Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **1** (2011) 106–115

УДК 517.9

Релаксационные циклы обобщённого уравнения импульсного нейрона

Парамонов И. В.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: ivparamonov@gmail.com

получена 17 октября 2010

Ключевые слова: релаксационные колебания, импульсный нейрон, уравнение с запаздыванием, асимптотический анализ

Рассмотрена обобщенная модель импульсного нейрона В. В. Майорова и И. Ю. Мышкина. В уравнение, описывающее нейрон, введено запаздывание не только калиевой, но и натриевой проводимости относительно трансмембранного потенциала. Доказаны существование и устойчивость периодического решения уравнения нейрона, построено асимптотическое разложение решения.

1. Постановка задачи

В работе [1] было предложено следующее уравнение для моделирования динамики биологической нервной клетки (импульсного нейрона):

$$\frac{du}{dt} = \lambda \cdot [-1 + f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u(t))] \cdot u(t). \tag{1}$$

Здесь $u(t)$ — трансмембранный потенциал нейрона, $f_{\mathrm{K}}(u)$ и $f_{\mathrm{Na}}(u)$ — функции, характеризующие калиевую и натриевую проводимости мембраны, $\lambda \gg 1$ — большой параметр, определяющий скорость протекания электрических процессов. В соответствии с биологическим смыслом предполагается, что

$$f_{\mathrm{K}}(u) = \alpha f_1(u), \qquad f_{\mathrm{Na}}(u) = \beta f_2(u), \qquad \alpha, \beta > 0,$$
$$f_i(0) = 1, \qquad f_i(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ik}}{u^k} \text{ при } u \to \infty, \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

Считаем также, что ряд в (2) можно дифференцировать по u любое число раз.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (государственные контракты №02.740.11.0197 и №02.740.11.0207).

Рассмотрим модификацию уравнения (1), в которой введено запаздывание не только калиевой, но и натриевой проводимости относительно трансмембранного потенциала:
$$\frac{du}{dt} = \lambda \cdot [-1 + \alpha f_1(u(t-1)) - \beta f_2(u(t-h))] \cdot u(t). \tag{3}$$
Здесь $0 < h < 1$. Предполагаем также, что h не зависит от λ.

В настоящей работе рассматривается задача построения асимптотики (при $\lambda \to \infty$) релаксационного цикла уравнения (3). Решение данной задачи осуществляется в соответствии с алгоритмом, приведённым в работе [2].

2. Переход к релейному уравнению и его решение

Для анализа уравнения (4) удобно выполнить замену переменной $u(t) = \exp(x(t)/\varepsilon)$, где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. После замены получаем

$$\frac{dx}{dt} = -1 + \alpha f_1\left(\exp\left(-\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\right)\right) - \beta f_2\left(\exp\left(-\frac{x(t-h)}{\varepsilon}\right)\right). \tag{4}$$

Для того, чтобы найти асимптотику нулевого приближения решения уравнения (4), рассмотрим релейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -1 + \alpha R(x(t-1)) - \beta R(x(t-h)), \tag{5}$$

где

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В силу свойств функций $f_1(u)$ и $f_2(u)$ видно, что данное уравнение является предельным для (4) при $\varepsilon \to 0$.

Будем считать, что начальное условие принадлежит множеству функций:

$$S(\sigma_0, q_1, q_2) = \{\varphi \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0], -q_2 \leqslant \varphi(t) \leqslant -q_1 \\ \text{при } t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0] \text{ и } \varphi(-\sigma_0) = -\gamma\sigma_0\}. \tag{6}$$

Здесь

$$\gamma = \alpha - \beta - 1 > 0, \tag{7}$$
$$\sigma_0 < \frac{1}{2}\min\left\{h, 1-h, \frac{1+\beta(1-h)}{\gamma}\right\}, \qquad q_1 > 0, \qquad q_2 \geqslant \gamma(1+\sigma_0).$$

После определения начальной функции уравнение (5) легко интегрируется методом шагов. В результате оказывается, что все решения из множества $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ одинаковы и совпадают с периодической функцией $x_0(t)$ с периодом

$$T_0 = \alpha + 1 - \beta h + \frac{1+\beta(1-h)}{\gamma},$$

и определяемой на промежутке $[0, T_0]$ следующим образом:

$$x_0(t) = \begin{cases} \gamma t & \text{при } t \in [0, h], \\ (\alpha - 1)t - \beta h & \text{при } t \in [h, 1], \\ \alpha - \beta h - t & \text{при } t \in [1, \alpha - (\beta - 1)h, \\ -h - (1 + \beta)(t - \alpha - (\beta - 1)h) & \text{при } t \in [\alpha - (\beta - 1)h, \alpha + 1 - \beta h], \\ -1 - \beta + \beta h + \gamma \cdot (t - \alpha - 1 + \beta h) & \text{при } t \in [\alpha + 1 - \beta h, T_0]. \end{cases} \tag{8}$$

В дальнейшем будет доказано, что функция $x_0(t)$ определяет главную часть асимптотики релаксационного предельного цикла уравнения (4), а T_0 — главную часть периода этого цикла, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2)*, тогда для всех достаточно малых положительных ε уравнение* (4) *имеет единственный экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$ с периодом $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \max_t |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \tag{9}$$

Для доказательства существования в данной теореме строится асимптотическое разложение решения при условии, что начальная функция φ принадлежит множеству $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Затем доказывается существование T_φ, являющегося вторым положительным корнем уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$, и справедливость соотношения $x_\varphi(T_\varphi + t, \varepsilon) \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. После этого строится оператор последования $\Pi_\varepsilon(\varphi) : S(\sigma_0, q_1, q_2) \to C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ по правилу

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(T_\varphi(\varepsilon) + t, \varepsilon), \qquad -1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0.$$

Далее существование периодического решения следует из существования неподвижной точки этого оператора, а его устойчивость из того факта, что он является сжимающим.

3. Построение асимптотического разложения

В данной главе доказывается существование периодического решения уравнения (4). Для этого построим асимптотическое разложение решения с начальной функцией из множества $S(\sigma_0, q_1, q_2)$.

Пусть $t \in [-\sigma_0, h - \sigma_0]$. В силу выбора начальной функции имеем

$$f_1\left(\exp\left(-\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\right)\right) = f_1\left(\exp\left(-\frac{\varphi(t-1)}{\varepsilon}\right)\right) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon}\right)\right), \tag{10}$$
$$f_2\left(\exp\left(-\frac{x(t-h)}{\varepsilon}\right)\right) = f_2\left(\exp\left(-\frac{\varphi(t-h)}{\varepsilon}\right)\right) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q_2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Поэтому на данном промежутке уравнение (4) представляется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma + r(t, \varepsilon), \tag{11}$$

где $r(t,\varepsilon)$ — функция, для которой $r(t,\varepsilon) = O(\exp(-a/\varepsilon))$ равномерно по φ и t, $a > 0$. В дальнейшем аналогичные экспоненциальные остатки также обозначены $r(t,\varepsilon)$.

Начальное условие для уравнения (11) имеет вид $x(-\sigma_0) = -\gamma\sigma_0$. Отсюда его решение

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \gamma t + \Delta_1(t,\varepsilon). \tag{12}$$

Для оценки последнего слагаемого в (12) подставим соответствующее решение в уравнение (11). После интегрирования получаем

$$\Delta_1(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\sigma_0}^{t} r(s,\varepsilon)\,ds = r(\xi(t),\varepsilon)\cdot(t+\sigma_0), \qquad \sigma_0 \leqslant \xi(t) \leqslant t \leqslant h-\sigma_0.$$

Отсюда имеем $\Delta_1(t,\varepsilon) = O(\exp(-a/\varepsilon))$ равномерно по φ и t.

Рассмотрим промежуток $t \in [h-\sigma_0, h+\sigma_0]$. На этом промежутке остаётся в силе соотношение (10), а $x(t-h)$ приближённо находится по формуле (12). Поэтому уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -1 + \alpha - \beta f_2\left(\exp\left(-\frac{\gamma(t-h)}{\varepsilon}\right)\right) \tag{13}$$

с начальным условием

$$x_\varphi(h,\varepsilon) = \gamma h + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right). \tag{14}$$

Сделаем замену переменной $t-h = \varepsilon\tau$. Тогда уравнение (13) и начальное условие (14) примут вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon[-1+\alpha-\beta f_2(e^{\gamma\tau})] + r(t,\varepsilon).$$
$$x\big|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = \gamma h + \Delta_1(h,\varepsilon).$$

Его решение может быть записано в виде

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \gamma h + \varepsilon\left[\gamma\tau + \beta\int\limits_{-\infty}^{\tau}(1-f_2(e^{\gamma s}))\,ds\right] + \Delta_2(t,\varepsilon). \tag{15}$$

Проводя оценку последнего слагаемого способом, аналогичным применённому выше для оценки Δ_1, заключаем, что $\Delta_2(t,\varepsilon) = r(t,\varepsilon)$.

Для определения начального условия для следующего промежутка найдём значение функции $x_\varphi(t,\varepsilon)$ в граничной точке $t = h+\sigma_0$. Из (15) следует

$$x_\varphi(h+\sigma_0,\varepsilon) = \gamma(h+\sigma_0) + \varepsilon\beta\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon}(1-f_2(e^{\gamma s}))\,ds + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right). \tag{16}$$

Оценим значение интеграла в (16):

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon}(1-f_2(e^{\gamma s}))\,ds=\int\limits_{-\infty}^{0}(1-f_2(e^{\gamma s}))\,ds+\frac{\sigma_0}{\varepsilon}-\int\limits_{0}^{\infty}f_2(e^{\gamma s})\,ds+\int\limits_{\sigma_0/\varepsilon}^{\infty}f_2(e^{\gamma s})\,ds. \qquad (17)$$

В силу (2) для подынтегрального выражения из последнего интеграла в (17) имеем оценку $f_2(e^{\gamma s})\leqslant be^{-\gamma s}$, из которой вытекает

$$\int\limits_{\sigma_0/\varepsilon}^{\infty}f_2(e^{\gamma s})\,ds\leqslant\frac{b}{\gamma}\exp\left(-\frac{\gamma\sigma_0}{\varepsilon}\right)=O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right).$$

В результате получаем

$$x_\varphi(h+\sigma_0,\varepsilon)=\gamma h+(\alpha-1)\sigma_0-\varepsilon\beta c_0+O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right), \qquad (18)$$

где $c_0=\int\limits_{-\infty}^{0}(f_2(e^{\gamma s})-1)\,ds+\int\limits_{0}^{\infty}f_2(e^{\gamma s})\,ds$ или, после замены $u=e^{\gamma t}$,

$$c_0=\frac{1}{\gamma}\int\limits_{0}^{1}\frac{f_2(u)-1}{u}du+\frac{1}{\gamma}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u}du. \qquad (19)$$

Следующий промежуток $t\in[h+\sigma_0,1-\sigma_0]$. Уравнение (4) на нём принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=-1+\alpha+r(t,\varepsilon).$$

Решая его с начальным условием (18), получаем

$$x_\varphi(t,\varepsilon)=\gamma h+(\alpha-1)\sigma_0-\varepsilon\beta c_0+(\alpha-1)(t-h-\sigma_0)+r(t,\varepsilon). \qquad (20)$$

Рассмотрим промежуток $t\in[1-\sigma_0,1+\sigma_0]$. На данном промежутке уравнение (4) может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dt}=-1+\alpha f_1\left(\exp\left(-\frac{\gamma(t-1)}{\varepsilon}\right)\right),$$

а начальное условие находится по формуле (20):

$$x(1-\sigma_0)=(\alpha-1)(1-\sigma_0)+\beta h-\varepsilon\beta c_0+O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right).$$

Решение данного уравнения осуществляется аналогично решению уравнения (13). После замены переменной $t-1=\varepsilon\tau$ получаем

$$\frac{dx}{d\tau}=\varepsilon[-1+\alpha f_1(e^{\gamma\tau})].$$

$$x|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}=(\alpha-1)(1-\sigma_0)+\beta h-\varepsilon\beta c_0+r(1-\sigma_0,\varepsilon).$$

В результате интегрирования получаем

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - 1 - \beta h + \varepsilon \left[(\alpha-1)\tau - \beta c_0 + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\tau} (f_1(e^{\gamma s}) - 1)\, ds \right] + r(t,\varepsilon). \qquad (21)$$

Значение решения в граничной точке $t = 1 + \sigma_0$ находится путём подстановки соответствующего значения в формулу (21) с последующей оценкой интегрального слагаемого аналогично (17). В итоге получаем

$$x(1+\sigma_0) = \alpha - 1 - \beta h - \sigma_0 - \varepsilon\beta c_0 + \varepsilon\alpha c_1 + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right), \qquad (22)$$

где

$$c_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} (f_1(e^{\gamma s}) - 1)\, ds + \int\limits_{0}^{\infty} f_1(e^{\gamma s})\, ds = \frac{1}{\gamma}\int\limits_{0}^{1} \frac{f_1(u)-1}{u} du + \frac{1}{\gamma}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f_1(u)}{u} du. \qquad (23)$$

Рассмотрим промежуток $t \in [1+\sigma_0, 1+h-\sigma_0]$. На этом промежутке $x(t-h)$ и $x(t-1)$ вычисляются по формуле (12), аргументы функций f_1 и f_2 экспоненциально велики, поэтому уравнение (4) записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = -1 + r(t,\varepsilon). \qquad (24)$$

Решая его с начальным условием (22), получаем

$$x_\varphi(h,\varepsilon) = \alpha - \beta h - \varepsilon\beta c_0 + \varepsilon\alpha c_1 + r(t,\varepsilon). \qquad (25)$$

Из построенной выше асимптотики легко видеть, что уравнение (24) продолжает приближать (4) с экспоненциальной точностью вплоть до точки $t_1 + h - \sigma_0$, где t_1 — точка, в которой $x_\varphi(t_1,\varepsilon) = 0$, значение которой находится из (25):

$$t_1 = \alpha - \beta h - \varepsilon\beta c_0 + \varepsilon\alpha c_1 + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right).$$

Асимптотическое интегрирование на последующих промежутках осуществляется полностью аналогично уже рассмотренным, поэтому приведём его более схематично.

На промежутке $t \in [t_1 + h - \sigma_0, t_1 + h + \sigma_0]$ уравнение (4) представляется в виде

$$\frac{dx}{dt} = -1 - \beta f_2\left(\exp\left(-\frac{x(t-h)}{\varepsilon}\right)\right),$$

а начальное условие имеет вид

$$x(t_1 + h - \sigma_0) = -h + \sigma_0 + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right).$$

После выполнения замены $t = t_1 + h + \varepsilon\tau$ и интегрирования полученного уравнения получаем

$$x = -h + \varepsilon\left[-\tau + \beta\int\limits_{-\infty}^{\tau} f_2(e^{-s})\,ds\right] + r(t,\varepsilon). \tag{26}$$

Значение в граничной точке $t = t_1 + h + \sigma_0$:

$$x_\varphi(t_1 + h + \sigma_0, \varepsilon) = -h - (\beta+1)\sigma_0 - \varepsilon\beta c_2 + r(t_1 + h + \sigma_0, \varepsilon), \tag{27}$$

где

$$c_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} f_2(e^{-s})\,ds + \int\limits_{0}^{\infty}(f_2(e^{-s}) - 1)\,ds = \int\limits_{0}^{1}\frac{f_2(u) - 1}{u}du + \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u}du. \tag{28}$$

Следующий промежуток $t \in [t_1 + h + \sigma_0, t_1 + 1 - \sigma_0]$. На нём уравнение (4) записывается в виде:

$$\frac{dx}{dt} = -1 - \beta + r(t,\varepsilon). \tag{29}$$

Интегрируя его с начальным условием (27), получаем

$$x_\varphi(h,\varepsilon) = -h - (\beta+1)\sigma_0 - \varepsilon\beta c_2 - (\beta+1)(t - t_1 - h - \sigma_0) + r(t,\varepsilon). \tag{30}$$

Следующий шаг интегрирования содержит точку переключения релейной функции. Пусть $t \in [t_1 + 1 - \sigma_0, t_1 + 1 + \sigma_0]$. Тогда уравнение (4) и его начальное условие, найденное по формуле (30), записываются в виде

$$\frac{dx}{dt} = -1 - \beta + \alpha f_1\left(\exp\left(-\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\right)\right) + r(t,\varepsilon),$$
$$x(t_1 + 1 - \sigma_0) = -h - (\beta+1)(1 - h - \sigma_0) - \varepsilon\beta c_2 + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right).$$

После замены переменной $t - t_1 - 1 = \varepsilon\tau$ и решения результирующего уравнения получаем

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -h - (\beta+1)(1-h) - \varepsilon\left[(\beta+1)\tau + \beta c_2 - \alpha\int\limits_{-\infty}^{\tau} f_1(e^{-s})\,ds\right] + r(t,\varepsilon). \tag{31}$$

Перейдём к последнему промежутку асимптотического интегрирования $t \in [t_1 + 1 + \sigma_0, T_0]$. Уравнение (4) на данном промежутке и начальное условие, найденное из (31), имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma + r(t,\varepsilon), \tag{32}$$

$$x_\varphi(t_1 + 1 + \sigma_0, \varepsilon) = -1 - \beta + \beta h + \gamma\sigma_0 - \varepsilon\beta c_2 + \varepsilon\alpha c_3 + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right). \tag{33}$$

Здесь

$$c_3 = \int\limits_{-\infty}^{0} f_1(e^{-s})\,ds + \int\limits_{0}^{\infty} (f_1(e^{-s}) - 1)\,ds = \int\limits_{0}^{1} \frac{f_1(u) - 1}{u} du + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f_1(u)}{u} du. \tag{34}$$

Решение уравнения (32) имеет вид

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -1 - \beta + \beta h + \gamma(t - t_1 - 1) - \varepsilon\beta c_2 + \varepsilon\alpha c_3 + r(t,\varepsilon). \tag{35}$$

Из (35) найдём значение $T_\varphi(\varepsilon)$ такое, что $x_\varphi(T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon) = -\gamma\sigma_0$:

$$T_\varphi(\varepsilon) = \alpha + 1 - \beta h + \frac{1 + \beta(1-h)}{\gamma} + \varepsilon\cdot\left[-\beta c_0 + \alpha c_1 + \frac{\beta c_2 - \alpha c_3}{\gamma}\right] + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right), \tag{36}$$

где значения констант определяются выражениями (19), (23), (28), (34). После их подстановки в (36) оказывается, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Окончательно получаем равномерно по φ и ε:

$$T_\varphi(\varepsilon) = \alpha + 1 - \beta h + \frac{1 + \beta(1-h)}{\gamma} + O\left(\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\right). \tag{37}$$

Собирая построенные асимптотические разложения (12), (15), (20), (21), (25), (26), (30), (31), (35) и сопоставляя их с (8), заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_0 - \sigma_0} |x_\varphi(t,\varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon),$$

где $O(\varepsilon)$ равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Кроме того, в силу (35), (37) имеем

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 - \sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \tag{38}$$

Определим оператор последования $\Pi_\varepsilon(\varphi) : S(\sigma_0, q_1, q_2) \to C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ по правилу

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(T_\varphi(\varepsilon) + t, \varepsilon), \qquad -1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0. \tag{39}$$

Будем считать, что

$$0 < q_1 < -\left(\max_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0} x_0(t)\right), \qquad q_2 > -\left(\min_{-1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0} x_0(t)\right). \tag{40}$$

Тогда в силу условий (7), (38), (40) получаем для достаточно малых $\varepsilon > 0$, что $\Pi_\varepsilon S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, где $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ — выпуклое компактное множество, определённое формулой (6).

Из последнего факта, а также из компактности оператора Π_ε, в силу принципа Лерэ—Шаудера следует существование функции $\varphi_* = \varphi_*(t,\varepsilon)$ такой, что $\Pi_\varepsilon\varphi_* = \varphi_*$. При этом решение $x_*(t,\varepsilon)$ уравнения (4) с данной начальной функцией является периодическим с периодом $T_* = T_\varphi(\varepsilon)\Big|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (37), (38) удовлетворяет условию (9).

4. Единственность и устойчивость периодического решения

Рассмотрим доказательство единственности и устойчивости периодического решения $\varphi_*(t,\varepsilon)$, существование которого было доказано в предыдущей главе.

Из (39) следует, что оператор Π_ε является непрерывно дифференцируемым по φ. Следуя [3], выпишем его производную Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon$ в виде

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 = g(t+T_\varphi,\varepsilon) - \frac{g(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)}{x'_\varphi(T_\varphi-\sigma_0,\varepsilon)} x'_\varphi(t+T_\varphi,\varepsilon), \qquad -1-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0, \quad (41)$$

где $g(t,\varepsilon)$ — решение уравнения (4), линеаризованного на $x_*(t,\varepsilon)$,

$$\frac{dg}{dt} = \alpha A_1(t-1,\varepsilon) g(t-1) - \beta A_2(t-h,\varepsilon) g(t-h), \qquad -\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_\varphi - \sigma_0 \quad (42)$$

с начальной функцией $g_0 \in C_0$, где

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0] | g_0(-\sigma_0) = 0\},$$
$$A_j(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f'_j\left(\exp\left(\frac{x_\varphi(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right) \exp\left(\frac{x_\varphi(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\right), \qquad j = 1,2.$$

Оценим норму линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon$ в пространстве C_0 с нормой

$$||g_0|| = \max_{-1-\sigma_0 \leqslant t - \sigma_0} |g_0(t)|.$$

Для этого сначала покажем, что для решения $g(t,\varepsilon)$ уравнения (42) выполнено неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_\varphi - \sigma_0} |g(t,\varepsilon)| \leqslant M \exp(-a/\varepsilon) ||g_0||, \quad (43)$$

где M, a — некоторые положительные константы, не зависящие от ε, φ, g_0.

Рассмотрим промежуток $t \in [-\sigma_0, h-\sigma_0]$. На данном промежутке имеем $g(t-1) = g_0(t-1)$, $g(t-h) = g_0(t-h)$, поэтому решение уравнения (42) представляется в виде

$$g(t,\varepsilon) = \alpha \int\limits_{-\sigma_0}^{t} A_1(s-1,\varepsilon) g_0(s-1)\, ds - \beta \int\limits_{-\sigma_0}^{t} A_2(s-h,\varepsilon) g_0(s-h)\, ds. \quad (44)$$

В силу (2) имеем

$$\max_{-\sigma \leqslant t \leqslant 1-\sigma_0} |A_j(t,\varepsilon)| \leqslant M \exp(-a/\varepsilon), \qquad j = 1,2. \quad (45)$$

Из (44) и (45) получаем оценку, аналогичную (43), на промежутке $t \in [-\sigma_0, 1-\sigma_0]$. Далее указанная оценка распространяется методом шагов: весь промежуток $t \in [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ разбивается на участки длины единица, и на каждом из них выписывается решение уравнения (42) и оценки, аналогичные (45). Окончательно из (41) и (43) имеем

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} ||\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)||_{C_0 \to C_0} \leqslant M \exp(-a/\varepsilon).$$

Из последней оценки следует, что оператор $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ является сжимающим и имеет экспоненциально малый спектральный радиус. Так как мультипликаторы μ цикла $x_*(t,\varepsilon)$ (кроме простого единичного) являются собственными значениями этого оператора, то все они лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leqslant M \exp(-a/\varepsilon)\}$.

Отсюда заключаем, что неподвижная точка φ_* является единственной, и ей соответствует устойчивый релаксационный цикл $x_*(t,\varepsilon)$ уравнения (4) и, соответственно, устойчивый релаксационный цикл $u_*(t,\lambda) = \exp(\lambda x_*(t, 1/\lambda))$ уравнения (3) с периодом

$$T_\varphi(\lambda) = \alpha + 1 - \beta h + \frac{1 + \beta(1-h)}{\gamma} + O(\exp(-a\lambda)).$$

Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность С. Д. Глызину за постановку задачи и рекомендации по её решению.

Список литературы

1. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.

2. *Глызин С. Д.* Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 28–47.

3. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 126–153.

Relaxation cycles of the generalized pulsed neuron equation

Paramonov I. V.

Keywords: relaxation oscillations, pulsed neuron, differential-difference equation, asymptotic analysis

In the paper we analyze the generalized model of the V. V. Mayorov and I. Yu. Myshkin pulsed neuron. The neuron equation contains a delay of the sodium conductance with respect to the transmembrane potential as well as the potassium one. We proved the exisence and stability of the periodic solution and obtained its asymptotic expansion.

Сведения об авторе:
Парамонов Илья Вячеславович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
старший преподаватель кафедры компьютерных сетей