

Модел. и анализ информ. систем. Т. 18, № 2 (2011) 65–76

УДК 517.928 + 517.929

Принципы построения слоистых нейронных сетей на основе импульсных нейронов

Дунаева О.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: OlayDy@gmail.com

получена 20 декабря 2010

Ключевые слова: импульсное кодирование информации, асимптотический анализ, нейрон МакКаллока–Питца, многослойный перцептрон

Описаны принципы построения многослойных нейронных сетей на основе импульсной нейронной сети, составленной из биологически правдоподобных нейронов. Показано, что многослойный перцептрон может быть смоделирован нейронной сетью, состоящей из импульсных нейронов и использующей импульсное кодирование информации.

1. Введение

Вопрос о кодировании информации нервными импульсами является основополагающим для моделирования процессов обработки информации в биологических нейронных сетях. Фактическое отсутствие адекватных модельных представлений относительно способа кодирования информации в нервной системе является серьезной проблемой на пути построения реалистичных моделей биологических нейронных сетей. Нервные импульсы сами по себе не несут информации о кодируемом сигнале, поскольку их форма и амплитуда определяются только внутренними свойствами нейрона и практически неизменны. Таким образом, кодируемая информация содержится не в отдельном нервном импульсе, а в их последовательности, но сам способ кодирования остается предметом обсуждения. Имеется несколько равноправных гипотез относительно способа кодирования информации последовательностью нервных импульсов, причем в зависимости от принятой гипотезы при моделировании биологических нейронных сетей используются те или иные формальные нейронные модели.

Наиболее существенные успехи в построении искусственных сетей, моделирующих те или иные аспекты функционирования нервной системы (классификация,

запоминание), были достигнуты при использовании в качестве структурных элементов нейронной сети бинарных и аналоговых нейронов МакКаллока–Питца (многослойный перцептрон, сеть Хопфилда). Нейрон МакКаллока–Питца считается адекватной моделью биологического нейрона в рамках гипотезы о частотном кодировании, при котором носителем информации является плотность потока нервных импульсов. Гипотеза о частотном кодировании обладает существенным недостатком, связанным со свойственным для нее ограничением на максимальную скорость обработки информации. Так, характерное время генерации спайка для биологического нейрона составляет около 20 мсек, а необходимость оценивать на синапсе среднюю интенсивность пресинаптической нейронной активности дает оценку характерного времени отклика системы, входящую в противоречие с экспериментальными данными о типичном времени отклика нервной системы [2].

Согласно альтернативной гипотезе об импульсном кодировании информация в нервной системе представляется локальными временными характеристиками потока нервных импульсов — индивидуальными длинами (продолжительностями) межспайковых интервалов либо индивидуальными моментами спайков отдельных нейронов. Типичная нейронная сеть, основанная на импульсном кодировании информации, представляет собой систему взаимосвязанных импульсных нейронов, для каждого из которых момент генерации спайка определяется воздействием со стороны остальных нейронов [1]. В рамках этого подхода были реализованы нейронные сети с импульсным кодированием информации, моделирующие многослойный перцептрон [2] и сеть Хопфилда [3]. В этих работах в качестве структурных элементов сети используются простейшие интегративно-пороговые элементы. В данной работе демонстрируется возможность построения многослойного перцептрона с импульсным кодированием информации на основе биологически правдоподобной модели нейрона, предложенной в работах [4, 5].

2. Модель нейрона-автогенератора с химическими BS-синапсами

В работе [4] была предложена биологически правдоподобная модель импульсного нейрона-автогенератора, основанная на уравнении с запаздыванием, а в работе [5] эта модель была дополнена моделью химического синапса. В работах [5, 8] рассмотрена задача вычисления латентного периода (интервала времени между началом внешнего воздействия и началом индуцированного спайка) для случая синаптического взаимодействия нейронов-автогенераторов.

Будем рассматривать импульсный нейрон с модифицированной моделью химических синапсов, для которого динамика мембранного потенциала $u(t) > 0$ описывается следующим уравнением:

$$\dot{u} = \lambda \left[-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha w(t) \Theta(u(t - T_S) - \lambda^{-1}) \right] u. \quad (1)$$

Здесь $\lambda > 0$ — большой параметр, определяющий скорость процессов поляризации-деполяризации мембраны нейрона; $f_{\text{Na}}(u)$ и $f_{\text{K}}(u)$ — гладкие положительные функции монотонно стремящиеся к нулю при $u \rightarrow \infty$; $w(t)$ — суммарное внешнее синап-

тическое воздействие; T_S — начало интервала чувствительности к внешнему воздействию. Будем считать выполненным условие

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0, \quad (2)$$

гарантирующее неустойчивость нулевого состояния равновесия изолированного нейрона (т.е. при $w(t) \equiv 0$).

Решение уравнения для изолированного нейрона оказывается периодическим и имеющим импульсную структуру. Моменты начала и конца импульса (спайка) свяжем с моментами, когда мембранный потенциал $u(t)$ пересекает значение λ^{-1} с положительной и отрицательной скоростью соответственно. Будем говорить, что нейрон, генерирующий спайк, находится в активном состоянии. Для длительности импульса T_1 и периода T_2 имеют место следующие формулы [6]:

$$T_1 = 1 + \alpha_1, \quad T_2 = T_1 + 1 + \alpha_2/\alpha,$$

где

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1, \quad \alpha_2 = f_{Na}(0) + 1.$$

Множитель $\Theta(u(t - T_S) - \lambda^{-1})$ в (1) гарантирует, что чувствительность к внешнему воздействию имеет место только на промежутке $[T_S, T_S + T_1]$. Ограниченность интервала восприимчивости к внешнему синаптическому воздействию является важной особенностью предлагаемой модели, отличающей ее от модели синаптического взаимодействия, предложенной в [5]. Такие синапсы мы будем называть BS-синапсами (Bounded Sensitivity).

Пусть на постсинаптический нейрон с мембранным потенциалом $u(t)$ воздействует N пресинаптических нейронов с мембранными потенциалами $v_j(t)$, где $1 \leq j \leq N$. Для суммарного синаптического воздействия $w(t)$ будем использовать следующую формулу:

$$w(t) = \sum_{j=1}^N g_j \Theta(v_j(t) - \lambda^{-1}). \quad (3)$$

Параметр g_j имеет смысл синаптического веса, определяющего эффективность синапса, передающего воздействие с j -го пресинаптического нейрона. Множитель $\Theta(v_j(t) - \lambda^{-1})$ определяет условие наличия воздействия со стороны пресинаптического нейрона. Этот множитель выписан в предположении, что время воздействия медиатора совпадает с продолжительностью спайка пресинаптического нейрона.

3. Асимптотический анализ модели

Для изолированного нейрона (т.е. при $w(t) \equiv 0$) динамика мембранного потенциала $u(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в нулевом приближении определяется следующими асимптотиче-

скими формулами [7]:

$$u(t) = \begin{cases} \exp[\lambda\alpha_1(t - \tau_1)], & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \exp(\lambda\alpha_1) \exp[-\lambda(t - \tau_3)], & t \in [\tau_3, \tau_4], \\ \exp[-\lambda\alpha_2(t - \tau_5)], & t \in [\tau_5, \tau_6], \\ \exp(-\lambda\alpha_2) \exp[\lambda\alpha(t - \tau_7)], & t \in [\tau_7, \tau_8], \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= o(1), & \tau_2 &= 1, \\ \tau_3 &= \tau_2 + o(1), & \tau_4 &= \tau_3 + \alpha_1, \\ \tau_5 &= \tau_4 + o(1), & \tau_6 &= \tau_5 + 1, \\ \tau_7 &= \tau_6 + o(1), & \tau_8 &= \tau_7 + \alpha_2/\alpha. \end{aligned}$$

В качестве начальной функции здесь выбирается произвольная функция из множества

$$S = \{\varphi \in C[-1, 0] : \lambda^{-1} \exp(2\lambda\alpha s) \leq \varphi(s) \leq \lambda^{-1} \exp(\lambda\alpha s/2)\}. \quad (5)$$

Символом $o(1)$ обозначены слагаемые, стремящиеся при $\lambda \rightarrow \infty$ к нулю равномерно относительно выбора начальной функции $\varphi \in S$.

Перейдем к асимптотическому исследованию процесса синаптического взаимодействия импульсных нейронов с BS-синапсами. Будем считать, что мембранный потенциал $v_j(t)$ каждого пресинаптического нейрона удовлетворяет уравнению (1). Из вида асимптотических формул (4) и формулы (3) ясно, что при этом функция $w(t)$ оказывается кусочно постоянной. Свяжем нулевой момент времени с моментом начала спайка постсинаптического нейрона. Пусть t_j — такие моменты времени, что на каждом интервале (t_j, t_{j+1}) функция $w(t)$ принимает постоянное значение, равное w_j . Пусть A_j — множество индексов пресинаптических нейронов, находящихся на интервале (t_j, t_{j+1}) в активном состоянии, т.е. таких нейронов, для которых выполнено неравенство $v_j(t) > \lambda^{-1}$ для всех $t \in (t_j, t_{j+1})$. Тогда

$$w(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j(t), \quad w_j(t) = \begin{cases} 0, & t < t_j, \\ w_j, & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & t > t_{j+1}, \end{cases} \quad w_j = \sum_{k \in A_j} g_k. \quad (6)$$

Точки t_j естественно делятся на два класса, образующие множества T_{start} и T_{end} . К множеству T_{start} отнесем моменты t_j начала спайков пресинаптических нейронов, а к множеству T_{end} — моменты окончания спайков этих нейронов. Введем также множество

$$A = \bigcup_{t_i \in [T_S, T_S + T_1]} A_i, \quad (7)$$

которое состоит из номеров тех нейронов, которые вошли в активное состояние на промежутке времени $[T_S, T_S + T_1]$. На величину T_S наложим следующее ограничение:

$$\tau_7 < T_S < T_2 - T_1. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть нейрон с мембранным потенциалом $u(t)$ описывается уравнением (1), в котором $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ — гладкие положительные функции, монотонно стремящиеся к нулю при $u \rightarrow \infty$ и удовлетворяющие условию (2), а начальная функция выбирается из множества (5). Пусть также для параметра T_S выполнено условие (8). Если функция $w(t)$ задается формулой (3), выполнено условие $T_{\text{end}} \cap [T_S, T_S + T_1] = \emptyset$, а для весов выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^N |g_i| < \frac{T_2 - T_S - T_1}{T_1}, \quad (9)$$

то переход постсинаптического нейрона в активное состояние произойдет в момент времени $t_{sp} = T_2 - \Delta t$, где

$$\Delta t = \sum_{i \in A} g_i (T_S + T_1 - t_i).$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что пресинаптические нейроны пронумерованы в порядке возрастания тех моментов t_j начала их спайков, которые лежат на интервале $[T_S, T_S + T_1]$. Поскольку $T_{\text{end}} \cap [T_S, T_S + T_1] = \emptyset$, то на интервале восприимчивости будут находиться только те моменты времени t_j , которые соответствуют началам спайков пресинаптических нейронов. Поэтому на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ на рассматриваемый нейрон воздействуют нейроны v_1, v_2, \dots, v_j и их суммарное воздействие составляет $w_j = \sum_{i=1}^j g_i$.

Ввиду ограничения $T_S > \tau_7$ до начала взаимодействия (т.е. на интервале (T_S, t_1)) решение уравнения имеет вид $u(t) = u(T_S) \exp[\lambda\alpha(t - T_S)]$, откуда

$$u(t_1) = u(T_S) \exp[\lambda\alpha(t_1 - T_S)].$$

Учитывая (6), рассмотрим влияние функции $w_j(t)$ на потенциал $u(t)$. Если до момента времени t_j нейрон еще не сгенерировал импульс, т.е. $u(t_j) < \lambda^{-1}$, то на интервале времени $t \in [t_j, t_{j+1}]$ на нейрон воздействуют j пресинаптических нейронов и уравнение принимает вид

$$\dot{u}(t) = \lambda\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^j g_i \right) u(t).$$

Получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_j) \exp \left[\lambda\alpha \left(1 + \sum_{i=1}^j g_i \right) (t - t_j) \right] = \\ &= u(t_j) \exp[\lambda\alpha(t - t_j)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{i=1}^j g_i (t - t_j) \right]. \end{aligned}$$

Для конца рассматриваемого интервала воздействия $[t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) \exp[\lambda\alpha(t_{j+1} - t_j)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{i=1}^j g_i (t_{j+1} - t_j) \right].$$

Заметим, что на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ вид дифференциального уравнения не меняется, и потенциал на этом интервале будет монотонно возрастать или убывать, поэтому условие $u(t_{j+1}) < \lambda^{-1}$ гарантирует, что на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ спайк не произойдет.

Значение $u(t_{j+1})$ используется в качестве начального на следующем интервале $[t_{j+1}, t_{j+2}]$. Если последовательно провести аналогичные выкладки для всех интервалов, включая последний интервал $[t_N, T_S + T_1]$, то получим

$$\begin{aligned} u(T_S + T_1) &= u(t_1) \prod_{j=1}^N \exp[\lambda\alpha(t_{j+1} - t_j)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) \right] = \\ &= u(T_S) \exp[\lambda\alpha T_1] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) \right]. \end{aligned}$$

При $t > T_S + T_1$ функция $w(t)$ перестает оказывать влияние и решение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(T_S + T_1) \exp[\lambda\alpha(t - T_S - T_1)] = \\ &= u(T_S) \exp[\lambda\alpha(t - T_S)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) \right]. \end{aligned}$$

Момент начала спайка определяется из уравнения $u(t_{\text{sp}}) = \lambda^{-1}$, решая которое получаем

$$t_{\text{sp}} = T_S - \frac{\ln(\lambda u(T_S))}{\lambda\alpha} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j).$$

При отсутствии воздействия решение на всем отрезке $[T_S, T_2]$ имеет вид $u(t) = u(T_S) \exp[\lambda\alpha(t - T_S)]$, а для момента спайка имеет место формула $t_{\text{sp}} = T_2 = T_S - \ln(\lambda u(T_S))/\lambda\alpha$. Таким образом, внешнее воздействие приблизило спайк на время

$$\Delta t = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=1}^N g_j \sum_{i=j}^N (t_{i+1} - t_i) = \sum_{j=1}^N g_j (T_S + T_1 - t_j).$$

Напомним, что все выкладки производились в предположении, что спайк не произошел ни на одном из интервалов $[t_i, t_{i+1}]$, что гарантируется условием $u(t_k) < \lambda^{-1}$, выполненным для всех $1 \leq k \leq N$. Покажем, что это условие действительно выполнено.

Для момента времени t_k имеем

$$\begin{aligned} u(t_k) &= u(t_1) \exp[\lambda\alpha(t_k - t_1)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) \right] = \\ &= u(T_S) \exp[\lambda\alpha(t_k - T_S)] \exp \left[\lambda\alpha \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что в силу этой формулы условие $u(t_k) < \lambda^{-1}$ эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{\ln(\lambda u(T_S))}{\lambda \alpha} + t_k - T_S + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^j g_i(t_{j+1} - t_j) < 0.$$

После преобразования суммы получаем

$$\sum_{i=1}^k g_i(t_k - t_i) < T_2 - t_k. \quad (10)$$

Из неравенства $T_S < t_k < T_S + T_1$ следует, что

$$T_2 - T_S - T_1 < T_2 - t_k < T_2 - T_S. \quad (11)$$

Из этого же неравенства следует оценка $0 < t_k - t_i < T_1$, позволяющая выписать следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{i=1}^k g_i(t_k - t_i) \leq \left| \sum_{i=1}^k g_i(t_k - t_i) \right| \leq T_1 \sum_{i=1}^k |g_i| \leq T_1 \sum_{i=1}^N |g_i|. \quad (12)$$

С учетом неравенств (12) и (11) ясно, что условие (9) влечет за собой справедливость неравенства (10), что и завершает доказательство.

4. Перцептрон с импульсным кодированием информации

Классический многослойный перцептрон представляет собой слоистую нейронную сеть, в которой нейроны расположены в нескольких упорядоченных слоях, причем внутри слоя связи между нейронами отсутствуют, а каждый нейрон k -го слоя оказывает воздействие на все нейроны $(k+1)$ -го слоя [9]. Будем рассматривать перцептрон, элементами которого являются аналогичные нейроны МакКаллока–Питца, вычисляющие взвешенную сумму N своих входов p_i и затем применяющие к результату функцию активации f :

$$S = \sum_{i=1}^N g_i p_i, \quad q = f(S).$$

Здесь q — выход нейрона, S — результат вычисления взвешенной суммы, а g_i — веса синаптических связей. В качестве функции активации обычно выбирается сигмоидальная функция, но часто используется также трехзвенная кусочно-линейная аппроксимация сигмоиды. Ниже мы будем предполагать, что входы и выходы каждого нейрона МакКаллока–Питца представлены числами из промежутка $[-\gamma, \gamma]$ и для всех допустимых значений входов выполнено равенство $f(S) = S$, т.е. все нейроны работают на участке линейности функции активации.

Опишем конструкцию, позволяющую воспроизвести поведение многослойного перцептрона на сети, составленной из импульсных нейронов. Пусть задан многослойный перцептрон \mathcal{P} , т.е. зафиксировано число слоев, количество нейронов в каждом слое и для каждого нейрона заданы фиксированные значения весов всех его синаптических связей. Образует импульсную нейронную сеть \mathcal{P}' путем замены каждого нейрона, образующего перцептрон \mathcal{P} , на импульсный нейрон, описываемый уравнениями (1), (3). Будем считать, что все импульсные нейроны, образующие сеть \mathcal{P}' , имеют одинаковые характеристики. Отметим, что здесь каждая синаптическая связь нейрона МакКаллока–Питца, реализующая умножение входного значения на синаптический вес, заменяется на динамическую синаптическую связь, реализующую передачу и умножение на синаптический вес изменяющегося во времени импульсного входного сигнала. При этом динамическим выходом нейрона с мембранным потенциалом $u(t)$ является функция $\Theta(u(t) - \lambda^{-1})$.

Значения p_i и q входов и выхода нейрона МакКаллока–Питца в нашей модели будут представлены моментами возникновения спайков пресинаптических нейронов и рассматриваемого постсинаптического нейрона. Оказывается, что можно установить такое соответствие между моментами возникновения спайков и числами p_i , q , что динамика построенной импульсной нейронной сети \mathcal{P}' будет воспроизводить поведение исходного перцептрона \mathcal{P} .

Значению p_i каждого из входов нейрона МакКаллока–Питца поставим в соответствие момент времени $t_i = P + \beta p_i$, где P — некоторое фиксированное число. Будем считать, что спайк пресинаптического нейрона, происходящий в момент времени t_i , кодирует значение $p_i = (t_i - P)/\beta$, поступающее на вход нейрона МакКаллока–Питца. Аналогично значению q выхода нейрона МакКаллока–Питца поставим в соответствие момент времени $\hat{t} = Q + \beta q$, где Q — некоторое фиксированное число. Будем считать, что спайк рассматриваемого нейрона, происходящий в момент времени \hat{t} , кодирует значение $q = (\hat{t} - Q)/\beta$, наблюдающееся на выходе нейрона МакКаллока–Питца.

Положим $P = T_S + T_1/2$ и $\beta = T_1/2\gamma$, т.е. будем считать, что $t_i = T_S + T_1/2 + T_1 p_i/2\gamma$. Если $p_i \in [-\gamma, \gamma]$, то момент начала каждого синаптического воздействия попадает на интервал восприимчивости рассматриваемого нейрона и на этом интервале ни один пресинаптический нейрон не выйдет из активного состояния. Если для весов выполнено условие (9), то справедлива теорема 1, откуда получаем

$$\hat{t} = T_2 - \sum_{i=1}^N g_i(T_S + T_1 - t_i) = T_2 + \frac{T_1}{2\gamma} \sum_{i=1}^N g_i(p_i - \gamma).$$

Если положить $Q = T_2$, то получим $q = \sum_{i=1}^N g_i(p_i - \gamma)$, что соответствует формуле для нейрона МакКаллока–Питца.

Для того, чтобы импульсный выход одного нейрона мог быть использован в качестве входа другого нейрона, достаточно на веса синаптических связей следующее ограничение:

$$\sum_{i=1}^N |g_i| \leq 1. \quad (13)$$

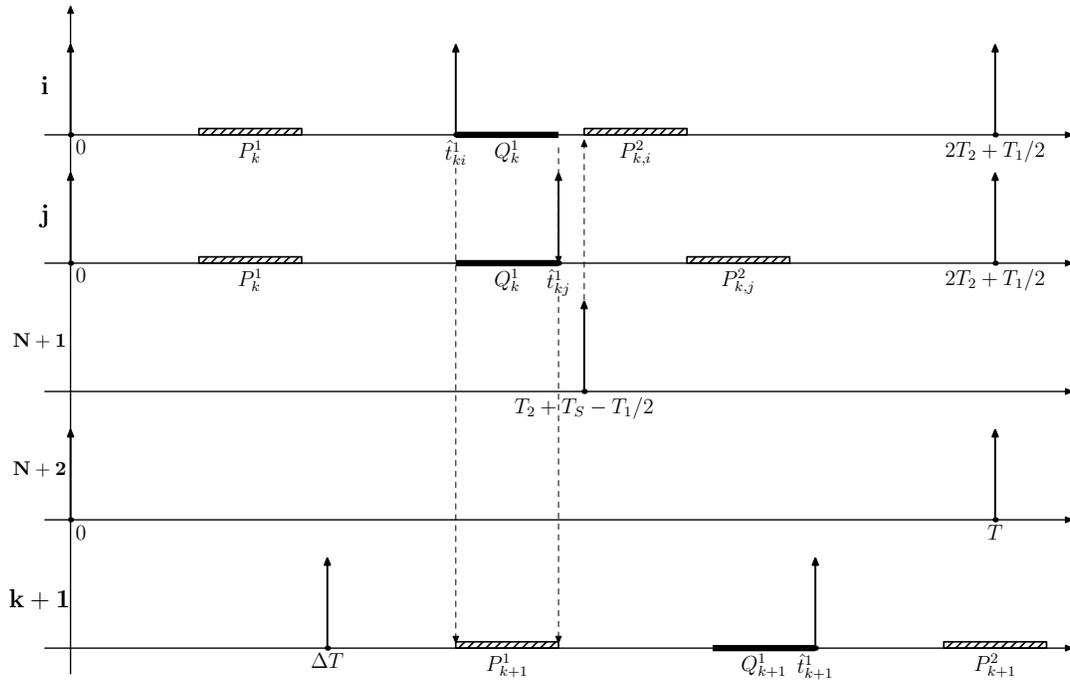


Рис. 1. Схема взаимодействия нейронов соседних слоев

Действительно, в этом случае для величины q получаем ограничение

$$|q| = \left| \sum_{i=1}^N g_i(p_i - \gamma) \right| \leq \sum_{i=1}^N |g_i| \cdot |p_i - \gamma| \leq \gamma \sum_{i=1}^N |g_i| \leq \gamma.$$

Если наложить дополнительное ограничение $T_2 - T_1 - T_S > T_1$, то условие (13) гарантирует выполнение условия (9) теоремы 1. Отметим, что смысл этого дополнительного ограничения состоит в следующем: левая граница участка, на котором расположен генерируемый импульс, лежит правее правой границы участка восприимчивости нейрона.

Поскольку сеть \mathcal{P}' образована импульсными нейронами-автогенераторами, то процесс функционирования нейронной сети естественным образом распадается на отдельные *такты*, на каждом из которых все нейроны сети генерируют в точности один импульс. Импульсная нейронная сеть производит обработку информации за один или несколько тактов своего функционирования. Рассмотрим более подробно процесс функционирования импульсной нейронной сети \mathcal{P}' .

На рисунке 1 схематически изображена динамика одного из нейронов нулевого и первого слоя перцептрона (верхний график относится к нулевому слою, а нижний — к первому слою). Вертикальными стрелками помечены моменты времени, в которые соответствующий нейрон начинает генерацию очередного импульса. Утолщенные горизонтальные отрезки на осях соответствуют интервалам генерации спайка, а заштрихованными горизонтальными прямоугольниками отмечены интервалы восприимчивости нейрона. Поясним используемые далее обозначения. P_{ki}^n, Q_{ki}^n — середины интервала восприимчивости и интервала генерации спайка i -го нейрона k -го слоя на

n -м такте; p_{kij}^n — входы i -го нейрона k -го слоя, пришедшие на n -м такте от j -го нейрона предыдущего слоя; g_{kij} — веса синаптических связей i -го нейрона k -го слоя с j -м нейроном предыдущего слоя; q_{ki}^n, \hat{t}_{ki}^n — выход и момент начала спайка i -го нейрона k -го слоя на n -м такте. Если в переменных $P_{ki}^n, Q_{ki}^n, \hat{t}_{ki}^n$ опущен второй из нижних индексов, то считается, что соответствующий момент времени одинаков для всех нейронов данного слоя. Для корректной работы многослойного перцептрона необходимо, чтобы было выполнено *условие передачи импульса*: импульсы, генерируемые нейронами каждого слоя, должны приходиться на интервал восприимчивости нейронов следующего слоя, т.е. $P_{k+1}^1 = Q_k^1$. Пусть в начальный момент времени все нейроны нулевого слоя одновременно генерируют импульс. Будем считать, что если нейроны k -го слоя генерируют первый импульс в момент времени t , то все нейроны $(k+1)$ -го слоя будут генерировать первый импульс в момент времени $t + \Delta T$, т.е. введем временное рассогласование между слоями, равное ΔT . Будем считать, что если i -й нейрон k -го слоя на первом такте функционирования сети кодирует число q_{ki}^1 , то он сгенерирует следующий импульс в момент времени $\hat{t}_{k,i}^1 = Q_k^1 + q_{ki}^1$. Для соседних слоев имеют место равенства $P_{k+1}^1 = (k+1)\Delta T + T_S + T_1/2$ и $Q_k^1 = T_2 + k\Delta T$, т.е. условие передачи импульса будет выполнено, если $\Delta T = T_2 - T_S - T_1/2$.

На первом такте выходы нейронов k -го слоя будут равны входам нейронов $(k+1)$ -го слоя $p_{k+1,ij}^1 = q_{kj}^1$, т.к. $p_{k+1,ij}^1 = \hat{t}_{kj}^1 - P_{k+1,i}^1$. Соответственно, если для весов нейронов k -го слоя выполнено ограничение (13), то имеет место теорема 1 и получаем

$$\hat{t}_{k+1,i}^1 = (k+1)\Delta T + T_2 + q_{k+1,i}^1, \quad q_{k+1,i}^1 = \sum_{j=1}^N g_{k+1,ij} (p_{k+1,ij}^1 - \gamma).$$

Отметим, что после однократной передачи возбуждения нейроны каждого слоя остаются в десинхронизированном состоянии, т.е. при отсутствии внешнего воздействия сгенерируют импульсы в различные моменты времени. Чтобы после одного такта работы нейронная сеть сохранила работоспособность, необходимо привести ее в исходное состояние, т.е. синхронизировать нейроны каждого слоя с сохранением исходного рассогласования спайков между соседними слоями. Оказывается, что этого можно достичь путем добавления в каждый слой двух дополнительных нейронов, которым присваиваются номера $N+1$ и $N+2$ (в дальнейшем первые N нейронов будем называть основными).

Дополнительный $(N+1)$ -й нейрон k -го слоя используется для синхронизации основных нейронов этого слоя и выполняет роль генератора тактовых импульсов. Будем считать, что $(N+1)$ -й нейрон k -го слоя изолирован (ни один нейрон не оказывает на него воздействия), воздействует на каждый нейрон своего слоя с весом $g_{ki}^{N+1} = -1$, генерирует первый импульс в момент времени $k\Delta T + T_2 + T_S + T_1/2$, после чего продолжает генерацию импульсов с периодом $2T_2 + T_1/2$. Пусть после первого такта нейроны k -го слоя сгенерируют очередные импульсы в моменты времени \hat{t}_{ki} и затем в моменты времени $\hat{t}_{ki} + T_S$ перейдут в состояние восприимчивости. Будем считать, что на участке восприимчивости воздействие от предыдущего слоя отсутствует и на нейроны данного слоя оказывает влияние только $(N+1)$ -й нейрон. В этом случае для рассматриваемого нейрона $w(t) = -1$ для $\hat{t}_{ki} + T_S \leq t \leq k\Delta T + T_2 + T_S + T_1/2$ и $w(t) = 0$ во всех остальных точках (отметим, что неравенство $\hat{t}_{ki} \geq k\Delta T + T_2 - T_1/2$

выполнено, поскольку момент времени $k\Delta T + T_2 - T_1/2$ соответствует самому раннему импульсу). Из уравнения нейрона для рассматриваемого интервала следует равенство $\dot{u} = \lambda\alpha[1 + w]u = 0$, т.е. потенциал нейрона остается на этом интервале неизменным. Таким образом, в момент времени $k\Delta T + T_2 + T_S + T_1/2$, когда завершится воздействие со стороны $(N + 1)$ -го нейрона, у всех основных нейронов данного слоя будет одинаковый потенциал. В результате все нейроны рассматриваемого слоя сгенерируют очередной импульс одновременно в момент времени $2T_2 + T_1/2$, т.е. под действием $(N + 1)$ -го нейрона все основные нейроны рассматриваемого слоя окажутся синхронизированными.

Работа описанной выше схемы синхронизации нейронов основана на том, что в процессе синхронизации на интервале чувствительности на основные нейроны воздействует только $(N + 1)$ -й нейрон. В то же время, если в предыдущем слое также используется описанная схема синхронизации, то синхронный импульс, сгенерированный нейронами предыдущего слоя придется как раз на интервал чувствительности нейронов рассматриваемого слоя, используемый для их синхронизации. Для устранения этого эффекта приходится вводить в k -й слой дополнительный $(N + 2)$ -й нейрон, подавляющий воздействие синхронизированных нейронов k -го слоя. Будем считать, что $(N + 2)$ -й нейрон k -го слоя изолирован (ни один нейрон не оказывает на него воздействия), соединен со всеми нейронами $(k + 1)$ -го слоя с весами $g_{k+1,i,(N+2)} = -\sum_{j=1}^N g_{k+1,ij}$ и генерирует импульсы с периодом $T = 2T_2 + T_1/2$ начиная с момента времени $k\Delta T$. Таким образом, суммарное воздействие на нейроны $(k + 1)$ -го слоя будет равно нулю (все воздействующие нейроны синхронизированы и сумма всех весов равна нулю) и синхронный импульс k -го слоя не будет оказывать влияние на нейроны $(k + 1)$ -го слоя в процессе их синхронизации.

Подведем итоги. Описанная выше импульсная нейросетевая архитектура реализует потактовую обработку входной информации, причем каждая пара тактов естественным образом подразделяется на рабочий такт и такт синхронизации. На рабочем такте синхронизированные нейроны одного слоя производят обработку входной информации, передают результат обработки следующему слою, после чего вновь синхронизируются на такте синхронизации. Синхронизация происходит за счет тормозного воздействия специального синхронизирующего нейрона, задающего суммарную длительность рабочего цикла сети, равную $2T_2 + T_1/2$.

Список литературы

1. Gerstner W. What's different with spiking neurons? // *Plausible Neural Networks for Biological Modelling*, Henk Mastebroek and Hans Vos (Eds.) Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 23–48.
2. Maass W. Fast sigmoidal networks via spiking neurons // *Neural Computation*. 1997. Vol. 9. P. 279–304.
3. Maass W., Natschläger T. Networks of spiking neurons can emulate arbitrary Hopfield nets in temporal coding // *Network: Computation in Neural Systems*. 1997. Vol. 9(4). P. 355–372.

4. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 64–76.
5. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модель адаптации кольцевых нейронных ансамблей // Радиотехника и Электроника. 1998. Т. 43. № 11. С. 1–7.
6. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модели волновой памяти. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 288 с.
7. Майоров В.В., Мячин М.Л., Парамонов И.В. Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 61 – 66.
8. Дунаева О.А. Уточнение оценки латентного периода для нейронов с синаптическим взаимодействием // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16. № 4. С. 46–55.
9. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992. 184 с.

Principles of Constructing Layered Neural Networks Based on Pulse Neurons

Dunaeva O.A.

Keywords: Impulse coding of information, asymptotic analysis, McCulloch–Pits neuron, multilayer perceptron

In the article we describe principles of pulse implementation of multilayer neural networks using biologically plausible neurons. It is shown that the multilayer perceptron can be modeled with a neural network composed of pulse neurons using impulse information coding.

Сведения об авторе:

Дунаева Ольга Александровна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант.