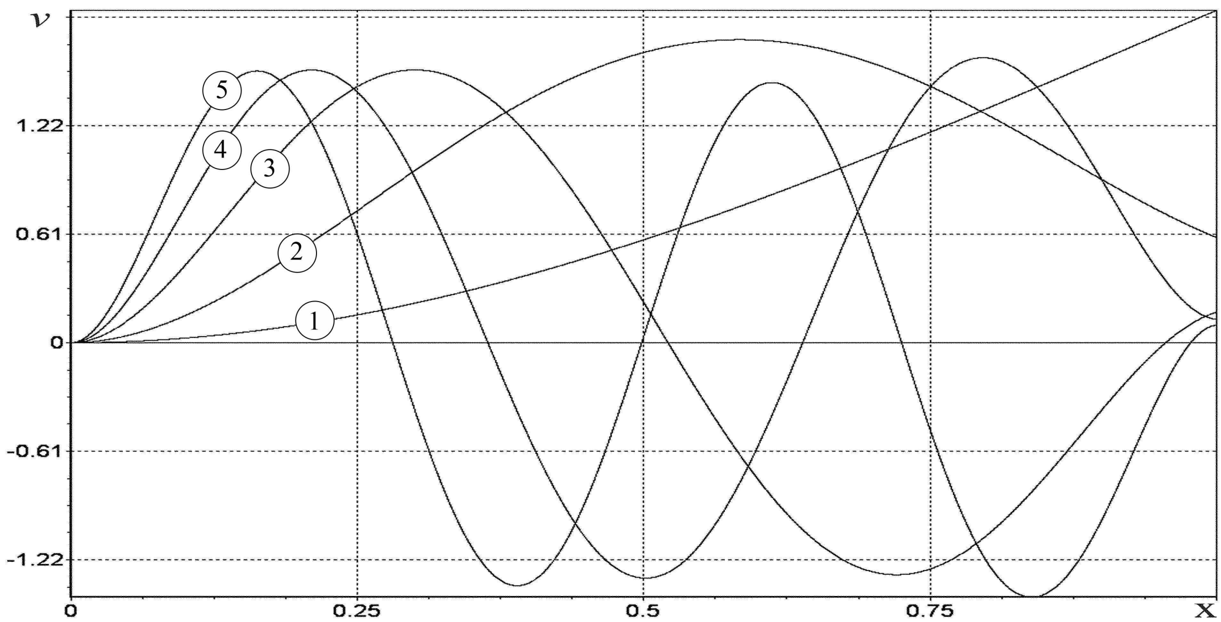

Рис. 1

Список литературы

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

3. Гарнихина М.Ю., Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с наследственно вязкоупругим стержнем //Механика твердого тела (Известия АН). 2006. №5. С. 29 – 41.

About the spectral problem arising from robotic manipulator mechanics

Voytitsky V.I., Zlobina M.Y., Kubyshkin Y.P.

Keywords: spectral boundary problem, eigenfunctions, eigenvalues, characteristic equation

A spectral boundary problem of special type containing a spectral parameter in the boundary condition is completely solved in this paper. The characteristic equation for spectrum points determination is obtained, the energy innerproduct is derived, and the orthonormal system of the eigenfunctions is built up.

Сведения об авторах:

Войтицкий Виктор Иванович,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (г. Симферополь), ассистент;

Злобина Мария Юрьевна,
ОАО "СЛАВНЕФТЬ-ЯНОС", ведущий специалист-консультант BI,
аспирант ЯрГУ им. П.Г. Демидова;

Кубышкин Евгений Павлович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор