Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 6 (2017), с. 802–810
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 6 (2017), pp. 802–810

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-6-802-810

УДК 62-503.54

Синтез управления и наблюдателя для слабо нелинейных систем на основе техники псевдолинеаризации

Макаров Д. А.[1]

получена 15 марта 2017

Аннотация. В работе для одного класса слабо нелинейных систем с зависящими от состояния коэффициентами рассматривается подход к построению нелинейного следящего управления по выходу на конечном интервале времени. Предложенный метод синтеза состоит из двух основных этапов. Сначала с помощью ранее предложенного автором алгоритма на основе уравнений Риккати, с зависящими от состояния коэффициентами (State Dependent Riccati Equation – SDRE), находится нелинейный регулятор по состоянию. На втором этапе ставится задача построения наблюдателя полного порядка, которая сводится к задаче дифференциальной игры. Вид её решения получен с помощью принципа гарантированного управления, позволяющего относительно заданного функционала найти наилучшие коэффициенты наблюдателя при наихудшей реализации неопределенностей. Однотипность полученных уравнений позволила для определения матрицы наблюдателя использовать алгоритм решения из первого этапа. Особенностями предложенного подхода являются отсутствие принципа разделения задач синтеза управления и наблюдения, который имеет место в линейных системах, поскольку матрица коэффициентов наблюдателя оказалась зависимой от матрицы коэффициентов обратной связи, и использование численно-аналитических процедур для определения этих матриц, что позволяет значительно снизить вычислительную сложность алгоритма управления.

Ключевые слова: задача слежения, нелинейное управление, уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами, гарантированное управление

Для цитирования: Макаров Д. А., "Синтез управления и наблюдателя для слабо нелинейных систем на основе техники псевдолинеаризации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:6 (2017), 802–810.

Об авторах:
Макаров Дмитрий Александрович, orcid.org/0000-0001-8930-1288, канд. физ.-мат. наук,
Общество с ограниченной ответственностью «Технологии системного анализа»,
Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»
Российской академии наук, пр-т 60-летия Октября, 9, г. Москва, 117312 Россия, e-mail: makarov@isa.ru

Благодарности:
[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-60198-мол_а_дк, № 17-07-00281-а).

Введение

В настоящее время для решения задач управления нелинейными системами применяется множество подходов. Одним из перспективных является техника, основанная на решении матричных уравнений Риккати для систем с коэффициентами (SDRE), зависящими от состояния (см. обзоры [1, 2]). Её суть состоит в представлении исходной системы в псевдолинейном виде, в котором матрицы системы и управления зависят от состояния. Закон управления имеет стандартный для линейно-квадратичной задачи вид, однако для его реализации в процессе управления необходимо в каждый момент времени численно находить решение соответствующего SDRE, что может наталкиваться на вычислительные ограничения. В работе [3] на основе SDRE-техники был предложен подход для решения задачи слежения на конечном интервале регулирования для слабо нелинейных полностью наблюдаемых систем. Поскольку отыскание точного решения в общем случае представляется достаточно трудоемкой с вычислительной точки зрения задачей, был предложен численно-аналитический алгоритм приближенного синтеза, существенно снижающий вычислительную сложность по сравнению с распространенной SDRE-техникой. Однако для применения подхода [3] необходимо построить соответствующий наблюдатель, позволяющий получить оценку неизвестного состояния системы. Эта задача сводится к задаче синтеза управления при неопределенности, для решения которой используется минимаксный принцип из [4–6].

1. Синтез регулятора

Рассмотрим управляемую нелинейную систему вида

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ y = Cx,\ x(t_0) = x^0,\\ A(x,\mu) = A_0 + \mu A_1(x),\ B(x,\mu) = B_0 + \mu B_1(x),\\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,\ y \in Y \subset \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in [t_0, t_1],\ 0 < \mu \le \mu_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где x, y и u – векторы состояния, выхода и управления соответственно, μ_0 – некоторое заданное достаточно малое положительное число, A_0, B_0 и C – известные постоянные матрицы, $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ – известные матрицы с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x элементами, X и Y – некоторые ограниченные множества, для любого непрерывного управления $u(t)$ траектории замкнутой системы (1) существуют, единственны и принадлежатX на $[t_0, t_1]$.

Пусть эталонное поведение системы (1) описывается решением дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\dot{x}_r = A_r(x_r,\mu)x_r,\ y_r = Cx_r,\ x_r(t_0) = x_r^0,\\ A_r(x_r,\mu) = A_{r,0} + A_{r,1}(x_r),\ x_r \in X,\ y_r \in Y,\ t \in [t_0, t_1],\end{gathered}$$

где x_r и y_r – желаемые (эталонные) траектория системы и ее выход, $A_{r,0}$ – известная постоянная матрица, а $A_{r,1}(x_r)$ – известная матрица с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x_r элементами. Начальные состояния x^0 и ${x_r}^0$ в общем случае полагаются неизвестными. Если ${x_r}^0$ известно, то вся эталонная траектория фактически заранее известна. Этому случаю может соответствовать, например, использование специального задающего устройства, начальное состояние которого может выбираться.

Определим следующий функционал качества

$$I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)Fe(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^TQ(y,y_r,\mu)e + u^TRu\right)dt \to \min_u, \\ Q(y,y_r,\mu) = Q_0 + \mu Q_1(y,y_r),\ e = y - y_r, \tag{2}$$

где заданные симметрические матрицы $Q(y,y_r,\mu) \geq 0$, $Q_0 > 0$, $R > 0$, $F > 0$ при $y, y_r \in Y$, $0 < \mu \leq \mu_0$. Здесь и далее знаками >0 (≥ 0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) соответствующей матрицы. Необходимо найти такое непрерывное управление по выходу $u(y,\ \mu,\ t)$, которое обеспечивает приближенное решение задачи (1)–(2).

Известно, что исходная задача (1)–(2) может быть представлена [7] в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + \tilde{B}(x,\mu)u,\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \\ \tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t_1)\tilde{F}\tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\tilde{x}^T\tilde{Q}(\tilde{y},\mu)\tilde{x} + u^TRu\right)dt \to \min_u, \tag{3}$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$ – расширенные векторы состояния и выхода,

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} A(x,\mu) & 0 \\ 0 & A_r(x_r,\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\ \tilde{B}(x,\mu) = \begin{bmatrix} B(x,\mu) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r},$$

$$\tilde{Q}(\tilde{y},\mu) = \begin{bmatrix} C^TQ(\tilde{y},\mu)C & -C^TQ(\tilde{y},\mu)C \\ -C^TQ(\tilde{y},\mu)C & C^TQ(\tilde{y},\mu)C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0,$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} C^TFC & -C^TFC \\ -C^TFC & C^TFC \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0,$$

нулевые блоки в матрицах $\tilde{A}(\tilde{x},\mu)$ и $\tilde{B}(x,\mu)$ есть матрицы соответствующих размерностей.

Зададим представления

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \tilde{A}_0 + \mu\tilde{A}_1(\tilde{x}),\ \tilde{B}(x,\mu) = \tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(x),\ \tilde{Q}(\tilde{y},\mu) = \tilde{Q}_0 + \mu\tilde{Q}_1(\tilde{y}), \\ \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_{r,0} \end{bmatrix},\ \tilde{A}_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_{r,1}(x_r) \end{bmatrix},\ \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{B}_1(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} C^TQ_0C & -C^TQ_0C \\ -C^TQ_0C & C^TQ_0C \end{bmatrix},\ \tilde{Q}_1(\tilde{y}) = \begin{bmatrix} C^TQ_1(\tilde{y})C & -C^TQ_1(\tilde{y})C \\ -C^TQ_1(\tilde{y})C & C^TQ_1(\tilde{y})C \end{bmatrix}.$$

Введем следующие условия:

I. Траектории замкнутой системы (1) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0, t_1]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где X – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $\tilde{A}_1(\tilde{x})$, $\tilde{B}_1(x)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $x,\ x_r \in X$; $\mu \in (0,\ \mu_0]$.

II. Тройка матриц $\left\{\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, H_P\right\}$, где $H_P^TH_P = \tilde{Q}_0$, стабилизируема и наблюдаема.

III. Матрицы системы $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1(\tilde{x})$, $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1(x)$ и симметрические матрицы критерия $R > 0$, $Q_0 \geq 0$, $Q_1(y) \geq 0$, $F > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $\tilde{P}_0 + \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t) > 0$ при $x,\ x_r \in X$, $t \in [t_0, t_1)$, $\mu \in (0,\ \mu_0]$.

В работе [3] при условиях I–III для полностью наблюдаемой системы (вектор x точно известен) предложено управление, приближенно решающее задачу (3), в виде

$$u(\tilde{x},\mu,t) = -K(\tilde{x},\mu,t)\tilde{x} = u_0(\tilde{x}) + \mu u_1(\tilde{x},t,\mu), \tag{4}$$

где $K(\tilde{x},\mu,t) = R^{-1}(\tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(\tilde{x}))^T(\tilde{P}_0 + \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t))$, $u_0(\tilde{x}) = -R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\tilde{x}$ – линейная часть, а нелинейную коррекцию формирует $\mu u_1(\tilde{x},t,\mu) = -\mu R^{-1}\left(\tilde{B}_1^T(\tilde{x})\tilde{P}_0 + (\tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(\tilde{x}))^T\tilde{P}_1(\tilde{x},t)\right)\tilde{x}$. Согласно [3] при условиях I–III имеем следующий численно-аналитический алгоритм построения приближенного управления в задаче нелинейного слежения.

1. Находим $u_0(\tilde{x})$ как $u_0(\tilde{x}) = -R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\tilde{x}$, где $\tilde{P}_0$ – положительно определенное решение уравнения $\tilde{P}_0\tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T\tilde{P}_0 - \tilde{P}_0\tilde{B}_0R_0^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0 + \tilde{Q}_0 = 0$.

2. Находим $\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t)$ с помощью

$$\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t) = e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}M_Pe^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)} + \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T\sigma}D_P(\tilde{x})e^{\tilde{A}_{Pcl,0}\sigma}d\sigma, \tag{5}$$

   где $D_P(\tilde{x}) = \tilde{P}_0\left(\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\right) + \left(\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\right)^T\tilde{P}_0 + \tilde{Q}_1$, $\tilde{A}_{Pcl,0} = \tilde{A}_0 - \tilde{B}_0R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0$, а матрица M_P находится как

$$M_P = \frac{1}{\mu}(\tilde{F} - \tilde{P}_0) - \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}\, D_P\left(\tilde{x}(t_1)\right)\big|_{x(t_1)=x(t)}\, e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma.$$

3. Определяем итоговое управление (4).

Сделаем несколько замечаний. Поскольку будущая траектория системы является неизвестной, в предложенном алгоритме матрица $D_P\left(\tilde{x}(t_1)\right)$ вычисляется в предположении, что $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}(t_1)$ слабо отличаются вблизи t_1, т.е. вместо $\tilde{x}(t_1)$ используется $\tilde{x}(t)$. Если эталонная траектория известна заранее, то можно, предполагая близость $x(t_1)$ к $x_r(t_1)$, вычислить D_P, используя $x(t_1) = x_r(t_1)$. «Жесткость» этих двух предположений смягчается тем, что первый член в (5) в силу $Re\lambda\left(\tilde{A}_{Pcl,0}\right) < 0$ существенен лишь в окрестности t_1. Отметим, что алгоритм предлагает аналитическую формулу для неизвестной матрицы $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$, зависящей от состояния системы, что существенно снижает вычислительную сложность алгоритма управления.

Кроме того, отметим, что имеет место выражение

$$\begin{gathered}\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu) = \tilde{P}_0 + \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t,\mu) = \\ e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}\tilde{F}e^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)} + \tilde{P}_0 - e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}\tilde{P}_0e^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)} + \\ \mu\left(\int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T\sigma}D(\tilde{x}(t))e^{\tilde{A}_{Pcl,0}\sigma}d\sigma - e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}\int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T\sigma}D\left(\tilde{x}(t)\right)e^{\tilde{A}_{Pcl,0}\sigma}d\sigma e^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)}\right).\end{gathered}$$

Таким образом, поскольку $e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}\tilde{F}e^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)} + \tilde{P}_0 - e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}\tilde{P}_0e^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)} > 0$ при $t \in [t_0,t_1)$, то условие III будет всегда выполнено при достаточно малом μ_0. Кроме того, для выполнения III достаточно, чтобы $D\left(\tilde{x}(t)\right) > 0$ при $x,\ x_r \in X,\ t \in [t_0,t_1)$.

Предложенный алгоритм может быть применен к задаче управления по выходу, если построить соответствующий наблюдатель, определяющий в каждый момент времени оценку неизвестного состояния $\tilde{x}$.

2. Синтез наблюдателя

Составим уравнение наблюдателя состояния полного порядка [8]

$$\dot{\tilde{\chi}} = \tilde{A}(\tilde{\chi},\mu)\tilde{\chi} + \tilde{B}(\chi,\mu)u + \Gamma\tilde{C}(\tilde{x}-\tilde{\chi}), \quad \tilde{\chi}(0) = \tilde{\chi}^0, \tag{6}$$

где $\tilde{\chi} = \begin{bmatrix} \chi \\ \chi_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ – вектор оценки состояния $\tilde{x}$, т.е. χ – оценка x, а χ_r – оценка x_r, $\chi, \chi_r \in X$, $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$, а $\Gamma \in \mathbb{R}^{2n\times 2m}$ – подлежащая определению матрица коэффициентов наблюдателя. Вычитая (6) из первого уравнения системы (3), получаем

$$\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{\chi}} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} - \tilde{A}(\tilde{\chi},\mu)\tilde{\chi} + (\tilde{B}(x,\mu) - \tilde{B}(\chi,\mu))u - \Gamma\tilde{C}(\tilde{x}-\tilde{\chi}) =$$
$$(\tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C})(\tilde{x}-\tilde{\chi}) + \mu\left(\tilde{A}_1(\tilde{x})\tilde{x} - \tilde{A}_1(\tilde{\chi})\tilde{\chi} + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))u\right).$$

Введем ошибку слежения $e_x = \tilde{x} - \tilde{\chi}$, тогда последнее уравнение можно переписать в виде

$$\dot{e}_x = (\tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C})e_x + \mu\left(\tilde{A}_1(\tilde{x})\tilde{x} - \tilde{A}_1(\tilde{\chi})\tilde{\chi} + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))u\right).$$

Подчеркнем, что $\tilde{x}$ и x здесь являются неизвестными. Рассмотрим неоднородность, присутствующую при μ. С учетом того, что управление (4) будет строиться на основе наблюдателя, справедливо $u = -K(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{\chi}$. Тогда имеем

$$\tilde{A}_1(\tilde{x})\tilde{x} - \tilde{A}_1(\tilde{\chi})\tilde{\chi} - (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K\tilde{\chi} =$$
$$\tilde{A}_1(\tilde{x})\tilde{x} - (\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)\tilde{\chi} + (\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)\tilde{x} -$$
$$(\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)\tilde{x} =$$
$$(\tilde{A}_1(\tilde{x}) - \tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)\tilde{x} + (\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) + (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)e_x =$$
$$(\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - \tilde{B}_1(\chi)K)e_x + \tilde{B}_1(x)Ke_x + (\tilde{A}_1(\tilde{x}) - \tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K)\tilde{x} =$$
$$(\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - \tilde{B}_1(\chi)K)e_x + l(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t),$$

где $l(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t) = \tilde{B}_1(x)K(\tilde{\chi},\mu,t)e_x + (\tilde{A}_1(\tilde{x}) - \tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - (\tilde{B}_1(x) - \tilde{B}_1(\chi))K(\tilde{\chi},\mu,t))\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ – неизвестный вектор. Представим l в виде $l(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t) = L(\tilde{\chi},\mu,t)e_x$, где $L(\tilde{\chi},\mu,t) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ – неизвестная матрица. Тогда уравнение динамики ошибки имеет вид

$$\dot{e}_x = (\tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C} + \mu(\tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - \tilde{B}_1(\chi)K + L))e_x =$$
$$(\tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C} + \mu(\tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi},\mu,t) + L))e_x = W(\tilde{\chi},\mu,t,L)e_x,$$

где $W(\tilde{\chi},\mu,t,L) = \tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C} + \mu(\tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi},\mu,t) + L)$, $\tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi},\mu,t) = \tilde{A}_1(\tilde{\chi}) - \tilde{B}_1(\chi)K(\tilde{\chi},\mu,t)$.

От полученной системы для ошибки перейдем к другой, обладающей при каждом $\tilde{\chi},\mu,t,L$ теми же собственными значениями, а значит, в линейном приближении эквивалентную исходной с точки зрения свойств устойчивости

$$\dot{e}_x = W^T(\tilde{\chi},\mu,t,L)e_x = (\tilde{A}_0 - \Gamma\tilde{C} + \mu(\tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi},\mu,t) + L))^T e_x =$$
$$(\tilde{A}_0 + \mu\tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi},\mu,t))^T e_x - \tilde{C}^T\Gamma^T e_x + \mu L^T e_x.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\dot{e}_x = \bar{A}^T(\tilde{\chi},\mu,t)e_x - \tilde{C}^T\upsilon + \upsilon, \tag{7}$$

где $\bar{A}^T(\tilde{\chi},\mu,t) = \tilde{A}_0^T + \mu\tilde{A}_{cl,1}^T(\tilde{\chi},\mu,t)$, а $v(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t) = \Gamma^T e_x \in \mathbb{R}^{2m}$, $\upsilon(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t) = \mu L^T e_x \in \mathbb{R}^{2n}$ – новые управление и неизвестное возмущение.

Рассмотрим неопределенность $\upsilon(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t)$ как управление противодействующего игрока. Такая трактовка приводит к дифференциальной игре. Для её решения применим принцип гарантированного управления [4–6], который приводит к отысканию оптимального $v(\tilde{x},\tilde{\chi},\mu,t)$ при наихудшей реализации υ с точки зрения функционала

$$\begin{gathered} I_e(v,\upsilon) = \\ \tfrac{1}{2}e_x^T(t_1)F_e e_x(t_1) + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e_x^T Q_e(\tilde{\chi},\mu)e_x + v^T R_v v - \upsilon^T R_\upsilon \upsilon\right)dt \to \min_v \max_\upsilon , \\ Q_e(\tilde{\chi},\mu) = Q_{e,0} + \mu Q_{e,1}(\tilde{\chi}), \end{gathered} \tag{8}$$

где $F_e \geq 0$, $Q_{e,0} \geq 0$, $Q_{e,1} \geq 0$, $R_v > 0, R_\upsilon > 0$ – заданные весовые матрицы.

Определим условия

IV. Пара матриц $\left\{\bar{A}^T(\tilde{\chi},\mu,t),\tilde{C}^T\right\}$ управляема при всех $\chi,\chi_r \in X$, $\mu \in (0,\ \mu_0]$, $t \in [t_0,t_1]$.

V. $\tilde{C}^T R_v^{-1}\tilde{C} - R_\upsilon^{-1} > 0$.

По аналогии с работой [6], где интервал регулирования предполагается достаточно большим по сравнению со временем переходного процесса, при выполнении IV–V законы управления и возмущения определяются как $v = R_v^{-1}CN(\tilde{\chi},\mu,t)e_x$, $\upsilon = R_\upsilon^{-1}N(\tilde{\chi},\mu,t)e_x$, где $N(\tilde{\chi},\mu,t)$ – положительно определенное решение уравнения SDRE

$$\dot{N} + N\bar{A}^T + \bar{A}N - N\left(\tilde{C}^T R_v^{-1}\tilde{C} - R_\upsilon^{-1}\right)N + Q_e = 0, \quad N(t_1) = F_e, \tag{9}$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\begin{gathered} \Gamma(\tilde{\chi},\mu,t) = N(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{C}^T R_v^{-1}, \\ L(\tilde{\chi},\mu,t) = \tfrac{1}{\mu}N(\tilde{\chi},\mu,t)R_\upsilon^{-1}. \end{gathered} \tag{10}$$

Основную трудность представляет решение дифференциального SDRE (9). Однако можно заметить, что сформулированная выше задача (3) и задача (7)–(8) имеют схожую структуру. Поэтому для приближенного решения (9) в задаче построения наблюдателя можно применить уже изложенный выше алгоритм из [3], использовавшийся для решения схожего SDRE в задаче синтеза управления. Для этого введем условия

VI. Траектории замкнутой системы (7) на $[t_0,t_1]$ существуют, единственны и $\chi,\chi_r \in X$ для любых непрерывных $v(t)$, $\upsilon(t)$; элементы матрицы $\bar{A}(\tilde{\chi},\mu,t)$ ограничены, непрерывны и достаточно гладкие при $\chi,\chi_r \in X, \mu \in (0,\ \mu_0], t \in [t_0,t_1]$.

VII. Тройка матриц $\left\{\tilde{A}_0^T,\tilde{C}^T,H_N\right\}$, где $H_N^T H_N = Q_{e,0}$, стабилизируема и наблюдаема.

VIII. Матрицы системы $\tilde{A}_0, \tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi}, \mu, t)$, $\tilde{C}$ и симметрические матрицы критерия $R_v > 0, R_v > 0$, $Q_{e,0} \geq 0, Q_{e,1}(\tilde{\chi}) \geq 0$, $F_e \geq 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $N_0 + \mu N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) > 0$ при $\chi, \chi_r \in X,\ t \in [t_0, t_1),\ \mu \in (0,\ \mu_0]$.

Таким образом, в соответствии с разделом 1 находится регулятор по состоянию. Затем, при выполнении IV–VIII строится наблюдатель по следующей численно-аналитической процедуре.

1. Находим N_0 как положительно определенное решение уравнения

$$N_0 \tilde{A}_0^T + \tilde{A}_0 N_0 \ - N_0 \left(\tilde{C}^T R_v^{-1} \tilde{C} - R_v^{-1} \right) N_0 + Q_{e,0} = 0.$$

2. Находим $N_1(\tilde{\chi}, \mu, t)$ с помощью

$$N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) = e^{\tilde{A}^T_{Ncl,0}(t_1 - t)} M_N e^{\tilde{A}_{Ncl,0}(t_1 - t)} + \int_0^\infty e^{\tilde{A}^T_{Ncl,0}\sigma} D_N(\tilde{\chi}, \mu, t) e^{\tilde{A}_{Ncl,0}\sigma} d\sigma,$$

где

$$\begin{gathered} M_N = \tfrac{1}{\mu}(F_e - N_0) - \int_0^\infty e^{\tilde{A}^T_{Ncl,0}\sigma}\ D_N\left(\tilde{\chi}(t_1), \mu, t_1\right)\big|_{\tilde{\chi}(t_1) = \tilde{\chi}(t)} e^{\tilde{A}_{Ncl,0}\sigma} d\sigma, \\ D_N(\tilde{\chi}, \mu, t) = N_0 \tilde{A}^T_{cl,1}(\tilde{\chi}, \mu, t) + \tilde{A}_{cl,1}(\tilde{\chi}, \mu, t) N_0 + Q_{e,1}(\tilde{\chi}), \\ \tilde{A}_{Ncl,0} = \tilde{A}_0^T - \left(\tilde{C}^T R_v^{-1} \tilde{C} - R_v^{-1} \right) N_0. \end{gathered}$$

3. Определяем $\Gamma(\tilde{\chi}, \mu, t)$ с помощью (10), считая $N(\tilde{\chi}, \mu, t) = N_0 + \mu N_1(\tilde{\chi}, \mu, t)$.

4. Находим наблюдатель (6), задав начальное состояние $\tilde{\chi}^0$ произвольным образом.

Теперь мы можем применить найденное управление (4), используя в нем вместо неизвестного вектора состояния $\tilde{x}$ его оценку $\tilde{\chi}$.

Замечание 1. В отличие от линейных систем [9] в данном случае принцип разделения задач синтеза управления и наблюдения полностью не выполняется, поскольку матрица коэффициентов наблюдателя Γ зависит от матрицы коэффициентов обратной связи K.

Замечание 2. Если известно начальное состояние x^0 или ${x_r}^0$, тогда при $t \geq t_0$ с помощью наблюдателя можно получить абсолютно точные оценки вектора x или x_r соответственно, задав $\chi^0 = x^0$ или ${\chi_r}^0 = {x_r}^0$. Если эталонная траектория x_r известна заранее (что означает $\chi_r \equiv x_r$ согласно замечанию выше), то можно, предполагая близость $x(t_1)$ к $x_r(t_1)$ и близость $\chi(t_1)$ к $\chi_r(t_1)$, вычислять D_N, используя $\chi(t_1) = \chi_r(t_1) = x_r(t_1)$.

Замечание 3. Как в случае с условием III, условие VIII выполняется при достаточно малом μ_0.

Заключение

В данной статье рассмотрен подход к построению нелинейного управления по выходу для задачи слежения в слабо нелинейной системе. Построение наблюдателя состояния основано на принципе гарантированного управления. Синтез управления и наблюдателя приводит к необходимости рассмотрения подобных уравнений Риккати, с зависящими от состояния коэффициентами, и для их решения применяется один и тот же приближенный подход. Его основное достоинство – использование аналитических выражений, которые существенно снижают вычислительные затраты по сравнению с обычным методом, когда соответствующее уравнение Риккати решается в процессе управления для каждого состояния системы.

Список литературы / References

[1] Cimen T., "Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **35**:4 (2012), 1025–1047.

[2] Cloutier J. R., "State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview", *Proc. American Control Conference*, **2** (1997), 932–936.

[3] Макаров Д. А., "Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния. Часть I. Алгоритм", *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2017, № 3, 10–19; [Makarov D. A., "A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem. Part I. An algorithm", *Information Technologies and Computing Systems*, 2017, № 3, 10–19, (in Russian).]

[4] Афанасьев В. Н., *Динамические системы управления с неполной информацией: алгоритмическое конструирование*, УРСС, КомКнига, М., 2007, 214 с.; [Afanasiev V. N., *Dinamicheskie sistemy upravlenija s nepolnoj informaciej: algoritmicheskoe konstruirovanie*, URSS, KomKniga, Moscow, 2007, 214 pp., (in Russian).]

[5] Афанасьев В. Н., "Концепция гарантированного управления неопределенными объектами", *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2010, № 1, 24–31; English transl.: Afanas'ev V.N., "Guaranteed control concept for uncertain objects", *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **49**:1 (2010), 22–29.

[6] Афанасьев В. Н., "Метод расширенной линеаризации в задаче управления неопределенным динамическим нелинейным объектом", *Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации и управления*, Материалы 4-го научно-технического семинара, ИПИ РАН, М., 2014, 47–54; [Afanas'ev V. N., "Extended linearization method in the problem of uncertain nonlinear object control", *Sovremennye problemy prikladnoy matematiki, informatiki, avtomatizatsii i upravleniya*, IPI RAN, Moscow, 2014, 47–54, (in Russian).]

[7] *Методы классической и современной теории автоматического управления*, Учебник в 5 т.. Т. 4: *Теория оптимизации систем автоматического управления*, 2-е изд., перераб. и доп., ред. Пупков К. А., Егупов Н. Д., Издательство МГТУ им. Баумана, М., 2004, 742 с.; [*Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija*, Uchebnik v 5 t.. V. 4: *Teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravlenija*, 2-e izd., pererab. i dop., eds. Pupkov K. A., Egupov N. D., Izdatelstvo MGTU im. Baumana, Moscow, 2004, 742 pp., (in Russian).]

[8] Kwwakernaak H., Sivan R., *Linear optimal control systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[9] Первозванский А. А., *Курс теории автоматического управления*, Наука, М., 1986, 616 с.; [Pervozvanskij A. A., *Kurs teorii avtomaticheskogo upravlenija*, Nauka, Moscow, 1986, 616 pp., (in Russian).]

Makarov D. A., "Synthesis of Control and State Observer for Weakly Nonlinear Systems Based on the Pseudo-Linearization Technique", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:6 (2017), 802–810.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-6-802-810

Abstract. In this paper, an approach to the construction of nonlinear output tracking control on a finite time interval for a class of weakly nonlinear systems with state-dependent coefficients is considered. The proposed method of control synthesis consists of two main stages. At the first stage, a nonlinear state feedback regulator is constructed by using a previously proposed control algorithm based on the State Dependent Riccati Equation (SDRE). At the second stage, the problem of full-order observer construction is formulated and then it is reduced to the differential game problem. The form of its solution is obtained with the help of the guaranteed (minimax) control principle, which allows to find the best observer coefficients with respect to a given functional considering the worst-case uncertainty realization. The form of the obtained equations made it possible to use the algorithm from the first stage to determine the observer matrix. The proposed approach is characterized by the nonapplicability of the estimation and control separation principle used for linear systems, since the matrix of observer coefficients turned out to be dependent on the feedback coefficients matrix. The use of numerical-analytical procedures for determination of observer and feedback coefficients matrices significantly reduces the computational complexity of the control algorithm.

Keywords: tracking problem, nonlinear control, state-dependent Riccati equation, minimax control

On the authors:
Dmitry A. Makarov, orcid.org/0000-0001-8930-1288, PhD (Physics and Mathematics),
«Technologies Of System Analysis» Ltd,
Institute for Systems Analysis, Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,
9 pr-t 60-letiya Oktyabrya, Moscow 117312, Russia, e-mail: makarov@isa.ru

Acknowledgments:
[1] This work was supported by RFBR (projects № 16-38-60198-мол_а_дк, № 17-07-00281-а).