Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 30–51

УДК 517.9

Размерностные характеристики диффузионного хаоса

Глызин С. Д.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

получена 20 декабря 2012

Ключевые слова: диффузионный хаос, аттрактор, ляпуновская размерность, уравнение Гинзбурга – Ландау, бифуркация, сценарий Ландау – Селла.

Рассматривается феномен многомодового диффузионного хаоса, одним из признаков которого является увеличение ляпуновской размерности аттрактора распределенных эволюционных динамических систем при уменьшении коэффициента диффузии. Для ряда примеров выполнен обширный численный эксперимент, в котором проиллюстрирован этот эффект.

1. Введение

Системы «реакция – диффузия» представляют собой важный класс нелинейных динамических систем, в которых пространственно неоднородные колебательные режимы обусловлены наличием диффузионной составляющей. Такие системы часто встречаются в физических и биохимических приложениях, а также в задачах популяционной биологии.

Рассмотрим параболическую краевую задачу вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \Delta u + F(u), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа; $u \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$; $D = \mathrm{diag}\,\{d_1, \ldots, d_k\}$, $d_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$; $\nu > 0$ – параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$; $F(u)$ – гладкая вектор-функция. Эту систему принято называть системой реакция-диффузия, она служит математической моделью многих биофизических и экологических процессов (см., например, [1–3]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.B37.21.0457.

Под термином «диффузионный хаос» будем понимать странный аттрактор краевой задачи (1), нетривиально зависящий от пространственной переменной. В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос. Первый из них может возникать в системе (1) при «средних» значениях параметра ν, а второй — при $\nu \to 0$.

Интерес к маломодовому хаосу инициирован известными работами Э. Лоренца [4], а также Д. Рюэля и Ф. Такенса [5], а затем Й. Курамото [6], в которых был поставлен общий вопрос: можно ли связать стохастические режимы в распределенной системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей упрощенную модель исходной системы. В ряде случаев это действительно удается сделать. Для примера сошлемся на известное уравнение Гинзбурга — Ландау, для которого сформулированный вопрос был решен в работе [2] для некоторых типов краевых условий. Точнее говоря, в [2] численными методами был обнаружен странный аттрактор в трехмерной системе, получающейся из уравнения Гинзбурга — Ландау на отрезке с граничными условиями Неймана в результате двухмодовой галеркинской аппроксимации. Другой пример — анализ странных аттракторов простейших конечно-разностных аппроксимаций краевых задач вида (1) на отрезке (см. [7]).

Многомодовый диффузионный хаос сначала был теоретически описан в статье [8], посвященной исследованию динамики нелинейных осцилляторов, слабо связанных через диффузию, его численный анализ проделан в работах автора [9,10], из результатов которых вытекает важное следствие: если в системе (1) на отрезке при $\nu \to 0$ наблюдается диффузионный хаос, то его ляпуновская размерность неограниченно растет. Отметим также численный анализ уравнения Гинзбурга – Ландау, выполненный в [11] для периодических краевых условий.

Для уточнения понятия многомодового диффузионного хаоса воспользуемся формулировками из статьи [12]. Будем предполагать, что отвечающая системе (1) точечная модель, т. е. система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u), \tag{2}$$

имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u = u_0(t), \ \ du_0/dt \neq 0 \tag{3}$$

некоторого периода $T_0 > 0$. Понятно, что такая ситуация является типичной.

Нетрудно заметить, что цикл (3) сохраняется и в распределенной модели (1). Для выявления его свойств устойчивости линеаризуем на нем уравнение из (1) и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа. В результате приходим к системе

$$\dot{h} = [A_0(t) - zD]h, \tag{4}$$

где $A_0(t) = F'(u)|_{u=u_0(t)}$, параметр z принимает дискретные значения $\nu\lambda_k$, $k = 0, 1, \ldots$, а $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ – занумерованные в порядке возрастания собственные значения оператора $-\Delta$ с граничными условиями Неймана.

Всюду ниже для удобства будем считать параметр z в (4) непрерывно меняющимся на полуоси $z \geq 0$. Обозначим, далее, через $\mu_s = \mu_s(z)$, $s = 1, \ldots, k$, мультипликаторы системы (4) и положим

$$\alpha(z) = \max_{1 \leq s \leq k} \left\{ \frac{1}{T_0} \mathrm{Re}\, \ln \mu_s(z) \right\}. \tag{5}$$

Заметим, что всегда $\alpha(0) = 0$, так как при $z = 0$ система (4) (в силу предполагаемой экспоненциальной устойчивости цикла (3) в рамках точечной модели (2)) имеет простой единичный мультипликатор, которому отвечает решение Флоке $h = \dot{u}_0(t)$, а все остальные ее мультипликаторы лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1\}$.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение, аналог которого впервые появился в работе [13].

Определение 1. *Будем говорить, что параболическая краевая задача* (1) *является биологической или принадлежит классу B (имеет многомодовый диффузионный аттрактор), если выполняются следующие ограничения.*

а) *Соответствующая точечная модель* (2) *имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл* (3).

б) *Найдутся такие* $0 \leq z_1 < z_2$, *что функция* (5) *строго положительна на интервале* $z_1 < z < z_2$.

в) *При всех достаточно малых* $\nu > 0$ *динамическая система, порождаемая краевой задачей* (1) *в фазовом пространстве* $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^k)$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, *имеет хаотический аттрактор* A_ν, *ляпуновская размерность* $d_L(A_\nu)$ *которого стремится к* $+\infty$ *при* $\nu \to 0$.

Как уже отмечалось выше, условие а) типично для краевых задач вида (1), возникающих в различных биофизических и экологических приложениях (отсюда, собственно, и появился сам термин ”биологическая система”). Требование $\alpha(z) > 0$ при $z \in (z_1, z_2)$, фигурирующее в условии б), обеспечивает неустойчивость цикла (3) в рамках распределенной модели (1) при всех достаточно малых значениях параметра ν. Что же касается условия в), являющегося самым главным из всех трех, то оно гарантирует реализуемость при $\nu \to 0$ интересующего нас феномена многомодового диффузионного хаоса. В связи с этим уместно подчеркнуть, что термин “хаотический аттрактор” допускает различные интерпретации. Мы же для определенности будем придерживаться понятия хаоса, предложенного в [14]. Отметим, что упомянутую в условии в) ляпуновскую размерность $d_L(A_\nu)$ будем вычислять через характеристические показатели аттрактора A_ν по известной формуле Каплана – Йорке [15]. Опираясь на определение 1, нетрудно сформулировать концепцию диффузионного хаоса, которая заключается в следующем утверждении (см. [12]).

Гипотеза (о диффузионном хаосе). *Класс B параболических систем* (1) *не пуст.*

Приведенная гипотеза очевидным образом перекликается с известными гипотезами А.Н. Колмогорова о росте размерности аттракторов уравнений Навье – Стокса при увеличении числа Рейнольдса (см., например, [17]). Кроме того, прослеживается очевидная параллель между условием в) и сценарием развития турбулентности по Ландау – Селлу, математические аспекты которого изложены в [16, 18].

Достаточно ясно, что обоснование гипотезы о диффузионном хаосе возможно лишь с помощью численного анализа каких-либо конкретных параболических систем вида (1). В связи с этим в первой части работы рассмотрено уравнение Гинзбурга – Ландау на отрезке для двух различных значений параметров. Во второй части исследована система, моделирующая реакцию Белоусова, а в третьей части представлен расширенный численный эксперимент, выполненный для уравнения Клейна – Гордона, на основе которого в статье [18] иллюстрировалась реализуемость сценария Ландау – Селла.

2. Ляпуновская размерность разностных аппроксимаций уравнения Гинзбурга – Ландау

В данной части работы рассмотрим известное уравнение Гинзбурга – Ландау на отрезке $0 \le x \le 1$, а точнее говоря, будем численно анализировать соответствующую ему краевую задачу

$$w_t = \nu(1 - ic_1)w_{xx} + w - (1 + ic_2)|w|^2 w, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=1} = 0, \tag{6}$$

где $w = w(t, x)$ – комплекснозначная функция, ν, c_1, c_2 – положительные параметры. Убедимся, далее, что при выполнении условия

$$c_1 c_2 > 1 \tag{7}$$

указанная параболическая система принадлежит классу B. Проверка условий а), б) не вызывает затруднений. В самом деле, пространственно однородный (не зависящий от x) цикл задачи (6) задается равенством

$$w = \exp(-ic_2 t) \tag{8}$$

и является экспоненциально орбитально устойчивым в рамках соответствующей точечной модели. Что же касается устойчивости цикла (8) в рамках распределенной модели (6), то она определяется по следующему правилу. Сначала дополним уравнение из (6) комплексно сопряженным уравнением, а затем, считая w, $\overline{w}$ независимыми комплекснозначными функциями, выполним в получившейся системе замены $w = \exp(-ic_2 t)(1 + h_1)$, $\overline{w} = \exp(ic_2 t)(1 + h_2)$ и отбросим нелинейные по h_1, h_2 слагаемые. На этом пути приходим к линейной краевой задаче

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \nu(1 - ic_1)\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = \nu(1 + ic_1)\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - (1 - ic_2)(h_1 + h_2),$$
$$\left.\frac{\partial h_j}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial h_j}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad j = 1, 2,$$

к которой, в свою очередь, применяем метод Фурье по системе функций $\cos k\pi x$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В результате убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (8) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$-\begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} - k^2\pi^2\nu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{9}$$

И наконец, анализ матриц (9) с учетом условия (7) приводит к выводу, что цикл (8) устойчив (неустойчив) в рамках краевой задачи (6) при $\nu - \nu_* > 0\,(< 0)$, где

$$\nu_* = \frac{2(c_1 c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2)} > 0. \tag{10}$$

Проверку справедливости условия в) для краевой задачи (6) будем проводить посредством численного анализа при конкретных значениях параметров c_1, c_2.

Для описания соответствующего численного эксперимента введем в рассмотрение точки $x = (j - 1/2)/N$, $j = 1, 2, \ldots, N$, где N – произвольно фиксированное натуральное число, и заменим в (6) частную производную по x в указанных точках приближенными равенствами

$$w_{xx}(t, x)|_{x=(j-1/2)/N} \approx N^2\big(w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)\big), \;\; w_j(t) = w(t, x)|_{x=(j-1/2)/N}, \tag{11}$$

считая, что $w_0(t) = w_1(t)$, $w_{N+1}(t) = w_N(t)$. В результате для переменных $w_j(t)$ приходим к конечномерной модели вида

$$\dot{w}_j = \nu N^2(1 - ic_1)(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + w_j - (1 + ic_2)|w_j|^2 w_j, \;\; j = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Интересно отметить, что для системы (12) сохраняется унаследованная от краевой задачи (6) симметрия, состоящая в ее инвариантности относительно замены

$$w_j \to w_{N-j+1}, \;\; j = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Кроме того, эта система, как и исходная задача (6), допускает пространственно однородный или, точнее говоря, синхронный цикл

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_N = \exp(-ic_2 t). \tag{14}$$

Добавим еще, что цикл (14) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $\nu - \nu_*(N) > 0\,(< 0)$, где для критического значения $\nu_*(N)$ справедлива формула

$$\nu_*(N) = \frac{c_1 c_2 - 1}{2(1 + c_1^2)N^2 \sin^2\big(\pi/(2N)\big)}\,, \tag{15}$$

причем очевидным образом $\nu_*(N) \to \nu_*$ при $N \to \infty$. Обратимся теперь непосредственно к результатам компьютерного анализа системы (12).

1. Случай $c_1 = 0.5$, $c_2 = 8$

В статье [10] уже рассматривалась краевая задача (6) при значениях параметров $c_1 = 0.5$, $c_2 = 8$, однако ограниченность вычислительных средств не позволила в этой работе провести более масштабный вычислительный эксперимент. В данном разделе приводятся результаты существенно более подробных вычислений, восполняющие этот недостаток.

Опишем сначала простейшие фазовые перестройки, происходящие с системой (6) при уменьшении коэффициента диффузии ν. Напомним, что синхронный цикл (14) системы (11) глобально экспоненциально орбитально устойчив при $\nu > \nu_*(N)$. В описываемом случае вычисленное по формуле (10) критическое значение $\nu_* \approx$

0.48634, в то же время, вычисляя по формуле (15) $\nu_*(20)$, имеем приближенно 0.48734. Нетрудно видеть, что величины ν_* и $\nu_*(20)$ отличаются друг от друга лишь в третьем знаке после точки. Это означает, что при ν близких к ν_* разностная модель (11) вполне адекватно описывает краевую задачу (6). Уменьшение величины $\nu < \nu_*(N)$ приводит к появлению в результате бифуркации типа вилки пары орбитально асимптотически устойчивых симметричных друг другу в смысле замены (13) пространственно неоднородных циклов. Дальнейшие фазовые перестройки системы (11) можно проследить лишь численными методами, к обзору результатов которых мы и переходим.

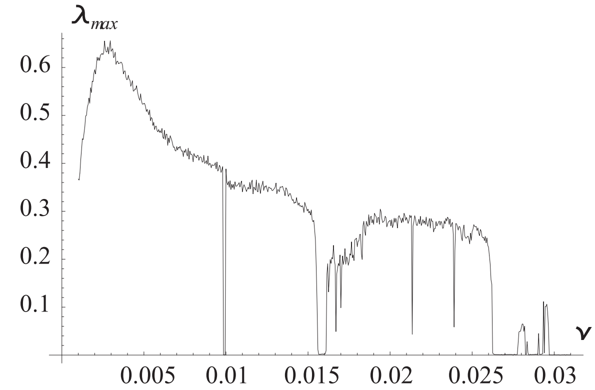


Рис. 1. $N = 10$

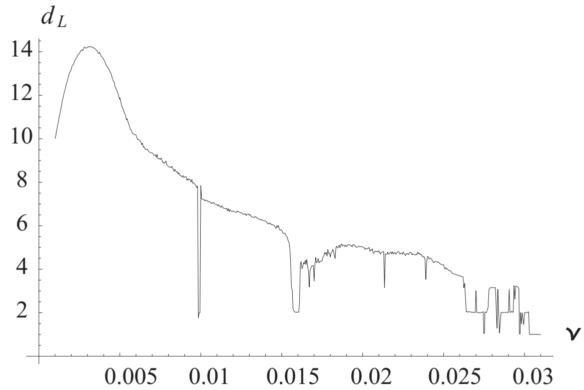


Рис. 2. $N = 10$

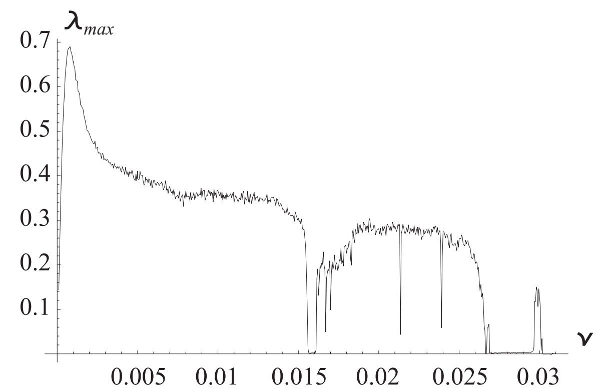


Рис. 3. $N = 20$

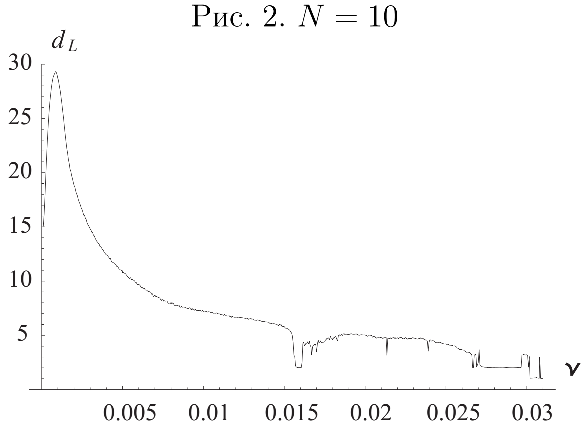


Рис. 4. $N = 20$

Симметричные циклы, возникшие в результате потери устойчивости однородного режима, остаются аттракторами системы (11) вплоть до значения $\nu \approx 0.1183$ (вычислено для $N = 20$), при котором они объединяются в один самосимметричный пространственно неоднородный цикл. Затем при $\nu \approx 0.0351$ этот цикл теряет устойчивость и от него ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых циклов. Эти циклы колебательным образом теряют устойчивость при $\nu \approx 0.0338$ $(N = 20)$, в результате чего возникает два устойчивых двумерных инвариантных тора. Устойчивыми движениями на полученных торах могут быть как квазипериодические, так и периодические колебания. Наконец, при $\nu \approx 0.033$ $(N = 20)$ торы разрушаются и возникают хаотические колебания.

Для $N = 10$ и $N = 20$ на промежутке изменения ν от 0.03 до нуля с шагом 0.0005 был вычислен спектр ляпуновских экспонент и на их основе ляпуновская размерность аттрактора $A_\nu(N)$ системы (11). На рис. 1, 2 представлены графики зависимости от ν старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(A_\nu(N))$ и ляпуновской размерности $d_L(A_\nu(N))$ при $N = 10$, а на рис. 3, 4 — при $N = 20$.

На промежутке изменения ν от 0.03 до примерно 0.015 графики зависимостей имеют многочисленные провалы, соответствующие окнам периодичности или квазипериодичности, значение λ_{max} при этом обращается в нуль, а d_L принимается равным единице в случае циклов и двум в случае двумерных торов.

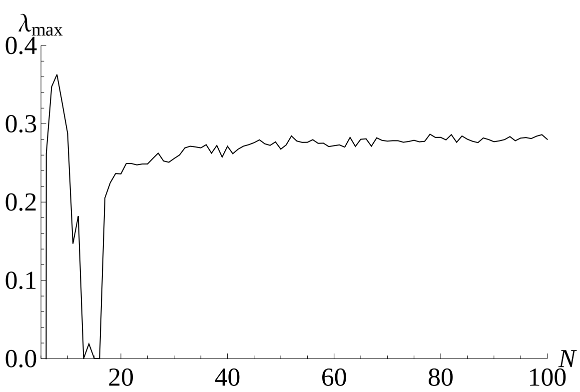


Рис. 5. $\nu = 0.02$

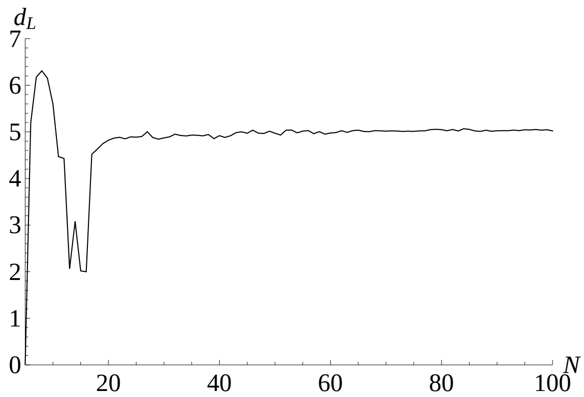


Рис. 6. $\nu = 0.02$

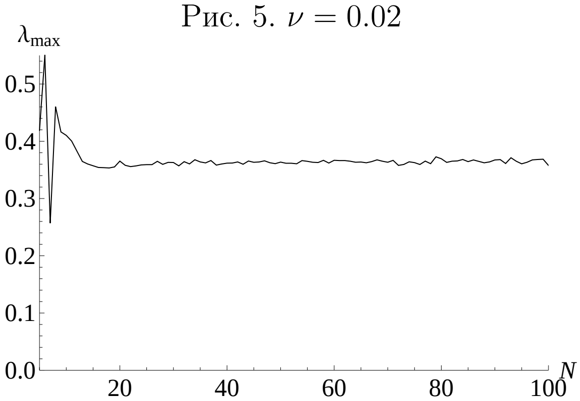


Рис. 7. $\nu = 0.01$

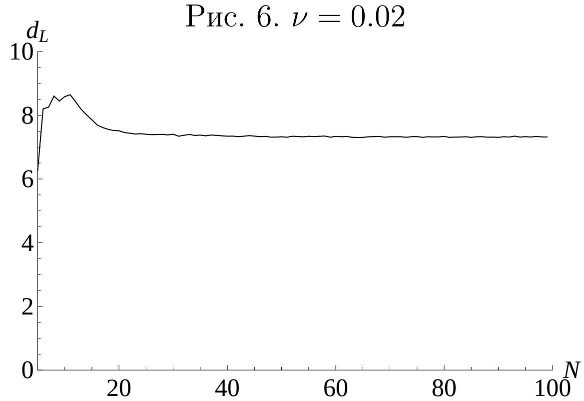


Рис. 8. $\nu = 0.01$

Зависимость $d_L(A_\nu(N))$ от ν при $0.003 < \nu < 0.01$ для $N = 10$ и при $0.001 < \nu < 0.015$ для $N = 20$ близка к гиперболической, причем выбор ν левее указанных промежутков приводит к тому, что система (11) для соответствующего N уже не может адекватно описывать исходную краевую задачу (6). Отметим, что при $N = 20$, как и следовало ожидать, промежуток близкого к гиперболическому изменения величины $d_L(A_\nu(N))$ шире, чем при $N = 10$. Максимальное значение размерности аттрактора достигается при $N = 10$ в точке $\nu \approx 0.00305$ и приблизительно равно 14.23, а при $N = 20$ — в точке $\nu \approx 0.00085$ и $d_L \approx 29.32$.

Для того, чтобы убедиться в том, что при фиксированном ν с ростом N разностные модели (11) имеют аттракторы с близкими показателями, были выполнены расчеты при $\nu = 0.02, 0.01, 0.005, 0.002$ и изменении величины N от 5 до 100. На рис. 5–12 представлены графики зависимостей $\lambda_{max}(A_\nu(N))$ и $d_L(A_\nu(N))$. Нетрудно видеть, что увеличение N приводит к стабилизации величин $\lambda_{max}(A_\nu(N))$ и $d_L(A_\nu(N))$. При этом меньшим значениям параметра ν соответствуют большие предельные значения оцениваемых величин.

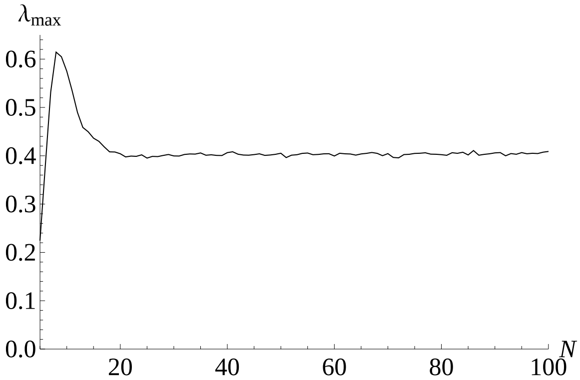


Рис. 9. $\nu = 0.005$

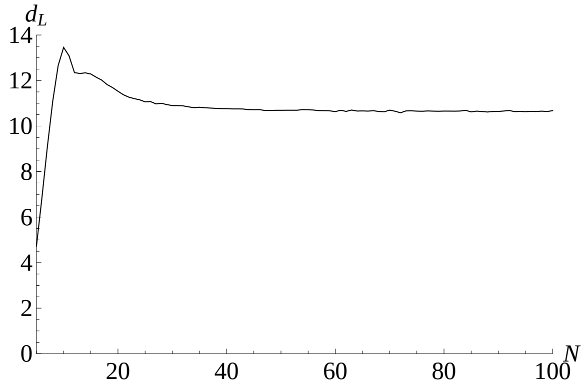


Рис. 10. $\nu = 0.005$

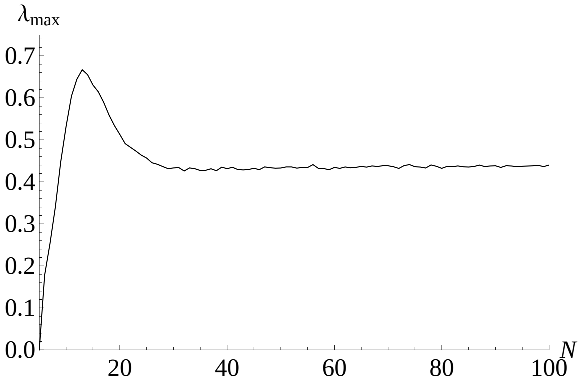


Рис. 11. $\nu = 0.002$

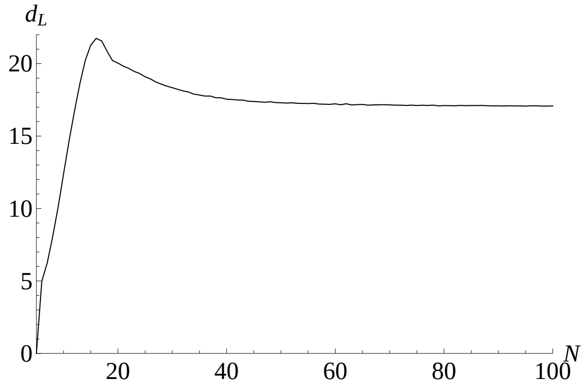


Рис. 12. $\nu = 0.002$

Для того чтобы проиллюстрировать усложнение хаотических режимов при уменьшении ν на рис. 13 и 14 приведены графики вещественных и мнимых частей функции $w(t,x)$ при фиксированном t. Представленные графики показывают, что меньшему значению ν соответствует существенно более изрезанный (многомодовый) вид пространственного распределения решения.

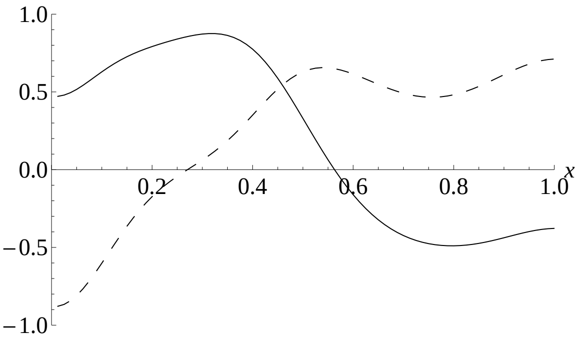
2. Случай коэффициентов, соответствующих разностной модели уравнения Хатчинсона

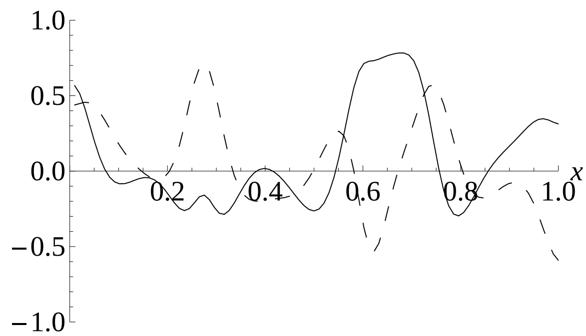
Вторым примером задачи, обладающей многомодовым диффузионным хаосом, является разностная модель уравнения Хатчинсона с диффузией. В статье [12] краевая задача

$$\frac{\partial \mathscr{N}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \mathscr{N}}{\partial x^2} + r[1 - \mathscr{N}(t-1,x)]\mathscr{N}, \ \left.\frac{\partial \mathscr{N}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \mathscr{N}}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0 \qquad (16)$$

на отрезке $0 \le x \le \pi$, получающаяся из стандартного уравнения Хатчинсона при учете диффузионного слагаемого $D\partial^2\mathscr{N}/\partial x^2$, $D = \mathrm{const} > 0$, заменялась при достаточно малом D разностным аналогом

$$u_{n+1,j} = \big(d\, u_{n,j+1} + (1-2d)u_{n,j} + d\, u_{n,j-1}\big)\exp\left[\frac{r}{k}\,(1 - u_{n-k,j})\right], \ n \ge 0, \ j = 1,\dots,N, \quad (17)$$





Вещественная — сплошная и мнимая — пунктирная линия графиков функции $w(t, x)$ при фиксированном t

Рис. 13. $N = 100$, $\nu = 0.02$ Рис. 14. $N = 100$, $\nu = 0.002$

где $d = N^2D/(k\pi^2)$, $u_{n,0} = u_{n,1}$, $u_{n,N+1} = u_{n,N}$, а целые $k \geq 2$ и N определяют число точек разбиения по временной и пространственной переменным соответственно.

При некоторых дополнительных предположениях, не относящихся к теме настоящей статьи, в работе [12] система (17) сводится к задаче (12) при значениях параметров

$$c_1 = 4.129145761413521, \quad c_2 = 1.205298342698789. \tag{18}$$

Сразу отметим, что сценарий фазовых перестроек, полученный в предыдущем пункте, сохраняется и здесь. В частности, если выполнено (18), то $\nu_* \approx 0.044647$, а $\nu_*(20) \approx 0.044739$. При уменьшении параметра ν и при прохождении его через критическое значение (15) от однородного цикла (14) ответвляется пара симметричных орбитально устойчивых пространственно неоднородных циклов (бифуркация типа вилки). Последующее же уменьшение ν приводит к постепенному усложнению динамики и к появлению хаотических колебаний. Наглядное представление об этом процессе дают графики по ν старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}\big(A_\nu(N)\big)$ и ляпуновской размерности $d_L\big(A_\nu(N)\big)$ аттрактора $A_\nu(N)$ системы (12). Построение этих графиков проводилось при $N = 20$ и $N = 30$ на промежутке $0 \leq \nu \leq 0.004$ по точкам с шагом 0.00001, а сами они представлены на рис. 15 – 18.

Далее убедимся, что с ростом N аттрактор $A_\nu(N)$ модели (12) в определенном смысле сходится к аттрактору A_ν краевой задачи (6). Действительно, численные расчеты для фиксированных ν показывают, что при увеличении N происходит стабилизация величин $\lambda_{\max}\big(A_\nu(N)\big)$ и $d_L\big(A_\nu(N)\big)$. На рис. 19 – 26 изображены графики их зависимости от N при $\nu = 0.001, 0.0025, 0.002, 0.0015$. Существенным здесь оказывается то, что меньшим значениям параметра ν соответствуют бо́льшие предельные значения $d_L(A_\nu(N))$. Отметим, что и в данном случае сравнение представленных на рис. 27, 28 графиков вещественных и мнимых частей функции $w(t, x)$ при фиксированном t показывает, что меньшему значению ν соответствует существенно более изрезанный (многомодовый) вид пространственного распределения решения.

Таким образом, на основании всей совокупности проделанных численных исследований мы можем утверждать, что при $\nu \to 0$ размерность $d_L(A_\nu)$ хаотического аттрактора A_ν краевой задачи (6) неограниченно растет. А это, собственно, и означает, что при условиях (18) рассматриваемая задача принадлежит классу B.

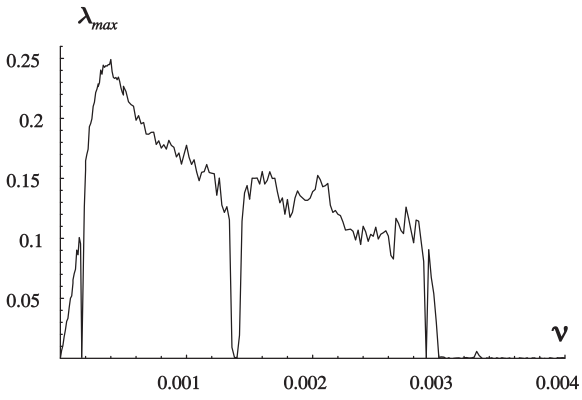


Рис. 15. N=20

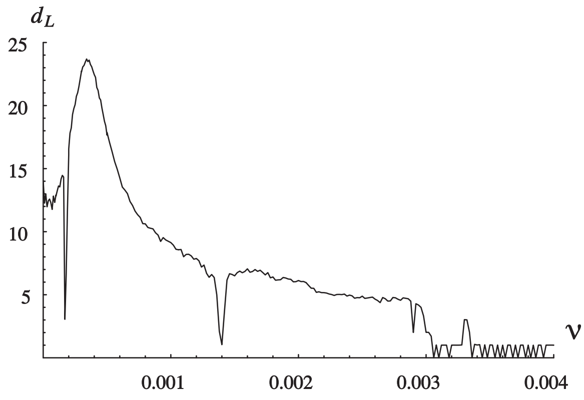


Рис. 16. N=20

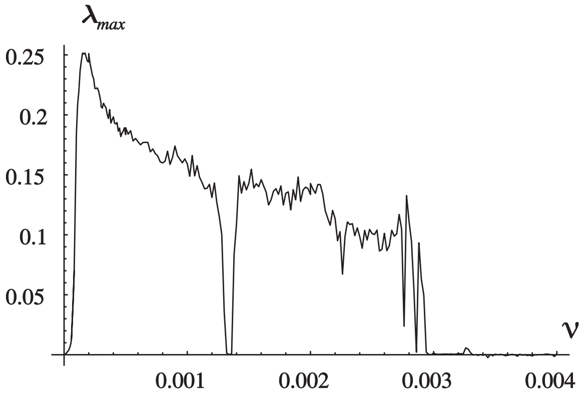


Рис. 17. N=30

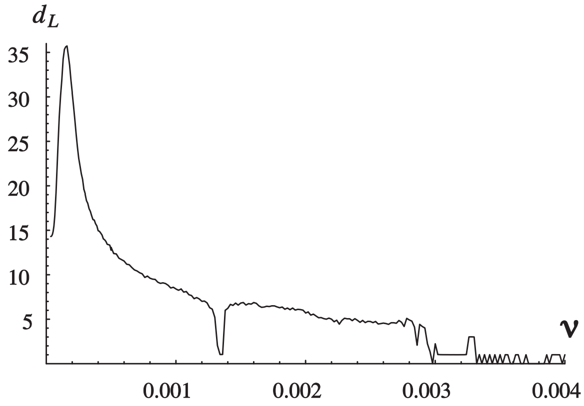


Рис. 18. N=30

Коротко остановимся на применяемых численных методах и точности вычислений. Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (11) использовались методы Рунге – Кутты в их реализации Дорманда и Принса (8.3) [19] с контролем точности на шаге, шаг при этом был ограничен сверху величиной 0.001. Для оценки ляпуновских экспонент использовался стандартный метод Беннетина (см. [20,21]) и метод динамической перенормировки [22]. Продолжительность вычислений в численном эксперименте с фиксированным N и различными ν выбиралась равной $5000 \cdot T$ (T — среднее расстояние между максимумами компонент решения системы (11)) так, что среднее квадратичное уклонение всех ляпуновских показателей, вычисленное по последней тысяче отсчетов, оказывалось меньшим 10^{-3}. Во втором эксперименте вычисления производились на промежутке $10000 \cdot T$, соответственно отклонение показателей от среднего оказалось меньше 10^{-4}.

Предпринятый выше анализ свидетельствует о том, что система (12) при фиксированном $\nu > 0$ и при всех достаточно больших N представляет собой вполне адекватную конечномерную модель диффузионного хаоса, хорошо отражающую как качественные, так и количественные его характеристики. С уменьшением ν стабилизация величин $\lambda_{\max}\big(A_\nu(N)\big)$ и $d_L\big(A_\nu(N)\big)$ происходит при все больших значениях Если же N фиксировано, а ν достаточно мало, то динамические свойства разностной модели (12), в принципе, уже не имеют никакого отношения к свойствам исходной системы (6). В частности, именно этим обстоятельством обусловлены "провалы" графиков $\lambda_{\max}\big(A_\nu(N)\big)$ и $d_L\big(A_\nu(N)\big)$ при малых ν.

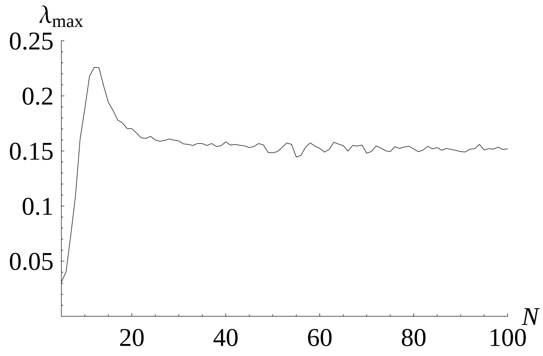


Рис. 19. ν=0.001

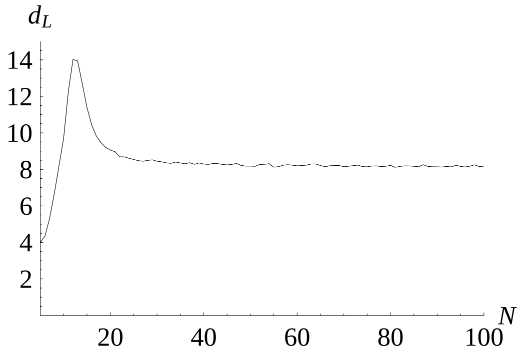


Рис. 20. ν=0.001

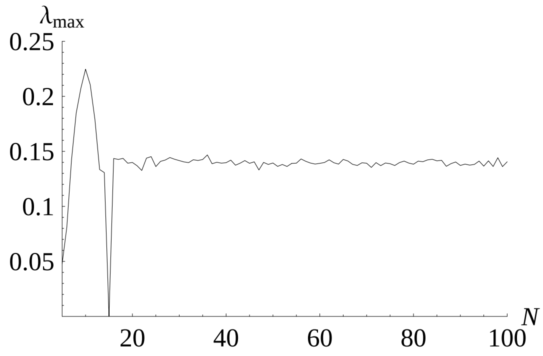


Рис. 21. ν=0.0015

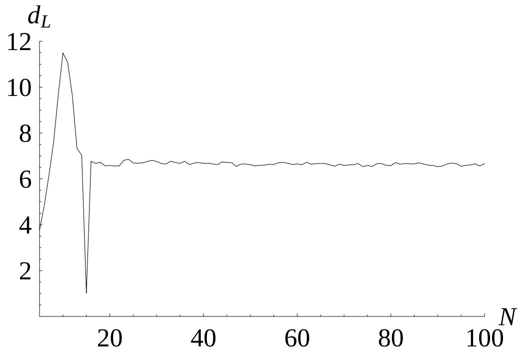


Рис. 22. ν=0.0015

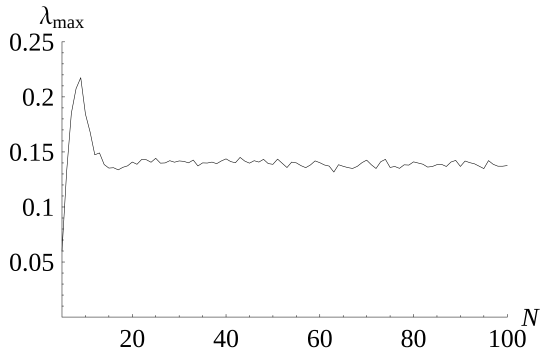


Рис. 23. ν=0.002

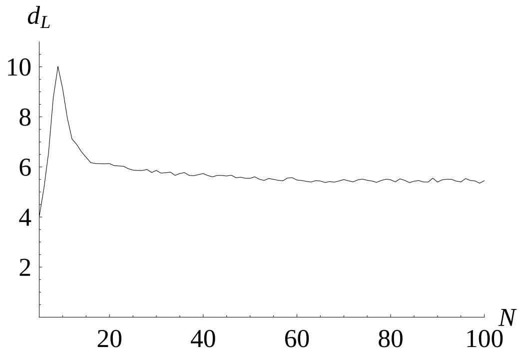


Рис. 24. ν=0.002

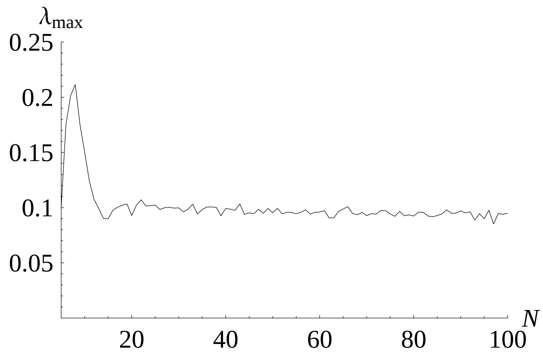


Рис. 25. ν=0.0025

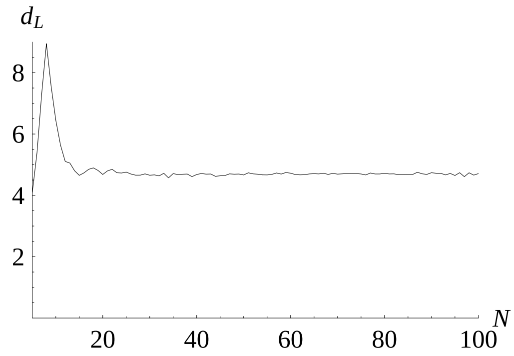
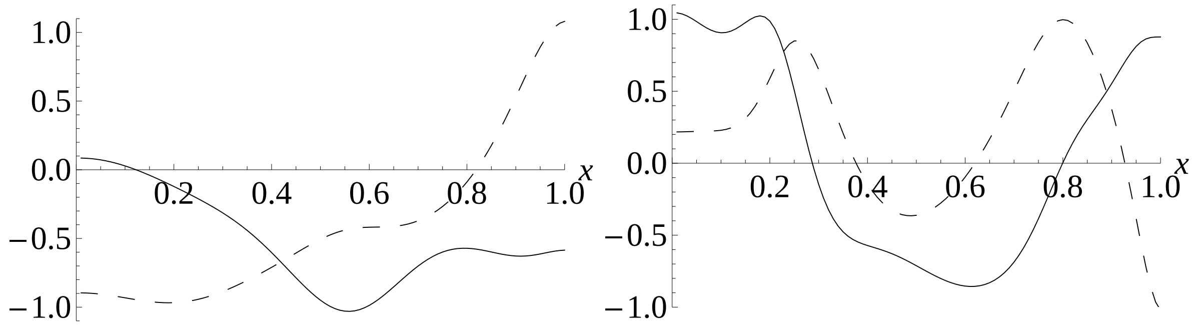


Рис. 26. ν=0.0025



Вещественная — сплошная и мнимая — пунктирная линия графиков функции $w(t,x)$ при фиксированном t

Рис. 27. $N = 100$, $\nu = 0.0025$ Рис. 28. $N = 100$, $\nu = 0.001$

3. Диффузионный хаос в модели Белоусова

В этом разделе рассмотрим распределенную модель реакции Белоусова, предложенную в работе [23] (см. также [24]),

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t} = D_1\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + r_1[1 + a(1-z) - x]x, && \frac{\partial x}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{\partial x}{\partial s}\Big|_{s=1} = 0,\\
&\frac{\partial y}{\partial t} = D_2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + r_2[x - y]y, && \frac{\partial y}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{\partial y}{\partial s}\Big|_{s=1} = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial t} = D_3\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + r_3[\alpha\, x + (1-\alpha)y - z]z, && \frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{s=1} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $0 \le s \le 1$, D_j, $j = 1, 2, 3$ – некоторые положительные параметры, пропорциональные одному параметру $d > 0$. Точнее говоря, положим в (19)

$$\begin{gathered}
(D_1, D_2, D_3) = d(D_1^0, D_2^0, D_3^0),\ \ D_1^0 = 0.01,\ \ D_2^0 = 0.08,\ \ D_3^0 = 0.01;\\
r_1 = 1,\ \ r_2 = 2,\ \ r_3 = 3,\ \ \alpha = 0.2,\ \ a = 100
\end{gathered} \tag{20}$$

и будем интересоваться аттракторами получившейся краевой задачи, возникающими в ее фазовом пространстве $(x, y, z) \in C([0, 1]; \mathbb{R}^3)$ при уменьшении d.

Для решения поставленной проблемы выполним в (19) стандартную дискретизацию. В связи с этим фиксируем произвольно натуральное N и в точках $s = (j - 1/2)/N$, $j = 1, 2, \dots, N$ заменим частные производные по s соответствующими разностными операторами. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned}
\dot x_j &= dD_1^0N^2(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + r_1[1 + a(1 - z_j) - x_j]x_j,\\
\dot y_j &= dD_2^0N^2(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + r_2[x_j - y_j]y_j,\\
\dot z_j &= dD_3^0N^2(z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}) + r_3[\alpha\, x_j + (1-\alpha)y_j - z_j]z_j,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $x_j(t) = x(t,s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $y_j(t) = y(t,s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $y_j(t) = y(t,s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $j = 1, \dots, N$, причем $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, $x_{N+1} = x_N$, $y_{N+1} = y_N$, $z_{N+1} = z_N$.

При интерпретации численных экспериментов, проводившихся для системы (21) при условиях (20) и при различных значениях d, N, как и в предыдущем пункте,

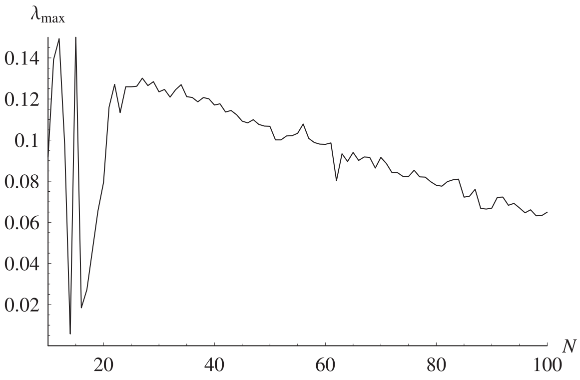


Рис. 29.

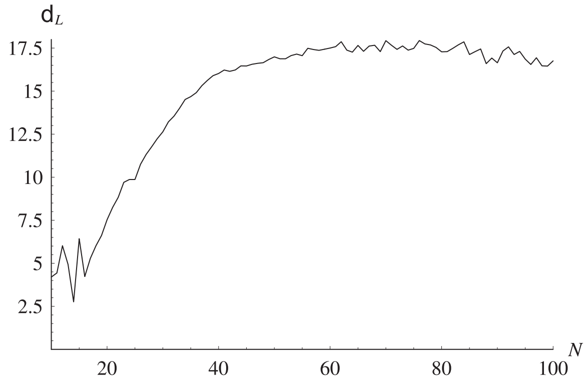


Рис. 30.

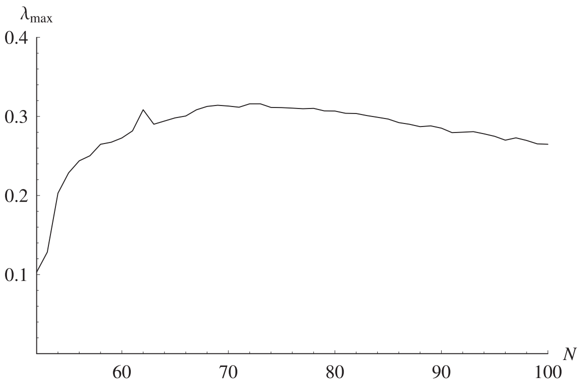


Рис. 31.

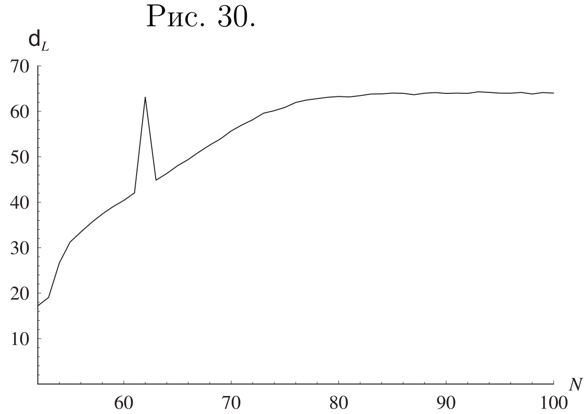
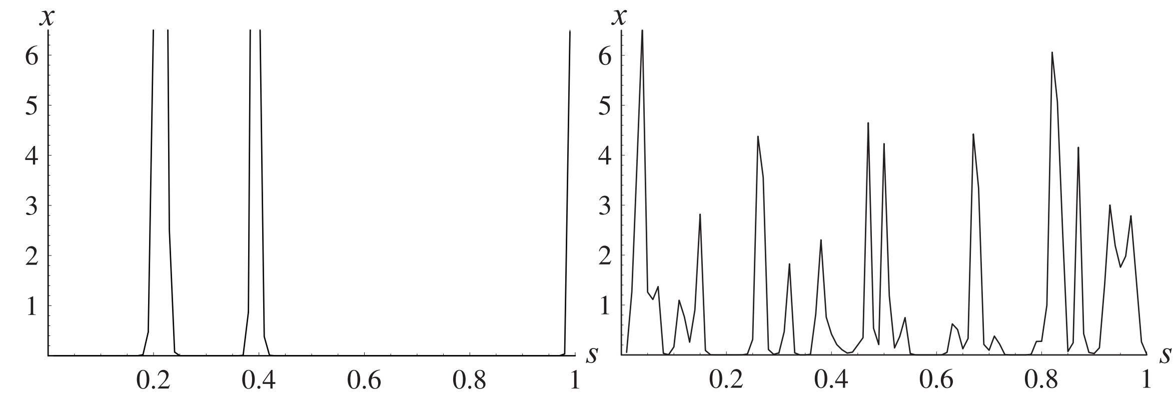


Рис. 32.

будем пользоваться понятием вероятностного аттрактора (см. [25]). В данном случае вероятностным аттрактором $A_d(N) \subset \mathbb{R}^{3N}$ системы (21) назовем наименьшее замкнутое множество, содержащее ω-предельные множества ее траекторий для почти всех (в смысле меры Лебега) начальных условий из конуса $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{3N}$ векторов с неотрицательными координатами. Нас будут интересовать такие характеристики инвариантного множества $A_d(N)$, как ляпуновская размерность $d_L(A_d(N))$ и старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}(A_d(N))$.

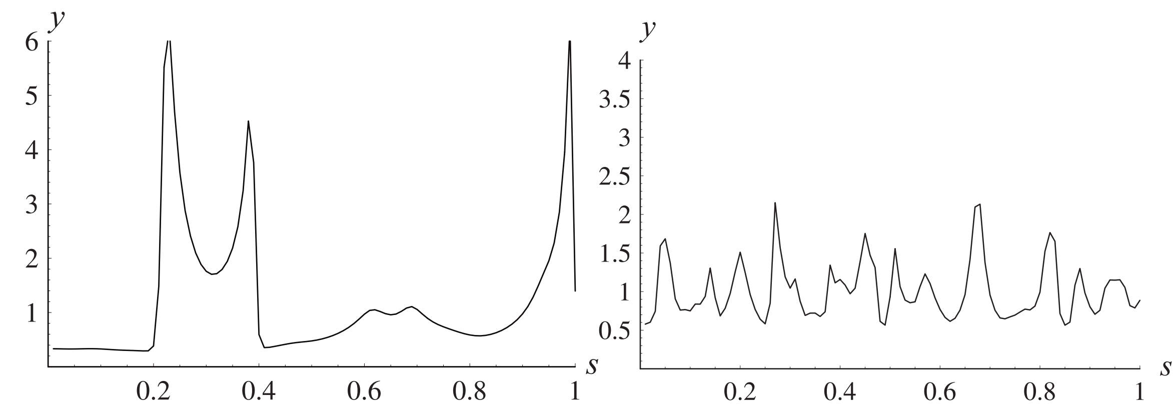
Обратимся сначала к серии численных расчетов по выявлению зависимости величин $d_L(A_d(N))$ и $\lambda_{\max}(A_d(N))$ от N. Соответствующий анализ был выполнен при $d = 0.002$, а его результаты представлены на рис. 29 – 32. Поясним приведенные рисунки. Как оказывается, при $N \geq 52$ аттрактор $A_d(N)$ состоит по крайней мере из двух непересекающихся компонент $A_d^{(1)}(N)$ и $A_d^{(2)}(N)$, которым соответствуют различные наборы ляпуновских показателей. В связи с этим вычисление величин d_L и $\lambda_{\max}$ проводилось отдельно для каждой компоненты. В случае $A_d^{(1)}(N)$ графики d_L, $\lambda_{\max}$ показаны на рис. 29, 30, а в случае $A_d^{(2)}(N)$ – на рис. 31, 32. Добавим еще, что аналог компоненты $A_d^{(1)}(N)$ существует и при $10 \leq N \leq 52$. Поэтому для $A_d^{(1)}(N)$ соответствующие графики удалось построить при $10 \leq N \leq 100$, а для $A_d^{(2)}(N)$ – только на отрезке $52 \leq N \leq 100$.

Качественное различие между аттракторами $A_d^{(1)}(N)$ и $A_d^{(2)}(N)$ иллюстрируют рис. 33 – 35, где под буквой а) изображены графики компонент $x(t,s)$, $y(t,s)$, $z(t,s)$ решения краевой задачи (19) при фиксированном t, построенные по точкам $(x_j(t)$,



а) б)

Рис. 33.



а) б)

Рис. 34.

$y_j(t)$, $z_j(t)$), $s=(j-1/2)/N$, $j=1,\ldots,N$ при $N=100$, $d=0.002$ для случая $A_d^{(1)}(N)$, а под буквой б) – аналогичные графики, соответствующие случаю $A_d^{(2)}(N)$.

Основная особенность аттрактора $A_d^{(1)}(N)$ заключается в том, что его компоненты $x_j(t)$ по своим свойствам близки к компоненте $x(t)$ релаксационного цикла точечной системы, получающейся из (19) при $d=0$ (асимптотики приведены в [23]). Все они почти одновременно становятся величинами порядка $10^{-10}-10^{-20}$, остаются таковыми некоторое конечное время, а затем с ними происходят всплески δ-образного характера (см. рис. 33 а). В случае же $A_d^{(2)}(N)$ ситуация принципиально меняется: по сравнению с $A_d^{(1)}(N)$ уменьшаются величины всплесков компонент $x_j(t)$ и увеличиваются их минимумы (см. рис. 33 б). В связи с этим аттрактор $A_d^{(1)}(N)$ назван в [23] релаксационным хаосом, а аттрактор $A_d^{(2)}(N)$ – хаосом типа самоорганизации.

Отдельно остановимся на вопросе о том, какие выводы из проделанного численного анализа можно сделать об аттракторах распределенной модели (19) при условиях (20) и при $d=0.002$. Изображенные на рис. 31, 32 графики позволяют заключить, что при $N\to\infty$ величины $d_L(A_d^{(2)}(N))$ и $\lambda_{\max}(A_d^{(2)}(N))$ стремятся к некоторым конечным положительным пределам. Тем самым, есть все основания ожидать, что краевая задача (19) имеет хаотический аттрактор $A^{(2)}=\lim\limits_{N\to\infty}A_d^{(2)}(N)$, который, как и аттрактор $A_d^{(2)}(N)$, уместно назвать хаосом типа самоорганизации.

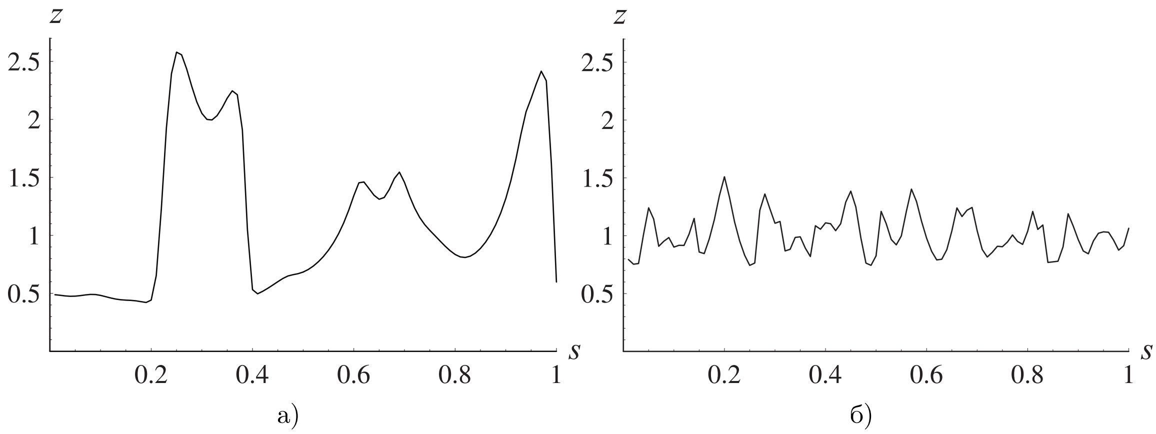


Рис. 35.

В случае $A_d^{(1)}(N)$ ситуация несколько сложнее. Здесь $d_L(A_d^{(1)}(N))$ при $N \to \infty$ также сходится к некоторому положительному пределу, а предел $\lambda_{\max}(A_d^{(1)}(N))$, по всей видимости, равен нулю. Это означает, что аттрактор $A^{(1)}= \lim\limits_{N\to\infty} A_d^{(1)}(N)$ релаксационного типа в распределенной модели (19) при d=0.002 хотя и существует, но не является хаотическим (он становится хаотическим при меньших значениях d).

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости характеристик d_L и $\lambda_{\max}$ от параметра d при фиксированном N. Соответствующие численные эксперименты проводились при $N = 20$, 50, 60, а их результаты представлены на рис. 36 – 41 (в случае $N = 20$ значения d_L и $\lambda_{\max}$ вычислялись на релаксационном хаосе, а в случае $N = 50, 60$ – на хаосе типа самоорганизации).

Приведенные графики свидетельствуют о том, что при согласованном уменьшении d и увеличении N в системе (21) возникают хаотические аттракторы сколь угодно высокой размерности. Точнее говоря, величины d_L и $\lambda_{\max}$, рассматриваемые как функции переменной d, достигают своих максимальных значений в одной и той же точке $d = d_N^*$, причем $d_L|_{d=d_N^*} \to \infty$, $\lambda_{\max}|_{d=d_N^*} \to \lambda^0_{\max} > 0$ при $N \to \infty$. Ясно также, что неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов происходит при $d \to 0$ и в исходной краевой задаче (19), поскольку, как уже отмечалось выше, при $N \to \infty$ и при фиксированном d аттракторы $A_d^{(1)}(N)$ и $A_d^{(2)}(N)$ сходятся к соответствующим аттракторам распределенной модели.

Суммируя проделанные построения, отметим, что для распределенной модели (19) с помощью численных методов удалось установить феномен диффузионного хаоса: неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии. Попутно было обнаружено два типа хаотических автоколебаний – релаксационный хаос и хаос типа самоорганизации. Автоколебательные режимы первого типа по своим свойствам в определенном смысле близки к однородному циклу. В случае же хаоса типа самоорганизации функции $x(t,s)$, $y(t,s)$, $z(t,s)$ оказываются существенно более изрезанными по пространственной переменной s (см. рис. 33 – 35). Именно по этой причине режимы самоорганизации наблюдаются в системе (21) лишь при достаточно больших N.

Отметим также, что в отличие от уравнения Гинзбурга – Ландау, рассмотренного в предыдущем пункте, возникновение диффузионного хаоса в краевой задаче (19) не связано напрямую с потерей устойчивости однородного цикла. Более того, если

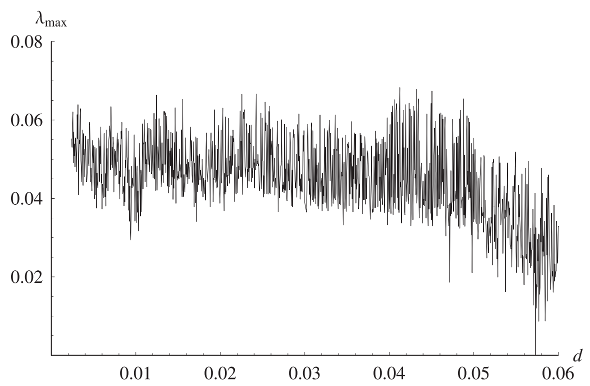


Рис. 36. $N = 20$

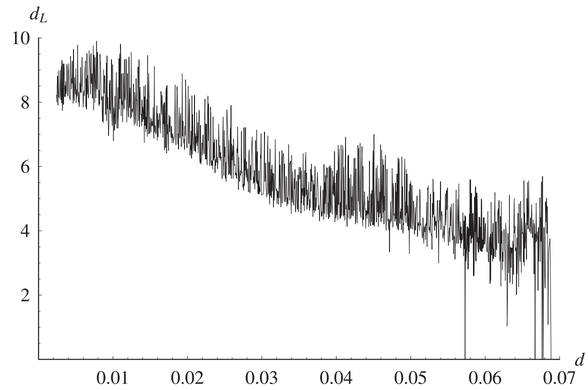


Рис. 37. $N = 20$

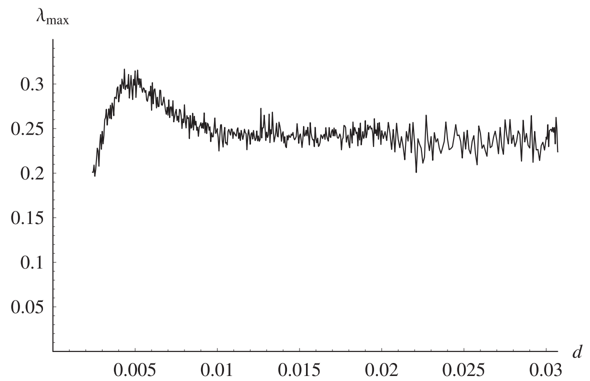


Рис. 38. $N = 50$

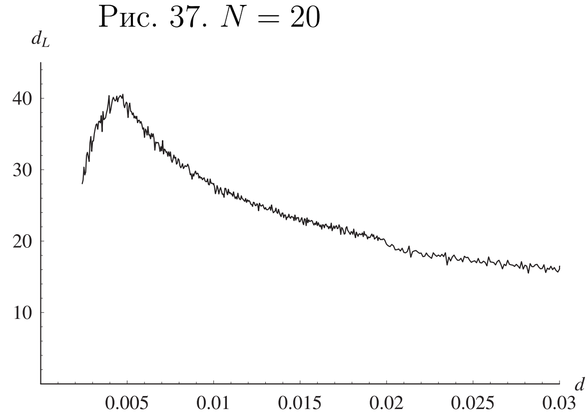


Рис. 39. $N = 50$

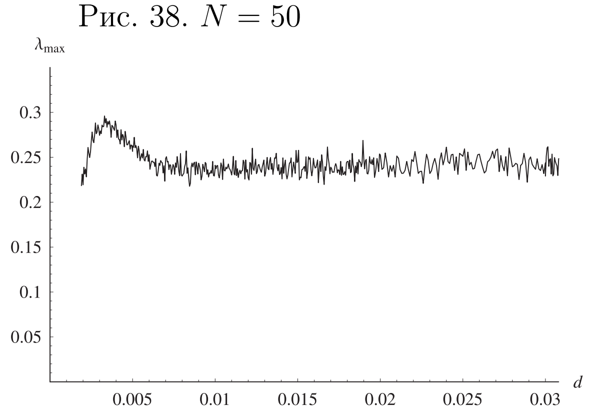


Рис. 40. $N = 60$

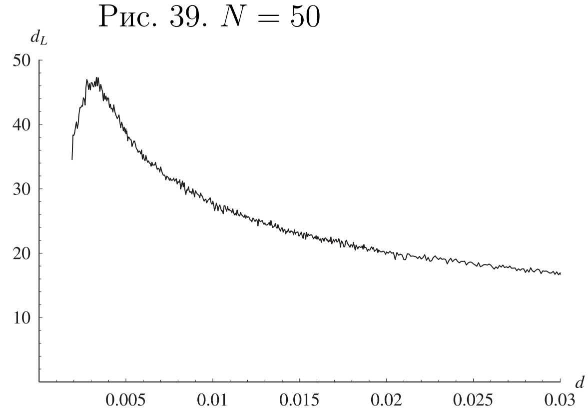


Рис. 41. $N = 60$

положить, например, в (20) $\alpha = 0$, сохранив значения остальных параметров, то этот цикл остается устойчивым при любом $d > 0$, а при малых d сосуществует с диффузионным хаосом.

4. Многомодовые хаотические аттракторы, реализующиеся в сценарии Ландау – Селла

В данном разделе с помощью численного анализа изучается вопрос об аттракторах краевой задачи

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + bu^5 = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u + \nu u_{xx}) - \int\limits_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \tag{22}$$

где a, b, ε, ν — произвольные положительные параметры, $u = u(t,x)$ — скалярная вещественная функция. Данная задача рассматривается при $\nu \to 0$ и при условии, что все остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже считаем, что эти параметры фиксированы и заданы, к примеру, равенствами

$$\varepsilon = b = 10, \quad a^2 = 0.1. \tag{23}$$

В статье [18] установлено, что при согласованном стремлении параметров ε и ν к нулю в ней происходит развитие турбулентности по Ландау, а при $\varepsilon \sim 1$, $\nu \to 0$ реализуется сценарий Ландау – Селла.

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $u_t = v$, перейдем от уравнения второго порядка из (22) к системе

$$u_t = v,\ v_t = \varepsilon v + \nu v_{xx} - \int\limits_0^1 v^2 dx \cdot v + a^2 u_{xx} - u - bu^5,\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = v\big|_{x=0} = v\big|_{x=1} = 0. \tag{24}$$

Заменим, далее, в (24) частные производные по x и интегральное слагаемое приближенными равенствами

$$u_{xx}(t,x)\big|_{x=k/(N+1)} \approx (N+1)^2\big(u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)\big),$$
$$v_{xx}(t,x)\big|_{x=k/(N+1)} \approx (N+1)^2\big(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)\big),$$
$$\int\limits_0^1 v^2(t,x)dx \approx \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} v_k^2(t),$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число,

$$u_k(t) = u(t,x)\big|_{x=k/(N+1)}, \quad v_k(t) = v(t,x)\big|_{x=k/(N+1)}, \quad k = 1,\ldots,N.$$

В результате для переменных u_k, v_k приходим к конечномерной модели вида

$$\begin{aligned} &\dot u_k = v_k, \\ &\dot v_k = \varepsilon v_k + \nu(N+1)^2(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) - \frac{v_k}{N+1}\sum_{m=1}^{N} v_m^2 + \\ &\quad + a^2(N+1)^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - u_k - bu_k^5, \quad k = 1,\ldots,N, \end{aligned} \tag{25}$$

где $u_0 = v_0 = u_{N+1} = v_{N+1} = 0$.

Компьютерный анализ модели (25) проводился при условиях (23) в диапазоне параметров $5 \le N \le 100$, $0 \le \nu \le 1.01$.

Опишем сначала бифуркации, происходящие на начальных стадиях сценария Ландау – Селла. Анализ конечномерных моделей (25) позволяет сделать вывод, что в исходной распределенной модели (22) при условиях (23) и при уменьшении ν наблюдаются следующие перестройки. При $\nu > 10/\pi^2$ устойчиво ее нулевое решение, а при прохождении ν через критическое значение $10/\pi^2$ из нуля рождается устойчивый цикл C (бифуркация Андронова – Хопфа). Далее, этот цикл сохраняет устойчивость при $\nu_* \lessapprox \nu < 10/\pi^2$, где $\nu_* \approx 0.03272$, а при последующем уменьшении ν отдает ее бифурцирующему из него двумерному тору T.

Указанный тор, в свою очередь, существует и устойчив на промежутке $\nu_{**} \lessapprox \nu < \nu_*$, где $\nu_{**} \approx 0.00812$, причем динамика на нем в некоторых случаях является периодической (например, она оказывается таковой при $\nu \in [0.00941, 0.00967]$). Что же касается хаотического аттрактора, то он впервые возникает в краевой задаче (22) при $\nu = \nu_{**}$ в результате разрушения тора T. Добавим еще, что наступлению стабильного хаоса, имеющего место при малых $\nu > 0$, предшествует некоторое количество промежутков изменения ν, в которых существуют устойчивые циклы.

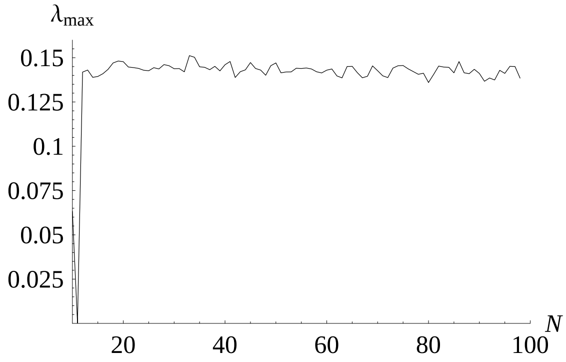


Рис. 42. $\nu = 0.001$

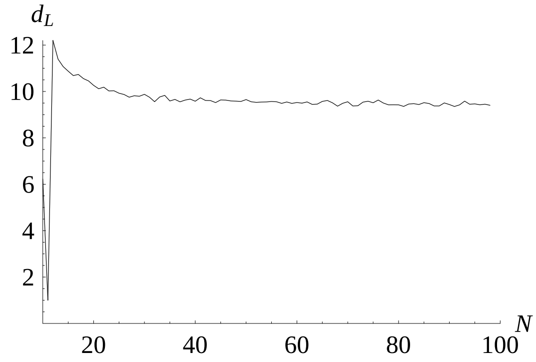


Рис. 43. $\nu = 0.001$

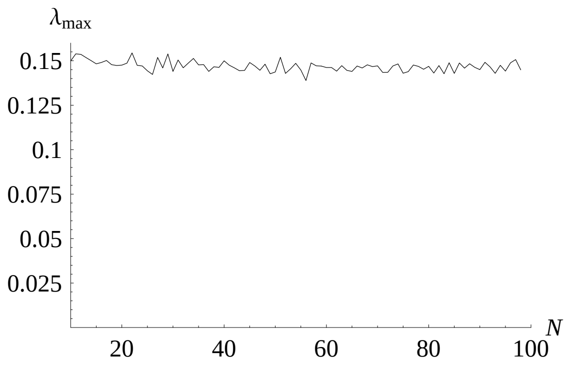


Рис. 44. $\nu = 0.002$

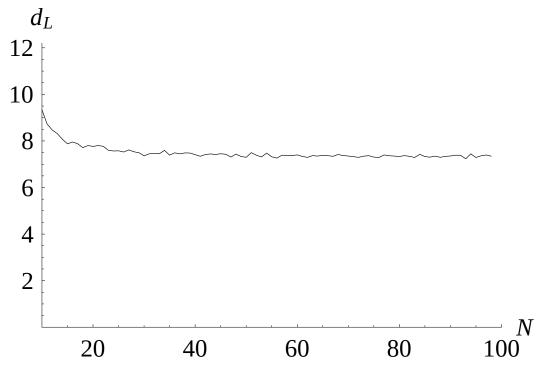


Рис. 45. $\nu = 0.002$

Обратимся к вопросу о поведении различных характеристик аттрактора $A_\nu(N)$ системы (25) при фиксированном $\nu \ge 0$ и при увеличении N. В статье [18] показано, что в случае $\nu = 0$ ляпуновская размерность d_L этого аттрактора при $N \to \infty$ неограниченно растет, а его старший ляпуновский показатель λ_{max}, наоборот, убывает и при $N \ge 25$ становится равным нулю. При этом на промежутке $5 \le N \le 23$

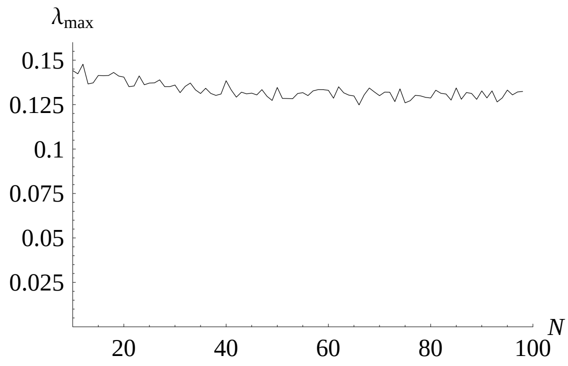


Рис. 46. $\nu = 0.003$

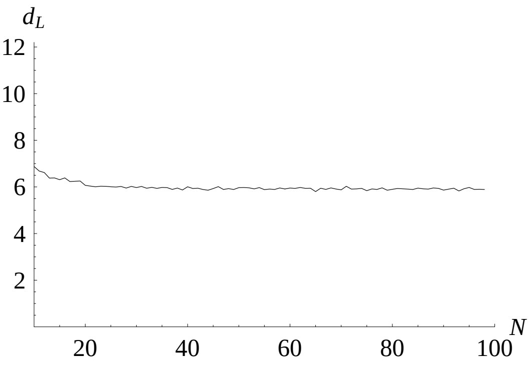


Рис. 47. $\nu = 0.003$

для d_L растет с ростом N практически по линейному закону $d_L \approx 1.028 + 1.509 \cdot N$ (в этом случае аттрактор $A_0(N)$ оказывается хаотическим). В случае же $N \geq 25$ множество $A_0(N)$ представляет собой $(2N-3)$-мерный инвариантный тор, движения на котором близки к квазипериодическим.

При малых $\nu > 0$ введенные выше величины d_L и λ_{max} с ростом N ведут себя несколько иначе. А именно, при $N \to \infty$ они стремятся к конечным положительным пределам. Об этом свидетельствуют рис. 42 – 47, где изображены графики λ_{max} и d_L от N для $\nu = 0.001, 0.002$ и 0.003 соответственно.

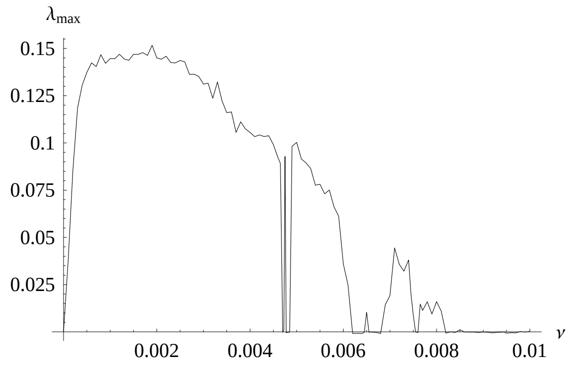


Рис. 48. $N = 30$

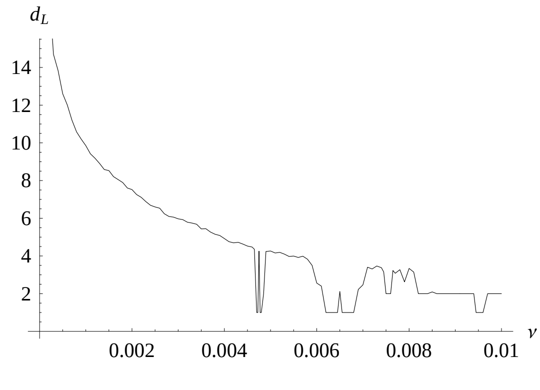


Рис. 49. $N = 30$

Приведенные результаты численного счета, а также вычисленная при $N = 30$ зависимость d_L и λ_{max} от ν (см. рис. 49, 48) позволяют утверждать, что турбулентный аттрактор A_{turb} является пределом при $\nu \to 0$ конечномерных хаотических аттракторов $A_\nu(N)$, ляпуновская размерность которых неограниченно растет. Это как раз и означает, что при условиях (23) и при уменьшении ν в краевой задаче (22) наблюдается сценарий развития турбулентности Ландау – Селла.

Дополнительным аргументом в пользу реализуемости упомянутого сценария служат результаты вычислений, представленные на рис. 46, 47. На этих рисунках показаны графики зависимости от ν величин d_L и λ_{max} аттрактора $A_\nu(N)$ системы (25) при $N = 30$, построенные на отрезке $0.005 \leq \nu \leq 0.01$ по точкам с шагом 0.0001.

Основной вывод, который можно сделать на основе обширного вычислительного эксперимента, представленного в статье, состоит в том, что нами получен класс динамических систем, обладающих так называемым многомодовым диффузионным аттрактором. Основное свойство этого аттрактора заключается в его все большем усложнении (увеличении ляпуновской размерности) при уменьшении диффузионного коэффициента. Удалось показать, что нарастание размерности связано в основном с усложнением структуры аттрактора по пространственной переменной.

Список литературы

1. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. Wiley. 1977.

2. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007. (*Ahromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G., Samarskiy A.A* Struktury i khaos v nelineynykh sredakh. Moskva: Fizmatlit, 2007 [in Russian].)

3. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. (*Mishchenko E.F., Sadovnichiy V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh.* Avtovolnovye protsessy v nelineynykh sredakh s diffuziey. Moskva: Fizmatlit, 2005 [in Russian].)

4. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.

5. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of tubulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167–192.

6. *Kuramoto Y.* Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems // Prog. Theor. Phys. Supplement. 1978. No. 64(1978). P. 346–367. DOI : 10.1143/PTPS.64.346.

7. *Глызин С.Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия” // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811. (English transl.: *Glyzin S. D.* Dynamic properties of the simplest finite-difference approximations of the "reaction-diffusion” boundary value problem // Differential Equations. 1997. V. 33. No. 6. P. 808–814.)

8. *Колесов А.Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 1. С. 831–835. (English transl.: *Kolesov A. Yu.* Description of Phase Instability of a System of Harmonic Oscillators Weakly Coupled by Diffusion // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1988. V. 300. P. 831 – 835.)

9. *Глызин С.Д.* Численное обоснование гипотезы Ландау – Колесова о природе турбулентности // Математические модели в биологии и медицине / Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс, 1989. Вып. 3. С. 31–36. (*Glyzin S. D.* Numerical Justification of the Landau-Kolesov Conjecture on the Nature of Turbulence // Mathematical models in biology and medicine. 1989. No. 3. P. 31 – 36 [in Russian].)

10. *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96 – 116. (*Glyzin S. D.* Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, No 3. P. 96 – 116 [in Russian].)

11. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7 – 44. (*Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I.* Autostructures: chaotic dynamics of ensembles // Nonlinear Waves. Structure and Bifurcations. Moskva, Nauka, 1987. P. 7 – 44 [in Russian].)

12. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 860 – 875. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh.* Finite-dimensional models of diffusion chaos // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. V. 50. No 5. P. 816 – 830. DOI: 10.1134/S0965542510050076.)

13. *Колесов Ю.С.* Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. Деп. ВИНИТИ. 1985. № 1901-85. (*Kolesov Yu. S.* Adequacy of Ecological Equations. Available from VINITI, No. 1901–85 (Yaroslavl, 1985) [in Russian].)

14. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* К вопросу об определении хаоса // Успехи математических наук. 2009. Т. 64. Вып. 4(388). С. 125 – 172. (English transl.: *Kolesov A.Yu.; Rozov N.Kh.* On the definition of chaos // Russian Math. Surveys. 2009. V. 64. No. 4. P. 701–744.)

15. *Frederickson P., Kaplan J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of strange attractors // J. Different. Equat. 1983. V. 49. №2. P. 185 – 207.

16. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А.* Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, № 2(380). С. 21 – 84. (English transl.: *Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., Sadovnichii V.A.* Mathematical aspects of the theory of development of turbulence in the sense of Landau // Russian Math. Surveys. 2008. V. 63. No 2. P. 246–251.)

17. *Arnold V. I., Khesin B. A.* Topological Methods in Hydrodynamics. Springer, 1999. 391 p.

18. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 2. С. 292 – 311. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* On the Realizability of the Landau Scenario for the Development of Turbulence // Theoretical and Mathematical Physics. 2009. V. 427. P. 292–311.)

19. *Dormand J.R., Prince P.J.* A Family of Embedded Runge – Kutta Formulae // J. Comp. Appl. Math. 1980. V. 6. P. 19 – 26.

20. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 2338 – 2345.

21. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. D16. P. 285–317.

22. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268 – 273. (English transl.: *Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh.* The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 284–289.)

23. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400 – 1418. (English transl.: *Glyzin D.S., Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Relaxation oscillations and diffusion chaos in the Belousov reaction // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. V. 51. No 8. P. 1307–1324. DOI: 10.1134/S0965542511080100

24. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Реакция Белоусова: математическая модель и экспериментальные факты // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. С. 43 – 51. (*Kolesov A.Yu., Kolesov Yu.S., Mayorov V.V.* The Belousov Reaction: a Mathematical Model and Experimental Facts // Dynamics of Biological Populations, GGU, Gorki, 1987. P. 43- 51 [in Russian].)

25. *Milnor J.* On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. №2. P. 177 – 196.

Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos

Glyzin S. D.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: diffusion chaos, attractor, Lyapunov dimension, Ginzburg – Landau equation, bifurcation, Landau – Sell scenario

The phenomenon of multimode diffusion chaos is considered. For a number of examples it is shown that the Lyapunov dimension of the attractor of a distributed dynamical system increases as the diffusion coefficient tends to 0.

Сведения об авторе:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей