



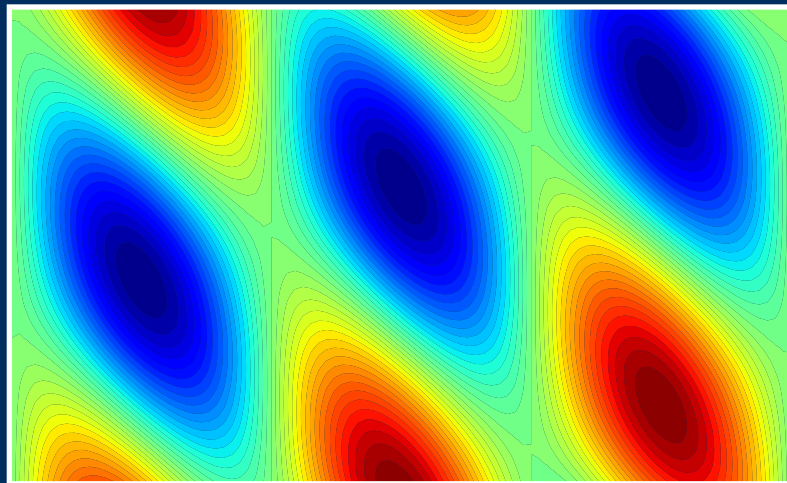
**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke · Heft 6

**ANDREAS FRANZE**

**EIN BEITRAG ZUR BEHANDLUNG  
NICHTMATERIELLER RANDBEDINGUNGEN  
IN DER KONTINUUMSMECHANIK**

**DISSERTATION · FAKULTÄT BAUINGENIEURWESEN**





**Ein Beitrag zur Behandlung  
nichtmaterieller Randbedingungen  
in der Kontinuumsmechanik**

(An Investigation of the Behaviour of Continua with  
Non-material Boundary Conditions)

Von der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Dresden  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte  
Dissertation

von

ANDREAS FRANZE

aus Sebnitz

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau

Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ernst-Peter Beisel

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juni 2013

Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke  
Heft 6 (2013)

**Herausgeber:**

Technische Universität Dresden  
Fakultät Bauingenieurwesen  
Institut für Mechanik und Flächentragwerke  
Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastra

D-01062 Dresden

Telefon: (0351) 463 35369

Fax: (0351) 463 37200

E-mail: [Bernd.Zastra@tu-dresden.de](mailto:Bernd.Zastra@tu-dresden.de)

© 2013 Andreas Franze  
Technische Universität Dresden  
Fakultät Bauingenieurwesen  
Institut für Mechanik und Flächentragwerke  
D-01062 Dresden

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen vorbehalten. Ohne schriftliche Einwilligung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, zu reproduzieren oder unter Verwendung elektronischer Systeme zu verarbeiten, zu vervielfältigen oder zu verbreiten.

ISBN 978-3-86780-353-3

*Meiner lieben Familie.*



## Vorwort des Autors

Sehr geehrte Leserin,  
sehr geehrter Leser,

die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke der Technischen Universität Dresden.

Besonders herzlich möchte ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastra, für die Übernahme des Hauptreferates und die Betreuung meiner Doktorarbeit bedanken. Seine Persönlichkeit hat meine wissenschaftliche und charakterliche Entwicklung sehr geprägt. Darüber hinaus haben die gemeinsamen Diskussionen in einer Atmosphäre des Vertrauens wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Ernst-Peter Beisel danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferates und seine anregende Sicht als Mathematiker auf diese Arbeit.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. Rainer Picard bin ich für die Möglichkeit, in zahlreichen Gesprächen mit ihm die Faszination der Analysis zu teilen, sehr verbunden. Für die beratende Unterstützung auch über den wissenschaftlichen Alltag hinaus gilt Prof. Dr.-Ing. Matthias Kröger ein besonderes Dankeschön.

Mein Dank richtet sich auch an alle Kolleginnen und Kollegen, die mich am Institut für Mechanik und Flächentragwerke begleitet und unterstützt haben. Die Hilfsbereitschaft und die stets sehr gute Atmosphäre waren eine Bereicherung für mich und diese Arbeit. Ein besonderes Wort des Dankes möchte ich hierbei an Dr.-Ing. Rainer Schlebusch und Dr.-Ing. Wolfgang Weber für ihre Ideen, ihre Anregungen und ihre konstruktive Kritik richten. Stellvertretend für die Studierenden, die mit mir zusammengearbeitet haben, schulde ich Frau Anna Zahn und Herrn Dipl.-Ing. Daniel Karl einen herzlichen Dank.

An dieser Stelle möchte ich auch all jenen danken, die das Manuskript sorgfältig durchgesehen und mir mit ihren sinnvollen Hinweisen sehr geholfen haben. Herrn Dr.-Ing. Wolfgang Weber gebührt dabei ein besonderer Dank.

Abschließend darf ich mich bei meinen Freunden, bei meiner Familie und vor allem bei meiner lieben Frau Ariane von ganzem Herzen bedanken. Durch ihr Verständnis und ihr Vertrauen fühlte ich mich stets geborgen, fand aber auch die nötige Zerstreuung.

Dresden, im Juli 2013

Andreas Franze





## **Kurzfassung:**

In der vorliegenden Arbeit werden kontinuumsmechanische Probleme mit nichtmateriellen Randbedingungen untersucht. Randbedingungen gelten dabei als nichtmateriell, wenn sie im Zeitverlauf nicht ein und demselben materiellen Punkt zugeordnet werden können. Die Erweiterung der klassischen kontinuumsmechanischen Feldgleichungen um solche Randbedingungen erfolgt unter Anwendung einer Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik. Hierbei wird eine Notation entwickelt, bei der Feldgrößen und Operatoren ihre jeweilige Platzierung eindeutig zugeordnet wird. Insbesondere in Hinblick auf eine konsistente Darstellung von Ableitungsoperatoren werden die Vorteile dieser Schreibweise dargelegt.

Zur Ermittlung und Untersuchung (semi-)analytischer Lösungen dienen Beispiele eindimensionaler Kontinua, die sich zwei unterschiedlichen Problemklassen zuordnen lassen. In der ersten Problemklasse gelingen analytische Lösungen mit Hilfe eines Integrations- und eines Separationsansatzes für das Modell einer axial unbewegten, schwingenden Saite. Als nichtmaterielle Randbedingungen werden dabei die transversalen Verschiebungen an zwei zeitabhängigen Positionen zu null vorgeschrieben. In der zweiten Problemklasse sind eine Saite sowie ein Seil, die einer vorgegebenen axialen Führungsbewegung unterliegen, Gegenstand der Untersuchung. In diesem Fall sind die zwei vorgegebenen, räumlich festen Verschiebungsrandbedingungen nichtmateriell. Es finden (semi-)analytische Verfahren Anwendung. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den Randbedingungen und dem jeweils betrachteten Kontinuum wird dabei als beliebig zeitabhängig angenommen. Eine experimentelle Studie zum Schwingungsverhalten eines Monochords mit nichtmateriellen Randbedingungen vervollständigt die Analyse eindimensionaler Kontinua.

Aus den ermittelten (semi-)analytischen Lösungen werden Rückschlüsse auf das Transformationsverhalten der Bewegungsgleichungen dreidimensionaler Kontinua gezogen. Damit sind die entwickelten Methoden in vielen technischen Anwendungen einsetzbar. Als ein wirtschaftlich bedeutendes Beispiel ist die Schwingungsanalyse axial bewegter Papierbahnen in Papierproduktionsmaschinen zu nennen.

**Schlüsselworte:** nichtmaterielle Randbedingungen, Kontinuumsmechanik, Operatornotation, Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik, (semi-)analytische Methoden



## **Abstract:**

Within this work, problems of continuum mechanics with non-material boundary conditions are investigated. Boundary conditions are classified as non-material if they can not be assigned to one and only one material particle over time. The extension of the classical field-equations of continuum mechanics by such boundary conditions is realized by application of Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematics. Therefore a notation, which assigns the particular placement to field quantities and operators, is developed. The advantages of this notation can be identified particularly with regard to a consistent representation of derivative operators.

Examples of one-dimensional continua, which can be assigned to different problem categories, are used to determine and investigate (semi-)analytical solutions. In the first category, analytical solutions can be found using an integral and a separation formulation for the model of an axially non-moving, vibrating string. As non-material boundary conditions the transverse displacements at two time-dependent positions are prescribed to zero. A string and a wire, which are moved axially, are investigated within the second problem category. In this case, the prescribed, spatially fixed displacement conditions are non-material. The applied methods are (semi-)analytical. The relative velocity between the boundary conditions and the considered continuum is assumed to be arbitrary time-dependent. An experimental study on the vibration behaviour of a monochord with non-material boundary conditions completes the analysis of one-dimensional continua.

Conclusions on the transformation of the equations of motion of three-dimensional continua are derived from the determined (semi-)analytical solutions. For this reason the developed methods are usable in many technical applications. The vibration analysis of axially moving paper sheets in papermaking machines can be stated as an economical important example.

**Keywords:** non-material boundary conditions, continuum mechanics, operator notation, Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematics, (semi-)analytic methods



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur- und Symbolverzeichnis</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitendes . . . . .	1
1.2 Stand des Wissens . . . . .	4
1.3 Motivierendes Beispiel . . . . .	7
1.4 Ziele und Gliederung der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1 Allgemeines . . . . .	13
2.2 Kinematik . . . . .	15
2.2.1 Bewegung des Körpers . . . . .	15
2.2.2 Intrinsische Beschreibung . . . . .	16
2.2.3 Referentielle Beschreibung . . . . .	17
2.2.4 Stromlinien und Bahnlinien im EUKLIDischen Raum . . . . .	18
2.2.5 Räumliche Beschreibung . . . . .	19
2.2.6 Relative Beschreibung . . . . .	20
2.2.7 Notation zur Beschreibung von Feldgrößen . . . . .	22
2.3 Verschiebungen und daraus abgeleitete Größen . . . . .	24
2.3.1 Verschiebungsfelder . . . . .	24
2.3.2 Notation von Ableitungen . . . . .	25
2.3.3 Geschwindigkeitsfelder . . . . .	28
2.3.4 Beschleunigungsfelder . . . . .	30
2.3.5 Deformationsgradienten . . . . .	31
2.3.6 Metriktensoren bzw. RIESZ-Abbildungen . . . . .	35
2.3.7 Dehnungstensoren . . . . .	36
2.4 Spannungstensoren . . . . .	38
2.5 Bilanz- und Erhaltungsgleichungen . . . . .	41
2.5.1 Transporttheoreme . . . . .	41
2.5.2 Allgemeine Struktur von Bilanzgleichungen . . . . .	43

2.5.3	Massebilanz . . . . .	45
2.5.4	Impulsbilanz . . . . .	45
2.5.5	Drallbilanz . . . . .	46
2.5.6	Entropie- und Energiebilanz . . . . .	47
2.5.7	Lokale Form der Bilanzgleichungen . . . . .	47
2.6	Konstitutive Beziehungen . . . . .	49
2.7	Anfangsbedingungen und Randbedingungen . . . . .	52
2.7.1	Allgemeines . . . . .	52
2.7.2	Verschiebungsrandbedingungen . . . . .	53
2.7.3	Spannungsrandbedingungen . . . . .	53
2.7.4	Beschreibung von nichtmateriellen Randbedingungen mithilfe einer ALE-Kinematik . . . . .	54
2.8	Feldproblem . . . . .	57
2.8.1	Feldproblem in der EULER-Beschreibung . . . . .	57
2.8.2	Feldproblem in der ALE-Beschreibung . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Axial unbewegte eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen</b>	<b>63</b>
3.1	Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für die axial unbewegte Saite . . . . .	63
3.2	Modellbeschreibungen . . . . .	68
3.3	Integrationsansatz für einen konstanten Abstand der Randbedingungen . . . . .	70
3.3.1	Transformation der Bewegungsgleichung . . . . .	70
3.3.2	Lösungsansatz in Operatornotation . . . . .	70
3.3.3	Einarbeiten der Anfangsbedingungen . . . . .	74
3.3.4	Einarbeiten der Randbedingungen . . . . .	77
3.3.5	Numerische Umsetzung . . . . .	81
3.3.6	Auswertung . . . . .	82
3.4	Separationsansatz für einen konstanten Abstand der Randbedingungen . . . . .	87
3.5	Integrationsansatz für einen veränderlichen Abstand der Randbedingungen . . . . .	90

<b>4</b>	<b>Axial bewegte eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen</b>	<b>95</b>
4.1	Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für die axial bewegte Saite . . . . .	95
4.2	Lösung mittels GALERKIN-Verfahren . . . . .	97
4.2.1	Zeitlich veränderliche Führungsgeschwindigkeit . . . . .	97
4.2.2	Zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit . . . . .	99
4.2.3	Numerische Umsetzung . . . . .	104
4.2.4	Auswertung . . . . .	106
4.3	Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für das axial bewegte Seil . . . . .	108
4.4	Lösung mittels GALERKIN-Verfahren . . . . .	113
4.4.1	Modellbeschreibung . . . . .	113
4.4.2	Transformation der Bewegungsgleichung . . . . .	113
4.4.3	Zeitlich veränderliche Führungsgeschwindigkeit . . . . .	114
4.4.4	Zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit . . . . .	115
4.4.5	Ortszeittransformation und Separationsansatz . . . . .	115
4.4.6	Auswertung . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Experimentelle Studie zu nichtmateriellen Randbedingungen</b>	<b>121</b>
5.1	Versuchsaufbau . . . . .	121
5.2	Untersuchung des Einflusses materieller Randbedingungen . . . . .	126
5.3	Untersuchung des Einflusses nichtmaterieller Randbedingungen . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Rückschlüsse für dreidimensionale Kontinua</b>	<b>133</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	133
6.2	Rückschlüsse aus dem Verhalten axial unbewegter eindimensionaler Kontinua . . .	133
6.3	Rückschlüsse aus dem Verhalten axial bewegter eindimensionaler Kontinua . . . .	134
6.3.1	Instationäre Führungsbewegung . . . . .	134
6.3.2	Ortszeittransformation für eine stationäre Führungsbewegung . . . . .	135
6.3.3	Zusammenhang mit der LORENTZ-Transformation . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>139</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	139
7.2	Ausblick . . . . .	141

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>A Ergänzungen zu den kontinuumsmechanischen Grundlagen</b>	<b>151</b>
A.1 Neo-klassische Raumzeit . . . . .	151
A.2 Beobachterabbildung und Bezugssystem . . . . .	153
A.3 Materieller Körper . . . . .	154
A.4 Tangentialraum und Kotangentialraum . . . . .	154
A.5 Beispiele zur Ableitungsnotation . . . . .	157
A.6 Ausgewählte Nebenrechnungen zu den kontinuumsmechanischen Grundlagen . .	159
A.7 Zur Symmetrie von Tensoren . . . . .	163
<b>B Ergänzungen zum Verhalten eindimensionaler Kontinua</b>	<b>165</b>
B.1 Überführen von inhomogenen in homogene Randbedingungen . . . . .	165
B.2 Einführung einer verallgemeinerten Zeitableitung . . . . .	166
B.2.1 Selbstdjungiertheit des Zeitableitungsoperators . . . . .	166
B.2.2 FOURIER-Transformation . . . . .	166
B.2.3 Definition der verallgemeinerten Zeitableitung . . . . .	168
B.2.4 Beschränktheit der Inversen der verallgemeinerten Zeitableitung . . . . .	170
B.2.5 Beispiele zur verallgemeinerten Zeitableitung . . . . .	172
B.3 Abschätzung zur Hilfslösung beim Integrationsansatz . . . . .	173
B.4 Besondere Eigenschaften der DIRAC-Distribution . . . . .	174
B.5 Bestimmung einer ausgewählten Stammfunktion . . . . .	175



## Abbildungsverzeichnis

1.1	Die schwingende Saite mit materiellen Randbedingungen aus [TAYLOR 1713] . . . . .	1
1.2	Modell einer axial unbewegten Saite, über die Randbedingungen bewegt werden . . . . .	7
1.3	Modell einer Saite, die axial über unbewegte Randbedingungen bewegt wird . . . . .	8
1.4	Vergleich der Schwingungen eines unbewegten eindimensionalen Kontinuums (Saite) mit materiellen bzw. nichtmateriellen Randbedingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten . . . . .	9
1.5	Untersuchungsdesign für die vorliegende Arbeit (nach [TÖPFER 2009]) . . . . .	11
2.1	Kommutatives Diagramm mit den Abbildungen zu Beobachter $\Phi$ , Bezugssystem $\Phi_0$ sowie den zugehörigen Konfigurationsabbildungen $\bar{\kappa}_\Phi$ , $\bar{\kappa}_{\Phi_0}$ , $\bar{\kappa}$ und $\kappa$ . . . . .	14
2.2	Materieller Punkt mit verschiedenen Repräsentationen am Beispiel der Ausgangsplatzierung . . . . .	16
2.3	Kommutatives Diagramm zur referentiellen Beschreibung der Bewegung . . . . .	17
2.4	Zusammenhang zwischen Bahn- und Stromlinie für eine Zeitänderung $\Delta t$ und eine Positionsänderung $\Delta \chi$ (nach [ALTENBACH & ALTENBACH 1994, S. 45]) . . . . .	18
2.5	Kommutatives Diagramm zur räumlichen Beschreibung der Bewegung . . . . .	19
2.6	Kommutatives Diagramm zur relativen Beschreibung der Bewegung . . . . .	21
2.7	Kommutatives Diagramm zur Beschreibung von Feldgrößen (in Bezug auf die verwendeten Platzierungen) . . . . .	23
2.8	Definition der Verschiebungsfelder am Beispiel einer elastischen Scheibe, die auf einer starren Ebene um rotiert, translatiert und durch Eigengewicht in vertikaler Richtung zusammengedrückt wird . . . . .	25
2.9	Beziehungen zwischen Deformationsgradienten, Bewegungsabbildungen und Platzierungen . . . . .	33
2.10	Zusammenstellung von Urbildern und Bildern für Metrikensoren, Deformationsgradienten und Dehnungstensoren (nichtkommutatives Diagramm) . . . . .	37
2.11	Kommutatives Diagramm zu den Zusammenhängen von Deformationsgradienten und Spannungstensoren . . . . .	39
2.12	Materielle Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe . . . . .	54
2.13	Räumliche Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe . . . . .	55
2.14	Referentielle Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe . . . . .	56
3.1	Definition der Ausgangsplatzierung . . . . .	63
3.2	Freikörperbild eines Saitenabschnittes $[s_1, s] \subseteq \mathcal{M}_t$ . . . . .	64
3.3	Modell einer axial festen Saite mit in $s$ -Richtung bewegten Lagerungsbedingungen (vgl. [ZWIERS 2007, S. 27]) . . . . .	68

3.4	Modell einer axial festen Saite mit einer unbewegten und einer in $s$ -Richtung bewegten Lagerungsbedingung . . . . .	69
3.5	Periodische Fortsetzung der Funktionen $g$ und $h$ über die auf dem Intervall $[0, l]$ gegebenen Anfangswerte $u_0$ hinaus für den Fall verschwindender Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten ( $u_1 = 0$ ) . . . . .	81
3.6	Schema der numerischen Umsetzung der Lösung mittels Integrationsansatz . . . . .	82
3.7	Lösung für sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten (konstante Führungsgeschwindigkeitsfunktion $v$ ) . . . . .	84
3.8	Lösung für dreiecksförmige Anfangsfunktionen (konstante Führungsgeschwindigkeitsfunktion $v$ ). Die Trajektorien der sich bewegenden Lager sind durch schwarze Linien hervorgehoben. . . . .	86
3.9	Periodische Fortsetzung der auf dem Intervall $[0, l_0]$ gegebenen Hilfsfunktionen am Beispiel der Funktion $g$ für den Fall verschwindender Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten ( $u_1 = 0$ ) . . . . .	92
3.10	Vergleich der Saitenschwingungen für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten $v$ bei gleichen Anfangsbedingungen . . . . .	93
4.1	Modell einer Saite, die axial über unbewegte Randbedingungen bewegt wird . . . . .	95
4.2	Abhängigkeit der ersten fünf Eigenkreisfrequenzen von der Führungsgeschwindigkeit $v$ . . . . .	101
4.3	Darstellung der dritten Eigenform für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten . . . . .	102
4.4	Darstellung des dritten Reihenanteils der Lösungsentwicklung für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten . . . . .	103
4.5	Saitenquerschwingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten sowie eine linear ansteigende Führungsgeschwindigkeitsfunktion . . . . .	107
4.6	ALE-Kinematik für das Seil . . . . .	109
4.7	Modell eines in axialer Richtung bewegten Seils mit räumlich festen Lagerungsbedingungen . . . . .	113
4.8	Seillängsschwingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten sowie eine linear ansteigende Führungsgeschwindigkeitsfunktion . . . . .	118
4.9	Lösungsverlauf bei sinusförmiger Anfangsverschiebungsfunktion und konstanter Führungsgeschwindigkeit für verschiedene Platzierungen (verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten) . . . . .	120
5.1	Versuchsaufbau am Monochord . . . . .	121
5.2	Referenzversuch mit einer Stimmgabel . . . . .	123
5.3	Frequenzspektren und Sonagramm zum Signal einer Stimmgabel . . . . .	125

5.4	Analytisch bestimmte Frequenzspektren der A-Saite für verschiedene Zupfpositionen $s_Z$ (feste Zwischenlagerposition $s_R = 0,75l_m$ ) . . . . .	127
5.5	Frequenzspektren und Sonagramm zum Signal einer bei $s_Z = 0,5l_m$ gezupften Saite (feste Zwischenlagerposition $s_R = 0,75l_m$ ) . . . . .	129
5.6	Frequenzspektrum und Sonagramm zum Signal einer bei $s_Z = 0,2l_m$ gezupften Saite (feste Zwischenlagerposition $s_R = 0,75l_m$ ) . . . . .	130
5.7	Frequenzspektrum und Sonagramm zum experimentell ermittelten Signal einer bei $s_Z = 0,2l_m$ gezupften Saite und Glissando ( $s_R = 0,75l_m$ für $t = 0$ ) . . . . .	131
5.8	Sonagramm zum numerisch bestimmten Signal einer bei $s_Z = 0,2l_m$ gezupften Saite und Glissando ( $s_R = 0,75l_m$ für $t = 0$ ) . . . . .	132
A.1	Materieller Körper $\tilde{\mathcal{B}}$ , Einbettungsabbildung $\tilde{\Theta}$ und Parameterraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	154
A.2	Definition der Tangentialräume in verschiedenen Platzierungen . . . . .	157
A.3	Kommutatives Diagramm zur Symmetrie von Tensoren . . . . .	163
B.1	Schaubild zum Vertauschen der Integrationsreihenfolge . . . . .	174



## Tabellenverzeichnis

2.1	Vor- und Nachteile der referentiellen und der räumlichen Beschreibung . . . . .	20
2.2	Übersicht über eingeführte Zeitableitungsoperatoren in Abhängigkeit der gewählten Beschreibung . . . . .	27
2.3	Übersicht zu den Substitutionen für die Felder $\alpha$ , $\beta$ und $\gamma$ der allgemeinen Bilanzgleichung (nach [SCOVAZZI & HUGHES 2007]) . . . . .	44



# Nomenklatur- und Symbolverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

$a$	Beschleunigungsabbildung
$b$	Beiwert der Ortszeittransformation
$c$	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
$\overset{MA}{\mathbf{c}}$	konvektive Geschwindigkeitsabbildung zwischen Ausgangs- und Momentanplatzierung
$\mathbf{C}$	CAUCHY-GREEN-Tensor
$\mathbf{d}_o$	Abstandsabbildung mit Bezugspunkt
$d_{\mathcal{E}}$	Metrik des Raumes $\mathcal{E}$
$\mathbf{d}_{\mathbb{E}}$	Metrik des Raumes $\mathbb{E}$
$d^j$	Operator der totalen Ableitung (der Ordnung $j$ )
$D_i^j$	Operator der Richtungsableitung (der Ordnung $j$ ) in Richtung $i$
$e$	spezifische innere Energie
$e_{\text{ges}}$	spezifische Gesamtenergie
$\mathbf{e}_i$	Basisvektor der kartesischen Basis
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{\text{elast}}$	elastische Energie
$\mathbf{E}$	Dehnungstensor
$f$	Frequenz (vgl. Abschnitt 3.3.6)
$f$	Ereignis (vgl. Abschnitt A.1)
$\mathbf{f}$	eingeprägte massebezogene Kraft
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{g}$	Tangentialvektor in der Momentanplatzierung
$\tilde{\mathbf{g}}$	Tangentialvektor auf der Mannigfaltigkeit
$\tilde{\tilde{\mathbf{g}}}$	Tangentialvektor im Parameterraum
$\mathbf{g}^*$	Normalenvektor in der Momentanplatzierung
$\tilde{\mathbf{g}}^*$	Normalenvektor auf der Mannigfaltigkeit
$\tilde{\tilde{\mathbf{g}}}^*$	Normalenvektor im Parameterraum

$\mathbf{G}$	Tangentialvektor in der Ausgangsplatzierung
$\mathbf{G}^*$	Normalenvektor in der Ausgangsplatzierung
$G$	Schubmodul
$h$	skalarwertige Beispielfeldgröße
$\mathbf{h}$	vektorwertige Beispielfeldgröße
$\mathbf{H}$	tensorwertige Beispielfeldgröße
$J$	JACOBI-Abbildung
$k$	skalarwertige Beispielfeldgröße
$\mathbf{k}$	vektorwertige Beispielfeldgröße
$l$	Abstand der Randbedingungen bei gleich und unterschiedlich bewegten Lagern
$l_0$	Anfangsabstand der Randbedingungen
$l_m$	frei schwingende Saitenlänge des Monochords (Mensur)
$m$	Multiplikationsoperator
$\mathbf{n}$	Normalenvektorabbildung
$N$	Normalkraft
$\mathbf{P}$	Pseudospannungstensor
$\mathbf{q}$	Wärmeflussvektor pro Flächeneinheit
$r$	räumliche Koordinate
$r_h$	skalare innere Wärmequelle
$\mathbf{R}$	RIESZ-Abbildung
$s$	materielle Koordinate
$\mathbf{S}$	Nennspannungstensor
$t$	Zeitpunkt, für den die Momentanplatzierung definiert ist
$t_0$	Ausgangszeitpunkt
$\underline{t}$	Zeitpunkt, für den die Ausgangsplatzierung definiert ist
$\hat{t}$	Zeitpunkt, für den die Referenzplatzierung definiert ist
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$u_0$	Anfangswert für die Verschiebung



$u_1$	Anfangswert für die Verschiebungsgeschwindigkeit
$\mathbf{u}$	Verschiebungsabbildung
$U_1$	Stammfunktion der Funktion für die Anfangsverschiebungsgeschwindigkeit
$v$	Führungsgeschwindigkeit
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsabbildung
$V$	Integral der Führungsgeschwindigkeit über die Zeit bei gleich und unterschiedlich bewegten Lagern
$w_{\text{elast}}$	elastische Energiedichte
$\overset{MA}{w}$	transformierte Verschiebungsabbildung zwischen Ausgangs- und Momentanplatzierung
$w_0$	Anfangswerte für die transformierte Verschiebung
$w_1$	Anfangswerte für die transformierte Verschiebungsgeschwindigkeit
$W_1$	Stammfunktion der Funktion für die transformierte Anfangsverschiebungsgeschwindigkeit
$\mathbf{x}$	Element der Momentanplatzierung
$\bar{\mathbf{x}}$	Bezugspunkt für Stromlinien
$\mathbf{X}$	Element der Ausgangsplatzierung

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Beispielplatzierung
$\beta$	Beispielplatzierung
$\gamma$	Beispielplatzierung
$\Gamma$	auf die Zeitdifferenzfunktion bezogene Zerlegung des Ereignisraumes
$\delta$	DIRAC-Distribution
$\delta_i^j$	KRONECKER-Symbol
$\Delta \bar{d}$	Abstandsfunktion bezüglich gleichzeitiger Ereignisse
$\Delta d_\tau$	Abstandsfunktion bezüglich gleichzeitiger Ereignisse innerhalb eines Augenblicks $\tau$
$\Delta t$	auf der Zerlegung des Ereignisraumes definierte Zeitdifferenzfunktion
$\Delta \bar{t}$	auf dem Ereignisraum definierte Zeitdifferenzfunktion

$\varepsilon$	eindimensionale Dehnung
$\varepsilon_0$	Bezugspunkt des Raumes $\mathcal{E}$
$\zeta$	materieller Punkt
$\eta$	Entropie
$\eta_k$	Ansatzfunktionen
$\overset{MA}{\boldsymbol{\eta}}$	konvektive Verschiebungsabbildung zwischen Ausgangs- und Momentanplatzierung
$\theta$	Temperatur (vgl. Abschnitt 2.5.2)
$\theta$	Koordinatenabbildung in der Momentanplatzierung (vgl. Abschnitt A.4)
$\Theta$	Koordinatenabbildung in der Ausgangsplatzierung
$\tilde{\Theta}$	Einbettungsabbildung
$\vartheta$	Koordinatenabbildung in der Referenzplatzierung
$i$	imaginäre Einheit
$\kappa$	Konfigurationsabbildung bezüglich des Bezugssystems $\Phi_0$ auf dem Raum $\mathbb{T} \times \tilde{\mathcal{B}}$
$\bar{\kappa}$	Konfigurationsabbildung ohne Beobachter und Bezugssystem
$\bar{\kappa}_\Phi$	Konfigurationsabbildung bezüglich des Beobachters $\Phi$
$\bar{\kappa}_{\Phi_0}$	Konfigurationsabbildung bezüglich des Bezugssystems $\Phi_0$
$\lambda$	erster LAMÉ-Parameter
$\mu$	zweiter LAMÉ-Parameter (entspr. Schubmodul $G$ )
$\mu_k$	Ansatzfunktionen
$\nu$	Querdehnzahl
$\xi$	materieller Punkt
$\tilde{\xi}$	Element des Parameterraumes
$\pi_i$	Projektion in Richtung des $i$ -ten Argumentes (Projektionsoperator)
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Skalierungsoperator (vgl. Abschnitt 6.3.3)
$\sigma$	Augenblick (vgl. Abschnitt A.1)
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor

$\varsigma$	materieller Punkt
$\tau$	Translationsoperator (vgl. Abschnitt 3.3.1)
$\tau$	Augenblick (vgl. Abschnitt A.1)
$\tau_0$	Bezugsaugenblick
$\varphi$	Winkel
$\phi_k$	Eigenfunktionen
$\overset{\beta\alpha}{\Phi}$	Bewegungsabbildung von Platzierung $\alpha$ zu Platzierung $\beta$
$\Phi$	Beobachterabbildung
$\Phi_o$	Bezugssystem
$\chi_\alpha$	charakteristische Funktion auf der Menge $\alpha$
$\chi$	Element der Referenzplatzierung
$\psi_k$	Ansatzfunktionen

### **Kalligraphische Buchstaben**

$\mathcal{A}$	Ausgangsplatzierung
$\tilde{\mathcal{B}}$	materieller Körper
$\mathcal{D}$	Definitionsbereich
$\underline{\mathcal{E}}$	Elastizitätstensor
$\mathcal{E}$	EUKLIDischer Anschauungsraum
$\mathcal{M}$	Momentanplatzierung
$\mathcal{O}$	Kennzeichnung der Verwendung einer ortsabhängigen Zeit (Ortszeit)
$\mathcal{R}$	Referenzplatzierung
$\mathcal{T}_P\mathcal{M}$	Tangentenraum im Punkt $P$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$
$\mathcal{T}_P^*\mathcal{M}$	Kotangentenraum im Punkt $P$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$
$\tilde{\mathcal{U}}$	Teil des materiellen Körpers
$\mathcal{W}$	Ereignisraum
$\mathcal{W}_{\text{sim}}$	Ereignisraum der gleichzeitigen Ereignisse

## Mathematische Ausdrücke, Schreibweisen und Operatoren

$\bigwedge$	Allquantor
$\bigvee$	Existenzquantor
$\bigcup$	Vereinigungsmenge
$\circ$	Kompositionssymbol
$\square$	Platzhalter
$(\dots)$	Größe bezüglich der Platzierung $\alpha$
$\overset{\alpha}{\underset{\beta\alpha}{(\dots)}}$	Größe bezüglich der Bewegungsabbildung $\overset{\beta\alpha}{\phi}$
$\widehat{(\dots)}$	Anfangswerte
$\underline{(\dots)}$	gegebene Randbedingungen
$\text{cof}[\dots]$	Kofaktor
$\overset{j}{\underset{\alpha}{\partial}}$	Operator der partiellen Ableitung nach dem $i$ -ten Argument (der Ordnung $j$ ) bezüglich der Platzierung $\alpha$
$\partial\alpha$	Rand der Platzierung $\alpha$
$\text{Div}_{\alpha}$	Divergenz bezüglich der Platzierung $\alpha$
$\text{Grad}_{\alpha}$	Gradient bezüglich der Platzierung $\alpha$
$\mathbb{E}$	Translationsraum des EUKLIDischen Anschauungsraumes $\mathcal{E}$
$\text{id}_{\alpha}$	Identitätsabbildung auf der Menge $\alpha$
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_n$	Indexmenge der natürlichen Zahlen von null bis $(n - 1)$ ( $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ )
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Positive Reelle Zahlen ( $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ )
$\mathbb{T}$	Translationsraum der Zeit
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$[\square, \square, \square]_{\alpha}$	Spatprodukt im Raum $\alpha$
$\langle \square, \square \rangle_{\alpha}$	Skalarprodukt im Raum $\alpha$
$\langle \square \mid \square \rangle_{\alpha}$	Duales Produkt im Raum $\alpha$





# 1 Einführung

## 1.1 Einleitendes

In der Natur gibt es keinen Stillstand. Auch wenn es im Bauwesen zahlreiche Prozesse gibt, die abhängig von der verwendeten Zeitskala so langsam ablaufen, dass sie als quasi-statisch angenommen werden können, hat es Sinn, auch als Bauingenieur die Dynamik von Strukturen näher zu betrachten. In der klassischen Baudynamik im Bauwesen bzw. der Strukturmechanik im Maschinenwesen werden hauptsächlich Systeme mit sogenannten materiellen Randbedingungen untersucht. Dabei können Randbedingungen für Spannungen oder Verschiebungen über die Zeit ein und demselben Materiepunkt zugeordnet werden. Unabhängig davon können Randbedingungen und Belastungen auch noch von unterschiedlichen Größen abhängen. Neben der Zeit ist z. B. die Deformation zu nennen. Folgelasten sind ein Beispiel für deformationsabhängige Randbedingungen (vgl. [BATRA 1972]).

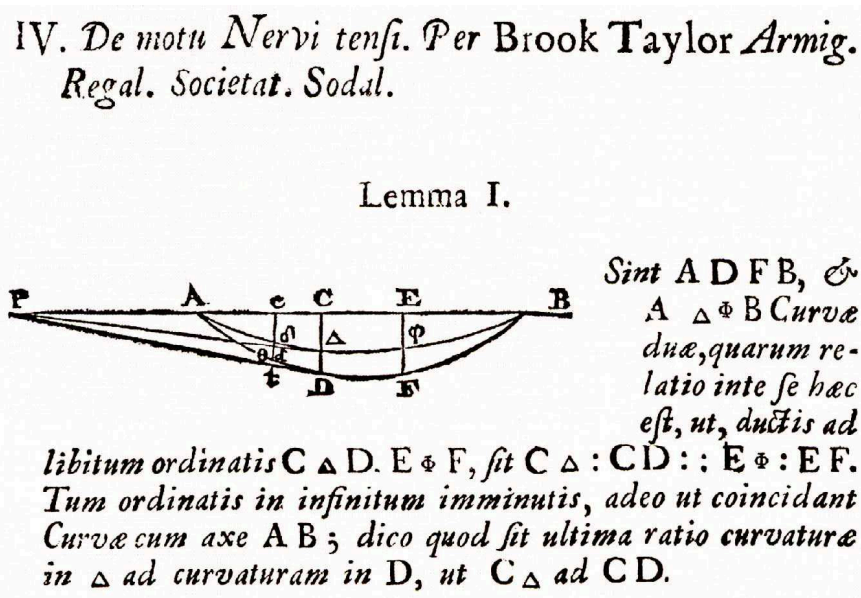


Abbildung 1.1: Die schwingende Saite mit materiellen Randbedingungen aus [TAYLOR 1713]

Das relativ einfache Modell einer beidseitig festgehaltenen elastischen Saite steht exemplarisch für ein schwingungsfähiges System (s. Abb. 1.1). Als mechanisches Problem wurde die „schwingende Saite“ bereits im Jahre 1713 formuliert (s. [TAYLOR 1713]). Die Bewegungsgleichung dieses Systems ist die eindimensionale Wellengleichung, die in einer üblichen Schreibweise als

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad c := \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad (1.1)$$

notiert werden kann. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen den transversalen Saitenverschiebungen  $u$ , der konstanten Saitenvorspannung  $N$  und der verteilten Masse der Saite  $\rho$  her, wobei die Größe  $c$  auch als Wellenausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet wird. Die (klassischen) materiellen Randbedingungen einer Saite der Länge  $l$  können in homogener Form mit

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(t, l) = 0 \quad (1.2)$$

angegeben werden. Die Anfangsbedingungen der Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten vervollständigen die Problemformulierung. Für die Analyse der Schwingungen solcher

Systeme existiert bereits eine Vielzahl von Methoden. Unter diesen Methoden gibt es zwei herausragende Ansätze zur Beschreibung des Systemverhaltens über die Zeit. Zum einen kann das (transiente) Zeitverhalten durch explizite (numerische) Zeitintegration bestimmt werden. Der Vorteil der Verfahren, welche diesen Ansatz verwenden, liegt in der Möglichkeit sehr komplizierte (nicht-lineare) Material- und Strukturmodelle einzusetzen. Nachteilig wirkt sich jedoch der relativ hohe numerische Aufwand bei Frequenzanalysen aus, da beispielsweise bei akustischen Untersuchungen für ein breites Frequenzspektrum sehr kleine Zeitschrittweiten erforderlich sind. Zum anderen ist es möglich, den Zeitverlauf der Systembewegung durch die Überlagerung von Eigenmoden zu beschreiben. Dabei steht dem Vorteil einer kürzeren Berechnungsdauer die meist erforderliche Einfachheit der Material- und Strukturmodelle entgegen.

Neben den beschriebenen Problemen mit materiellen Randbedingungen existiert auch eine Vielzahl von Anwendungen mit nichtmateriellen Randbedingungen, welche über die Zeit nicht ein und demselben materiellen Punkt zugeordnet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit ist die Definition der nichtmateriellen Randbedingungen auf die relative Lage zu materiellen Punkten beschränkt und ist demnach nicht mit zeitveränderlichen Randbedingungen zu verwechseln, die auch entstehen, wenn sich z. B. ein Brückenlager zeitabhängig hebt und senkt oder sich die Steifigkeit einer Federlagerung zeitlich verändert.

Als einfaches Beispiel nichtmaterieller Randbedingungen kann erneut die schwingende Saite dienen. Dazu wird vergleichbar dem Vibrato eines Violinenspielers das rechte Lager relativ zur Saite als beweglich angenommen. Wird für die Relativverschiebung zwischen Randbedingung und Saite die Funktion  $V$  angenommen, so sind bei gleicher Bewegungsgleichung für die Beschreibung der Saitenschwingungen (Gl. (1.1)) nun die Randbedingungen

$$u(t, x = 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(t, x = l + V(t)) = 0 \quad (1.3)$$

gültig. Demzufolge ist die Position der zweiten Randbedingung zeitabhängig und sie besitzt einen nichtmateriellen Charakter. Probleme mit solchen zeitabhängigen Randbedingungen sind vor allem in Anwendungsgebieten des Maschinenbaues vertreten. Als eines der wichtigsten Gebiete gilt die Beschreibung von Kontaktproblemen wie bei schnell rollenden Rädern im Straßenverkehr bzw. Radsätzen im Bahnverkehr (s. [DAMME 2006]). Hierbei können die Kontaktpunkte zwischen Rad und Untergrund als Positionen nichtmaterieller Randbedingungen interpretiert werden. In diese Gruppe von Anwendungen rotierender Strukturen mit nichtmateriellen Randbedingungen lassen sich auch die Behandlung von Bremscheiben (s. [HETZLER 2008]), Festplatten und Rotoren (s. [KARCH & RIEMER 1994, CHUNG et al. 2000]) einordnen.

Ein weiteres wichtiges Gebiet von Problemen mit nichtmateriellen Randbedingungen ist das Feld der axial bewegten Kontinua. Dabei werden in der technischen Umsetzung Körper mit einer relativ geringen Dicke, beispielsweise Platten (s. [BANICHUK et al. 2010]) oder Netze (s. [MARYNOWSKI 2008]) in Walzwerken (s. [HOLL & HAMMELMÜLLER 2006]) oder über Kalandere (s. [BROMMUNDT 2009]) bewegt. Hierzu gehören auch Probleme, wie sie in der Papier- und Textilherstellung (s. [WEISS 1999, BEITELSCHMIDT 2002]), bei Transportbändern (s. [MIRANKER 1960], Bandsägen (s. [MOTE 1965]) und Triebriemen (s. [MATTHIEU 1961, HEDRIH 2007]) sowie Keilriemen (s. [ZU 2001, BELYAEV 2003]) auftreten. Bei diesen Anwendungen lässt sich die Bewegung des Kontinuums aus einer axialen Führungsbewegung und einer Deformationsbewegung (Schwingung) zusammensetzen. Zur Ergänzung seien auch Kabelsysteme mit veränderlicher Masse wie Aufzüge (s. [WAUER 1975, WAUER 1976, TRIANTAFYLLOU 1985, PERKINS & C. D. MOTE 1987]), sogenannte Space-Tether (s. [SCHWARZBART et al. 2009]) sowie Balkensysteme veränderlicher Länge



(s. [BEHDINAN et al. 1997, BARTHELS 2008]) genannt. Auch auf dem Gebiet der Fluidodynamik spielen Systeme mit nichtmateriellen Randbedingungen z. B. bei der Behandlung von Bohrgestängen eine große Rolle. In [JURISITS & STEINDL 2011, ROTH 1965] werden deshalb Modelle von flüssigkeitsdurchströmten Rohren mit ähnlichen Methoden behandelt.

Auf all diesen Gebieten existieren bereits umfangreiche Untersuchungen für stationäre Bewegungen, d. h. Bewegungen mit einem zeitlich konstanten Geschwindigkeitsfeld. Im Bereich der instationären oder transienten Bewegungen gibt es jedoch nur wenige Untersuchungen, und wenn sie existieren, verwenden sie zumeist den numerisch aufwendigen Ansatz der Zeitintegration oder beschränken sich auf einfache Beschleunigungsverläufe. Deshalb beschäftigt sich diese Arbeit u. a. mit der dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Beschreibung von Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen für beliebige zeitveränderliche Geschwindigkeitsfelder. Für die konkrete Umsetzung werden eindimensionale Beispiele behandelt, deren analytische und semi-analytische Lösungen zu Schlussfolgerungen für dreidimensionale Problemstellungen genutzt werden können. Die dabei entwickelten Methoden und die erhaltenen Resultate helfen bei der Weiterentwicklung der genannten technischen Anwendungen.

## 1.2 Stand des Wissens

Die Begründung der Kontinuumsmechanik wird in der Literatur etwa mit der Formulierung des Spannungs- und Deformationsbegriffes für homogene isotrope Körper durch CAUCHY im Jahre 1827 festgelegt (vgl. [SZABÓ 1987, S. 402]). Seitdem wurde die kontinuumsmechanische Beschreibung auch für Bewegungen fortlaufend erweitert und vereinheitlicht. Obwohl zahlreiche Anwendungen existieren, deren Modellierung nichtmaterielle Randbedingungen enthält, hat es einige Zeit gebraucht, bis sich RIEMER in [RIEMER 1985] und [RIEMER 1989] mit der „Theorie elastischer Kontinua mit nichtmateriellen Übergangsbedingungen“ beschäftigte und so nichtmaterielle Randbedingungen in die dreidimensionale Kontinuumsmechanik einführte.

Eine wesentliche Klasse solcher Anwendungen in der Mechanik sind Kontaktprobleme, und ein besonders hervorzuhebendes Beispiel ist das des Rollkontaktes (vgl. auch Abschnitt 1.1). Hierbei hatten frühere Arbeiten (wie [FÖPPL 1947]) vor allem analytische Verfahren zur Berechnung der Kontaktspannungsverteilung beim Rad-Schiene-Rollvorgang zum Inhalt, während aktuellere Schriften den statischen und dynamischen Kontakt sehr allgemein im Kontext der Kontinuumsmechanik behandeln (vgl. [KALKER 1979, WILLNER 2003]).

Innerhalb der Beschreibung von Rollvorgängen lassen sich zwei größere Entwicklungszweige erkennen. Zum einen wird die (Roll-)Bewegung eines Kontinuums über eine (deformierbare) Unterlage untersucht und zum anderen sind (deformierbare) Unterlagen, auf denen ein Körper eine (Roll-)Bewegung vollführt, Gegenstand der Analyse (s. [KALISKE et al. 2011]). Der Unterschied liegt demnach darin, ob der Fokus der Erforschung auf dem rollenden Körper oder der Unterlage liegt. Die Entwicklung der Methoden lässt sich besonders gut am Beispiel der Fahrbahn-Reifen-Interaktion und der Rad-Schiene-Interaktion schildern, da hier aufgrund der enormen wirtschaftlichen (z. B. Reifenabrieb) und gesellschaftlichen Bedeutung (z. B. Schallemission) besonders viele Forschungsarbeiten existieren.

Untersuchungen, deren Hauptaugenmerk auf der Behandlung des rollenden Körpers liegt, unterscheiden sich vor allem in der Komplexität des Rad- bzw. Reifenmodells. Die relativ frühen Arbeiten wie z. B. [BÖHM 1966, BÖHM 1985] erlauben z. T. noch analytische Lösungen, da der Reifen auf einen elastisch gebetteten Kreisring oder eine Schale reduziert wird. Spätere Arbeiten ergänzen die Modellierung des Reifens um die Steifigkeit der Seitenwände und den Innendruck (s. u. a. [KROPP 1992]). Durch diese relativ komplizierten Modelle zeigen Vergleiche von Simulations- und Messergebnissen bereits relativ gute Übereinstimmungen (s. [ANDERSSON et al. 2004, WULLENS & KROPP 2004]).

In der aktuelleren Entwicklung sind methodisch vor allem zwei Wege zu verzeichnen. Zum einen wird das transiente Zeitverhalten mit expliziter Zeitintegration simuliert. Die für eine Analyse notwendigen kleinen Zeitschrittweiten können dabei eine Einschränkung darstellen, da der numerische Aufwand dann verhältnismäßig hoch ist. Stellvertretend sind Arbeiten wie [RAO et al. 2003, HALL et al. 2004] zu nennen. Zum anderen wird der Ansatz verwendet, die Bewegung durch Überlagerung von Eigenmoden zu beschreiben, wobei die Grundvoraussetzung hierfür eine lineare oder zumindest konsistent linearisierte Bewegungsgleichung ist (vgl. [WRIGGERS 1988]).

Ein Hilfsmittel bei der Linearisierung von Gleichungen, die Bewegungen mit großen Verschiebungen abbilden, ist die Anwendung einer sogenannte Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik (ALE). Bei dieser aus der Fluidodynamik stammenden Kinematik (s. [DONEA & HUERTA 2003]) wird die Gesamtbewegung zerlegt in zwei Teilbewegungen. Dabei lässt sich die Dekomposition der Bewegung so wählen, dass eine Teilbewegung nur noch kleine Deformationen enthält und somit

sinnvoll linearisiert werden kann.<sup>1</sup> Aufbauend auf den grundsätzlichen Überlegungen zum Rollkontakt und zur ALE-Beschreibung in [NACKENHORST 1992] und [NACKENHORST 2000] wird dieses Vorgehen in Folgearbeiten um die Rotationsbewegung des Reifens ergänzt und so in die Behandlung von Rollkontaktproblemen eingeführt. In [BRINKMEIER 2007] wird diese Methode weiter verbessert, so dass sie für stationäre Rollbewegungen für die Betriebsschwingungsanalyse bei hohen Frequenzen numerisch effektiv eingesetzt werden kann.

Für die Analyse des Verhaltens einer (bis auf Deformationen) unbewegten Unterlage existieren ebenfalls zahlreiche Arbeiten. Besonders zu betonen sind hierbei die Stabilitätsuntersuchungen der elastischen Schiene unter Berücksichtigung der Wechselwirkung von Rad und Schiene in [OSTERMEYER 1988], wo für die Beschreibung des Variationsprinzips der Schiene als elastisches Balkenkontinuum eine mitbewegte Ortsvariable eingeführt wird. Mit einem ähnlichen Ansatz, aber mit (semi-)analytischen Lösungsverfahren, behandeln [BOGACZ & SZOLC 1993] und [BAJER & DYNIEWICZ 2008] die Schwingungen von eindimensionalen Kontinua, über die konzentrierte Massen geführt werden. Sind der Modellierung in diesem Fall auch starke Grenzen gesetzt, liegen die Vorteile (semi-)analytischer Untersuchungen in einem tieferen Verständnis für den Lösungsprozess sowie für die Einflüsse von Modellparametern.

Unter anderem deshalb beschäftigen sich auch noch aktuellere Arbeiten mit vereinfachten (eindimensionalen) Modellen, die einer (semi-)analytischen Lösung zugänglich sind. Für den Rollkontakt sind dies insbesondere Kreisring- oder Zylinderschalenmodelle mit elastischem oder inelastischem Materialverhalten. So behandeln [HUANG & SOEDEL 1987] einen elastischen Kreisring mit wandernder Last und einen sich drehenden Kreisring mit räumlich fester Last. Zwei weitere aktuellere Beispiele sind mit einer Stabilitätsuntersuchung zu einem rotierenden Kreisring, der auf Federn mit zeitveränderlicher Steifigkeit gelagert ist, in [CANCHI & PARKER 2006] sowie der analytischen Betrachtung eines rotierenden Kreisrings auf elastischer Bettung in [WU & PARKER 2006] gegeben.

Die mechanische Behandlung eindimensionaler Strukturen hat eine sehr lange Tradition. Zum einen aufgrund ihrer Einfachheit in der mathematischen Beschreibung und zum anderen aufgrund der Verbreitung schlanker Bauteile in der Wirklichkeit in Form von Balken, Stützen, Seilen oder Saiten. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit soll zur Einordnung des Forschungsthemas deshalb ein kurzer Überblick über die Entwicklung der Theorie eindimensionaler Kontinua gegeben werden, die sich an den Ausführungen von [SZABÓ 1987] und [DUGAS 1988] orientiert.

Die musiktheoretischen Untersuchungen von MERSENNE im 17. Jahrhundert können wohl als Einstieg in die Erforschung schlanker Kontinua betrachtet werden. NEWTON setzte diese Untersuchungen systematisch fort und beschrieb am Beispiel der schwingenden Saite erstmals die Entstehung und Fortpflanzung von Schallwellen. Die Bewegungsgleichung der Saitenschwingung wird TAYLOR zugeordnet, welcher 1713 erstmals Gl. (1.1) in der damals üblichen geometrischen Art und Weise herleitete (s. Abb. 1.1). D'ALEMBERT entwickelte 1747 eine Lösung dieser Bewegungsgleichung zur Ermittlung der Saitenauslenkung, welche auf dem Ansatz

$$u(t, x) = g(t + x) + h(t - x) \quad (1.4)$$

mit den willkürlichen Funktionen  $g$  und  $h$  basiert. Die noch unvollkommene Lösung D'ALEMBERTS verbesserte EULER kurze Zeit später, so dass ab 1748 eine Lösung für dieses Problem vorlag. Eine sehr originelle Lösung des Problems der schwingenden Saite gelang danach

<sup>1</sup> Dieses Vorgehen lässt sich in der Fluidodynamik auch als ein zeitabhängiges Kontrollvolumen interpretieren (s. z. B. [IRSCHIK & HOLL 2002]).

DANIEL BERNOULLI, welcher die Lösung durch Superposition von Einzellösungen aufbaute. Abweichend von der kontinuierlichen Beschreibung der Saite fand LAGRANGE zwischen 1759 und 1762, dass eine durch  $n$  Punktmassen diskretisierte Saite auch  $n$  Eigenfrequenzen besitzt. Mit den zunehmenden Möglichkeiten der mathematischen Beschreibung und dem wachsenden Verständnis für die zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen war es nicht mehr länger notwendig, nur noch biegeeweiche, eindimensionale Kontinua wie die Saite zu betrachten. Dementsprechend konnten nachfolgend auch die Bewegungsgleichungen für verschiedene Arten von Balken aufgestellt und gelöst werden. Einen historischen Überblick über diese Entwicklung geben [TRUESDELL 1960] und die Einleitung von [BERGER 1996] wieder.

Erste, sehr allgemeine Untersuchungen zu Schwingungen eindimensionaler Kontinua mit axialer Bewegung gehen auf [SKUTSCH 1897] zurück. Dabei wurden Transversalschwingungen eines biegeweichen, mit konstanter Kraft vorgespannten und mit konstanter Geschwindigkeit axial bewegten Fadens untersucht. Wieder aufgenommen wurde die Forschung zu diesem Thema von MIRANKER, der wohl als erster die Bewegungsgleichung für eine axial bewegte Saite aufstellte (s. [ZEN & MÜFTU 2006]). Dabei untersuchte er in [MIRANKER 1960] die Schwingungen von Magnet- oder Papierbändern, die über zwei räumlich feste Rollen axial bewegt werden.

Ein Literaturüberblick über die Erforschung axial bewegter eindimensionaler Kontinua kann [ULSOY et al. 1978] und [LIN & QIAO 2008] entnommen werden und wird an dieser Stelle nicht vollständig aufgeführt. Vielmehr soll die Betonung auf einigen wenigen, ausgewählten Veröffentlichungen liegen. Die Arbeiten [RIEMER 1987] bzw. [RIEMER 1986] haben die Transversalschwingungen einer axial unbewegten Saite, über die Randbedingungen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt werden, bzw. einer axial mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Saite mit räumlich festen Randbedingungen zum Inhalt. Da diese Systeme einen gyroskopischen Charakter besitzen, unterscheidet sich ihre Eigenwertanalyse vom klassischen Vorgehen (s. [WICKERT & MOTE, JR. 1990]). Die bisher genannten Arbeiten beschränken sich auf eine Formulierung mit linear-elastischem Materialverhalten und einer konstanten Führungsgeschwindigkeit (der Lager bzw. des eindimensionalen Kontinuums). Eine Erweiterung auf nichtlineares Materialverhalten ist in [LIU & RINCON 2003] gelungen. Die Lösung basiert jedoch auf einer numerisch aufwendigeren Zeitintegration. Für beschleunigt bewegte Kontinua existieren insgesamt nur sehr wenige Vorarbeiten, die außerdem nur für einfache Beschleunigungsverläufe gültig sind (s. [ÖZ 2001, ZEN & MÜFTU 2006, ZWIERS 2007]).

### 1.3 Motivierendes Beispiel

Wie wichtig die Berücksichtigung der Kontinuumsbewegung und nichtkonstanter Führungsgeschwindigkeiten ist, wird das folgende einführende Beispiel kurz darstellen. Dafür werden die Bewegungsgleichungen für zwei verschiedene eindimensionale Modelle miteinander verglichen und im Anschluss daran wird der Schwingungsverlauf eines Systems mit materiellen Randbedingungen dem eines Systems mit nichtmateriellen Randbedingungen gegenübergestellt.<sup>2</sup>

Zum Ersten sind dies die Querschwingungen einer axial unbeweglichen Saite, über die zwei Lager (Randbedingungen) mit dem Abstand  $l$  und einer gemeinsamen Führungsgeschwindigkeit  $v$  bewegt werden (s. Abb. 1.2). Die Bewegungsdifferentialgleichung für dieses Modell ist die bereits in Gl. (1.1) angegebene eindimensionale Wellengleichung mit den nichtmateriellen Randbedingungen

$$u(t, V(t)) = 0 \quad \text{und} \quad u(t, l + V(t)) = 0 \quad . \quad (1.5)$$

Hierbei gibt die Größe  $V$

$$V(t) := \int_{\bar{t} \in [0, t]} v(\bar{t}) \quad (1.6)$$

den von den Randbedingungen zurückgelegten Weg wieder, wobei als Startzeitpunkt der Bewegung die Zeit  $t = 0$  gewählt wurde. Um räumlich feste Randbedingungen, d. h. in diesem Fall Randbedingungen ohne Zeitabhängigkeit in der Position, zu erhalten, lässt sich die Bewegungsgleichung mithilfe einer Transformation in die Form

$$\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} - 2v(t) \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t \partial x} - \left( \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} + (v(t)^2 - c^2) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.7)$$

überführen. Hierbei bezeichnet  $w$  die transformierte Auslenkung. Wie sich ablesen lässt, ändert sich für genügend große Geschwindigkeiten  $v$  der Charakter der angegebenen partiellen Differentialgleichung. Die Randbedingungen für das transformierte Problem lauten

$$w(t, 0) = 0 \quad \text{und} \quad w(t, l) = 0 \quad . \quad (1.8)$$

und sind somit nicht mehr zeitabhängig.

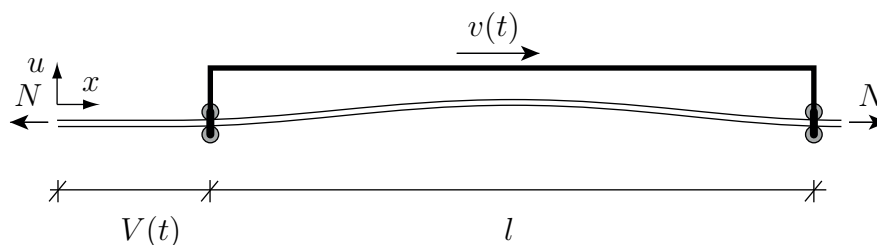


Abbildung 1.2: Modell einer axial unbeweglichen Saite, über die Randbedingungen bewegt werden

<sup>2</sup> Der Fokus der Erläuterungen liegt in diesem Abschnitt auf einem Einblick in die Problemstellung. Dementsprechend werden Gleichungen z. T. nur angegeben. Ausführliche Herleitungen (auch zu den hier gezeigten Modellen) sind in den Kapiteln 3 und 4 dieser Arbeit zu finden.

Zum Zweiten werden die Querschwingungen einer axial bewegten Saite untersucht, die über zwei Lager (Randbedingungen) bewegt wird (s. Abb. 1.3). Die Lager haben dabei den zeitlich konstanten Abstand  $l$  und die Führungsgeschwindigkeit der Saite beträgt  $v$ . Die Relativbewegungen zwischen den Lagern und der Saite sind demnach für das erste und das zweite Modell vergleichbar. Dennoch ergibt sich für den Fall der bewegten Saite eine andere Bewegungsdifferentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2v(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + \left( v(t)^2 - x \frac{\partial v(t)}{\partial t} - c^2 \right) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad (1.9)$$

Wie sich an den Bewegungsgleichungen beider Modelle ablesen lässt, sind diese für den Fall einer konstanten Führungsgeschwindigkeit  $v$  äquivalent<sup>3</sup> und für den Fall einer verschwindenden Führungsgeschwindigkeit  $v$  entsteht die in Gl. (1.1) angegebene eindimensionale Wellengleichung.

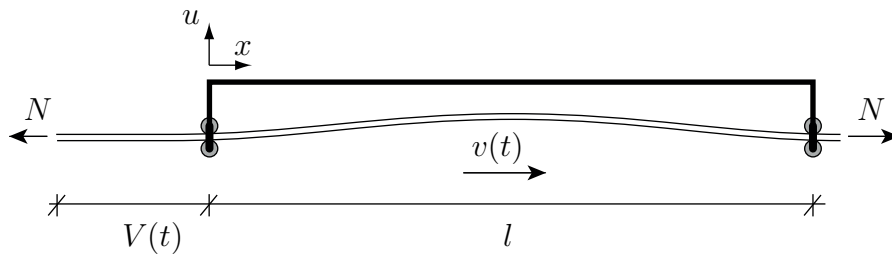


Abbildung 1.3: Modell einer Saite, die axial über unbewegte Randbedingungen bewegt wird

Um den Einfluss von nichtmateriellen Randbedingungen auf das Schwingungsverhalten einer Saite zu illustrieren, werden an dieser Stelle exemplarisch die Lösungsverläufe einer axial unbewegten Saite mit unbewegten (materiellen) Randbedingungen und einer axial unbewegten Saite mit bewegten (nichtmateriellen) Randbedingungen dargestellt (vgl. Abb. 1.2). Im letzteren Fall sei die Geschwindigkeit der bewegten Randbedingungen konstant. Dafür werden sinusförmige Anfangsverschiebungen mit der Amplitude  $\hat{u}$  und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten

$$u(t, x)|_{t=0} := \hat{u} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} := 0 \quad (1.10)$$

gewählt.<sup>4</sup> Als Führungsgeschwindigkeit wird für den Fall der nichtmateriellen Randbedingungen die konstante Funktion

$$v(t) := \frac{1}{3}c \quad (1.11)$$

angenommen.

Die Lösungen in Abb. 1.4 offenbaren das unterschiedliche Schwingungsverhalten der beiden vorgestellten Modelle. Das erste Modell der unbewegten Saite mit klassischen Randbedingungen vollführt eine zeitlich harmonische Schwingung der Periodendauer

$$T_{\text{cl}} = 2 \frac{l}{c} \quad (1.12)$$

<sup>3</sup> Die Gleichungen unterscheiden sich in diesem Fall lediglich durch das Vorzeichen des Anteils der gemischten Ableitung des Verschiebungsfeldes. Dieser Unterschied beruht auf der unterschiedlichen Richtung der Relativgeschwindigkeit zwischen der Saite und den Lagern.

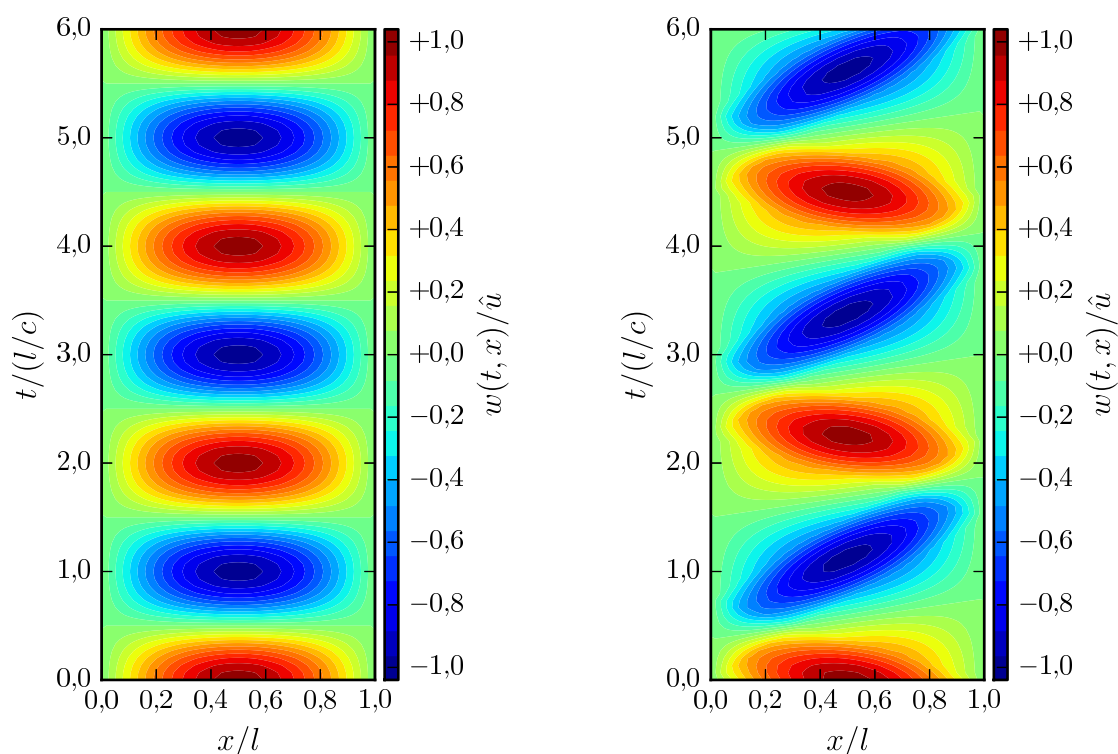
<sup>4</sup> Im Unterschied zum Einklammern von Termen, die durch Operationszeichen getrennt sind, werden im Rahmen dieser Arbeit Argumente von Funktionen stets in kleine Klammern gesetzt, die sich nicht an der Satzhöhe der Argumente orientieren.

und der Nulldurchgang aller Saitenpunkte geschieht stets gleichzeitig. Im Fall der bewegten Saite lässt sich zeigen, dass sich die Periodendauer auf

$$T_{\text{nm}} = 2 \frac{c^2}{c^2 - v^2} \frac{l}{c} = 2 \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{l}{c} = \frac{9l}{4c} \quad (1.13)$$

vergrößert. Außerdem kommt es zu einer ortsabhängigen Veränderung der Schwingung, so dass der Nulldurchgang der Saitenpunkte nicht mehr gleichzeitig vollzogen wird.

Bereits dieses kurze einführende Beispiel zeigt deutlich den Einfluss nichtmaterieller Randbedingungen auf das Schwingungsverhalten eines Kontinuums und motiviert so weitere Untersuchungen.



(a) Schwingung einer axial unbewegten Saite, mit klassischen (materiellen) Randbedingungen

(b) Schwingung einer axial unbewegten Saite, über die zwei Randbedingungen mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt werden (Darstellung für einen mit den Randbedingungen mitbewegten Beobachter)

Abbildung 1.4: Vergleich der Schwingungen eines unbewegten eindimensionalen Kontinuums (Saite) mit materiellen bzw. nichtmateriellen Randbedingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten

## 1.4 Ziele und Gliederung der Arbeit

Wie in Abschnitt 1.2 erläutert wird, behandeln bisherige Untersuchungen zu Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen überwiegend stationäre Bewegungen, d. h. Bewegungen mit zeitlich konstantem Geschwindigkeitsfeld. Darüber hinaus werden in diesen Arbeiten keine Verbindungen zwischen vereinfachten eindimensionalen Problemstellungen und allgemeinen dreidimensionalen Formulierungen hergestellt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es deshalb, allgemeine Bewegungen von Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen grundlegend zu untersuchen und eine Möglichkeit zu finden, nichtmaterielle Randbedingungen auch in einer dreidimensionalen Beschreibung konsistent zu formulieren. Darüber hinaus sollen den zahlreich in der Literatur vorhandenen numerischen Verfahren analytische Lösungsmöglichkeiten zur Seite gestellt werden, die zur Verifikation der numerischen Lösungen dienen können. Für Rückschlüsse aus den Untersuchungen eindimensionaler Kontinua ist eine Verknüpfung und einheitliche Notation der dreidimensionalen und der eindimensionalen Beschreibung notwendig.

Der Schwerpunkt der Ausführungen dieser Arbeit liegt auf (semi-)analytischen Lösungsverfahren und es wird linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Außerdem sind die Problemstellungen im Folgenden so formuliert, dass die Systemgrenzen als bekannt vorausgesetzt werden können. Zudem werden nur Systeme mit unveränderlicher Massebelegung behandelt.

Das Untersuchungsdesign der vorliegenden Arbeit in Abb. 1.5 enthält die Überschriften und wesentlichen Inhalte aller Kapitel. Aus dieser Übersicht lässt sich die Interdependenz der Kapitel und damit die Strukturierung der Arbeit ablesen. Nach der Einführung und Einordnung des Forschungsthemas im ersten Kapitel wird in Kapitel 2 das dreidimensionale Feldproblem der Kontinuumsmechanik formuliert. Um auch nichtmaterielle Randbedingungen berücksichtigen zu können, wird dabei eine ALE-Kinematik verwendet. Die damit verbundene Einführung einer Referenzplatzierung erfordert eine sehr sorgfältige Notation der kontinuumsmechanischen Feldgrößen und der mathematischen Operatoren, die ausführlich vorgestellt wird.

Da sich das dreidimensionale Feldproblem nur schwer in seiner allgemeinen Form analytisch untersuchen lässt, werden in den nachfolgenden Kapiteln 3 und 4 eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen betrachtet. Als Beispiel dient in Kapitel 3 das Modell einer axial unbewegten Saite, über die zwei Randbedingungen mit als gegeben vorausgesetzten Führungsgeschwindigkeiten bewegt werden. Die Entwicklung allgemeiner analytischer Lösungsansätze gelingt hierbei für beliebige Funktionen der Führungsgeschwindigkeiten nach einem Integrationsansatz und einem Separationsansatz. Axial bewegte eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen werden in Kapitel 4 exemplarisch analysiert. Dazu dienen die Modelle einer Saite sowie eines Seils, die axial über zwei räumlich feste Randbedingungen geführt werden. Für beliebige Führungsgeschwindigkeiten gelingt dabei die Lösung semi-analytisch nach dem GALERKIN-Verfahren. Im Fall einer konstanten Führungsgeschwindigkeit werden analytische Lösungen vorgeschlagen, die auf einem Separationsansatz basieren. Die in den Kapiteln 3 und 4 entwickelten semi-analytischen und analytischen Methoden und deren numerische Umsetzung werden an einzelnen Fallbeispielen ausgewertet und diskutiert.

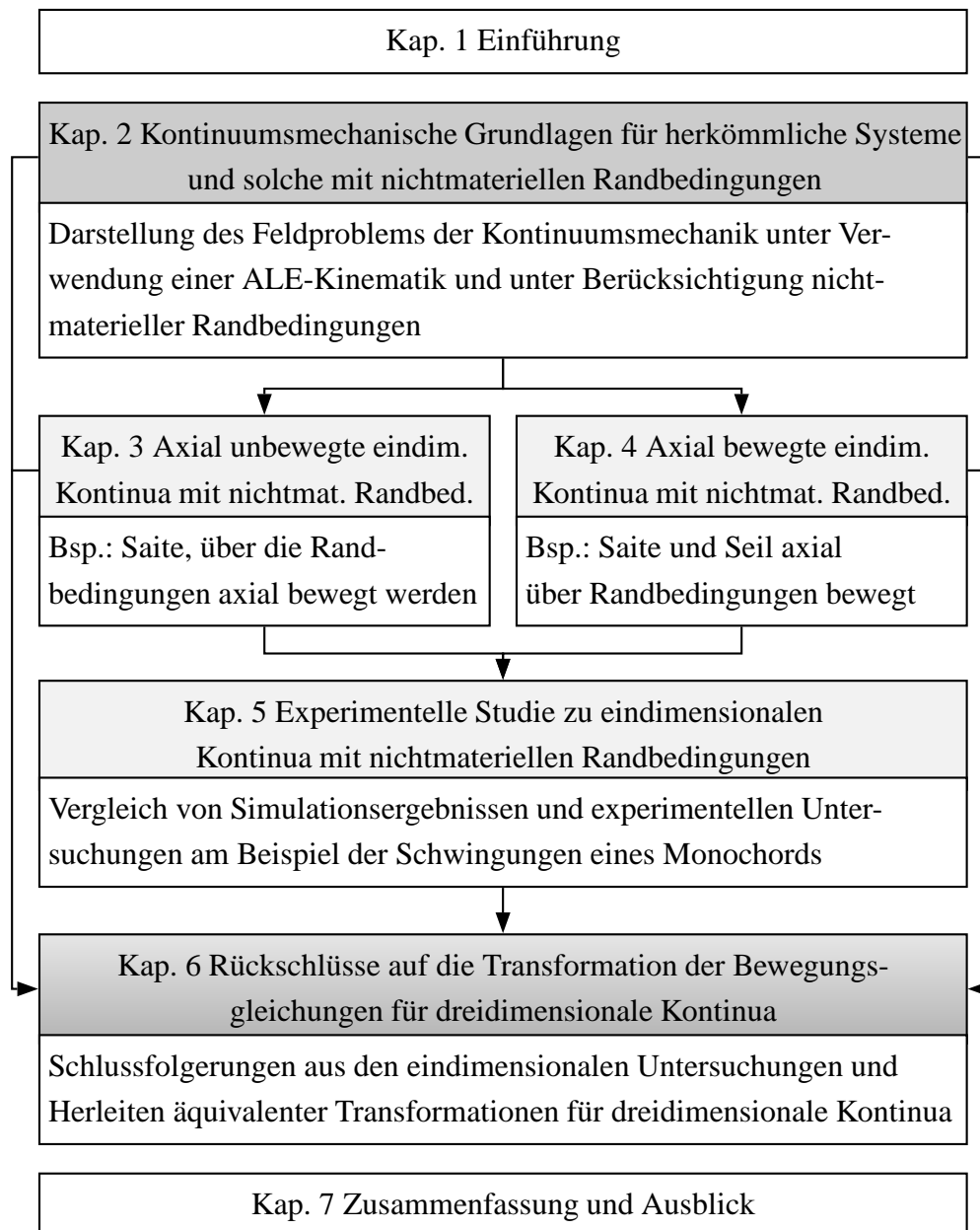
Kapitel 5 verbindet die theoretischen Untersuchungen zum Verhalten von eindimensionalen Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen mit Experimenten. Dazu werden Versuche an der schwingenden Saite eines Monochords ausgewertet und erörtert.

Die behandelten Modelle eindimensionaler Kontinua sind so ausgewählt, dass ihre Feldgleichungen denen der dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Formulierung sehr ähneln. Dement-



sprechend können in Kapitel 6 aus den vorangegangenen Kapiteln Schlüsse für die Transformation der Bewegungsgleichungen dreidimensionaler Kontinua gezogen werden.

Die vorgelegte Arbeit wird durch eine Zusammenfassung mit allgemeineren Schlussfolgerungen sowie einem Ausblick auf noch offene Forschungsfragen abgeschlossen.



Legende:  dreidimensionale Betrachtung  
 eindimensionale Betrachtung

Abbildung 1.5: Untersuchungsdesign für die vorliegende Arbeit (nach [TÖPFER 2009])



---

## 2 Kontinuumsmechanische Grundlagen für herkömmliche Systeme und solche mit nichtmateriellen Randbedingungen<sup>5</sup>

### 2.1 Allgemeines

Der Ausgangspunkt der Kontinuumsmechanik als phänomenologische Feldtheorie ist die Annahme, dass Körper kontinuierliche bzw. stetige Mengen von materiellen Punkten sind (s. [ALTENBACH & ALTENBACH 1994, S. 2]). Darauf aufbauend werden diesen Materiepunkten oder auch Materialpunkten Materialeigenschaften zugeordnet, welche das makroskopisch beobachtete Verhalten wiedergeben.<sup>6</sup>

Werden alle weiteren Feldgrößen wie Temperatur und Dichte ebenfalls als stetig vorausgesetzt, so können die mathematischen Hilfsmittel der Analysis sehr vorteilhaft angewandt werden. Allerdings kann die in der Natur offensichtlich auftretende Entstehung von Diskontinuitäten (z. B. Risse) nicht oder nur sehr schwer abgebildet werden. Ein weiterer Nachteil der kontinuumsmechanischen Modellierung liegt darin, dass alle computergestützten (numerischen) Berechnungen im Allgemeinen diskrete Rechnungen sind, d. h. zur computergestützten (numerischen) Berechnung müssen kontinuumsmechanische Modelle stets in diskrete Modelle übersetzt werden. Aus dieser Diskretisierung ergeben sich unabhängig von etwaigen Rundungsfehlern stets Approximationsfehler. Die Einsatzmöglichkeiten kontinuumsmechanischer Modelle sind trotz der getroffenen Annahmen kaum begrenzt. Entsprechend angepasste Modelle lassen sich beispielsweise auch bei der Beschreibung von Nanostrukturen verwenden, obwohl deren aufgelöster Aufbau in diskrete Moleküle und Atome nahe liegt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine kontinuumsmechanische Beschreibung gewählt, da sich auf diese Weise nichtmaterielle Randbedingungen für sehr viele Anwendungen allgemein definieren und beschreiben lassen. Darüber hinaus lassen sich die bei dieser Beschreibung erhaltenen partiellen Bewegungsdifferentialgleichungen zunächst analytisch untersuchen, um den Einfluss nichtmaterieller Randbedingungen zu studieren. Als Vergleich können dabei die in der Literatur zahlreich vorhandenen kontinuumsmechanischen Modelle und Herleitungen zu materiellen Randbedingungen verwendet werden.

In bestimmten Grenzen lassen sich für vereinfachte (z. B. eindimensionale) Modelle sogar analytische Lösungen ermitteln. Mithilfe solcher strengen Lösungen können numerische Lösungen verifiziert werden. Aber auch für kompliziertere Anwendungen ist die vorherige kontinuumsmechanische Formulierung sinnvoll, da aus ihr ohne größere Schwierigkeiten numerische Betrachtungen im Rahmen einer Finite-Elemente-Untersuchung abgeleitet werden können (s. [BELYTSCHKO et al. 2001]). Bei einer numerischen Beschreibung sind neben dem bereits erwähnten Approximationsfehler jedoch im Allgemeinen zusätzlich Rundungsfehler zu berücksichtigen.

Der Zweck eines kontinuumsmechanischen Modells ist die vereinfachte Abbildung realer Systeme, um diese für einfache Prognosen ihres Verhaltens erfassbar zu machen. Als wesentliche Elemente, welche aus der Realität adäquat abzubilden sind, ergeben sich: der Raum, die Zeit (oder zusammen die Raumzeit), ein Bezugssystem sowie der materielle Körper (vgl. [BECKER & BÜRGER 1975, S. 9]).

---

<sup>5</sup> Einige der in diesem Kapitel vorgestellten Gedanken wurden vom Autor auch in [FRANZE & ZASTRAU 2011] veröffentlicht.

<sup>6</sup> Im Rahmen dieser Arbeit wird unter dem Begriff Kontinuum stets ein BOLTZMANN-Kontinuum verstanden. Insbesondere werden die möglichen Erweiterungen einer COSSERAT-Theorie (vgl. [ZASTRAU 1981]) nicht berücksichtigt.

Als Modell für die Raumzeit kann z. B. die neo-klassische Raumzeit<sup>7</sup> verwendet werden. Diese ermöglicht es, Begriffe wie Beobachter und Bezugssystem derart zu beschreiben, dass im Gegensatz zum Begriff des absoluten Raumes das Prinzip der Beobachterinvarianz direkt Anwendung finden kann. Im Fall des absoluten Raumes muss dieses Grundprinzip der Mechanik künstlich durch die Invarianzforderung gegenüber Starrkörperbewegungen formuliert werden. Dadurch ist die Verwendung des absoluten Raumes als Bezugsrahmen beschränkt. Da die Wahl des Raumzeit-Begriffes für die folgenden Herleitungen in dieser Arbeit nicht von entscheidender Bedeutung ist, wird für nähere Erläuterungen zur neo-klassischen Raumzeit sowie die Definition eines Beobachters und eines Bezugssystems auf die Abschnitte A.1 und A.2 verwiesen. Abbildung 2.1 fasst die wesentlichen Inhalte der dort zu findenden Definitionen zusammen: Die Beobachterabbildung  $\Phi$  bzw. die Bezugssystemabbildung  $\Phi_o$  überführen Elemente des Ereignisraumes  $\mathcal{W}$  (sogenannte Ereignisse) in den neo-klassischen Ereignisraum  $\Gamma \times \mathcal{E}$  bzw. die neo-klassische Raumzeit  $\mathbb{T} \times \mathbb{E}$ . Da im Folgenden meist ein Bezugssystem vorausgesetzt wird, ist der für die Herleitungen der folgenden Abschnitte wichtigste Raum die neo-klassische Raumzeit  $\mathbb{T} \times \mathbb{E}$ .

In das verwendete Modell der Raumzeit ist nun der materielle Körper einzubetten. Dazu dient die Abbildung  $\bar{\kappa}$ , die die Bewegung des Körpers in der Ereigniswelt beschreibt (s. Abschnitt 2.2.1). Wie zur Raumzeit können auch zum materiellen Körper selbst Überlegungen angestellt werden, die zwar sinnvoll sind, sich jedoch im Rahmen dieser Arbeit nur wenig auf die grundlegenden Herleitungen zur Kontinuumsmechanik auswirken. Dementsprechend wird auch hierfür auf den Anhang verwiesen (s. Abschnitt A.3). Aus den dortigen Erläuterungen zur Betrachtung des materiellen Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit folgt unter anderem, dass in jedem materiellen Punkt  $\xi$  des materiellen Körpers  $\tilde{\mathcal{B}}$  ein Tangentialraum an den materiellen Körper formuliert werden kann. Dieser wird mit  $\mathcal{T}_\xi \tilde{\mathcal{B}}$  bezeichnet (s. auch Abschnitt A.4). Darüber hinaus wird der materielle Körper beim Vorhandensein eines Beobachters bzw. eines Bezugssystems durch die Abbildung  $\bar{\kappa}_\Phi$  bzw.  $\bar{\kappa}_{\Phi_o}$  in den neo-klassischen Ereignisraum bzw. die neo-klassische Raumzeit eingebettet.

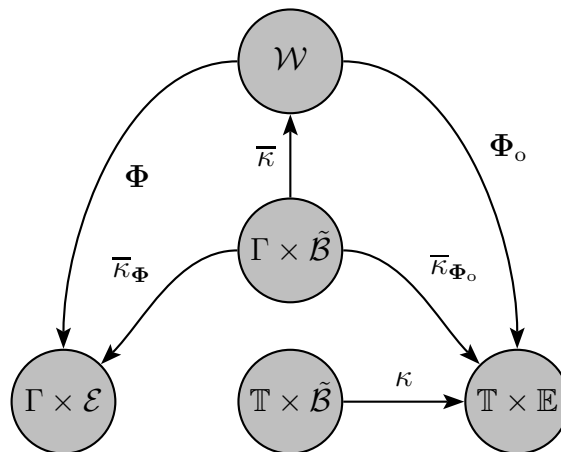


Abbildung 2.1: Kommutatives Diagramm mit den Abbildungen zu Beobachter  $\Phi$ , Bezugssystem  $\Phi_o$  sowie den zugehörigen Konfigurationsabbildungen  $\bar{\kappa}_\Phi$ ,  $\bar{\kappa}_{\Phi_o}$ ,  $\bar{\kappa}$  und  $\kappa$

<sup>7</sup> Die neo-klassische Raumzeit wird auch vor-klassische Raumzeit genannt (vgl. [MATSKO & NOLL 1993, S. 97]).

## 2.2 Kinematik

### 2.2.1 Bewegung des Körpers

Die Kinematik beschreibt die zeitliche Veränderung (Bewegung) von Körpern ohne Berücksichtigung der Ursachen (wie z. B. Kräfte). Die Bewegung eines materiellen Körpers ohne einen Beobachter kann nach [HOPPE 1996, S. 24] durch die Einbettung des materiellen Körpers in die Ereigniswelt beschrieben werden<sup>8</sup>

$$\bar{\kappa} : \Gamma \times \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{W} \quad . \quad (2.1)$$

Die Abbildung  $\bar{\kappa}$  ist umkehrbar, da Teilchen während der Bewegung weder zerstört noch erschaffen werden sollen. Mithilfe der Beobachterabbildung  $\Phi$  lässt sich eine weitere Bewegungsabbildung definieren

$$\bar{\kappa}_{\Phi} := \Phi \circ \bar{\kappa} : \Gamma \times \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \Gamma \times \mathcal{E} \quad , \quad (2.2)$$

mit deren Hilfe sich der materielle Körper in den Beobachterraum (neo-klassischer Ereignisraum) einbetten lässt. Die Einbettung des materiellen Körpers in den Raum des Bezugssystems (neo-klassische Raumzeit) wird durch die Komposition der Bewegungsabbildung  $\bar{\kappa}$  mit dem Bezugssystem  $\Phi_o$

$$\bar{\kappa}_{\Phi_o} := \Phi_o \circ \bar{\kappa} : \Gamma \times \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{E} \quad (2.3)$$

ermöglicht. Die Zusammenhänge der Abbildungen zu Beobachter, Bezugssystem und Bewegung sind in Abb. 2.1 in Form eines kommutativen Diagramms dargestellt.<sup>9</sup>

Die Beschreibung bezüglich des Bezugssystems lässt sich auch in den Raum  $\mathbb{T} \times \tilde{\mathcal{B}}$  verlagern. In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbb{T} \times \tilde{\mathcal{B}} &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{E} \\ (t, \xi) &\mapsto \bar{\kappa}_{\Phi_o}(\tau, \xi) \quad \text{mit} \quad t = \Delta t(\tau_0, \tau) \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Abbildung  $\kappa$  kann in beiden Argumenten parametrisiert werden, so dass sich für einen bestimmten Ort  $\xi$  die Funktion der Bahnlinie für diesen Punkt

$$\kappa^{\xi} := \pi_1 \circ \kappa(\square, \xi) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E} \quad (2.5)$$

sowie für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  die Funktion

$$\kappa_t := \pi_1 \circ \kappa(t, \square) : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{E} \quad (2.6)$$

ergibt.<sup>10</sup> Als Platzierung des materiellen Körpers zum Zeitpunkt  $t$  im Bezugssystem  $\Phi_o$  wird üblicherweise die Menge

$$\kappa_t(\tilde{\mathcal{B}}) \subset \mathbb{E} \quad (2.7)$$

bezeichnet.

<sup>8</sup> Für die philosophische Frage, ob eine Bewegung ohne Beobachter überhaupt existiert, sei auf [RUSSEL 1967] verwiesen.

<sup>9</sup> In einem kommutativen Diagramm stimmen für die Wege zwischen zwei Mengen alle zugehörigen Verkettungen von Abbildungen überein. Im Gegensatz zu nichtkommutativen Diagrammen lässt sich folglich z. T. die Gleichheit von Abbildungen ablesen.

<sup>10</sup> Der Operator  $\pi$  beschreibt dabei eine Projektion (z. B.  $\pi_i \circ \mathbf{h} = \mathbf{h}_i$ ) und das Symbol  $\square$  ist ein Platzhalter.

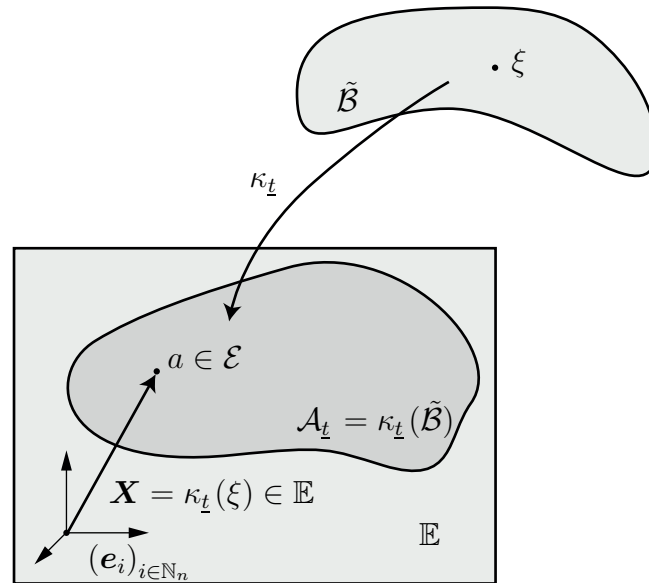


Abbildung 2.2: Materieller Punkt mit verschiedenen Repräsentationen am Beispiel der Ausgangsplatzierung

Die zugehörige Abbildung  $\kappa_t$ , welche die Platzierung erzeugt, wird als Konfiguration bezeichnet. Nach [ECK et al. 2008, S. 212] sind für die Abbildung  $\kappa$  die folgenden Annahmen sinnvoll

1. Die Abbildung  $\kappa$  ist stetig differenzierbar.
2. Die Abbildung  $\kappa_t$  ist für alle  $t \geq t_0$  invertierbar.
3. Die JACOBI-Determinante  $\det(J_{\kappa_t}) = \det(\partial \otimes \kappa_t)$  ist für alle  $t \geq t_0$  positiv.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Beschreibung von Elementen des materiellen Körpers näher zu erläutern, um eine Verwechslung von materiellen Punkten  $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}$  und deren Repräsentationen zu vermeiden. Neben der Beschreibung eines materiellen Punktes  $\xi$  bezüglich der Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{B}}$  lässt sich derselbe Punkt als Element  $a$  des EUKLIDISCHEN Anschauungsraumes (auch EUKLIDISCHER Punktraum)  $\mathcal{E}$  und als Element  $X$  des EUKLIDISCHEN Translationsraumes (auch EUKLIDISCHER Vektorraum)  $\mathbb{E}$  identifizieren (s. Abb. 2.2). Da die Identifikation eindeutig ist (vgl. [HAUPT 2010, S. 14]), wird in dieser Arbeit fortan nicht mehr zwischen den Elementen des Anschauungs- und des Translationsraumes unterschieden. Zur Charakterisierung eines Punktes wird dementsprechend seine Repräsentation im EUKLIDISCHEN Translationsraum, also sein Positionsvektor, verwendet. Eine Unterscheidung zwischen den jeweiligen Repräsentationen wird im Folgenden lediglich getroffen, wenn sie für das Verständnis von Zusammenhängen wichtig ist.

### 2.2.2 Intrinsische Beschreibung

In dieser Beschreibung werden als Bezug direkt die Koordinaten der materiellen Punkte auf der Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{B}}$  verwendet. Dementsprechend ergibt sich eine Bahnlinie (oder auch Trajektorie) nach Gl. (2.5). Diese Beschreibung von Bewegungen verwendet keine weiteren Platzierungen und eignet sich deshalb vor allem für sehr allgemeine Herleitungen kontinuumsmechanischer Probleme (s. [BERTRAM 1989]). Allerdings ist der Übergang zu anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen schwieriger.

### 2.2.3 Referentielle Beschreibung

Bei der referentiellen Beschreibung<sup>11</sup> wird eine Bezugsplatzierung (oder Referenzplatzierung) mit dem Referenzzeitpunkt  $\hat{t}$  als  $\mathcal{R}_{\hat{t}} := \kappa_{\hat{t}}(\tilde{\mathcal{B}}) \subset \mathbb{E}$  gewählt. Diese muss vom materiellen Körper zu keinem Zeitpunkt eingenommen werden. Die Bewegung von der Bezugsplatzierung zur vom Körper zum Zeitpunkt  $t$  eingenommenen Momentanplatzierung  $\mathcal{M}_t := \kappa_t(\tilde{\mathcal{B}}) \subset \mathbb{E}$  kann durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{MR}}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_{\hat{t}} &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \chi) &\mapsto \overset{\mathcal{MR}}{\phi}(t, \chi) := (t, \kappa_t \circ \kappa_{\hat{t}}^{-1}(\chi)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

beschrieben werden.<sup>12, 13</sup> Häufig wird diese Bewegungsabbildung mit der Zeit parametrisiert und mithilfe der Projektion  $\pi_1$  eingeschränkt, so dass sich direkt die Platzierung zum jeweiligen Zeitpunkt ergibt (vgl. Abb. 2.3)

$$\overset{\mathcal{MR}}{\phi}_t := \pi_1 \circ \overset{\mathcal{MR}}{\phi}(t, \square) : \mathcal{R}_{\hat{t}} \rightarrow \mathcal{M}_t \quad . \quad (2.9)$$

Davon soll an dieser Stelle bewusst abgewichen werden, da sich dadurch Nachteile bei der Komposition von verschiedenen Bewegungen ergeben. Die Funktion  $\overset{\mathcal{MR}}{\phi}_t$  lässt sich auf ganz  $\mathbb{E}$  fortsetzen. Bei Verwendung der Momentanplatzierung als Referenzplatzierung, d. h. für den Fall  $t = \hat{t}$ , ergibt sich speziell

$$\overset{\mathcal{MR}}{\phi}_{\hat{t}} = \kappa_{\hat{t}} \circ \kappa_{\hat{t}}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{E}} \quad . \quad (2.10)$$

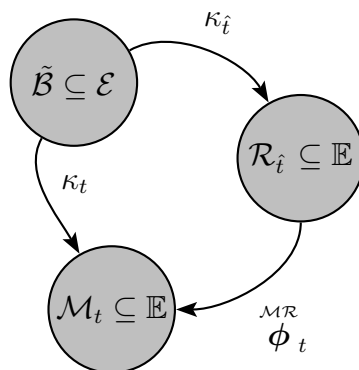


Abbildung 2.3: Kommutatives Diagramm zur referentiellen Beschreibung der Bewegung

<sup>11</sup> Die referentielle Beschreibung ist eine von EULER eingeführte Darstellung, die auch materielle Beschreibung oder LAGRANGE-Beschreibung genannt wird (vgl. [TRUESDELL 1966, S. 10]).

<sup>12</sup> Am Kopfzeiger der Bewegungsabbildung kann abgelesen werden, welche Platzierung einen Teil des Definitionsbereichs (rechter Zeiger) und welche Platzierung einen Teil des Wertebereichs ausmacht (linker Zeiger). Der Vorteil der gegen die Intuition westlich geprägter Leser eingeführten vertauschten Leserichtung von rechts nach links wird später bei der Komposition von mehreren Bewegungsabbildungen deutlich.

<sup>13</sup> Üblicherweise wird die Bezugsplatzierung der referentiellen Beschreibung mit  $\mathcal{A}_{\hat{t}}$  bezeichnet. An dieser Stelle wird jedoch bewusst von dieser Bezeichnung abgewichen, da bei der nachfolgend in Abschnitt 2.2.6 behandelten relativen Beschreibung gerade die Bewegung zwischen der Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_{\hat{t}}$  und der Momentanplatzierung  $\mathcal{M}_t$  referentiell beschrieben wird.

### 2.2.4 Stromlinien und Bahnlinien im EUKLIDischen Raum

Als Stromlinie wird die Menge aller Punkte  $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_t \subseteq \mathbb{E}$  bezeichnet, für die zum Bezugszeitpunkt  $t$  und für den Bezugspunkt  $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{M}_t$

$$\bigwedge_{u \in \mathbb{T}} \bar{\boldsymbol{x}} = \kappa_u \circ \kappa_t^{-1}(\boldsymbol{x}) \quad (2.11)$$

gilt.<sup>14</sup> Anschaulich ist die Stromlinie demnach genau die Teilmenge der Punkte der Platzierung  $\mathcal{M}_t$ , welche während einer Bewegung den Bezugsort  $\bar{\boldsymbol{x}}$  annehmen.<sup>15</sup> Als Bahnlinie wird die Menge aller Punkte  $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{u \in \mathbb{T}} \mathcal{R}_u \subseteq \mathbb{E}$  bezeichnet, für die für den Bezugszeitpunkt  $t$  und den Bezugspunkt  $\bar{\boldsymbol{x}}$

$$\bigwedge_{u \in \mathbb{T}} \boldsymbol{x} = \kappa_u \circ \kappa_t^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad (2.12)$$

gilt. Anschaulich ist die Bahnkurve demnach die Menge der Raumpunkte, welche ein betrachteter materieller Punkt während einer Bewegung einnimmt.<sup>16</sup> Wird die Bedingung der Stromlinie zu

$$\bigwedge_{u \in \mathbb{T}} \boldsymbol{x} = \kappa_t \circ \kappa_u^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad (2.13)$$

umgestellt, lässt sich erkennen, dass eine Stromlinie aus Bahnlinienpunkten bei  $t$  für die Bezugszeitpunkte  $u \in \mathbb{T}$  besteht. Dies führt dazu, dass sich für jeden materiellen Punkt zu einem festen Zeitpunkt Bahn- und Stromlinie, die diesen materiellen Punkt enthalten, in ein und demselben räumlichen Punkt schneiden. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2.4 für die ebene Projektion einer Bahn- und einer Stromlinie dargestellt.

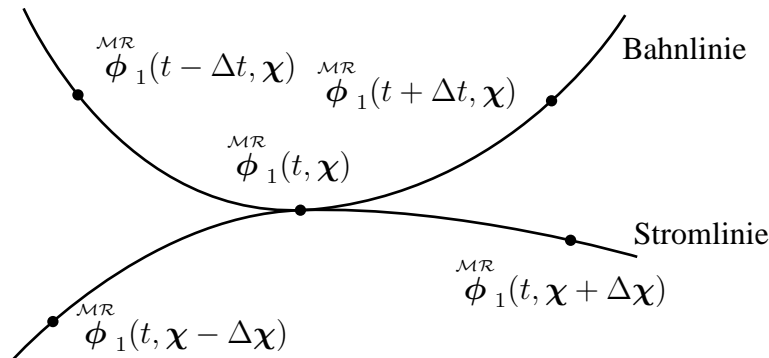


Abbildung 2.4: Zusammenhang zwischen Bahn- und Stromlinie für eine Zeitänderung  $\Delta t$  und eine Positionsänderung  $\Delta \chi$  (nach [ALTENBACH & ALTENBACH 1994, S. 45])

<sup>14</sup> Die Symbole  $\bigwedge$  bzw.  $\bigvee$  bezeichnen den Allquantor bzw. den Existenzquantor welche in der Literatur auch mit  $\forall$  bzw.  $\exists$  bezeichnet werden (s. [BEUTELSPACHER 2004, S. 47–57]). Durch die Verwendung von an die logischen Symbole  $\wedge$  (und) bzw.  $\vee$  (oder) erinnernden Zeichen können Sätze zur Aussagenlogik relativ einfach adaptiert werden.

<sup>15</sup> Noch anschaulicher ist die Vorstellung, dass eine räumlich fixierte Spitze in einen sich darunter hinweg bewegenden Körper eine Markierung ritzt. Diese Markierung entspricht der Stromlinie.

<sup>16</sup> Noch anschaulicher ist die Vorstellung, dass eine am Materialpunkt fixierte Düse (räumlich unbewegliche) Farbpartikel ausstößt und so die Bewegung im Raum markiert. Die Spur der Farbpartikel entspricht der Bahnlinie.



### 2.2.5 Räumliche Beschreibung

Die räumliche Beschreibung<sup>17</sup> ist nicht mit der Beschreibung mithilfe sogenannter räumlicher (d. h. zeitonveränderlicher) Koordinaten zu verwechseln. Vielmehr wird bei dieser Beschreibung die räumliche Position des untersuchten Punktes als zum betrachteten Zeitpunkt bekannt vorausgesetzt. Der jeweils zugehörige materielle Punkt ergibt sich bei dieser Betrachtungsweise aus der Lösung des Problems. Analog der materiellen Beschreibung werden eine Ausgangsplatzierung zum Bezugszeitpunkt (Ausgangszeitpunkt  $\underline{t}$ )  $\mathcal{A}_{\underline{t}}$  und eine Momentanplatzierung  $\mathcal{R}_{\hat{t}}$  zum Zeitpunkt  $\hat{t}$  definiert.<sup>18</sup> Die räumliche Beschreibung der Bewegung lautet dann

$$\begin{aligned} \overset{AR}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_{\hat{t}} &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{A}_{\underline{t}} \\ (\hat{t}, \boldsymbol{\chi}) &\mapsto \overset{RA}{\phi}(\hat{t}, \boldsymbol{\chi}) := (\hat{t}, \kappa_{\underline{t}} \circ \kappa_{\hat{t}}^{-1}(\boldsymbol{\chi})) \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei sich am Kopfzeiger von rechts nach links die Platzierung des Definitions- und des Wertebereichs ablesen lässt (vgl. Abb. 2.5). Bei der räumlichen Beschreibung werden die Stromlinien

$$\overset{AR}{\phi}_{\hat{t}} := \pi_1 \circ \overset{AR}{\phi}(\hat{t}, \square) : \mathcal{R}_{\hat{t}} \rightarrow \mathcal{A}_{\underline{t}} \quad (2.15)$$

betrachtet. Wird im Speziellen der momentane Zeitpunkt als Bezugszeitpunkt gewählt (Fall  $\underline{t} = \hat{t}$ ), entsteht die Identitätsabbildung

$$\overset{AR}{\phi}_{\hat{t}} = \text{id}_{\mathcal{R}_{\hat{t}}} \quad . \quad (2.16)$$

Die räumliche Beschreibung wird z. T. als  $\boldsymbol{\chi}(t) := \overset{AR}{\phi}_t(\boldsymbol{\chi})$  geschrieben. Diese doppelte Vergabe für die Bezeichnung von räumlicher Position und Bewegungsabbildung wird im Folgenden bewusst vermieden.<sup>19</sup>

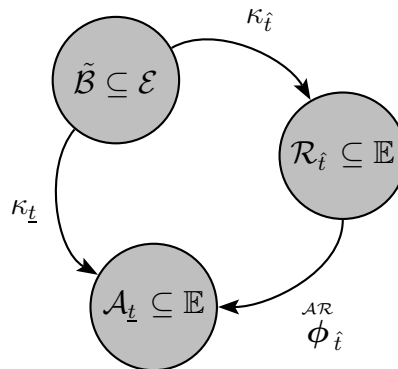


Abbildung 2.5: Kommutatives Diagramm zur räumlichen Beschreibung der Bewegung

<sup>17</sup> Die räumliche Beschreibung ist eine von D'ALEMBERT eingeführte Darstellung, die auch EULER-Beschreibung genannt wird (vgl. [TRUESDELL 1966, S. 10])

<sup>18</sup> Üblicherweise wird die Momentanplatzierung der räumlichen Beschreibung mit  $\mathcal{M}_t$  bezeichnet. An dieser Stelle wird jedoch bewusst von dieser Bezeichnung abgewichen, da bei der nachfolgend in Abschnitt 2.2.6 behandelten relativen Beschreibung gerade die Bewegung zwischen der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}_{\underline{t}}$  und der Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_{\hat{t}}$  räumlich beschrieben wird (vgl. Fußnote 13).

<sup>19</sup> In [STEINMANN 2002] wird eine ähnliche Notation verwendet.

Beschreibung	referentiell	räumlich
Vorteile	Die Geschichte der Bewegung eines materiellen Punktes kann berücksichtigt werden. Materialverhalten und Randbedingungen an freien Oberflächen lassen sich sehr gut beschreiben.	Auch große Verformungen können z. T. gut linear approximiert werden (Relativverschiebung zwischen Netz und materiellen Punkten bei Anwendung der FEM).
Nachteile	Große Verformungen können nur schlecht linear approximiert werden (große Netzverformung bei Anwendung der FEM).	Freie Oberflächen sind schwieriger zu beschreiben. In [BENSON 1989] wird der numerische Gesamtaufwand einer FE-Berechnung aufgrund von Zeitschrittproblemen als größer eingeschätzt.
Hauptanwendung	Festkörpermechanik	Fluiddynamik

Tabelle 2.1: Vor- und Nachteile der referentiellen und der räumlichen Beschreibung

### 2.2.6 Relative Beschreibung

Bei großen Deformationen kann es sinnvoll sein, die Vorteile der räumlichen und der materiellen Beschreibung zu kombinieren (s. Tab. 2.1). Deshalb werden diese Beschreibungen in der Relativkinematik zusammengefasst.<sup>20</sup> Dabei wird eine Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_t := \overline{\mathcal{R}_t}(\tilde{\mathcal{B}})$  definiert. Diese bildet Punkte des materiellen Körpers in eine Platzierung ab, die zu keinem Zeitpunkt vom Körper eingenommen werden muss. Im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt sie lediglich die Starrkörperbewegung des Körpers. Die Bewegung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}$  wird zum Zeitpunkt  $t$  zusammengesetzt aus einer Führungsbewegung  $\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}_t$  von der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}_t$  zur Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_t$  und von dort ausgehend einer Deformationsbewegung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_t$  zur Momentanplatzierung  $\mathcal{M}_t$ . Damit wird schließlich die Momentanplatzierung beschrieben

$$\mathcal{M}_t := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_t(\mathcal{A}_t) \quad \text{und} \quad \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_t = \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_t \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}_t \quad . \quad (2.17)$$

Die Definitionen der einzelnen Bewegungsabbildungen lauten demzufolge

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) := (\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_0(t, \mathbf{X}), \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X})) := (t, \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X})) \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \boldsymbol{\chi}) &\mapsto \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}(t, \boldsymbol{\chi}) := (\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_0(t, \boldsymbol{\chi}), \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1(t, \boldsymbol{\chi})) := (t, \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1(t, \boldsymbol{\chi})) \quad , \end{aligned} \quad (2.19)$$

<sup>20</sup> Die Relativkinematik wird auch als Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik bzw. kurz als ALE-Kinematik bezeichnet. Eine frühe Form eines solchen Ansatzes wird in [TRUESDELL & TOUPIN 1960, S. 347] als „Methode der fiktiven Partikel“ eingeführt, um das verallgemeinerte Transporttheorem herzuleiten.

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{R}A}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \overset{\mathcal{R}A}{\phi}(t, \mathbf{X}) := (\overset{\mathcal{R}A}{\phi}_0(t, \mathbf{X}), \overset{\mathcal{R}A}{\phi}_1(t, \mathbf{X})) := (t, \overset{\mathcal{R}A}{\phi}_1(t, \mathbf{X})) \end{aligned} \quad (2.20)$$

und werden im kommutativen Diagramm in Abb. 2.6 veranschaulicht. Der Vorteil dieser Beschreibung liegt darin, dass die Bewegungen  $\overset{\mathcal{R}A}{\phi}_t$  und  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}_t$  mit jeweils passenden Koordinatensystemen beschrieben werden können. In diesem Fall kann die Führungsbewegung mit zeitunveränderlichen räumlichen Koordinaten (auch EULER-Koordinaten oder räumliche Koordinaten genannt) und die Bewegung  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}_t$  mit den materiellen Punkten folgenden zeit- und ortsabhängigen Koordinaten (LAGRANGE-Koordinaten oder materiellen Koordinaten) beschrieben werden. Im Kontext der Finite-Elemente-Methode (FEM) lässt sich  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}_t$  als Netzbewegung und  $\overset{\mathcal{R}A}{\phi}_t$  als Partikelbewegung (Massefluss) deuten.

Die räumliche Beschreibung bzw. die referentielle Beschreibung kann aus der relativen Beschreibung gewonnen werden, indem  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}_t = \text{id}$  bzw.  $\overset{\mathcal{R}A}{\phi}_t = \text{id}$  gesetzt wird.

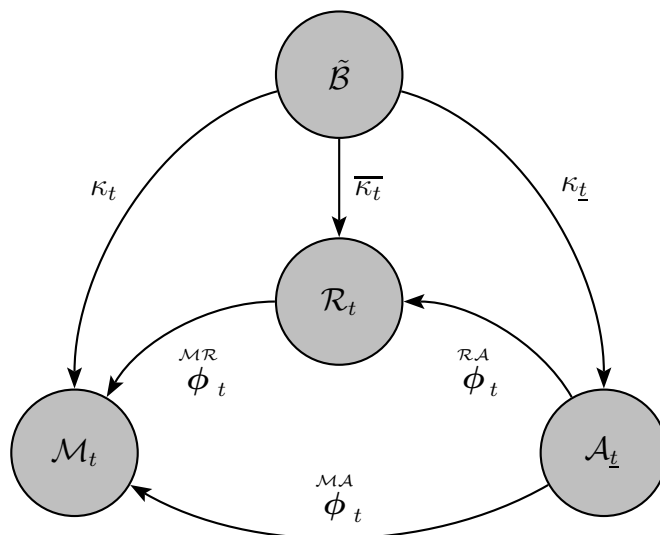


Abbildung 2.6: Kommutatives Diagramm zur relativen Beschreibung der Bewegung

Um die Anzahl von auftretenden Indizes und Bezeichnungen übersichtlicher zu gestalten, wird für alle weiteren Untersuchungen bei der Darstellung der Platzierungen der zugehörige Zeitpunkt unterdrückt. Für die Ausgangs-, Referenz- und Momentanplatzierung kann kurz  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{M}$  geschrieben werden und es wird unterstellt, dass die Ausgangsplatzierung vom Körper stets zum Ausgangszeitpunkt eingenommen wird und Referenz- und Momentanplatzierung sich auf den momentan betrachteten Zeitpunkt beziehen. Damit wird im Folgenden  $\hat{t} = t$  gesetzt.

Es können auch mehrere Referenzplatzierungen Verwendung finden. So werden in [AUBRAM 2009] weitere Modellplatzierungen eingeführt, die im Rahmen der FEM eine direkte Überführung der kontinuumsmechanisch formulierten ALE-Kinematik in eine Matrixdarstellung zur Implementierung in ein Computerprogramm erlauben.

### 2.2.7 Notation zur Beschreibung von Feldgrößen

Neben der Beschreibung der Bewegung dienen die eingeführten Platzierungen auch zur Beschreibung weiterer Feldgrößen der Kontinuumsmechanik. Entsprechend der unterschiedlichen Platzierung wird nun eine Notation eingeführt, welche der Feldgröße die zugehörige Betrachtungsweise mittels eines Fußzeigers zuordnet. Sei dazu  $\mathbf{h}$  eine physikalische Feldgröße, die sowohl orts- als auch zeitabhängig ist und die für die Einführung der Notation beispielhaft durch eine vektorwertige Funktion dargestellt werden kann. Die Feldgröße  $\mathbf{h}$  kann nun in Bezug auf die Ausgangsplatzierung als  $\mathbf{h}_A$  (materielle Beschreibung)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_A : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \mathbf{h}_A(t, \mathbf{X}) \quad , \end{aligned} \quad (2.21)$$

in Bezug auf die Referenzplatzierung als  $\mathbf{h}_{\mathcal{R}}$  (referentielle Beschreibung)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{R}} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \boldsymbol{\chi}) &\mapsto \mathbf{h}_{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{\chi}) := \mathbf{h}_A \circ \left( \overset{\mathcal{R}A}{\phi} \right)^{-1} (t, \boldsymbol{\chi}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

oder in Bezug auf die Momentanplatzierung als  $\mathbf{h}_{\mathcal{M}}$  (räumliche Beschreibung)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{M}} : \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{h}_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{h}_A \circ \left( \overset{\mathcal{M}A}{\phi} \right)^{-1} (t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

beschrieben werden.

Das kommutative Diagramm in Abb. 2.7 gibt die definierten Funktionen wieder.

Bei der Notation der Bewegungsabbildung wird eine Ausnahme gemacht. In diesem Fall geht die zur Darstellung herangezogene Platzierung aus dem Kopfzeiger hervor. Die betrachtete beliebige Feldgröße  $\mathbf{h}$  kann nach dem folgenden Matrixschema in jede andere Beschreibung transformiert werden

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_A & \mathbf{h}_{\mathcal{R}} & \mathbf{h}_{\mathcal{M}} \\ \mathbf{h}_A & \mathbf{h}_{\mathcal{R}} & \mathbf{h}_{\mathcal{M}} \\ \mathbf{h}_A & \mathbf{h}_{\mathcal{R}} & \mathbf{h}_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_A & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{T} \times A} & \left( \overset{\mathcal{R}A}{\phi} \right)^{-1} & \left( \overset{\mathcal{M}A}{\phi} \right)^{-1} \\ \overset{\mathcal{R}A}{\phi} & \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{R}} & \left( \overset{\mathcal{M}R}{\phi} \right)^{-1} \\ \overset{\mathcal{M}A}{\phi} & \overset{\mathcal{M}R}{\phi} & \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{M}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$=: \begin{bmatrix} \mathbf{h}_A & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{T} \times A} & \overset{AR}{\phi} & \overset{AM}{\phi} \\ \overset{\mathcal{R}A}{\phi} & \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{R}} & \overset{\mathcal{R}M}{\phi} \\ \overset{\mathcal{M}A}{\phi} & \overset{\mathcal{M}R}{\phi} & \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{M}} \end{bmatrix} . \quad (2.25)$$

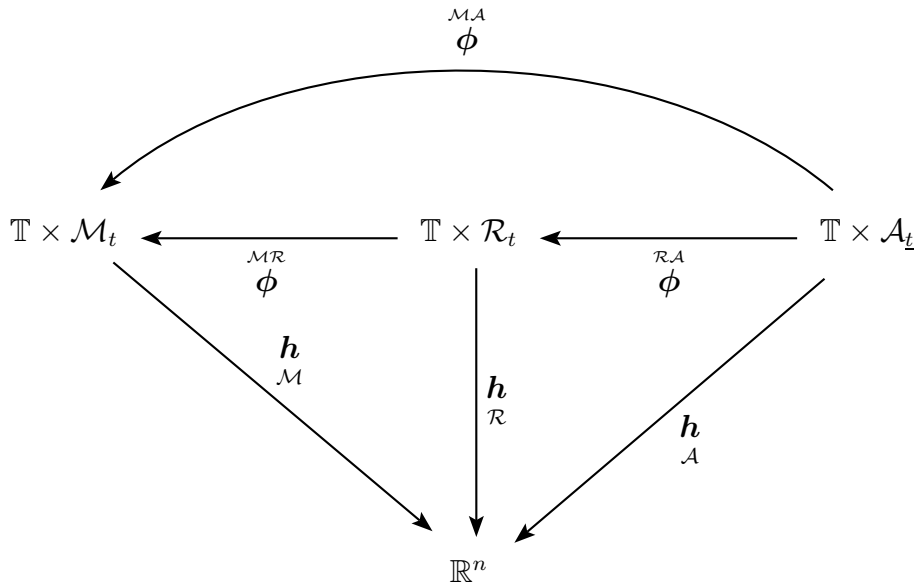


Abbildung 2.7: Kommutatives Diagramm zur Beschreibung von Feldgrößen (in Bezug auf die verwendeten Platzierungen)

Dabei verhält sich das Kompositionssymbol  $\circ$  in diesem Fall wie das übliche Matrixprodukt. Es lässt sich beispielsweise aus der ersten Zeile in Gl. (2.25) ablesen

$$\underset{\mathcal{R}}{h} = \underset{\mathcal{A}}{h} \circ \left( \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right)^{-1} + 0 \circ \underset{\mathbb{T} \times \mathcal{R}}{\text{id}} + 0 \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} =: \underset{\mathcal{A}}{h} \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi}, \quad (2.26)$$

wobei die Definition

$$\overset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi} := \left( \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

verwandt wird.

Neben der Wahl der Platzierung zur Beschreibung der Ortsabhängigkeit einer Feldgröße wird an einer Feldgröße auch gekennzeichnet, auf welche Bewegungsabbildung sie sich bezieht. Vergleichbar zur Bewegungsabbildung selbst geschieht dies durch einen Kopfzeiger, der von rechts gelesen die Bewegung zwischen zwei Platzierungen benennt. Für eine Feldgröße, die sich auf die Bewegung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}$  bezieht, jedoch in der Platzierung  $\mathcal{R}$  beschrieben wird, kann beispielsweise die Bezeichnung

$$\underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{h}} \quad (2.28)$$

verwendet werden. Eine Ausnahme dieser Regelung betrifft die Platzierung auf die sich eine Bewegungsabbildung bezieht. Diese wird nicht mit einem zusätzlichen Index versehen, da sich die Bewegungsabbildung stets auf die Platzierung des rechten Kopfzeigers der Bewegungsabbildung bezieht. Demzufolge bezieht sich eine beliebige Bewegung  $\overset{\beta\alpha}{\phi}$  auf die Platzierung  $\alpha$ .

## 2.3 Verschiebungen und daraus abgeleitete Größen

### 2.3.1 Verschiebungsfelder

Die physikalische Verschiebung (gemessen in  $\mathbb{E}$ ), die sich auf einen Punkt der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}_t$  bezieht und die Verschiebung infolge der Bewegungsabbildung  $\overset{MA}{\phi}$  angibt, ist

$$\begin{aligned} \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{E} \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) := \overset{MA}{\phi}_1(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Diese Verschiebung kann mit den Hinweisen aus Abschnitt 2.2.7 auch auf die Referenzplatzierung

$$\begin{aligned} \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{R}} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathbb{E} \\ (t, \boldsymbol{\chi}) &\mapsto \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{\chi}) = \left( \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} \circ \overset{AR}{\phi} \right) (t, \boldsymbol{\chi}) = \overset{MR}{\phi}_1(t, \boldsymbol{\chi}) - \overset{AR}{\phi}_1(t, \boldsymbol{\chi}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

oder auf die Momentanplatzierung

$$\begin{aligned} \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} : \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathbb{E} \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) = \left( \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} \circ \overset{AM}{\phi} \right) (t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \overset{AM}{\phi}_1(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

bezogen werden. Ohne Angabe der Argumente und Abbildungsvorschriften können diese Definitionen auch kürzer als

$$\overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} := \overset{MA}{\phi}_1 - \text{id}_1_{\mathbb{T} \times \mathcal{A}} \quad , \quad \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{R}} := \overset{MR}{\phi}_1 - \overset{AR}{\phi}_1 \quad \text{und} \quad \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} := \text{id}_1_{\mathbb{T} \times \mathcal{M}} - \overset{AM}{\phi}_1 \quad (2.32)$$

geschrieben werden. Für die weitere Untersuchung sind auch noch die mit Einführen der Referenzplatzierung entstehenden Verschiebungen interessant (vgl. Abb. 2.8). So lautet die Netzverschiebung (Interpretation für eine zu entwickelnde FE-Modellierung)

$$\overset{MR}{\mathbf{u}}_{\mathcal{R}} := \overset{MR}{\phi}_1 - \text{id}_1_{\mathbb{T} \times \mathcal{R}} \quad (2.33)$$

sowie die Partikelverschiebung

$$\overset{RA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} := \overset{RA}{\phi}_1 - \text{id}_1_{\mathbb{T} \times \mathcal{A}} \quad . \quad (2.34)$$

Mit diesen Definitionen ergibt sich die Zusammensetzung der Verschiebung bezüglich der Ausgangsplatzierung zu

$$\mathbf{u}_{\mathcal{A}} =: \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} = \overset{MR}{\mathbf{u}}_{\mathcal{R}} \circ \overset{RA}{\phi} + \overset{RA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} = \overset{MR}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} + \overset{RA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}} \quad . \quad (2.35)$$

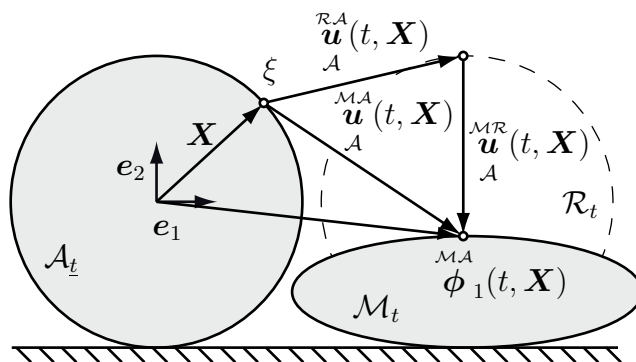


Abbildung 2.8: Definition der Verschiebungsfelder  $\overset{RA}{u}$ ,  $\overset{MR}{u}$  und  $\overset{MA}{u}$  am Beispiel einer elastischen Scheibe, die auf einer starren Ebene rotiert, translatiert und durch Eigengewicht in vertikaler Richtung zusammengedrückt wird

### 2.3.2 Notation von Ableitungen

In den folgenden Abschnitten werden Ableitungen nach Zeit und Ort auftreten, deren Notation an dieser Stelle eingeführt wird. Eine totale Ableitung wird hierbei stets mit dem Symbol  $d^j$  und eine partielle Ableitung mit dem Symbol  $\partial_i^j$  bezeichnet. Dabei gibt der Index  $j$  die Ordnung der Ableitung und der Index  $i$  die Position der Variablen an, nach der differenziert wird. Am Beispiel der Funktionen

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (2.36)$$

$$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.37)$$

sei diese Operatorschreibweise als

$$d^j h(x) := \frac{d^j}{dx^j} h(x) \quad , \quad (2.38)$$

$$\partial_i^j \mathbf{h}(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) := \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \mathbf{h}(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) \quad (\text{mit } i \in \mathbb{N}_n) \quad (2.39)$$

veranschaulicht. Der Vorteil dieser Schreibweise liegt darin, dass Ableitungen auch ohne Auswahl von Argumenten konsistent aufgeschrieben werden können. An dieser Stelle sei noch einmal besonders betont, dass anhand des Ableitungssymbols nicht unterschieden wird, welcher Art die Größe ist, nach der abgeleitet wird. Darüber hinaus besitzt der Ableitungsoperator in der Operatorrangfolge eine höhere Priorität als der Verknüpfungoperator, d. h. ohne eine Klammerung ist vor dem Komponieren zweier Abbildungen abzuleiten.

In der Literatur sind für verschiedene partielle Ableitungen Begriffe wie materielle, substantielle, räumliche und konvektive Ableitung zu finden. Diese partiellen Ableitungen werden im Folgenden in strukturierter Form in dieser Arbeit eingeführt. Für die Beschreibung der Ableitung einer Feldgröße ist es entscheidend, in welcher Platzierung eine Größe dargestellt ist und in welcher Platzierung die Feldgröße abgeleitet werden soll. Deshalb wird der partielle Ableitungsoperator um die Angabe der Platzierung vervollständigt, in welcher die Ableitung einer Größe erfolgt.

Diese Erweiterung wird im Folgenden am Beispiel des Zeitableitungsoperators näher erläutert. Es sei hierfür  $\mathbf{h}$  eine beliebige Feldgröße nach den Gln. (2.21) bis (2.23). Da die Zeit bei zeitabhängigen Abbildungen im Rahmen dieser Arbeit stets als erstes Argument gewählt wird, ergibt sich der

Index des Zeitableitungsoperators zu null. Die erweiterte Notation für die Zeitableitung in einer beliebigen Platzierung  $\alpha \in \{\mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{M}\}$ , angewendet auf die zuvor definierte beliebige Feldgröße  $\mathbf{h}$ , beschrieben in der beliebigen Platzierung  $\beta \in \{\mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{M}\}$ , wird demnach als

$$\partial_{\alpha \beta} \mathbf{h} := \partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \phi \right)_{\beta}^{\beta\alpha} \circ \phi^{\alpha\beta} = \partial_0 \mathbf{h} \circ \phi_{\alpha}^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left( \partial_0 \mathbf{h} \right)_{\alpha \beta}^{\beta\alpha} \circ \phi := \partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \phi \right)_{\beta}^{\beta\alpha} = \partial_0 \mathbf{h}_{\alpha} \quad (2.40)$$

definiert.<sup>21</sup> Mithilfe der Kettenregel lässt sich dies wegen  $\partial_0 \phi_0^{\beta\alpha} = 1$  in

$$\partial_{\alpha \beta} \mathbf{h} = \left( \left( \partial_0 \mathbf{h} \circ \phi \right)_{\beta}^{\beta\alpha} \cdot \partial_0 \phi_0^{\beta\alpha} + \left( \partial_1 \mathbf{h} \circ \phi \right)_{\beta}^{\beta\alpha} \cdot \partial_0 \phi_1^{\beta\alpha} \right) \circ \phi^{\alpha\beta} \quad (2.41)$$

$$= \partial_0 \mathbf{h}_{\beta} \cdot \left( \partial_0 \phi_0 \circ \phi \right)^{\beta\alpha \alpha\beta} + \partial_1 \mathbf{h}_{\beta} \cdot \left( \partial_0 \phi_1 \circ \phi \right)^{\beta\alpha \alpha\beta} \quad (2.42)$$

$$= \partial_0 \mathbf{h}_{\beta} + \partial_1 \mathbf{h}_{\beta} \cdot \left( \partial_0 \phi_1 \circ \phi \right)^{\beta\alpha \alpha\beta} \quad (2.43)$$

umschreiben. Die eingeführte erweiterte Ableitung lässt sich auch in die Platzierung des Zeitableitungsoperators überführen

$$\left( \partial_0 \mathbf{h} \right)_{\alpha \beta}^{\beta\alpha} \circ \phi = \left( \partial_0 \mathbf{h} \right)_{\beta}^{\beta\alpha} \circ \phi + \left( \left( \partial_1 \mathbf{h} \right)_{\beta}^{\beta\alpha} \right) \cdot \partial_0 \phi_1^{\beta\alpha} \quad , \quad (2.44)$$

was für spätere Herleitungen sinnvoll ist. Der Operator der partiellen Ableitung ohne bezeichnete Platzierung ist der kanonische Ableitungsoperator aus Gl. (2.39)

$$\partial_{\alpha \alpha} \mathbf{h} = \partial_0 \mathbf{h}_{\alpha} + \partial_1 \mathbf{h}_{\alpha} \cdot \left( \partial_0 \phi_1 \circ \phi \right)^{\alpha\alpha \alpha\alpha} = \partial_0 \mathbf{h}_{\alpha} \quad . \quad (2.45)$$

Es ist deutlich zu sehen, dass es demnach nur zwei Zeitableitungsoperatoren gibt – nämlich den totalen und den partiellen. Alle anderen Operatoren sind als Abkürzungen für die Anwendung der Kettenregel beim impliziten Vorhandensein einer Zeitabhängigkeit anzusehen. Die Zeitabhängigkeit ist implizit, da die Zeitabhängigkeit des Gebietes meist nicht an der Funktion explizit gekennzeichnet wird.<sup>22</sup>

Die üblichen Abkürzungen der Zeitableitungsoperatoren sollen an dieser Stelle eingeführt werden. Eine Übersicht über die neun möglichen Zeitableitungen einer Feldgröße, welche in verschiedenen Platzierungen dargestellt ist, wird durch Tab. 2.2 wiedergegeben. Unter der materiellen Zeitableitung wird in dieser Arbeit die Zeitableitung eines Feldes aus Sicht eines materiellen Beobachters verstanden, d. h. eines Beobachters, der die Bewegung der materiellen Teilchen beobachtet. Ausgedrückt wird dies durch den Operator  $\partial_0^{\mathcal{A}}$ . Analog lauten die Definitionen der Ableitungen  $\partial_0^{\mathcal{R}}$  und  $\partial_0^{\mathcal{M}}$ .<sup>23</sup>

<sup>21</sup> In [SPIVAK 1995, S. 30, 44 und 88] und [LEHMANN 1976, S. 12] sind ähnliche Definitionen der Ableitungen zu finden.

<sup>22</sup> Die in dieser Arbeit eingeführte platzierungsabhängige Ableitung lässt sich auch aus der LIE-Ableitung (s. [HOPPE 1996, S. 57]) entwickeln.

<sup>23</sup> In Abschnitt A.5 wird die eingeführte erweiterte Notation des Ableitungsoperators an Beispielen verdeutlicht.



Zeitableitung	$\square$	$\partial_0 \mathbf{h}$ $\square \mathcal{A}$	$\partial_0 \mathbf{h}$ $\square \mathcal{R}$	$\partial_0 \mathbf{h}$ $\square \mathcal{M}$
materiell	$\mathcal{A}$	$\partial_0 \mathbf{h}_{\mathcal{A}}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi}$
referentiell	$\mathcal{R}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}$	$\partial_0 \mathbf{h}_{\mathcal{R}}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{M}}{\phi}$
räumlich	$\mathcal{M}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}$	$\partial_0 \left( \mathbf{h} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{M}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}$	$\partial_0 \mathbf{h}_{\mathcal{M}}$

Tabelle 2.2: Übersicht über eingeführte Zeitableitungsoperatoren in Abhängigkeit der gewählten Beschreibung

Zur Veranschaulichung seien an dieser Stelle ein Beispiel für die Zeitableitung eines Skalarfeldes  $h$

$$\partial_0 h_{\mathcal{A}\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) = \partial_0 \left( h \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi}(t, \mathbf{x}) \quad (2.46)$$

$$\underbrace{\partial_0 h_{\mathcal{A}\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Skalarfeld}} = \underbrace{\partial_0 h_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Skalarfeld}} + \underbrace{\partial_1 h_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Vektorfeld}} \cdot \underbrace{\left( \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi} \right)}_{\text{Vektorfeld}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.47)$$

sowie analog ein Beispiel für die Zeitableitung eines Vektorfeldes  $\mathbf{h}$

$$\underbrace{\partial_0 \mathbf{h}_{\mathcal{A}\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Vektorfeld}} = \underbrace{\partial_0 \mathbf{h}_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Vektorfeld}} + \underbrace{\partial_1 \mathbf{h}_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x})}_{\text{Tensorfeld}} \cdot \underbrace{\left( \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 \circ \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi} \right)}_{\text{Vektorfeld}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.48)$$

angegeben.

Die in diesen Gleichungen auftretenden Ableitungen nach dem Ort seien in ihrer Matrixdarstellung<sup>24</sup> für ein Vektorfeld  $\mathbf{h}$  definiert als

$$\left[ \partial_1 \mathbf{h}_{\beta}(t, \mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} \partial_1 h_1(t, \mathbf{x})_{\beta} \\ \partial_1 h_2(t, \mathbf{x})_{\beta} \\ \partial_1 h_3(t, \mathbf{x})_{\beta} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$= \left[ \partial_1 h_k(t, \mathbf{x})_{\beta} \right]_k \quad (2.50)$$

$$= \left[ \partial_1 h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})_{\beta} \right]_k \quad (2.51)$$

<sup>24</sup> Die Matrixdarstellung einer Größe wird durch eckige Klammern markiert. Dabei weist der tiefgestellte Index an einer Matrixklammer die Reihenfolge der Elementnummerierung zu. Es gilt die in der Literatur verbreitete *pons asinorum* „Zeile zuerst, Spalte später“.

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \right]_k \quad (2.52)$$

$$=: \left[ \partial_{1,1} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \quad \partial_{1,2} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \quad \partial_{1,3} h_k(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \right]_k \quad (2.53)$$

$$= \left[ \partial_{1,l} h_k(t, \mathbf{x}) \right]_{k,l} \quad (2.54)$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_{1,1} h_1 & \partial_{1,2} h_1 & \partial_{1,3} h_1 \\ \partial_{1,1} h_2 & \partial_{1,2} h_2 & \partial_{1,3} h_2 \\ \partial_{1,1} h_3 & \partial_{1,2} h_3 & \partial_{1,3} h_3 \end{bmatrix} (t, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.55)$$

Auf analoge Weise wird für die Ortsableitung eines Skalarfeldes  $h$

$$\left[ \partial_1 h(t, \mathbf{x}) \right] := \left[ \partial_{1,l} h(t, \mathbf{x}) \right]_l = \left[ \partial_{1,1} h \quad \partial_{1,2} h \quad \partial_{1,3} h \right] (t, \mathbf{x}) \quad (2.56)$$

erhalten. In beiden Fällen kann der Ableitungsoperator auch um die Bezeichnung der Platzierung, in der er angewendet werden soll, ergänzt werden. Allerdings wurde bei der Definition der Übersichtlichkeit wegen darauf verzichtet. Die erforderliche Anwendung der Kettenregel ist obigem Beispiel zur Zeitableitung zu entnehmen. Die Spur der als Matrix dargestellten Ortsableitung eines Vektorfeldes wird als Divergenz abgekürzt

$$\text{Div} \mathbf{h} := \text{tr} \left[ \partial_1 \mathbf{h} \right] \quad . \quad (2.57)$$

Die Divergenz eines Tensorfeldes wird mit

$$\left[ \text{Div} \mathbf{H} \right]_{\alpha \beta} := \left[ \sum_{l=1}^3 \partial_{1,l} \mathbf{H}_{kl} \right]_{\alpha \beta} \Big|_k \quad (2.58)$$

festgelegt.

### 2.3.3 Geschwindigkeitsfelder

Analog den definierten Verschiebungsfeldern können auch Geschwindigkeitsfelder bezüglich der einzelnen Platzierungen und Bewegungsabbildungen definiert werden. Die Geschwindigkeit wird im Allgemeinen für einen materiellen Partikel  $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}$  zum Zeitpunkt  $t$  als (totale) zeitliche Ableitung seiner Bahnkurve  $\kappa_t$  definiert

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \xi) = \frac{d}{dt} \kappa_t(\xi) \quad . \quad (2.59)$$

In der referentiellen Beschreibung wird hieraus die (partielle) zeitliche Ableitung der in der Ausgangsplatzierung dargestellten Bahnkurve für den Ort dieses materiellen Partikels (s. [HAUPT 2010, S. 21])<sup>25</sup>

$$\mathbf{v} := \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}} := \partial_0 \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}}_1 = \partial_0 \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{u}}} \quad . \quad (2.62)$$

Gleichermaßen werden die Geschwindigkeiten der Teilbewegungen definiert

$$\underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}} := \partial_0 \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}}_1 = \partial_0 \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{u}}} \quad , \quad (2.63)$$

$$\underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}} := \partial_0 \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}}_1 = \partial_0 \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{u}}} \quad . \quad (2.64)$$

Dabei bezieht sich die zeitliche Ableitung jeweils auf die Platzierung, in der die Bewegung natürlich dargestellt wird. Durch die Dekomposition der Bewegung  $\underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}$  in die Bewegungen  $\underset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}$  und  $\underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}$  folgt für die Geschwindigkeit, dargestellt in der Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_t$ ,<sup>26</sup>

$$\underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}} = \partial_0 \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}}_1 \circ \underset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi} \quad (2.65)$$

$$= \partial_0 \left( \underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 \circ \underset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \circ \underset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi} \quad (2.66)$$

$$= \partial_0 \underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 + \partial_1 \underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 \cdot \left( \partial_0 \underset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}_1 \circ \underset{\mathcal{A}\mathcal{R}}{\phi} \right) \quad (2.67)$$

$$= \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}} + \partial_1 \underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 \cdot \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}} \quad (2.68)$$

$$=: \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}} + \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{c}}} \quad . \quad (2.69)$$

Die verschiedenen Geschwindigkeitsanteile erhalten entsprechend ihrer Interpretation üblicherweise folgende Bezeichnungen

- Geschwindigkeit  $\underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}$  (oder auch  $\mathbf{v}$ ),
- Partikelgeschwindigkeit oder Führungsgeschwindigkeit  $\underset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}$ ,
- Netzgeschwindigkeit  $\underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}$ ,
- konvektive Geschwindigkeit  $\underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{c}}$ .

<sup>25</sup> Wird die Zeitableitung nicht bezüglich der Ausgangsplatzierung sondern der Momentanplatzierung gebildet, so ergibt sich wegen

$$\partial_0 \left( \underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 \circ \underset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi} \right) = \partial_0 \text{id}_1 = 0 \quad (2.60)$$

die Beziehung

$$\underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0 \phi}}_1 = \partial_0 \left( \underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 \circ \underset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\phi} \right) \circ \underset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} = 0 \quad . \quad (2.61)$$

<sup>26</sup> In Gl. (2.67) wird Gl. (2.40) mit den Ersetzungen  $\underset{\beta}{\mathbf{h}} := \underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1$ ,  $\alpha := \mathcal{A}$  und  $\beta := \mathcal{R}$  verwendet.

An dieser Darstellung lässt sich gut erkennen, was geschieht, wenn statt der ALE-Beschreibung eine rein referentielle Beschreibung (LAGRANGE-Beschreibung)

$$\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} = \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{A}} \Rightarrow \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}_1 = 0 \Rightarrow \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}} = \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}} \quad (2.70)$$

bzw. eine rein räumliche Beschreibung (EULER-Beschreibung)

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} = \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{R}} \Rightarrow \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 = 1_{\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}} \Rightarrow \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}} = \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}} \quad (2.71)$$

verwendet wird. Außerdem sollte betont werden, dass im Fall einer zeitunabhängigen Abbildung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1$ , d. h. einer bezogen auf die Referenzplatzierung zeitunabhängigen Deformation, das Geschwindigkeitsfeld  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}$  aufgrund der konvektiven Geschwindigkeit im Allgemeinen nicht verschwindet.

Bevor mit den Beschleunigungsfeldern fortgesetzt wird, soll der Zusammenhang zwischen Zeitableitung bei materieller Beschreibung und Zeitableitung bei relativer Beschreibung näher untersucht werden. Sei dazu  $\overset{\mathcal{A}}{\mathbf{h}}$  eine beliebige vektorwertige Funktion, dann ergibt sich für die materielle Ableitung dieser Funktion bei relativer Beschreibung, d. h. mit Berücksichtigung der Dekomposition der Bewegungsabbildung,<sup>27</sup>

$$\partial_0 \overset{\mathcal{A}}{\mathbf{h}} = \partial_0 \left( \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \quad (2.72)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}_1 \quad (2.73)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} \quad (2.74)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \partial_1 \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} \quad (2.75)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \left( \left( \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \cdot \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_0 + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \cdot \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 \right) \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} \quad (2.76)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1 \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} \right) \cdot \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} \quad (2.77)$$

$$= \partial_0 \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \cdot \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{c}}_{\mathcal{A}} \quad (2.78)$$

Die letzte Gleichung enthält das Vektorfeld  $\overset{\mathcal{A}}{\mathbf{h}}$  dargestellt in jeder Platzierung. Sie wird deshalb auch als Fundamentalgleichung der ALE bezeichnet.

### 2.3.4 Beschleunigungsfelder

Die Felder der Beschleunigungen werden durch die zweimalige zeitliche Ableitung der Bewegungsabbildungen bzw. durch einmalige zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitsfelder bestimmt. Für die Beschleunigung in materieller Darstellung ergibt sich unter Berücksichtigung der Dekomposition der Bewegung

$$\overset{\mathcal{A}}{\mathbf{a}} := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{a}}_{\mathcal{A}} := \partial_0^2 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 = \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} = \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} + \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{c}}_{\mathcal{A}} \right) = \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}_{\mathcal{A}} + \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{c}}_{\mathcal{A}} \quad (2.79)$$

<sup>27</sup> In Gl. (2.73) wird Gl. (2.40) mit den Ersetzungen  $\overset{\mathcal{A}}{\mathbf{h}} := \overset{\mathcal{A}}{\mathbf{h}}$ ,  $\alpha := \mathcal{A}$  und  $\beta := \mathcal{R}$  verwendet.

Mit den Zwischenrechnungen

$$\partial_0 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \mathbf{v} = \partial_0^2 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi + \left( \partial_0 \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 \quad (2.80)$$

$$=: \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \mathbf{a} + \left( \partial_0 \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{v} \quad , \quad (2.81)$$

$$\partial_0 \begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \mathbf{c} = \partial_0 \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 + \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \partial_0^2 \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 \quad (2.82)$$

$$= \left( \partial_0 \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi + \partial_1 \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 + \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \partial_0^2 \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \phi_1 \quad (2.83)$$

$$=: \left( \partial_0 \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{v} + \left( \partial_1 \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{v} \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{v} + \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ A \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{a} \quad (2.84)$$

ergibt sich für die Beschleunigung<sup>28</sup> in der Referenzplatzierung

$$\begin{matrix} MA \\ R \end{matrix} \mathbf{a} = \underbrace{\begin{matrix} MR \\ R \end{matrix} \mathbf{a}}_{\text{Translations- beschleunigung}} + 2 \underbrace{\left( \partial_0 \partial_1 \begin{matrix} MR \\ R \end{matrix} \phi_1 \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ R \end{matrix} \mathbf{v}}_{\text{CORIOLIS-Beschleunigung}} + \underbrace{\left( \partial_1 \left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ R \end{matrix} \phi_1 \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ R \end{matrix} \mathbf{v} \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ R \end{matrix} \mathbf{v}}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}} + \underbrace{\left( \partial_1 \begin{matrix} MR \\ R \end{matrix} \phi_1 \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ R \end{matrix} \mathbf{a}}_{\text{Rotations- beschleunigung}} \quad . \quad (2.85)$$

Mithilfe der Fundamentalgleichung der ALE (Gl. (2.78)) gelingt außerdem die Darstellung der Beschleunigung als

$$\begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \mathbf{a} = \partial_0 \begin{matrix} MA \\ R \end{matrix} \mathbf{v} \circ \phi + \left( \partial_1 \begin{matrix} MA \\ R \end{matrix} \mathbf{v} \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} RA \\ A \end{matrix} \mathbf{v} \quad (2.86)$$

$$= \partial_0 \begin{matrix} MA \\ R \end{matrix} \mathbf{v} \circ \phi + \left( \partial_1 \begin{matrix} MA \\ M \end{matrix} \mathbf{v} \circ \phi \right) \cdot \begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \mathbf{c} \quad (2.87)$$

und dieser Ausdruck lässt sich mit den Gln. (2.67) und (2.78) in Gl. (2.85) überführen. Mit den Betrachtungen aus Abschnitt 2.3.2 folgt insbesondere, dass die Beschleunigung bezüglich der Momentanplatzierung nicht direkt durch die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes bezüglich der Momentanplatzierung dargestellt werden kann

$$\begin{matrix} MA \\ M \end{matrix} \mathbf{a} = \partial_0^2 \begin{matrix} MA \\ M \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \neq \partial_0 \left( \partial_0 \begin{matrix} MA \\ M \end{matrix} \phi_1 \circ \phi \right) = \partial_0 \begin{matrix} MA \\ M \end{matrix} \mathbf{v} \quad , \quad (2.88)$$

was die Notwendigkeit der etwas aufwendigeren Notation begründet.

### 2.3.5 Deformationsgradienten

#### Deformation oder Abbildung von Tangentenvektoren

Analog zur Geschwindigkeit lässt sich aus der Ableitung der Bewegungsabbildung  $\begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \phi_1$  nach dem Ort der Deformationsgradient definieren

$$\begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) := \partial_1 \begin{matrix} MA \\ A \end{matrix} \phi_1(t, \mathbf{X}) \quad . \quad (2.89)$$

<sup>28</sup> Die Bezeichnung der Beschleunigungsanteile erfolgt nach [GUMMERT & RECKLING 1987, S. 110].

Der Deformationsgradient<sup>29</sup> kann geometrisch als lineare Abbildung zwischen zwei Tangentialräumen interpretiert werden. Damit ergibt sich für den Deformationsgradienten (s. auch [LINDER 2003, S. 22])

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}_t \\ \mathbf{G}_i &\mapsto \mathbf{g}_i := \left( \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) \right) (\mathbf{G}_i) := \left( \partial_1^{\mathcal{M}\mathcal{A}} \phi_1(t, \mathbf{X}) \right) (\mathbf{G}_i) \quad . \end{aligned} \quad (2.92)$$

Analog folgen die Definitionen der Deformationsgradienten für die Teilbewegung  $\phi^{\mathcal{R}\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{R}_t \\ \mathbf{G}_i &\mapsto \boldsymbol{\nu}_i := \left( \mathbf{F}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) \right) (\mathbf{G}_i) := \left( \partial_1^{\mathcal{R}\mathcal{A}} \phi_1(t, \mathbf{X}) \right) (\mathbf{G}_i) \end{aligned} \quad (2.93)$$

und die Teilbewegung  $\phi^{\mathcal{M}\mathcal{R}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{\chi}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}}\mathcal{R}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}_t \\ \boldsymbol{\nu}_i &\mapsto \mathbf{g}_i := \left( \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{\chi}) \right) (\boldsymbol{\nu}_i) := \left( \partial_1^{\mathcal{M}\mathcal{R}} \phi_1(t, \boldsymbol{\chi}) \right) (\boldsymbol{\nu}_i) \quad . \end{aligned} \quad (2.94)$$

Es gilt für die definierten Deformationsgradienten<sup>30</sup>

$$\partial_1^{\mathcal{M}\mathcal{A}} \phi_1 = \left( \partial_1^{\mathcal{M}\mathcal{R}} \phi_1 \circ \phi^{\mathcal{R}\mathcal{A}} \right) \circ \partial_1^{\mathcal{R}\mathcal{A}} \phi_1 \Leftrightarrow \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) = \left( \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{R}} \circ \phi^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) \right) \circ \mathbf{F}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) \quad . \quad (2.95)$$

Etwas übersichtlicher kann dies mit der Definition

$$\mathbf{F}^{\beta\alpha} := \partial_1^{\beta\alpha} \phi_1 \circ \phi^{\alpha\gamma} \quad (2.96)$$

und unter Fortlassen der Argumente auch als

$$\mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{R}} \circ \mathbf{F}^{\mathcal{R}\mathcal{A}} \quad (2.97)$$

geschrieben werden. Zur Vereinfachung der Notation werden in den folgenden Abschnitten auf diese Weise bei Tensorfeldern die Argumente fortgelassen.

<sup>29</sup> Als Beispiel sei die Matrixdarstellung des Deformationsgradienten einer ebenen Rotationsbewegung der Winkelgeschwindigkeit  $\partial_0\varphi$

$$\phi^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) := \left( t, \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.90)$$

angegeben

$$\left[ \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \quad . \quad (2.91)$$

<sup>30</sup> In der Literatur ist häufig die nicht ganz exakte Aussage  $\mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{R}} \circ \mathbf{F}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}$  zu finden. Im Gegensatz dazu wird in [MIEHE 1998] eine Beziehung wie in Gl. (2.95) formuliert.

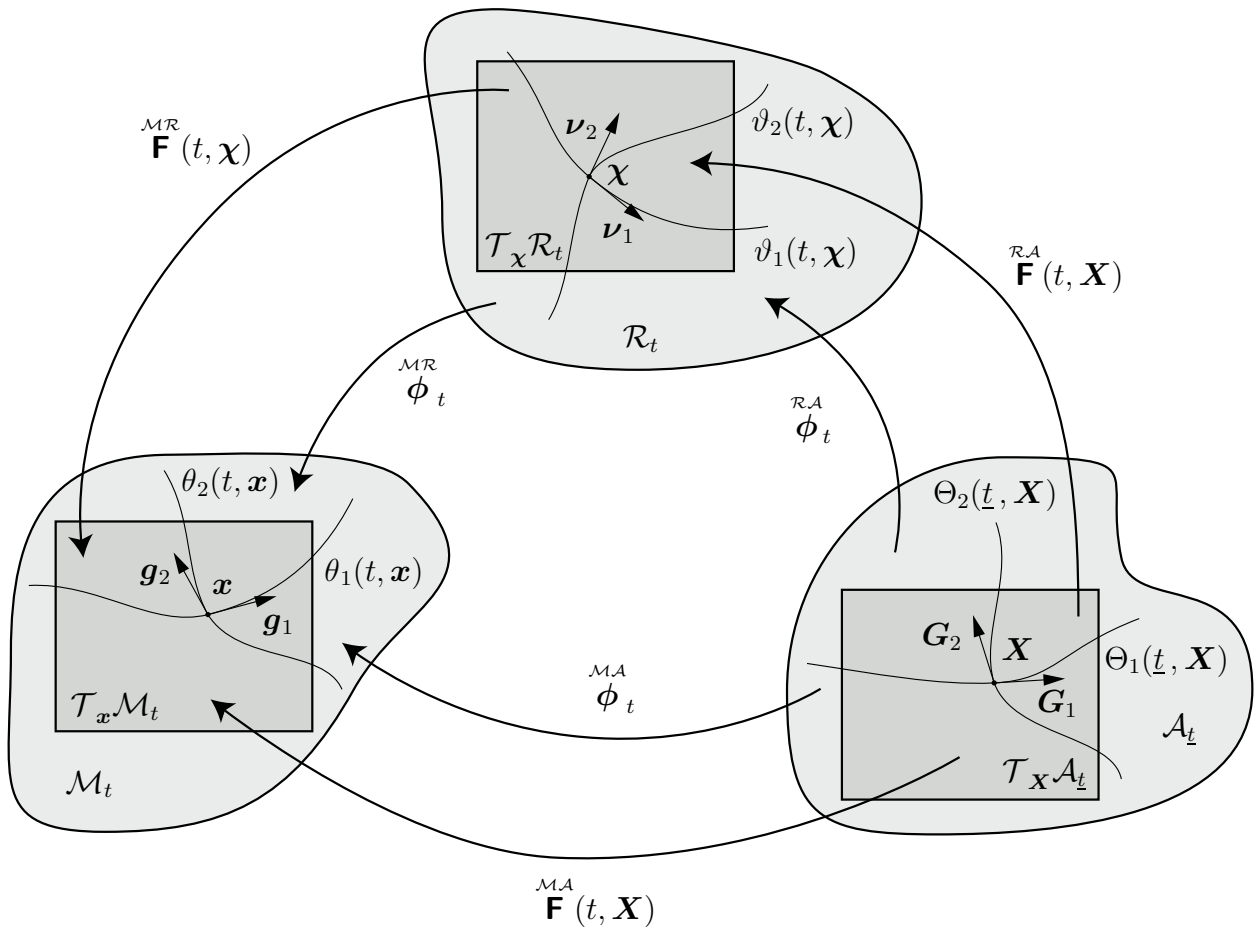


Abbildung 2.9: Beziehungen zwischen Deformationsgradienten, Bewegungsabbildungen und Platzierungen

### Deformation oder Abbildung von Normalenvektoren

Wie in Abschnitt A.4 gezeigt wird, existiert zu jedem der Tangentialräume  $\mathcal{T}_X \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{T}_X \mathcal{R}$  bzw.  $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$  auch ein Kotangentialraum  $\mathcal{T}_X^* \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{T}_X^* \mathcal{R}$  bzw.  $\mathcal{T}_x^* \mathcal{M}$ . Während die Basen der Tangentialräume (Tangentialvektoren) durch den Deformationsgradienten in unterschiedliche Platzierungen abgebildet werden, geschieht dies für die Basen der Kotangentialräume (Normalenvektoren) durch den Kofaktor des Deformationsgradienten<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \text{cof} \left[ \begin{matrix} \mathcal{M} \mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{matrix} \right] : \mathcal{T}_X^* \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_x^* \mathcal{M}_t \\ \mathbf{G}^{*i} &\mapsto \mathbf{g}^{*i} := \text{cof} \left[ \begin{matrix} \mathcal{M} \mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{matrix} \right] (\mathbf{G}^{*i}) \quad , \end{aligned} \tag{2.99}$$

<sup>31</sup> Die bei der Definition verwandte eckige Klammer kennzeichnet die Funktion des Kofaktors als Lineare Abbildung und es gilt für den Kofaktor eines Tensors  $\mathbf{F}$

$$\text{cof}[\mathbf{F}] := \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^* \quad , \tag{2.98}$$

wobei  $\mathbf{F}^*$  der zu  $\mathbf{F}$  duale Tensor ist (vgl. Abschnitt A.7).

$$\begin{aligned} \text{cof} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{R}\mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{array} \right] : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{R}_t \\ \mathbf{G}^{*i} &\mapsto \boldsymbol{\nu}^{*i} := \text{cof} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{R}\mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{array} \right] (\mathbf{G}^{*i}) \quad , \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \text{cof} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{R} \end{array} \right] : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}_t \\ \boldsymbol{\nu}^{*i} &\mapsto \mathbf{g}^{*i} := \text{cof} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{R} \end{array} \right] (\boldsymbol{\nu}^{*i}) \quad . \end{aligned} \quad (2.101)$$

Außerdem lässt sich die sogenannte PIOLA-Identität formulieren

$$\text{Div} \circ \text{cof}[\mathbf{F}] = 0 \quad , \quad (2.102)$$

die bei nachfolgenden Herleitungen Verwendung findet.<sup>32</sup>

Für die spätere Anwendung des Integralsatzes von GAUSS werden an dieser Stelle drei Abbildungen eingeführt, die in der jeweiligen Platzierung jedem Punkt des Randes seinen normierten Normalenvektor zuordnen

$$\mathbf{n} : \mathbb{T} \times \partial \mathcal{A}_t \subset \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_t \quad , \quad (2.103)$$

$$\mathbf{n} : \mathbb{T} \times \partial \mathcal{M}_t \subset \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}_t \quad , \quad (2.104)$$

$$\mathbf{n} : \mathbb{T} \times \partial \mathcal{R}_t \subset \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{R}_t \quad . \quad (2.105)$$

Hierbei wird der Rand des materiellen Körpers in einer Platzierung  $\alpha$  mit  $\partial\alpha$  bezeichnet.

### Deformation oder Abbildung von Volumenelementen

Neben Tangential- bzw. Kotangentialvektoren, die sich als differentielle Linien- bzw. Flächenelemente interpretieren lassen, kann die Deformation auch für differentielle Volumenelemente  $dV$  beschrieben werden. Den Rechenregeln aus [GEKELER 2006, S. 21] können die JACOBI-Abbildungen

$$\begin{aligned} J^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ dV_{\mathcal{A}} &\mapsto dV_{\mathcal{M}} := \det \left( \begin{array}{c} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{array} \right) dV_{\mathcal{A}} \quad , \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} J^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \mathbf{X}) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ dV_{\mathcal{A}} &\mapsto dV_{\mathcal{R}} := \det \left( \begin{array}{c} \mathcal{R}\mathcal{A} \\ \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{array} \right) dV_{\mathcal{A}} \quad , \end{aligned} \quad (2.107)$$

<sup>32</sup> Für einen Beweis sei auf [SCOVAZZI & HUGHES 2007, S. 8] und [GEKELER 2006, S. 385]) verwiesen.



$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{MR}}J(t, \boldsymbol{\chi}) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
dV_{\mathcal{R}} &\mapsto dV_{\mathcal{M}} := \det \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} dV_{\mathcal{R}}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

entnommen werden. Da die Abbildungen zwischen den Platzierungen bijektiv sind und Materialdurchdringung ausgeschlossen wird, sind die Determinanten der jeweiligen Deformationsgradienten größer als null.

Für spätere Herleitungen wird an dieser Stelle die zeitliche Ableitung der JACOBI-Abbildung  $J$  bestimmt<sup>33</sup>

$$\partial_0^{\mathcal{MA}} J(t, \mathbf{X}) = J(t, \mathbf{X}) \operatorname{Div}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{MA}} \mathbf{v}(t, \mathbf{X}) \quad . \tag{2.109}$$

Auf gleichem Wege können die zeitlichen Ableitungen der übrigen zwei JACOBI-Abbildungen  $J$  und  $J$  ermittelt werden

$$\partial_0^{\mathcal{RA}} J(t, \mathbf{X}) = J(t, \mathbf{X}) \operatorname{Div}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{RA}} \mathbf{v}(t, \mathbf{X}) \quad , \tag{2.110}$$

$$\partial_0^{\mathcal{MR}} J(t, \boldsymbol{\chi}) = J(t, \boldsymbol{\chi}) \operatorname{Div}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{MR}} \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\chi}) \quad . \tag{2.111}$$

### 2.3.6 Metrikensoren bzw. RIESZ-Abbildungen

Nach dem Satz von RIESZ existieren jeweils eindeutige Abbildungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_t \\
\mathbf{G}_i &\mapsto \mathbf{R}(\mathbf{G}_i) := \mathbf{G}^{*i} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} : \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}_t \\
\mathbf{g}_i &\mapsto \mathbf{R}(\mathbf{g}_i) := \mathbf{g}^{*i} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}} \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}}^* \mathcal{R}_t \\
\boldsymbol{\nu}_i &\mapsto \mathbf{R}(\boldsymbol{\nu}_i) := \boldsymbol{\nu}^{*i} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.114}$$

die zwischen den zugehörigen Tangential- und Kotangentialräumen vermitteln. Mithilfe dieser Abbildungen lassen sich innere Produkte bilden, mit denen Längen von Tangentenvektoren bestimmt werden können

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_t} \bigwedge_{d\mathbf{X} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_t} \|d\mathbf{X}\|_{\mathbf{R}}^2 := \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_t} := \left\langle d\mathbf{X} \left| \mathbf{R}[d\mathbf{X}] \right. \right\rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_t} \quad , \tag{2.115}$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \bigwedge_{d\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_t} \|d\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}}^2 := \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_t} := \left\langle d\mathbf{x} \left| \mathbf{R}[d\mathbf{x}] \right. \right\rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}_t} \quad , \tag{2.116}$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{R}_t} \bigwedge_{d\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}} \mathcal{R}_t} \|d\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbf{R}}^2 := \langle d\boldsymbol{\chi}, d\boldsymbol{\chi} \rangle_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}} \mathcal{R}_t} := \left\langle d\boldsymbol{\chi} \left| \mathbf{R}[d\boldsymbol{\chi}] \right. \right\rangle_{\mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}}^* \mathcal{R}_t} \quad . \tag{2.117}$$

<sup>33</sup> Eine Herleitung mit der Angabe von Zwischenschritten ist in Abschnitt A.6 gegeben.

Mit der Definition der Deformationstensoren  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}}$  (Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor) und  $\overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}$  (Inverser-Links-CAUCHY-GREEN-Tensor oder Inverser-FINGER-Tensor) kann ein Zusammenhang zwischen den Längen von Tangentenvektoren in verschiedenen Platzierungen eingeführt werden

$$\bigwedge_{(t, \mathbf{X}) \in \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t} \bigwedge_{d\mathbf{X} \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_t} \|d\mathbf{X}\|_{\overset{\mathcal{A}}{\mathbf{R}}}^2 =: \|d\mathbf{x}\|_{\overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{M}}}^2 := \left\langle d\mathbf{x} \left| \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{M}} [d\mathbf{x}] \right. \right\rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_t}, \quad (2.118)$$

$$\bigwedge_{(t, \mathbf{X}) \in \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t} \bigwedge_{d\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_t} \|d\mathbf{x}\|_{\overset{\mathcal{M}}{\mathbf{R}}}^2 =: \|d\mathbf{X}\|_{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{A}}}^2 := \left\langle d\mathbf{X} \left| \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{A}} [d\mathbf{X}] \right. \right\rangle_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_t} \quad (2.119)$$

$$\text{mit } d\mathbf{x} = \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}} [d\mathbf{X}] \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X}) \quad . \quad (2.120)$$

Die mit diesen Gleichungen neu eingeführten Tensoren  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}}$  und  $\overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}$  ergeben sich zu

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{A}} := \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \right)^{-1} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}}_{\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} = \left( \overset{\mathcal{R}\mathcal{A}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \right)^{-1} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}}_{\mathcal{R}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}}, \quad (2.121)$$

$$\overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{M}} := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}}_{\mathcal{A}} \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \right)^{-1} = \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}}_{\mathcal{R}} \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}} \right)^{-1}. \quad (2.122)$$

### 2.3.7 Dehnungstensoren

Die Dehnungstensoren vergleichen stets zwei Metrikensoren passend zu einer Platzierung und einer Bewegungsabbildung. Als Beispiel werden an dieser Stelle der GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{A}} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}} & - \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}} \\ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{C}} & - \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

sowie der ALMANSI-Dehnungstensor

$$\overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{M}} := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{A}} \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{A}} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}} & - \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{M}} \\ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{R}} & - \overset{\mathcal{A}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

eingeführt. Analog zu diesen in der Literatur üblichen Dehnungstensoren lassen sich auch Dehnungstensoren für die Bewegung zwischen Referenz- und Momentanplatzierung aufstellen

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{C}} & - \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{R}} \\ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{C}} & - \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{R}} \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

$$\overset{\mathcal{R}\mathcal{M}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} := \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}^*}{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{R}} & - \overset{\mathcal{R}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{R}} \\ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{R}} & - \overset{\mathcal{R}\mathcal{M}}{\mathbf{C}}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Abbildung 2.10 gibt die Zusammenhänge zwischen Metrikensoren, Deformationstensoren und Dehnungstensoren übersichtlich wieder.

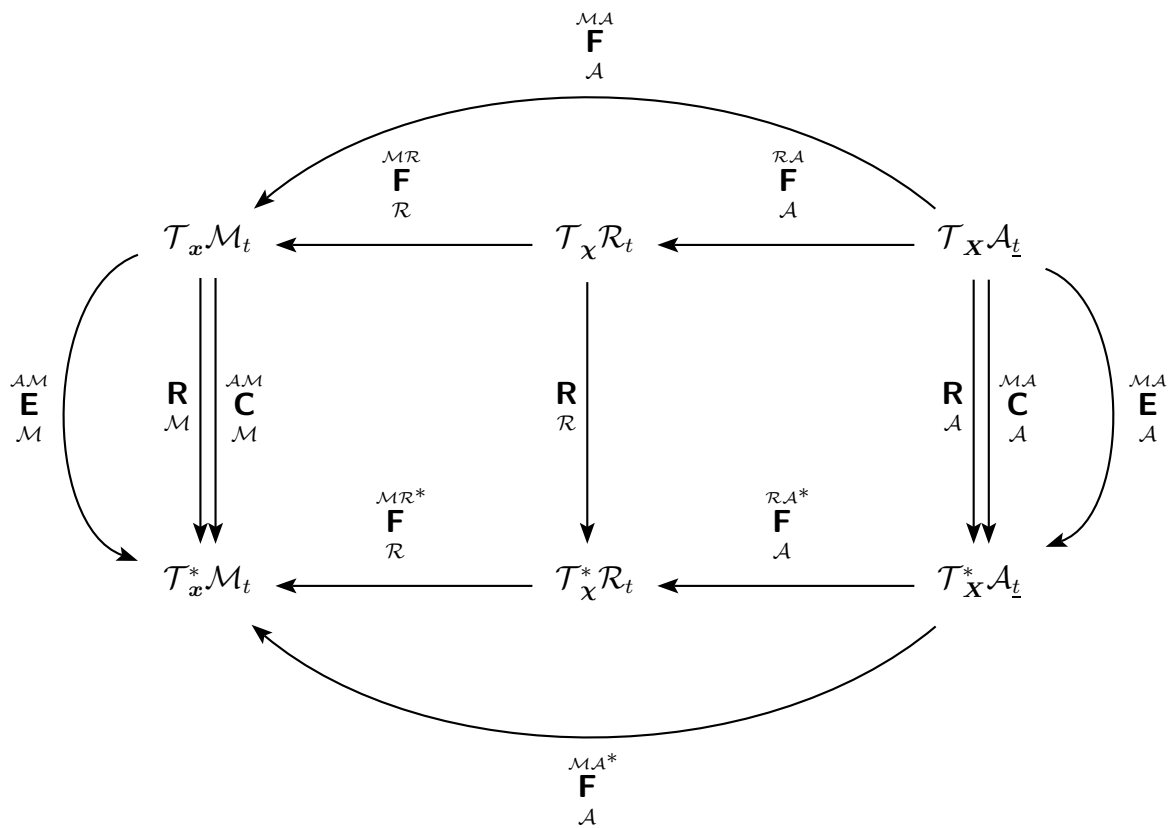


Abbildung 2.10: Zusammenstellung von Urbildern und Bildern für Metrikensoren, Deformationsgradienten und Dehnungstensoren (nichtkommutatives Diagramm)

## 2.4 Spannungstensoren

Mithilfe des CAUCHY-Theorems werden lineare Zusammenhänge zwischen dem Normalenvektor einer Schnittfläche (EULER-Schnittprinzip) und dem Spannungsvektor in dieser Schnittfläche postuliert. Im Fall der Momentanplatzierung beschreibt der sogenannte CAUCHY-Spannungstensor den linearen Zusammenhang zwischen Spannungsvektor und Normalenvektor bezüglich der Momentanplatzierung

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}}(t, \boldsymbol{x}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}^* \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \mathcal{M}_t \\ \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{n}} &\mapsto \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{t}}(t, \boldsymbol{x}) := \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}}(t, \boldsymbol{x})[\underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{n}}] \quad . \end{aligned} \quad (2.127)$$

Der Spannungsvektor in der Momentanplatzierung  $\boldsymbol{t}$  wird auch wahrer Spannungsvektor genannt, da er die in der Schnittfläche auftretende Kraft in der Momentanplatzierung auf die Fläche der deformierten Schnittfläche in der Momentanplatzierung bezieht. Als Hilfsgröße wird zumeist der KIRCHHOFF-Spannungstensor eingeführt

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{S}}(t, \boldsymbol{x}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}^* \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \mathcal{M}_t \\ \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{n}} &\mapsto \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{t}}(t, \boldsymbol{x}) := \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{S}}(t, \boldsymbol{x})[\underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{n}}] := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \boldsymbol{x}) \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}}(t, \boldsymbol{x})[\underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{n}}] \quad . \end{aligned} \quad (2.128)$$

Ausgehend von dieser Definition lässt sich der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor (Pseudospannungstensor) bestimmen. Er bezieht die in der Schnittfläche auftretende Kraft in der Momentanplatzierung auf die Fläche der Schnittfläche in der Momentanplatzierung, wobei als Bezug das Flächenstück der Ausgangsplatzierung dient

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{P}}}(t, \boldsymbol{X}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}^* \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \mathcal{M}_t \\ \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}} &\mapsto \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{t}}(t, \boldsymbol{X}) := \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{P}}}(t, \boldsymbol{X})[\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}}] := \left( \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{S}}(\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\boldsymbol{\phi}}(t, \boldsymbol{X})) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{F}}}(t, \boldsymbol{X}) \right) [\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}}] \quad . \end{aligned} \quad (2.129)$$

Mithilfe des Deformationsgradienten können die folgenden Spannungstensoren analog definiert und mit dem jeweiligen KIRCHHOFF-Spannungstensor in Beziehung gebracht werden (s. auch Abb. 2.11)

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{S}}(\underline{t}, \boldsymbol{X}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}^* \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{X}} \mathcal{A}_t \\ \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}} &\mapsto \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{T}}(\underline{t}, \boldsymbol{X}) := \underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{S}}(\underline{t}, \boldsymbol{X})[\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}}] \quad , \\ &:= \left( \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{F}}}(t, \boldsymbol{X}) \right)^{-1} \circ \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{S}}(\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\boldsymbol{\phi}}(t, \boldsymbol{X})) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{F}}}(t, \boldsymbol{X}) \right) [\underset{\mathcal{A}}{\boldsymbol{n}}] \quad , \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{S}}(t, \boldsymbol{\chi}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}}^* \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}} \mathcal{R}_t \\ \underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{n}} &\mapsto \underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{\tau}}(t, \boldsymbol{\chi}) := \underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{S}}(t, \boldsymbol{\chi})[\underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{n}}] \quad , \\ &:= \left( \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{F}}}(t, \boldsymbol{\chi}) \right)^{-1} \circ \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{S}}(\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\boldsymbol{\phi}}(t, \boldsymbol{\chi})) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}^*}{\underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{F}}}(t, \boldsymbol{\chi}) \right) [\underset{\mathcal{R}}{\boldsymbol{n}}] \quad , \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \boldsymbol{\chi}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}}^* \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{\chi}} \mathcal{R}_t \\
 \mathbf{n}_{\mathcal{A}} &\mapsto \boldsymbol{\tau}(t, \boldsymbol{\chi}) := \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{R}\mathcal{A}}(t, \boldsymbol{\chi})[\mathbf{n}_{\mathcal{A}}] := \left( \mathbf{S}(t, \boldsymbol{\chi}) \circ \mathbf{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{R}\mathcal{A}*}(\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\chi})) \right) [\mathbf{n}_{\mathcal{A}}] ,
 \end{aligned}
 \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{x}) : \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}^* \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \mathcal{M}_t \\
 \mathbf{n}_{\mathcal{R}} &\mapsto \mathbf{t}(t, \boldsymbol{x}) := \mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{x})[\mathbf{n}_{\mathcal{R}}] := \left( \mathbf{S}(t, \boldsymbol{x}) \circ \mathbf{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}\mathcal{R}*}(\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x})) \right) [\mathbf{n}_{\mathcal{R}}] .
 \end{aligned}
 \tag{2.133}$$

Insbesondere wird der Tensor  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}$  als zweiter PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bezeichnet.

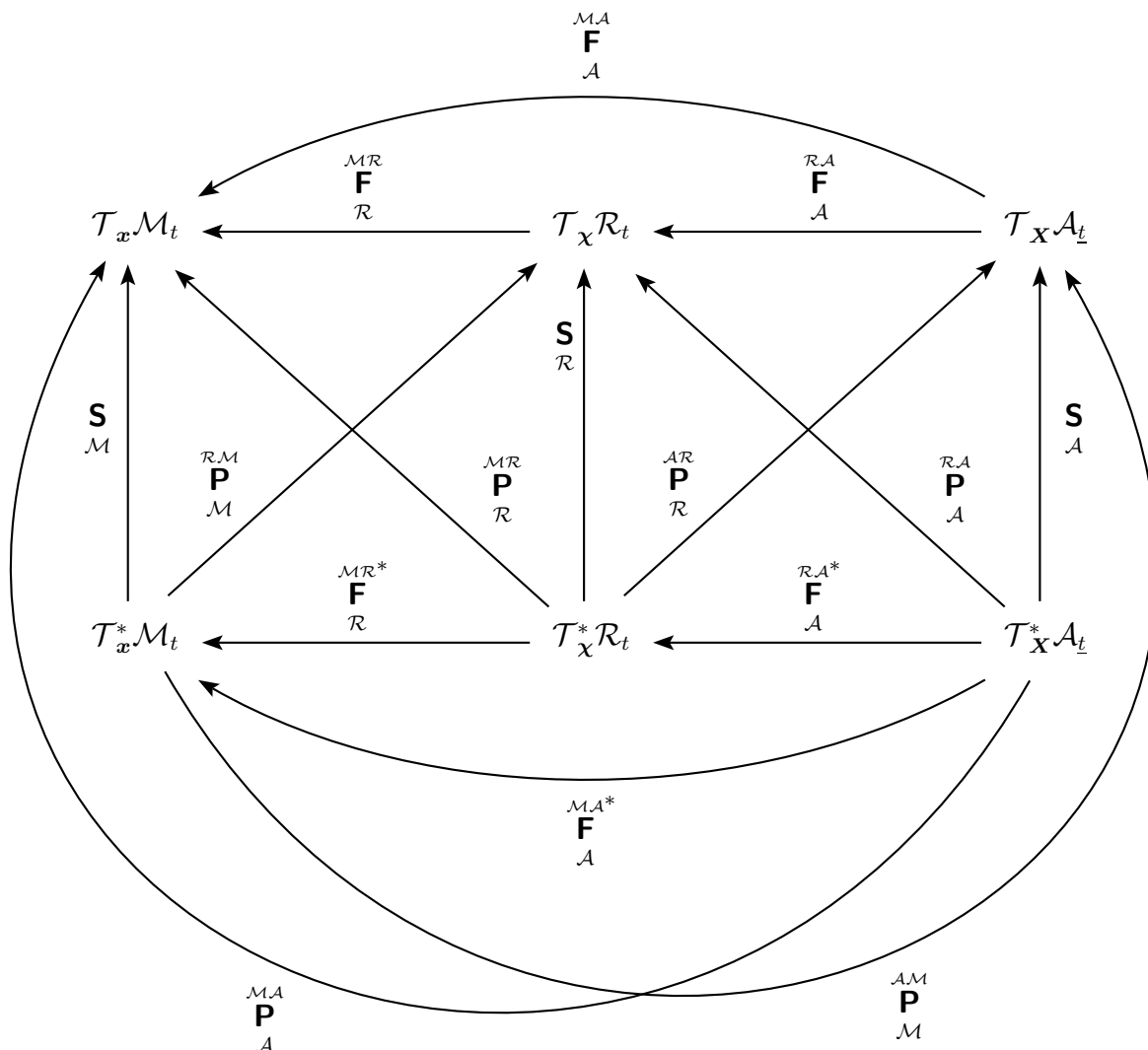


Abbildung 2.11: Kommutatives Diagramm zu den Zusammenhängen von Deformationsgradienten und Spannungstensoren

Wie aus den Definitionen der Gln. (2.128) bis (2.133) hervorgeht, unterscheidet sich die Bedeutung des die Platzierung angegebenden Index bei diesen auf Tangentialräumen definierten Größen. Ein Wechsel zwischen zwei verschiedenen Platzierungen erfolgt nicht nach dem Vorbild von auf den Platzierungen direkt definierten Größen wie in Gl. (2.25), d. h. es gilt

$$\mathbf{S}_A \neq \mathbf{S}_M \circ \overset{M,A}{\phi} . \quad (2.134)$$

Vielmehr werden die Größen nach obigen Vorschriften mithilfe der Deformationsgradienten transformiert. In der englischsprachigen Literatur werden diese Operationen auch als push-forward bzw. push-backward Operationen bezeichnet.<sup>34</sup>

---

<sup>34</sup> In [BESDO & IHLEMANN 2002] wird ein „anwendungsfreundlicher Übertragungsoperator“ vorgeschlagen, der zwischen materieller und räumlicher Beschreibung vermittelt und der ähnlich der hier angegebenen Beziehungen charakterisiert ist.

## 2.5 Bilanz- und Erhaltungsgleichungen

### 2.5.1 Transporttheoreme

Unter dem Begriff Transporttheorem wird eine integrale kinematische Identität zur Berechnung der Änderungsrate von Linien-, Flächen- und Volumenintegralen verstanden. Transporttheoreme drücken damit die Zeitableitung eines Integralausdruckes aus.

Zunächst wird das Transporttheorem für Volumenintegrale betrachtet. Dieses kann für unterschiedliche Abbildungen, die zeitveränderliche Gebiete ausdrücken, angegeben werden. Handelt es sich bei der betrachteten Abbildung um die Bewegung von der Ausgangs- zur Momentanplatzierung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}$ , wird vom klassischen REYNOLDS-Transporttheorem oder kurz vom klassischen REYNOLDS-Theorem gesprochen. Dabei wird die Momentanplatzierung als Bild der Funktion  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \square)$  angesehen

$$\mathcal{M}_t = \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathcal{A}_t) := \left\{ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathcal{A}_t \right\} . \quad (2.135)$$

Es ergibt sich für ein Skalarfeld  $h$

$$h : \mathbb{T} \times \underset{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_t} \rightarrow \mathbb{R} , \quad (2.136)$$

zu<sup>35</sup>

$$\underset{\mathcal{A}}{\partial_0} \int_{\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathcal{A}_t)}} h(t, \mathbf{x}) = \int_{\underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t}} \underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\partial_0} h(t, \mathbf{x}) + \int_{\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t}} h(t, \mathbf{x}) \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{x}) \cdot \left( \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) \right) . \quad (2.137)$$

Für ein Vektorfeld  $\mathbf{h}$  gilt analog

$$\underset{\mathcal{A}}{\partial_0} \int_{\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathcal{A}_t)}} \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{h}}(t, \mathbf{x}) = \int_{\underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t}} \underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\partial_0} \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{h}}(t, \mathbf{x}) + \int_{\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t}} \left( \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{h}}(t, \mathbf{x}) \otimes \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left( \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) \right) . \quad (2.138)$$

Damit beschreibt das REYNOLDS-Transporttheorem in beiden Fällen die Aufteilung der Zeirate des Integrals einer Größe auf einem zeitveränderlichen Gebiet in zwei Anteile. Der erste Anteil berücksichtigt die Änderung der Größe innerhalb des zeitveränderlichen Gebietes. Der zweite Anteil betrifft den Fluss der betreffenden Größe über den Rand des zeitveränderlichen Gebietes. Mithilfe dieses Theorems können sich auf materielle Gebiete beziehende Gleichungen in sich auf räumliche Punkte beziehende Gleichungen umformuliert werden.

Analog lässt sich das sogenannte LEIBNIZ-Transporttheorem für die Abbildung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}$  und ein Skalarfeld  $h$

$$\underset{\mathcal{R}}{\partial_0} \int_{\underset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}_1(t, \mathcal{R}_t)}} h(t, \mathbf{x}) = \int_{\underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t}} \underset{\mathcal{M}\mathcal{M}}{\partial_0} h(t, \mathbf{x}) + \int_{\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t}} h(t, \mathbf{x}) \left( \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left( \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) \right) \quad (2.139)$$

<sup>35</sup> Eine Herleitung mit der Angabe von Zwischenschritten ist in Abschnitt A.6 gegeben.

bzw. ein Vektorfeld  $\mathbf{h}$

$$\partial_0 \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{M}} \partial_0 \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}^{\mathcal{MR}}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left( \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \right) \quad (2.140)$$

herleiten. Das Transporttheorem für die Abbildung  $\phi$  ist in der Herleitung etwas komplizierter, da das Definitionsgebiet der betrachteten Feldgröße als Bild der Komposition  $\phi \circ \phi$  betrachtet werden muss (vgl. Gl. (2.135)). Weil dieses Theorem die Dekomposition der Bewegung sowie alle Teilbewegungen enthält, wird es in der Literatur auch verallgemeinertes REYNOLDS-Theorem genannt. Es lautet<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} \partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{M}} h(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathcal{X} \in \mathcal{R}_t} \partial_0 \left( J^{\mathcal{MR}}(t, \mathcal{X}) h(t, \mathcal{X}) \right) + \dots \\ &\dots + \int_{\mathcal{X} \in \partial \mathcal{R}_t} \left( J^{\mathcal{MR}}(t, \mathcal{X}) h(t, \mathcal{X}) \mathbf{v}^{\mathcal{RA}}(t, \mathcal{X}) \cdot \left( \mathbf{n}(t, \mathcal{X}) \right) \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.141)$$

Das verallgemeinerte REYNOLDS-Theorem geht in das klassische REYNOLDS-Theorem nach Gl. (2.137) über, wenn  $\phi = \phi$  gesetzt wird. Mithilfe der Definitionen der konvektiven Geschwindigkeit gemäß Gl. (2.69) und des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach Gl. (2.94)

$$\mathbf{v}^{\mathcal{RA}} = \left( \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{c} \quad (2.142)$$

sowie des Zusammenhanges

$$J^{\mathcal{MR}}(t, \mathcal{X}) h(t, \mathcal{X}) \mathbf{v}^{\mathcal{RA}}(t, \mathcal{X}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathcal{X}) = h(t, \mathcal{X}) \mathbf{c}^{\mathcal{MA}}(t, \mathcal{X}) \cdot \left( J^{\mathcal{MR}}(t, \mathcal{X}) \mathbf{F}^*(t, \mathcal{X}) \mathbf{n}(t, \mathcal{X}) \right) \quad (2.143)$$

$$= h(t, \mathcal{X}) \mathbf{c}^{\mathcal{MA}}(t, \mathcal{X}) \cdot \left( \text{cof} \left[ \mathbf{F}^{\mathcal{MR}}(t, \mathcal{X}) \right] \mathbf{n}(t, \mathcal{X}) \right) \quad (2.144)$$

lässt sich das verallgemeinerte REYNOLDS-Theorem für ein Skalarfeld  $h$  in

$$\partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{M}} h(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{M}} \partial_0 h(t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} h(t, \mathbf{x}) \mathbf{c}^{\mathcal{MA}}(t, \mathbf{x}) \cdot \left( \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \right) \quad (2.145)$$

bzw. für ein Vektorfeld  $\mathbf{h}$  in

$$\partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{M}} \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{M}} \partial_0 \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{c}^{\mathcal{MA}}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \left( \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \right) \quad (2.146)$$

umschreiben.<sup>37</sup>

<sup>36</sup> Eine Herleitung mit der Angabe von Zwischenschritten ist in Abschnitt A.6 gegeben.

<sup>37</sup> Mit dem Hinweis, dass das dyadische Produkt  $\otimes$  für ein Skalarfeld  $h$  in die skalare Multiplikation übergehe, wird in den folgenden Abschnitten nur noch die Darstellung für ein Vektorfeld  $\mathbf{h}$  angegeben.



## 2.5.2 Allgemeine Struktur von Bilanzgleichungen

Eine Bilanzgleichung stellt Flüsse und Quellen einer Größe gegenüber, für die ein Erhaltungssatz existiert. Da es mehrere solcher Erhaltungsgrößen gibt, lohnt es sich, die allgemeine Struktur solcher Bilanzgleichungen näher zu untersuchen.

Mit dem Skalarfeld (bzw. Vektorfeld)  $\alpha$  einer Erhaltungsgröße, dem Skalarfeld (bzw. Vektorfeld)  $\beta$  als Quelle, dem Vektorfeld (bzw. Tensorfeld)  $\gamma$  als Fluss kann eine allgemeine Bilanzgleichung als

$$0 = \partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{M}} \alpha(t, \mathbf{x}) - \int_{\mathcal{M}} \beta(t, \mathbf{x}) - \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \gamma \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.147)$$

formuliert werden. Diese lässt sich mithilfe des klassischen Transporttheorems in

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \phi_1^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathcal{A}_t)} \left( \partial_0 \alpha - \beta \right) (t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \left( \alpha \otimes \mathbf{v} - \gamma \right) \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.148)$$

umformen.<sup>38</sup> Hierbei beschreibt das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \alpha \otimes \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (2.149)$$

den Fluss der betrachteten Größe  $\alpha$  über den Rand des zeitlich veränderlichen Gebietes  $\mathcal{M}_t$ . Es folgt mit dem Satz von GAUSS

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \phi_1^{\mathcal{M}\mathcal{A}}(t, \mathcal{A}_t)} \left( \partial_0 \alpha - \beta + \text{Div} \left( \alpha \otimes \mathbf{v} - \gamma \right) \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.150)$$

Mit dem umgeformten LEIBNIZ-Transporttheorem für die Abbildung  $\phi^{\mathcal{M}\mathcal{R}}$  nach Gl. (2.140)

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \partial_0 \alpha (t, \mathbf{x}) = \partial_0 \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{M}} \alpha(t, \mathbf{x}) - \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \left( \alpha \otimes \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.151)$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \partial_0 \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ J \\ \mathcal{R} \end{matrix} \alpha \right) (t, \chi) - \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \left( \alpha \otimes \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.152)$$

$$= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ J^{-1} \partial_0 \\ \mathcal{R} \end{matrix} \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ J \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \end{matrix} \alpha \right) \right) (t, \mathbf{x}) - \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \left( \alpha \otimes \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.153)$$

ergibt sich für die Bilanzgleichung unter Zuhilfenahme der Definition der konvektiven Geschwindigkeit  $\mathbf{c}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}$  aus Gl. (2.69)

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \phi_1^{\mathcal{M}\mathcal{R}}(t, \mathcal{R}_t)} \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ J^{-1} \partial_0 \\ \mathcal{R} \end{matrix} \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ J \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \end{matrix} \alpha \right) - \beta \right) (t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} \left( \left( \alpha \otimes \mathbf{c} - \gamma \right) \cdot \mathbf{n} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.154)$$

<sup>38</sup> Mit der Erklärung aus Fußnote 37 werden die Gleichungen in diesem Abschnitt für ein Vektorfeld  $\alpha$  dargestellt.

Erhaltungsgröße	$\alpha$ $\mathcal{M}$	$\beta$ $\mathcal{M}$	$\gamma$ $\mathcal{M}$
Masse	$\rho$ $\mathcal{M}$	0	0
Impuls	$\rho \mathbf{v}$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$\rho \mathbf{f}$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$\boldsymbol{\sigma}$ $\mathcal{M}$
Drehimpuls	$\text{id}_1 \times \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \end{pmatrix}$ $\mathbb{T} \times \mathcal{M}$	$\text{id}_1 \times \begin{pmatrix} \rho \mathbf{f} \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \end{pmatrix}$ $\mathbb{T} \times \mathcal{M}$	$\text{id}_1 \times \boldsymbol{\sigma}$ $\mathbb{T} \times \mathcal{M}$
Energie	$\rho e + \frac{1}{2} \rho \left\  \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \right\ ^2$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$\rho r_h + \rho \mathbf{f} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix}$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$\boldsymbol{\sigma}^T \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} - \mathbf{q}$ $\mathcal{M}$
Entropie	$\rho \eta$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$\rho r_h / \theta$ $\mathcal{M}\mathcal{M}$	$-\mathbf{q} / \theta$ $\mathcal{M}$

Tabelle 2.3: Übersicht zu den Substitutionen<sup>40</sup> für die Felder  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  der allgemeinen Bilanzgleichung (nach [SCOVAZZI & HUGHES 2007])

bzw. mit dem Satz von GAUSS

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \phi_1(t, \mathcal{R}_t)} \left( J^{-1} \partial_0 \begin{pmatrix} J \alpha \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \end{pmatrix} - \beta + \text{Div} \begin{pmatrix} \alpha \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} - \gamma \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \right) (t, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.155)$$

Diese Form der allgemeinen Bilanzgleichung lässt sich nun auf die Referenzplatzierung beziehen

$$0 = \int_{\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \begin{pmatrix} J \alpha \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} - J \begin{pmatrix} \beta \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} \right) (t, \boldsymbol{\chi}) + \int_{\boldsymbol{\chi} \in \partial \mathcal{R}_t} \left( \left( \alpha \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} - \gamma \right) \cdot \left( \text{cof} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} \mathbf{n} \right) \right) (t, \boldsymbol{\chi}) \quad (2.156)$$

bzw. mit dem Satz von GAUSS als

$$0 = \int_{\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \begin{pmatrix} J \alpha \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} - J \begin{pmatrix} \beta \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} + \text{Div} \left( \left( \alpha \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathcal{R} \end{pmatrix} - \gamma \right) \text{cof} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} \right) \right) (t, \boldsymbol{\chi}) \quad (2.157)$$

schreiben. Dieses Ergebnis wird auch erhalten, wenn das verallgemeinerte Transporttheorem auf Gl. (2.147) angewendet wird. Mit den in Tab. 2.3 angegebenen Substitutionen lässt sich die allgemeine Bilanzgleichung im Folgenden für die einzelnen Erhaltungsgrößen anpassen. Die sich unmittelbar ergebenden konservativen Formen der Bilanzen<sup>39</sup> sind für eine klassische Beschreibung in referentieller oder räumlicher Darstellung in der Literatur zu finden (s. z. B. [BELYTSCHKO et al. 2001]). Für die Darstellung in einer ALE-Beschreibung sei u. a. auch auf [DONEA & HUERTA 2003] und [WALL 1999] verwiesen.

<sup>39</sup> Die konservative Form der Erhaltungsgleichungen bezeichnet in der Literatur (vor allem in der Fluidodynamik) die nichtausdifferenzierte Form der Erhaltungsgleichungen. Im Gegensatz dazu tragen die ausdifferenzierten Erhaltungsgleichungen, die ggf. mithilfe der Kontinuitätsgleichung umgeformt wurden, die Bezeichnung advective Erhaltungsgleichungen.

<sup>40</sup> Das Kreuzprodukt  $\times$  zwischen Abbildungen sei argumentweise definiert.

### 2.5.3 Massebilanz

Die in der Massebilanz benötigte Feldgröße ist die Dichte  $\rho$ . Diese kann basierend auf dem STIELTJES-Integralbegriff eingeführt werden (vgl. [FISCHER & STEPHAN 1972, S. 24]), so wie in der Maß- und Integrationstheorie anschaulich auch von einer Dichte bezüglich eines Maßes gesprochen wird. In diesem Fall wird eine monoton wachsende positive Funktion als Maß definiert, das in Abhängigkeit der Lage eines Punktes die Masse angibt. Weiterhin lässt sich aufgrund der angenommenen kontinuierlichen Masseverteilung (s. Abschnitt A.3) eine Funktion  $\rho$  finden, so dass das Maß  $m$ , welches die Masse misst, aus dem Maß  $V$ , welches das Volumen misst, hervorgeht. In den Worten der Maß- und Integrationstheorie heißt  $\rho$  dann eine  $V$ -Dichte von  $m$ .

Mit den Größen aus Tab. 2.3 folgt zunächst für die (konservative Form der) Masseerhaltung

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathcal{R}} \\ J \\ \rho \end{pmatrix} + \text{Div}_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathcal{C}^{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}} \\ \text{cof}[\mathbf{F}] \end{pmatrix} \right) (t, \chi) \quad (2.158)$$

oder mit der Definition der Geschwindigkeit  $\overset{\mathcal{R}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}}$  (Gl. (2.69))

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathcal{R}} \\ J \\ \rho \end{pmatrix} + \text{Div}_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \rho \\ J \\ \overset{\mathcal{R}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \right) (t, \chi) \quad (2.159)$$

Bei dieser Darstellung existieren keine Quellen für die Masse, da alle im Rahmen dieser Arbeit behandelten Systeme mit nichtmateriellen Randbedingungen so betrachtet werden, dass sie – abgesehen von einer Masseänderung infolge einer Gebietsveränderung – Systeme invarianter Masse sind. Zum Studium der Dynamik von Systemen mit veränderlicher Masse sei z. B. auf [CVETICANIN 1998] verwiesen.

Ausgehend von Gl. (2.158) und mithilfe der PIOLA-Identität aus Gl. (2.102) lässt sich die advektive Form der Masseerhaltung als<sup>41</sup>

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( J \partial_0 \rho + J \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{R}^{\mathcal{A}}}}{\mathbf{v}} \partial_1 \rho + \rho \text{cof}[\mathbf{F}] \partial_1 \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}} \right) (t, \chi) \quad (2.160)$$

angeben. Bei einer Beschreibung in der Momentanplatzierung ergibt sich

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \partial_0 \rho + \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{c}} \partial_1 \rho + \rho \partial_1 \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.161)$$

was u. a. auch in [LINDER 2003, S. 35] oder [DONEA et al. 2004, S. 7] zu finden ist.

### 2.5.4 Impulsbilanz

Mit den geeigneten Substitutionen aus Tab. 2.3 lautet die konservative Form der Impulsbilanzgleichung

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathcal{R}} \\ J \\ \rho \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} - J \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}}{\rho} \mathbf{f} + \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \left( \begin{pmatrix} \rho \\ \overset{\mathcal{M}^{\mathcal{A}}}{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathcal{A}} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} - \overset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \text{cof}[\mathbf{F}] \right) \right) (t, \chi) \quad (2.162)$$

<sup>41</sup> Eine Herleitung mit der Angabe von Zwischenschritten ist in Abschnitt A.6 gegeben.

Diese Gleichung kann mithilfe der Definition der Geschwindigkeit  $\overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}}$  gemäß Gl. (2.69) in

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) - \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^R}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{f}} + \text{Div} \left( \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \otimes \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} - \overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{P}} \right) \right) (t, \chi) \quad (2.163)$$

umformuliert werden. Die Überführung der konservativen in die advective Form gelingt mit mehrfachem Einsatz der Produktregel sowie der Massebilanz<sup>42</sup>

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \partial_0 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} - \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^R}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{f}} + \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{c}} \text{cof}[\overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{F}}] - \text{Div} \left( \overset{\mathcal{M}^R}{\boldsymbol{\sigma}} \text{cof}[\overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{F}}] \right) \right) (t, \chi) \quad (2.164)$$

Daraus lässt sich unter Verwendung der PIOLA-Transformation die Darstellung

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \left( \partial_0 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} - \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{f}} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} \right) - \text{Div} \overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{P}} \right) (t, \chi) \quad (2.165)$$

bzw. in der momentanen Platzierung die Darstellung

$$0 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \left( \partial_0 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} - \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{f}} + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{c}} \right) - \text{Div} \overset{\mathcal{M}^A}{\boldsymbol{\sigma}} \right) (t, \mathbf{x}) \quad (2.166)$$

gewinnen (s. auch [LINDER 2003, S. 35]).

### 2.5.5 Drallbilanz

Mit den geeigneten Substitutionen aus Tab. 2.3 kann analog der Impulsbilanz auch die Drallbilanz<sup>43</sup> formuliert werden. Mit dem Abstandsvektor

$$\overset{\mathcal{M}^R}{r}(t, \chi) := \overset{\mathcal{M}^R}{\phi}_1(t, \chi) - \chi_0 \quad \text{mit} \quad \chi_0 \in \mathcal{R}_t \quad (2.167)$$

sowie der Definition des Kreuzproduktes zwischen einem Tensor erster Stufe (Vektor) und einem Tensor zweiter Stufe

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} \quad (2.168)$$

folgt für die Drallbilanzgleichung

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^R}{r} \times \left( \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) \right) - \overset{\mathcal{M}^R}{J} \overset{\mathcal{M}^R}{r} \times \left( \overset{\mathcal{M}^R}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{f}} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \text{Div} \left( \left( \left( \overset{\mathcal{M}^R}{r} \times \left( \overset{\mathcal{M}^A}{\rho} \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{v}} \right) \right) \otimes \overset{\mathcal{M}^A}{\mathbf{c}} - \overset{\mathcal{M}^R}{r} \times \overset{\mathcal{M}^A}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \text{cof}[\overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{F}}] \right) \right) (t, \chi) \quad (2.169)$$

Mithilfe der Impulsbilanz lässt sich aus der Drallbilanz herleiten, dass

$$\overset{\mathcal{M}^A}{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \overset{\mathcal{M}^A}{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.170)$$

gilt, d. h. der CAUCHY-Spannungstensor ist symmetrisch<sup>44</sup> (s. auch [HAUPT 2010, S. 99]).

<sup>42</sup> Eine Herleitung mit der Angabe von Zwischenschritten ist in Abschnitt A.6 gegeben.

<sup>43</sup> Die Drallbilanz wird auch als Drehimpulsbilanz bezeichnet.

<sup>44</sup> Eine kurze Untersuchung zur Symmetrie von Tensoren ist in Abschnitt A.7 zu finden.

### 2.5.6 Entropie- und Energiebilanz

Mit den passenden Ersetzungen aus Tab. 2.3 und der Abkürzung

$$e_{\mathcal{R}}^{\text{ges}} := e + \frac{1}{2} \left\| \frac{{}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\mathbf{v}}{\mathcal{R}} \right\|^2 \quad (2.171)$$

für die spezifische Gesamtenergie  $e_{\text{ges}}$ , welche sich aus der spezifischen inneren Energie  $e$  und der Geschwindigkeit  ${}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\mathbf{v}$  zusammensetzt, lässt sich die konservative Form der Energiebilanz als

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} J \rho e_{\text{ges}} \right) - \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} J \rho \left( r_{\text{h}} + \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{f} \cdot \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{v} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \text{Div} \left( \left( \begin{matrix} \rho e_{\text{ges}} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{c} - \begin{matrix} \sigma^+ \\ \mathcal{M} \end{matrix} \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right) \text{cof} \left[ \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{F} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (2.172)$$

formulieren. Dabei bedingen die Einführung des spezifischen Wärmeflusses  $\mathbf{q}$  und der spezifischen Wärmequelle  $r_{\text{h}}$  die Einführung passender konstitutiver Materialbeziehungen.

Analog entsteht aus der allgemeinen Bilanzgleichung (Gl. (2.157)) die Entropiebilanzgleichung in konservativer Form

$$0 \leq \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} J \rho \eta \right) - \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} J \rho r_{\text{h}} / \theta + \text{Div} \left( \left( \begin{matrix} \rho \eta \\ \mathcal{R}\mathcal{R} \end{matrix} \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{A} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{c} + \begin{matrix} \mathbf{q} \\ \mathcal{M} \end{matrix} / \theta \right) \text{cof} \left[ \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ \mathcal{R} \end{matrix} \mathbf{F} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (2.173)$$

Sowohl die Energiebilanz als auch die Entropiebilanz lassen sich auch in die advective Form überführen. Da diese in den nachfolgenden Betrachtungen jedoch nicht benötigt werden, sei hierfür auf [SCOVAZZI & HUGHES 2007, S. 39] verwiesen.

### 2.5.7 Lokale Form der Bilanzgleichungen

Die aufgestellten Bilanzgleichungen sind als nichtlineare Funktionale von integraler Form. Sie beziehen sich ursprünglich auf materielle Punkte des Körpers und demzufolge auf Elemente der Mannigfaltigkeit des materiellen Körpers. Über die in Abschnitt A.4 angemerkte Identifizierung der materiellen Punkte mit den Positionsvektoren in der jeweiligen Platzierung wurde eine Beschreibung auf der Mannigfaltigkeit umgangen. Damit das dadurch formulierte Problem lösbar ist, muss es die HADAMARD-Forderungen nach Eindeutigkeit, Existenz und Stetigkeit erfüllen. Dabei lässt sich auf Mannigfaltigkeiten vor allem die Stetigkeit einer Lösung auf der betreffenden Mannigfaltigkeit nur sehr schwierig zeigen.

Einfacher sind die von HADAMARD geforderten Eigenschaften des Problems zu überprüfen, wenn die schwache Formulierung unter Voraussetzung einer HAUSDORFFSchen<sup>45</sup> und stetig-differenzierbaren Mannigfaltigkeit soweit kontrahiert wird, dass sie in einem einzelnen Punkt gilt (Lokalität). Da die genannten Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit des materiellen Körpers im Rahmen der Kontinuumsmechanik erfüllt sind, darf die Kontraktion durchgeführt werden.

Mit dem Übergang der Beschreibung von Mannigfaltigkeiten zu Platzierungen und der damit verbundenen Identifizierung von materiellen Punkten mit Positionsvektoren, dürfen demnach die in

<sup>45</sup> HAUSDORFFSchen Mannigfaltigkeiten besitzen die HAUSDORFF-Trennungseigenschaft, d. h. um zwei unterschiedliche Punkte lassen sich stets zwei disjunkte Umgebungen finden.

den vorangestellten Abschnitten aufgestellten Bilanzgleichungen lokal formuliert werden. Rein formal bedeutet die beschriebene Lokalisierung das Weglassen der Integralsymbole, da fortan die Gültigkeit der Bilanzgleichungen in einem einzelnen Punkt vorausgesetzt werden kann.

## 2.6 Konstitutive Beziehungen

Die konstitutiven Beziehungen (auch Materialgleichungen) vermitteln zwischen Dehnungstensor und Spannungstensor und charakterisieren das Materialverhalten. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Materialverhalten angenommen, welches den folgenden Anforderungen genüge:

- Der materielle Körper sei stofflich homogen, d. h. er zeige in allen materiellen Punkten dasselbe Materialverhalten.
- Das Material sei isotrop (richtungsunabhängig).
- Das Material verhalte sich linear und (hyper-)elastisch. Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen linear ist und der Entlastungspfad mit dem Belastungspfad übereinstimmt. Außerdem nimmt unter dieser Annahme die Entropie nicht zu.<sup>46</sup>

Bevor die konkreten Beziehungen zwischen Dehnungs- und Spannungstensoren formuliert werden, wird untersucht, auf welchen Räumen diese Tensoren definiert sind und welche Form ein linearer Zusammenhang zwischen ihnen haben muss. Wie in den vorhergehenden Abschnitten dargestellt, ist der Dehnungstensor als Abbildung wie folgt definiert

$$\underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{E}}} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}} \quad . \quad (2.174)$$

Er lässt sich damit auch als Element eines Tensorproduktraumes identifizieren

$$\underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{E}}} \in (\mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}}) \quad . \quad (2.175)$$

Ähnliches gilt für den Spannungstensor. Er ist als

$$\underset{\mathcal{A}}{\mathbf{S}} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}} \quad (2.176)$$

definiert und kann auf analoge Weise einem passenden Tensorproduktraum zugeordnet werden

$$\underset{\mathcal{A}}{\mathbf{S}} \in (\mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}}) \quad . \quad (2.177)$$

Im Fall des linear elastischen Materialverhaltens ist ein linearer Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen in der Form

$$\underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{E}}} := \underset{\mathcal{A}}{\mathfrak{C}}^{-1}(\underset{\mathcal{A}}{\mathbf{S}}) \quad (2.178)$$

gesucht. Dabei werden die Tensoren vierter Stufe  $\mathfrak{C}^{-1}$  bzw.  $\mathfrak{C}$  als Nachgiebigkeitstensor bzw. Elastizitätstensor bezeichnet. Mit den Vorüberlegungen zu den Definitionen von Dehnungs- und Spannungstensor ergibt sich für die Definition des Nachgiebigkeitstensors

$$\underset{\mathcal{A}}{\mathfrak{C}}^{-1} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{A}_{\underline{t}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}^*}\mathcal{A}_{\underline{t}} \quad , \quad (2.179)$$

<sup>46</sup> Für weiterführende Hinweise auch zu anderen Materialien s. u. a. [BETTEN 2001] und [HAUPT 2010].

womit er als Element des Raumes

$$\underline{\mathbf{c}}^{-1} \in (\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}) \quad (2.180)$$

identifizierbar ist. Der konkrete Aufbau der konstitutiven Beziehungen lässt sich thermodynamisch begründen (s. hierzu [HAUPT 2010]) und im Fall der Hyperelastizität kann ein elastisches Potential als Funktion der elastischen Energie  $E_{\text{elast}}$  angegeben werden (s. [PARISCH 2003, S. 137–140]). Diese wird für ein Volumen aus der dehnungsabhängigen Energiedichte  $w_{\text{elast}}$  bestimmt

$$E_{\text{elast}} := \int_{\mathcal{A}_{\underline{t}}} w_{\text{elast}} \left( \begin{matrix} \mathcal{M} \mathcal{A} \\ \mathbf{E} \\ \mathcal{A} \end{matrix} \right) . \quad (2.181)$$

Die Energiedichte  $w_{\text{elast}}$  ihrerseits ist mit

$$w_{\text{elast}} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.182)$$

ein Funktional, dessen Definitionsbereich durch den Wertebereich des Dehnungstensors vorge-schrieben ist. Aus der Energiedichte  $w_{\text{elast}}$  lässt sich durch Ableitung der Spannungstensor bestimmen.<sup>47</sup>

Da die Energiedichte aufgrund der Isotropie spur- sowie basisunabhängig<sup>48</sup> sein soll, reduziert sich ihre Darstellung auf Elemente der Funktionenfamilie<sup>49</sup>

$$\left( \text{tr} \begin{bmatrix} \mathcal{M} \mathcal{A}^k \\ \mathbf{E} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} \right)_{k \in \mathbb{N}} . \quad (2.187)$$

Insbesondere lässt sich zeigen (vgl. [BERTRAM 1989, S. 225]), dass die Form

$$w_{\text{elast}} \left( \begin{matrix} \mathcal{M} \mathcal{A} \\ \mathbf{E} \\ \mathcal{A} \end{matrix} \right) := \frac{1}{2} \lambda \left( \text{tr} \begin{bmatrix} \mathcal{M} \mathcal{A} \\ \mathbf{E} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} \right)^2 + \mu \text{tr} \begin{bmatrix} \mathcal{M} \mathcal{A}^2 \\ \mathbf{E} \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

<sup>47</sup> Auch wenn dies nicht offensichtlich ist, so sind die Ableitung der Energiedichte  $w_{\text{elast}}$  und der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  als Elemente desselben Raumes identifizierbar. Die Ableitung der Energiedichte ist aus demselben Raum wie die Energiedichte selbst

$$w_{\text{elast}} \in (\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}})^* . \quad (2.183)$$

Mit der Identifizierung

$$(\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}})^* \equiv \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}} \mathcal{A}_{\underline{t}} \quad (2.184)$$

folgt die in Gl. (2.177) angegebene Beziehung.

<sup>48</sup> Daraus ergibt sich die Invarianz gegenüber allen Rotationen.

<sup>49</sup> Die Spurabbildung  $\text{tr}$  ist allgemein als

$$\text{tr} : \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.185)$$

mit

$$\text{tr} [\mathbf{A}] := \frac{[\mathbf{A}(\mathbf{G}^*_1), \mathbf{G}^*_2, \mathbf{G}^*_3]_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}} + [\mathbf{G}^*_1, \mathbf{A}(\mathbf{G}^*_2), \mathbf{G}^*_3]_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}} + [\mathbf{G}^*_1, \mathbf{G}^*_2, \mathbf{A}(\mathbf{G}^*_3)]_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}}}{[\mathbf{G}^*_1, \mathbf{G}^*_2, \mathbf{G}^*_3]_{\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}}} \quad (2.186)$$

definiert, wobei  $[\square, \square, \square]$  das Spatprodukt und  $\mathbf{G}^*_i$  eine Basis des Vektorraumes  $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}}$  bezeichnen. In der kanonischen Basis ist die Spur eines Tensors zweiter Stufe identisch der Matrixspur der Maßzahlenmatrix.



die geforderten Symmetrieeigenschaften erfüllt. Sie enthält die LAMÉ-Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  die durch

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.189)$$

mit den Ingenieurparametern Elastizitätsmodul  $E$ , Schubmodul  $G$  und Querdehnzahl  $\nu$  in Verbindung gebracht werden können. Als Ableitung ergibt sich für den Spannungstensor<sup>50</sup>

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{MA}}(\mathbf{E}_{\mathcal{A}}) = \lambda \operatorname{tr}^* \circ \operatorname{tr} \left[ \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \right] + 2\mu \mathbf{E}_{\mathcal{A}} \quad (2.192)$$

und damit für den Elastizitätstensor

$$\underline{\mathfrak{C}}_{\mathcal{A}}(\square) = \lambda \operatorname{tr}^* \circ \operatorname{tr}(\square) + 2\mu \square \quad (2.193)$$

bzw. den Nachgiebigkeitstensor

$$\underline{\mathfrak{C}}_{\mathcal{A}}^{-1}(\square) = \frac{1}{2\mu} \square - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \operatorname{tr}^* \circ \operatorname{tr}(\square) \quad . \quad (2.194)$$

Damit ist eine konstitutive Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungstensor eingeführt (vgl. [PICARD 2009]).

---

<sup>50</sup> Die zur Spurabbildung adjungierte Abbildung  $\operatorname{tr}^*$  ist hierbei als die Abbildung

$$\operatorname{tr}^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{X}}^* \mathcal{A}_{\underline{t}} \quad (2.190)$$

definiert. In der kanonischen Basis entspricht ihre Matrixdarstellung gerade

$$\left[ \operatorname{tr}^*[h] \right] := \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix} \quad . \quad (2.191)$$

## 2.7 Anfangsbedingungen und Randbedingungen

### 2.7.1 Allgemeines

Aus den lokalisierten Bilanzgleichungen entsteht ein Differentialgleichungssystem, dessen Lösungsschar an vorhandene Problemstellungen anzupassen ist. Hierbei müssen in Form der Anfangsbedingungen die Position und die Geschwindigkeit der materiellen Partikel des Körpers zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  (Beginn der Bewegung<sup>51</sup>) vorgegeben werden. In der materiellen Beschreibung können diese Felder als

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_{\underline{t}}} {}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\phi(t_0, \mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_{\underline{t}}} {}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\mathbf{v}(t_0, \mathbf{X}) \quad (2.195)$$

angegeben werden. Alternativ können mit der Definition gemäß Gl. (2.29) auch die Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten als Anfangsbedingungen festgeschrieben werden

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_{\underline{t}}} {}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\mathbf{u}(t_0, \mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_{\underline{t}}} \partial_0 {}^{\mathcal{M}\mathcal{A}}\mathbf{u}(t_0, \mathbf{X}) \quad . \quad (2.196)$$

Bei Berücksichtigung der Dekomposition der Bewegung in eine zu jedem Zeitpunkt vorgegebene Bewegung  $\overset{\mathcal{R}\mathcal{A}}{\phi}$  und eine unbekannte Bewegung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi}$  (ALE-Kinematik) genügt es zusätzlich, die Felder

$$\bigwedge_{\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{R}_{t_0}} {}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}\mathbf{u}(t_0, \boldsymbol{\chi}) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{\boldsymbol{\chi} \in \mathcal{R}_{t_0}} \partial_0 {}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}\mathbf{u}(t_0, \boldsymbol{\chi}) \quad (2.197)$$

als Anfangsbedingungen festzulegen.<sup>52</sup>

Neben den Anfangsbedingungen spielen die Randbedingungen eine entscheidende Rolle bei der Eingrenzung der möglicherweise existierenden Lösungsschar der Feldgleichungen auf eine eindeutige Lösung. Es werden drei Arten von Randbedingungen unterschieden. Randbedingungen schreiben den Bewegungszustand (Verschiebungsrandbedingung), den Spannungszustand (Spannungsrandbedingung) oder eine Mischung beider Zustände (gemischte Randbedingung) der materiellen Punkte des Körperandes vor. Für die Existenz einer Lösung des Anfangswert-Randwert-Problems der Kontinuumsmechanik ist es notwendig, dass auf dem gesamten Rand Randbedingungen vorgegeben werden. Insbesondere müssen die Ränder der drei unterschiedlichen Randbedingungen eine Zerlegung des Randes in disjunkte Teilmengen des Randes des materiellen Körpers bilden.<sup>53</sup>

Die im Folgenden näher beschriebenen Typen von Randbedingungen werden von den nicht vorgegebenen Feldgrößen mit einem Querstrich unterschieden. Aus Konsistenzgründen dürfen sich

<sup>51</sup> Der Zeitpunkt des Beginns der Bewegung  $t_0$  und der Zeitpunkt der gewählten Ausgangsplatzierung  $\underline{t}$  werden häufig gleich gewählt.

<sup>52</sup> Anfangs- und Randbedingungen in Abhängigkeit von Beschleunigungen werden auf dem Gebiet der Fluid-Struktur-Interaktion bei sog. Added-Mass-Ansätzen implizit vorgegeben (vgl. [WALL 1999]).

<sup>53</sup> Solange sich vorgegebene Randbedingungen aus physikalischer Sicht nicht widersprechen, dürfen in Randpunkten auch gleichzeitig Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen vorgegeben werden. Zum Beispiel können bei Kontaktproblemen an starren Wänden in Kontaktflächennormalenrichtung Verschiebungen und in Kontaktflächentangentenrichtung Spannungen vorgegeben werden (s. [HAUPT 2010, S. 102]). Solche Randbedingungen sind nicht mit den in der Literatur z. T. ebenfalls als gemischte Randbedingungen bezeichneten ROBIN-Randbedingungen zu verwechseln.

Rand- und Anfangsbedingungen nicht widersprechen, d. h. die Randbedingungen müssen die Anfangsbedingungen erfüllen bzw. umgekehrt. Der Übersichtlichkeit wegen werden an dieser Stelle lediglich Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen näher erläutert. Für die Darstellung von gemischten Randbedingungen (auch ROBIN-Randbedingungen) sei auf [KARL 2011, S. 48] verwiesen.

### 2.7.2 Verschiebungsrandbedingungen

Verschiebungsrandbedingungen<sup>54</sup> können direkt durch Vorgabe der Bewegung bzw. der Verschiebung von Randpunkten  $\mathbf{X} \in (\partial\mathcal{A}_t)_u \subseteq \partial\mathcal{A}_t$  festgelegt werden

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in (\partial\mathcal{A}_t)_u} \bigwedge_{t \in \mathbb{T}} \overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) := \underset{\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) \quad \text{bzw.} \quad (2.198)$$

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in (\partial\mathcal{A}_t)_u} \bigwedge_{t \in \mathbb{T}} \overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\mathbf{u}}(t, \mathbf{X}) := \underset{\mathcal{A}}{\mathbf{u}}(t, \mathbf{X}) \quad . \quad (2.199)$$

Werden Verschiebungsrandbedingungen zu null gewählt, so heißen sie homogene Verschiebungsrandbedingungen.

### 2.7.3 Spannungsrandbedingungen

Spannungsrandbedingungen<sup>55</sup> können sehr gut in der Momentanplatzierung formuliert werden, da sie Oberflächenkräfte vorschreiben, die natürlicherweise zum aktuellen Zeitpunkt wirken. Der zugehörige Rand wird mit  $(\partial\mathcal{M}_t)_t \subseteq \partial\mathcal{M}_t$  bezeichnet. Die Spannungsrandbedingungen lauten dann

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in (\partial\mathcal{M}_t)_t} \bigwedge_{t \in \mathbb{T}} \overset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}}(t, \mathbf{x}) \underset{\mathcal{M}}{[\mathbf{n}(t, \mathbf{x})]} := \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{t}}(t, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.200)$$

Um diese von dem unbekanntem Rand der Momentanplatzierung abhängige Formulierung in die Ausgangsplatzierung zu überführen, wird die Definition des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\mathbf{P}}$  verwendet

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in (\partial\mathcal{A}_t)_t} \bigwedge_{t \in \mathbb{T}} \frac{1}{J \left\| \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\mathbf{F}} \\ \underset{\mathcal{A}}{\mathbf{n}}(t, \mathbf{X}) \end{pmatrix}^{-\top} \right\|_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M}_t}} \overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\mathbf{P}}(t, \mathbf{X}) \underset{\mathcal{A}}{[\mathbf{n}(t, \mathbf{X})]} := \underset{\mathcal{A}}{\mathbf{t}}(t, \mathbf{X}) \quad , \quad (2.201)$$

(s. [HAUPT 2010, S. 104]). Für kleine Verformungen wird die üblicherweise verwendete Spannungsrandbedingung, formuliert in der Ausgangsplatzierung, erhalten (s. [DAMME 2006, S. 63])

$$\bigwedge_{\mathbf{X} \in (\partial\mathcal{A}_t)_t} \bigwedge_{t \in \mathbb{T}} \overset{\mathcal{M}, \mathcal{A}}{\mathbf{P}}(t, \mathbf{X}) \underset{\mathcal{A}}{[\mathbf{n}(t, \mathbf{X})]} := \underset{\mathcal{A}}{\mathbf{t}}(t, \mathbf{X}) \quad , \quad (2.202)$$

welche auch im Rahmen dieser Arbeit Anwendung findet.

<sup>54</sup> Verschiebungsrandbedingungen werden auch als geometrische Randbedingungen, DIRICHLET-Randbedingungen oder Randbedingungen erster Art bezeichnet.

<sup>55</sup> Spannungsrandbedingungen werden auch als dynamische Randbedingungen, NEUMANN-Randbedingungen oder Randbedingungen zweiter Art bezeichnet.

### 2.7.4 Beschreibung von nichtmateriellen Randbedingungen mithilfe einer ALE-Kinematik

Wird die Bewegung gemäß der ALE-Kinematik in zwei Teilbewegungen zerlegt, so ergibt sich, neben der Unterscheidung nach Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen, für die Definition von Randbedingungen die zusätzliche Unterscheidung zwischen materiellen, räumlichen und referentiellen Randbedingungen. Die Erläuterung der unterschiedlichen Typen von Randbedingungen erfolgt anhand der Bewegung einer elastischen Kreisscheibe auf einer starren Unterlage (s. Abb. 2.12 bis 2.14).

In der Festkörpermechanik werden üblicherweise materielle Randbedingungen vorgegeben. Sie zeichnen sich durch ihre Invarianz bezüglich des zur Randbedingung gehörigen materiellen Punktes aus und lassen sich deshalb zeitinvariant in der Ausgangsplatzierung definieren. Dabei wird die Randbedingung mit dem Positionsvektor des zugehörigen materiellen Punktes in der Ausgangsplatzierung verbunden. Durch die Beobachterabbildung und die Bewegungsabbildung lässt sich somit zu jedem Zeitpunkt der zur Randbedingung gehörige materielle Punkt bestimmen. In der Momentanplatzierung ist die Position materieller Randbedingungen im Allgemeinen zeitabhängig. In Abb. 2.12 ist eine Beispielrandbedingung gezeigt. In dem materiellen Punkt  $\xi$  wird die Spannung zu null vorgeschrieben. Trotz der Deformation des materiellen Körpers bleibt die Randbedingungen bezüglich desselben materiellen Punktes bestehen, so dass sie bezüglich der Ausgangsplatzierung stets durch denselben Positionsvektor  $\boldsymbol{x}$  beschrieben wird.<sup>56</sup>

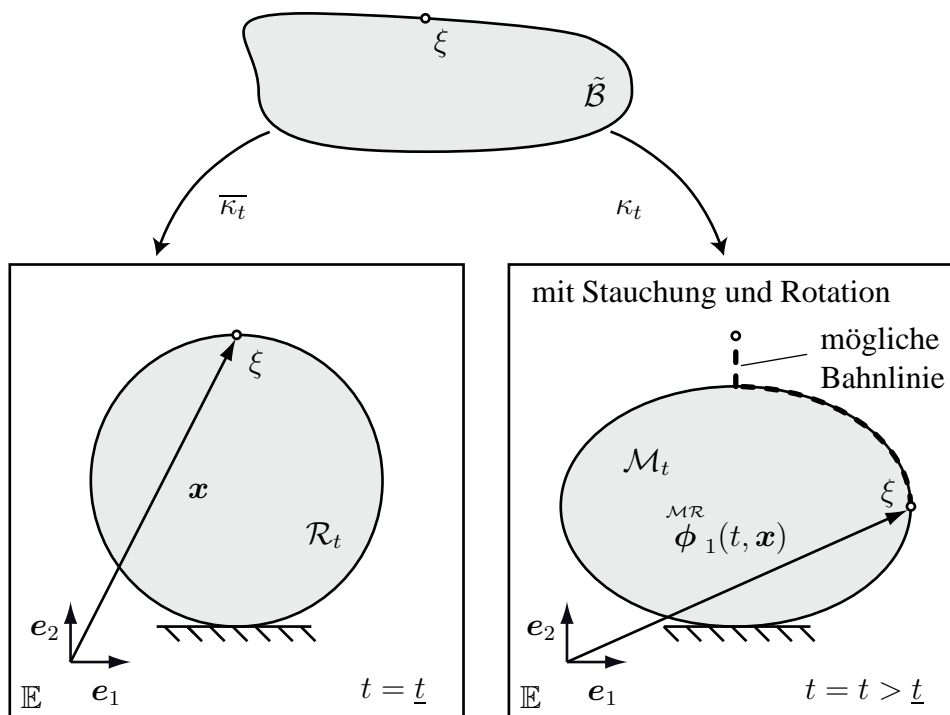


Abbildung 2.12: Materielle Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe, die auf einer starren Ebene durch Eigengewicht in vertikaler Richtung zusammengedrückt und um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn rotiert wird

<sup>56</sup> Im Vorgriff auf die Beschreibung von Randbedingungen für eine ALE-Kinematik wird in Abb. 2.12 die Referenzplatzierung  $\mathcal{R}_{\bar{t}}$  als Ausgangsplatzierung gewählt.

Räumliche Randbedingungen finden vornehmlich in der Fluidmechanik Anwendung. Sie werden in der Momentanplatzierung zeitlich unabhängig definiert, d. h. ihre Lage wird durch einen zeitinvarianten Positionsvektor in der Momentanplatzierung festgelegt. Durch die Beobachterabbildung lassen sich generell einer räumlichen Randbedingung zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene materielle Punkte zuordnen. Demnach ist die Darstellung einer räumlichen Randbedingung in der Ausgangsplatzierung gemeinhin zeitabhängig. Im Beispiel in Abb. 2.13 ist das Verhalten räumlicher Randbedingungen schematisch dargestellt. Die Randbedingung im Berührungspunkt der elastischen Scheibe mit der starren Unterlage hat in allen Platzierungen denselben Positionsvektor  $\mathbf{y}$ , auch wenn sich in diesem Punkt in Abhängigkeit der Bewegung im Allgemeinen unterschiedliche materielle Punkte befinden. Die Zeitveränderlichkeit räumlicher Randbedingungen gegenüber materieller Punkte ist an dem Positionsvektor  $\mathbf{y}$  in der Momentanplatzierung und dem zugehörigen Positionsvektor  $\overset{AR}{\phi}_1(t, \mathbf{y})$  in der Ausgangsplatzierung abzulesen.

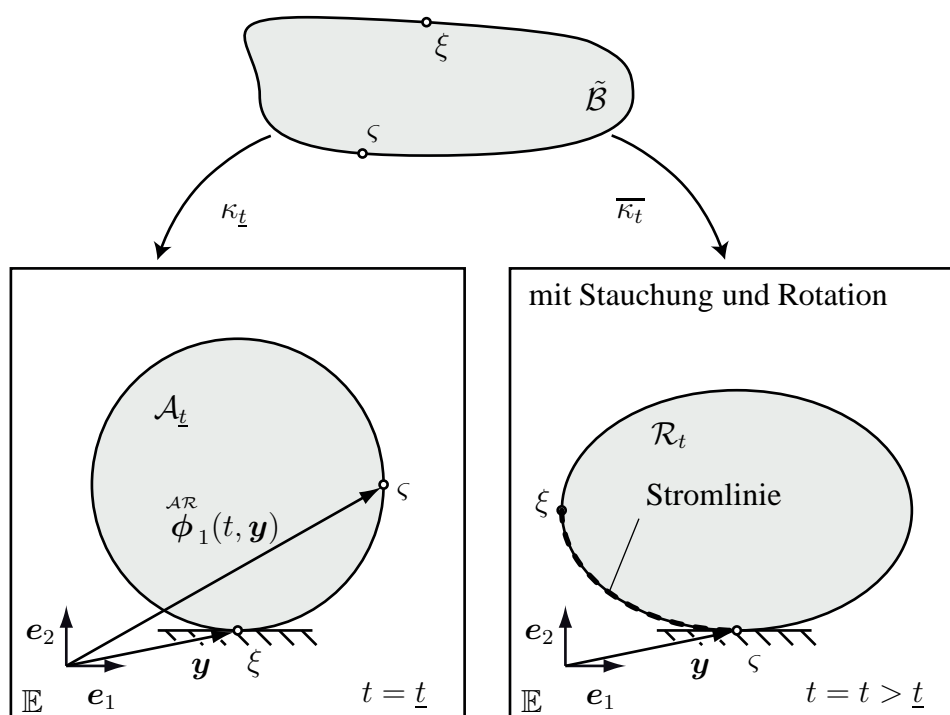


Abbildung 2.13: Räumliche Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe, die auf einer starren Ebene durch Eigengewicht in vertikaler Richtung zusammengedrückt und um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn rotiert wird

Zur Beschreibung nichtmaterieller Randbedingungen auch für große Deformationen werden, neben den klassischen Arten von Randbedingungen, zur ALE-Kinematik passende referentielle Randbedingungen eingeführt. Die Besonderheit dieser Randbedingungen liegt in ihrer zeitlichen Invarianz in der Referenzplatzierung. Daraus ergeben sich Eigenschaften, die sowohl materielle als auch räumliche Randbedingungen charakterisieren. Da referentielle Randbedingungen mit festen Punkten der Referenzplatzierung verbunden sind, lassen sich durch die Beobachterabbildung zu jedem Zeitpunkt in der Ausgangsplatzierung unterschiedliche materielle Punkte mit der Position der Randbedingung identifizieren. Darüber hinaus kann sich die räumliche Position der referentiellen Randbedingungen in Abhängigkeit der Bewegungsabbildung  $\overset{MR}{\phi}$  verändern. Auf diese Weise las-

sen sich die in Abb. 2.14 gegebenen Beispielrandbedingungen bezüglich der Referenzplatzierung als materielle Randbedingungen interpretieren, da sich der zur Randbedingung gehörige (referentielle) Punkt beim Übergang von der Referenz- zur Momentanplatzierung nicht ändert.

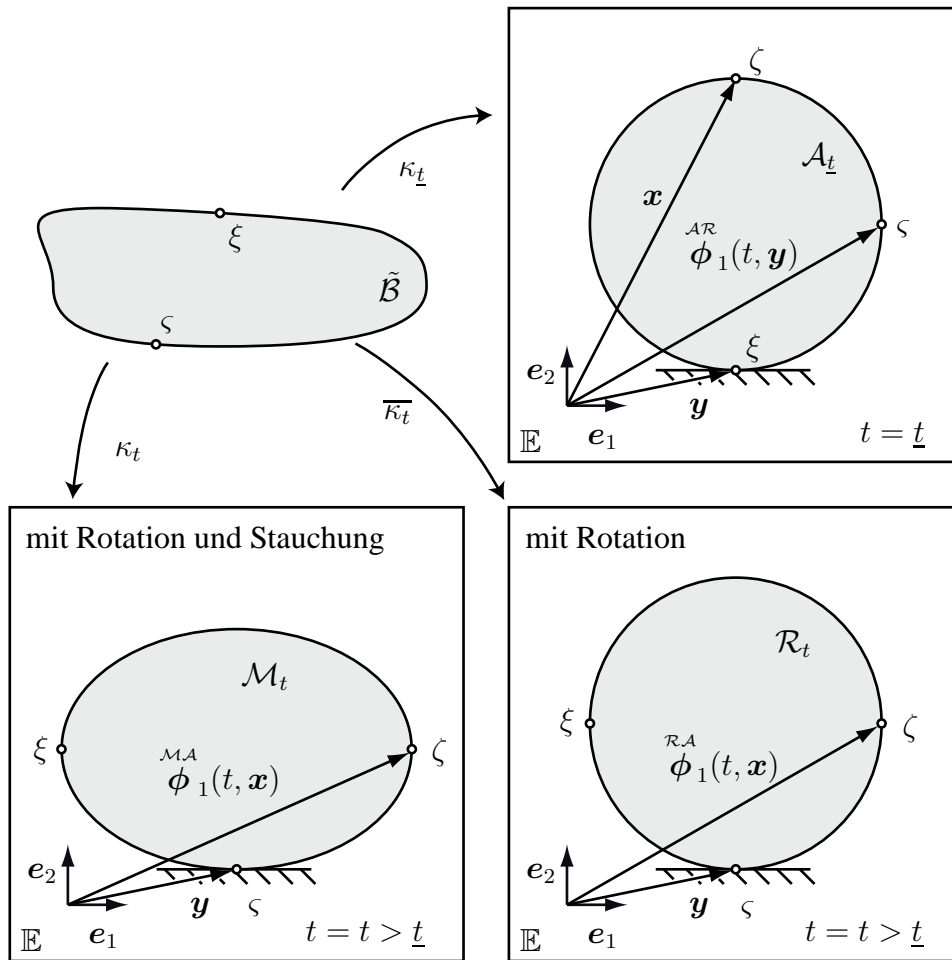


Abbildung 2.14: Referentielle Randbedingung am Beispiel einer elastischen Scheibe, die auf einer starren Ebene um  $\pi/2$  im Uhrzeigersinn rotiert und durch Eigengewicht in vertikaler Richtung zusammengedrückt wird

## 2.8 Feldproblem

### 2.8.1 Feldproblem in der EULER-Beschreibung

Im Fall der in Abschnitt 2.6 angenommenen linear-elastischen konstitutiven Beziehungen können die Bewegungsgleichungen des materiellen Körpers in der EULER-Beschreibung aus der Massebilanz in ihrer konservativen lokalen Form<sup>57</sup>

$$\partial_0 \rho + \operatorname{Div} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.203)$$

und der Impulsbilanz in der advektiven Form in der Momentanplatzierung

$$\rho \partial_0 \mathbf{v} - \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.204)$$

erhalten werden (s. [HAUPT 2010, S. 139]). Des Weiteren lassen sich der GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor nach Gl. (2.123) durch den Deformationsgradienten sowie die Metrikabbildungen

$$\mathbf{E}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} := \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}^{\top} \circ \mathbf{R} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} - \mathbf{R} \right) \quad (2.205)$$

und der Deformationsgradient nach Gl. (2.92) mithilfe von Gl. (2.29) durch Verschiebungen ausdrücken

$$\mathbf{F}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \partial_1 \phi_1^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \partial_1 \begin{pmatrix} \operatorname{id}_1 + \mathbf{u} \\ \mathbb{T} \times \mathbb{E} \quad \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (2.206)$$

$$\mathbf{E}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \partial_1 \mathbf{u} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}^{\top} \circ \mathbf{R} \circ \begin{pmatrix} \operatorname{id}_1 + \mathbf{u} \\ \mathbb{T} \times \mathbb{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{id}_1 + \mathbf{u} \\ \mathbb{T} \times \mathbb{E} \end{pmatrix} \circ \mathbf{R} \circ \begin{pmatrix} \partial_1 \mathbf{u} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \right). \quad (2.207)$$

Für kleine Verschiebungsgradienten ergibt sich<sup>58</sup>

$$\mathbf{E}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \operatorname{sym} \left[ \begin{pmatrix} \partial_1 \mathbf{u} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \right] \quad (2.209)$$

bzw. in der Momentanplatzierung für den hier passenden ALMANSI-Dehnungstensor<sup>59</sup>

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}\mathcal{M}} = \operatorname{sym} \left[ \begin{pmatrix} \partial_1 \mathbf{u} \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.210)$$

<sup>57</sup> Für eine Übersicht zur advektiven und konvektiven Form der Bilanzgleichungen für Systeme veränderlicher und nicht veränderlicher Masse sei auf [HAUPT 2010, S. 139] verwiesen.

<sup>58</sup> Entsprechend der Überlegungen zur Symmetrie eines Tensors in Abschnitt A.7 gilt die hier angegebene Beziehung für den Fall, dass die RIESZ-Abbildung eine Identitätsabbildung ist. Ist dies nicht der Fall, würde der GREEN-LAGRANGE-Dehnungstensor für kleine Verformungen durch

$$\mathbf{E}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} = \operatorname{sym} \left[ \begin{pmatrix} 1 \otimes \mathbf{R} \\ \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \quad \mathcal{A} \end{pmatrix} \partial_1 \mathbf{u} \right] \quad (2.208)$$

ausgedrückt (vgl. [PICARD & MCGHEE 2011, S. 72]). Im Sinne einer übersichtlicheren Darstellung wird jedoch im Folgenden die RIESZ-Abbildung als Identitätsabbildung angenommen.

<sup>59</sup> Zur platzierungsabhängigen Wahl von Dehnungs- und Spannungstensen bei linear-elastischem isotropem Material sei auf [HAUPT 2010, S. 331] verwiesen.

Die konstitutive Beziehung für die Momentanplatzierung lautet

$$\mathbf{E}_{\mathcal{M}}^{AM} := \underline{\underline{\mathfrak{C}}}_{\mathcal{M}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} \quad . \quad (2.211)$$

Diese Feldgleichungen gelten für beliebige Bewegungen mit kleinen Verformungsgradienten und werden durch die Rand- und Anfangsbedingungen vervollständigt.

Um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen und sie iterativen Lösungsverfahren zugänglich zu machen, ist eine konsistente Linearisierung notwendig. Dementsprechend wird die Aufteilung des Dichte- und des Geschwindigkeitsfeldes in einen zeitunabhängigen Anteil ( $\overset{A}{\dots}$ ) und einen zeitabhängigen Anteil ( $\overset{MA}{\dots}$ ) angenommen

$$\rho_{\mathcal{M}} := \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} + \overset{MA}{\rho}_{\mathcal{M}} \quad , \quad (2.212)$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{M}} := \overset{A}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} + \overset{MA}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} = \overset{MA}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} \quad . \quad (2.213)$$

Dabei seien die Beträge der zeitabhängigen Anteile wesentlich kleiner als die Beträge der zeitunabhängigen Anteile und die betrachteten Felder zum Ausgangszeitpunkt homogen. Mit den folgenden Voraussetzungen

$$\overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) := \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}}(t=0, \mathbf{x}) \quad , \quad (2.214)$$

$$\overset{A}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} := 0 \quad , \quad (2.215)$$

die z. B. in der Fluidodynamik üblich sind, und der Vernachlässigung von Termen höherer Ableitungsordnung können die Erhaltungsgleichungen als

$$\partial_0 \overset{MA}{\rho}_{\mathcal{M}} + \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} \text{Div}_{\mathcal{M}} \overset{MA}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} = 0 \quad , \quad (2.216)$$

$$\overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} \partial_0 \overset{MA}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} - \text{Div}_{\mathcal{M}} \left( \overset{MA}{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{M}} \right) - \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} \mathbf{f}_{\mathcal{M}} = 0 \quad (2.217)$$

formuliert werden. Dabei werden Massenkräfte infolge Dichteänderungen als vernachlässigbar angenommen.

Das vorgeschlagene Dehnungsmaß basiert auf den Verschiebungen  $\overset{MA}{\mathbf{u}}$ , welche mit dem Geschwindigkeitsfeld  $\overset{MA}{\mathbf{v}}$  assoziiert sind. Um eine Systemformulierung der Bewegungsgleichung zu finden, wird deshalb in der weiteren Herleitung die Zeitableitung des Dehnungsmaßes verwendet

$$\partial_0 \overset{AM}{\mathbf{E}}_{\mathcal{M}} = \partial_0 \text{sym}_{\mathcal{M}} \left[ \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} \right] = \text{sym}_{\mathcal{M}} \left[ \partial_1 \partial_0 \overset{MA}{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} \right] = \text{sym}_{\mathcal{M}} \left[ \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} \right] \quad . \quad (2.218)$$

Passend dazu sind die konstitutiven Beziehungen ebenfalls in Abhängigkeit der Dehnrates zu formulieren und es ergibt sich unter der Voraussetzung zeitunabhängigen Materialverhaltens

$$\partial_0 \overset{AM}{\mathbf{E}}_{\mathcal{M}} := \underline{\underline{\mathfrak{C}}}_{\mathcal{M}}^{-1} \partial_0 \overset{MA}{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{M}} \quad . \quad (2.219)$$

Beispiele für die Beschreibung von Materialien in Abhängigkeit der Dehnrates sind z. B. in [BELYTSCHKO et al. 2001] und [KÖLKE 2005] zu finden. Die linearisierte Massebilanzgleichung



kann nach der Bestimmung von  $\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}$  unabhängig von den übrigen Teilen des Gleichungssystems durch Integration über die Zeit gelöst werden

$$\overset{\mathcal{M}A}{\rho}_{\mathcal{M}} = -\partial_0^{-1} \left( \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} \text{Div}_{\mathcal{M}} \overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} \right) . \quad (2.220)$$

Deshalb kann diese Bilanzgleichung bei der Formulierung der Bewegungsgleichung entfallen. Als Resultat aller vereinfachenden Annahmen folgt das die Bewegung beschreibende Gleichungssystem erster Ordnung zu

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{c}}_{\mathcal{M}}^{-1} \end{array} \right] \partial_0 - \left[ \begin{array}{cc} 0 & \text{Div}_{\mathcal{M}} \\ \text{sym} \circ \partial_1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}_{\mathcal{M}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{M}} \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \overset{A}{\rho}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} \mathbf{f} \\ 0 \end{array} \right] . \end{array} \quad (2.221)$$

Dieses System besitzt eine besondere Struktur. Der Blockoperator vor dem Vektor der Unbekannten ist die Summe eines positiv definiten Blockoperators, der das Materialverhalten charakterisiert und eines schiefselbstadjungierten Blockoperators, der die positionsabhängigen Ableitungen enthält (s. a. [PICARD 2009]). Die Randbedingungen und die Anfangsbedingungen, welche passenderweise für das Geschwindigkeits- und das Spannungsfeld zu benennen sind, vervollständigen das Gleichungssystem.

Es ist erwähnenswert, dass bereits mit diesem klassischen Bewegungsgleichungssystem Bewegungen mit nichtmateriellen Randbedingungen beschreibbar sind. Da es in der EULER-Darstellung formuliert wurde, können im Gegensatz zur LAGRANGE-Darstellung räumliche (und demnach nichtmaterielle) Randbedingungen berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 2.7). Allerdings sind die in diesem Abschnitt gezeigten Herleitungen nur für kleine Deformationen gültig, was ihre Anwendbarkeit einschränkt.

Dennoch ist es sehr nützlich, für lineare physikalische Evolutionsprobleme die zugrundeliegenden Gleichungen in die hier angegebene Systemform zu überführen, da sich an ihnen die Wohldefiniertheit nach HADAMARD und gegebenenfalls sogar eine Lösungstheorie erklären lässt (s. [PICARD 2009]).<sup>60</sup>

### 2.8.2 Feldproblem in der ALE-Beschreibung

Wie in den Abschnitten 2.2 und 2.3.1 bereits beschrieben, wird im Rahmen der gewählten ALE-Beschreibung die Bewegung des materiellen Körpers in eine Starrkörperbewegung  $\overset{\mathcal{R}A}{\phi}$  und eine dieser Bewegung überlagerte Deformationsbewegung  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}$  zerlegt. Jede physikalische Feldgröße  $\mathbf{h}$  kann dementsprechend in ein Anfangsfeld  $\overset{A}{\mathbf{h}}$  und eine Veränderung  $\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{h}}$  aufgeteilt werden

$$\mathbf{h} := \overset{A}{\mathbf{h}} + \overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{h}} \quad \text{mit} \quad \overset{A}{\mathbf{h}}(t, \square) := \mathbf{h}(t = 0, \square) , \quad (2.222)$$

wobei jeder Teil dieser Gleichung in derselben (aber einer beliebigen) Platzierung zu formulieren ist. Darüber hinaus lässt sich die Änderung des Feldes  $\mathbf{h}$  in die zur Zerlegung der Bewegung  $\overset{\mathcal{M}A}{\phi}$  gehörenden Anteile spalten

$$\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{h}} := \overset{\mathcal{M}R}{\mathbf{h}} + \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{h}} . \quad (2.223)$$

<sup>60</sup> In [MCGHEE & PICARD 2011] wird die hier angegebene Gleichungsstruktur auch bei einem relativ komplizierten elektro-mechanischen System erhalten.

Wegen der angenommenen Starrkörperbewegung für die Bewegung  $\overset{\mathcal{R}A}{\phi}$  kann das Dichtefeld als

$$\underset{\mathcal{A}}{\rho} := \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{A}}{\rho}} + \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\rho}} = \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{A}}{\rho}} + \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\rho}} \circ \overset{\mathcal{R}A}{\phi} \quad \text{mit} \quad \underset{\mathcal{A}}{\overset{\mathcal{R}A}{\rho}} = 0 \quad (2.224)$$

geschrieben werden, was analog auch für die Felder der Dehnungs- und Spannungstensoren gilt. In den letzteren Fällen korrespondiert die hier definierte Zerlegung zur Linearisierung in Abschnitt 2.8.1. Mit den Definitionen der Verschiebungsfelder aus den Gln. (2.29) bis (2.31) kann die Dekomposition der Verschiebungen wie in Gl. (2.35) geschrieben werden, wobei im Vergleich zum Dichtefeld der Anteil  $\overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{u}}$  zeitabhängig ist. Eine adäquate Dekomposition des Geschwindigkeitsfeldes gelingt nach Gl. (2.69) zu

$$\underset{\mathcal{R}}{\mathbf{v}} := \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}} = \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{v}}} + \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}A}{\boldsymbol{\eta}}} + \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}}} \quad \text{mit} \quad \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}A}{\boldsymbol{\eta}}} := \partial_1 \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{u}}} \cdot \underset{\mathcal{R}}{\overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}}} . \quad (2.225)$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen in einer ALE-Beschreibung ist die Massebilanz in konservativer Form in der Referenzplatzierung ein möglicher Ausgangspunkt (s. Gl. (2.158))

$$\partial_0 \underset{\mathcal{R}}{\rho} + \text{Div} \left( \underset{\mathcal{R}}{\rho} \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}} \right) = 0 \quad , \quad (2.226)$$

wobei der Ausdruck

$$\underset{\mathcal{R}}{\rho} := \underset{\mathcal{R}}{J} \underset{\mathcal{R}}{\rho} := \det \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\phi} \right) \underset{\mathcal{R}}{\rho} \quad (2.227)$$

das mit der JACOBI-Determinante multiplizierte Dichtefeld bezeichnet. Die Massebilanz ist vom übrigen System entkoppelt, deshalb wird für die weiteren Herleitungen angenommen, dass das Dichtefeld nach der Bestimmung aller anderen Unbekannten in einer nachträglichen Berechnung bestimmt werden kann.

Die Impulsbilanz in der advektiven Form in der Referenzplatzierung (Gl. (2.165)) kann mittels der Grundgleichung der ALE (2.78) sowie Gl. (2.64) in die Aussage

$$\begin{aligned} & \underset{\mathcal{R}}{\rho} \left( \partial_0 + \partial_1 \square \cdot \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}} \right) \left( \left( \partial_0 + \partial_1 \square \cdot \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}} \right) \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{u}} \right) + \dots \\ & \dots + \underset{\mathcal{R}}{\rho} \left( \partial_0 + \partial_1 \square \cdot \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}} \right) \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}} - \text{Div} \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{P}} \right) - \underset{\mathcal{R}}{\rho} \overset{\mathcal{A}}{\mathbf{f}} = 0 \end{aligned} \quad (2.228)$$

überführt werden, wobei das Symbol  $\square$  ein Platzhalter für die Feldgröße ist, auf die der Operator angewendet wird.<sup>61</sup>

Wie in [SMITH 1993, S. 182] beschrieben wird, gilt die in Abschnitt 2.6 gezeigte Materialformulierung unabhängig von überlagerten Starrkörperbewegungen. Damit führen die Annahmen dieses Abschnittes für die Bewegungsgleichung mithilfe der konstitutiven Beziehungen aus Abschnitt 2.6 auf ein Gleichungssystem erster Ordnung der Form

$$(M - A)U = f \quad (2.229)$$

<sup>61</sup> Wie bereits in Abschnitt 2.8.1 werden Massenkräfte infolge Dichteänderungen als vernachlässigbar angenommen.

mit

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{\mathcal{R}} & \frac{\rho \partial_1 \partial_0^{-1} \square \cdot \mathbf{v}}{\mathcal{R} \mathcal{R}} & 0 \\ \frac{\rho \partial_0}{\mathcal{R} \mathcal{R}} + \frac{\rho \widehat{\partial}_1}{\mathcal{R}} & \frac{\rho \partial_0}{\mathcal{R} \mathcal{R}} + \frac{\rho \widehat{\partial}_1}{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\underline{\mathbf{c}}^{-1} \partial_0}{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \widehat{\partial}_1 := \partial_1 \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}}, \quad (2.230)$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Div}_{\mathcal{R}} \\ 0 & \text{sym} \circ \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{M}^A \boldsymbol{\eta}}{\mathcal{R}} \\ \partial_0 \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{u}}{\mathcal{R}} \\ \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{P}}{\mathcal{R}} \end{bmatrix}, \quad f := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\mathcal{R}} \left( \mathbf{f} - \left( \partial_0 + \widehat{\partial}_1 \right) \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.231)$$

Im Vergleich zur Systemdarstellung in Abschnitt 2.8.1 ist zwar der Blockoperator  $A$  schief selbstadjungiert, aber der Blockoperator  $M$  ist im Allgemeinen nicht positiv definit.

Im Fall einer zeitunabhängigen Geschwindigkeitsfunktion  $\mathcal{R}^A \mathbf{v}$  gilt die Beziehung

$$\partial_0 \frac{\mathcal{M}^A \boldsymbol{\eta}}{\mathcal{R}} = \partial_0 \left( \partial_1 \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{u}}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}} \right) = \partial_1 \partial_0 \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{u}}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}} \quad (2.232)$$

und das Gleichungssystem kann zu

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\rho}{\mathcal{R}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\underline{\mathbf{c}}^{-1}}{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \partial_0, \quad A := \begin{bmatrix} 0 & -i \frac{\rho \widehat{\partial}_1}{\mathcal{R}} & 0 \\ -i \frac{\rho \widehat{\partial}_1}{\mathcal{R}} & -2 \frac{\rho \widehat{\partial}_1}{\mathcal{R}} & \text{Div}_{\mathcal{R}} \\ 0 & \text{sym} \circ \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.233)$$

$$U := \begin{bmatrix} -i \frac{\mathcal{M}^A \boldsymbol{\eta}}{\mathcal{R}} \\ \partial_0 \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{u}}{\mathcal{R}} \\ \frac{\mathcal{M}^R \mathbf{P}}{\mathcal{R}} \end{bmatrix}, \quad f := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\mathcal{R}} \left( \mathbf{f} - \widehat{\partial}_1 \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.234)$$

umformuliert werden. In dieser Darstellung ist der Blockoperator  $M$  positiv definit, aber der Blockoperator  $A$  ist aufgrund des Ausdrucks  $2 \rho \widehat{\partial}_1$  nicht schief selbstadjungiert. Folglich kann mit den Schlussfolgerungen aus [PICARD 2009] nicht mehr auf die Wohldefiniertheit des Problems geschlossen werden. Wie bei der Lösung eines solchen Problems vorgegangen werden kann, wird in Abschnitt 4.4.5 an einem sehr ähnlichen, eindimensionalen Beispiel erläutert.

Es bleibt zu erwähnen, dass sich für eine verschwindende Geschwindigkeit  $\mathcal{R}^A \mathbf{v}$  das hier angegebene System zu dem klassischen System aus Abschnitt 2.8.1 vereinfachen lässt.



### 3 Axial unbewegte eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen<sup>62</sup>

#### 3.1 Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für die axial unbewegte Saite

Zur Untersuchung von Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen mithilfe analytischer und semi-analytischer Methoden eignen sich eindimensionale Kontinua. Prinzipiell lassen sich die Bewegungsgleichungen für solche Systeme auch aus den in Kapitel 2 eingeführten dreidimensionalen Gleichungen herleiten. Unter der Vernachlässigung von Randstörungen können in diesem Fall geometrische Symmetrien ausgenutzt werden, die zu einer eindimensionalen Formulierung führen. Aufgrund des Umfangs dieser Herleitungen werden sie im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht näher angegeben und es sei auf die Arbeiten [BERGER 1996, WEISS 1999, KARL 2011] verwiesen.

In der Literatur wird die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite häufig mit der physikalischen Annahme, dass alle materiellen Partikel in einer Ebene senkrecht zur Längsausdehnung schwingen, hergeleitet. Diese Annahme ist physikalisch unbegründet und wird bei der folgenden Herleitung bewusst nicht getroffen. Dadurch wird erkennbar, wie im Rahmen der Linearisierung das Fortlassen von Termen höherer Ordnung zu dieser vereinfachten Form des Schwingungsverhaltens führt (s. auch [WEINBERGER 1965, ANTMAN 1980]).

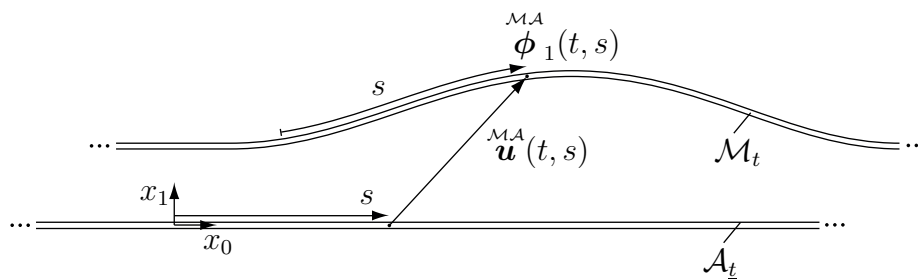


Abbildung 3.1: Definition der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}_t$  und der Momentanplatzierung  $\mathcal{M}_t$  am Beispiel der schwingenden Saite

Dazu wird im Folgenden die Bewegungsgleichung für den Fall einer Saite mit bewegten Lagern und einer Beschreibung mithilfe eines raumfesten (EULER-Beschreibung) sowie eines materiefesten Beobachters (LAGRANGE-Beschreibung) direkt hergeleitet. Es sei dazu eine konstant vorgespannte Saite gegeben, die axial dehnbar ist, aber keiner axialen Starrkörperbewegung unterliegt.<sup>63</sup> Die Lage der Saite wird im kartesischen Koordinatensystem  $(x_0, x_1)$  beschrieben. Die Randbedingungen werden bei der Herleitung der Bewegungsgleichung zunächst außer Acht gelassen und vervollständigen erst im Abschluss der Herleitung die Anfangswert-Randwert-Aufgabe. Neben den erwähnten räumlich festen Koordinaten  $x_0$  und  $x_1$  wird zusätzlich die materielle Koordinate  $s$  eingeführt. Sie kann als Benennung der einzelnen materiellen Punkte interpretiert werden, welche sich gemeinsam mit den materiellen Punkten im Raum bewegt. Sie dient auch der Definition der Ausgangsplatzierung der gedehnten Saite (s. Abb. 3.1). Nun wird angenommen, dass die Saite so dünn ist, dass sie durch eine Linie repräsentiert werden kann. Demzufolge kann die Bewegung der

<sup>62</sup> Einige der in diesem Kapitel vorgestellten Gedanken wurden vom Autor auch in [FRANZE & ZASTRAU 2010] veröffentlicht.

<sup>63</sup> In diesem Abschnitt wird ein solcher Bewegungszustand kurz als axial unbeweglich bezeichnet.

Saite durch die Angabe der Bewegungsabbildung

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}A}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, s) &\mapsto \overset{\mathcal{M}A}{\phi}(t, s) := (t, \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_1(t, s)) := \left( t, \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{10}(t, s) \\ \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{11}(t, s) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

vollständig beschrieben werden. Der Ausgangszustand der Saite sei durch die Funktionen

$$\overset{\mathcal{M}A}{\phi}_1(0, s) \quad \text{und} \quad \partial_0 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_1(0, s) \quad (3.2)$$

gegeben. Weiter sei die Massedichte  $\rho$  der Saite eine stetige Funktion, d. h. die Masse eines Saitenstückes im Bereich  $[s_1, s] \subseteq \mathcal{A}_t$  kann als

$$m_{[s_1, s]} = \int_{\bar{s} \in [s_1, s]} \rho(\bar{s}) \quad (3.3)$$

angegeben werden.

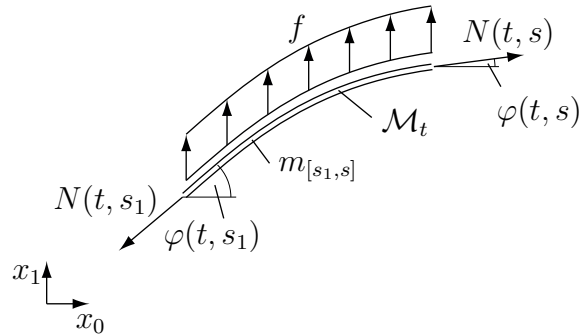


Abbildung 3.2: Freikörperbild eines Saitenabschnittes  $[s_1, s] \subseteq \mathcal{M}_t$

Mit der Annahme einer biegeweichen Saite, d. h. einer Saite, die ohne Widerstand gebogen werden kann, ergibt sich, dass in der Saite nur Normalkräfte wirken können, welche im Freikörperbild nach Abb. 3.2 tangential zur Saite gerichtet sind.<sup>64</sup> Aus der Bewegungsgleichung in  $x_0$ -Richtung wird

$$N(t, s_1) \cos \varphi(t, s_1) - N(t, s) \cos \varphi(t, s) = \int_{\bar{s} \in [s_1, s]} \rho(\bar{s}) \partial_0^2 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{10}(t, \bar{s}) \quad (3.4)$$

erhalten. Nach dem Ableiten nach der materiellen Koordinate  $s$  und mit der Beziehung

$$\cos \varphi(t, s) = \frac{\partial_1 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{10}}{\left\| \partial_1 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_1 \right\|_2}(t, s) = \frac{\partial_1 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{10}}{\sqrt{\left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{10} \right)^2 + \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_{11} \right)^2}}(t, s) \quad (3.5)$$

<sup>64</sup> Die physikalische Interpretation dieser Annahme ist die Vernachlässigung der Fernwirkung, d. h. es wird angenommen, dass nur benachbarte Materialpunkte aufeinander einwirken.

ergibt sich hieraus

$$\partial_1 \left( N \frac{\partial_1 \overset{MA}{\phi}_{10}}{\left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2} \right) = \rho \partial_0^2 \overset{MA}{\phi}_{10} \quad . \quad (3.6)$$

Analog folgt aus der Bewegungsgleichung in  $x_1$ -Richtung

$$\partial_1 \left( N \frac{\partial_1 \overset{MA}{\phi}_{11}}{\left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2} \right) = \rho \partial_0^2 \overset{MA}{\phi}_{11} - \rho f \quad , \quad (3.7)$$

wobei die Funktion  $f$  eine beliebige massebezogene Kraft beschreibt, die in die  $x_1$ -Richtung verläuft. Nun muss noch eine Annahme zum Materialverhalten der Saite getroffen werden. Die Saite verhalte sich ideal elastisch. Ohne vorauszusetzen, dass lineare Elastizität vorliegt, bedeutet dies, dass die Normalkraft im Seil allein durch die Dehnung

$$\varepsilon := \left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2 - 1 \quad (3.8)$$

der Saite bezüglich der Gleichgewichtslage beschrieben wird

$$N(t, s) = \mathfrak{E}(\varepsilon(t, s), s) \quad . \quad (3.9)$$

Hierbei soll die nicht näher spezifizierte Funktion  $\mathfrak{E}$  das elastische Verhalten der Saite beschreiben. Insbesondere muss die (unbewegte) Gleichgewichtslage

$$\overset{MA}{\phi}(t, s) = \left( t, \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (3.10)$$

für den Fall  $f = 0$  die Gln. (3.6) und (3.7) erfüllen, woraus auf

$$\mathfrak{E}(0, s) = N_0 = \text{const.} \quad (3.11)$$

geschlossen werden kann. Somit lässt sich das vorläufige Gleichungssystem zur Beschreibung der Saitenbewegung charakterisieren. Es ist ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Unbekannten  $\overset{MA}{\phi}_{10}$ ,  $\overset{MA}{\phi}_{11}$  und  $N_0$ , das durch passende Anfangs- und Randbedingungen vervollständigt wird. Der Übersichtlichkeit wegen seien die bestimmenden Gleichungen nochmals genannt

$$\rho \partial_0^2 \overset{MA}{\phi}_{10} - \partial_1 \left( N \frac{\partial_1 \overset{MA}{\phi}_{10}}{\left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2} \right) = 0 \quad , \quad (3.12)$$

$$\rho \partial_0^2 \overset{MA}{\phi}_{11} - \partial_1 \left( N \frac{\partial_1 \overset{MA}{\phi}_{11}}{\left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2} \right) = \rho f \quad , \quad (3.13)$$

$$N(t, s) = \mathfrak{E}(\varepsilon(t, s), s) \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \left\| \partial_1 \overset{MA}{\phi}_1 \right\|_2 - 1 \quad . \quad (3.14)$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist verhältnismäßig schwierig zu lösen und eignet sich somit noch nicht zu Untersuchungen zum Einfluss besonderer Randbedingungen. Um die beschreibenden Gleichungen weiter zu vereinfachen, sollen deshalb nur kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage zugelassen werden. Dies entspricht der Annahme

$$\partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \neq 0 \quad , \quad (3.15)$$

d. h. die Spur der mit  $s$  parametrisierten Kurve ist rechtseindeutig.<sup>65</sup> Durch die Rechtseindeutigkeit lässt sich der Anteil  $\phi_{11}^{\mathcal{M}A}$  durch den Anteil  $\phi_{10}^{\mathcal{M}A}$  ausdrücken. Die neu eingeführte Funktion  $\tilde{u}$  beschreibt diese Abhängigkeit

$$\phi_{11}^{\mathcal{M}A}(t, s) := \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \quad . \quad (3.16)$$

Mithilfe der Kettenregel<sup>66</sup> wird aus Gl. (3.13)

$$\left( \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \right)^2 \partial_1^2 \tilde{u} + 2 \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \partial_0 \partial_1 \tilde{u} + \partial_0^2 \tilde{u} + \partial_0^2 \phi_{10}^{\mathcal{M}A} \partial_1 \tilde{u} - \frac{1}{\rho} \partial_1 \left( N \frac{\partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{10}}{\left\| \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_1 \right\|_2} \partial_1 \tilde{u} \right) = f \quad (3.20)$$

und schließlich mit den Gln. (3.12) und (3.14)

$$\begin{aligned} & \left( \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \right)^2 \partial_1^2 \tilde{u} + 2 \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \partial_0 \partial_1 \tilde{u} + \partial_0^2 \tilde{u} + \partial_0^2 \phi_{10}^{\mathcal{M}A} \partial_1 \tilde{u} + \dots \\ & \dots - \frac{N \left( \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \right)^2}{\rho \left\| \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_1 \right\|_2} \partial_1^2 \tilde{u} - \partial_0^2 \phi_{10}^{\mathcal{M}A} \partial_1 \tilde{u} = f \end{aligned} \quad (3.21)$$

bzw.

$$\left( \left( \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \right)^2 - \frac{N \left( \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \right)^2}{\rho \left\| \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_1 \right\|_2} \right) \partial_1^2 \tilde{u} + 2 \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10} \partial_0 \partial_1 \tilde{u} + \partial_0^2 \tilde{u} = f \quad . \quad (3.22)$$

<sup>65</sup> Anschaulich bedeutet dies, dass die Saite niemals einen Anstiegswinkel  $\varphi$  von  $90^\circ$  erreichen soll.

<sup>66</sup> Die einzelnen Ersetzungen lauten hierbei

$$\partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{11}(t, s) = \partial_1 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \partial_1^{\mathcal{M}A} \phi_{10}(t, s) \quad , \quad (3.17)$$

$$\partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{11}(t, s) = \partial_1 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10}(t, s) + \partial_0 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \quad , \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \partial_0^2 \phi_{11}^{\mathcal{M}A}(t, s) &= \partial_1^2 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \left( \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10}(t, s) \right)^2 + 2 \partial_0 \partial_1 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \partial_0^{\mathcal{M}A} \phi_{10}(t, s) + \dots \\ &\dots + \partial_0^2 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) + \partial_1 \tilde{u}(t, \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s)) \partial_0^2 \phi_{10}^{\mathcal{M}A}(t, s) \quad . \end{aligned} \quad (3.19)$$



Da die Koeffizienten der Bewegungsgleichung immer noch von der Bewegungsabbildung  $\overset{MA}{\phi}$  abhängen<sup>67</sup>, wird weiter vereinfachend angenommen, dass der Anstieg  $\partial_1 \tilde{u}$  und die Geschwindigkeit  $\partial_0 \overset{MA}{\phi}_{10}$  ausreichend klein sind und dass gilt

$$\overset{MA}{\phi}_{10} - \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{A}} \approx 0 \quad . \quad (3.23)$$

Aus diesen Annahmen folgt für eine hinreichend kleine Saitendehnung  $\varepsilon$ , dass für die Normalkraft gilt

$$N(t, s) \approx \mathfrak{E}(0, s) = N_0 \quad , \quad (3.24)$$

vorausgesetzt die Funktion  $\mathfrak{E}$  ist stetig an der Stelle  $\varepsilon = 0$ . Das Verschiebungsfeld, das diese Annahmen erfüllt, wird mit  $\overset{MA}{u}$  benannt. Dies bedeutet für die Darstellung in Abb. 3.1, dass der Ursprung der Koordinaten  $s$  und  $x_0$  zusammenfallen und die Verschiebung  $\overset{MA}{u}$  nur einen Anteil in  $x_1$ -Richtung besitzt. Um den approximativen Charakter der nun gefundenen partiellen Differentialgleichung zu unterstreichen, wird sie für das Verschiebungsfeld  $\overset{MA}{u}$  formuliert

$$(\partial_0^2 - c^2 \partial_1^2) \overset{MA}{u} = f \quad \text{mit} \quad c^2 := \frac{N_0}{\rho} \quad , \quad (3.25)$$

wobei die Größe  $c$  als Wellenausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet wird. Die resultierende Bewegungsgleichung ist die inhomogene eindimensionale Wellengleichung, welche noch um die Anfangs- und Randbedingungen zu ergänzen ist.

---

<sup>67</sup> Neben der offenkundigen expliziten ist eine implizite Abhängigkeit in den Argumenten der Normalkraftfunktion  $N$  vorhanden.

### 3.2 Modellbeschreibungen

Als erstes Beispiel eines eindimensionalen Kontinuums mit nichtmateriellen Randbedingungen soll eine räumlich fixierte, gespannte Saite betrachtet werden, über die zwei Lager mit konstantem Abstand  $l$  in  $x_0$ -Richtung mit einer beliebigen Führungsgeschwindigkeit  $v$  bewegt werden (s. Abb. 3.3). Da sich die Saite in Längsrichtung nicht bewegt, kann die Vorspannung  $N_0$  für kleine Auslenkungen als konstant angenommen werden und die materielle Koordinate  $s$  fällt mit der räumlichen Koordinate  $x_0$  zusammen (vgl. Abschnitt 3.1).

Das Anfangswert-Randwert-Problem wird neben der Bewegungsgleichung (3.25) der Saite durch die Anfangsbedingungen für die transversale Verschiebung  ${}^{\mathcal{M}A}u$  und die transversale Verschiebungsgeschwindigkeit  $\partial_0 {}^{\mathcal{M}A}u$  sowie die homogenen nichtmateriellen Randbedingungen<sup>68</sup> gebildet

$$(\partial_0^2 - c^2 \partial_1^2) {}^{\mathcal{M}A}u = 0 \quad (3.26)$$

$$\bigwedge_{s \in [0, l]} {}^{\mathcal{M}A}u(0^+, s) := u_0(s) \quad , \quad (3.27)$$

$$\bigwedge_{s \in [0, l]} \partial_0 {}^{\mathcal{M}A}u(0^+, s) := u_1(s) \quad , \quad (3.28)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} {}^{\mathcal{M}A}u(t, V(t)) := 0 \quad , \quad (3.29)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} {}^{\mathcal{M}A}u(t, V(t) + l) := 0 \quad , \quad (3.30)$$

$$\text{mit } \bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} V(t) := \int_{\bar{t} \in [0, t]} v(\bar{t}) \quad . \quad (3.31)$$

Dabei wird der Bewegungsbeginn zum Zeitpunkt  $t = 0$  gewählt, so dass  $V(0) = 0$  gilt. Der nichtmaterielle Charakter der Randbedingungen besteht in der Zeitabhängigkeit des Ortes der jeweiligen Randbedingung. In den Abschnitten 3.3 bzw. 3.4 werden Lösungen dieses Problems mithilfe eines Integrationsansatzes bzw. eines Separationsansatzes vorgestellt.

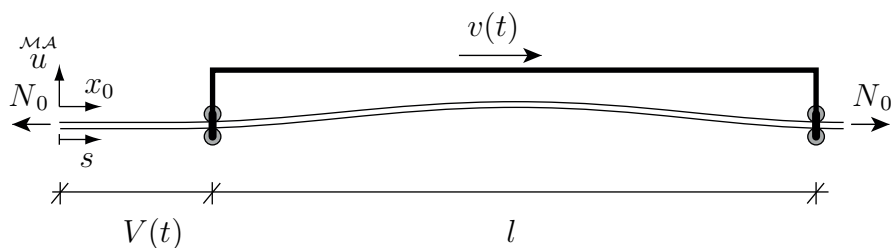


Abbildung 3.3: Modell einer axial festen Saite mit in  $s$ -Richtung bewegten Lagerungsbedingungen (vgl. [ZWIERS 2007, S. 27])

Das zweite Beispiel eines unbewegten eindimensionalen Kontinuums, über das nichtmaterielle Randbedingungen bewegt werden, ist eine räumlich fixierte Saite mit zwei Randbedingungen, deren Abstand zeitlich veränderlich ist (s. Abb. 3.4).

<sup>68</sup> Im Rahmen dieser Arbeit werden stets homogene Randbedingungen angenommen. Wie sich inhomogene Randbedingungen in homogene überführen lassen, kann u. a. [HAGEDORN & DASGUPTA 2007, S. 57] entnommen werden. Für nichtmaterielle Randbedingungen funktioniert dies analog, wie in Abschnitt B.1 erklärt wird.

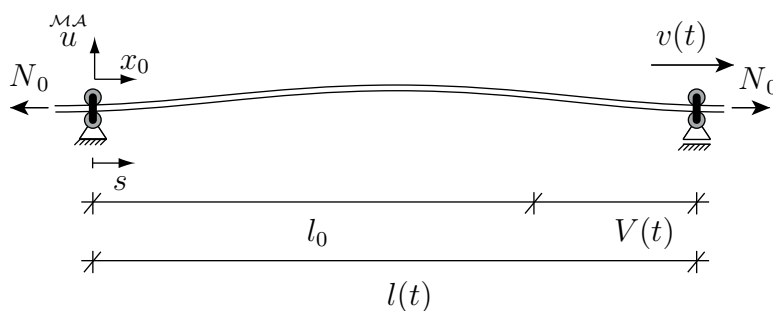


Abbildung 3.4: Modell einer axial festen Saite mit einer unbewegten und einer in  $s$ -Richtung bewegten Lagerungsbedingung

Neben den Anfangsbedingungen des bereits beschriebenen Beispiels aus den Gln. (3.27) und (3.28) werden hierzu eine unbewegte, materielle Randbedingung und eine bewegte, nicht-materielle Randbedingung vorgegeben

$$(\partial_0^2 - c^2 \partial_1^2) u^{\mathcal{M},A} = 0 \quad (3.32)$$

$$\bigwedge_{s \in [0, l_0]} u^{\mathcal{M},A}(0^+, s) := u_0(s) \quad , \quad (3.33)$$

$$\bigwedge_{s \in [0, l_0]} \partial_0 u^{\mathcal{M},A}(0^+, s) := u_1(s) \quad , \quad (3.34)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} u^{\mathcal{M},A}(t, 0) := 0 \quad , \quad (3.35)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} u^{\mathcal{M},A}(t, l(t)) := 0 \quad , \quad (3.36)$$

$$\text{mit } \bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} l(t) := l_0 + \int_{\bar{t} \in [0, t]} v(\bar{t}) = l_0 + V(t) \quad . \quad (3.37)$$

Hierbei bezeichnet die Funktion  $l$  den zeitlich veränderlichen Abstand der Randbedingungen, und  $l_0$  ist der Abstand der Randbedingungen zum Beginn der Bewegung. Dieses Anfangswert-Randwert-Problem wird in Abschnitt 3.5 mithilfe eines Integrationsansatzes gelöst.

### 3.3 Integrationsansatz für einen konstanten Abstand der Randbedingungen

#### 3.3.1 Transformation der Bewegungsgleichung

Um die Zeitabhängigkeit in der Beschreibung des Ortes der nichtmateriellen Randbedingungen zu eliminieren, ist es sinnvoll, die Bewegungsgleichung so zu transformieren, dass die Randbedingungen einen materiellen Charakter erhalten. Dazu dient die Substitution

$$t = t \quad , \quad \eta = s - V(t) \quad , \quad (3.38)$$

welche in Operatornotation kurz durch die Translation

$$\overset{MA}{w} := \tau_{(0,V(m_0))} \overset{MA}{u} \Leftrightarrow \overset{MA}{u} =: \tau_{(0,-V(m_0))} \overset{MA}{w} \quad (3.39)$$

geschrieben werden kann.<sup>69</sup> Mit der Kettenregel für Funktionen mit mehreren Veränderlichen folgt für die Bewegungsgleichung (3.32)

$$\left( \partial_0^2 - 2v(m_0)\partial_1\partial_0 - (\partial_0 v)(m_0)\partial_1 + (v(m_0)^2 - c^2)\partial_1^2 \right) \overset{MA}{w} = 0 \quad , \quad (3.43)$$

was in ähnlicher Form u. a. auch in [MIRANKER 1960, S. 37] zu finden ist.<sup>70</sup> Sie besitzt nun die scheinbar materiellen Randbedingungen

$$\overset{MA}{w}(t, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \overset{MA}{w}(t, l) = 0 \quad (3.47)$$

ohne Zeitabhängigkeit in der Position.

#### 3.3.2 Lösungsansatz in Operatornotation

In diesem Abschnitt wird das unter 3.3.1 hergeleitete Anfangswert-Randwert-Problem für eine beliebige Führungsgeschwindigkeit  $v$  der Randbedingungen analytisch gelöst. Dazu wird die rechte Seite der Bewegungsgleichung zunächst um die beliebige Funktion  $\tilde{g} \in \text{Abb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  ergänzt

$$\left( \partial_0^2 - 2v(m_0)\partial_1\partial_0 - (\partial_0 v)(m_0)\partial_1 + (v(m_0)^2 - c^2)\partial_1^2 \right) \overset{MA}{w} = \tilde{g} \quad . \quad (3.48)$$

<sup>69</sup> Hierbei symbolisiert der Multiplikationsoperator  $m$  die Multiplikation mit dem Argument, d. h.

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}_n} (m_i \circ h)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) := x_i h(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \quad . \quad (3.40)$$

Demnach ist  $h(m_i)$  als

$$h(m_i) = h(m_i \circ id(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})) = h(x_i) \quad (3.41)$$

zu verstehen. Außerdem beschreibt der Operator  $\tau$  eine Translation

$$\tau_{(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})} h(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = h(x_0 + k_0, x_1 + k_1, \dots, x_{n-1} + k_{n-1}) \quad . \quad (3.42)$$

<sup>70</sup> Die einzelnen Ersetzungen lauten hierbei

$$\partial_1 \left( \tau_{(0,-V(m_0))} \overset{MA}{w} \right) = \tau_{(0,-V(m_0))} \left( \partial_1 \overset{MA}{w} \right) \quad , \quad (3.44)$$

$$\partial_0 \left( \tau_{(0,-V(m_0))} \overset{MA}{w} \right) = \tau_{(0,-V(m_0))} \left( \partial_0 \overset{MA}{w} - v(m_0)\partial_1 \overset{MA}{w} \right) \quad , \quad (3.45)$$

$$\partial_0^2 \left( \tau_{(0,-V(m_0))} \overset{MA}{w} \right) = \tau_{(0,-V(m_0))} \left( v(m_0)^2 \partial_1^2 \overset{MA}{w} - 2v(m_0)\partial_1 \partial_0 \overset{MA}{w} + \partial_0^2 \overset{MA}{w} - \partial_0 v(m_0)\partial_1 \overset{MA}{w} \right) \quad . \quad (3.46)$$

Diese Gleichung beschreibt eine in Längsrichtung räumlich feste Saite mit in Längsrichtung bewegten Randbedingungen. Unter Ausnutzung der Produktregel

$$(\partial_0 - v(m_0)\partial_1)^2 = (\partial_0 - v(m_0)\partial_1) (\partial_0 - v(m_0)\partial_1) \quad (3.49)$$

$$= \partial_0^2 - \partial_0 (v(m_0)\partial_1) - v(m_0)\partial_1\partial_0 + v(m_0)\partial_1 (v(m_0)\partial_1) \quad (3.50)$$

$$= \partial_0^2 - 2v(m_0)\partial_0\partial_1 - (\partial_0 v) (m_0)\partial_1 + v(m_0)^2\partial_1^2 \quad (3.51)$$

und der Binomischen Formel (für Differentialoperatoren) lässt sich diese Gleichung auch als

$$((\partial_0 - v(m_0)\partial_1)^2 - (c\partial_1)^2) \overset{MA}{w} = \tilde{g} \quad (3.52)$$

$$(\partial_0 - (-c + v(m_0))\partial_1) (\partial_0 - (c + v(m_0))\partial_1) \overset{MA}{w} = \tilde{g} \quad (3.53)$$

schreiben. Ganz formal besteht die Lösung in der Invertierung des angegebenen Differentialoperators, d. h. sie hat die Form

$$\overset{MA}{w} = (\partial_0 - (c + v(m_0))\partial_1)^{-1} (\partial_0 - (-c + v(m_0))\partial_1)^{-1} \tilde{g} \quad (3.54)$$

Es genügt also, allgemein den Operator

$$\partial_0 - a(m_0)\partial_1 \quad (3.55)$$

zu invertieren, da sich der gesuchte Lösungsoperator aus diesem mit

$$a(m_0) := \pm c + v(m_0) \quad (3.56)$$

kombinieren lässt. Zunächst wird also die Transportgleichung

$$(\partial_0 - a(m_0)\partial_1) w = \tilde{h} \quad \text{mit} \quad \tilde{h} \in \text{Abb}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (3.57)$$

gelöst. Dazu sei neben der differenzierbaren Funktion  $h$  auch eine Funktion  $A$

$$A(t) := \int_{\bar{t} \in [0, t]} a(\bar{t}) \quad (3.58)$$

definiert. Dann gilt für diese Funktion

$$\partial_0 A(m_0) = a(m_0) \quad (3.59)$$

Desweiteren sei zunächst eine nicht näher spezifizierte Funktion  $H$  betrachtet

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.60)$$

Für diese Funktion folgt mit der Kettenregel für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

$$\partial_0 ((t, r) \mapsto H(t, r + A(t))) = (t, r) \mapsto (\partial_0 H + a(m_0)\partial_1 H) (t, r + A(t)) \quad , \quad (3.61)$$

$$\partial_1 ((t, r) \mapsto H(t, r + A(t))) = (t, r) \mapsto (\partial_1 H) (t, r + A(t)) \quad (3.62)$$

bzw. kurz in Operatornotation

$$\partial_0 (\tau_{(0, A(m_0))} H) = \tau_{(0, A(m_0))} (\partial_0 H + a(m_0)\partial_1 H) \quad , \quad (3.63)$$

$$\partial_1 (\tau_{(0, A(m_0))} H) = \tau_{(0, A(m_0))} (\partial_1 H) \quad (3.64)$$

Damit gilt

$$(\partial_0 - a(m_0)\partial_1) (\tau_{(0,A(m_0))} H) = \tau_{(0,A(m_0))} (\partial_0 H) \quad . \quad (3.65)$$

Der Vergleich mit Gl. (3.57) zeigt, dass  $\tau_{(0,A(m_0))} H$  eine Lösung von Gl. (3.57) ist, wenn

$$\tilde{h} = \tau_{(0,A(m_0))} (\partial_0 H) \quad (3.66)$$

angesetzt wird. Eine formale Lösung gelingt demnach, indem

$$(\partial_0 H) (t, r) = \tilde{h}(t, r - A(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_0 H = \tau_{(0,-A(m_0))} \tilde{h} \quad (3.67)$$

gelöst wird, d. h. es gilt<sup>71</sup>

$$H(t, r) = \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0,-A(m_0))} \tilde{h} \right) = \int_{\bar{t} \in [0,t]} \tilde{h}(\bar{t}, r - A(\bar{t})) \quad . \quad (3.68)$$

Mit der Rücksubstitution folgt

$$w(t, r) = H(t, r + A(t)) \quad (3.69)$$

$$= \int_{\bar{t} \in [0,t]} \tilde{h}(\bar{t}, r - A(\bar{t}) + A(t)) = \left( \tau_{(0,A(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0,-A(m_0))} \tilde{h} \right) \right) (t, r) \quad (3.70)$$

als Lösung von Gl. (3.57). Da der Zeitableitungsoperator im Allgemeinen nicht beschränkt invertierbar ist, wird im Folgenden die verallgemeinerte Zeitableitung verwendet, die auf dem gewichteten HILBERT-Raum  $H_{\nu,0}$  definiert ist (s. Abschnitt B.2).<sup>72</sup> Mithilfe einer Abschätzung lässt sich zeigen, dass die gefundene Zwischenlösung auch im gewichteten Raum  $H_{\nu,0}$  liegt

$$\|w\|_{\nu,0}^2 = \frac{1}{\nu^2} \|\tilde{h}\|_{\nu,0}^2 \quad . \quad (3.71)$$

Alternativ zur Herleitung dieser Abschätzung (s. Abschnitt B.3) lassen sich die Stetigkeitseigenschaften der Lösung auch an den zur Lösung verwendeten Operatoren zeigen. Für eine passend definierte Funktion  $f$  folgt aus der Translationsinvarianz des Integrals die Translationsinvarianz der Norm

$$\|\tau_{(0,\pm A(m_0))} f\|_{\nu,0}^2 = \int_{\bar{x}_0 \in \mathbb{R}} \int_{\bar{x}_1 \in \mathbb{R}} \|f(\bar{x}_0, \bar{x}_1 \pm A(\bar{x}_0))\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu\bar{x}_0) \quad (3.72)$$

$$= \int_{\bar{x}_0 \in \mathbb{R}} \int_{\bar{z}_1 \in \mathbb{R}} \|f(\bar{x}_0, \bar{z}_1)\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu\bar{x}_0) = \|f\|_{\nu,0}^2 \quad . \quad (3.73)$$

Für die Norm der verallgemeinerten Zeitableitung lässt sich

$$\|\partial_0^{-1} f\|_{\nu,0}^2 = \frac{1}{2\nu} \|f\|_{\nu,0}^2 \quad (3.74)$$

<sup>71</sup> Abweichend von der Definition gemäß Gl. (B.77) kann wegen  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die untere Grenze des Integrationsbereiches im Folgenden auch zu null gewählt werden.

<sup>72</sup> Neben der Invertierbarkeit für  $\nu \neq 0$  ist der verallgemeinerte Zeitableitungsoperator normaler Operator, der sich durch LAPLACE- und FOURIER-Transformation spektral zerlegen lässt. Letzteres hat Vorteile bei der Suche nach einer Lösungstheorie (s. hierzu auch [PICARD & MCGHEE 2011]).

finden (s. Abschnitt B.2), und aus der Beschränktheit der verwendeten Operatoren folgt die Beschränktheit der Verknüpfung dieser Operatoren. Damit erfüllt die gefundene Lösung des Hilfsproblems die Anforderungen an eine sinnvolle Lösung.

Mit den Annahmen zu Beginn dieses Abschnittes und der Überlegung

$$A(t) := \int_{\bar{t} \in [0, t]} (\pm c + v(\bar{t})) = \pm ct + V(t) \quad (3.75)$$

folgt nun für  $w^{\mathcal{M}^A}$  die Lösung

$$w^{\mathcal{M}^A} = \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, -cm_0 - V(m_0))} \tau_{(0, -cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, cm_0 - V(m_0))} \tilde{g} \right) \right) \quad (3.76)$$

$$= \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, -2cm_0)} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, cm_0 - V(m_0))} \tilde{g} \right) \right) , \quad (3.77)$$

die auf dem Gebiet  $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$  gültig ist. Diese Lösung lässt sich auch in die Integraldarstellung<sup>73</sup>

$$w^{\mathcal{M}^A}(t, s) = \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\bar{t} \in [0, \bar{t}]} \tilde{g}(\bar{t}, s - V(\bar{t}) + V(t) + c(\bar{t} - \bar{t}) + c(t - \bar{t})) \quad (3.83)$$

überführen und gilt für die zu Beginn dieses Abschnittes eingeführte allgemeine rechte Seite  $\tilde{g}$ .

Analog zu dem für die transformierte Bewegungsgleichung (3.43) beschriebenen Vorgehen kann auch ein Lösungsansatz für die Ausgangsgleichung (3.26) gefunden werden. Er lautet in Operatornotation

$$u^{\mathcal{M}^A} = \tau_{(0, cm_0)} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, -2cm_0)} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, cm_0)} \hat{g} \right) \right) \quad (3.84)$$

und in Integraldarstellung

$$u^{\mathcal{M}^A}(t, s) = \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\bar{t} \in [0, \bar{t}]} \hat{g}(\bar{t}, s + c(\bar{t} - \bar{t}) + c(t - \bar{t})) , \quad (3.85)$$

wobei die Funktion  $\hat{g}$  eine zunächst nicht näher spezifizierte rechte Seite der Bewegungsgleichung (3.26) bezeichnet. In einem weiteren Schritt werden nun mithilfe einer näher spezifizierten Funktion  $\hat{g}$  die Anfangsbedingungen in die Lösung eingearbeitet.

<sup>73</sup> Die Zwischenschritte lauten hierbei

$$w^{\mathcal{M}^A}(t, s) = \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, -2cm_0)} \partial_0^{-1} (\tilde{g}(t, s + ct - V(t))) \right) \quad (3.78)$$

$$= \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \tau_{(0, -2cm_0)} \int_{\bar{t} \in [0, t]} \tilde{g}(\bar{t}, s + c\bar{t} - V(\bar{t})) \right) \quad (3.79)$$

$$= \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \partial_0^{-1} \left( \int_{\bar{t} \in [0, t]} \tilde{g}(\bar{t}, s + c\bar{t} - V(\bar{t}) - 2c\bar{t}) \right) \quad (3.80)$$

$$= \tau_{(0, cm_0 + V(m_0))} \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\bar{t} \in [0, \bar{t}]} \tilde{g}(\bar{t}, s + c\bar{t} - V(\bar{t}) - 2c\bar{t}) \quad (3.81)$$

$$= \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\bar{t} \in [0, \bar{t}]} \tilde{g}(\bar{t}, s + c\bar{t} - V(\bar{t}) - 2c\bar{t} + ct + V(t)) . \quad (3.82)$$

### 3.3.3 Einarbeiten der Anfangsbedingungen

In Abschnitt 3.3.2 wird ein Lösungsansatz für die Bewegungsgleichung der Saite angegeben, der auf der Einführung einer nicht näher erklärten rechten Saite  $\hat{g}$  für diese Gleichung beruht. Da die Differentialgleichung des Ausgangsproblems homogen ist, muss für die Einarbeitung der Anfangsbedingungen eine Funktion  $\hat{g}$  gewählt werden, die zum Startzeitpunkt  $t = 0$  die Anfangsbedingungen in den Lösungsansatz überführt und für alle anderen Zeitpunkte verschwindet. Dazu wird im Folgenden die DIRAC-Distribution verwendet.<sup>74</sup>

Zunächst werden gegebene Anfangsverschiebungen in den Lösungsansatz eingearbeitet. Wenn die Funktion der rechten Seite<sup>75</sup> als

$$\hat{g}(t, s) := (\partial_0 \delta \otimes u_0)(t, s) := \partial_0 \delta(t) u_0(s) \quad (3.86)$$

und der Beginn der Bewegung zum Zeitpunkt  $\underline{t} = 0$  gewählt wird<sup>76</sup>, so folgt für die analytische Lösung

$${}^{MA}u(t, s) = \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\bar{i} \in [0, \bar{t}]} (\partial_0 \delta \otimes u_0)(\bar{t}, s + \bar{c}\bar{t} - 2c\bar{t} + ct) \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\bar{t} \in [0, t]} (\delta \otimes u_0)(\bar{t}, s + \bar{c}\bar{t} - 2c\bar{t} + ct) \Big|_{\bar{t}=\bar{t}} + \dots \\ &\dots - \int_{\bar{t} \in [0, t]} \chi_{\mathbb{R}_{>0}}(\bar{t}) \partial_0 u_0(s + \bar{c}\bar{t} - 2c\bar{t} + ct) c \Big|_{\bar{t}=0} \quad (3.88) \end{aligned}$$

$$= \int_{\bar{t} \in [0, t]} (\delta \otimes u_0)(\bar{t}, s + ct - \bar{c}\bar{t}) - c \int_{\bar{t} \in (0, t]} \partial_0 u_0(s - 2c\bar{t} + ct) \quad (3.89)$$

$$= \left( u_0(s + ct) - c \int_{\bar{t} \in (0, t]} \partial_0 u_0(s - 2c\bar{t} + ct) \right) . \quad (3.90)$$

Mit der Substitution<sup>77</sup>

$$\phi(\tilde{s}) := -\frac{1}{2c}(\tilde{s} - s - ct) \quad , \quad (3.91)$$

$$\phi^{-1}(\tilde{t}) = s - 2c\tilde{t} + ct \quad , \quad (3.92)$$

$$\partial_0 \phi(\tilde{s}) = -\frac{1}{2c} \quad (3.93)$$

<sup>74</sup> Bei Gleichungsumstellungen wird z. T. auf die Hilfsrechnungen zur DIRAC-Distribution in Abschnitt B.4 zurückgegriffen.

<sup>75</sup> Dabei geht das dyadische Produkt zwischen zwei skalarwertigen Funktionen in die skalare Multiplikation über und die Argumente werden den jeweiligen Funktionen in ihrer Reihenfolge zugeordnet (s. Gl. (3.86)).

<sup>76</sup> Aus der Wahl dieses Zeitpunktes folgt  $V(0) = 0$ .

<sup>77</sup> Hierbei bezeichnet  $\phi^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $\phi$ .



ergibt sich schließlich für alle  $(t, s) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, l])$

$$\mathcal{M}^A u(t, s) = \left( u_0(s + ct) - c \int_{\tilde{t} \in \phi^{-1}((0, t))} (\partial_0 u_0 \circ \phi)(\tilde{s}) \partial_0 \phi(\tilde{s}) \right) \quad (3.94)$$

$$= \left( u_0(s + ct) + \frac{c}{2c} u_0(s - ct) - \frac{c}{2c} u_0(s + ct) \right) \quad (3.95)$$

$$= \frac{1}{2} (u_0(s + ct) + u_0(s - ct)) \quad . \quad (3.96)$$

als Lösung für gegebene Anfangsverschiebungen  $u_0$  und eine beliebige Führungsgeschwindigkeit  $v$ .

Zur Untersuchung der Lösung für eine gegebene Anfangsverschiebungsgeschwindigkeit wird als rechte Seite

$$\hat{g}(t, s) := (\delta \otimes u_1)(t, s) := \delta(t) u_1(s) \quad (3.97)$$

gewählt. Mit zu den vorherigen Überlegungen analogen Annahmen folgt für die analytische Lösung

$$\mathcal{M}^A u(t, s) = \int_{\bar{t} \in [0, t]} \int_{\tilde{t} \in [0, \bar{t}]} (\delta \otimes u_1)(\bar{t}, s + c\bar{t} - 2c\tilde{t} + ct) \quad (3.98)$$

$$= \int_{\bar{t} \in [0, t]} \chi_{\mathbb{R}_{>0}}(\bar{t}) u_1(s + c\bar{t} - 2c\tilde{t} + ct) \Big|_{\tilde{t}=0} \quad (3.99)$$

$$= \int_{\bar{t} \in (0, t]} u_1(s - 2c\bar{t} + ct) \quad . \quad (3.100)$$

Mit derselben Substitution wie bei der vorherigen Lösung (Gln. (3.91) bis (3.93)) und der gleichen Annahme bezüglich des Beginns der Bewegung ergibt sich die Lösung für alle  $(t, s) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, l])$  zu

$$\mathcal{M}^A u(t, s) = \frac{1}{2c} (U_1(s + ct) - U_1(s - ct)) \quad , \quad (3.101)$$

wobei  $U_1$  eine Stammfunktion von  $u_1$  sei. Die Kombination der gefundenen Lösungsansätze für gegebene Anfangsverschiebungen und gegebene Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten ergibt den D'ALEMBERT-Lösungsansatz

$$\mathcal{M}^A u(t, s) = \frac{1}{2} (u_0(s + ct) + u_0(s - ct)) + \frac{1}{2c} (U_1(s + ct) - U_1(s - ct)) \quad , \quad (3.102)$$

der auch in [WAGNER & MEINHOLD 1989, S. 60] beschrieben wird und für alle

$$(t, s) \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, l]) \quad (3.103)$$

gültig ist.

Mithilfe der für ein beliebiges, aber festes  $\bar{s} \in \mathbb{R}$  definierten Hilfsfunktionen

$$g(s) := \frac{1}{2} \left( u_0(s) + \frac{1}{c} (U_1(s) - U_1(\bar{s})) \right) \quad , \quad (3.104)$$

$$h(s) := \frac{1}{2} \left( u_0(s) - \frac{1}{c} (U_1(s) - U_1(\bar{s})) \right) \quad (3.105)$$

lässt sich dieser allgemeine Ansatz auch zu

$${}^{\mathcal{M}A}u(t, s) = g(s + ct) + h(s - ct) \quad (3.106)$$

umformulieren.

Die Anfangsbedingungen können auch in den Lösungsansatz des transformierten Problems eingearbeitet werden. Mit der eingeführten Transformation aus Gl. (3.39) folgen für die Übertragung der Anfangswerte die Zusammenhänge

$$u_0(s) = {}^{\mathcal{M}A}u(0^+, s) = {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s - V(0^+)) = {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) =: w_0(s) \quad , \quad (3.107)$$

$$u_1(s) = \partial_0 {}^{\mathcal{M}A}u(0^+, s) = \left( \partial_0 {}^{\mathcal{M}A}w - v(m_0) \partial_1 {}^{\mathcal{M}A}w \right) (0^+, s - V(0^+)) \quad (3.108)$$

$$= \partial_0 {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) - v(0) \partial_1 {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) = w_1(s) - v(0) (\partial_0 w_0)(s) \quad . \quad (3.109)$$

wobei die Funktion  $w_1$  durch

$$w_1(s) := {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) \quad (3.110)$$

definiert ist. Mit  $W_1$  als Stammfunktion von  $w_1$  kann demzufolge der Lösungsansatz für das transformierte Problem als

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{M}A}w(t, s) &= \frac{1}{2} (w_0(s + ct + V(t)) + w_0(s - ct + V(t))) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2c} ((W_1 - v(0)w_0)(s + ct + V(t)) - (W_1 - v(0)w_0)(s - ct + V(t))) \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c - v(0)}{2c} w_0(s + ct + V(t)) + \frac{c + v(0)}{2c} w_0(s - ct + V(t)) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2c} (W_1(s + ct + V(t)) - W_1(s - ct + V(t))) \end{aligned} \quad (3.112)$$

angegeben werden. Wie die Überprüfung

$${}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) = \frac{c - v(0)}{2c} w_0(s) + \frac{c + v(0)}{2c} w_0(s) + \frac{1}{2c} (W_1(s) - W_1(s)) = w_0(s) \quad , \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 {}^{\mathcal{M}A}w(0^+, s) &= \frac{c - v(0)}{2c} w_0(s) (c + v(0)) + \frac{c + v(0)}{2c} w_0(s) (-c + v(0)) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2c} (w_1(s) (c + v(0)) - w_1(s) (-c + v(0))) = w_1(s) \end{aligned} \quad (3.114)$$

zeigt, erfüllt dieser Lösungsansatz die Anfangsbedingungen des transformierten Problems.

Die unterschiedliche Vorgabe der Anfangsbedingungen für das Ausgangssystem und das transformierte Problem kann an Sonderfällen näher untersucht werden. Werden beispielsweise im Ausgangssystem die Anfangsbedingungen

$$\overset{MA}{u}(0^+, s) := u_0(s) \quad \text{und} \quad \partial_0 \overset{MA}{u}(0^+, s) := u_1(s) := 0 \quad (3.115)$$

vorgegeben, so entspricht dies im transformierten System gerade den Anfangsbedingungen

$$w_0(s) := u_0(s) \quad \text{und} \quad w_1(s) := v(0) (\partial_0 u_0)(s) \quad . \quad (3.116)$$

Demzufolge sind im transformierten System Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten vorzugeben, obwohl selbige im Ausgangssystem verschwinden. Umgekehrt entspricht die Vorgabe von Anfangswerten mit verschwindenden Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten im transformierten System

$$\overset{MA}{w}(0^+, s) := w_0(s) \quad \text{und} \quad \partial_0 \overset{MA}{w}(0^+, s) := w_1(s) := 0 \quad (3.117)$$

gerade den Anfangsbedingungen

$$u_0(s) := w_0(s) \quad \text{und} \quad u_1(s) := -v(0) (\partial_0 w_0)(s) \quad (3.118)$$

im Ausgangssystem. Für verschwindende Anfangsverschiebungen stimmen die Anfangsbedingungen für das Ausgangssystem und das transformierte System überein.

### 3.3.4 Einarbeiten der Randbedingungen

Nachdem der allgemeine Lösungsansatz aus Abschnitt 3.3.2 im darauffolgenden Abschnitt 3.3.3 mithilfe der Anfangsbedingungen eingeschränkt wurde, sind nun noch die Randbedingungen einzuarbeiten. Ausgangspunkt hierfür ist der Ansatz nach Gl. (3.106). Wie sich an den Argumenten der Funktionen  $g$  bzw.  $h$  ablesen lässt, sind diese über das Gebiet  $[0, l]$  hinaus fortzusetzen. Mithilfe der Fortsetzungen  $\bar{g}$  bzw.  $\bar{h}$  der Funktionen  $g$  bzw.  $h$  lautet der Ansatz dementsprechend<sup>78</sup>

$$\overset{MA}{u}(t, s) = \bar{g}(s + ct) + \bar{h}(s - ct) \quad . \quad (3.120)$$

Für die Randbedingungen aus den Gln. (3.29) und (3.30) folgt demnach

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bar{g}(V(t) + ct) + \bar{h}(V(t) - ct) = 0 \quad , \quad (3.121)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bar{g}(V(t) + ct + l) + \bar{h}(V(t) - ct + l) = 0 \quad . \quad (3.122)$$

Nun werden die Hilfsfunktionen  $r_{\pm}$

$$\begin{aligned} r_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow b_{\pm} = \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s \geq 0\} \\ t &\mapsto r_{\pm}(t) := V(t) \pm ct \end{aligned} \quad (3.123)$$

<sup>78</sup> Wie sich durch Einsetzen zeigen lässt, erfüllt auch die Fortsetzung des Ansatzes nach Gl. (3.106) die homogene Differentialgleichung (3.26). Darüber hinaus werden wegen

$$\bigwedge_{s \in [0, l]} \bar{g}(s) := g(s) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{s \in [0, l]} \bar{h}(s) := h(s) \quad (3.119)$$

auch die Anfangsbedingungen erfüllt.

und ihre Umkehrfunktionen  $r_{\pm}^{-1}$

$$r_{\pm}^{-1} : b_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (3.124)$$

definiert. Für die Invertierung der Funktionen  $r_{\pm}$  muss dabei die Bedingung

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |v(t)| < c \quad (3.125)$$

erfüllt werden. Demnach entstehen aus Gl. (3.121) mittels der Funktionen  $r_{\pm}$  die Ausdrücke

$$\bigwedge_{s \in b_+} \bar{g}(s) = -\bar{h}(s - 2cr_+^{-1}(s)) \Leftrightarrow \bar{g} = -\bar{h} \circ r_- \circ r_+^{-1} \quad , \quad (3.126)$$

$$\bigwedge_{s \in b_-} \bar{h}(s) = -\bar{g}(s + 2cr_-^{-1}(s)) \Leftrightarrow \bar{h} = -\bar{g} \circ r_+ \circ r_-^{-1} \quad . \quad (3.127)$$

Durch Einsetzen dieser Bedingungen in Gl. (3.120) wird

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bigwedge_{s \in [0, l]} \overset{MA}{u}(t, s) = \begin{cases} \bar{g}(s + ct) - \bar{g}(s - ct + 2cr_-^{-1}(s - ct)) & , (s - ct) \in b_+ \\ \bar{h}(s - ct) - \bar{h}(s + ct + 2cr_+^{-1}(s + ct)) & , (s + ct) \in b_- \end{cases} \quad (3.128)$$

erhalten.<sup>79</sup> Mit Gl. (3.122) werden daraus Bedingungen für die Fortsetzung der Funktion  $g$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bigwedge_{(V(t) - ct + l) \in b_-} \bar{g}(V(t) + ct + l) = \bar{g}(V(t) - ct + l + 2cr_-^{-1}(V(t) - ct + l)) \quad (3.129)$$

bzw. der Funktion  $h$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bigwedge_{(V(t) + ct + l) \in b_+} \bar{h}(V(t) - ct + l) = \bar{h}(V(t) + ct + l + 2cr_+^{-1}(V(t) + ct + l)) \quad . \quad (3.130)$$

Mithilfe der Hilfsfunktionen  $R_{\pm}$

$$\begin{aligned} R_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow B_{\pm} = \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s \geq l\} \\ t &\mapsto R_{\pm}(t) := r_{\pm}(t) + l = V(t) \pm ct + l \end{aligned} \quad (3.131)$$

und ihrer Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} R_{\pm}^{-1} : B_{\pm} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto R_{\pm}^{-1}(s) = r_{\pm}^{-1}(s - l) \end{aligned} \quad (3.132)$$

können diese Bedingungen auch als

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bigwedge_{(R_+(t) - 2ct) \in b_-} \bar{g}(R_+(t)) = \bar{g}(R_+(t) - 2ct + 2cr_-^{-1}(R_+(t) - 2ct)) \quad , \quad (3.133)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \bigwedge_{(R_-(t) + 2ct) \in b_+} \bar{h}(R_-(t)) = \bar{h}(R_-(t) + 2ct + 2cr_+^{-1}(R_-(t) + 2ct)) \quad (3.134)$$

<sup>79</sup> Dabei ist nicht ohne weiteres davon auszugehen, dass die zwei Bereiche, auf denen diese Funktion definiert ist disjunkt sind.

geschrieben werden. Daraus folgen schließlich die Ausdrücke

$$\bigwedge_{s \in B_+} \bigwedge_{(s-2cR_+^{-1}(s)) \in b_-} \bar{g}(s) = \bar{g}(s + L_g(s)) := \bar{g}(s - 2cR_+^{-1}(s) + 2cr_-^{-1}(s - 2cR_+^{-1}(s))) \quad (3.135)$$

bzw.

$$\bigwedge_{s \in B_-} \bigwedge_{(s+2cR_-^{-1}(s)) \in b_+} \bar{h}(s) = \bar{h}(s + L_h(s)) := \bar{h}(s + 2cR_-^{-1}(s) - 2cr_+^{-1}(s + 2cR_-^{-1}(s))) \quad (3.136)$$

als Fortsetzungsbedingungen für die Funktionen  $g$  bzw.  $h$ . Die Gesamtlösung ist demnach durch den Ansatz gemäß Gl. (3.128) und die Bedingungen nach den Gln. (3.135) und (3.136) festgelegt.

Ein besonders anschaulicher Fall der Fortsetzung entsteht, wenn die Größen  $L_g$  und  $L_h$  Konstanten sind, denn dann sind die Funktionen  $\bar{g}$  bzw.  $\bar{h}$  periodische Funktionen und  $|L_g|$  bzw.  $|L_h|$  die zugehörigen Perioden. Gleichbedeutend für die geforderte Periodizität von  $\bar{g}$  ist die Bedingung

$$\partial_0 L_g = 0 \quad , \quad (3.137)$$

die sich nach kurzer Rechnung in den Ausdruck

$$v = v \circ r_-^{-1} \circ R_- \quad (3.138)$$

umformen lässt. Damit kann die Funktion  $g$  nur dann periodisch fortgesetzt werden, wenn  $v = \text{const.}$  oder  $l = 0$  gefordert wird.<sup>80</sup> Für den Sonderfall einer konstanten Führungsgeschwindigkeit wird im folgenden Abschnitt die periodische Fortsetzung der Hilfsfunktionen  $g$  und  $h$  erläutert. Der Fall  $l = 0$  ist aus mechanischer Sicht nicht sinnvoll.

### Sonderfall einer positiven, konstanten Führungsgeschwindigkeit

Im Fall  $v := \text{const.} \geq 0$  vereinfachen sich die im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Zwischenschritte der analytischen Lösung.<sup>81</sup> Unter anderem können die Hilfsfunktionen  $r_\pm$

$$\begin{aligned} r_\pm : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow b_\pm = \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s \geq 0\} \\ t &\mapsto r_\pm(t) := (v \pm c)t \end{aligned} \quad (3.139)$$

und deren Umkehrfunktionen  $r_\pm^{-1}$

$$\begin{aligned} r_\pm^{-1} : b_\pm &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto r_\pm^{-1}(s) = \frac{s}{v \pm c} \end{aligned} \quad (3.140)$$

konkretisiert werden. Mit der Abkürzung

$$\alpha := \frac{c - v}{c + v} \quad (3.141)$$

<sup>80</sup> Für die periodische Fortsetzung der Funktion  $h$  kann die gleiche Aussage gefunden werden.

<sup>81</sup> Für eine negative, konstante Führungsgeschwindigkeit ergeben sich analoge Überlegungen.

lauten insbesondere die Gln. (3.126) und (3.127)

$$\bigwedge_{s \geq 0} \quad \bar{g}(s) = -\bar{h}\left(s - 2c \frac{s}{v+c}\right) = -\bar{h}(-\alpha s) \quad , \quad (3.142)$$

$$\bigwedge_{s \leq 0} \quad \bar{h}(s) = -\bar{g}\left(s + 2c \frac{s}{v-c}\right) = -\bar{g}\left(-\frac{1}{\alpha} s\right) \quad (3.143)$$

sowie die Gln. (3.135) und (3.136)

$$\bigwedge_{s \geq 2c/(c-v)} \quad \bar{g}(s) = \bar{g}(s + L_g) := \bar{g}\left(s - \frac{2c}{c+v} l\right) \quad , \quad (3.144)$$

$$\bigwedge_{s \leq l} \quad \bar{h}(s) = \bar{h}(s + L_h) := \bar{h}\left(s + \frac{2c}{c-v} l\right) \quad . \quad (3.145)$$

Damit ist die jeweilige Fortsetzung der Funktionen  $g$  und  $h$  festgelegt und die Verschiebungsfunktion kann für eine positive, konstante Führungsgeschwindigkeit als

$$u^{MA}(t, s) = \bar{g}(s + ct) + \bar{h}(s - ct) \quad (3.146)$$

angegeben werden. Hierbei lauten die Funktionen  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$

$$\bar{g}(s) := \begin{cases} g(s) = \frac{1}{2}u_0(s) + \frac{1}{2c}U_1(s) & , s \in [0, l] \\ -\bar{h}(-\alpha s) & , s \in (l, |L_g|) \\ \bar{g}(s - |L_g|) & , s \geq |L_g| \\ \text{(ggf. mehrfach auszuführen)} & \end{cases} \quad , \quad (3.147)$$

$$\bar{h}(s) := \begin{cases} h(s) = \frac{1}{2}u_0(s) - \frac{1}{2c}U_1(s) & , s \in [0, l] \\ -\bar{g}\left(-\frac{s}{\alpha}\right) & , s \in (l - |L_h|, 0) \\ \bar{h}(s + |L_h|) & , s \leq (l - |L_h|) \\ \text{(ggf. mehrfach auszuführen)} & \end{cases} \quad . \quad (3.148)$$

Demnach werden die Funktionen  $g$  bzw.  $h$  für alle  $s \geq 0$  bzw. für alle  $s \leq l$  periodisch fortgesetzt.<sup>82</sup>

An dem Sonderfall einer positiven, konstanten Führungsgeschwindigkeit lässt sich die periodische Fortsetzung der Anfangswerte besonders gut veranschaulichen (s. Abb. 3.5). Wie sich erkennen lässt, ist die Periode  $|L_g|$  der Funktion  $\bar{g}$  abhängig von der konstanten Führungsgeschwindigkeit und betragsmäßig größer oder gleich dem doppelten Abstand der Lager, welches der Periodenlänge für eine verschwindende Führungsgeschwindigkeit entspricht. Die Periode  $|L_h|$  der Funktion  $\bar{h}$  hingegen liegt betragsmäßig zwischen dem einfachen und dem doppelten Lagerabstand.

Die Gesamtlösung aus Teilfunktionen auf ähnliche Weise zusammensetzen wurde bereits in [SKUTSCH 1897] als grafisches Verfahren und in [MIRANKER 1960] verbal angegeben. Mit den in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen gelingt eine direkte Lösung.

<sup>82</sup> Es sei bemerkt, dass die angegebene Fortsetzung lückenlos ist. Dies betrifft insbesondere die Bereiche, in denen die Funktion  $\bar{g}$  durch die Funktion  $\bar{h}$  ausgedrückt ist und umgekehrt.

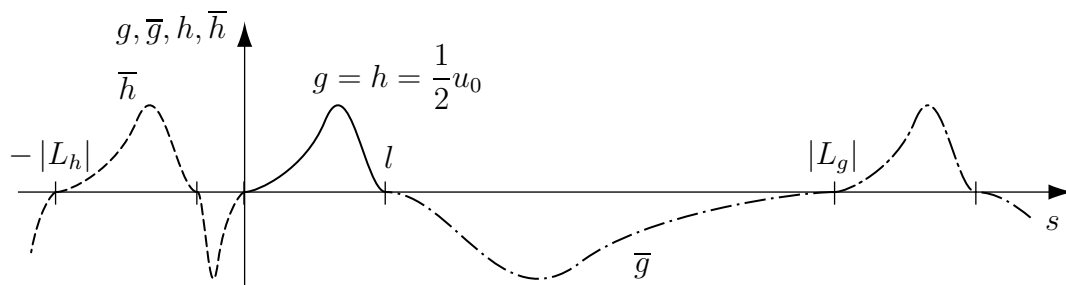


Abbildung 3.5: Periodische Fortsetzung der Funktionen  $g$  und  $h$  über die auf dem Intervall  $[0, l]$  gegebenen Anfangswerte  $u_0$  hinaus für den Fall verschwindender Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten ( $u_1 = 0$ )

### Sonderfall einer verschwindenden Führungsgeschwindigkeit

Im Fall einer verschwindenden Führungsgeschwindigkeit  $v$  kann eine analytische Lösung gemäß der Gln. (3.146), (3.147) und (3.148) für  $v = 0$  und  $\alpha = 1$  angegeben werden. Als Lösung ergibt sich die zu erwartende klassische Lösung nach D'ALEMBERT

$$\overset{MA}{u}(t, s) = \frac{1}{2} (\bar{u}_0(s + ct) - \bar{u}_0(-(s - ct))) + \frac{1}{2c} (\bar{U}_1(s + ct) - \bar{U}_1(-(s - ct))) \quad (3.149)$$

mit der  $2l$ -periodischen Fortsetzung der Anfangswerte

$$\bar{u}_0(s) := \begin{cases} u_0(s) & , s - 2kl \in [0, l] \\ -u_0(-s) & , s - 2kl \in [-l, 0) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad , \quad (3.150)$$

$$\bar{U}_1(s) := \begin{cases} U_1(s) & , s - 2kl \in [0, l] \\ U_1(-s) & , s - 2kl \in [-l, 0) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad . \quad (3.151)$$

Wie sich ablesen lässt, werden demnach in dem dargestellten Sonderfall die Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  ungerade fortgesetzt.

### 3.3.5 Numerische Umsetzung

Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete analytische Lösung ist zur Auswertung und zur Durchführung von Parameterstudien als Computerprogramm umzusetzen. Charakteristisch für die Lösung nach dem Integrationsansatz ist die Zusammensetzung der Lösung aus den Hilfsfunktionen  $V$ ,  $U_1$ ,  $r_{\pm}$ ,  $L_g$ ,  $L_h$ ,  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$ . Das Berechnungsschema in Abb. 3.6 gibt diesen Sachverhalt und die Zusammenstellung der Lösung wieder. Im Rahmen dieser Arbeit wurden alle im Folgenden dargestellten Lösungen objektorientiert mithilfe der Skriptsprache PYTHON implementiert.

Nach der Instanziierung der Lösungsklasse unter Vorgabe geometrischer und materieller Parameter wird die Lösungsklasse initialisiert. Dabei werden alle zeit- und ortsunabhängigen Hilfsgrößen und -funktionen ermittelt. Im Anschluss daran wird die Lösung für einen vorgegebenen Zeit- und Ortsbereich berechnet. In jedem Zeitschritt  $t$  wird dafür zunächst unter Zuhilfenahme der Funktion der Führungsgeschwindigkeit  $v$  per numerischer Integration der von den Lagern zurückgelegte Weg  $V$  bestimmt. Anschließend wird im Fall einer vorgegebenen Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktion die zugehörige Funktion  $U_1$  ermittelt.

Nach der numerischen Invertierung der Hilfsfunktionen  $r_+$  und  $r_-$  kann die Fortsetzung der Anfangsbedingungen zusammengestellt werden. Abschließend wird die Lösungsfunktion für diskrete Orte in jedem Zeitschritt berechnet und ausgegeben.

Insgesamt ist die Berechnung aus numerischer Sicht infolge der zahlreichen numerischen Integrationen als relativ aufwendig anzusehen. Darüber hinaus ergeben sich ggf. numerische Instabilitäten durch die numerische Invertierung der Hilfsfunktionen  $r_+$  und  $r_-$ .

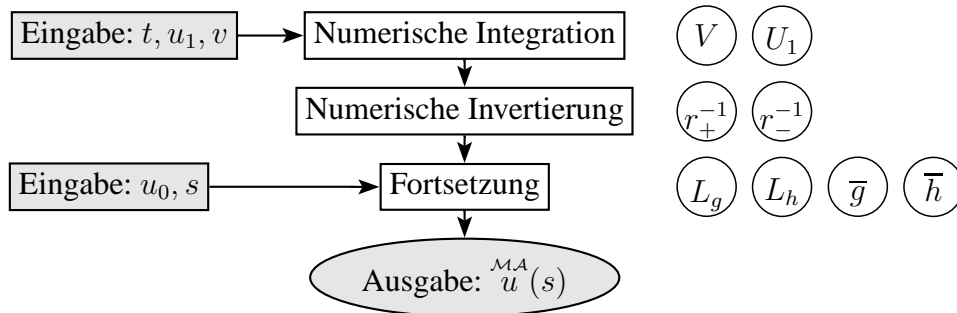


Abbildung 3.6: Schema der numerischen Umsetzung der Lösung mittels Integrationsansatz

Eine Möglichkeit zur Verringerung der Berechnungsdauer ist vor allem bei der numerischen Integration zu sehen. Bei der Vorgabe passender Funktionen wird diese deshalb vom vorgestellten Programm mit symbolischen Operationen innerhalb des Programmpaketes SYMPY umgesetzt. Eine weitere Verbesserung stellt die Verwendung sogenannter Map-Funktionen dar. Dabei wird der benötigte Definitionsbereich der Hilfsfunktionen (unter dem Einfluss von  $V(t)$ ) abgeschätzt, in der Initialisierungsphase für bestimmte Zeitschritte berechnet und in einem Feld (der sogenannte Map) abgespeichert. In jedem Zeitschritt werden nachfolgend die benötigten Werte aus dem vorher bestimmten Definitionsbereich der Hilfsfunktion interpoliert.

### 3.3.6 Auswertung

Mit der numerischen Implementierung der analytischen Lösung lässt sich das charakteristische Verhalten von eindimensionalen Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen am Beispiel der axial unbewegten Saite mit axial bewegten Randbedingungen für verschiedene Eingangsparameter untersuchen. Dazu wird die auf die jeweilige Amplitude  $\hat{u}$  bezogene transversale Verschiebung der Saite  $u^{MA}$  im Folgenden über die normierte Zeit  $t/(l/c)$  und die normierte materielle Koordinate  $s/l$  aufgetragen (s. Abb. 3.7). Um trotz der Normierung die Größenordnung der Parameter abschätzen zu können, sei die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für die  $a'$ -Saite einer Gitarre (der freien Saitenlänge  $l = 55$  cm) mithilfe der auf TAYLOR zurückgehenden Formel (s. [SZABÓ 1987, S. 324])

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{N_0}{\rho}} \quad (3.152)$$

und der Definition von  $c$  angegeben

$$c = 2lf = 2 \cdot 55 \text{ cm} \cdot 440 \text{ Hz} = 484 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.153)$$

Zunächst wird das Lösungsverhalten für eine konstante Führungsgeschwindigkeit und verschiedene Anfangsverschiebungsfunktionen und Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktionen analysiert. Dazu werden einerseits die differenzierbare Sinusfunktion

$$u_0(s) := \hat{u} \sin\left(\pi \frac{s}{l}\right) \quad (3.154)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (3.155)$$



und andererseits die nicht (streng) differenzierbare Dreiecksfunktion

$$u_0(s) := \begin{cases} 2\hat{u}\frac{s}{l} & , s \in [0, l/2] \\ 2\hat{u}\left(1 - \frac{s}{l}\right) & , s \in (l/2, l] \end{cases} , \quad (3.156)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (3.157)$$

als Anfangsverschiebungsfunktionen vorgegeben. Die zugehörigen Lösungsverläufe sind in den Abb. 3.7 bzw. 3.8(a) dargestellt. Für den Zeitpunkt  $t = 0$  kann in Abb. 3.7(a) die sinusförmige Funktion der Anfangsverschiebung abgelesen werden.

Für beide Beispiele beträgt der Lagerabstand  $l$  und es wird der Herleitung folgend eine kleine Amplitude angenommen ( $\hat{u} \ll l$ ). Außerdem wird die Führungsgeschwindigkeitsfunktion zu

$$v(t) := 0,25c \quad (3.158)$$

gewählt. Demnach beträgt die Führungsgeschwindigkeit innerhalb des gewählten Zeitintervalls  $t \in [0, 4]l/c$  konstant 25 Prozent der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Wegen der axial bewegten Randbedingungen sind die Ergebnisse im Bereich  $s \in [0, 2]l$  dargestellt (s. Abb. 3.7).

Aus der Normierung der Zeit lässt sich eine Skalierung der Lösung mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ablesen. Insbesondere streckt eine kleine Wellenausbreitungsgeschwindigkeit die Lösung in Richtung der Zeitachse, während sie durch eine größere Wellenausbreitungsgeschwindigkeit gestaucht wird. Insgesamt ist der Lösungsverlauf in der Zeit aufgrund des harmonischen Ansatzes in der analytischen Lösung periodisch und die Amplitude bleibt über die Zeit konstant, da Dämpfungseffekte im Modell nicht berücksichtigt wurden.

Die nichtmateriellen Randbedingungen können in den zweidimensionalen Projektionen der Abb. 3.7(b) und 3.8(a) untersucht werden. In diesen Darstellungen sind Trajektorien der sich bewegenden Lager mit dickeren, schwarzen Linien hervorgehoben. Da die Führungsgeschwindigkeitsfunktion konstant ist, folgen die Trajektorien der Lager mit der Definition gemäß Gl. (3.31) der linearen Funktion  $V$

$$V(t) = 0,25l \left( \frac{c}{l}t \right) . \quad (3.159)$$

Dementsprechend ergäben sich für den Fall des einführenden Beispiels (vgl. Abb. 1.4(a)) ebenfalls Geradengleichungen für die Trajektorien.

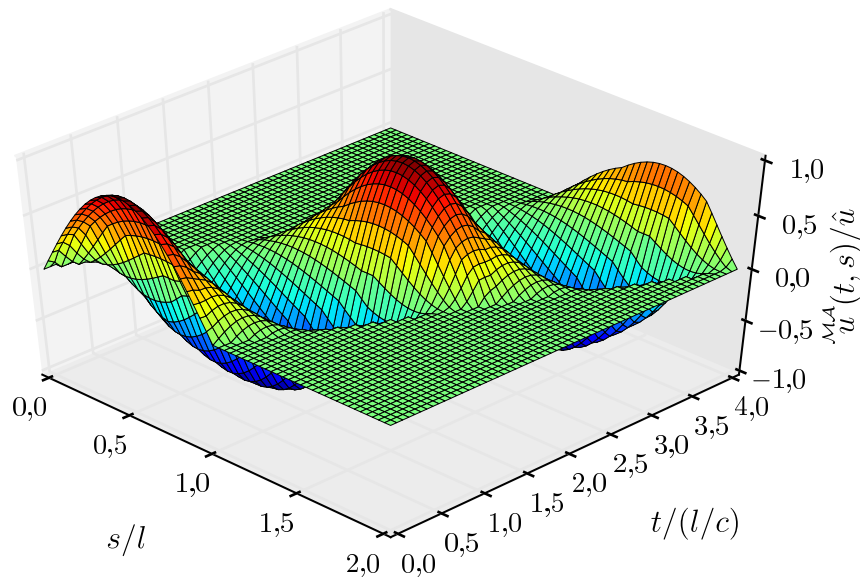
Ein weiteres Beispiel ist durch den Lösungsverlauf von Abb. 3.8(b) gegeben. Dieser entsteht durch verschwindende Anfangsverschiebungen und nicht (streng) differenzierbare Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten (Dreiecksfunktion)

$$u_0(s) := 0 , \quad (3.160)$$

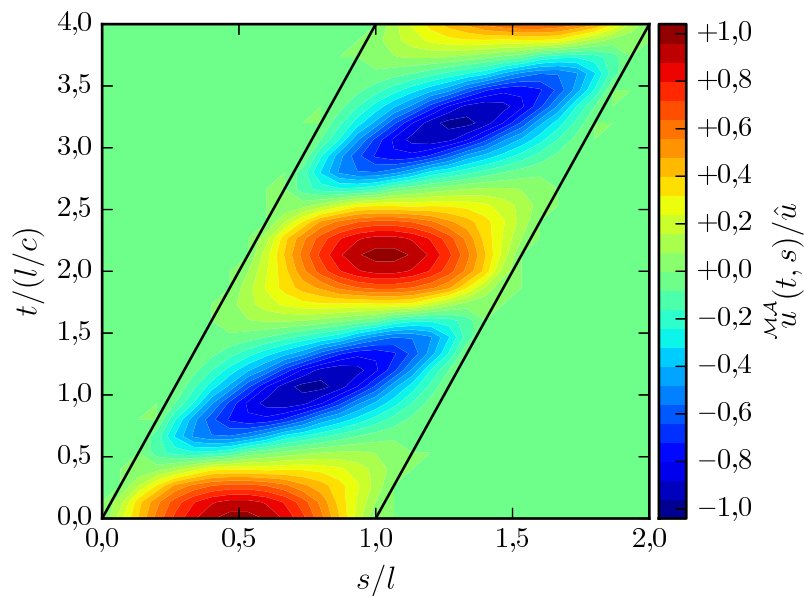
$$u_1(s) := \begin{cases} 2\hat{u}\frac{s}{l} & , s \in [0, l/2] \\ 2\hat{u}\left(1 - \frac{s}{l}\right) & , s \in (l/2, l] \end{cases} . \quad (3.161)$$

Analog den vorherigen Festlegungen ist dabei  $\hat{u}$  die als bekannt vorausgesetzte Amplitude der Geschwindigkeitsfunktion. Damit die Darstellung auch auf eine Amplitude der Verschiebungsfunktion bezogen werden kann, findet folgender Zusammenhang Verwendung

$$\hat{u} = \hat{u} \frac{c\pi}{l} \Leftrightarrow \hat{u} = \hat{u} \frac{l}{c\pi} . \quad (3.162)$$



(a) dreidimensionale Darstellung



(b) zweidimensionale Darstellung (Projektion). Die Trajektorien der sich bewegenden Lager sind durch schwarze Linien hervorgehoben.

Abbildung 3.7: Lösung für sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten (konstante Führungsgeschwindigkeitsfunktion  $v$ )

Im Vergleich zu den bereits diskutierten Lösungsverläufen ist erwähnenswert, dass das Verschiebungsfeld der Lösung trotz der Vorgabe einer nicht (streng) differenzierbaren Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktion differenzierbar ist. Dies ist auf die Integration der Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktion<sup>83</sup> innerhalb des Lösungsprozesses zurückzuführen, welche den vorausgesetzten abschnittsweise linearen Verlauf der Geschwindigkeiten in einen abschnittsweise quadratischen Verlauf der Verschiebungen überführt.

Darüber hinaus sei an dieser Stelle die in allen Lösungsverläufen dieses Abschnittes auftretende Vergrößerung der Periodendauer der Saitenschwingung erläutert. Wie bereits in Abschnitt 1.3 angedeutet wurde, hängt diese Vergrößerung mit der Wellenausbreitung innerhalb der Saite zusammen. Die Periodendauer ist gerade der Zeitraum, den ein Signal benötigt, um sich nach der Reflektion an beiden Randbedingungen wieder am Ausgangsort zu befinden. Demnach setzt sie sich aus zwei Anteilen zusammen. Zum einen ist dies die Zeit, in der sich das Signal in  $s$ -Richtung bewegt

$$T_1 = \frac{1}{c-v}l \quad (3.164)$$

und zum anderen der Zeitraum für die Bewegung in entgegengesetzter Richtung

$$T_2 = \frac{1}{c+v}l \quad . \quad (3.165)$$

Insgesamt ergibt sich somit eine Periodendauer von

$$T_{\text{nm}} = \frac{2c}{c^2 - v^2}l \quad , \quad (3.166)$$

die für eine Geschwindigkeit  $v > 0$  größer ist als die Periodendauer der klassischen Lösung ( $v = 0$ )

$$T_{\text{cl}} = \frac{2}{c}l \quad . \quad (3.167)$$

Für die Beispiele in diesem Abschnitt ergibt sich bei einer Führungsgeschwindigkeit von  $v = 0,25c$  insbesondere ein Wert von

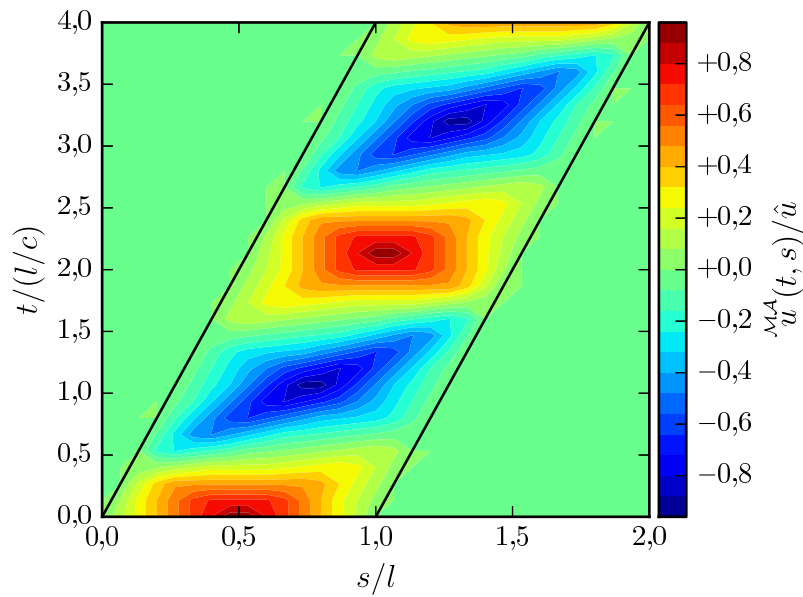
$$T_{\text{nm}} = \frac{32}{15} \frac{l}{c} \quad , \quad (3.168)$$

der auch in den Lösungsverläufen abgelesen werden kann.

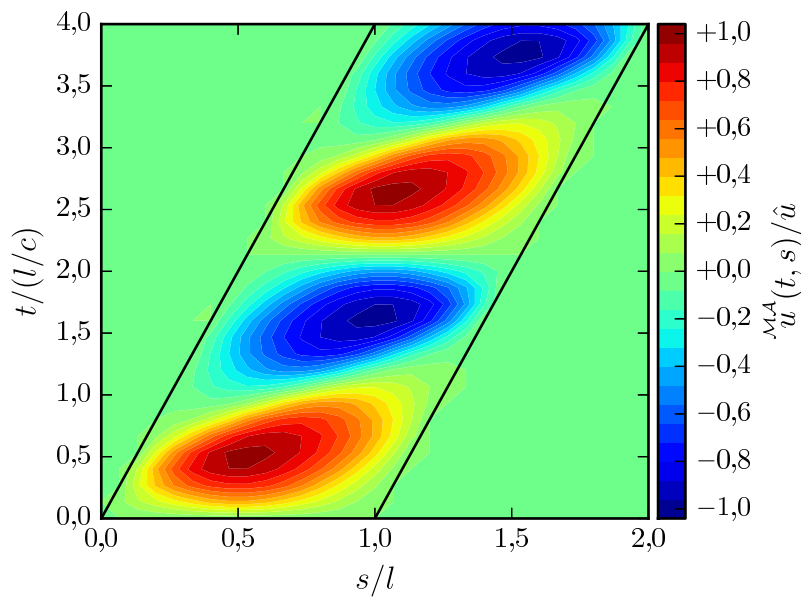
---

<sup>83</sup> Eine Stammfunktion zu der in Gl. (3.161) vorgegebenen Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktion lautet

$$U_1(s) := \begin{cases} \hat{u} \frac{s^2}{l} & , s \in [0, l/2] \\ 2\hat{u} \left( s - \frac{s^2}{2l} \right) & , s \in (l/2, l] \end{cases} \quad . \quad (3.163)$$



(a) dreiecksförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten



(b) verschwindende Anfangsverschiebungen und dreiecksförmige Anfangsverschiebungsgeschwindigkeitsfunktion

Abbildung 3.8: Lösung für dreiecksförmige Anfangsfunktionen (konstante Führungsgeschwindigkeitsfunktion  $v$ ). Die Trajektorien der sich bewegenden Lager sind durch schwarze Linien hervorgehoben.

### 3.4 Separationsansatz für einen konstanten Abstand der Randbedingungen

Ausgangspunkt sei das in Abschnitt 3.3.2 gewählte Hilfsproblem, das in Gl. (3.57) formuliert ist. Im Gegensatz zum Integralansatz in Abschnitt 3.3.2 wird an dieser Stelle in Form eines Separationsansatzes eine FOURIER-Reihenentwicklung der Lösung auf dem Intervall

$$I = [0, l] \quad (3.169)$$

gewählt

$$w(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(t) \phi_k(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (w_k \otimes \phi_k)(t, s) \quad . \quad (3.170)$$

Dabei sind die Eigenfunktionen  $\phi_k$  so zu wählen, dass sie die Randbedingungen des gestellten Problems erfüllen und eine HILBERT-Basis bilden (s. [KERNER & VON WAHL 2007, S. 361]). Aus den Randbedingungen gemäß Gl. (3.47) folgen als Eigenfunktionen<sup>84</sup>

$$(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}} := \left( x \mapsto \iota \exp\left(\iota k \frac{\pi}{l} x\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad . \quad (3.174)$$

Für die FOURIER-Koeffizientenfunktionen  $w_k$  gilt folglich

$$w_k(t) := \langle \phi_k, w(t, \square) \rangle_{L^2(I)} = \int_{\bar{s} \in I} \phi_k(\bar{s})^* w(t, \bar{s}) \quad . \quad (3.175)$$

Wie sich durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (3.57) feststellen lässt, erfüllt  $w_k$  dann die Differentialgleichung

$$\left( \partial_0 - \iota k \frac{\pi}{l} a(m_0) \right) w_k = h_k \quad \text{mit} \quad a(m_0) := \pm c + v(m_0) \quad , \quad (3.176)$$

wobei  $h_k$  analog gebildet wird

$$h_k(t) := \int_{\bar{s} \in I} \phi_k(\bar{s})^* h(t, \bar{s}) \quad . \quad (3.177)$$

---

<sup>84</sup> Diese Eigenfunktionen gelten für die Randbedingungen aus Gl. (3.47), welche auch als geometrische Randbedingungen bezeichnet werden, da die Verschiebung an dieser Stelle verschwindet. Wird hingegen eine Randbedingung für eine Kraftgröße vorgegeben, so wird diese Randbedingung dynamische Randbedingung genannt (s. [HAGEDORN & DASGUPTA 2007, S. 4]). Neben der angegebenen Familie von Eigenfunktionen seien dementsprechend noch

$$(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}} := \left( x \mapsto \exp\left(\iota \frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.171)$$

für die Randbedingungen  $\partial_1 w(t, 0) = 0$  und  $w(t, l) = 0$  (dynamisch-geometrisch),

$$(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}} := \left( x \mapsto \iota \exp\left(\iota \frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.172)$$

für die Randbedingungen  $w(t, 0) = 0$  und  $\partial_1 w(t, l) = 0$  (geometrisch-dynamisch) sowie

$$(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}} := \left( x \mapsto \exp\left(\iota k \frac{\pi}{l} x\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.173)$$

für die Randbedingungen  $\partial_1 w(t, 0) = 0$  und  $\partial_1 w(t, l) = 0$  (dynamisch-dynamisch) angegeben.

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung kann durch Variation der Konstanten ermittelt werden. Es sei dazu der variable Koeffizient der Differentialgleichung mit  $f_k$  bezeichnet

$$f_k(t) := \imath k \frac{\pi}{l} a(t) \quad (3.178)$$

und  $F_k$  eine Stammfunktion von  $f_k$

$$F_k := \partial_0^{-1} f_k \quad . \quad (3.179)$$

Dann kann basierend auf der Lösung des homogenen Problems der Ansatz

$$w_k(t) := C_k(t) \exp(F_k(t)) \quad (3.180)$$

mit zeitabhängigen Funktionen  $C_k$  verwendet werden.<sup>85</sup> Wird dieser in Gl. (3.176) eingesetzt, so folgen Bestimmungsgleichungen für die Funktionen  $C_k$  und damit die Funktionen  $C_k$  selbst als

$$\partial_0 C_k \exp(F_k) = h_k \quad \Leftrightarrow \quad C_k = \partial_0^{-1} (\exp(-F_k) h_k) \quad . \quad (3.182)$$

Mit  $A$  als Stammfunktion zu  $a$  folgen somit die FOURIER-Koeffizientenfunktionen  $w_k$  zu

$$w_k = \phi_k(A(m_0)) \partial_0^{-1} (\phi_{-k}(A(m_0)) h_k) =: \phi_{kA(m_0)} \partial_0^{-1} (\phi_{-kA(m_0)} h_k) \quad (3.183)$$

und die Lösung des Hilfsproblems lautet

$$w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi_{kA(m_0)} \partial_0^{-1} (\phi_{-kA(m_0)} h_k)) \otimes \phi_k \quad (3.184)$$

in Operatornotation bzw.

$$w(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \exp(\imath k \frac{\pi}{l} A(t)) \int_{\bar{t} \in [0, t]} \left( \exp(-\imath k \frac{\pi}{l} A(\bar{t})) h_k(\bar{t}) \right) \right) \imath \exp(\imath k \frac{\pi}{l} s) \quad (3.185)$$

in einer ausführlicheren Integraldarstellung.

Durch Einsetzen der Lösung des Hilfsproblems in die formale Darstellung der Gesamtlösung aus Gl. (3.54) kann die Lösung des Ausgangsproblems zu

$$w^{MA} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left( \partial_0 - \imath k \frac{\pi}{l} (c + v(m_0)) \right)^{-1} \left( \partial_0 - \imath k \frac{\pi}{l} (-c + v(m_0)) \right)^{-1} g_k \right) \otimes \phi_k \quad (3.186)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( e_{kcm_0 + kV(m_0)} \partial_0^{-1} \left( e_{-kcm_0 - kV(m_0)} e_{-kcm_0 + kV(m_0)} \partial_0^{-1} \left( e_{kcm_0 - kV(m_0)} g_k \right) \right) \right) \otimes \phi_k \quad (3.187)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( e_{kcm_0 + kV(m_0)} \partial_0^{-1} \left( e_{-2kcm_0} \partial_0^{-1} \left( e_{kcm_0 - kV(m_0)} g_k \right) \right) \right) \otimes \phi_k \quad (3.188)$$

<sup>85</sup> Für konstante Funktionen  $C_k$  erfüllt der gewählte Ansatz gerade die homogene Differentialgleichung

$$(\partial_0 - f_k(m_0)) w_k = 0 \quad , \quad (3.181)$$

deshalb wird dieser Ansatz auch als Variation der Konstanten bezeichnet.

bestimmt werden. Dabei wird die Funktion der rechten Seite mithilfe der Koeffizientenfunktionen

$$g_k(t) := \int_{\bar{s} \in I} \phi_k(\bar{s})^* g(t, \bar{s}) \quad (3.189)$$

analog den Gln. (3.175) und (3.177) entwickelt und die Abkürzung

$$e_k(x) := \frac{1}{l} \phi_k(x) = \exp(ik \frac{\pi}{l} x) \quad (3.190)$$

verwendet. Auch wenn auf die Formulierung der Integraldarstellung der Lösung an dieser Stelle aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird, lässt sich feststellen, dass die Lösung nach dem Integralansatz in Gl. (3.77) und die Lösung nach dem Separationsansatz in Gl. (3.188) eine sehr ähnliche Struktur besitzen.

Für den Fall einer konstanten Geschwindigkeit  $v := \text{const.}$  kann im Folgenden nach dem Vorgehen des allgemeinen Lösungsansatzes eine konkrete Lösung gefunden werden. Es sei dazu für das transformierte Verschiebungsfeld  ${}^{\mathcal{M}A}w$  ein zu Gl. (3.170) vergleichbarer Ansatz gewählt

$${}^{\mathcal{M}A}w = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( {}^{\mathcal{M}A}w_k \otimes \phi_k \right) \quad , \quad (3.191)$$

wobei für die Funktionen  $\phi_k$  die Definition aus Gl. (3.174) weiterhin gültig ist. Wird dieser Ansatz in die zugrunde liegende Bewegungsdifferentialgleichung (3.43) eingesetzt, so entsteht die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left( \partial_0^2 - 2v \frac{\pi}{l} \partial_0 + (v^2 - c^2) \left( ik \frac{\pi}{l} \right)^2 \right) {}^{\mathcal{M}A}w_k = 0 \quad (3.192)$$

als Bestimmungsgleichung für die FOURIER-Koeffizientenfunktionen  ${}^{\mathcal{M}A}w_k$ . Diese Differentialgleichung lässt sich mithilfe des Exponentialansatzes

$${}^{\mathcal{M}A}w_k(t) := \alpha_k \exp(i\omega_k t) \quad (3.193)$$

analytisch lösen. Durch Einsetzen des Ansatzes und der Ableitungen

$$\partial_0 {}^{\mathcal{M}A}w_k(t) = i\omega_k \alpha_k \exp(i\omega_k t) = i\omega_k {}^{\mathcal{M}A}w_k(t) \quad , \quad (3.194)$$

$$\partial_0^2 {}^{\mathcal{M}A}w_k(t) = -\omega_k^2 \alpha_k \exp(i\omega_k t) = -\omega_k^2 {}^{\mathcal{M}A}w_k(t) \quad (3.195)$$

folgt eine Gleichung für die noch unbekanntenen Größen  $\omega_k$

$$\omega_k^2 + 2v \frac{\pi}{l} i\omega_k - (v^2 - c^2) \left( ik \frac{\pi}{l} \right)^2 = 0 \quad . \quad (3.196)$$

Als Lösungen dieser quadratischen Gleichung in Normalform ergeben sich

$$\omega_{k,\pm} = v \frac{\pi}{l} \pm \sqrt{\left( v \frac{\pi}{l} \right)^2 - (v^2 - c^2) \left( k \frac{\pi}{l} \right)^2} = (v \pm c) k \frac{\pi}{l} \quad (3.197)$$

und damit folgt für die Lösung des transformierten Problems

$${}^{\mathcal{M}A}w(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \alpha_k \exp(i(v+c)k \frac{\pi}{l} t) + \beta_k \exp(i(v-c)k \frac{\pi}{l} t) \right) i \exp(ik \frac{\pi}{l} s) \quad . \quad (3.198)$$

Hierbei können die den Zeitverlauf der Schwingung bestimmenden Terme in Anteile zerlegt werden, welche die Wellenausbreitung in bzw. entgegen der  $s$ -Richtung beschreiben. Da die Randbedingungen der Gl. (3.47) bereits durch den Ansatz aus Gl. (3.191) erfüllt werden, sind noch die Anfangsbedingungen in die Lösung einzuarbeiten, wodurch die Freiwerte  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) konkretisiert werden.

### 3.5 Integrationsansatz für einen veränderlichen Abstand der Randbedingungen

Wie bereits bei der Modellbeschreibung in Abschnitt 3.2 erläutert wurde, unterscheidet sich das für diesen Abschnitt gültige Modell mit einem veränderlichen Abstand der Randbedingungen von dem Modell des vorangegangenen Abschnittes lediglich durch die Formulierung einer axial unbewegten Randbedingung (vgl. Gln. (3.29) und (3.36)).

Demzufolge genügt es, die Lösung für den in Abschnitt 3.3.2 verwendeten Integrationsansatz an einen veränderlichen Abstand der nichtmateriellen Randbedingungen anzupassen. Um Wiederholungen zu vermeiden, werden an dieser Stelle nur die aus den veränderten Randbedingungen resultierenden Unterschiede dargelegt.

Ausgangspunkt ist der Summenansatz aus Gl. (3.120) mit den Definitionen der Gln. (3.104) und (3.105). Mit diesen Hilfsfunktionen werden aus den Randbedingungen der Gln. (3.35) sowie (3.36) die Zusammenhänge

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bar{g}(ct) + \bar{h}(-ct) = 0 \quad , \quad (3.199)$$

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bar{g}(l(t) + ct) + \bar{h}(l(t) - ct) = 0 \quad (3.200)$$

erhalten. Aus Gl. (3.199) lassen sich die Bedingungen

$$\bigwedge_{s \geq 0} \bar{g}(s) = -\bar{h}(-s) \quad , \quad (3.201)$$

$$\bigwedge_{s \leq 0} \bar{h}(s) = -\bar{g}(-s) \quad (3.202)$$

formulieren, d. h. die Funktionen  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$  sind punktsymmetrisch. Durch Einsetzen dieser Bedingungen in Gl. (3.200) entsteht

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bigwedge_{(l(t)-ct) \leq 0} \bar{g}(l(t) + ct) = \bar{g}(-l(t) + ct) \quad , \quad (3.203)$$

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bigwedge_{(l(t)+ct) \geq 0} \bar{h}(l(t) - ct) = \bar{h}(-l(t) - ct) \quad . \quad (3.204)$$

Werden die Hilfsfunktionen  $r_{\pm}$  als

$$\begin{aligned} r_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow b_{\pm} = \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s \geq l_0\} \\ t &\mapsto r_{\pm}(t) := l(t) \pm ct \end{aligned} \quad (3.205)$$

eingeführt, so folgen hieraus zunächst die Beziehungen<sup>86</sup>

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bigwedge_{r_-(t) \leq 0} \bar{g}(r_+(t)) = \bar{g}(-r_-(t)) \quad , \quad (3.206)$$

$$\bigwedge_{t \geq 0} \bigwedge_{r_+(t) \geq 0} \bar{h}(r_-(t)) = \bar{h}(-r_+(t)) \quad , \quad (3.207)$$

<sup>86</sup> Für die Invertierbarkeit der Hilfsfunktionen  $r_{\pm}$  gilt auch an dieser Stelle, dass der Betrag der Führungsgeschwindigkeit  $v$  stets kleiner als die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  sein muss (vgl. Gl. (3.125)).



die sich schließlich auch als

$$\bigwedge_{s \in b_+} \bigwedge_{r_-(r_+^{-1}(s)) \leq 0} \bar{g}(s) = \bar{g} \circ (-r_-) \circ r_+^{-1}(s) \quad , \quad (3.208)$$

$$\bigwedge_{s \in b_-} \bigwedge_{r_+(r_-^{-1}(s)) \geq 0} \bar{h}(s) = \bar{h} \circ (-r_+) \circ r_-^{-1}(s) \quad (3.209)$$

schreiben lassen. Damit ist für die Hilfsfunktionen  $g$  und  $h$  eine Fortsetzung bestimmt.

Wie in Abschnitt 3.3.4 lässt sich insbesondere für eine positive, konstante Geschwindigkeit  $v$  die Lösung konkretisieren. Die Hilfsfunktionen  $r_{\pm}$  und ihre Umkehrfunktionen  $r_{\pm}^{-1}$  lauten in diesem Fall

$$\begin{aligned} r_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow b_{\pm} = \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s \geq l_0\} \\ t &\mapsto r_{\pm}(t) := l_0 + (v \pm c)t \quad , \end{aligned} \quad (3.210)$$

$$\begin{aligned} r_{\pm}^{-1} : b_{\pm} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto r_{\pm}^{-1}(s) = \frac{s - l_0}{v \pm c} \end{aligned} \quad (3.211)$$

Neben den Bedingungen gemäß der Gln. (3.201) und (3.202) ergeben sich mit der Abkürzung

$$\alpha := \frac{c - v}{c + v} \quad (3.212)$$

aus den Gln. (3.208) und (3.209) die Beziehungen

$$\bigwedge_{s \geq 2cl_0/(c-v)} \bar{g}(s) = \bar{g}\left(\alpha s - \frac{2c}{c+v}l_0\right) \quad , \quad (3.213)$$

$$\bigwedge_{s \leq l_0} \bar{h}(s) = \bar{h}\left(\frac{s}{\alpha} - \frac{2c}{c-v}l_0\right) \quad (3.214)$$

für die Fortsetzung der Funktionen  $g$  und  $h$ . Daraus folgen die rekursiven Definitionen

$$\bar{g}(s) := \begin{cases} g(s) = \frac{1}{2}u_0(s) + \frac{1}{2c}U_1(s) & , s \in [0, l_0] \\ -\bar{h}(-s) & , s \in (l_0, \frac{2c}{c-v}l_0) \\ \bar{g}\left(\alpha s - \frac{2c}{c+v}l_0\right) & , s \geq \frac{2c}{c+v}l_0 \\ \text{(ggf. mehrfach auszuführen)} & \end{cases} \quad , \quad (3.215)$$

$$\bar{h}(s) := \begin{cases} h(s) = \frac{1}{2}u_0(s) - \frac{1}{2c}U_1(s) & , s \in [0, l] \\ -\bar{g}(-s) & , s \in (-l_0, 0) \\ \bar{h}\left(\alpha s + \frac{2c}{c+v}l_0\right) & , s \leq -l_0 \\ \text{(ggf. mehrfach auszuführen)} & \end{cases} \quad . \quad (3.216)$$

Demzufolge können die Hilfsfunktionen und damit die Anfangsbedingungen durch Spiegeln und Strecken über das Intervall  $[0, l_0]$  hinaus fortgesetzt werden. Ein Beispiel für die Fortsetzung der Funktion  $g$  ist in Abb. 3.9 gegeben, wobei sich die Abschnittslängen  $L_k$  zu

$$L_k := \frac{l_0}{\alpha^k} \quad (3.217)$$

bestimmen lassen.

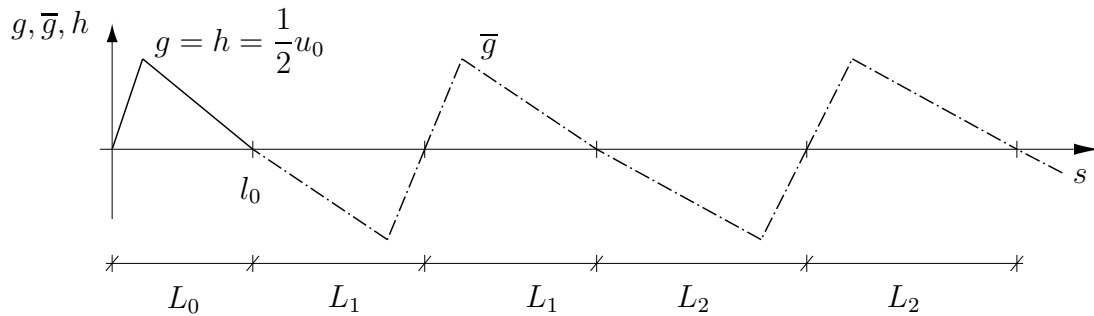


Abbildung 3.9: Periodische Fortsetzung der auf dem Intervall  $[0, l_0]$  gegebenen Hilfsfunktionen am Beispiel der Funktion  $g$  für den Fall verschwindender Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten ( $u_1 = 0$ )

Der Sonderfall einer verschwindenden Geschwindigkeit  $v$  ergibt die in Abschnitt 3.3.4 erläuterte klassische Lösung nach D'ALEMBERT.

Mithilfe der Fortsetzung der Anfangsbedingungen und einer wie in Abschnitt 3.3.5 beschriebenen numerischen Umsetzung, lassen sich Schwingungsverläufe einer Saite mit einer nichtmateriellen Randbedingung simulieren.

Zum Studium der Einflüsse der nichtmateriellen Randbedingung wird das Beispiel einer gezupften Saite gewählt. Dazu seien die Anfangsbedingungen

$$u_0(s) := \hat{u} \begin{cases} \frac{5}{l_0} s & , s \in [0, \frac{l_0}{5}) \\ -\frac{5}{4l_0} (s - l_0) & , s \in [\frac{l_0}{5}, l_0] \end{cases} , \quad (3.218)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (3.219)$$

gewählt, die einem Zupfen mit der Amplitude  $\hat{u}$  bei einem Fünftel des Ausgangsabstandes der Lagerbedingungen entsprechen.

Ohne eine axiale Bewegung der rechten Lagerbedingung ( $v = 0$ ) ergibt sich der in Abb. (3.10(a)) dargestellte klassische Lösungsverlauf für die gezupfte Saite mit einer konstanten Periodendauer. Im Gegensatz hierzu verläuft die Lösung für den Fall einer nichtmateriellen Randbedingung aperiodisch (s. Abb. 3.10(b)).

Wie in Abschnitt 3.3.6 kann dieses Phänomen mithilfe der Wellenausbreitung innerhalb der Saite erklärt werden. Im Fall der klassischen materiellen Randbedingungen benötigt ein Signal, das sich mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bewegt, die Zeit

$$T_{cl} = 2 \frac{l_0}{c} , \quad (3.220)$$

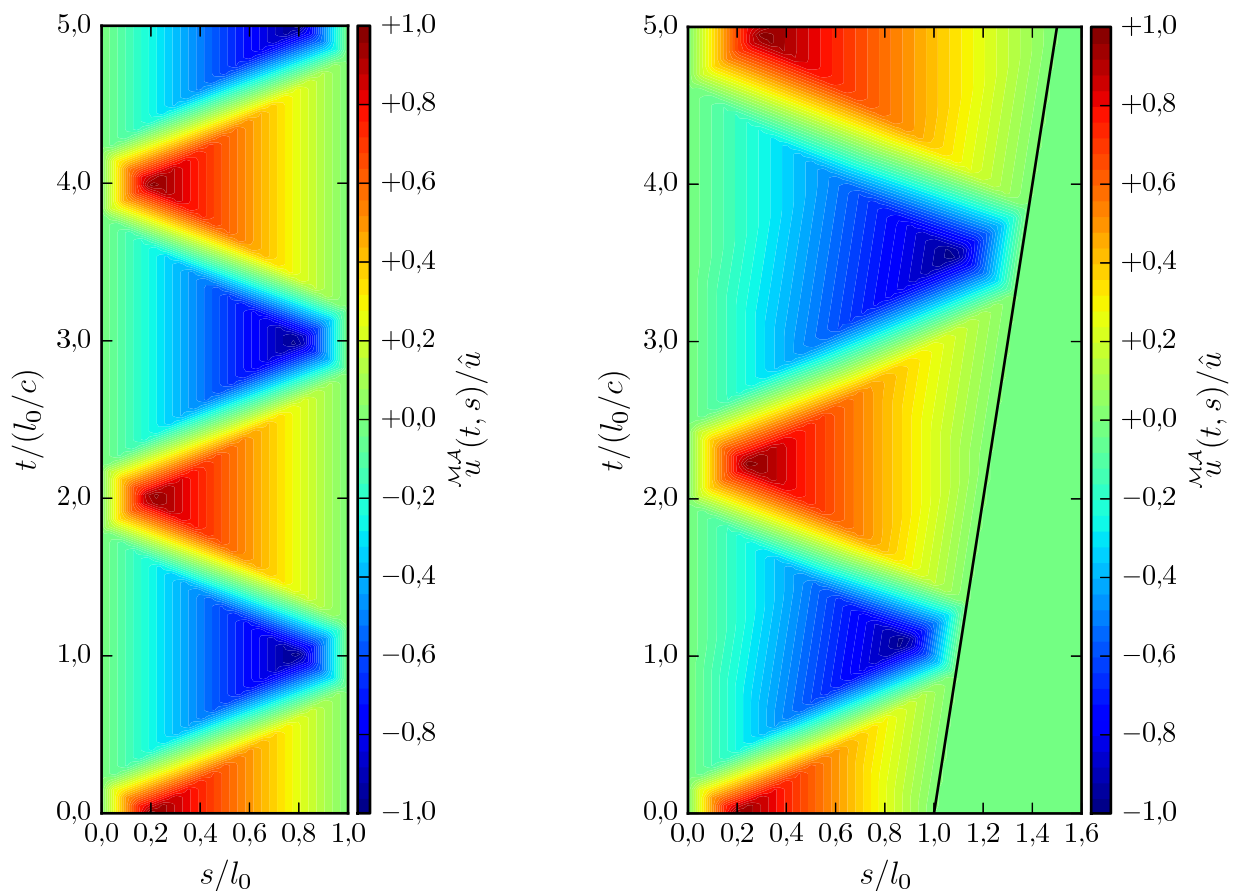
um nach der Reflektion an beiden Randbedingungen den Ausgangsort wieder zu erreichen. Wird jedoch die rechte Lagerbedingung mit einer Führungsgeschwindigkeit  $v$  bewegt, so vergrößert sich der vom Signal zurückzulegende Weg. Für ein Signal an der Stelle  $s = 0$  gilt für die Zeit bis zum Erreichen des Ausgangsortes

$$T_{\text{nm}} = 2 \frac{l_0}{c - v} \quad . \quad (3.221)$$

Für die Parameter der Simulation von Abb. 3.10(b) ergibt sich entsprechend

$$T_{\text{nm}} = \frac{20}{9} \frac{l_0}{c} \quad , \quad (3.222)$$

was auch anhand der Darstellung zu verifizieren ist.



(a) Führungsgeschwindigkeit  $v = 0$

(b) Führungsgeschwindigkeit  $v = 0,1c$ . Die Trajektorie des sich bewegenden Lagers ist durch eine schwarze Linie hervorgehoben.

Abbildung 3.10: Vergleich der Saitenschwingungen für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten  $v$  bei gleichen Anfangsbedingungen



## 4 Axial bewegte eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen<sup>87</sup>

### 4.1 Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für die axial bewegte Saite

Die Herleitung der Bewegungsgleichung für die Transversalschwingungen einer axial bewegten vorgespannten Saite erfolgt prinzipiell analog zu Abschnitt 3.1 und wird an dieser Stelle nicht nochmals detailliert wiedergegeben. Aufgrund der axialen Bewegung der Saite mit der Führungsgeschwindigkeit  $v$  ändert sich in materieller Darstellung im Allgemeinen die Normalkraft. Diese ist für eine allgemeine Lösung nun als orts- und zeitabhängig anzusetzen.

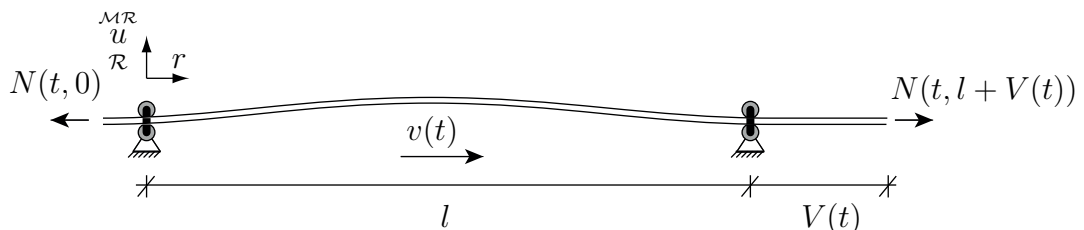


Abbildung 4.1: Modell einer Saite, die axial über unbewegte Randbedingungen bewegt wird

Im Fall der axial bewegten Saite lässt sich die Gesamtbewegung als

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, s) := \begin{pmatrix} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_{10}(t, s) \\ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_{11}(t, s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s + V(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\mathbf{u}}_{\mathcal{A}}(t, s) \quad (4.1)$$

zusammensetzen. Als Ausgangspunkt der veränderten Herleitung kann nun dementsprechend Gl. (3.22) verwendet werden. Mit Gl. (3.23) und unter Weglassen der Belastung  $f$  lautet diese

$$\left( \rho \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0 \phi}_{10} \right)^2 - N \right) \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_1^2} \tilde{u} + 2\rho \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0} \phi_{10} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_1} \tilde{u} + \rho \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0^2} \tilde{u} = 0 \quad (4.2)$$

Wird außerdem angenommen, dass sich die Längsgeschwindigkeit der Saite nur wenig von der Führungsgeschwindigkeit unterscheidet,

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0} \phi_{10} \approx v \quad (4.3)$$

wird

$$\left( \rho v(m_0)^2 - N \right) \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_1^2} \tilde{u} + 2\rho v(m_0) \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_1} \tilde{u} + \rho \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0^2} \tilde{u} = 0 \quad (4.4)$$

erhalten. Die noch zu bestimmende Normalkraft  $N$  lässt sich aus Gl. (3.12) durch Integration zu

$$N(t, s) = N_0 + \rho s (\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\partial_0} v)(t) \quad (4.5)$$

ermitteln. Das gezeigte Vorgehen kann auch als Anwendung einer ALE-Kinematik verstanden werden, so dass die Verschiebung  $\tilde{u}$  mit der Verschiebung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{u}$  zu identifizieren ist und mit dem Zusammenhang

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{u}_{\mathcal{R}} := \tau_{(0, -V(m_0))} \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{u}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{u}_{\mathcal{A}} =: \tau_{(0, V(m_0))} \overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{u}_{\mathcal{R}} \quad (4.6)$$

<sup>87</sup> Einige der in diesem Kapitel vorgestellten Gedanken wurden vom Autor auch in [FRANZE & ZASTRAU 2012] veröffentlicht.

die gesuchte Bewegungsgleichung in der referentiellen Darstellung folgt. Insgesamt lautet das Anfangswert-Randwert-Problem

$$(\partial_0^2 + 2v(m_0)\partial_0\partial_1 - (c^2 + m_1(\partial_0v)(m_0) - v(m_0)^2)\partial_1^2) \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}} = 0 \quad (4.7)$$

$$\bigwedge_{r \in [0, l]} \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(0^+, r) := u_0(r) \quad , \quad (4.8)$$

$$\bigwedge_{r \in [0, l]} \partial_0 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(0^+, r) := u_1(r) \quad , \quad (4.9)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(t, 0) := 0 \quad , \quad (4.10)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(t, l) := 0 \quad , \quad (4.11)$$

$$\text{mit } c^2 := \frac{N_0}{\rho} \quad . \quad (4.12)$$

In dieser Darstellung sind die Randbedingungen für das System in Abb. 4.1 zeitunabhängig. Zum Vergleich mit der ursprünglich materiell formulierten eindimensionalen Wellengleichung gemäß Gl. (3.25) kann die gefundene Bewegungsgleichung mithilfe der Beziehungen in Gl. (4.6) und unter Anwendung der Kettenregel transformiert werden (vgl. Fußnote 70). Die Bewegungsgleichung lautet in materieller Darstellung folglich

$$0 = \partial_0^2 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}} - (\partial_0v)(m_0)\partial_1 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}} - (c^2 + m_1(\partial_0v)(m_0))\partial_1^2 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}} \quad (4.13)$$

mit den Randbedingungen

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}}(t, -V(t)) = 0 \quad , \quad (4.14)$$

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}}(t, -V(t) + l) = 0 \quad . \quad (4.15)$$

Außerdem kann Gl. (4.13) in

$$0 = \partial_0^2 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}} - \partial_1 \left( \bar{c}(m_0, m_1)^2 \partial_1 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{A}} \right) \quad (4.16)$$

umformuliert werden und der Ausdruck  $\bar{c}$

$$\bar{c}(t, s)^2 := c^2 + s(\partial_0v)(t) \quad (4.17)$$

hierbei als eine orts- und zeitabhängige Wellenausbreitungsgeschwindigkeit interpretiert werden.

## 4.2 Lösung mittels GALERKIN-Verfahren

### 4.2.1 Zeitlich veränderliche Führungsgeschwindigkeit

Das Lösungsverfahren nach GALERKIN basiert auf einem Separationsansatz und einer abgebrochenen Reihenentwicklung der Lösung

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}(t, r) \approx \widetilde{\overset{\mathcal{MR}}{u}}(t, r) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \psi_k(t) \phi_k(r) \quad \text{mit} \quad \mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{N} \quad (4.18)$$

bzw. kürzer

$$\overset{\mathcal{MR}}{u} \approx \widetilde{\overset{\mathcal{MR}}{u}} = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \psi_k \otimes \phi_k \quad . \quad (4.19)$$

Dabei werden die Funktionen  $\phi_k$  auch als Vergleichsfunktionen bezeichnet. Die Vergleichsfunktionen müssen für  $k \in \mathbb{N}$  eine HILBERT-Basis bilden, damit die Näherungslösung für  $n \rightarrow \infty$  gegen die exakte Lösung konvergiert.<sup>88</sup> Des Weiteren wird bei dieser Methode eine Minimierung des gewichteten mittleren Fehlers (bzw. Annahme keines Fehlers) angestrebt

$$\int_{r \in [0, l]} R(t, r) \bar{\phi}_k(r) = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{mit} \quad R := (\partial_0^2 + 2v(m_0)\partial_0\partial_1 - (c^2 + m_1(\partial_0v)(m_0) - v(m_0)^2)\partial_1^2) \widetilde{\overset{\mathcal{MR}}{u}} \quad , \quad (4.21)$$

wobei die Funktionen  $\bar{\phi}_k$  als Gewichtsfunktionen bezeichnet werden. Da der Fehler nur im Mittel verschwindet, wird diese Form auch als schwache Form bezeichnet. Je nach Wahl der Gewichtsfunktionen werden verschiedene numerische Methoden unterschieden. An dieser Stelle wird dem GALERKIN-Verfahren folgend

$$\bar{\phi}_k := \phi_k \quad (4.22)$$

gewählt. Als Vergleichsfunktionen  $\phi_k$  werden in Anlehnung an die Eigenfunktionen nach Gl. (3.174)

$$(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}} := \left( x \mapsto \sin\left((k+1)\frac{\pi x}{l}\right) \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad (4.23)$$

verwendet.<sup>89</sup> Mithilfe dieser Vergleichsfunktionen und den Zwischenschritten<sup>90</sup>

$$\partial_0^2 (\psi_k \otimes \phi_k) = (\partial_0^2 \psi_k) \otimes \phi_k \quad , \quad (4.26)$$

$$\partial_0 \partial_1 (\psi_k \otimes \phi_k) = (\partial_0 \psi_k) \otimes (\partial_0 \phi_k) \quad , \quad (4.27)$$

$$\partial_1^2 (\psi_k \otimes \phi_k) = \psi_k \otimes (\partial_0^2 \phi_k) = - \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 \psi_k \otimes \phi_k \quad (4.28)$$

<sup>88</sup> Bei speziell gewählten Anfangsbedingungen kann auch eine endliche Anzahl von Reihengliedern zur exakten Lösung führen.

<sup>89</sup> Diese Vergleichsfunktionen erfüllen die Randbedingungen. In [LEIPHOLZ 1967] wird ein Verfahren zur Befreiung der Ansatzfunktionen von den Randbedingungen beschrieben.

<sup>90</sup> Der Index des Ableitungsoperators wechselt in Gl. (4.27) aufgrund der Zusammenhänge

$$\partial_0 \partial_1 (\psi_k \otimes \phi_k)(t, r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (\psi_k(t) \phi_k(r)) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_k(t) \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(r) \quad (4.24)$$

$$= \partial_0 \psi_k(t) \partial_0 \phi_k(r) = (\partial_0 \psi_k) \otimes (\partial_0 \phi_k)(t, r) \quad . \quad (4.25)$$

kann nun die Residuumsfunktion  $R$  ermittelt werden

$$\begin{aligned}
 R &= (\partial_0^2 + 2v(m_0)\partial_0\partial_1 - (c^2 + m_1(\partial_0v)(m_0) - v(m_0)^2)\partial_1^2) \sum_{k \in \mathbb{N}_n} (\psi_k \otimes \phi_k) \quad (4.29) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \left( \left( \partial_0^2 \psi_k + \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 (c^2 + m_1(\partial_0v)(m_0) - v(m_0)^2) \psi_k \right) \otimes \phi_k + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + 2v(m_0)(\partial_0\psi_k) \otimes (\partial_0\phi_k) \right) . \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Die Forderung nach einem minimalen mittleren Fehler (s. Gl. (4.20)) führt auf ein Gleichungssystem für die unbekanntenen Funktionen  $\psi_k$

$$0 = \int_{r \in [0, l]} R(t, r) \left[ \bar{\phi}_j(r) \right]_j =: \left[ M \right] \left[ \partial_0^2 \psi_j(t) \right]_j + \left[ G(t) \right] \left[ \partial_0 \psi_j(t) \right]_j + \left[ K(t) + \Gamma(t) \right] \left[ \psi_j(t) \right]_j , \quad (4.31)$$

wobei die Matrizen  $M$ ,  $G$ ,  $K$  und  $\Gamma$  im Einzelnen

$$[M]_{jk} = \int_{r \in [0, l]} \phi_k(r) \bar{\phi}_j(r) = \int_{r \in [0, l]} \sin\left((k+1)\frac{\pi r}{l}\right) \sin\left((j+1)\frac{\pi r}{l}\right) = \frac{l}{2} \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.32)$$

$$[G(t)]_{jk} = 2v(t) \int_{r \in [0, l]} (\partial_0 \phi_k)(r) \bar{\phi}_j(r) = 2v(t) \int_{r \in [0, l]} (k+1)\frac{\pi}{l} \cos\left((k+1)\frac{\pi r}{l}\right) \sin\left((j+1)\frac{\pi r}{l}\right) \quad (4.33)$$

$$= 4v(t) \begin{cases} \frac{(k+1)(j+1)}{(k+1)^2 - (j+1)^2} & , (j \neq k) \wedge ((j+k) \bmod 2 \neq 0) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.34)$$

$$[K(t)]_{jk} = \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 (c^2 - v(t)^2) \int_{r \in [0, l]} \phi_k(r) \bar{\phi}_j(r) \quad (4.35)$$

$$= (c^2 - v(t)^2) \frac{\pi^2}{2l} \begin{cases} (k+1)^2 & , j = k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.36)$$

$$[\Gamma(t)]_{jk} = \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 (\partial_0 v)(t) \int_{r \in [0, l]} r \phi_k(r) \bar{\phi}_j(r) \quad (4.37)$$

$$= \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 (\partial_0 v)(t) \int_{r \in [0, l]} r \sin\left((k+1)\frac{\pi r}{l}\right) \sin\left((j+1)\frac{\pi r}{l}\right) \quad (4.38)$$

$$= (k+1)^2 (\partial_0 v)(t) \begin{cases} 0 & , (j \neq k) \wedge ((j+k) \bmod 2 = 0) \\ -\frac{4(k+1)(j+1)}{((k+1)^2 - (j+1)^2)^2} & , (j \neq k) \wedge ((j+k) \bmod 2 \neq 0) \\ \frac{1}{4}\pi^2 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (4.39)$$



lauten (vgl. [ZWIERS 2007]).<sup>91</sup> Es ist zu erkennen, dass  $M$  eine Diagonalmatrix,  $G$  eine schiefsymmetrische Matrix und  $K$  eine Diagonalmatrix ist. Die Matrix  $\Gamma$  ist aufgrund des Vorfaktors  $(k + 1)^2$  im Allgemeinen eine nichtsymmetrische Matrix.

Aus dem Ansatz nach GALERKIN entsteht nach den dargestellten Herleitungen demnach im Allgemeinen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. Für die analytische Lösung solcher Systeme können keine allgemeinen Lösungen angegeben werden. In der Literatur lassen sich dazu zahlreiche Hinweise finden. Unter anderem wird in [BENKER 2005, S. 94] darauf hingewiesen, dass die LAPLACE-Transformation bei Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten nicht zwingend zielführend ist. In Spezialfällen lassen sich gewöhnliche Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizientenfunktionen<sup>92</sup> lösen (z. B. AIRY- und HERMITE-Differentialgleichung). Diese Spezialfälle konnten im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht aus der vorliegenden Form der Differentialgleichung entwickelt werden. Für die analytische Behandlung des angegebenen Systems für den Spezialfall periodisch zeitveränderlicher Koeffizienten erscheint der Ansatz nach HILL und eine zeitvariante modale Analyse (s. hierzu [XU & GASCH 1995, IRRETIER 1999, PEDERSEN et al. 2010]) aussichtsreich.

Es sei an dieser Stelle jedoch vor dem Verfahren des „Einfrierens“ von Eigenwerten gewarnt, das in der Literatur teilweise vorgeschlagen wird. Bei diesem Verfahren wird die Lösung eines Systems mit zeitveränderlichen Koeffizienten in jedem Zeitpunkt aus Systemen mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt. Auch wenn diese Konstruktion richtig anmutet, so ergibt sie keine korrekte Lösung für das Ausgangssystem. Der Grund hierfür ist, dass aus der Stabilität des Systems mit konstanten Koeffizienten nicht auf die Stabilität des Systems mit veränderlichen Koeffizienten geschlossen werden kann (s. [MÜLLER 1977]). Nur für sich relativ langsam ändernde Koeffizienten ist dieses Verfahren eine hinreichend gute Näherung (vgl. [ARNOLD 2004, S. 143]).

#### 4.2.2 Zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit

Für eine zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit  $v$  ergeben sich die das System beschreibenden Matrizen nach dem Ansatz aus Abschnitt 4.2.1 (für  $n = 8$ ) zu

$$[M] = \frac{l}{2} \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \quad , \quad (4.40)$$

$$[G] = 4v \begin{bmatrix} 0 & 0,667 & 0 & 0,267 & 0 & 0,171 & 0 & 0,127 \\ -0,667 & 0 & 1,200 & 0 & 0,476 & 0 & 0,311 & 0 \\ 0 & -1,200 & 0 & 1,714 & 0 & 0,667 & 0 & 0,436 \\ -0,267 & 0 & -1,714 & 0 & 2,222 & 0 & 0,848 & 0 \\ 0 & -0,476 & 0 & -2,222 & 0 & 2,727 & 0 & 1,026 \\ -0,171 & 0 & -0,667 & 0 & -2,727 & 0 & 3,231 & 0 \\ 0 & -0,311 & 0 & -0,848 & 0 & -3,231 & 0 & 3,733 \\ -0,127 & 0 & -0,436 & 0 & -1,026 & 0 & -3,733 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.41)$$

$$[K] = (c^2 - v^2) \frac{\pi^2}{2l} \text{diag}[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64] \quad , \quad [\Gamma] = 0 \quad . \quad (4.42)$$

<sup>91</sup> Bei der Berechnung der Integrale werden die Integraltafeln aus [BRONSTEIN et al. 2008, ab S. 1074] sowie die Hilfsrechnungen in Abschnitt B.5 verwendet.

<sup>92</sup> Eine analytische Funktion ist u. a. nach [BRONSTEIN et al. 2008, S. 753] lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben.

Da keine der Matrizen mehr zeitabhängig ist, entsteht ein Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, das mit Standardverfahren gelöst werden kann.

Alternativ zu dieser Untersuchung gelingt bei der Annahme einer zeitlich unveränderlichen Führungsgeschwindigkeit auch eine analytische Lösung mithilfe eines Separationsansatzes (vgl. [ZWIERS 2007])

$$\begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Re(\mu_k \otimes \eta_k) \quad . \quad (4.43)$$

Dieser ist ähnlich wie in Gl. (4.19) formuliert, die Funktionen  $\mu_k$  und  $\eta_k$  unterscheiden sich jedoch im Allgemeinen von den dort gewählten Funktionen  $\psi_k$  und  $\phi_k$ . Zunächst werden die Funktionen

$$(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} := (t \mapsto e^{i\omega_k t})_{k \in \mathbb{N}} \quad (4.44)$$

gewählt, wobei die Zahlen  $\omega_k$  noch zu bestimmende Freiwerte sind. Durch Einsetzen dieser Ansätze in die Bewegungsgleichung folgt<sup>93</sup>

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} ((- (c^2 - v^2) \partial_0^2 \eta_k + 2i\omega_k v \partial_0 \eta_k - \omega_k^2 \eta_k)) \quad . \quad (4.48)$$

Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten des Abschnittes 4.2.1 lässt sich diese Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Unbekannten  $\eta_k$  geschlossen analytisch lösen. Dabei folgt mithilfe eines Exponentialansatzes der Ausdruck

$$\eta_k = A_k e^{i\kappa_k x - t} + B_k e^{-i\kappa_k x + t} \quad (4.49)$$

als Lösung. Die darin enthaltenen Größen

$$\kappa_{k\pm} := \frac{\omega_k}{c \pm v} = -\frac{\omega_k}{c \mp v} = \omega_k \frac{v \pm c}{c^2 - v^2} \quad (4.50)$$

können auch als Wellenzahlen zweier entgegengerichteter Wellen interpretieren werden (vgl. [NELSON 1979, S. 383]). Die Anpassung der Lösung an die Randbedingungen

$$\eta_k(0) = 0 \quad \text{und} \quad \eta_k(l) = 0 \quad (4.51)$$

liefert die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_k = \frac{k\pi}{cl} (c^2 - v^2) \quad (4.52)$$

sowie die Bedingungen

$$A_k = -B_k \quad . \quad (4.53)$$

<sup>93</sup> Dabei wurden folgende Zwischenergebnisse verwendet

$$\partial_0^2 (\mu_k \otimes \eta_k) = (\partial_0^2 \mu_k) \otimes \eta_k = -\omega_k^2 \mu_k \otimes \eta_k \quad , \quad (4.45)$$

$$\partial_0 \partial_1 (\mu_k \otimes \eta_k) = (\partial_0 \mu_k) \otimes (\partial_0 \eta_k) = i\omega_k \mu_k \otimes (\partial_0 \eta_k) \quad , \quad (4.46)$$

$$\partial_1^2 (\mu_k \otimes \eta_k) = \mu_k \otimes (\partial_0^2 \eta_k) \quad . \quad (4.47)$$

Damit und mittels Gl. (4.50) kann die Lösung auch als

$$\eta_k(r) = A_k e^{i a_k v r} \left( e^{i a_k c r} - e^{-i a_k c r} \right) = 2i A_k e^{i a_k v r} \sin(a_k c r) \quad (4.54)$$

$$\text{mit } a_k = \frac{\omega_k}{c^2 - v^2} = \frac{k\pi}{cl} \quad (4.55)$$

dargestellt werden.<sup>94</sup> Insgesamt ergibt sich für die analytische Lösung der mit konstanter Geschwindigkeit axial bewegten schwingenden Saite demnach

$$\overset{\mathcal{M}\mathcal{R}}{\underset{\mathcal{R}}{u}}(t, r) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Re(2i A_k e^{i \omega_k t + i a_k v r} \sin(a_k c r)) \quad (4.57)$$

Beim Vergleich der Lösungen einer axial mit der Führungsgeschwindigkeit  $v \neq 0$  bewegten und einer axial unbewegten Saite sind einige Unterschiede deutlich erkennbar. Die Eigenkreisfrequenzen der axial bewegten Saite nehmen mit zunehmender Führungsgeschwindigkeit  $v$  ab (s. Abb. 4.2).

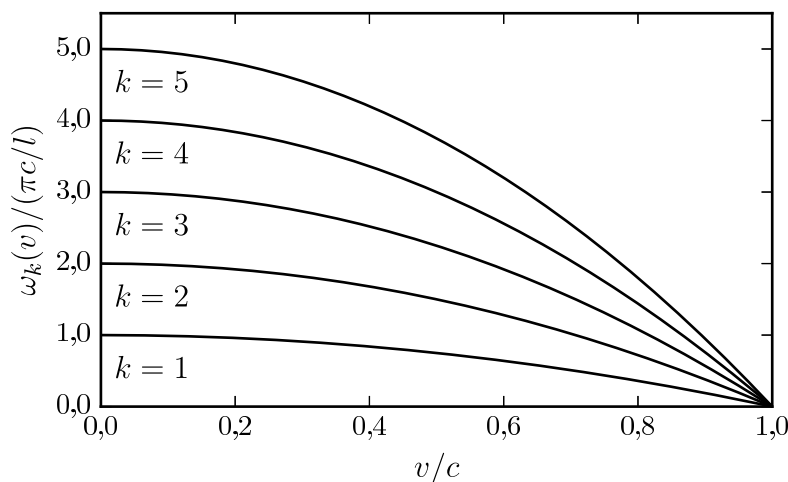


Abbildung 4.2: Abhängigkeit der ersten fünf Eigenkreisfrequenzen von der Führungsgeschwindigkeit  $v$

Des Weiteren unterscheiden sich die Eigenformen beider Lösungen. Die klassischen Eigenformen der axial unbewegten Saite sind beim Vorhandensein einer Führungsgeschwindigkeit  $v \neq 0$  durch einen Vorfaktor ortsabhängig verändert (s. Abb. 4.3). Diese Veränderung führt im Allgemeinen zur Aufhebung der Orthonormalität der Eigenformen, so dass sich die Ermittlung der Koeffizienten  $A_k$  aus den Anfangsbedingungen nicht auf klassischem Wege durchführen lässt. Untersuchungen hierzu sind in [KARL 2011, S. 103] zu finden. Wie bei der Auswertung in Abschnitt 4.2.4 diskutiert wird, folgt aus der Veränderung der Eigenfunktionen auch eine ortsabhängige Veränderung des gesamten Lösungsverlaufs. Diese Verschiebung lässt sich auch an den die Reihenentwicklung bildenden Anteilen  $\mu_k \otimes \eta_k$  ablesen (vgl. Abb. 4.4).<sup>95</sup>

<sup>94</sup> Dabei findet die Identität

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin(\alpha) \quad (4.56)$$

Anwendung.

<sup>95</sup> Abweichend von der üblichen Bezeichnung heißen die Elemente einer ähnlichen Reihenentwicklung in [KOIVUROVA 2008] Moden.

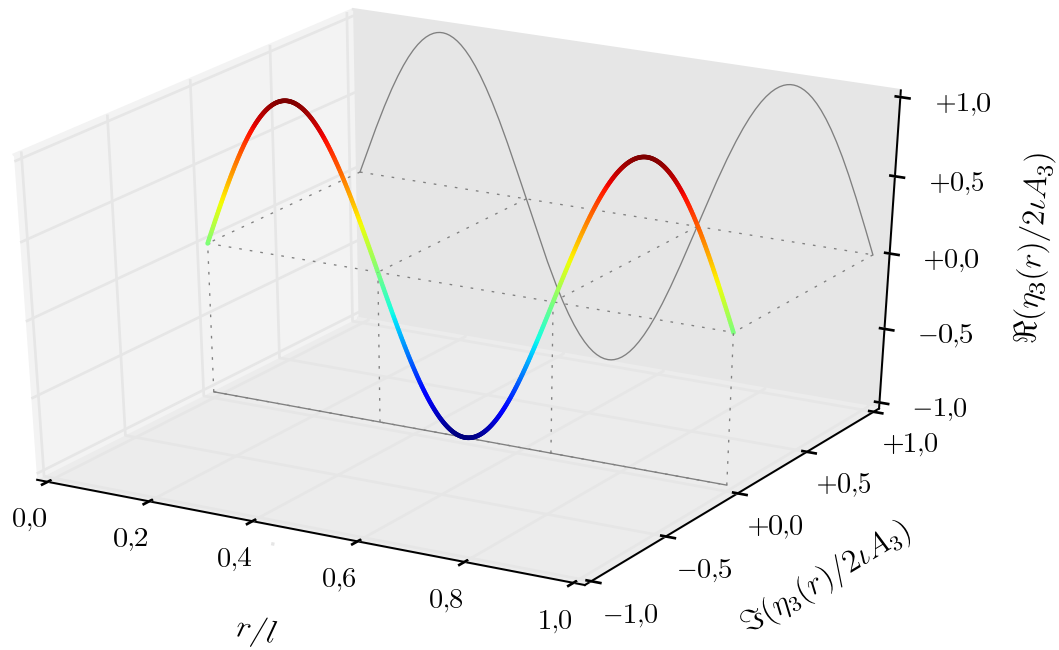
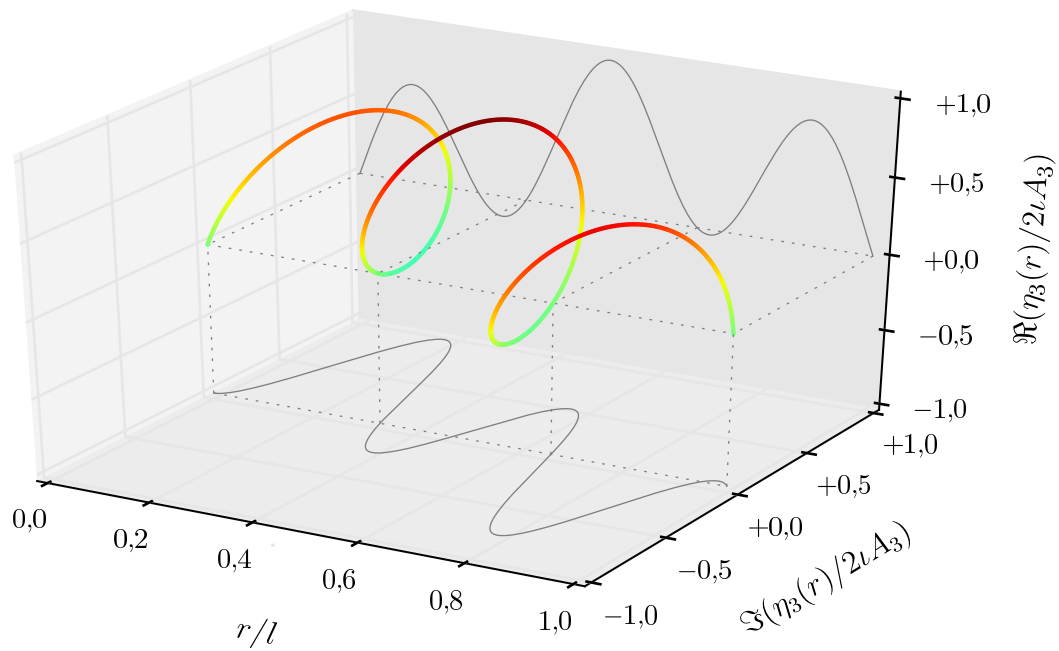
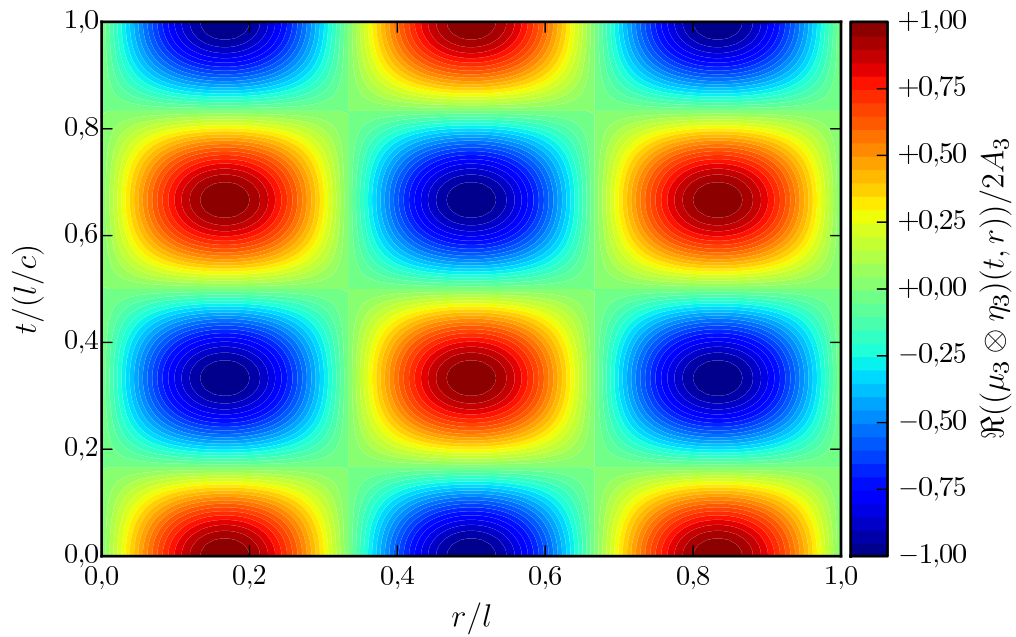
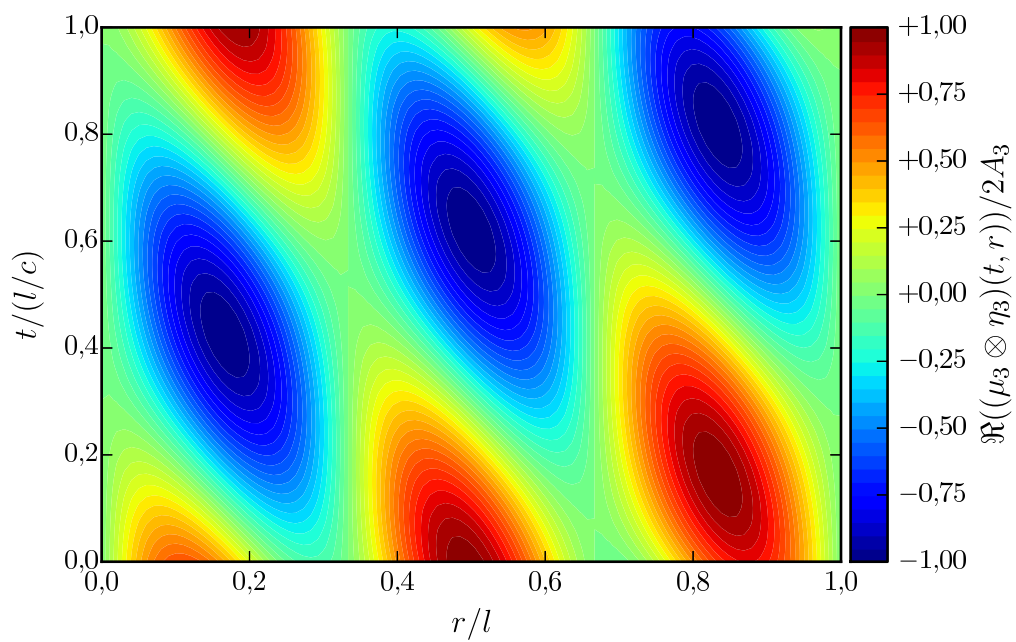
(a)  $v = 0$ (b)  $v = 0,7c$ 

Abbildung 4.3: Darstellung der dritten Eigenform für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten  $v$ . Die farbige Hervorhebung der Raumkurve folgt der Farbverteilung aus Abb. 4.4 für den Realteil der dargestellten Funktion.

(a)  $v = 0$ (b)  $v = 0,7c$ Abbildung 4.4: Darstellung des dritten Reihenanteils der Lösungsentwicklung für unterschiedliche Führungsgeschwindigkeiten  $v$

### 4.2.3 Numerische Umsetzung

Um den Zeitverlauf der Bewegung im Sinne einer Näherungslösung nach dem in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Verfahren nach GALERKIN ermitteln zu können, ist nun noch ein Ansatz für die Funktionen  $\psi_k$  notwendig. Gewählt wird an dieser Stelle der harmonische Ansatz

$$\psi_k(t) := z_k \exp(i\omega t) \quad . \quad (4.58)$$

Damit folgt das quadratische Eigenwertproblem in Matrizenform zu

$$((i\omega)^2 [M] + i\omega [G(t)] + [K(t)] + [\Gamma(t)]) [z] = 0 \quad . \quad (4.59)$$

Zur effizienten Lösung mit MATLAB ist es sinnvoll, das quadratische Eigenwertproblem in ein lineares zu überführen. Als Beispiel seien die zwei Varianten

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & -[K(t) - \Gamma(t)] \\ [M] & 0 \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} [M] & [G(t)] \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} i\omega z \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad (4.60)$$

$$\left( \begin{bmatrix} i[G(t)] & [K(t) + \Gamma(t)] \\ [K(t) + \Gamma(t)] & 0 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [K(t) + \Gamma(t)] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} [\omega z] \\ [z] \end{pmatrix} = 0 \quad (4.61)$$

angegeben (s. [STOLL 2009, S. 57] und [BRINKMEIER 2007, S. 39]).<sup>96</sup> Solche Systeme mit zeitvarianten Systemmatrizen lassen sich mittels impliziter bzw. expliziter Zeitintegrationstechniken numerisch lösen (vgl. [BRINKMEIER 2007]). Eine analytische Lösung gelingt nur in Sonderfällen (s. [KLOET & NEERHOF 2002] und [DRESIG & VUL'FSON 1989, S. 174]). Im Fall einer konstanten Führungsgeschwindigkeit ergeben sich zeitinvariante Systemmatrizen (vgl. Abschnitt 4.2.2) und es können zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden. Zum Ersten der Weg der Zeitintegration und zum Zweiten der Weg über ein Eigenwertproblem (vgl. [BRINKMEIER 2007]).

Im Folgenden wird im Rahmen dieser Arbeit die numerische Lösung bei einer zeitveränderlichen Führungsgeschwindigkeit mittels Zeitintegration unter Zuhilfenahme einer MATLAB-Toolbox für gewöhnliche Differentialgleichungen umgesetzt. Dazu muss das System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zeitveränderlichen Koeffizienten nach Gl. (4.31) umformuliert werden in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitveränderlichen Koeffizienten. Darüber hinaus sind die Gleichungen so anzuordnen, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die erste Ableitung des Lösungsvektors und auf der rechten Seite keine Ableitungen des Lösungsvektors auftreten

$$\partial_0 [z(t)] = [S(t)] [z(t)] \quad (4.62)$$

$$\text{mit} \quad [z(t)] := \begin{bmatrix} [\psi_k(t)]_k \\ [\partial_0 \psi_k(t)]_k \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\text{und} \quad [S(t)] := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ [M^{-1}(K(t) + \Gamma(t))] & [M^{-1}G(t)] \end{bmatrix} \quad . \quad (4.64)$$

<sup>96</sup> Dabei sind bei der Darstellung nach Gl. (4.61) die das Eigenwertproblem formulierenden Blockmatrizen HERMITESCH, was Vorteile bei der Lösung bietet.

Hierbei erfolgt die Invertierung der Matrix  $M$  nicht explizit, sondern numerisch günstiger als Lösung eines Gleichungssystems. Nach Vorgabe der Start- und Endzeit der Berechnung sowie des Anfangsvektors für  $z$  wird mithilfe des MATLAB-Programmes `ode45` das System gewöhnlicher Differentialgleichungen integriert.<sup>97</sup> Als Ergebnis folgt eine Matrix, in der Funktionswerte von  $\psi_k$  und  $\partial_0\psi_k$  für verschiedene Zeitpunkte  $T_i$  enthalten sind,

$$[Z] = \begin{bmatrix} \psi_1(T_1) & \psi_2(T_1) & \cdots & \psi_n(T_1) & \partial_0\psi_1(T_1) & \partial_0\psi_2(T_1) & \cdots & \partial_0\psi_n(T_1) \\ \psi_1(T_2) & \psi_2(T_2) & \cdots & \psi_n(T_2) & \partial_0\psi_1(T_2) & \partial_0\psi_2(T_2) & \cdots & \partial_0\psi_n(T_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(T_r) & \psi_2(T_r) & \cdots & \psi_n(T_r) & \partial_0\psi_1(T_r) & \partial_0\psi_2(T_r) & \cdots & \partial_0\psi_n(T_r) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Der Vektor der Zeitpunkte  $T$ , der aus dem Startzeitpunkt  $T_1$  und der Wahl der Zeitschritte folgt,

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

wird ebenfalls vom Programm ausgegeben. Für die Darstellung der Lösung genügt die Beschränkung auf die ersten  $n$  Spalten der Ergebnismatrix aus Gl. (4.65), die in der Matrix  $\Psi$  zusammengefasst werden,

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_1(T_1) & \psi_2(T_1) & \cdots & \psi_n(T_1) \\ \psi_1(T_2) & \psi_2(T_2) & \cdots & \psi_n(T_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(T_r) & \psi_2(T_r) & \cdots & \psi_n(T_r) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Mithilfe der Diskretisierung des Ortes

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

und der zugehörigen Beschreibung der örtlichen Abhängigkeit der gesuchten Lösung

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1(X_1) & \phi_2(X_1) & \cdots & \phi_n(X_1) \\ \phi_1(X_2) & \phi_2(X_2) & \cdots & \phi_n(X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(X_m) & \phi_2(X_m) & \cdots & \phi_n(X_m) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

kann die Matrixdarstellung der Lösung aus

$$[U] = [\Psi] [\Phi]^\top \quad (4.70)$$

<sup>97</sup> Der in der Routine `ode45` implementierte Integrationsalgorithmus ist eine Kombination aus RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung vier und fünf.

berechnet werden. Für das eingangs gesuchte Verschiebungsfeld ergibt sich folglich

$$\widetilde{u}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{MR}}(T_i, X_k) = U_{ik} \quad . \quad (4.71)$$

Der Vorteil der numerischen Lösung liegt in der nahezu freien Wahl der Führungsgeschwindigkeitsfunktion. Im Vergleich zu den analytischen Lösungen des Kapitels 3 ist dafür jedoch die numerische Ermittlung rechentechnisch aufwendiger und durch die Verwendung von rein numerischen Verfahren auch etwas intransparenter. Deshalb ist es notwendig, die numerische Lösung zumindest für den Fall einer konstanten Führungsgeschwindigkeit mithilfe der analytischen Lösung zu verifizieren.

#### 4.2.4 Auswertung

Vor der Auswertung von eventuell schwer interpretierbaren Verläufen steht die Verifikation der numerischen Implementierung. Dazu sind die Verläufe der numerischen und analytischen Lösungen (für konstante Führungsgeschwindigkeiten) zu vergleichen. Dieser Vergleich, dessen Darstellung an dieser Stelle entfällt, zeigt keine nennenswerten Abweichungen zwischen den Verläufen, was ein Hinweis auf eine richtige programmtechnische Umsetzung ist.

Für die Darstellung des nachfolgend behandelten Beispiels gelten die gleichen Richtlinien wie in Abschnitt 3.3.6. Demzufolge wird die Transversalverschiebung der axial bewegten Saite über die (normierte) Zeit und den (normierten) Ort aufgetragen. Als Beispiel dient die Anlaufphase einer Maschine (z. B. einer Papiermaschine), die ein Medium axial transportiert, das durch eine schwingende Saite eindimensional idealisiert werden kann.

Als Anfangsbedingungen werden die beiden Funktionen

$$u_0(s) := \hat{u} \sin\left(\pi \frac{s}{l}\right) \quad , \quad (4.72)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (4.73)$$

und als Führungsgeschwindigkeit die Funktion

$$v(t) := 0,35c \left(\frac{c}{l}t\right) \quad (4.74)$$

gewählt. Dies lässt sich als ein Prozess des Anfahrens der Maschine interpretieren. Als Lösung ergibt sich der in Abb. 4.5 dargestellte Lösungsverlauf.

Während sich bei einer konstanten Führungsgeschwindigkeit die Lösung als über die Zeit harmonisch verlaufend ergibt (entsprechend der Lösung der eindimensionalen Wellengleichung), verhält sich die Lösung mit veränderlicher Führungsgeschwindigkeit abweichend. Es kommt vielmehr zu einer ortsabhängigen Veränderung der Schwingungsform. Dies ist charakteristisch für Systeme mit bewegten Medien und veränderlicher Führungsgeschwindigkeit (s. hierzu auch den noch folgenden Abschnitt 4.4).



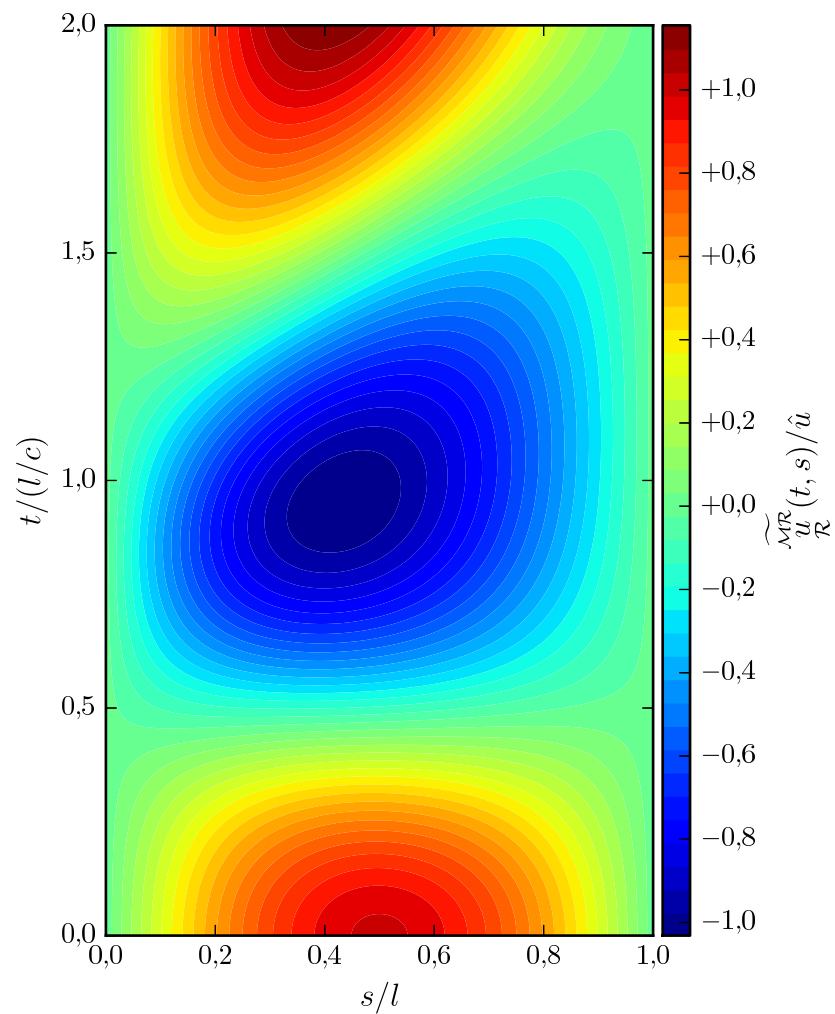


Abbildung 4.5: Saitenquerschwingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten sowie eine linear ansteigende Führungsgeschwindigkeitsfunktion  $v$

### 4.3 Direkte Herleitung der Bewegungsgleichung für das axial bewegte Seil

Um ein eindimensionales Modell zu finden, das sich noch mehr als die bisherigen Beispiele an den Systemgleichungen der dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Formulierung orientiert (s. Abschnitt 2.8.2), wird im Folgenden die Bewegungsgleichung für die Längsschwingungen eines axial bewegten Seiles hergeleitet. Dafür wird zunächst eine Führungsgeschwindigkeit  $\overset{\mathcal{R}A}{v}$

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{R}A}{v} : \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{E} \\ t &\mapsto \overset{\mathcal{R}A}{v}(t) \end{aligned} \quad (4.75)$$

angenommen und vorausgesetzt, dass das Seil axial mit dieser Geschwindigkeit bewegt wird. Bei der Führungsbewegung soll es sich um eine Starrkörperbewegung handeln, so dass die Geschwindigkeit  $\overset{\mathcal{R}A}{v}$  nicht vom Ort abhängig ist. Mit dieser Annahme können unter Verwendung der Notation aus Kapitel 2 die Bewegungsabbildungen zwischen den Platzierungen  $\mathcal{A}_t$ ,  $\mathcal{R}_t$  und  $\mathcal{M}_t$  formuliert werden

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{R}A}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t \\ (t, X) &\mapsto \overset{\mathcal{R}A}{\phi}(t, X) := (t, \overset{\mathcal{R}A}{\phi}_1(t, X)) := (t, X + \overset{\mathcal{R}A}{u}(t, X)) \quad , \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}R}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \chi) &\mapsto \overset{\mathcal{M}R}{\phi}(t, \chi) := (t, \overset{\mathcal{M}R}{\phi}_1(t, \chi)) := (t, \chi + \overset{\mathcal{M}R}{u}(t, \chi)) \quad , \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}A}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, X) &\mapsto \overset{\mathcal{M}A}{\phi}(t, X) := (t, \overset{\mathcal{M}A}{\phi}_1(t, X)) := (t, X + \overset{\mathcal{M}A}{u}(t, X)) \quad . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Durch die vorgegebene Geschwindigkeit der Führungsbewegung kann die Verschiebung infolge der Führungsbewegung durch die Integration

$$\overset{\mathcal{R}A}{u}_{\mathcal{A}} = \overset{\mathcal{R}A}{\phi}_1 - \text{id}_{\mathbb{T} \times \mathcal{A}} := \int_{\bar{t} \in [0, t]} \overset{\mathcal{R}A}{v}(\bar{t}) \quad (4.79)$$

bestimmt werden. Daraus folgt für die Verschiebung der Gesamtbewegung (s. Gl. (2.35))

$$\overset{\mathcal{M}A}{u}_{\mathcal{A}} = \overset{\mathcal{M}R}{u}_{\mathcal{R}} \circ \overset{\mathcal{R}A}{\phi} + \overset{\mathcal{R}A}{u}_{\mathcal{A}} = \overset{\mathcal{M}R}{u}_{\mathcal{A}} + \overset{\mathcal{R}A}{u}_{\mathcal{A}} \quad , \quad (4.80)$$

wobei die unbekannte Verschiebung der Bewegung  $\overset{\mathcal{M}R}{\phi}$  als

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}R}{u}_{\mathcal{R}} : \mathbb{T} \times \mathcal{R}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \chi) &\mapsto \overset{\mathcal{M}R}{u}_{\mathcal{R}}(t, \chi) \quad , \end{aligned} \quad (4.81)$$

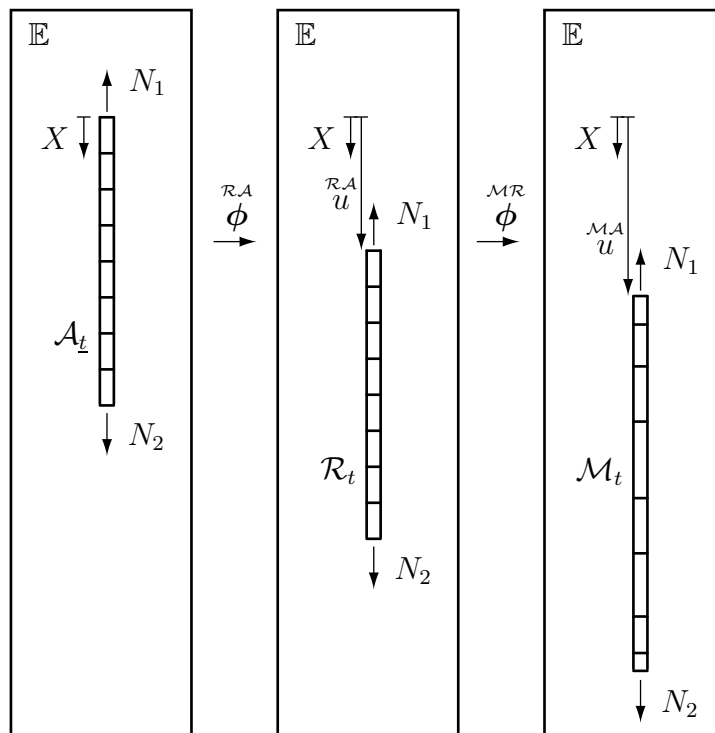


Abbildung 4.6: ALE-Kinematik für das Seil

definiert ist. Analog den Herleitungen in Abschnitt 2.3.3 folgt für die Geschwindigkeitsfelder

$$\begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ v \\ \mathcal{A} \end{matrix} := \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ \phi \\ \mathcal{A} \end{matrix} = \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \quad , \quad (4.82)$$

$$\begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ v \\ \mathcal{A} \end{matrix} := \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ \phi \\ \mathcal{A} \end{matrix} = \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \quad , \quad (4.83)$$

$$\begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ v \\ \mathcal{A} \end{matrix} := \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ \phi \\ \mathcal{A} \end{matrix} = \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \quad . \quad (4.84)$$

Außerdem lässt sich das Geschwindigkeitsfeld in

$$\begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} := \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{A}^R \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.85)$$

$$= \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} + \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{A}^R \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.86)$$

$$= \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{A}^R \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} + \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{A}^R \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.87)$$

$$= \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{A}^R \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} + \left( \partial_0 + \partial_1 \square \cdot \left( \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ \phi \\ \mathcal{R} \end{matrix} \right) \right) \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.88)$$

$$= \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} + \left( \partial_0 + \partial_1 \square \cdot \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} \right) \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.89)$$

$$= \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} + \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} + \begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ \eta \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ \eta \\ \mathcal{R} \end{matrix} := \partial_1 \begin{matrix} \mathcal{M}^R \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \mathcal{R}^A \\ v \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.90)$$

zerlegen. Der neu definierte Ausdruck  $\begin{matrix} \mathcal{M}^A \\ \eta \\ \mathcal{R} \end{matrix}$  ist hierbei nicht mit der konvektiven Geschwindigkeit zu verwechseln. Es handelt sich vielmehr um eine konvektive Verschiebungsgeschwindigkeit.

Wie bei der dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Beschreibung folgt nach der Festlegung der Kinematik im Folgenden das System der Bewegungsgleichungen aus Massebilanz, Materialgleichung und Impulsbilanz. Der Masseerhalt für das vorliegende Seilmodell lautet in der konvektiven Form (analog Abschnitt 2.5.3)

$$\frac{\partial_0 \varrho}{\mathcal{R} \mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\varrho}{\mathcal{R}} \frac{\mathcal{R}^A \mathbf{v}}{\mathcal{R}} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\varrho}{\mathcal{R}} := \frac{M\mathcal{R}}{J} \rho := \det \left( \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \frac{M\mathcal{R}}{\phi_1} \right) \frac{\rho}{\mathcal{R}} \quad . \quad (4.91)$$

Diese Gleichung ist von den übrigen beschreibenden Gleichungen entkoppelt lösbar und das unbekannte Dichtefeld kann in einer nachträglichen Rechnung bestimmt werden. Für die Impulsbilanz wird zunächst die Definition für die Fläche in der Referenzplatzierung  $A_0$  benötigt, welche aus der Querschnittsfläche des Seils mit

$$A_0(x) := A(t=0, x) \quad (4.92)$$

hervorgeht. Außerdem ist die Definition der Seilspannung in der Referenzplatzierung erforderlich

$$\frac{M\mathcal{R}}{P} := \frac{N}{A_0} \quad , \quad (4.93)$$

wobei eine über den Seilquerschnitt konstante Spannungsverteilung angenommen wird und der Ausdruck  $N$  die Seilnormalkraft in der Referenzplatzierung beschreibt. Somit lautet die Impulsbilanz (in advektiver Form analog Abschnitt 2.5.4)

$$0 = \frac{A}{\rho} \frac{\partial_0}{\mathcal{R} \mathcal{A}} \frac{M\mathcal{A}}{v} - \text{Div} \frac{M\mathcal{R}}{P} - \frac{A}{\rho f} \quad (4.94)$$

$$= \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \right) \frac{M\mathcal{A}}{v} - \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \left( \frac{M\mathcal{R}}{P} \right) - \frac{A}{\rho f} \quad (4.95)$$

$$= \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} + \frac{M\mathcal{R}}{v} + \frac{M\mathcal{A}}{\eta} \right) - \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \left( \frac{M\mathcal{R}}{P} \right) - \frac{A}{\rho f} \quad , \quad (4.96)$$

wobei  $\frac{A}{\rho}$  die Ausgangsdichte in der referentiellen Darstellung bezeichnet. In Verbindung mit der Materialgleichung für lineares Materialverhalten und bei kleinen Deformationen dargestellt in der Referenzplatzierung

$$E^{-1} \frac{M\mathcal{R}}{P} = \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \frac{M\mathcal{R}}{u} \quad (4.97)$$

bzw. deren zeitlicher Ableitung

$$\frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \left( \frac{E^{-1} M\mathcal{R}}{P} \right) = E^{-1} \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \frac{M\mathcal{R}}{P} = \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \frac{M\mathcal{R}}{u} = \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \frac{M\mathcal{R}}{u} \quad (4.98)$$

lässt sich das System der Bewegungsgleichungen für das axial bewegte Seil als

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} & 0 \\ \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \right) & \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \right) & -\frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \\ 0 & -\frac{\partial_1}{\mathcal{R}} & E^{-1} \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{M\mathcal{A}}{\eta} \\ \frac{M\mathcal{R}}{P} \\ \frac{M\mathcal{R}}{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A}{\rho f} - \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial_0}{\mathcal{R}} + \frac{\partial_1}{\mathcal{R}} \square \cdot \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \right) \frac{\mathcal{R}^A v}{\mathcal{R}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

aufstellen. Hierin kann der Term

$$\tilde{f} := \frac{A}{R} \left( \frac{\partial_0}{R} + \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} \right) \frac{R^A}{R} v \quad (4.100)$$

aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters auch als Wirkung eines zusätzlichen künstlichen Gravitationsfeldes (Beschleunigungsfeldes) infolge der Translation interpretiert werden (s. [KITTEL et al. 1986, S. 63]). Wird die erste Gleichung dieses Systems nach der Zeit abgeleitet

$$0 = -\frac{A}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{M^A}{R} \eta + \frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{M^R}{R} u \cdot v + \frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0^{-1}}{R} \frac{M^R}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v \quad (4.101)$$

und zur zweiten Zeile addiert, ergibt sich

$$\begin{bmatrix} -\frac{A}{R} \frac{\partial_0}{R} & \frac{A}{R} \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} + \frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0^{-1}}{R} \square \cdot \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v & 0 \\ \frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v & \frac{A}{R} \left( \frac{\partial_0}{R} + 2 \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} + \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0^{-1}}{R} \square \cdot \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v \right) & -\frac{\partial_1}{R} \\ 0 & & -\frac{\partial_1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{M^A}{R} \eta \\ \frac{\partial_0}{R} \frac{M^R}{R} u \\ \frac{M^R}{R} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A}{R} \left( f - \tilde{f} \right) \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.102)$$

Darüber hinaus gilt für eine konstante Führungsgeschwindigkeit und Starrkörperbewegung die Beziehung

$$\frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial_1}{R} \frac{R^A}{R} v = 0 \quad , \quad (4.103)$$

so dass in diesem Fall der beschreibende Blockoperator in einen Teil mit Zeitableitungen und einen Teil mit Ortsableitungen additiv zerlegt werden kann

$$\left( \begin{bmatrix} -\frac{A}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{R} & 0 \\ 0 & 0 & E^{-1} \end{bmatrix} \frac{\partial_0}{R} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A}{R} \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} & 0 \\ -\frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v & -2 \frac{A}{R} \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} & \frac{\partial_1}{R} \\ 0 & \frac{\partial_1}{R} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{M^A}{R} \eta \\ \frac{\partial_0}{R} \frac{M^R}{R} u \\ \frac{M^R}{R} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A}{R} f \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.104)$$

Mit der weiterführenden Umformulierung

$$\left( \begin{bmatrix} \frac{A}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{R} & 0 \\ 0 & 0 & E^{-1} \end{bmatrix} \frac{\partial_0}{R} - \begin{bmatrix} 0 & -i \frac{A}{R} \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} & 0 \\ -i \frac{A}{R} \frac{\partial_1}{R} \frac{\partial_0}{R} \frac{R^A}{R} v & -2 \frac{A}{R} \frac{\partial_1 \square \cdot v}{R} & \frac{\partial_1}{R} \\ 0 & \frac{\partial_1}{R} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -i \frac{M^A}{R} \eta \\ \frac{\partial_0}{R} \frac{M^R}{R} u \\ \frac{M^R}{R} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A}{R} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

kann der erste Teil des Blockoperators, der auf die Unbekannten angewendet wird, sogar in einen positiv definiten Operator umgewandelt werden. Allerdings ist der zweite Blockoperator nicht schiefselfbstadjungiert.

An dieser Stelle sei die sehr deutliche Übereinstimmung zu den Bewegungsgleichungen für den dreidimensionalen Fall aus Abschnitt 2.8.2 hervorgehoben (s. Gl. (2.233) und (2.234)). In Analogie zur schwingenden Saite in Gl. (3.25) lässt sich für dieses System mit

$$c^2 := \frac{E}{\rho \mathcal{R}} \tag{4.106}$$

die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  definieren.

## 4.4 Lösung mittels GALERKIN-Verfahren

### 4.4.1 Modellbeschreibung

Gleichung (4.102) beschreibt die Längsschwingungen eines Seils, das in axialer Richtung mit der Führungsgeschwindigkeit  ${}^{\mathcal{R}A}v$  bewegt wird. Ähnlich den Problemstellungen aus Kapitel 3 wird an dieser Stelle stellvertretend für die Problemklasse von räumlich bewegten Kontinua mit räumlich festen nichtmateriellen Randbedingungen ein Beispiel ausgewählt. Dieses Beispiel behandelt Abb. 4.7 folgend ein axial bewegtes Seil, das über zwei Rollen geführt wird, so dass sich für das Seil eine freie Länge  $l$  ergibt.<sup>98</sup>

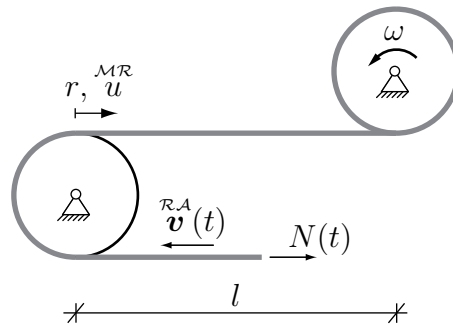


Abbildung 4.7: Modell eines in axialer Richtung bewegten Seils mit räumlich festen Lagerungsbedingungen

Da der Starrkörperbewegung des Seils durch die Anwendung einer ALE-Kinematik bereits Rechnung getragen wurde, können die nichtmateriellen Randbedingungen nun in Bezug auf die Referenzplatzierung zeitlich invariant formuliert werden. Unter Einbeziehung von Gl. (4.102) lautet das Anfangswert-Randwertproblem somit

$$\bigwedge_{r \in [0, l]} \frac{{}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}u}{\mathcal{R}}(0^+, r) := u_0(r) \quad , \quad (4.107)$$

$$\bigwedge_{r \in [0, l]} \partial_0 \frac{{}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}u}{\mathcal{R}}(0^+, r) := u_1(r) \quad , \quad (4.108)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{{}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}u}{\mathcal{R}}(t, 0) := 0 \quad , \quad (4.109)$$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{{}^{\mathcal{M}\mathcal{R}}u}{\mathcal{R}}(t, l) := 0 \quad . \quad (4.110)$$

$$\text{mit } c^2 := \frac{E}{\rho} \quad . \quad (4.111)$$

### 4.4.2 Transformation der Bewegungsgleichung

Die Einführung einer ALE-Kinematik in Abschnitt 4.3 führt bereits auf zeitinvariante Randbedingungen. Demzufolge ist keine weitere Transformation notwendig, um die nichtmateriellen Randbedingungen in eine andere Form zu überführen. Es sei an dieser Stelle jedoch erwähnt, dass die in

<sup>98</sup> Das Ablösen des Seils von den Rollen (vgl. [KOIVUROVA 1998, KONG & PARKER 2005]) soll dabei nicht näher untersucht werden. Außerdem sei zwischen den Rollen und dem Seil eine Relativverschiebung ausgeschlossen, d. h. der betrachtete Seilabschnitt habe stets die Länge  $l$ . Die Massenträgheitsmomente der Rollen seien vernachlässigbar.

Abschnitt 3.3.1 vorgestellte Transformation zu derselben Bewegungsgleichung führt. In analoger Weise kann demnach angenommen werden, dass

$$\begin{matrix} \mathcal{MR} \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} := \tau_{(0,-V(m_0))} \begin{matrix} \mathcal{MR} \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathcal{MR} \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} =: \tau_{(0,V(m_0))} \begin{matrix} \mathcal{MR} \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix} \quad (4.112)$$

$$\text{mit } V(t) := \int_{\bar{t} \in [0,t]} \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ \bar{t} \end{matrix} \quad (4.113)$$

gilt.

#### 4.4.3 Zeitlich veränderliche Führungsgeschwindigkeit

Entsprechend des Vorgehens in Abschnitt 4.2.1 wird unter denselben Annahmen nachfolgend das Gleichungssystem zur Lösung der Bewegungsgleichung nach dem Verfahren nach GALERKIN aufgestellt.

Die Funktion zur Beschreibung des mittleren Fehlers lautet in diesem Fall

$$R := \left( \partial_0^2 + 2 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \partial_0 \partial_1 + \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right) \partial_1 - \left( c^2 - \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right)^2 \partial_1^2 \right) \widetilde{\begin{matrix} \mathcal{MR} \\ u \\ \mathcal{R} \end{matrix}} + \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right) \cdot \quad (4.114)$$

Mit dem Separationsansatz nach Gl. (4.19) ergibt sich

$$R = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \left( \left( \partial_0^2 \psi_k + \left( \frac{(k+1)\pi}{l} \right)^2 \left( c^2 - \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right)^2 \right) \psi_k \right) \otimes \phi_k + \dots \\ + \dots \left( \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right) \psi_k + 2 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} (\partial_0 \psi_k) \right) \otimes (\partial_0 \phi_k) + \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (m_0) \end{matrix} \right) \right) \cdot \quad (4.115)$$

In der Formulierung nach Gl. (4.31) folgen für die Matrizen  $M$ ,  $G$ ,  $K$  identische Ausdrücke. Einzig Matrix  $\Gamma$  ergibt sich unterschiedlich zu

$$[\Gamma(t)]_{jk} = \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (t) \end{matrix} \right) \int_{r \in [0,l]} (\partial_0 \phi_k)(r) \bar{\phi}_j(r) \quad (4.116)$$

$$= \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (t) \end{matrix} \right) \int_{r \in [0,l]} (k+1) \frac{\pi}{l} \cos\left((k+1) \frac{\pi r}{l}\right) \sin\left((j+1) \frac{\pi r}{l}\right) \quad (4.117)$$

$$= 2 \left( \partial_0 \begin{matrix} \mathcal{RA} \\ v \\ (t) \end{matrix} \right) \begin{cases} \frac{(k+1)(j+1)}{(k+1)^2 - (j+1)^2} & , (j \neq k) \wedge ((j+k) \bmod 2 \neq 0) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \cdot \quad (4.118)$$

Im Gegensatz zu den Herleitungen für die axial bewegte Saite ist diese Matrix schiefsymmetrisch, was sich positiv auf die Selbstadjungiertheit des Problems und damit die Wohldefiniertheit auswirkt (s. hierzu auch [MÜLLER 1977]).



#### 4.4.4 Zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit

Für den Fall, dass eine zeitlich unveränderliche Führungsgeschwindigkeit angenommen wird, besitzen die Bewegungsgleichungen des axial bewegten Seils und die der axial bewegten Saite dieselbe Struktur (vgl. Gl. (4.114) und Gl. (4.20)). Dementsprechend gelten für die Längsschwingungen eines axial stationär bewegten Seils die Schlussfolgerungen aus Abschnitt 4.2.2.

#### 4.4.5 Ortszeittransformation und Separationsansatz

Die in Gl. (4.105) gezeigte Bewegungsgleichung des axial bewegten Seils ist dem Gleichungssystem der dreidimensionalen Formulierung einer Bewegung mit Dekomposition der Bewegung sehr ähnlich. Im Vergleich zu dem in Abschnitt 2.8.1 hergeleiteten System fällt jedoch auf, dass der Blockoperator, welcher die Ortsableitungen enthält, nicht schiefselfbstadjungiert ist. Damit kann nach [PICARD 2009] die Wohlgestellttheit des Problems nicht sichergestellt werden. Um die in [PICARD 2009] geforderte Struktur, nach welcher die Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösung gezeigt wurde, zu erhalten, wird im Folgenden eine ortsabhängige Transformation der Zeit erarbeitet. Damit wird die Zeit ortsabhängig, es wird deshalb auch von der sogenannten Ortszeit gesprochen (vgl. [MATTHIEU 1961]).

Zur Unterscheidung der Notation werden alle Größen, welche in der Ortszeit formuliert sind, durch ein untergestelltes  $\mathcal{O}$  gekennzeichnet. Die in der Zeit lineare Transformation lautet zunächst allgemein für ein noch nicht bestimmtes  $B \in \mathbb{R}$

$$f_{\mathcal{O}} := \tau_{(Bm_1,0)} f_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow f_{\mathcal{R}} =: \tau_{(-Bm_1,0)} f_{\mathcal{O}} \quad . \quad (4.119)$$

Nun ist der Koeffizient  $B$  zu finden, für den die Bewegungsgleichung die gewünschte Struktur erhält. Dafür ist zunächst der Einfluss der Transformation auf die gebildeten Ableitungen zu ermitteln und in die Bewegungsgleichung einzuführen<sup>99</sup>

$$\begin{bmatrix} \rho_{\mathcal{O}}^A \partial_{\mathcal{O}} & i \rho_{\mathcal{O}}^A \left( -B \partial_{\mathcal{O}} + \partial_1 \right) \square \cdot v^{\mathcal{R}A} & 0 \\ i \rho_{\mathcal{O}}^A \left( -B \partial_{\mathcal{O}} + \partial_1 \right) \square \cdot v^{\mathcal{R}A} & \rho_{\mathcal{O}}^A \partial_{\mathcal{O}} + 2 \rho_{\mathcal{O}}^A \left( -B \partial_{\mathcal{O}} + \partial_1 \right) \square \cdot v^{\mathcal{R}A} & B \partial_{\mathcal{O}} - \partial_1 \\ 0 & B \partial_{\mathcal{O}} - \partial_1 & E^{-1} \partial_{\mathcal{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \eta_{\mathcal{O}}^{\mathcal{M}A} \\ \partial_{\mathcal{O}}^{\mathcal{M}R} u \\ P_{\mathcal{O}}^{\mathcal{M}R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_{\mathcal{O}}^A f \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.122)$$

Mit Festlegung der neuen Größen

$$\widetilde{\eta}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{M}A} := \rho_{\mathcal{O}}^A \partial_1^{\mathcal{M}R} u \cdot v^{\mathcal{R}A} \quad , \quad (4.123)$$

$$\widetilde{P}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{M}R} := E \partial_1^{\mathcal{M}R} u \quad (4.124)$$

<sup>99</sup> Aus der Anwendung der Kettenregel folgen die Beziehungen

$$\partial_0 \left( \tau_{(-Bm_1,0)} f_{\mathcal{O}} \right) = \tau_{(-Bm_1,0)} \left( \partial_0 f_{\mathcal{O}} \right) \quad , \quad (4.120)$$

$$\partial_1 \left( \tau_{(-Bm_1,0)} f_{\mathcal{O}} \right) = \tau_{(-Bm_1,0)} \left( -B \partial_0 + \partial_1 \right) f_{\mathcal{O}} \quad . \quad (4.121)$$



Reihe

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(t, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \alpha_k \exp(i(k+1) \frac{\bar{c}\pi}{l} t) + \beta_k \exp(-i(k+1) \frac{\bar{c}\pi}{l} t) \right) \phi_k(\xi) \quad , \quad (4.130)$$

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\xi) := \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(0^+, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_k + \beta_k) \phi_k(\xi) \quad , \quad (4.131)$$

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\xi) := \left( \partial_0 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}} \right) (0^+, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} i(k+1) \frac{\bar{c}\pi}{l} (\alpha_k - \beta_k) \phi_k(\xi) \quad (4.132)$$

$$\text{mit } \bar{c} := \frac{c^2 - \left( \overset{\mathcal{RA}}{v} \right)^2}{c} = -\frac{1}{B} \frac{\overset{\mathcal{RA}}{v}}{c} \quad (4.133)$$

ausgedrückt werden, da die Eigenfunktionen eine HILBERT-Basis bilden. Dabei ist der Ausdruck  $\bar{c}$  die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit des transformierten Problems. Die FOURIER-Koeffizienten können mithilfe einer FOURIER-Reihenentwicklung von  $\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}$  und  $\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}$  als

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\bar{\xi} \in [0, l]} \left( \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\bar{\xi}) + \frac{l}{i(k+1)c\pi} \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\bar{\xi}) \right) \phi_k(\bar{\xi}) \quad , \quad (4.134)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \int_{\bar{\xi} \in [0, l]} \left( \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\bar{\xi}) - \frac{l}{i(k+1)c\pi} \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\bar{\xi}) \right) \phi_k(\bar{\xi}) \quad (4.135)$$

angegeben werden. Die Rücktransformation der Ortszeit zeigt den Einfluss der nichtmateriellen Randbedingungen auf die Wahl der Anfangsbedingungen

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\xi) = \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(0^+, \xi) = \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(0^+ + B\xi, \xi) = \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(B\xi, \xi) \quad , \quad (4.136)$$

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}}(\xi) = \left( \partial_0 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{O}} \right) (0^+, \xi) = \left( \partial_0 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}} \right) (0^+ + B\xi, \xi) = \left( \partial_0 \overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}} \right) (B\xi, \xi) \quad . \quad (4.137)$$

Wie zu erkennen ist, bezieht sich die Formulierung der Anfangsbedingungen des Ausgangsproblems nicht mehr nur auf den Zeitpunkt  $t = 0^+$ , sondern auch auf die zurückliegende Bewegung bis zum Zeitpunkt  $t = B\xi$ . Da bei Vorgabe der Anfangsbedingungen die Periodizität der gesuchten Lösung berücksichtigt werden muss, können sie bei dem in diesem Abschnitt vorgestellten Lösungsansatz nicht mehr explizit vorgegeben werden. Dennoch ist es möglich, die Lösung bezüglich der Anfangsbedingungen des mithilfe der Ortszeit transformierten Problems anzugeben

$$\overset{\mathcal{MR}}{u}_{\mathcal{R}}(t, s) := \sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_k \exp(i(k+1)c(t+Bs)) + \beta_k \exp(-i(k+1)c(t+Bs))) \phi_k(s) \quad . \quad (4.138)$$

#### 4.4.6 Auswertung

Bei der Herleitung der Lösung mithilfe des GALERKIN-Verfahrens war der einzige Unterschied zwischen axial bewegter Saite und axial bewegtem Seil eine andere Matrix  $\Gamma$ . Um den Einfluss dieses Unterschieds analysieren zu können, wird deshalb bei der Auswertung dasselbe Beispiel wie in Abschnitt 4.2.4 verwendet. Demnach lauten die Anfangsbedingungen

$$u_0(s) := \hat{u} \sin(\pi \frac{s}{l}) \quad , \quad (4.139)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (4.140)$$

und die Funktion der linear ansteigenden Führungsgeschwindigkeit

$$\overset{\mathcal{R}A}{v}(t) := 0,35c \left( \frac{c}{l}t \right) . \quad (4.141)$$

Der Lösungsverlauf ist in Abb. 4.8 wiedergegeben. Darin ist, wie bei den Saitenquerschwingungen in Abschnitt 4.2.4, die mit der Zeit auftretende ortsabhängige Veränderung des Schwingungsverlaufs gegenüber der Lösung eines unbewegten Seils zu erkennen. Auch wenn sich die Verläufe für die Saitenquerschwingungen und die Seillängsschwingungen nicht direkt vergleichen lassen, so sei an dieser Stelle das Verhalten beider Lösungen kurz gegenübergestellt. So unterscheiden sich die Darstellungen der Lösungen für Saite und Seil trotz vergleichbarer Verläufe für Anfangs- und Randbedingungen sowie Führungsgeschwindigkeit. Bei der Lösung für das Seil fällt die ortsabhängige Veränderung des Schwingungsverlaufs geringer aus als bei der Lösung für die Saite (vgl. Abb. 4.5 und Abb. 4.8). Dieses Verhalten ist auf die Unterschiede der beschreibenden Differentialgleichungen für Saite und Seil zurückzuführen.

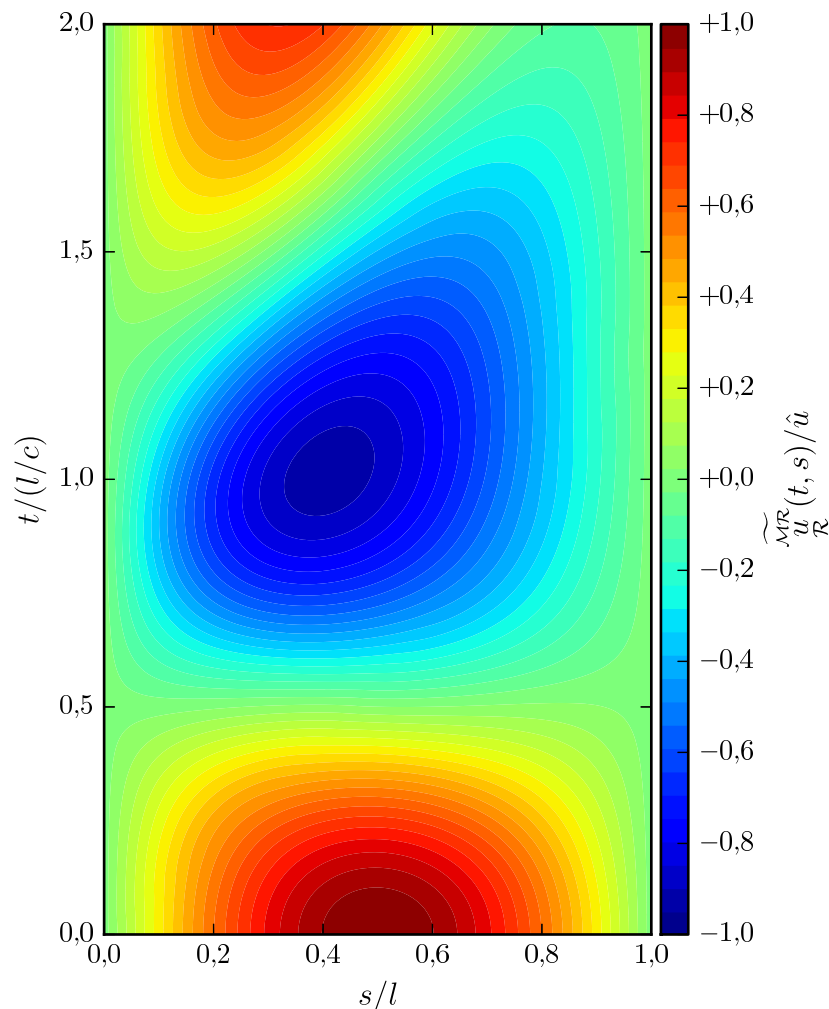


Abbildung 4.8: Seillängsschwingungen für eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten sowie eine linear ansteigende Führungsgeschwindigkeitsfunktion  $\overset{\mathcal{R}A}{v}$

In Abschnitt 4.4.5 wurde eine analytische Lösung mithilfe zweier Transformationen gefunden. Zum Ersten ist dies eine Transformation von der materiellen Darstellung der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}$  zur räumlichen Darstellung der Referenzplatzierung  $\mathcal{R}$  und zum Zweiten eine Ortszeittransformation in eine physikalisch nur schwer interpretierbare Hilfsplatzierung  $\mathcal{O}$ .

Bei der Auswertung eines beliebig gewählten Beispiels können diese Transformationen anhand der Lösungsverläufe in der jeweiligen Platzierung nachvollzogen werden. Dazu werden eine sinusförmige Anfangsverschiebungsfunktion und verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten in der Platzierung  $\mathcal{O}$

$$\underset{\mathcal{O}}{u_0}^{\mathcal{MR}}(s) := \hat{u} \sin\left(\pi \frac{s}{l}\right) \quad , \quad (4.142)$$

$$\underset{\mathcal{O}}{u_1}^{\mathcal{MR}}(s) := 0 \quad (4.143)$$

sowie eine vom vorherigen Beispiel abweichende konstante Führungsgeschwindigkeit von

$$\underset{\mathcal{O}}{v}^{\mathcal{RA}}(t) := 0,5c \quad (4.144)$$

gewählt.

Im ersten Schritt des Lösungsprozesses wird die gestellte Anfangswert-Randwert-Aufgabe in der Platzierung der Ortszeit  $\mathcal{O}$  gelöst. Der Lösungsverlauf entspricht der Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für eben diese Anfangs- und Randbedingungen (s. Abb. 4.9(a)). Durch die Rücktransformation in die Referenzplatzierung  $\mathcal{R}$  wird die Lösung in Richtung der Zeitachse verzerrt (s. Abb. 4.9(b)). Dieses Resultat entspricht in analoger Weise den Schlussfolgerungen in Abschnitt 4.2.2 zur Einführung von Eigenformen, die nicht mehr orthonormal sind. Wie bereits zu Gl. (4.138) erläutert wurde, weichen die Anfangsbedingungen des Ausgangsproblems (formuliert in der Referenzplatzierung) aufgrund der Rücktransformation der Ortszeit von den Anfangsbedingungen des in der Platzierung der Ortszeit formulierten Problems ab. Aus Abb. 4.9(c) geht hervor, dass sich dieses Verhalten auch bei der weiterführenden Rücktransformation der Lösung aus der Referenz- in die Ausgangsplatzierung nicht ändert.

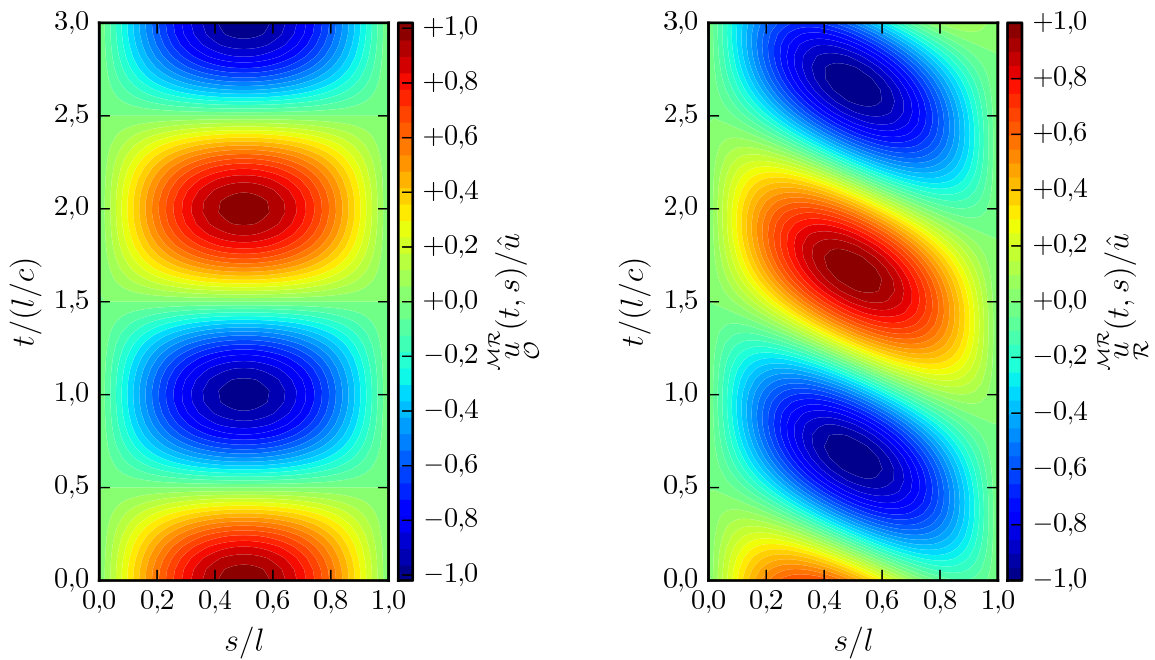
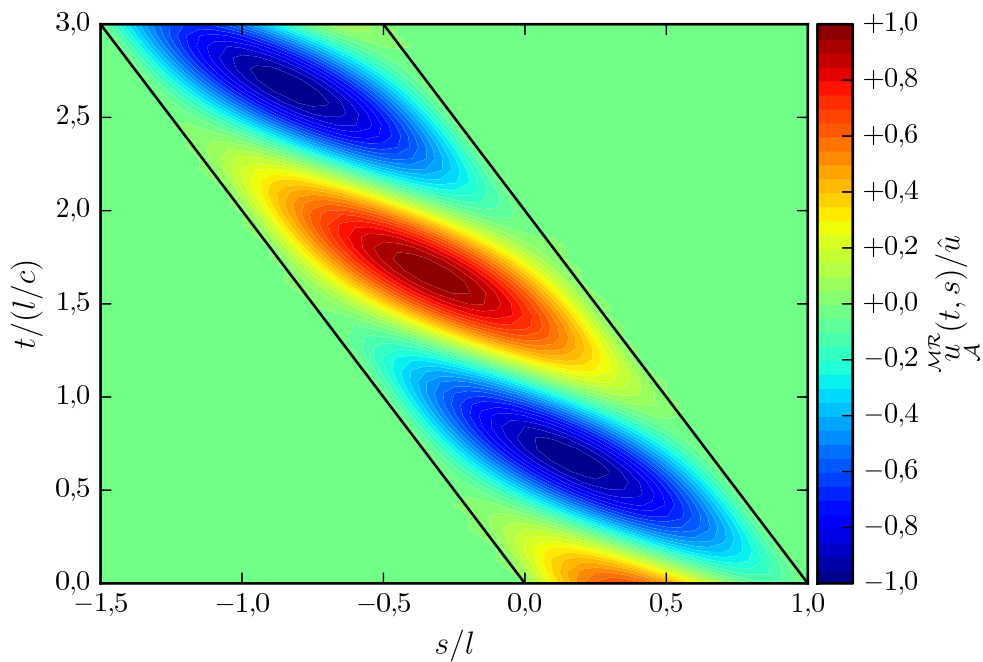
(a) Darstellung der Lösung in der Platzierung der Ortszeit  $\mathcal{O}$ (b) Darstellung der Lösung in der Referenzplatzierung  $\mathcal{R}$ (c) Darstellung der Lösung in der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}$ . Die Trajektorien der sich relativ zum Beobachter bewegenden Lager sind durch schwarze Linien hervorgehoben.

Abbildung 4.9: Lösungsverlauf bei sinusförmiger Anfangsverschiebungsfunktion und konstanter Führungsgeschwindigkeit ( $v^{\mathcal{R}\mathcal{A}} = 0,5c$ ) für verschiedene Platzierungen (verschwindende Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten)

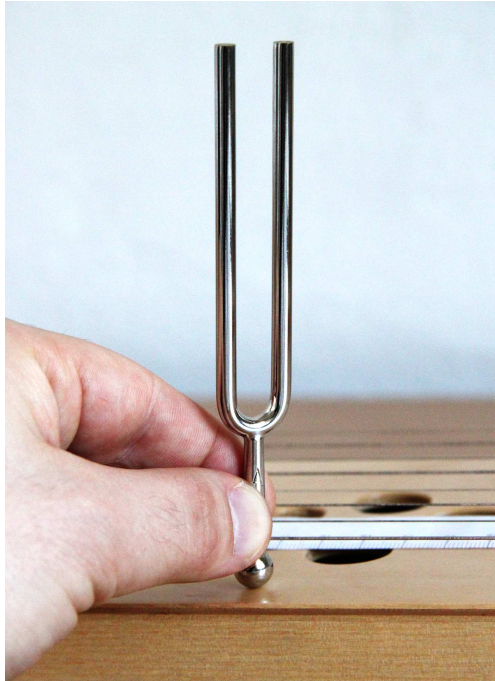


Audioeditor und -rekorder AUDACITY verwendet. Die Messungen können so im unkomprimierten „Waveform Audio File Format“ mit einer Abtastrate von 44,1 kHz abgespeichert werden.

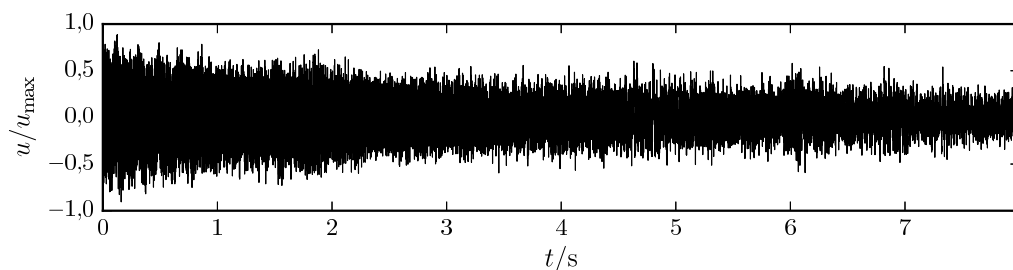
Wie Vorversuche ergaben, eignen sich handelsübliche verschiebbliche Monochordstege mit einer Metallkante nicht dafür, die nichtmaterielle Randbedingung im Versuch umzusetzen. Der Grund hierfür liegt in den relativ starken Nebengeräuschen, die durch das Kratzen der Metallkante auf der Saite entstehen. Deshalb wird als Zwischenlager eine drehbar gelagerte Seilrolle verwendet (s. Abb. 5.1(b)).

Um den Versuchsaufbau zu prüfen, wird zunächst das Signal eines Referenzversuchs untersucht. Dazu wird eine Stimmgabel angeschlagen und auf den Resonanzkörper des Monochords aufgesetzt (vgl. Abb. 5.2). Der Signalverlauf für diesen Referenzversuch ist in Abb. 5.2(b) dargestellt. Im Folgenden wird vor allem der zeitliche Signalverlauf analysiert und es wird nicht näher auf die Lautstärke des Signals eingegangen, deshalb ist das Signal auf die maximale Amplitude normiert über die Zeit aufgetragen. Wie sich deutlich erkennen lässt, nimmt die Amplitude des Signals über die Zeit merklich ab, d. h. es ist gedämpft. Gründe hierfür sind u. a. in der Material- und Strukturdämpfung sowie der dämpfenden Wirkung der die Stimmgabel und den Resonanzkörper umgebenden Luft zu suchen.





(a) Aufsetzen der Stimmgabel auf dem Resonanzkörper des Monochords



(b) experimentell bestimmtes Signal

Abbildung 5.2: Referenzversuch mit einer Stimmgabel

Die charakteristischen Frequenzen, aus denen ein Signal zusammengesetzt ist, lassen sich an seinem Frequenzspektrum ablesen. Dieses kann durch eine FOURIER-Analyse der periodischen Fortsetzung des gesamten Signals oder eines Teils des Signals gewonnen werden. Das Ergebnis einer solchen Analyse mithilfe der Schnellen FOURIER-Transformation ist in den Abb. 5.3(a) und 5.3(b) für den Anfangs- und den Endzeitpunkt wiedergegeben.<sup>101</sup> Die Länge des Abtastfensters beträgt dabei 4096 Datenpunkte und um den Einfluss des sog. Leck-Effektes zu verringern wird ein sog. HANN-Fenster eingesetzt. Darüber hinaus wird ein logarithmisches Pegelmaß für die FOURIER-Koeffizienten

$$L := 20 \text{ dB} \lg \left( \frac{c_k}{u_{\max}} \right) + L_0 \quad (5.1)$$

definiert (vgl. [STEIN 1997, S. 56]), wobei die FOURIER-Koeffizienten der Schnellen FOURIER-

<sup>101</sup> Als Bezugszeitpunkt wird der Beginn des Abtastfensters gewählt.

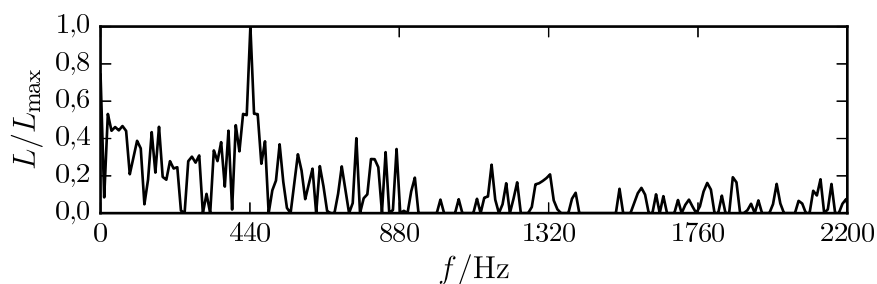
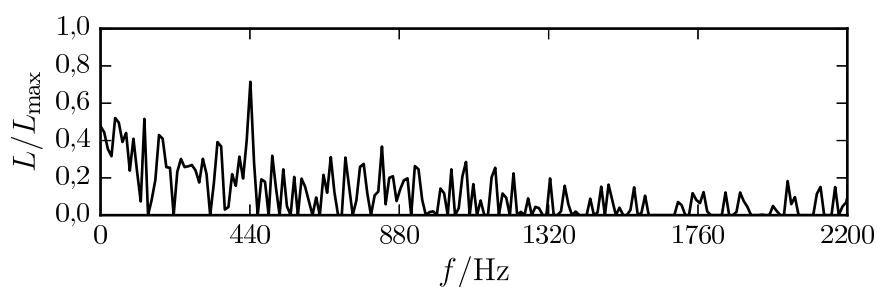
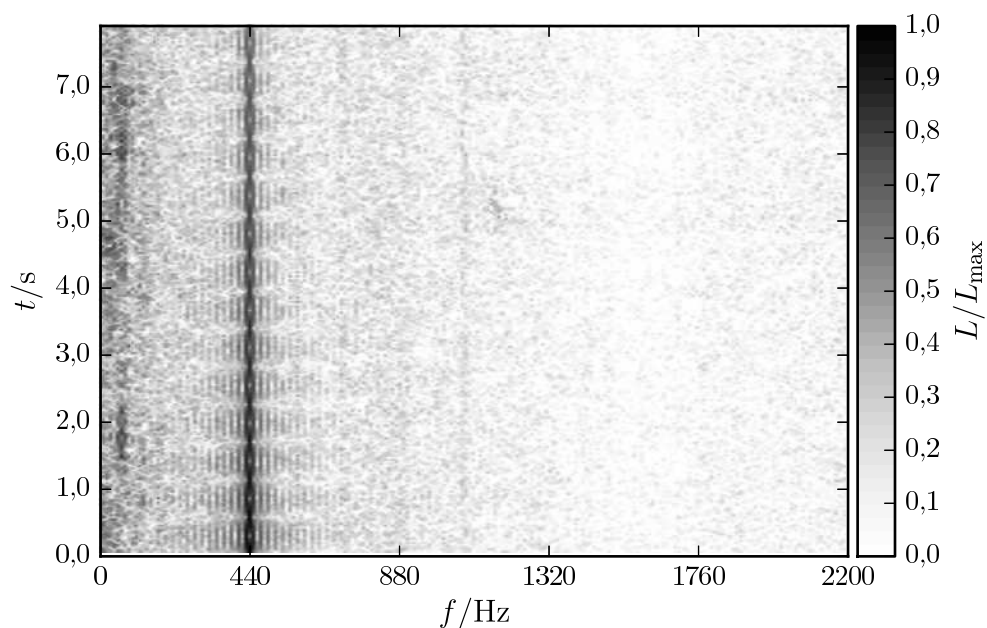
Transformation mit  $c_k$  bezeichnet sind. Das Pegelmaß  $L_0$  ist mit

$$L_0 := 20 \text{ dB} \cdot 3 = 60 \text{ dB} \quad (5.2)$$

so gewählt, dass Werte von Koeffizienten  $c_k$  unterhalb von  $u_{\max}/1000$  ausgeblendet werden. Um Frequenzspektren verschiedener Zeitpunkte besser vergleichen zu können, ist das aufgetragene Pegelmaß normiert aufgetragen und als Bezugsgröße gilt das über den gesamten Signalverlauf größte Pegelmaß  $L_{\max}$ .

Wie das Frequenzspektrum in Abb. 5.3(a) zeigt, wird der Kammerton von 440 Hz von der Messung relativ gut erfasst. Desweiteren lässt sich erkennen, dass das Pegelmaß für höhere Frequenzen tendenziell abnimmt. Beim Vergleich der Frequenzspektren zu verschiedenen Zeitpunkten lässt sich die bereits erwähnte Dämpfung des Signals an der Abnahme des Pegelmaßes ablesen (s. Abb. 5.3(a) und 5.3(b)).

Um die Veränderung des Frequenzspektrums über die Zeit analysieren zu können, wird im Folgenden die Darstellung eines Sonagrammes gewählt (s. Abb. 5.3(c)). Hierbei werden zahlreiche Schnelle FOURIER-Transformationen auf sich überlappende Abtastfenster des Signals angewendet. Werden die dadurch erhaltenen einzelnen Frequenzspektren über die Zeit in einem Diagramm aufgetragen, entsteht der Eindruck eines zeit-kontinuierlichen Frequenzspektrums. Wie zu erwarten ist, verändern sich die Frequenzmaxima beim Referenzbeispiel der Stimmgabel über die Zeit nicht. Im Idealfall einer monofrequenten Schwingung ergäbe sich eine einzelne vertikale Spektrallinie bei der Frequenz 440 Hz. Die Dämpfung des Signals kann im Sonagramm als Abnahme der Intensität  $L$  abgelesen werden.

(a) Frequenzspektrum zum Bezugszeitpunkt  $t = 0$ (b) Frequenzspektrum zum Bezugszeitpunkt  $t = 7$  s

(c) Sonogramm

Abbildung 5.3: Frequenzspektren und Sonogramm zum Signal einer Stimmgabel

## 5.2 Untersuchung des Einflusses materieller Randbedingungen

Um die Versuchsergebnisse am Monochord mit materiellen Randbedingungen besser einordnen zu können, erfolgt zunächst eine analytische Untersuchung der schwingenden Saite mit materiellen Randbedingungen.

Für die Bewegungsgleichung einer idealen Saite der Länge

$$l := \text{const.} \quad (5.3)$$

mit materiellen Randbedingungen existieren zahlreiche analytische Lösungen. So lautet die klassische Lösung für die Transversalverschiebung  $u$  mithilfe eines Separationsansatzes

$$u(t, s) := \sum_{k \in \mathbb{N}_{>0}} \left( \alpha_k \cos(k\pi \frac{ct}{l}) + \frac{l}{k\pi c} \beta_k \sin(k\pi \frac{ct}{l}) \right) \sin(k\pi \frac{s}{l}) \quad , \quad (5.4)$$

wobei die FOURIER-Koeffizienten  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  aus den Anfangsverschiebungen  $u_0$  sowie den Anfangsverschiebungsgeschwindigkeiten  $u_1$  mit

$$\alpha_k = \frac{1}{l} \int_{\bar{s} \in [0, 2l]} \left( u_0(\bar{s}) \sin(k\pi \frac{\bar{s}}{l}) \right) \quad , \quad (5.5)$$

$$\beta_k = \frac{1}{l} \int_{\bar{s} \in [0, 2l]} \left( u_1(\bar{s}) \sin(k\pi \frac{\bar{s}}{l}) \right) \quad (5.6)$$

bestimmt werden können (vgl. [ZAHN 2013]). Die Anfangsbedingungen für Zupfen an der Stelle  $s_Z$  mit der Zupfamplitude  $\hat{u}$  lauten

$$u_0(s) := \hat{u} \begin{cases} \frac{s}{s_Z} & , s \in [0, s_Z[ \\ \frac{s-l}{s_Z-l} & , s \in [s_Z, l] \end{cases} \quad , \quad (5.7)$$

$$u_1(s) := 0 \quad (5.8)$$

und die zugehörigen FOURIER-Koeffizienten lassen sich nach [ZAHN 2013, S. 14] analytisch zu

$$\alpha_k = \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{\xi_Z^2}{\xi_Z - 1} \left( \sin\left(\frac{k\pi}{\xi_Z - 1}\right) - \sin\left(k\pi \frac{2\xi_Z^2 - 1}{\xi_Z - 1}\right) \right) \hat{u} \quad \text{mit} \quad \xi_Z := s_Z/l \quad , \quad (5.9)$$

$$\beta_k = 0 \quad (5.10)$$

bestimmen. Damit ergibt sich für den Zeitverlauf der Verschiebungen an einer festen Stelle  $s_M$

$$u(t) := \sum_{k \in \mathbb{N}_{>0}} \alpha_k \sin(k\pi \frac{s_M}{l}) \cos(k\pi \frac{ct}{l}) \quad . \quad (5.11)$$

Wird ein solches Signal der in Abschnitt 5.1 beschriebenen FOURIER-Analyse unterzogen, so ergibt sich für die zugehörigen FOURIER-Koeffizienten

$$c_k = \alpha_k \sin(k\pi \frac{s_M}{l}) \quad . \quad (5.12)$$

In Abb. 5.4 sind die Frequenzspektren für eine Saite der Länge  $l := 0,75l_m$ , deren Grundfrequenz  $146,6\overline{6}$  Hz beträgt, für verschiedene Zupfpositionen dargestellt.<sup>102</sup> Daraus kann abgelesen werden, dass sich die Schwingung aus einem Grundton (mit dem Pegelmaß  $L = 1$ ) und mehreren Obertönen zusammensetzt. Außerdem ist deutlich zu erkennen, dass das Pegelmaß mit zunehmender Frequenz abnimmt. Es ist darüber hinaus auffällig, dass bestimmte Partialtöne im Frequenzspektrum verschwinden. Dieses Phänomen kann mithilfe der Gln. (5.9) und (5.12) begründet werden, denn in Abhängigkeit der Stellen  $s_Z$  und  $s_M$  ergeben sich die jeweiligen Sinusanteile für gewisse Indizes  $k$  gerade zu null (vgl. [ZAHN 2013]). Wie stark der Einfluss der Zupfposition ist, zeigen die relativ großen Unterschiede der Abb. 5.4(b) und 5.4(c) bei einem relativ kleinen Unterschied der jeweiligen Zupfposition.<sup>103</sup>

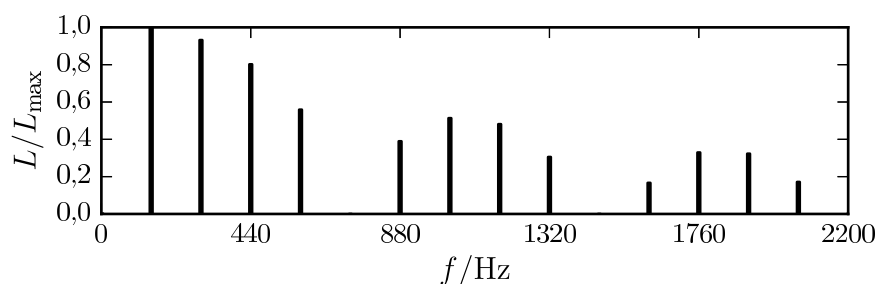
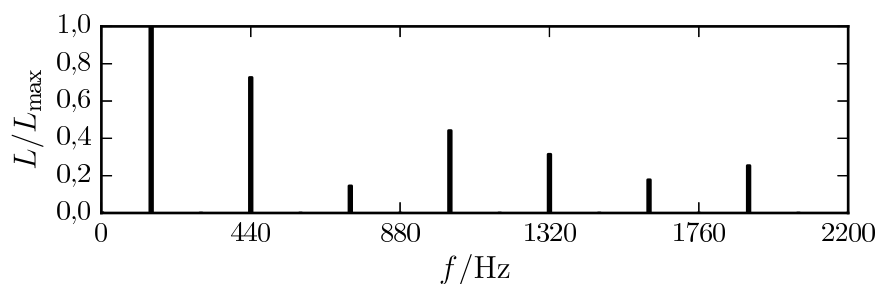
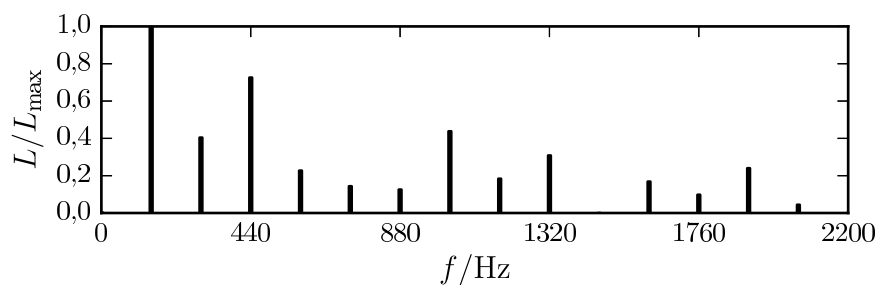
(a) Frequenzspektrum für  $s_Z = 0,2l$ (b) Frequenzspektrum für  $s_Z = 0,50l$ (c) Frequenzspektrum für  $s_Z = 0,49l$ 

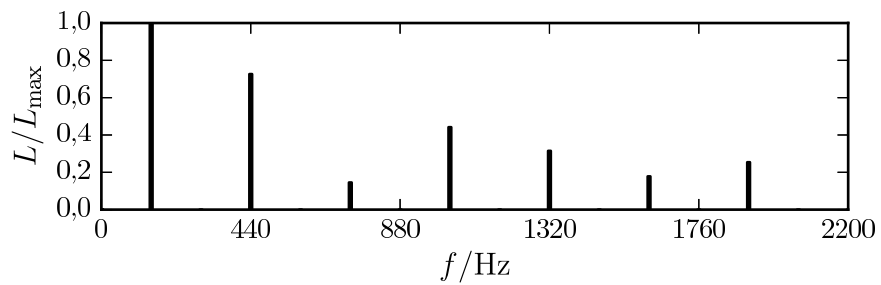
Abbildung 5.4: Analytisch bestimmte Frequenzspektren der A-Saite für verschiedene Zupfpositionen  $s_Z$  (feste Zwischenlagerposition  $s_R = 0,75l_m$ )

<sup>102</sup> Die Grundfrequenz dieser Saite wurde so gewählt, dass sie rechnerisch der Frequenz einer auf 110 Hz gestimmten Monochordsaite (A-Saite) mit einem Zwischenlager an der Stelle  $s_R = 0,75l_m$  entspricht.

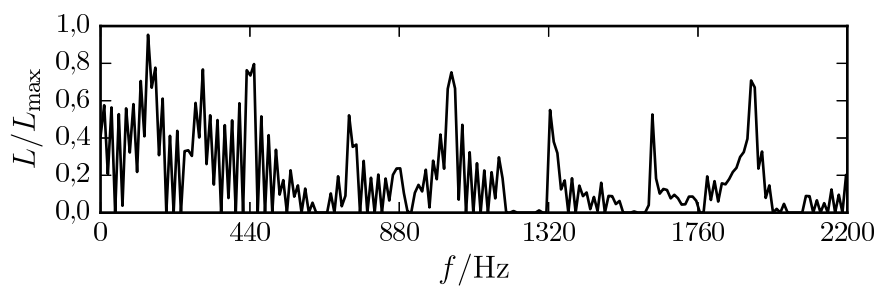
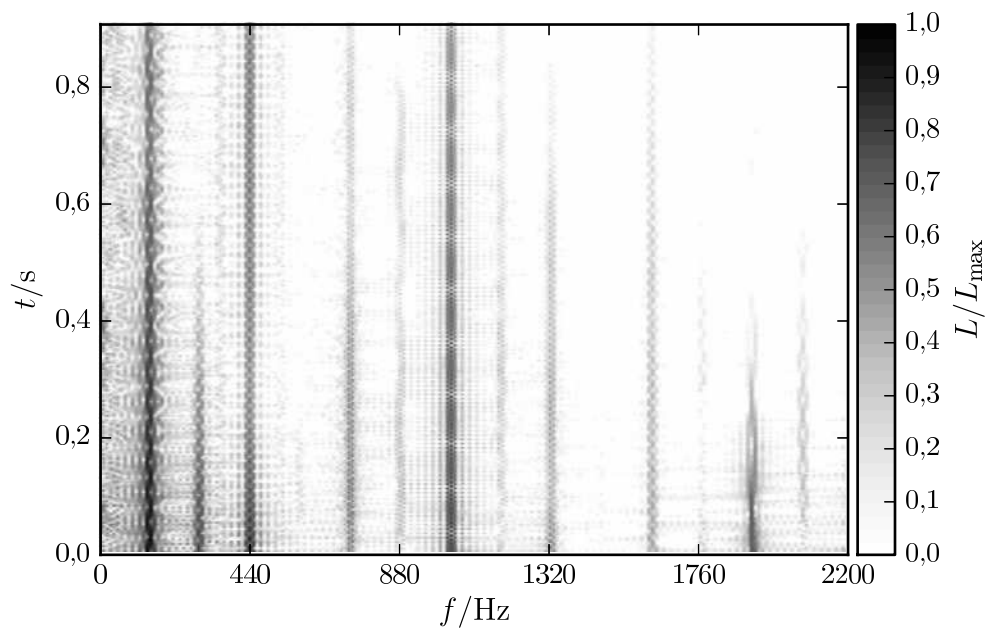
<sup>103</sup> Wird als Zupfposition und Abtastposition jeweils ein irrationaler Anteil der Saitenlänge  $l$  vorgegeben, so verschwinden im Allgemeinen keine Partialtöne mehr.

Mit diesen theoretischen Betrachtungen als Grundlage lassen sich die Versuchsergebnisse am Monochord sehr gut bewerten. Dazu sind in den Abb. 5.5 und 5.6 repräsentativ Versuchsergebnisse für zwei unterschiedliche Zupfpositionen angegeben. Wie sich an beiden Darstellungen erkennen lässt, setzt sich das Signal der realen Schwingung ebenfalls aus einem Grundton und mehreren Obertönen zusammen und das Pegelmaß nimmt über die Zeit ab. Auch das Frequenzspektrum der analytischen Lösung und der Versuchsergebnisse stimmt jeweils relativ gut überein. Experimentell werden jedoch einige Partialtöne ermittelt, die in der analytischen Lösung nicht auftauchen. Dies ist u. a. auf das Zupfen von Hand und die in der Realität vorhandene Biegesteifigkeit der Saite zurückzuführen. Zum einen ist die Genauigkeit der Zupfposition beschränkt, was die bereits zu Abb. 5.4(c) erläuterten Auswirkungen hat. Zum anderen stimmen die Anfangsbedingungen des Saitenverlaufes in Versuch und Modell nicht exakt überein, denn im Experiment ergibt sich an der Zupfposition ein gekrümmter Saitenabschnitt, während in der analytischen Lösung ein Knick unterstellt wird.

Darüber hinaus wird im Experiment die frei schwingende Saitenlänge durch das Zwischenlager in zwei Abschnitte unterteilt. Bei der analytischen Lösung wird einer dieser Abschnitte jedoch vernachlässigt. Für die Beispiele aus den Abb. 5.5 und 5.6 beträgt die Länge des nicht berücksichtigten Abschnittes  $0,25l_m$ . Dies erklärt das zusätzliche Auftreten von Pegelmaßen bei Vielfachen der Frequenz  $f = 440$  Hz (z. B. bei 880 Hz und 1760 Hz) in Abb. 5.5(c).

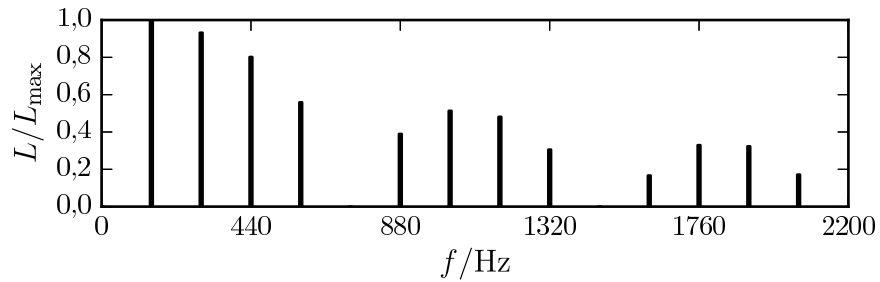


(a) Frequenzspektrum der analytischen Lösung

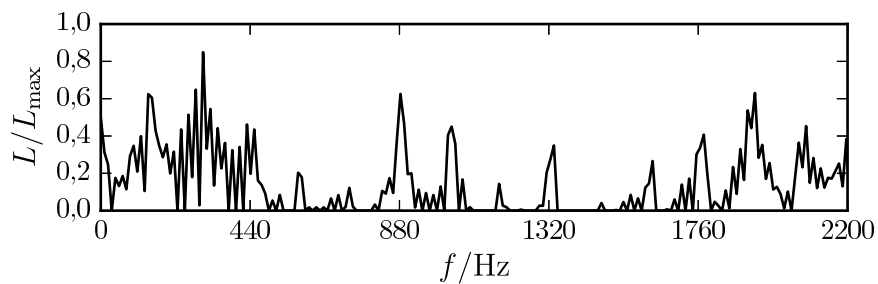
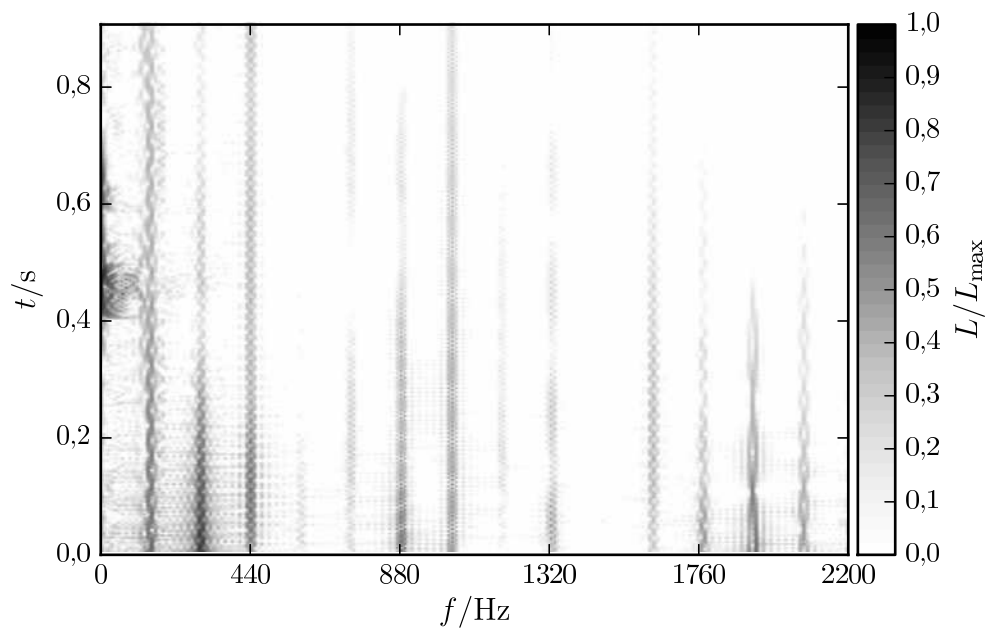
(b) Frequenzspektrum der Versuchsergebnisse zum Bezugszeitpunkt  $t = 0$ 

(c) Sonogramm der Versuchsergebnisse

Abbildung 5.5: Frequenzspektren und Sonogramm zum Signal einer bei  $s_Z = 0,5l_m$  gezupften Saite (feste Zwischenlagerposition  $s_R = 0,75l_m$ )



(a) Frequenzspektrum der analytischen Lösung

(b) Frequenzspektrum der Versuchsergebnisse zum Bezugszeitpunkt  $t = 0$ 

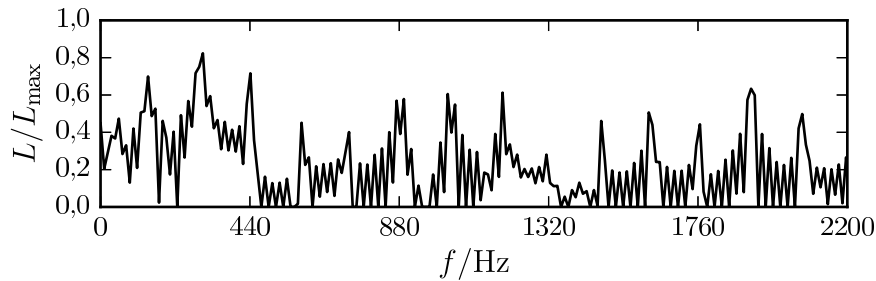
(c) Sonogramm der Versuchsergebnisse

Abbildung 5.6: Frequenzspektrum und Sonogramm zum Signal einer bei  $s_Z = 0,2l_m$  gezupften Saite (feste Zwischenlagerposition  $s_R = 0,75l_m$ )

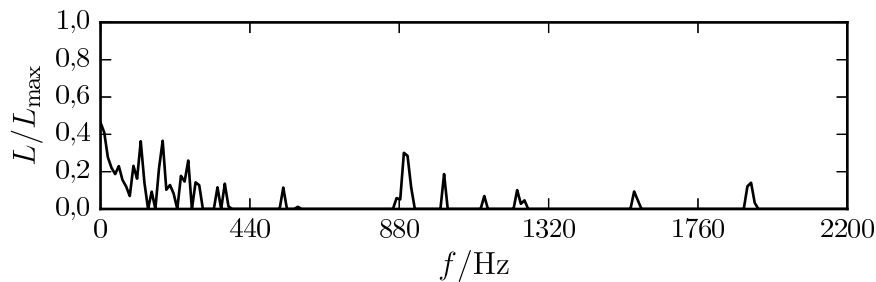


### 5.3 Untersuchung des Einflusses nichtmaterieller Randbedingungen

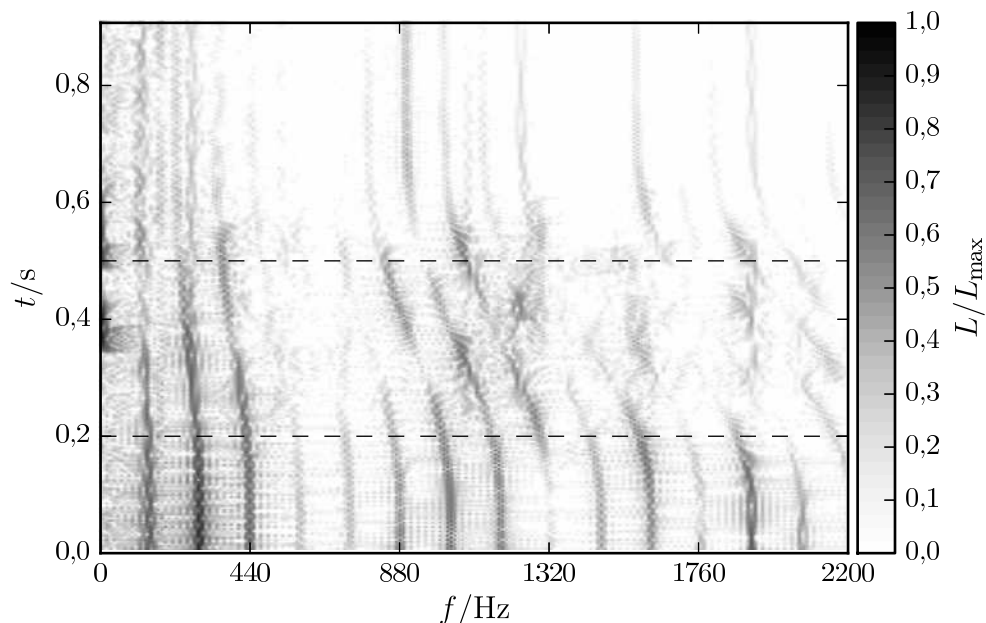
Im Gegensatz zu Abschnitt 5.2 wird nachfolgend die Saitenschwingung am Monochord mit einer nichtmateriellen Randbedingungen analysiert. In Abb. 5.7 können die Versuchsergebnisse für ein Glissando mit mittlerer Geschwindigkeit betrachtet werden. Dabei wurde die Zwischenlagerposition  $s_R$  ausgehend von der Anfangsposition von  $s_R = 0,75l_m$  mithilfe des Rollenlagers vergrößert (s. Abb. 5.1).



(a) Frequenzspektrum der Versuchsergebnisse zum Bezugszeitpunkt  $t = 0$



(b) Frequenzspektrum der Versuchsergebnisse zum Bezugszeitpunkt  $t = 0,8s$



(c) Sonogramm der Versuchsergebnisse. Der Bereich  $0,2s \leq t \leq 0,5s$ , in dem der Versuch rechnerisch nachvollzogen wird (s. Abb. 5.8), ist durch zwei gestrichelte Linien begrenzt.

Abbildung 5.7: Frequenzspektrum und Sonogramm zum experimentell ermittelten Signal einer bei  $s_Z = 0,2l_m$  gezupften Saite und Glissando ( $s_R = 0,75l_m$  für  $t = 0$ )

Am Verlauf der Spektrallinien des Sonagrammes in Abb. 5.7(c) lässt sich die Bewegung des Zwischenlagers sehr gut nachvollziehen. Nach dem Loslassen der Saite wurde das Zwischenlager aus der Ruheposition mit zunehmender Geschwindigkeit bewegt und bis zum Ausklingen der Saite wurde die Geschwindigkeit des Zwischenlagers wieder bis zum Stillstand des Zwischenlagers reduziert. Insgesamt verringern sich die Frequenzen der Partialtöne der Saite, da sich durch diese Bewegung die frei schwingende Saitenlänge vergrößert (s. Abb. 5.7(a) und 5.7(b)). Da die Frequenz der Partialtöne vom Kehrwert der freien Schwingungslänge der Saite abhängt, nimmt die zeitliche Veränderung der Spektrallinien mit steigender Frequenz im Sonagramm zu.

Mithilfe der theoretischen Überlegungen aus Abschnitt 3.5 und der daraus resultierenden analytischen Lösung kann der beschriebene Versuch auch rechnerisch nachvollzogen werden. Dementsprechend erfolgt die Simulation eines Teils des aus einem Experiment ermittelten Sonagrammes in Abb. 5.7(c). Für die Geschwindigkeit des Zwischenlagers wird in diesem Fall die Funktion

$$v(t) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 0,2\text{s} \\ 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} & , \quad 0,2\text{s} \leq t < 0,5\text{s} \\ 0 & , \quad 0,5\text{s} \leq t \end{cases} \quad (5.13)$$

vorausgesetzt. Die mit diesen Modellparametern bestimmten Ergebnisse sind in Abb. 5.8 für den Zeitbereich, in dem eine Lagerbewegung stattfindet, dargestellt. Sie zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Um die Richtigkeit dieser Ergebnisse sicherzustellen, wurde im Rahmen der Arbeit [ZAHN 2013] ein auf einer expliziten Zeitintegration basierendes Modell entwickelt, das auch materielle und geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt. Da die Ergebnisse beider Modelle im linearen Fall qualitativ und quantitativ übereinstimmen, wird jedoch auf eine grafische Gegenüberstellung der Lösungen an dieser Stelle verzichtet.

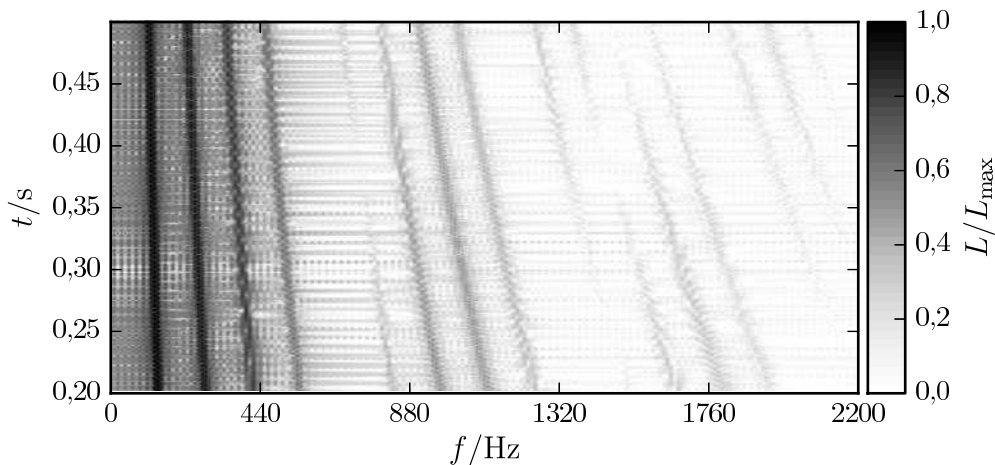


Abbildung 5.8: Sonagramm zum numerisch bestimmten Signal einer bei  $s_Z = 0,2l_m$  gezupften Saite und Glissando ( $s_R = 0,75l_m$  für  $t = 0$ )

## 6 Rückschlüsse auf die Transformation der Bewegungsgleichungen für dreidimensionale Kontinua

### 6.1 Allgemeines

In den Kapiteln 3 und 4 werden eindimensionale Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen untersucht. Für Rückschlüsse von den betrachteten eindimensionalen Beispielen ist eine konsistente Ableitung der eindimensionalen Bewegungsgleichungen aus der dreidimensionalen kontinuumsmechanischen Darstellung sinnvoll. Aufgrund ihres Umfangs entfällt diese Herleitung in dieser Arbeit, sie kann jedoch in [KARL 2011] auf Grundlage derselben Notation nachgelesen werden.

Aus einem solchen konsistenten Übergang zwischen dreidimensionalen und eindimensionalen Kontinua folgt unmittelbar, dass sich Ergebnisse aus eindimensionalen Betrachtungen nicht direkt auf dreidimensionale Probleme übertragen lassen. Neben den Besonderheiten bei der Übertragung der Ergebnisse von eindimensionalen Untersuchungen, die aus der Ausnutzung von geometrischen Symmetrien herrühren, gibt es noch eine Vielzahl anderer Effekte, die mit den vereinfachten Modellen aus den Kapiteln 3 und 4 nicht erfasst werden können. So ist es mit den vorgestellten Modellen nicht ohne weiteres möglich, sehr komplizierte dreidimensionale Bewegungen wie beispielsweise das Abwickeln einer Textilfaser von einer Spindel zu simulieren.<sup>104</sup>

In den Anwendungsgrenzen der dargestellten Modelle sind jedoch, wie im Folgenden diskutiert wird, einige wichtige Rückschlüsse für Systeme mit nichtmateriellen Randbedingungen möglich. Dabei sei die Geschwindigkeit der jeweils abgespalteten Führungsbewegung ausreichend klein, denn wie sich bereits bei der eindimensionalen Modellierung gezeigt hat, wird die Lösung mit Erreichen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit singulär (s. z. B. Gl. (4.50)).

Im Sinne der Anschaulichkeit werden in den Abschnitten 6.2 und 6.3 die Ergebnisse der eindimensionalen Betrachtungen auf den Rollkontakt eines Rades auf einer Schiene angewandt. Hierbei wird das System Rad-Schiene in zwei Anteile aufgeteilt. Zum Ersten wird die axial unbewegte Schiene betrachtet, über die Randbedingungen bewegt werden. Diesem Teilsystem werden die Rückschlüsse der Untersuchung axial unbewegter eindimensionaler Kontinua zugeordnet (Kapitel 3). Zum Zweiten werden Schlussfolgerungen zu einem Rad, das über Randbedingungen bewegt wird, aus der Analyse axial bewegter eindimensionaler Kontinua gezogen (Kapitel 4).

### 6.2 Rückschlüsse aus dem Verhalten axial unbewegter eindimensionaler Kontinua

Im Allgemeinen kann das in Abschnitt 6.1 erwähnte Beispiel einer axial unbewegten Schiene (mit elastischem Materialverhalten) durch das Differentialgleichungssystem

$$LU = F \tag{6.1}$$

$$\text{mit } L := \begin{bmatrix} \overset{A}{\rho} \partial_0 & -\text{Div} \\ \mathcal{M} & \mathcal{M} \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} \overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}} \\ \mathcal{M} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \mathcal{M} \end{bmatrix}, \quad F := \begin{bmatrix} \overset{A}{\rho} \mathbf{f} \\ \mathcal{M}\mathcal{M} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

<sup>104</sup> Unter anderem kann das bei dieser Anwendung auftretende Ausbauchen der Faser (engl. ballooning) nicht abgebildet werden (s. [AMES et al. 1968]).

beschrieben werden (vgl. Abschnitt 2.8.1). Als die vom rollenden Rad verursachten Verschiebungsrandbedingungen kann der Zusammenhang

$$\underline{\overset{MA}{\mathbf{v}}}(t, V(t)) := g(t) \quad (6.3)$$

angenommen werden, wobei die Funktion  $g$  die zeitabhängige Deformation der Schiene unter dem Rad berücksichtigt.<sup>105</sup> Der nichtmaterielle Charakter dieser Randbedingungen rührt von ihrer zeitabhängigen Position. Dabei ist  $V(t)$  die vom Rad zurückgelegte Strecke. Wird eine zum Kapitel 3 vergleichbare Transformation der Unbekannten  $U$  verwandt

$$W := \tau_{(0, V(m_0))} U \quad \Leftrightarrow \quad U :=: \tau_{(0, -V(m_0))} W \quad , \quad (6.4)$$

so entsteht ein System mit scheinbar materiellen Randbedingungen. Schließlich folgt für die Lösung des anfangs betrachteten Systems

$$U = \tau_{(0, V(m_0))} \left( L \tau_{(0, -V(m_0))} \right)^{-1} F \quad . \quad (6.5)$$

Aus dieser Darstellung kann gefolgert werden, dass der transformierte Operator  $L \tau_{(0, -V(m_0))}$  zu invertieren und anschließend die erhaltene Lösung der Transformation aus Gl. (6.4) zu unterziehen ist. Dieses Vorgehen ist für beliebige (auch instationäre) Geschwindigkeitsfunktionen  $v$  möglich.

### 6.3 Rückschlüsse aus dem Verhalten axial bewegter eindimensionaler Kontinua

#### 6.3.1 Instationäre Führungsbewegung

Die Bewegung eines auf einer Schiene rollenden Rades kann unter Verwendung einer ALE-Kinematik im Allgemeinen durch das Differentialgleichungssystem

$$LU = F \quad (6.6)$$

$$\text{mit } L := \begin{bmatrix} -\frac{\overset{A}{\rho}}{\overset{R}{R}} & \frac{\overset{A}{\rho} \overset{A}{\partial}_1 \overset{R}{\partial}_0^{-1} \square \cdot \overset{RA}{\mathbf{v}}}{\overset{R}{R} \overset{R}{R} \overset{R}{R}} & 0 \\ \frac{\overset{A}{\rho} \overset{A}{\partial}_0 + \overset{A}{\rho} \overset{A}{\partial}_1 \square \cdot \overset{RA}{\mathbf{v}}}{\overset{R}{R} \overset{R}{R}} & \frac{\overset{A}{\rho} \overset{A}{\partial}_0 + \overset{A}{\rho} \overset{A}{\partial}_1 \square \cdot \overset{RA}{\mathbf{v}}}{\overset{R}{R} \overset{R}{R}} & -\text{Div}_{\overset{R}{R}} \\ 0 & -\text{sym} \circ \frac{\partial_1}{\overset{R}{R}} & \frac{\underline{\mathbf{c}}^{-1} \partial_0}{\overset{R}{R} \overset{R}{R}} \end{bmatrix} \quad , \quad (6.7)$$

$$U := \begin{bmatrix} \overset{MA}{\boldsymbol{\eta}} \\ \overset{MR}{\partial}_0 \overset{MR}{\mathbf{u}} \\ \overset{MR}{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \quad , \quad F := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\overset{A}{\rho}}{\overset{R}{R}} \left( \overset{A}{\mathbf{f}} - \overset{R}{\partial}_0 \overset{RA}{\mathbf{v}} - \overset{R}{\partial}_1 \overset{RA}{\mathbf{v}} \cdot \overset{RA}{\mathbf{v}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

beschrieben werden (vgl. Abschnitt 2.8.2). Durch die Anwendung der ALE-Kinematik wird aus dem Ausgangssystem mit nichtmateriellen Randbedingungen ein System mit materiellen Randbedingungen. Doch auch wenn die Randbedingungen für dieses System materiellen Charakter besitzen, ergeben sich für die allgemeine Lösung einige Schwierigkeiten.

<sup>105</sup> Die Kennzeichnung gegebener Randbedingungen durch die Hervorhebung  $\square$  geht hierbei auf die Notation aus Abschnitt 2.7 zurück.

Wie sich am Blockoperator  $L$  ablesen lässt, handelt es sich um ein System von partiellen Differentialgleichungen mit zeitveränderlichen Koeffizienten, wenn die Geschwindigkeitsfunktion der Führungsbewegung  $\overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}}$  zeitveränderlich ist. Dementsprechend sind zur Lösung dieses Problems mit einer instationären Führungsbewegung, d. h.  $\partial_0 \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} \neq 0$ , vor allem numerische Verfahren geeignet. Ein solches Vorgehen kann beispielsweise auf einem Separationsansatz nach dem GALERKIN-Verfahren beruhen. Dabei wird die Gesamtbewegung aus einer begrenzten Anzahl von Eigenmoden in der referentiellen Beschreibung zusammengesetzt (vgl. Abschnitt 4.2.1).

### 6.3.2 Ortszeittransformation für eine stationäre Führungsbewegung

In Abschnitt 4.4.5 wird die Einführung einer Ortszeit vorgeschlagen, um die Bewegungsgleichung eines axial bewegten eindimensionalen Kontinuums in eine selbstadjungierte Form zu überführen. Als Schlussfolgerung aus der Behandlung eindimensionaler Probleme mit nichtmateriellen Randbedingungen wird diese Transformation im Folgenden auf einen allgemeinen dreidimensionalen Fall übertragen.

Ausgangspunkt stellt das in Abschnitt 2.8.2 formulierte Feldproblem dar. Es lautet in zusammengefasster Form

$$LU = F \quad (6.9)$$

$$\text{mit } L := \begin{bmatrix} \partial_0 & i\partial_1 \square \cdot \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} & 0 \\ \overset{\mathcal{R}^A}{\square} \cdot \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} & \partial_0 + 2\partial_1 \square \cdot \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} & -\overset{\mathcal{A}}{\rho} \text{Div} \\ 0 & -\text{sym} \circ \partial_1 & \overset{\mathcal{R}^A}{\underline{\mathbf{g}}}^{-1} \partial_0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

$$U := \begin{bmatrix} -i \overset{\mathcal{M}^A}{\boldsymbol{\eta}} \\ \partial_0 \overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{u}} \\ \overset{\mathcal{M}^R}{\mathbf{P}} \end{bmatrix}, \quad F := \begin{bmatrix} 0 \\ \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{f}} - \partial_1 \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} \cdot \overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

und ist für eine zeitunveränderliche Führungsgeschwindigkeit  $\overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}}$  gültig. Im Gegensatz zur eindimensionalen Problemstellung aus Kapitel 4 kann sich dabei die durch  $\overset{\mathcal{R}^A}{\mathbf{v}}$  vorgegebene Bewegung  $\overset{\mathcal{R}^A}{\phi}$  als allgemeine stationäre Bewegung aus einer Translation und einer Rotation zusammensetzen.

Die gesuchte Ortszeittransformation sei, wie in Abschnitt 4.4.5, linear vom Ort abhängig

$$\overset{\mathcal{O}}{\mathbf{h}} := \tau_{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \overset{\mathcal{R}}{\mathbf{h}} \Leftrightarrow \overset{\mathcal{R}}{\mathbf{h}} := \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \overset{\mathcal{O}}{\mathbf{h}}, \quad (6.12)$$

wobei  $\mathbf{b}$  ein noch zu bestimmender Vektor ist.<sup>106</sup> Daraus ergeben sich die Beziehungen

$$\partial_0 \left( \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \mathbf{h} \right) = \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \left( \partial_0 \mathbf{h} \right) \quad , \quad (6.13)$$

$$\partial_1 \left( \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \mathbf{h} \right) = \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \left( -\partial_0 \mathbf{h} \otimes \mathbf{b} + \partial_1 \mathbf{h} \right) \quad , \quad (6.14)$$

$$\text{Div} \left( \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \mathbf{h} \right) = \tau_{(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1, 0)} \left( -\partial_0 \mathbf{h} \cdot \mathbf{b} + \text{Div} \mathbf{h} \right) \quad . \quad (6.15)$$

Mit diesen Zwischenergebnissen folgt für das System der Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} \partial_0 & i\tilde{\partial}_1 & 0 \\ i\tilde{\partial}_1 & \partial_0 + 2\tilde{\partial}_1 & -\frac{\rho}{\rho}^{-1} \left( -\partial_0 \square \cdot \mathbf{b} + \text{Div} \square \right) \\ 0 & -\text{sym} \circ \left( -\partial_0 \square \otimes \mathbf{b} + \partial_1 \square \right) & \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho}^{-1} \partial_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \frac{MA}{\rho} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \partial_0 \frac{MR}{\rho} \mathbf{u} \\ \frac{MR}{\rho} \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} - \hat{\partial}_1 \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\text{mit } \tilde{\partial}_1 := \left( -\partial_0 \square \otimes \mathbf{b} + \partial_1 \square \right) \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \quad . \quad (6.17)$$

Die Hilfsgrößen

$$\frac{MA}{\rho} \tilde{\boldsymbol{\eta}} := \frac{A}{\rho} \partial_1 \frac{MR}{\rho} \mathbf{u} \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \quad , \quad (6.18)$$

$$\frac{MR}{\rho} \tilde{\mathbf{P}} := \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho} \text{sym} \circ \partial_1 \frac{MR}{\rho} \mathbf{u} \quad (6.19)$$

helfen, daraus ein System der gewünschten Form zu formulieren

$$\begin{bmatrix} \partial_0 & i\partial_1 \square \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} & 0 \\ i\partial_1 \square \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} & B_0 + 2B_1 & -\frac{\rho}{\rho}^{-1} \text{Div} \\ 0 & -\text{sym} \circ \partial_1 & \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho}^{-1} \partial_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \frac{MA}{\rho} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \partial_0 \frac{MR}{\rho} \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} - \hat{\partial}_1 \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

mit den Operatoren

$$B_0 := 1 + 2 \left( \partial_0 \square \otimes \mathbf{b} \right) \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} + \left( \left( \left( \partial_0 \square \otimes \mathbf{b} \right) \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \right) \otimes \mathbf{b} \right) \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} - \frac{\rho}{\rho}^{-1} \left( \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho} \text{sym} \left[ \partial_0 \square \otimes \mathbf{b} \right] \right) \cdot \mathbf{b} \quad (6.21)$$

$$B_1 := \partial_1 \square \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} - \left( \left( \partial_1 \square \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \right) \otimes \mathbf{b} \right) \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} + \frac{\rho}{\rho}^{-1} \left( \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho} \text{sym} \left[ \partial_1 \square \right] \right) \cdot \mathbf{b} \quad . \quad (6.22)$$

Die Bedingung

$$\partial_1 \square \cdot \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} - \partial_1 \square \cdot \left( \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \otimes \frac{RA}{\rho} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{b} + \frac{\rho}{\rho}^{-1} \left( \frac{\underline{\mathbf{c}}}{\rho} \text{sym} \left[ \partial_1 \square \right] \right) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad , \quad (6.23)$$

<sup>106</sup> Der Ausdruck  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_1$  ist als Ergebnis des Skalarproduktes zwischen dem Vektor  $\mathbf{b}$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{m}_1$  eine skalare Größe.

die aus dem Verschwinden des Operators  $B_1$  folgt, führt zur Bestimmung des Koeffizientenvektors  $\mathbf{b}$  der Ortszeittransformation. Wird der Koeffizientenvektor  $\mathbf{b}$  in Gl. (6.20) eingesetzt, so ergibt sich ein selbstadjungiertes Problem, das den Standardlösungsverfahren zugänglich ist.

Wie sich leicht nachvollziehen lässt, ist in dieser Formulierung der Ortszeittransformation für eine dreidimensionale Führungsbewegung der in Abschnitt 4.4.5 behandelte Spezialfall enthalten.

### 6.3.3 Zusammenhang mit der LORENTZ-Transformation

Die MAXWELL-Gleichungen, welche die Phänomene des Elektromagnetismus beschreiben, genügen nicht dem Relativitätsprinzip, d. h. sie sind nicht invariant gegenüber einer GALILEO-Transformation. Unter anderem entdeckte LORENTZ eine Transformation (die später nach ihm benannte LORENTZ-Transformation), unter der sich die MAXWELL-Gleichungen invariant verhalten (vgl. [FEYNMAN et al. 2005]). Ein wichtiger Bestandteil der LORENTZ-Transformation ist die Konstanz der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, die im Fall der Relativitätstheorie gerade der Lichtgeschwindigkeit entspricht.

Ähnlich zu diesen Überlegungen zeigen die Gln. (3.43), (4.7) und (4.105), dass sich die Bewegungsgleichungen von Saite und Seil ebenfalls bei Anwendung einer GALILEO-Transformation ändern. Ausgehend von dieser Feststellung lassen sich die in dieser Arbeit verwandten Ortszeittransformation und die LORENTZ-Transformation in Zusammenhang bringen.

In Abschnitt 4.4.5 wurde für eine konstante Führungsgeschwindigkeit  $v$  gezeigt, wie die Bewegungsgleichung des bewegten Seils, welche gyroskopische Anteile enthält, mithilfe einer Ortszeittransformation in eine Form ohne gyroskopische Anteile transformiert werden kann. Bezogen auf die materielle Betrachtung in der Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}$  besteht die dabei angewendete Transformation aus zwei Translationen

$$\begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ u \\ \mathcal{O} \end{matrix} := \tau_{(B_{m_1,0})}\tau_{(0,-V(m_0))} \begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix} . \quad (6.24)$$

Für die Argumente der zwei Funktionen  $\begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ u \\ \mathcal{O} \end{matrix}$  und  $\begin{matrix} \mathcal{M}\mathcal{R} \\ u \\ \mathcal{A} \end{matrix}$  bedeutet dies

$$\tau_{(B_{m_1,0})}\tau_{(0,-V(m_0))}(t, s) = \tau_{(B_{m_0,0})}(t, s - \frac{\mathcal{R}^A}{v}t) \quad (6.25)$$

$$= (t + B \left( s - \frac{\mathcal{R}^A}{v}t \right), s - \frac{\mathcal{R}^A}{v}t) \quad (6.26)$$

$$= \left( \frac{t - \frac{\mathcal{R}^A}{c^2}s}{\gamma^2}, s - \frac{\mathcal{R}^A}{v}t \right) \quad \text{mit} \quad \gamma := \sqrt{1 - \frac{\left( \frac{\mathcal{R}^A}{v} \right)^2}{c^2}} . \quad (6.27)$$

Wird den bereits angewendeten Transformationen noch eine Skalierung um den Faktor  $\gamma$  bzw. dessen Kehrwert hinzugefügt, so entsteht die Transformation<sup>107</sup>

$$\sigma_{(\gamma,1/\gamma)}\tau_{(B_{m_1,0})}\tau_{(0,-V(m_0))}(t, s) = \left( \frac{t - \frac{\mathcal{R}^A}{c^2}s}{\gamma}, \frac{s - \frac{\mathcal{R}^A}{v}t}{\gamma} \right) . \quad (6.29)$$

<sup>107</sup> Hierbei symbolisiert der Skalierungsoperator  $\sigma$  die Skalierung des Argumentes, d. h.

$$\sigma_{(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})}h(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = h(k_0x_0, k_1x_1, \dots, k_{n-1}x_{n-1}) . \quad (6.28)$$

Diese Transformation entspricht der auf dem Gebiet der speziellen Relativitätstheorie entwickelten LORENTZ-Transformation (s. z. B. fundiert in [BENZ 1992] und anschaulicher in [KITTEL et al. 1986, FEYNMAN et al. 2005]).

Demzufolge kann der verwendete Ansatz auch so interpretiert werden, dass es bei einer konstanten Führungsgeschwindigkeit möglich ist, statt die Wellengleichung mit veränderlichen Randbedingungen zu lösen, die Invarianz der Wellengleichung unter der LORENTZ-Transformation auszunutzen und anschließend die Lösung nach Rücktransformation zu gewinnen. Bei einer beschleunigten Bewegung bleibt die Wellengleichung unter der LORENTZ-Transformation nicht unverändert und es entstehen zusätzliche Terme infolge der Trägheitseffekte (vgl. [BALAZS 1961]).

Als Rückschluss auf die Behandlung von dreidimensionalen Kontinua bedeutet dieser Zusammenhang, dass es sinnvoll ist, die in der Literatur behandelte, dreidimensionale LORENTZ-Transformation auch auf Probleme der Mechanik anzuwenden. Die mit der Transformation verbundene Führungsbewegung beschränkt sich dabei nicht auf Translationen, sondern kann aus Teilbewegungen (z. B. Translationen und Rotationen) zusammengesetzt werden (vgl. [LICHNEROWICZ 1966] und [IYER & PRABHU 2007]).



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Die vorgelegte Arbeit leistet einen Beitrag, kontinuumsmechanische Systeme mit nichtmateriellen Randbedingungen besser zu verstehen. Wesentlich für die Erweiterung der bisherigen Erkenntnisse ist hierbei zunächst die sorgfältige Behandlung der kontinuumsmechanischen Grundlagen. Die dafür eingeführten Schreibweisen und Symbole unterstützen die systematischen Herleitungen. Insbesondere die Einführung platzierungsabhängiger (Ableitungs-)Operatoren hilft, in der Literatur auftauchende Ungenauigkeiten zu vermeiden.

Um den Einfluss nichtmaterieller Randbedingungen auf die Formulierung der Bewegungsgleichungen zu studieren, wird zum Vergleich zunächst das kontinuumsmechanische Feldproblem für materielle Randbedingungen hergeleitet. Als Grundlage dienen hierbei die Bilanz- und Erhaltungsgleichungen sowie die konstitutiven Beziehungen für elastisches Materialverhalten. Im Anschluss daran wird dieses Feldproblem um die Formulierung nichtmaterieller Randbedingungen erweitert.

Eine besondere Schwierigkeit bei der Beschreibung nichtmaterieller Randbedingungen besteht in ihrer Relativbewegung zum materiellen Körper. Deshalb spielt die Darstellung der Kinematik bei der kontinuumsmechanischen Beschreibung eine außerordentliche Rolle. Mithilfe der Dekomposition der Gesamtbewegung des materiellen Körpers in eine Führungsbewegung mit großen Verschiebungen und eine Deformationsbewegung mit kleinen Verschiebungen wird eine Referenzplatzierung eingeführt. In Bezug auf diese Platzierung können die bezüglich der Ausgangsplatzierung nichtmateriellen Randbedingungen in materielle Randbedingungen überführt werden. Damit vereinfacht sich die Formulierung nichtmaterieller Randbedingungen maßgeblich. Außerdem verändert sich der Charakter des zugrundeliegenden Systems partieller Differentialgleichungen. Während das Feldproblem für materielle Randbedingungen im dargestellten Fall selbstadjungiert ist, wird es infolge der Annahme nichtmaterieller Randbedingungen im Allgemeinen nicht selbstadjungiert. Dementsprechend sind die HADAMARD-Forderungen an Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit einer Lösung nicht mehr garantiert. Auch für eine stationäre Führungsbewegung verbleiben infolge der nichtmateriellen Randbedingungen im Systemoperator gyroskopische Anteile, die im Fall von materiellen Randbedingungen nicht vorhanden sind.

Um das Lösungsverhalten von Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen zu untersuchen, werden im Rahmen dieser Arbeit Modelle verwendet, die analytischen bzw. semi-analytischen Verfahren zugänglich sind. Dadurch ist im Gegensatz zum Einsatz rein numerischer Verfahren einerseits eine Vereinfachung der Modelle erforderlich, aus der sich stärkere modellbedingte Abweichungen zur Realität ergeben. Andererseits wird der rechentechnische Aufwand enorm gesenkt, was Parametervariationen stark vereinfacht. Darüber hinaus können unter bestimmten Umständen Einflüsse auf die Lösung und den Lösungsprozess direkt aus einer analytischen Lösung abgelesen werden. Nicht zuletzt deshalb ist es auch bei einer rein numerischen Untersuchung von Systemen mit nichtmateriellen Randbedingungen empfehlenswert, analytische Lösungen für vereinfachte Modelle zur Verifizierung der Ergebnisse einzusetzen.

In diesem Sinne werden vereinfachte Modelle und ihre (semi-)analytische Lösung für zwei Fälle von nichtmateriellen Randbedingungen entwickelt. Zunächst wird eine Problemklasse erkundet, bei der Randbedingungen über ein deformierbares eindimensionales Kontinuum bewegt werden. Am Beispiel einer schwingenden Saite mit nichtmateriellen Randbedingungen in Form von zwei axial über die Saite bewegten Lagern werden Lösungen mittels Integrations- und Separationsansatz hergeleitet. Diese zwei Ansätze unterscheiden sich in ihrem Herangehen sehr voneinander, ihre

Resultate sind jedoch vergleichbar. Beiden Ansätzen gemeinsam ist die Transformation der Bewegungsgleichung bezüglich der Führungsbewegung, so dass die vormalig nichtmateriellen Randbedingungen im transformierten Gleichungssystem materiellen Charakter besitzen. Eine Validierung der (semi-)analytischen Lösungen gelingt mithilfe einer experimentellen Studie zum Glissando an einem Saiteninstrument. Dabei werden die zeitlichen Frequenzänderungen der Saitenschwingung qualitativ und quantitativ adäquat vom Modell abgebildet. Im Rückschluss der theoretischen und experimentellen Untersuchungen wird festgestellt, dass die verwendeten Lösungsstrategien auch auf dreidimensionale Probleme angewendet werden können.

Als weitere Problemklasse sind deformierbare eindimensionale Kontinua von Interesse, die über nichtmaterielle Randbedingungen bewegt werden. Die Modelle einer Saite und eines Seils, die sich axial über Randbedingungen in Form von zwei unbewegten Lagern bewegen, dienen dabei als Beispiele. Da die Bewegungsgleichungen materiell zu formulieren sind, besitzen auch in diesen Fällen die Randbedingungen des Ausgangsproblems eine zeitveränderliche Position, obwohl sie unbewegt sind.

Beim Modell der axial bewegten Saite erfolgt die analytische Lösung mithilfe einer Transformation der Bewegungsgleichung bezüglich der Führungsbewegung – vergleichbar dem Vorgehen der bereits genannten Modelle mit axial unbewegten Kontinua. Als Resultat der Transformation entsteht für eine instationäre Führungsbewegung eine partielle Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten, welche im Rahmen dieser Arbeit mit dem GALERKIN-Verfahren numerisch gelöst wird. Ist die Führungsbewegung stationär, so gelingt eine rein analytische Lösung, die auf dem Ansatz von Eigenfunktionen beruht. Im Unterschied zur klassischen Lösung einer axial unbewegten Saite sind hierbei die Eigenfrequenzen der dargestellten Lösung geschwindigkeitsabhängig und die Eigenfunktionen durch einen ortsabhängigen Vorfaktor modifiziert, der zu einer ortsabhängigen Veränderung der Gesamtlösung führt.

Das in der vorgelegten Arbeit erläuterte Modell eines axial bewegten Seils spielt eine wichtige Rolle bei der Gewinnung von Rückschlüssen auf allgemeine dreidimensionale kontinuumsmechanische Problemstellungen mit nichtmateriellen Randbedingungen. Wird bei der Formulierung der Feldgleichungen eine ALE-Kinematik verwandt, so sind die Bewegungsgleichungen des Seils mit denen des dreidimensionalen Kontinuums sehr gut vergleichbar. Die vorgestellte Lösung beruht für eine instationäre Führungsbewegung auf dem GALERKIN-Verfahren und bei einer stationären Führungsbewegung auf einer Transformation in Ort und Zeit. Durch diese Ortszeittransformation entfallen die gyroskopischen Anteile des Systemoperators, so dass ein wohl-definiertes Problem entsteht, das die HADAMARD-Lösungsanforderungen erfüllt. Aufgrund der Vergleichbarkeit der Feldgleichungen ist eine solche Vorgehensweise bei der Lösung vom vorgestellten eindimensionalen Seilmodell auf allgemeinere dreidimensionale Kontinuumsmodelle übertragbar. Hierbei können die im Rahmen dieser Arbeit erläuterten Zusammenhänge zur LORENTZ-Transformation verwendet werden.

Aus den vorgestellten vereinfachten Modellen und ihren analytischen Lösungen ergeben sich direkt zahlreiche Anwendungen. Da die Analyse und Entwicklung von Methoden im Mittelpunkt dieser Arbeit steht, obliegt es zukünftigen Untersuchungen, diese Methoden in technischen Anwendungen zu nutzen. Bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten eindimensionalen Modellen ergibt sich die eindimensionale Wellengleichung als systembeschreibende Gleichung. Deshalb lassen sich die dargestellten Methoden auch auf weitere physikalische Modelle anwenden, deren Systemgleichung in der eindimensionalen Wellengleichung mündet. Damit lassen sich sehr viele Phänomene um das Verhalten bei nichtmateriellen Randbedingungen erweitern. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sind neben den Transversalschwingungen von Saiten und Längsschwingungen

von Seilen noch Torsionsschwingungen von Wellen, Schubschwingungen von schubelastischen Balken und Druckschwingungen in Gassäulen mithilfe der eindimensionalen Wellengleichung abbildbar. Darüber hinaus gilt diese Erweiterung in Teilen auch für die in der Einleitung dieser Arbeit genannten technischen Anwendungen.

An allen entwickelten (semi-)analytischen Lösungen lassen sich mit der implementierten numerischen Umsetzung sehr effektiv Parameterstudien durchführen. Deshalb sind sie auch zur Parameteridentifikation im Vorfeld rein numerischer Untersuchungen von komplizierteren Systemen geeignet. Darüber hinaus können die analytischen Lösungen auch eine wichtige Rolle innerhalb komplizierterer Modellierungen spielen. Als ein konkretes Beispiel für eine solche Einbindung ist die Simulation des Fadenlaufs in Textilmaschinen zu nennen.

## 7.2 Ausblick

Es liegt in der Natur einer konsequenten Forschung, dass sich aus der Lösung einer Aufgabe neue Ansatzpunkte für weiterführende Fragestellungen ergeben. Für die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse betrifft dies vor allem die Ergänzung der verwendeten und die Anwendung weiterer Methoden, die Reduzierung getroffener Vereinfachungen in den mechanischen Modellen sowie die Anwendung der behandelten Methoden auf konkrete technische Anwendungen.

Entwicklungsmöglichkeiten auf methodischer Ebene ergeben sich bei der dreidimensionalen Formulierung in einer numerischen Umsetzung der allgemein hergeleiteten Feldgleichungen. Die in dieser Arbeit formulierten Feldgleichungen können bei der Entwicklung von Finite-Elemente-Modellen hilfreich sein, da durch die eingeführte Notation Platzierungen von Feldgrößen und Operatoren direkt ablesbar sind, was die numerische Implementierung wesentlich vereinfacht. Da bei Herleitungen in der vorliegenden Arbeit Zeit- und Raumkoordinaten als gleichrangig behandelt werden, bietet sich insbesondere eine numerische Umsetzung mithilfe der Finite-Raum-Zeit-Elemente-Formulierung an (vgl. [KÖLKE 2005]). Die dafür erforderliche Verwendung der Verschiebungsgeschwindigkeiten als Unbekannte ist bereits berücksichtigt. Darüber hinaus kann in weiterführenden Untersuchungen auch eine Erweiterung der vorgestellten Formulierungen für nichtlineare Probleme angestrebt werden.

Wie [PICARD 2009] zeigt, haben die Feldgleichungen zahlreicher physikalischer Modelle eine Struktur, die der in der vorliegenden Arbeit für die Elastodynamik mit nichtmateriellen Randbedingungen hergeleiteten Struktur sehr ähnlich ist. Dadurch ergeben sich zahlreiche neue Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen. Zum einen in Richtung weiterer physikalischer Gesetze und zum anderen in Hinblick auf die Verwendung anderer (linearer) Materialmodelle. Es ist demnach zu erwarten, dass weitere Klassen physikalischer Problemstellungen mit nichtmateriellen Randbedingungen (wie z. B. die Elektrodynamik und die Thermoelastizität) mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden bearbeitet werden können. Darüber hinaus ist es sogar vorstellbar, die Gleichungen verschiedener physikalischer Gesetze unter Beibehaltung ihrer Systemstruktur zu koppeln. Diese Erweiterungsmöglichkeit um Materialmodelle und Feldgleichungen verwandter Gebiete gilt für die dreidimensionale kontinuumsmechanische Formulierung wie auch für die vorgestellten eindimensionalen Modelle. Konkrete Anwendungsbeispiele für eine Kopplung aus Elastodynamik und Thermoelastizität mit nichtmateriellen Randbedingungen sind z. B. in der Modellierung des Papiertransportes in einer Papiermaschine oder eines Kettenantriebes mit Berücksichtigung von Erwärmungs- und Abkühlungsprozessen zu finden. Auch bei instationären Führungsbewegungen können die Ergebnisse der vorgelegten Arbeit hilfreich sein.

Unter anderem der Wunsch nach überschaubaren Herleitungen führt auf die Betrachtung biegeweicher eindimensionaler Kontinua bei der Suche nach analytischen Lösungen. Werden die

im Vergleich zum allgemeinen dreidimensionalen Kontinuum getroffenen Vereinfachungen abgeschwächt bzw. nicht getroffen, so erweitert dies ebenfalls das Einsatzgebiet der vorgestellten Lösungsmethoden. Auf dem Gebiet der eindimensionalen bzw. zweidimensionalen Kontinua lassen sich so beispielsweise Balkenstrukturen bzw. Platten- und Scheibenstrukturen untersuchen.

In diesem Zusammenhang ist es auch sinnvoll die experimentellen Untersuchungen zu erweitern. So ermöglichte eine photogrammetrische Untersuchung die Erfassung des gesamten Schwingungsverlaufes über Ort und Zeit. Damit könnten vor allem erweiterte Modelle validiert werden.

Doch auch mit Beibehaltung aller Vereinfachungen in den eindimensionalen Modellen bleiben Erweiterungsmöglichkeiten für ihre Analyse. So konnte im Rahmen dieser Arbeit bereits gezeigt werden, auf welche Weise nichtmaterielle Randbedingungen bei linearen Systemen dazu führen können, dass eine analytische Lösung durch eine Reihenentwicklung in nichtorthogonale Eigenfunktionen dargestellt wird. Dieses Lösungsverhalten gilt es für nichtlineare Systeme in das (für Ingenieurwissenschaften) noch relativ junge Gebiet der nichtlinearen Eigenfunktionen einzuordnen (engl. non-linear normal modes, vgl. [VAKAKIS 1997]).

Für technische Anwendungen spielt die Stabilität von Lösungen eine sehr wichtige Rolle, so dass es empfehlenswert ist, die bereits vorhandenen Methoden nach FLOQUET und HILL (s. [FORBAT 1966, S. 77] und [ZWIERS 2007, S. 86]) sowie LJAPUNOV (s. [MÜLLER 1977, S. 65]) auch auf Systeme mit nichtmateriellen Randbedingungen anzuwenden.

## Literaturverzeichnis

- ALTENBACH, J.; ALTENBACH, H. (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart
- AMES, W.; LEE, S. Y.; ZAISER, J. N. (1968). *Non-linear vibrations of a traveling threadline*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 3(4):449–469
- ANDERSSON, P.; LARSSON, K.; WULLENS, F.; KROPP, W. (2004). *High Frequency Dynamic Behaviour of Smooth and Patterned Passenger Car Tyres*. Acta Acustica united with Acustica, 90(3):445–456
- ANTMAN, S. S. (1980). *The Equations for Large Vibrations of Strings*. The American Mathematical Monthly, 87(5):359–370
- ARNOLD, V. I. (2004). *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen*. Springer Verlag, Berlin
- AUBRAM, D. (2009). *Differential Geometry Applied to Continuum Mechanics*, Bd. 44 d. Reihe *Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin*. Shaker Verlag, Technische Universität Berlin, Berlin
- BAJER, C. I.; DYNIEWICZ, B. (2008). *Space-time approach to numerical analysis of a string with a moving mass*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 76(10):1528–1543
- BALAZS, N. L. (1961). *On the Solutions of the Wave Equation with Moving Boundaries*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3(3):472–484
- BANICHUK, N.; JERONEN, J.; NEITTAANMÄKI, P.; TUOVINEN, T. (2010). *On the instability of an axially moving elastic plate*. International Journal of Solids and Structures, 47(1):91–99
- BARTHEL, P. (2008). *Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen*, Bd. 7 d. Reihe *Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik*. Universitätsverlag Karlsruhe, Universität Karlsruhe, Karlsruhe
- BATRA, R. C. (1972). *On Non-Classical Boundary Conditions*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 48(3):163–191
- BECKER, E.; BÜRGER, W. (1975). *Kontinuumsmechanik*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart
- BEHDINAN, K.; STYLIANOU, M. C.; TABARROK, B. (1997). *Dynamics of Flexible Sliding Beams – Non-Linear Analysis Part I: Formulation*. Journal of Sound and Vibration, 208(4):517–539
- BEITELSCHMIDT, M. (2002). *Simulation verschiedener Reibungsphänomene in Textilmaschinen*. In: *Maschinen und Anlagen: Tagung Hannover 26.-27. November 2002*, Bd. 1736 d. Reihe *VDI-Berichte, Reibung und Schwingungen in Fahrzeugen*. VDI Verlag, Düsseldorf
- BELYAEV, A. (2003). *Stability charts of synchronous belts and chains*. In: *XXX Summer School – Advanced Problems in Mechanics*, S. 98–103. Russische Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. (2001). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester
- BENKER, H. (2005). *Differentialgleichungen mit MATHCAD und MATLAB*. Springer Verlag, Berlin
- BENSON, D. J. (1989). *An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72(3):305–350
- BENZ, W. (1992). *Geometrische Transformationen unter besonderer Berücksichtigung der Lorentztransformation*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim

- BERGER, R. (1996). *Instationäre Bewegung und Stabilitätsverhalten eindimensionaler Kontinua*, Bd. 18 Mechanik / Bruchmechanik – Nr. 189 d. Reihe *Fortschritt-Berichte VDI*. VDI Verlag, Düsseldorf
- BERTRAM, A. (1989). *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim
- BESDO, D.; IHLEMANN, J. (2002). *Wechsel zwischen Eulerscher und Lagrangescher Formulierung mit einem speziellen Übertragungsoperator*. *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, 1(1):143–144
- BETTEN, J. (2001). *Kontinuumsmechanik – Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Springer Verlag, Berlin, 2. Aufl.
- BEUTELSPACHER, A. (2004). „*Das ist o. B. d. A. trivial!*“ – Eine Gebrauchsanleitung zur Formulierung mathematischer Gedanken. Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 7. Aufl.
- BOGACZ, R.; SZOLC, T. (1993). *Analysis of dynamic interaction between the continuous string and moving oscillator*. *Engineering Transactions*, 41(3–4):365–384
- BÖHM, F. (1966). *Mechanik des Gürtelreifens*. *Ingenieurarchiv*, 35(2):82–101
- BÖHM, F. (1985). *Theorie schnell veränderlicher Rollzustände für Gürtelreifen*. *Ingenieur-Archiv*, 55(1):30–44
- BRINKMEIER, M. (2007). *Modellierung und Simulation der hochfrequenten Dynamik rollender Reifen*. Leibniz Universität Hannover, Hannover. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik
- BROMMUNDT, E. (2009). *High-Frequency Self-Excitation in Paper Calenders*. *Technische Mechanik*, 29(1):60–85
- BRONSTEIN, I. N.; SEMANDJAJEW, K. A.; MUSIOL, G.; MÜHLIG, H. (2008). *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 7. Aufl.
- CANCHI, S. V.; PARKER, R. G. (2006). *Parametric Instability of a Rotating Circular Ring With Moving, Time-Varying Springs*. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(2):231–243
- CHUNG, J.; OH, J.-E.; YOO, H. H. (2000). *Non-Linear Vibration of a Flexible Spinning Disc with Angular Acceleration*. *Journal of Sound and Vibration*, 213(2):375–391
- CVETICANIN, L. (1998). *Dynamics of Machines with variable Mass*. Gordon and Breach Sc. Publishers, London
- DAMME, S. (2006). *Zur Finite-Element-Modellierung des stationären Rollkontakts von Rad und Schiene*, Bd. 4 d. Reihe *Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke*. Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Technische Universität Dresden, Dresden
- DONEA, J.; HUERTA, A.; PONTHOT, J.-P.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A. (2004). *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. In: STEIN, E.; BORST, R. DE ; HUGHES, T. J. (Hrsg.): *Encyclopedia of Computational Mechanics, 1: Fundamentals*, S. 413–433. John Wiley & Sons Ltd.
- DONEA, J.; HUERTA, A. (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester
- DRESIG, H.; VUL’FSON, I. I. (1989). *Dynamik der Mechanismen*, Bd. 19 d. Reihe *Mathematik für Naturwissenschaft und Technik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- DUGAS, R. (1988). *A history of mechanics*. Dover Publications, New York
- ECK, C.; GARCKE, H.; KNABNER, P. (2008). *Mathematische Modellierung*. Springer Verlag, Berlin
- FEYNMAN, R. P.; SANDS, M. L.; LEIGHTON, R. B. (2005). *The Feynman Lectures on Physics: The Definitive and Extended Edition*. Benjamin-Cummings, San Francisco, 2. Aufl.

- FISCHER, U.; STEPHAN, W. (1972). *Prinzipien und Methoden der Dynamik – Ihre Anwendungen auf Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden*, Bd. 1. VEB Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig
- FÖPPL, L. (1947). *Die strenge Lösung für die rollende Reibung*. Leibniz Verlag München, München
- FORBAT, N. (1966). *Analytische Mechanik der Schwingungen*, Bd. 12 d. Reihe *Mathematik für Naturwissenschaft und Technik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- FRANZE, A.; ZASTRAU, B. W. (2010). *On the Transverse Vibrations of a String Segment Between Two Supports Moving Axially Along a String of Infinite Length*. *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, 10(1):237–238
- FRANZE, A.; ZASTRAU, B. W. (2011). *On the characteristics of non-material boundary conditions using the example of a vibrating string*. *Machine Dynamics Research*, 35(4):11–31
- FRANZE, A.; ZASTRAU, B. W. (2012). *On the longitudinal vibrations of an axially moving yarn*. *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, zur Veröffentlichung eingereicht
- GEKELER, E. W. (2006). *Mathematische Methoden zur Mechanik – Ein Handbuch mit MATLAB-Experimenten*. Springer Verlag, Berlin
- GUMMERT, P.; RECKLING, K.-A. (1987). *Mechanik*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig, 2. Aufl.
- HAGEDORN, P.; DASGUPTA, A. (2007). *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester
- HALL, W.; MOTTRAM, J. T.; JONES, R. P. (2004). *Tire Modeling Methodology with the Explicit Finite Element Code LS-DYNA*. *Tire Science and Technology*, 32(4):236–261
- HAUPT, P. (2010). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag, Berlin
- HEDRIH, K. (2007). *Transversal vibrations of the axially moving sandwich belts*. *Archive of Applied Mechanics*, 77(7):523–539
- HETZLER, H. (2008). *Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens*, Bd. 8 d. Reihe *Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik*. Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe
- HOLL, H.; HAMMELMÜLLER, F. (2006). *Rotor Vibrations in a Coiling Process*. In: SPRINGER, H.; ECKER, H. (Hrsg.): *Proceedings of the 7th IFToMM Conference on Rotor Dynamics (CD-ROM)*, 25.-28. September 2006, Bd. 341. Institut für Mechanik und Mechatronik, Technische Universität Wien, Wien
- HOPPE, U. (1996). *Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie*, Bd. 101 d. Reihe *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*. Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Bochum
- HUANG, S. C.; SOEDEL, W. (1987). *Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundations*. *Journal of Sound and Vibration*, 115(2):253–274
- IRRETIER, H. (1999). *Mathematical foundations of experimental modal analysis in rotor dynamics*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(2):183–191
- IRSCHIK, H.; HOLL, H. J. (2002). *The equations of Lagrange written for a non-material volume*. *Acta Mechanica*, 153(3–4):231–248
- IYER, C.; PRABHU, G. M. (2007). *Lorentz transformations with arbitrary line of motion*. *European Journal of Physics*, 28(2):183–190
- JÄNICH, K. (2005). *Vektoranalysis*. Springer Verlag, Berlin, 4. Aufl.
- JURISITS, R.; STEINDL, A. (2011). *Mode interactions and resonances of an elastic fluid-conveying tube*. *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, 11(1):323–324

- KALISKE, M.; WOLLNY, I.; ZOPF, C.; GRAF, W. (2011). *Realitätsnahe numerische Analyse der Beanspruchung von Asphaltbefestigungen durch den rollenden Reifen*. In: WELLNER, F. (Hrsg.): 2. Dresdner Asphalttage, S. 45–56. Institut für Stadtbauwesen und Straßenbau, Technische Universität Dresden, Dresden
- KALKER, J. J. (1979). *The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14(9):1293–1307
- KARCH, G.; RIEMER, M. (1994). *Mechanical Modelling and Stability Investigation of a Non-Material System in Rotor Dynamics*. Nonlinear Dynamics, 6(4):375–390
- KARL, D. (2011). *Erweiterung der mechanischen Beschreibung dreidimensionaler und eindimensionaler Kontinua um zeitvariante Randbedingungen*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Technische Universität Dresden, Dresden
- KERNER, H.; VON WAHL, W. (2007). *Mathematik für Physiker*. Springer Verlag, Berlin, 2. Aufl.
- KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A.; HELMHOLZ, A. C.; MOYER, B. J. (1986). *Mechanik*, Bd. 1 d. Reihe *Berkeley Physik Kurs*. Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig, 4. Aufl.
- KLOET, P. V. D.; NEERHOF, F. L. (2002). *Normalized Dynamic Eigenvalues for Scalar Time-Varying Systems*. In: *Proceedings of the 10th Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, 21.-23. Juni 2002*, S. 21–23. Izmir
- KOIVUROVA, H. (2008). *The numerical study of the nonlinear dynamics of a light, axially moving string*. Journal of Sound and Vibration, 320(1–2):373–385
- KOIVUROVA, H. (1998). *Dynamic Behaviour of an Axially Moving Membrane Interacting with the Surrounding Air and Making Contact with Supporting Structures*, Bd. 118 d. Reihe *Acta Universitatis Ouluensis (Technica)*. Oulun Yliopisto, Oulu
- KÖLKE (2005). *Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen*, Bd. 2005–99 d. Reihe *Berichte aus dem Institut für Statik*. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig
- KONG, L.; PARKER, R. G. (2005). *Vibration of an axially moving beam wrapping on fixed pulleys*. Journal of Sound and Vibration, 280(3–5):1066–1074
- KROPP, W. (1992). *Ein Modell zur Beschreibung des Rollgeräusches eines unprofilierten Gürtelreifens auf rauher Straßenoberfläche*, Bd. 11 – Nr. 166 d. Reihe *Fortschritt-Berichte VDI*. VDI Verlag, Düsseldorf
- LEHMANN, T. (1976). *Große elasto-plastische Formänderungen*, Bd. 1 d. Reihe *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*. Institut für Mechanik, Ruhr-Universität, Bochum
- LEIPHOLZ, H. (1967). *Über die Befreiung der Ansatzfunktionen des Ritzschen und Galerkinschen Verfahrens von den Randbedingungen*. Archive of Applied Mechanics, 36(4):251–261
- LICHNEROWICZ, A. (1966). *Einführung in die Tensoranalysis*, Bd. 77 d. Reihe *BI-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut AG – Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim
- LIN, W.; QIAO, N. (2008). *Vibration and stability of an axially moving beam immersed in fluid*. International Journal of Solids and Structures, 45(5):1445–1457
- LINDER, C. (2003). *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Dynamics and Finite Strain Plasticity Models*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Stuttgart
- LIU, I.-S.; RINCON, M. A. (2003). *Effect of moving boundaries on the vibrating elastic string*. Applied Numerical Mathematics, 47(2):159–172



- MARYNOWSKI, K. (2008). *Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web*, Bd. 38 d. Reihe *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin
- MATSKO, V. J.; NOLL, W. (1993). *Mathematical Structures of Special Relativity*. Veröffentlicht auf [www.math.cmu.edu/~wn0g/noll/](http://www.math.cmu.edu/~wn0g/noll/) (abgerufen am 15. Juni 2009)
- MATTHIEU, P. (1961). *Schwingungen von bewegten Saiten (Triebriemen)*. VDI-Berichte, 48(1):71–75
- MCGHEE, D.; PICARD, R. (2011). *On electroseismic waves in anisotropic inhomogeneous media*. GAMM-Mitteilungen, 34(1):76–83
- MIEHE, C. (1998). *A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric*. International Journal of Solids and Structures, 35(30):3859–3897
- MIRANKER, W. L. (1960). *The Wave Equation in a Medium in Motion*. IBM Journal of Research and Development, 4(1):36–42
- MOTE, C. D. (1965). *A Study of Band Saw Vibrations*. Journal of the Franklin Institute, 279(6):430–444
- MÜLLER, P. C. (1977). *Stabilität und Matrizen – Matrizenverfahren in der Stabilitätstheorie linearer dynamischer Systeme*. Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek. Springer Verlag, Berlin
- NACKENHORST, U. (1992). *Zur Berechnung schnell rollender Reifen mit der Finite Element Methode*, Bd. April 1992 d. Reihe *Berichte aus dem Institut für Mechanik*. Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg
- NACKENHORST, U. (2000). *Rollkontaktdynamik – Numerische Analyse der Dynamik rollender Körper mit der Finite Elemente Methode*, Bd. November 2000 d. Reihe *Berichte aus dem Institut für Mechanik*. Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg
- NELSON, H. M. (1979). *Transverse vibration of a moving strip*. Journal of Sound and Vibration, 65(3):381–389
- NOLL, W. (1973). *Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 52(1):62–92
- OSTERMEYER, G. P. (1988). *Das auf einer nachgiebigen Schiene rollende Rad – Ein Beitrag zur Modellierungs- und Untersuchungsmethodik*. Technische Universität Braunschweig, Braunschweig. Habilitation, Institut für Technische Mechanik
- ÖZ, H. (2001). *On the vibrations of an axially travelling beam on fixed supports with variable velocity*. Journal of Sound and Vibration, 239(3):556–564
- PARISCH, H. (2003). *Festkörper-Kontinuumsmechanik – Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart
- PEDERSEN, R.; SANTOS, I.; HEDE, I. A. (2010). *Advantages and Drawbacks of Applying Periodic Time-Variant Modal Analysis to Spur Gear Dynamics*. Mechanical Systems and Signal Processing, 24(5):1495–1508
- PERKINS, N. C.; C. D. MOTE, J. (1987). *Three-dimensional vibration of travelling elastic cables*. Journal of Sound and Vibration, 114(2):325–340
- PICARD, R. (2009). *A structural observation for linear material laws in classical mathematical physics*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 32(14):1768–1803
- PICARD, R.; MCGHEE, D. (2011). *Partial Differential Equations – A unified Hilbert Space Approach*, Bd. 55 d. Reihe *Expositions in Mathematics*. Walter De Gruyter, Berlin
- RAO, K.; KUMAR, R.; BOHARA, P. (2003). *Transient Finite Element Analysis of Tire Dynamic Behavior*. Tire Science and Technology, 31(2):104–127
- RIEMER, M. (1986). *Anwendung des Prinzips von Hamilton auf die mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Saite*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 66(4):78–80

- RIEMER, M. (1987). *Analytische Beschreibung von Fahrzeug/Fahrweg-Modellen am Beispiel eines auf einer Saite laufenden Oszillators*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 67(1):136–138
- RIEMER, M. (1989). *Zur Anwendung direkter Methoden der Variationsrechnung auf nichtmaterielle Probleme der Elastodynamik*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 69(5):334–336
- RIEMER, M. (1985). *Zur Theorie elastischer Kontinua mit nichtmateriellen Übergangsbedingungen*. Universität Karlsruhe, Karlsruhe. Dissertation, Institut für Technische Mechanik
- ROTH, W. (1965). *Transversalschwingungen durchströmter Saiten*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 16(2):201–214
- RUSSEL, B. (1967). *Probleme der Philosophie*, Bd. 207 d. Reihe *edition suhrkamp*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main
- SCHLEBUSCH, R. (2005). *Theorie und Numerik einer oberflächenorientierten Schalenformulierung*, Bd. 3 d. Reihe *Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke*. Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Technische Universität Dresden, Dresden
- SCHWARZBART, M.; STEINDL, A.; STEINER, W.; TROGER, H.; WIEDERMANN, G. (2009). *Tethered satellite systems: A challenge for mechanics and applied mathematics*. GAMM-Mitteilungen, 32(1):105–120
- SCOVAZZI, G.; HUGHES, T. J. R. (2007). *Lecture Notes on Continuum Mechanics in Arbitrary Moving Domains*. Technischer Bericht, Sandia National Laboratories, Albuquerque
- SKUTSCH, R. (1897). *Ueber die Bewegung eines gespannten Fadens, welcher gezwungen ist, durch zwei feste Punkte mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversalschwingungen von geringer Amplitude versetzt wird*. Annalen der Physik und Chemie, 297(5):190–195
- SMITH, D. R. (1993). *An Introduction to Continuum Mechanics – after Truesdell and Noll*, Bd. 22 d. Reihe *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- SPIVAK, M. (1995). *Calculus on Manifolds – A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading (MA)
- STEIN, J. A. (1997). *Physik für Bauingenieure – Grundlagen und Anwendungen in zwei Bänden*, Bd. 1: Schall. AVH-Verlag Hamburg, Hamburg
- STEINMANN, P. (2002). *On spatial and material settings of hyperelastodynamics*. Acta Mechanica, 156(3–4):193–218
- STOLL, M. (2009). *Locking und Purging für den Hamiltonischen Lanczos-Prozess*. Diplomarbeit, Professur Mathematik in Industrie und Technik, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz
- SZABÓ, I. (1987). *Geschichte der mechanischen Prinzipien – und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Bd. 32 d. Reihe *Wissenschaft und Kultur*. Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Aufl.
- TAYLOR, B. (1713). *De motu nervi tenst*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 28(337):26–32
- TÖPFER, A. (2009). *Erfolgreich Forschen – Ein Leitfaden für Bachelor-, Master-Studierende und Doktoranden*. Springer Verlag, Berlin
- TRIAANTAFYLLOU, M. S. (1985). *The dynamics of translating cables*. Journal of Sound and Vibration, 103(2):171–182
- TRUESDELL, C. (1960). *Outline of the History of Flexible or Elastic Bodies to 1788*. The Journal of the Acoustical Society of America, 32(12):1648–1656
- TRUESDELL, C. (1966). *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin

- TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. (1960). *The Classical Field Theories*. In: FLÜGGE (Hrsg.): *Handbuch der Physik III/1*, S. 226–858. Springer Verlag, Berlin
- ULSOY, A. G.; MOTE, C. D.; SZYMANI, R. (1978). *Principal Developments in Band Saw Vibration and Stability Research*. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 36(7):273–280
- VAKAKIS, A. F. (1997). *Non-linear normal modes (NNMs) and their application in vibration theory: an overview*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1):3–22
- WAGNER, E.; MEINHOLD, P. (1989). *Partielle Differentialgleichungen*, Bd. 8 d. Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte*. BSB Teubner Verlag, Leipzig, 6. Aufl.
- WALL, W. A. (1999). *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*, Bd. 31 d. Reihe *Berichte des Instituts für Baustatik*. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Stuttgart
- WAUER, J. (1975). *Schwingungen von bewegten Saiten veränderlicher Länge*. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 55(4):182–184
- WAUER, J. (1976). *Querschwingungen bewegter eindimensionaler Kontinua veränderlicher Länge*, Bd. 11 – Nr. 26 d. Reihe *Berichte der VDI Zeitschriften*. VDI Verlag, Düsseldorf
- WEISS, H. (1999). *Zur Dynamik geometrisch nichtlinearer Balken*. Technische Universität Chemnitz, Chemnitz. Dissertation, Institut für Mechanik
- WEINBERGER, H. F. (1965). *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*. Dover Publications, New York
- WICKERT, J. A.; MOTE, JR., C. D. (1990). *Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua*. *Journal of Applied Mechanics*, 57(3):738–744
- WILLNER, K. (2003). *Kontinuums- und Kontaktmechanik – Synthetische und analytische Darstellung*. Springer Verlag, Berlin
- WRIGGERS, P. (1988). *Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite Element Methode*, Bd. 88-4 d. Reihe *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Hannover
- WU, X.; PARKER, R. G. (2006). *Vibration of rings on a general elastic foundation*. *Journal of Sound and Vibration*, 295(1–2):194–213
- WULLENS, F.; KROPP, W. (2004). *A Three-Dimensional Contact Model for Tyre/Road Interaction in Rolling Conditions*. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(4):702–711
- XU, J.; GASCH, R. (1995). *Modale Behandlung linearer periodisch zeitvarianter Bewegungsgleichungen*. *Archive of Applied Mechanics*, 65(3):178–193
- ZAHN, A. (2013). *Schwingungen einer vorgespannten Saite mit zeitvarianten, nichtmateriellen Randbedingungen*. Projektarbeit, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Technische Universität Dresden, Dresden
- ZASTRAU, B. W. (1981). *Zur Berechnung orientierter Kontinua - Entwicklung einer Direktortheorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*, Bd. 11 – Nr. 26 d. Reihe *Fortschritt-Berichte der VDI Zeitschriften*. VDI Verlag, Düsseldorf
- ZEN, G.; MÜFTU, S. (2006). *Stability of an axially accelerating string subjected to frictional guiding forces*. *Journal of Sound and Vibration*, 289(3):551–576
- ZU, J. W. (2001). *Belts*. In: *Encyclopedia of Vibration*, S. 165–173. Academic Press Ltd., Oxford
- ZWIERS, U. (2007). *On the Dynamics of Axially Moving Strings*. Cuvillier Verlag, Göttingen



## Anhang

### A Ergänzungen zu den kontinuumsmechanischen Grundlagen

#### A.1 Neo-klassische Raumzeit

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben wird, hat es Vorteile, eine Raumzeit einzuführen, die keinen absoluten Raum voraussetzt. Dementsprechend wird im Folgenden das in [NOLL 1973] vorgestellte Konzept der neo-klassischen Raumzeit näher erläutert. Zunächst wird der sogenannte *Ereignisraum*  $\mathcal{W}$  definiert. Dieser enthält als Elemente seiner Grundmenge *Ereignisse*. Um zeitliche Abstände zwischen Ereignissen angeben zu können, wird (vergleichbar einer Stoppuhr) eine Zeitdifferenzfunktion

$$\begin{aligned} \Delta\bar{t} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (e, f) &\mapsto \Delta\bar{t}(e, f) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

eingeführt. Dabei ergeben sich intuitiv für  $\Delta\bar{t}$  folgende Eigenschaften

$$\bigwedge_{e, f \in \mathcal{W}} \Delta\bar{t}(e, f) = -\Delta\bar{t}(f, e) \quad , \quad (\text{A.2})$$

$$\bigwedge_{e, f, g \in \mathcal{W}} \Delta\bar{t}(e, f) + \Delta\bar{t}(f, g) = \Delta\bar{t}(e, g) \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\bigwedge_{\substack{e \in \mathcal{W} \\ t \in \mathbb{R}}} \bigvee_{f \in \mathcal{W}} \Delta\bar{t}(e, f) = t \quad . \quad (\text{A.4})$$

Zwei Ereignisse  $e$  und  $f$  werden *gleichzeitig* genannt, wenn  $\Delta\bar{t}(e, f) = 0$  gilt. Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation<sup>108</sup> auf  $\mathcal{W}$ , d. h. es entsteht eine Zerlegung  $\Gamma$  des Ereignisraumes<sup>109</sup>

$$\mathcal{W} = \bigcup_{\tau \in \Gamma} \tau \quad \text{mit} \quad e, f \in \tau := [e] = [f] \quad (\text{A.5})$$

$$\Leftrightarrow e \sim f \Leftrightarrow \Delta\bar{t}(e, f) = 0 \quad (e, f \in \mathcal{W}) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen  $\tau$  heißen *Augenblicke*. Wenn  $e \in \tau$  gilt, dann wird davon gesprochen, dass das Ereignis  $e$  im Augenblick  $\tau$  stattfindet. Da Äquivalenzklassen disjunkt sind, lässt sich die für Ereignisse definierte Zeitdifferenzfunktion in Form von

$$\begin{aligned} \Delta t : \Gamma \times \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tau, \sigma) &\mapsto \Delta t(\tau, \sigma) := \Delta\bar{t}(e, f) \quad \text{für alle} \quad e \in \tau, f \in \sigma \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

mit Gl. (A.3) auf Augenblicke übertragen. Mit der Betragsnorm auf  $\mathbb{R}$  ist  $\|\Delta t\|_{\mathbb{R}}$  eine Metrik und  $(\Gamma, \|\Delta t\|_{\mathbb{R}})$  ist ein eindimensionaler EUKLIDischer Raum. Mit der zusätzlichen Forderung

$$\bigwedge_{e, f, g, h \in \mathcal{W}} \Delta t(e, f) = \Delta t(g, h) \Leftrightarrow \Delta t(e, g) = \Delta t(f, h) \quad (\text{A.8})$$

<sup>108</sup> Als Äquivalenzrelationen werden Relationen bezeichnet, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind. Sie zerlegen Mengen in nichtleere, disjunkte Untermengen.

<sup>109</sup> Die Menge der Äquivalenzklassen  $\mathcal{W}/\sim := \{[e] \mid e \in \mathcal{W}\}$  (auch Faktor- oder Quotientenmenge genannt) wird mit  $\Gamma$  bezeichnet und es wird eine kanonische Surjektion  $(\bar{\pi}_0 : \mathcal{W} \rightarrow \Gamma, e \mapsto [e])$  unterstellt, die jedem Element aus  $\mathcal{W}$  seine Äquivalenzklasse zuordnet.

wird der Translationsraum  $(\mathbb{T}, \|\Delta t\|_{\mathbb{R}})$  erhalten, der als *Zeit* bezeichnet wird und mit  $\mathbb{R}$  zu identifizieren ist. Wird ein Augenblick  $\tau_0 \in \Gamma$  als Bezug gewählt, dann sei

$$\bigwedge_{\tau \in \Gamma} \bigvee_{t \in \mathbb{T}} \Delta t(\tau_0, \tau) = t \quad (\text{A.9})$$

erfüllt, d. h. die Abbildung  $\Delta t(\tau_0, \square)$  sei surjektiv.

Eine räumliche Abstandsmessung zwischen Ereignissen hat nur bei gleichzeitigen Ereignissen Sinn, da die Messung zu einem bestimmten Augenblick erfolgen muss. In diesem Sinne wird eine (räumliche) Abstandsfunktion (vergleichbar eines Maßbandes) auf der Menge der gleichzeitigen (oder simultanen) Ereignispaare

$$\mathcal{W}_{\text{sim}} := \{(e, f) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \Delta \bar{t}(e, f) = 0\} \quad (\text{A.10})$$

als

$$\begin{aligned} \Delta \bar{d} : \mathcal{W}_{\text{sim}} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (e, f) &\mapsto \Delta \bar{d}(e, f) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

definiert.<sup>110</sup> Diese Abstandsfunktion lässt sich ebenfalls von Ereignissen auf einzelne Augenblicke  $\tau \in \Gamma$  einschränken (für  $(e, f) \in \mathcal{W}_{\text{sim}}$ )

$$\begin{aligned} \Delta d_{\tau} : \mathcal{W}_{\text{sim}} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (e, f) &\mapsto \Delta d_{\tau}(e, f) := \Delta \bar{d}(e, f) \quad \text{für alle } e, f \in \tau \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Die Abstandsfunktion  $\Delta d_{\tau}$  ist zunächst nicht weiter spezifiziert, sollte jedoch eine EUKLIDISCHE Metrik sein, so dass  $(\tau, \Delta d_{\tau})$  ein EUKLIDISCHER Punktraum  $\mathcal{E}$  ist (vgl. [NOLL 1973, S. 66]). Wird der EUKLIDISCHE Punktraum  $\mathcal{E}$  mit einer Metrik  $d_{\mathcal{E}}$  versehen und der zugehörige Translationsraum mit  $\mathbb{E}$  bezeichnet (vgl. Gl. (A.8)), so existiert eine Differenzabbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbb{E}} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{E} \\ (a, b) &\mapsto \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

die die Eigenschaft

$$\bigwedge_{a, b, c \in \mathcal{E}} \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b) = \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, c) + \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(c, b) \quad (\text{A.14})$$

besitzt und für die die Restriktion  $\mathbf{d}_{\mathbb{E}}|_{\{a\} \times \mathcal{E}}$  bijektiv ist.<sup>111</sup> Sie ordnet jedem Punktepaar  $(a, b)$  aus  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  einen Differenzvektor  $\mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b) \in \mathbb{E}$  zu. Damit ist  $\mathbb{E}$  Vektorraum des affinen Punktraumes  $\mathcal{E}$ . Wird für  $\mathbb{E}$  ein inneres Produkt  $\langle \square, \square \rangle_{\mathbb{E}}$  erklärt und berücksichtigt, dass  $\mathbb{E}$  Translationsraum von  $\mathcal{E}$  ist, so gilt als Zusammenhang zwischen der Metrik  $d_{\mathcal{E}}$  und der Abbildung  $\mathbf{d}_{\mathbb{E}}$

$$\bigwedge_{a, b \in \mathcal{E}} d_{\mathcal{E}}(a, b) = \|\mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b)\|_{\mathbb{E}} := \sqrt{\langle \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b), \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(a, b) \rangle_{\mathbb{E}}} \quad , \quad (\text{A.15})$$

wobei  $\|\square\|_{\mathbb{E}}$  die von  $\langle \square, \square \rangle_{\mathbb{E}}$  induzierte Norm bezeichnet. Damit sind die in der kontinuumsmechanischen Beschreibung hauptsächlich verwendeten Räume  $\mathbb{T}$  bzw.  $\mathbb{E}$  für Zeit bzw. Raum definiert.

<sup>110</sup> Aus der Abstandsfunktion wird an späterer Stelle eine Metrik abgeleitet, deshalb besitzt sie bereits die Nichtnegativität als Eigenschaft.

<sup>111</sup> Nach [NOLL 1973, S. 66] wird der 4-dimensionale Raum  $(\Gamma \times \mathcal{E}, \Delta t, d_{\mathcal{E}})$  neo-klassischer Ereignisraum bezeichnet.

## A.2 Beobachterabbildung und Bezugssystem

Es sei noch einmal besonders darauf hingewiesen, dass sich in dem in Abschnitt A.1 definierten Ereignisraum zeitliche Abstände nur zwischen Augenblicken und räumliche Abstände nur zwischen gleichzeitigen Ereignissen sinnvoll bestimmen lassen. Ziel ist es deshalb, durch Einführen einer Beobachterabbildung und eines Bezugssystems, auch räumliche Abstände zwischen beliebigen Ereignissen messen zu können (vgl. [NOLL 1973, HOPPE 1996]).

Dies gelingt, indem ein Isomorphismus zwischen dem Ereignisraum  $\mathcal{W}$  und der Menge  $\Gamma \times \mathcal{E}$  gewählt wird. Dieser willkürliche Isomorphismus wird Beobachter  $\Phi$  genannt

$$\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \Gamma \times \mathcal{E} \quad , \text{ bijektiv} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Der Beobachter soll die metrischen Strukturen auf  $\mathcal{W}$  und  $\Gamma \times \mathcal{E}$  respektieren, d. h. es soll

$$\bigwedge_{a \in \mathcal{E}} \pi_0 \circ \Phi^{-1}(\square, a) = \text{id}_{\Gamma} \quad (\text{A.17})$$

gelten<sup>112</sup> und die Restriktion  $\Phi|_{\mathcal{W}_\tau}$  (mit  $\mathcal{W}_\tau := \{e \in \mathcal{W} \mid e \in \tau\}$ ) sei für alle  $\tau \in \Gamma$  isometrisch. Demnach beeinflusst der definierte Beobachter die Abstände in Ort und Zeit nicht

$$\bigwedge_{a, b \in \mathcal{E}} \bigwedge_{\tau \in \Gamma} \Delta d_\tau(\Phi^{-1}(\tau, a), \Phi^{-1}(\tau, b)) = d_{\mathcal{E}}(a, b) \quad (\text{A.18})$$

$$\bigwedge_{a, b \in \mathcal{E}} \bigwedge_{\tau, \sigma \in \Gamma} \Delta \bar{t}(\Phi^{-1}(\tau, a), \Phi^{-1}(\sigma, b)) = \Delta t(\tau, \sigma) \quad . \quad (\text{A.19})$$

Mithilfe eines Beobachters kann bereits der räumliche Abstand nichtgleichzeitiger Ereignisse bestimmt werden. Zur einfacheren Handhabung der EUKLIDischen Räume ist es jedoch zweckmäßig, passend zum Beobachter Bezugssysteme zu wählen. Dazu sei  $(\tau_0, \varepsilon_0)$  ein beliebiger Bezugspunkt aus  $\Gamma \times \mathcal{E}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_o : \Gamma \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{E} \\ (\tau, a) &\mapsto (\Delta t(\tau_0, \tau), \mathbf{d}_{\mathbb{E}}(\varepsilon_0, a)) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

verknüpft die EUKLIDischen Räume mit ihren jeweiligen Translationsräumen. Die Komposition mit der Beobachterabbildung

$$\Phi_o := \mathbf{d}_o \circ \Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{E} \quad (\text{A.21})$$

soll im Folgenden als Bezugssystem bezeichnet werden. Die in einem Bezugssystem bestimmten Abstände von nichtgleichzeitigen Ereignissen hängen offenbar von der Wahl der Beobachterabbildung und des Bezugspunktes ab.

<sup>112</sup> Die Abbildung  $\text{id}_A$  beschreibt die zur Menge  $A$  gehörige Identitätsabbildung.

### A.3 Materieller Körper

Der materielle Körper  $\tilde{\mathcal{B}}$  kann als eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit angenommen werden, welche in den in Abschnitt A.1 vorgestellten EUKLIDischen Punktraum eingebettet ist.<sup>113</sup> Die Differenzierbarkeitseigenschaften dieser Mannigfaltigkeit können durch Kartenabbildungen lokal übertragen werden. Zur Beschreibung des gesamten Körpers ist meist eine offene Überdeckung mit den Karten notwendig, deren Vereinigungsmenge als Atlas bezeichnet wird (vgl. [JÄNICH 2005]).

Um den Elementen des materiellen Körpers (den sogenannten materiellen Punkten) Koordinaten zuordnen zu können, sind Einbettungsabbildungen  $\tilde{\Theta}$  (auch Koordinatenabbildung genannt) erforderlich.

$$\tilde{\Theta} : \tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\tilde{\mathcal{U}}, M \text{ offen}, n \geq m) \quad . \quad (\text{A.22})$$

Als Beispiel für eine solche Einbettung soll die Beschreibung eines Fadens dienen. Ein Faden kann als eindimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden ( $m = 1$ ), die in einem dreidimensionalen materiellen Anschauungsraum ( $n = 3$ ) liegt.

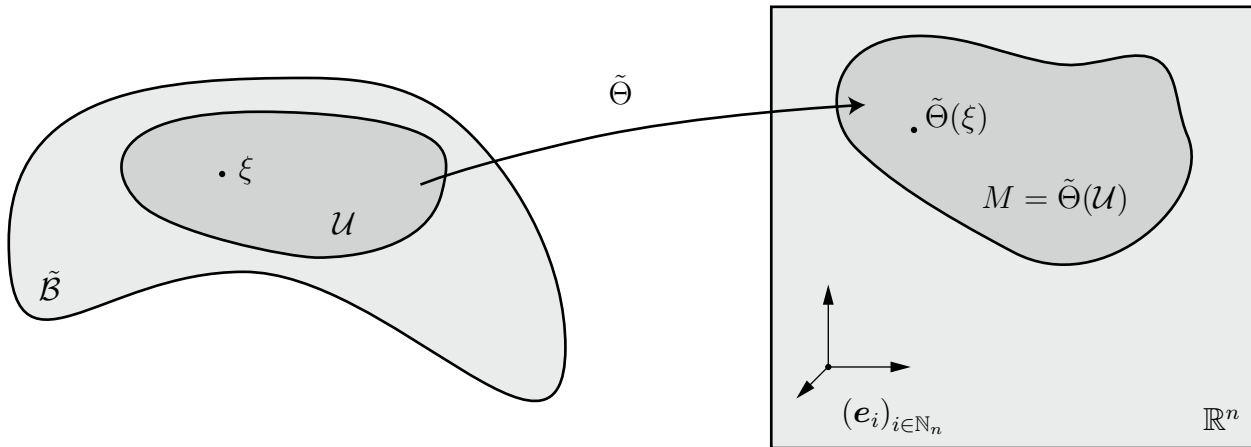


Abbildung A.1: Materieller Körper  $\tilde{\mathcal{B}}$ , Einbettungsabbildung  $\tilde{\Theta}$  und Parameterraum  $\mathbb{R}^n$

### A.4 Tangentialraum und Kotangentialraum

Für den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{B}}$  gibt es nach [JÄNICH 2005, S. 28] drei Interpretationen: eine geometrische, eine algebraische und eine physikalische. Der geometrisch definierte Tangentialvektor  $v \in \mathcal{T}_\xi^{\text{geom}} \tilde{\mathcal{B}}$  ist eine Äquivalenzklasse auf der Menge

$$\mathcal{K} := \left\{ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}} \mid \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad \alpha(0) = \xi \right\} \quad (\text{A.23})$$

der vektorwertigen, differenzierbaren Kurven auf der Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{B}}$ , die durch den Punkt  $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}$  verlaufen und für die gilt

$$v = d(h \circ \alpha)(0) \quad , \quad (\text{A.24})$$

<sup>113</sup> Der mathematische Begriff der „Mannigfaltigkeit“ ist relativ abstrakt und lässt sich als Gebilde mit lokaler Charakterisierung verstehen. So kann eine Kugeloberfläche beispielsweise nicht durch ein einziges Koordinatensystem beschrieben werden. Vielmehr lässt sie sich nur lokal mithilfe von sich überdeckenden Karten charakterisieren.



wobei  $h$  eine beliebige Karte um  $\xi$  bezeichnet und  $\alpha \in \mathcal{K}$  gilt. Geometrisch anschaulich ausgedrückt ist  $v$  gerade ein an die Kurve  $\alpha$  tangentialer Vektor.

Physikalisch kann der Tangentialvektor  $v \in \mathcal{T}_\xi^{\text{phys}} \tilde{\mathcal{B}}$  als Abbildung auf der Menge  $\mathcal{D}_\xi(\tilde{\mathcal{B}})$  aller Karten um  $\xi$  definiert werden, d. h.

$$v : \mathcal{D}_\xi(\tilde{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad . \quad (\text{A.25})$$

Dabei wird gefordert, dass sich  $v$  beim Wechsel zwischen zwei Karten durch das Differential des Kartenwechsels transformiert.<sup>114</sup>

Eine verallgemeinerbare Definition gelingt auf algebraischem Wege. Dabei wird der Tangentialvektor  $v \in \mathcal{T}_\xi^{\text{alg}} \tilde{\mathcal{B}}$  mithilfe einer auf  $\tilde{\mathcal{B}}$  definierten Richtungsableitung (Derivation) für skalarwertige, hinreichend glatte Funktionen  $f, g \in \text{Abb}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$  definiert

$$D_v f := d(f \circ \alpha)(0) \quad , \quad (\text{A.26})$$

wobei  $\alpha \in \mathcal{K}$ . Im Folgenden wird die geometrische Definition des Tangentialraumes zur Herleitung einer Basis verwendet, da der Verfasser dieser Arbeit sie als anschaulichste Variante empfindet.

Damit zur einfacheren Beschreibung der Bewegung eine lineare Struktur<sup>115</sup> vorausgesetzt werden kann, wurde der materielle Körper bereits in den EUKLIDischen Raum eingebettet. Dies vereinfacht die Bestimmung des Tangentialraumes erheblich. Der Vektorraum  $\mathbb{E}$ , in dem die Position der materiellen Punkte beschrieben wird, kann als  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden. Indem gefordert wird, dass  $\mathcal{T}_\xi \tilde{\mathcal{B}}$  und  $\mathbb{R}^n$  sowohl isomorph als auch diffeomorph<sup>116</sup> sind, kann jeweils der Tangentialraum mit seinem zu Grunde liegenden Raum identifiziert werden. Diese Identifizierung soll jedoch zur besseren Verständlichkeit zunächst unterdrückt werden (vgl. [HOPPE 1996, S. 36]).

Vielmehr werden an dieser Stelle ausgezeichnete Basen des Tangentialraumes und des Kotangentialraumes vorgestellt. Dazu werden passend zur Geometrie des Körpers Funktionen ausgewählt, die es gestatten, den Körper zu parametrisieren („auszumessen“): die sogenannten  $\tilde{\Theta}_i$ -Linien (s. hierzu [SCHLEBUSCH 2005, S. 16] sowie Abb. A.2). Zur Einführung der kanonischen Basen des Tangential- und des Kotangentialraumes der Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{B}}$  sei weiterhin eine Einbettungsabbildung  $\tilde{\Theta}$  auf  $\tilde{\mathcal{U}}$  gegeben

$$\tilde{\Theta} := \left( \tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n \right)^T : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (\text{A.27})$$

welche sich aus den gewählten Koordinatenlinien  $\tilde{\Theta}_i$  zusammensetzt. Nun können zwei Koordinatensysteme eingeführt werden. Durch Ableitung der Einbettungsabbildung in Koordinatenrichtung (Richtungsableitung) entstehen Vektoren, die tangential an den Koordinatenlinien im Parameter-

<sup>114</sup> Für weitere Erklärungen sei auf [JÄNICH 2005, S. 32] verwiesen.

<sup>115</sup> Linearität bedeutet in diesem Fall Additivität der Raumelemente und Homogenität der Raumelemente auf dem Körper der reellen Zahlen.

<sup>116</sup> Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

raum liegen (Tangentialvektoren)<sup>117</sup>

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(\tilde{\xi}) := D_{\mathbf{e}_i} \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) \quad (\text{A.28})$$

$$:= \frac{d}{dt} \left( \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi} + t\mathbf{e}_i) \right) \Big|_{t=0} \quad (\text{A.29})$$

$$= \left( \text{grad } \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) \right) (\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^n \quad . \quad (\text{A.30})$$

Durch die Einbettungsabbildung geht diese Eigenschaft der Tangentialvektoren nicht verloren, so dass sich Tangentialvektoren auf der Mannigfaltigkeit gemäß

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(\xi) := \tilde{\mathbf{g}}_i(\tilde{\Theta}(\xi)) \in \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathcal{B}} \quad (\text{A.31})$$

$$= \left( \text{grad } \tilde{\Theta}^{-1} \circ \tilde{\Theta}(\xi) \right) (\mathbf{e}_i) \quad (\text{A.32})$$

definieren lassen. Analog können Gradientenvektoren (oder auch Normalen- oder Kotangentialvektoren) bestimmt werden, für die

$$\tilde{\mathbf{g}}^{*i}(\xi) := \text{grad } \tilde{\Theta}_i(\xi) \in \mathcal{T}_\xi^* \tilde{\mathcal{B}} \quad , \quad (\text{A.33})$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^{*i}(\tilde{\xi}) := \tilde{\mathbf{g}}^{*i} \circ \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) = \left( \text{grad } \tilde{\Theta}_i \circ \tilde{\Theta}^{-1} \right) (\tilde{\xi}) \quad (\text{A.34})$$

gilt. Dabei ist die Darstellung auf die Mannigfaltigkeit bzw. den Parameterraum bezogen. Da die Einbettungsabbildung und ihre Inverse eindeutig definiert sind, folgt für die jeweiligen Basen nun (vgl. [GEKELER 2006, S. 536–573]) mithilfe des Satzes von der Umkehrabbildung

$$\underbrace{\left( \left( \text{grad } \tilde{\Theta}_j \circ \tilde{\Theta}^{-1} \right) (\tilde{\xi}) \right)}_{\in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \underbrace{\left( \left( \text{grad } \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) \right) (\mathbf{e}_i) \right)}_{\in \mathbb{R}^n} = \delta_i^j(\tilde{\xi}) \quad (\text{A.35})$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \tilde{\mathbf{g}}^{*j}(\tilde{\xi}) \Big|_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mathbf{g}}_i(\tilde{\xi}) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_i^j(\tilde{\xi}) \quad . \quad (\text{A.36})$$

Mit  $\delta_i^j$  als KRONECKER-Symbol folgt, dass  $\tilde{\mathbf{g}}^{*j}(\tilde{\xi})$  und  $\tilde{\mathbf{g}}_i(\tilde{\xi})$  zueinander duale Basen sind. Diese Basen und ihre Eigenschaften werden wieder durch die Koordinatenabbildungen auf alle anderen Tangential- und Kotangentialräume übertragen, da die Beobachterabbildung ebenfalls ein Diffeomorphismus ist, vgl. [GEKELER 2006, S. 536]. Es folgt demnach, dass auch  $\tilde{\mathbf{g}}^{*j}(\xi)$  und  $\tilde{\mathbf{g}}_i(\xi)$  dual zueinander sind.

Mit den im Abschnitt 2.2 definierten Abbildungen lässt sich das Verhalten der Tangential- und Kotangentialvektoren von der Mannigfaltigkeit auch auf beliebige Platzierungen übertragen. In Abb. A.2 ist diese Übertragung für die Ausgangsplatzierung  $\mathcal{A}_i$  beispielhaft dargestellt. Analog zum materiellen Körper auf der Mannigfaltigkeit und dem Parameterraum folgt die Dualität von  $\mathbf{G}^{*j}(\mathbf{X})$  und  $\mathbf{G}_i(\mathbf{X})$ .

<sup>117</sup> Der Ausdruck  $\text{grad } \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  entspricht der Auswertung der JACOBI-Matrix an einer festen Stelle  $\tilde{\xi}$ . Daraus folgt für die Matrixdarstellung  $\left[ \text{grad } \tilde{\Theta}^{-1}(\tilde{\xi}) \right] = \left[ \partial_j \tilde{\Theta}_i^{-1}(\tilde{\xi}) \right]_{i,j}$  sowie  $\left[ \tilde{\mathbf{g}}_i(\tilde{\xi}) \right] = \left[ \partial_i \tilde{\Theta}_j^{-1}(\tilde{\xi}) \right]_j$  und  $\left[ \tilde{\mathbf{g}}_i(\xi) \right] = \left[ \partial_i \tilde{\Theta}_j^{-1} \circ \tilde{\Theta}(\xi) \right]_j$ .

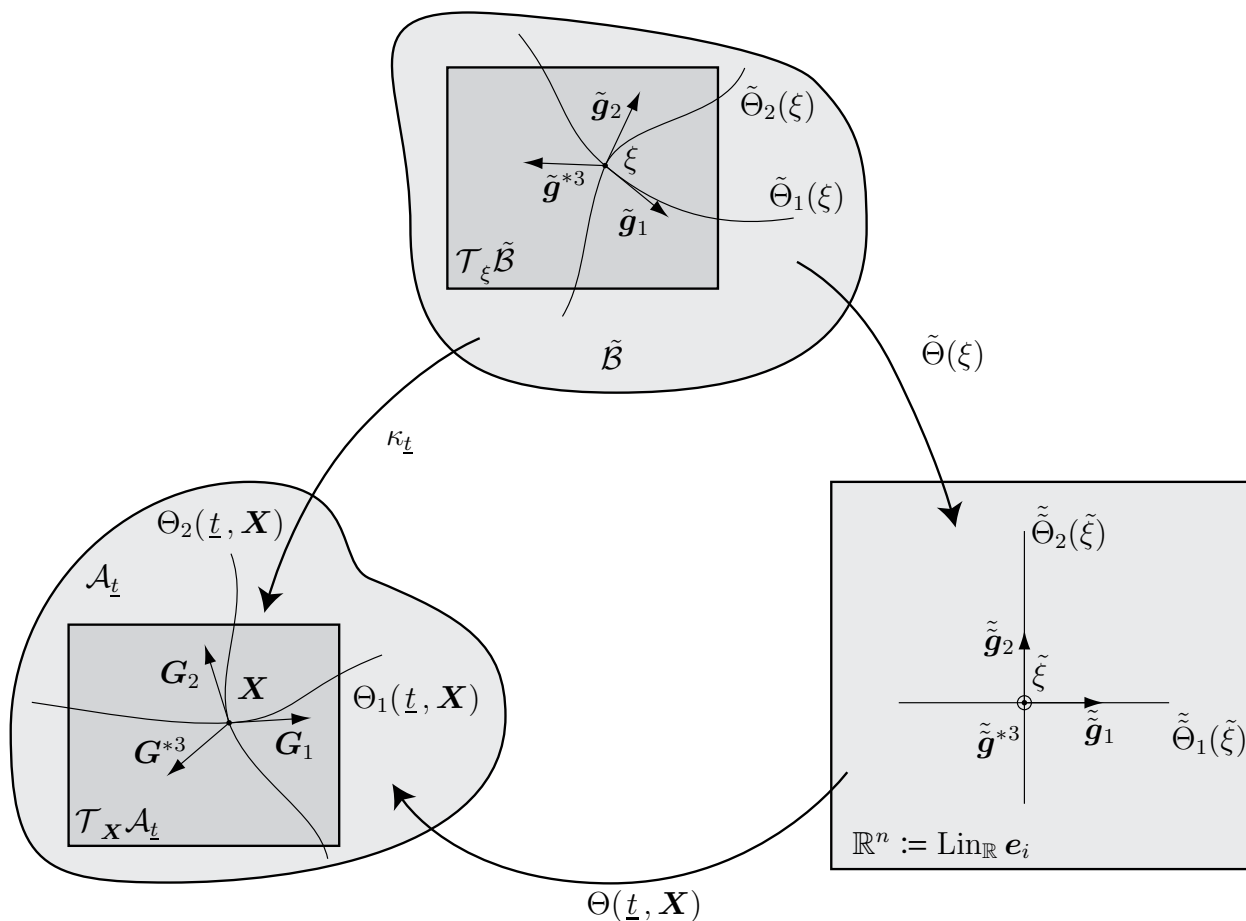


Abbildung A.2: Definition der Tangentialräume in verschiedenen Platzierungen

### A.5 Beispiele zur Ableitungsnotation

Ein Beispiel für die Zeitableitung eines Skalarfeldes kann durch die als bekannt vorausgesetzte Feldgröße  $h$

$$\begin{aligned}
 h : \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (t, x) &\mapsto h(t, x) := 3t + 5x
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

und die ebenfalls als bekannt vorausgesetzte Bewegungsabbildung

$$\begin{aligned}
 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\
 (t, X) &\mapsto \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, X) := (\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_0(t, X), \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, X)) := (t, (2X + t^2) \sin t)
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

gegeben werden. Hierbei wird (nur für dieses Beispiel) die Dimension aller Platzierungen zu eins gewählt. In diesem Fall ergibt sich für die Feldgröße  $h$  bezüglich der Platzierung  $\mathcal{A}_t$

$$\begin{aligned}
 h : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (t, X) &\mapsto h(t, X) = \left( h \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} \right) (t, X) = 3t + 5(2X + t^2) \sin t
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

Mithilfe der Zwischenrechnungen

$$\left( \partial_0 h \right)_{\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, X) = 3 \quad , \quad \left( \partial_1 h \right)_{\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, X) = 5 \quad , \quad (\text{A.40})$$

$$\partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_0(t, X) = 1 \quad , \quad \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, X) = 2t \sin t + (2X + t^2) \cos t \quad (\text{A.41})$$

lautet die Zeitableitung (bezüglich der Ausgangsplatzierung) der Feldgröße  $h$  (bezüglich der Momentanplatzierung), beschrieben in der Ausgangsplatzierung,

$$\left( \partial_0 h \right)_{\mathcal{A}\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, X) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot (2t \sin t + (2X + t^2) \cos t) \quad (\text{A.42})$$

$$= 3 + 10t \sin t + (10X + 5t^2) \cos t \quad , \quad (\text{A.43})$$

was sich nach kurzer Rechnung auch für die direkte zeitliche Ableitung der Funktion  $h$  ergibt.

Analog lässt sich ein Beispiel für die Zeitableitung eines Vektorfeldes formulieren. In diesem Beispiel werden alle Platzierungen als zweidimensional vorausgesetzt. Für das gegebene Vektorfeld  $\mathbf{h}$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{h}_{\mathcal{M}}\left(t, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} (2t + x_1) x_2^2 \\ 3t^2 x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

und die gegebene Bewegungsabbildung

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{M}_t \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) := \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_0\left(t, \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right), \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1\left(t, \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) \right) := \left( t, \begin{bmatrix} 3t + 4X_1 \\ 2t^2 X_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

ergeben sich folgende Zwischenrechnungen

$$\left[ \partial_0 \mathbf{h} \right]_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 \\ 6tx_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.46})$$

$$\left[ \partial_1 \mathbf{h} \right]_{\mathcal{M}}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2^2 & 2(2t + x_1)x_2 \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.47})$$

$$\left[ \left( \partial_0 \mathbf{h} \right)_{\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} 8t^4 X_2^2 \\ 12t^3 X_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.48})$$

$$\left[ \left( \partial_1 \mathbf{h} \right)_{\mathcal{M}} \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} 4t^4 X_2^2 & 4(5t + 4X_1)t^2 X_2 \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.49})$$

$$\partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_0(t, \mathbf{X}) = 1 \quad , \quad (\text{A.50})$$

$$\partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4tX_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.51})$$

aus denen schließlich die gesuchte Ableitung als

$$\left[ \left( \frac{\partial_0 \mathbf{h}}{\mathcal{A} \mathcal{M}} \right) \circ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}(t, \mathbf{X}) \right] = \begin{bmatrix} 8t^4 X_2^2 \\ 12t^3 X_2 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 4t^4 X_2^2 & 4(5t + 4X_1) t^2 X_2 \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4t X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

$$= \begin{bmatrix} 100t^4 X_2^2 + 64t^3 X_1 X_2 \\ 24t^3 X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

folgt. Dasselbe Resultat ergibt sich für die direkte Ableitung  $\partial_0 \mathbf{h}$  der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : \mathbb{T} \times \mathcal{A}_t &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{X}) &\mapsto \mathbf{h}(t, \mathbf{X}) := \mathbf{h}(t, \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4(5t + 4X_1) t^4 X_2^2 \\ 6t^4 X_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Der Vorteil des eingeführten platzierungsabhängigen Zeitableitungsoperators liegt damit in seiner kurzen und prägnanten aber auch eindeutigen und konsistenten Darstellung.

## A.6 Ausgewählte Nebenrechnungen zu den kontinuumsmechanischen Grundlagen

Um die Darstellungen in Kapitel 2 übersichtlich zu gestalten, wird dort weitestgehend auf die Angabe von Zwischenschritten verzichtet. Für ausgewählte Herleitungen soll dies jedoch an dieser Stelle nachgeholt werden.

In Abschnitt 2.3.5 wird in Vorbereitung auf die Herleitungen der nachfolgenden Abschnitte die Zeitableitung der JACOBI-Abbildung  $\overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}$  angegeben. Die ausführliche Rechnung hierfür lautet

$$\partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) = \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \quad (\text{A.55})$$

$$= \partial_0 \left( \det \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right) \right) \quad (\text{A.56})$$

$$= \left\langle \text{cof} \left[ \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right] \middle| \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right\rangle_{\text{Lin}(\mathcal{T}_{\mathbf{X} \mathcal{A}_t}, \mathcal{T}_{\mathbf{x} \mathcal{M}_t})} \quad (\text{A.57})$$

(Determinanten-Regel s. [GEKELER 2006, S. 5])

$$= \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \left\langle \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}^*}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \middle| \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right\rangle_{\text{Lin}(\mathcal{T}_{\mathbf{X} \mathcal{A}_t}, \mathcal{T}_{\mathbf{x} \mathcal{M}_t})} \quad (\text{A.58})$$

(Definition des Kofaktors)

$$= \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \left\langle \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}), \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right\rangle_{\text{Lin}(\mathcal{T}_{\mathbf{X} \mathcal{A}_t}, \mathcal{T}_{\mathbf{x} \mathcal{M}_t})} \quad (\text{A.59})$$

$$= \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \left\langle \text{id}_{\text{Lin}(\mathcal{T}_{\mathbf{x} \mathcal{M}_t})}, \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right)^{-1} \right\rangle_{\text{Lin}(\mathcal{T}_{\mathbf{x} \mathcal{M}_t})} \quad (\text{A.60})$$

$$= \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \text{tr} \left[ \partial_0 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \circ \left( \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}) \right)^{-1} \right] \quad (\text{A.61})$$

$$= \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{J}(t, \mathbf{X}) \text{tr} \left[ \partial_0 \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1(t, \mathbf{X}) \circ \left( \partial_1 \overset{\mathcal{M}\mathcal{A}}{\phi}_1 \right)^{-1}(t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{A.62})$$

$$= {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{tr} \left[ \partial_1 \partial_0 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1(t, \mathbf{X}) \circ \left( \partial_1 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1 \right)^{-1} (t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{Satz von SCHWARZ}) \quad (\text{A.63})$$

$$= {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{tr} \left[ \partial_1 \underset{\mathcal{A}}{\partial_0} {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1(t, \mathbf{X}) \circ \left( \partial_1 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1 \right)^{-1} (t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{A.64})$$

$$= {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{tr} \left[ \partial_1 \left( \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}} \circ {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi(t, \mathbf{X}) \right) \circ \left( \partial_1 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1 \right)^{-1} (t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{A.65})$$

$$= {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{tr} \left[ \left( \partial_1 \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}} \circ {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi(t, \mathbf{X}) \right) \circ \partial_1 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi(t, \mathbf{X}) \circ \left( \partial_1 {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi_1 \right)^{-1} (t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{A.66})$$

$$= {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{tr} \left[ \partial_1 \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}} \circ {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} \phi(t, \mathbf{X}) \right] \quad (\text{A.67})$$

Des Weiteren sind in Abschnitt 2.5.1 Transporttheoreme lediglich als Resultate notiert. Zur Vervollständigung sei deshalb die ausführliche Herleitung für das klassische REYNOLDS-Transporttheorem

$$\underset{\mathcal{A}}{\partial_0} \int_{\substack{\mathcal{M} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_t = \phi_1^{-1}(t, \mathcal{A}_t)}} h(t, \mathbf{x}) = \underset{\mathcal{A}}{\partial_0} \int_{\substack{\mathcal{M} \\ \mathbf{X} \in \mathcal{A}_t}} {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \quad (\text{A.68})$$

(Transformation  $\mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{A}_t$ )

$$= \int_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_t} \underset{\mathcal{A}}{\partial_0} \left( {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\mathcal{A}_t \text{ zeitunabhängig}) \quad (\text{A.69})$$

$$= \int_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_t} \left( \underset{\mathcal{A}}{\partial_0} {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) + {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \underset{\mathcal{A},\mathcal{A}}{\partial_0} h(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\text{A.70})$$

(Kettenregel)

$$= \int_{\mathbf{X} \in \mathcal{A}_t} \left( {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \operatorname{Div}_{\mathcal{M}} \underset{\mathcal{A}}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) + {}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J(t, \mathbf{X}) \underset{\mathcal{A},\mathcal{A}}{\partial_0} h(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\text{A.71})$$

(Zeitableitung  ${}^{\mathcal{M},\mathcal{A}} J$ )

$$= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \operatorname{Div}_{\mathcal{M}} \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) h(t, \mathbf{x}) + \underset{\mathcal{A},\mathcal{M}}{\partial_0} h(t, \mathbf{x}) \right) \quad (\text{A.72})$$

(Rücktransformation)

$$= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \operatorname{Div}_{\mathcal{M}} \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) h(t, \mathbf{x}) + \underset{\mathcal{M},\mathcal{M}}{\partial_0} h(t, \mathbf{x}) + \underset{\mathcal{M}}{\partial_1} h(t, \mathbf{x}) \cdot \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) \right) \quad (\text{A.73})$$

(platzierungsabhängige Ableitung)

$$= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \left( \partial_0 h(t, \mathbf{x}) + \text{Div}_{\mathcal{M}} \left( h(t, \mathbf{x}) \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{x}) \right) \right) \quad (\text{A.74})$$

(Produktregel Divergenz)

$$= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} \partial_0 h(t, \mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{M}_t} h(t, \mathbf{x}) \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}A}{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{x}) \cdot \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.75})$$

(Integralsatz von GAUSS)

sowie das verallgemeinerte REYNOLDS-Transporttheorem

$$\partial_0 \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_t} h(t, \mathbf{x}) = \partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{R}_t} \overset{\mathcal{M}R}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h \circ \overset{\mathcal{M}R}{\phi}(t, \boldsymbol{\chi}) \quad (\text{A.76})$$

$$= \partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{R}_t} \overset{\mathcal{M}R}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h(t, \boldsymbol{\chi}) \quad (\text{Transformation } \mathcal{M}_t \rightarrow \mathcal{R}_t) \quad (\text{A.77})$$

$$= \partial_0 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}_t} \overset{\mathcal{M}R}{J}(t, \mathbf{X}) \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \quad (\text{Transformation } \mathcal{R}_t \rightarrow \mathcal{A}_t) \quad (\text{A.78})$$

$$= \int_{\mathcal{A}} \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\mathcal{A}_t \text{ zeitunabhängig}) \quad (\text{A.79})$$

$$= \int_{\mathcal{A}} \left( \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \right) \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) + \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \partial_0 \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\text{A.80})$$

(Produktregel)

$$= \int_{\mathcal{A}} \left( \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \right) \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \mathbf{X}) h(t, \mathbf{X}) \text{Div}_{\mathcal{R}} \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{X}) \right) \quad (\text{A.81})$$

(Zeitableitung von  $\overset{\mathcal{M}R}{J}$ )

$$= \int_{\mathcal{A}} \left( \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h(t, \boldsymbol{\chi}) \right) + \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h(t, \boldsymbol{\chi}) \text{Div}_{\mathcal{R}} \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}}(t, \boldsymbol{\chi}) \right) \quad (\text{A.82})$$

(Rücktransformation)

$$= \int_{\mathcal{A}} \partial_0 \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h(t, \boldsymbol{\chi}) \right) + \int_{\mathcal{A}} \left( \overset{\mathcal{M}R}{J} \overset{\mathcal{R}A}{J}(t, \boldsymbol{\chi}) h(t, \boldsymbol{\chi}) \overset{\mathcal{R}A}{\mathbf{v}}(t, \boldsymbol{\chi}) \cdot \underset{\mathcal{R}}{\mathbf{n}}(t, \boldsymbol{\chi}) \right) \quad (\text{A.83})$$

(Integralsatz von GAUSS).

wiedergegeben.

Abschließend seien noch die relativ aufwendigen Umformungen zur Massebilanz aus Abschnitt 2.5.3

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \right) + \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{c}} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.84})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{c}} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.85})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \underbrace{\text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right)}_{=0 \text{ (PIOLA-Identität)}} \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{c}} + \partial_1 \left( \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{c}} \right) \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) (t, \chi) \quad (\text{A.86})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \left( \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{c}} \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.87})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \overset{MA}{\mathbf{c}} \partial_1 \overset{MA}{\rho} + \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{c}} \right) (t, \chi) \quad (\text{A.88})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \overset{MA}{\mathbf{c}} \partial_1 \overset{MA}{\rho} + \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \left( \overset{MA}{\mathbf{v}} - \overset{MR}{\mathbf{v}} \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.89})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \overset{MA}{\mathbf{c}} \partial_1 \overset{MA}{\rho} + \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{v}} + \underbrace{\partial_0 \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} - \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \overset{MR}{\mathbf{v}}}_{=0 \text{ wg. Gl. (2.109)}} \right) (t, \chi) \quad (\text{A.90})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \overset{MA}{\mathbf{c}} \partial_1 \overset{MA}{\rho} + \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{v}} \right) (t, \chi) \quad (\text{A.91})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{MR}{J} \partial_0 \overset{MA}{\rho} + \overset{MR}{J} \overset{MA}{\mathbf{v}} \partial_1 \overset{MA}{\rho} + \overset{MA}{\rho} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \partial_1 \overset{MA}{\mathbf{v}} \right) (t, \chi) \quad (\text{A.92})$$

und zur Impulsbilanz aus Abschnitt 2.5.4

$$0 = \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \partial_0 \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{v}} \right) - \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{f}} + \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \left( \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{v}} \otimes \overset{MA}{\mathbf{c}} - \overset{MA}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.93})$$

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \partial_0 \overset{MA}{\mathbf{v}} + \partial_0 \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \right) \overset{MA}{\mathbf{v}} - \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{f}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \overset{MA}{\rho} \left( \overset{MA}{\mathbf{v}} \otimes \overset{MA}{\mathbf{c}} \right) \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) - \text{Div}_{\mathcal{R}} \left( \overset{MA}{\boldsymbol{\sigma}} \text{cof} \left[ \overset{MR}{\mathbf{F}} \right] \right) \right) (t, \chi) \quad (\text{A.94})$$

(jeweils Produktregel)

$$= \int_{\chi \in \mathcal{R}_t} \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \partial_0 \overset{MA}{\mathbf{v}} + \partial_0 \left( \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \right) \overset{MA}{\mathbf{v}} - \overset{MR}{J} \overset{MA}{\rho} \overset{MA}{\mathbf{f}} + \dots \right)$$



$$\dots + \underset{\mathcal{R}}{\mathbf{v}} \underset{\mathcal{R}}{\text{Div}} \left( \underset{\mathcal{R}}{\rho} \underset{\mathcal{R}}{\mathbf{c}} \underset{\mathcal{R}}{\text{cof}}[\underset{\mathcal{R}}{\mathbf{F}}] \right) + \underset{\mathcal{R}}{\rho} \left( \underset{\mathcal{R}}{\partial_1} \underset{\mathcal{R}}{\mathbf{v}} \right) \underset{\mathcal{R}}{\mathbf{c}} \underset{\mathcal{R}}{\text{cof}}[\underset{\mathcal{R}}{\mathbf{F}}] - \underset{\mathcal{R}}{\text{Div}} \left( \underset{\mathcal{M}}{\boldsymbol{\sigma}} \underset{\mathcal{R}}{\text{cof}}[\underset{\mathcal{R}}{\mathbf{F}}] \right) (t, \boldsymbol{\chi}) \quad (\text{A.95})$$

(Produktregel)

der Vollständigkeit halber aufgeführt.

### A.7 Zur Symmetrie von Tensoren

Um die Symmetrie eines Tensors zweiter Stufe zu charakterisieren, sei ein Tensor  $\mathbf{T}$  gewählt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\underline{t}, \mathbf{X}) : \mathcal{T}_x^* \mathcal{M}_t &\rightarrow \mathcal{T}_x \mathcal{M}_t \\ \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}} &\mapsto \mathbf{t}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{T}(t, \mathbf{x})[\underset{\mathcal{M}}{\mathbf{n}}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Dabei lässt sich der zu diesem Tensor duale Tensor  $\mathbf{T}^*$  als

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^*(\underline{t}, \mathbf{X}) : (\mathcal{T}_x^* \mathcal{M}_t)^* \cong \mathcal{T}_x \mathcal{M}_t &\rightarrow (\mathcal{T}_x \mathcal{M}_t)^* \cong \mathcal{T}_x^* \mathcal{M}_t \\ \mathbf{t} &\mapsto \mathbf{t} \circ \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

bestimmen. Für die Matrixdarstellungen beider Tensoren gilt

$$[\mathbf{T}^*] = [\mathbf{T}]^\top \quad . \quad (\text{A.98})$$

Mithilfe der RIESZ-Abbildung kann der duale Tensor auf den Ausgangsräumen beschrieben werden. Das Resultat wird als adjungierter Tensor

$$\mathbf{T}^+ = \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{R}}^{-1} \circ \mathbf{T}^* \circ \underset{\mathcal{M}}{\mathbf{R}}^{-1} \quad (\text{A.99})$$

bezeichnet. Da der adjungierte Tensor auf denselben Räumen wie der Ausgangstensor definiert ist, lassen sich die beiden Tensoren  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{T}^+$  direkt vergleichen. Ein Tensor, für den

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{T} \quad (\text{A.100})$$

gilt, wird symmetrisch genannt. Das kommutative Diagramm in Abb. A.3 veranschaulicht die Definition des dualen und des adjungierten Tensors.

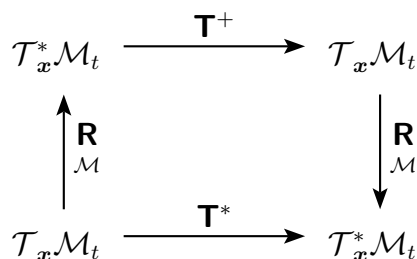


Abbildung A.3: Kommutatives Diagramm zur Symmetrie von Tensoren



## B Ergänzungen zum Verhalten eindimensionaler Kontinua mit nichtmateriellen Randbedingungen

### B.1 Überführen von inhomogenen in homogene Randbedingungen

Das inhomogene Anfangswert-Randwert-Problem mit homogenen Randbedingungen wird an dieser Stelle als gelöst vorausgesetzt. Die Lösung hierzu setzt sich aus der Lösung des homogenen und des inhomogenen Problems additiv zusammen

$$u(t, x) = u_{\text{hom}}(t, x) + u_{\text{inhom}}(t, x) \quad . \quad (\text{B.1})$$

Die inhomogenen Anfangsbedingungen seien

$$u(0, x) = \phi_1(x) \quad , \quad (\text{B.2})$$

$$\partial_0 u(0, x) = \phi_2(x) \quad (\text{B.3})$$

und die inhomogenen Randbedingungen seien (für einen Abstand der Randbedingungen der Länge  $l$ )

$$u(t, 0) = \mu_1(t) \quad , \quad (\text{B.4})$$

$$u(t, l) = \mu_2(t) \quad . \quad (\text{B.5})$$

Zur Lösung des allgemeinen Anfangswert-Randwert-Problems wird die neue Funktion  $\tilde{u}$  durch

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \left( \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \right) \quad (\text{B.6})$$

eingeführt. Daraus folgt für die Randbedingungen von  $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(t, 0) = u(t, 0) - \mu_1(t) = 0 \quad , \quad (\text{B.7})$$

$$\tilde{u}(t, l) = u(t, l) - \mu_2(t) = 0 \quad . \quad (\text{B.8})$$

Die zu  $\tilde{u}$  gehörenden Anfangsbedingungen sind

$$\tilde{u}(0, x) = \phi_1(x) - \left( \mu_1(0) + \frac{x}{l} (\mu_2(0) - \mu_1(0)) \right) =: \tilde{\phi}_1(x) \quad , \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_0 \tilde{u}(0, x) = \phi_2(x) - \left( \partial_0 \mu_1(0) + \frac{x}{l} (\partial_0 \mu_2(0) - \partial_0 \mu_1(0)) \right) =: \tilde{\phi}_2(x) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Durch die Substitution von  $u$  durch

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \left( \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \right) \quad (\text{B.11})$$

in der Ausgangsdifferentialgleichung entsteht eine in  $\tilde{u}$  formulierte Differentialgleichung mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen. Die Lösung des transformierten Problems lässt sich zurücktransformieren, wenn  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die entsprechenden Anforderungen an Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfüllen.

Analog lässt sich ein Problem transformieren, bei dem inhomogene Randbedingungen an zeitlich veränderlichen Stellen gestellt sind

$$u(l_1(t), 0) = \mu_1(t) \quad , \quad (\text{B.12})$$

$$u(t, l_2(t)) = \mu_2(t) \quad . \quad (\text{B.13})$$

Die Ersatzfunktion  $\tilde{u}$  lautet dann

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \frac{x - l_2(t)}{l_1(t) - l_2(t)} \mu_1(t) - \frac{x - l_1(t)}{l_2(t) - l_1(t)} \mu_2(t) \quad . \quad (\text{B.14})$$

## B.2 Einführung einer verallgemeinerten Zeitableitung

### B.2.1 Selbstadjungiertheit des Zeitableitungsoperators

In [PICARD 2009] wird ein verallgemeinerter Zeitableitungsoperator vorgestellt, der beschränkt invertierbar ist. Dieser Operator soll im Folgenden kurz erläutert und untersucht werden. Sei  $(L^2(\mathbb{R}), \langle \square, \square \rangle_{L^2})$  der HILBERT-Raum der quadratintegrierbaren, komplexwertigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  und  $(\mathring{C}_\infty(\mathbb{R}), \langle \square, \square \rangle_{L^2})$  der Raum der glatten, komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger, der dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt. Dann gilt für den auf  $\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})$  beschränkten Zeitableitungsoperator  $\partial_0|_{\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})}$

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \left\langle \frac{1}{i} \partial_0 \phi, \psi \right\rangle_{L^2} = \int_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{i} \partial_0 \phi(t) \right)^* \psi(t) \quad (\text{B.15})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} -\frac{1}{i} \partial_0 \phi^*(t) \psi(t) \quad . \quad (\text{B.16})$$

Mithilfe der partiellen Integration folgt hieraus

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \left\langle \frac{1}{i} \partial_0 \phi, \psi \right\rangle_{L^2} = \int_{t \in \mathbb{R}} \phi^*(t) \frac{1}{i} \partial_0 \psi(t) - \frac{1}{i} \phi^*(t) \psi(t) \Big|_{\mathbb{R}} \quad (\text{B.17})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \phi^*(t) \left( \frac{1}{i} \partial_0 \psi(t) \right) \quad (\text{B.18})$$

$$= \left\langle \partial_0 \phi, \frac{1}{i} \partial_0 \psi \right\rangle_{L^2} \quad , \quad (\text{B.19})$$

wobei Randterme aufgrund des als kompakt vorausgesetzten Trägers entfallen. Aus dieser Beziehung kann gefolgert werden, dass  $\partial_0|_{\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})}$  symmetrisch ist. Mit einem etwas aufwendigeren Beweis lässt sich sogar zeigen, dass die Aussage

$$\frac{1}{i} \partial_0 = \left( \frac{1}{i} \partial_0 \right)^* \quad (\text{B.20})$$

gültig ist, d. h. dass  $\partial_0|_{\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})}$  selbstadjungiert ist, vgl. [PICARD 2009].

### B.2.2 FOURIER-Transformation

Als Beispiel einer spektralen Zerlegung des Zeitableitungsoperators lässt sich die FOURIER-Transformation  $\mathcal{F}$  verstehen. Sie ist die stetige Fortsetzung der Abbildung

$$F : \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$\phi \mapsto \hat{\phi} \quad , \quad \text{mit} \quad \hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-ixt) \phi(t) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad . \quad (\text{B.21})$$

Aus dem Satz von PLANCHEREL folgt, dass die Abbildung  $F$  normerhaltend ist

$$\bigwedge_{\phi \in L^2(\mathbb{R})} \|F\phi\|_{L^2}^2 = \langle F\phi, F\phi \rangle_{L^2} \quad (\text{B.22})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{s \in \mathbb{R}} \exp(-ist)\phi(t) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \quad (\text{B.23})$$

$$= \|\phi\|_{L^2}^2 \quad . \quad (\text{B.24})$$

Da die stetige Fortsetzung von  $F$  ebenfalls normerhaltend ist, folgt dies auch für  $\mathcal{F}$ . Insbesondere ist die FOURIER-Transformation  $\mathcal{F}$  auch skalarprodukterhaltend

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})} \langle \mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} = \langle \phi, \psi \rangle_{L^2} \quad , \quad (\text{B.25})$$

da die Norm durch das Skalarprodukt induziert wird. Insbesondere gilt

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})} \langle \mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} = \langle \phi, \mathcal{F}^* \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} \quad . \quad (\text{B.26})$$

Um auf die Unitarität von  $\mathcal{F}$  zu schließen, fehlt noch eine Aussage über die Surjektivität von  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F}^*$ . Zu diesem Zweck ist es hilfreich zu klären, welche Form  $\mathcal{F}^*$  hat. Es gilt mit dem FOURIER-Inversionssatz<sup>118</sup>

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \langle \mathcal{F}\phi, \psi \rangle_{L^2} = \int_{t \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s \in \mathbb{R}} \exp(-ist)\phi(s) \right)^* \psi(t) \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{s \in \mathbb{R}} \exp(ist)\phi(s)^* \psi(t) \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(ist)\phi(s)^* \psi(t) \quad (\text{B.29})$$

$$= \int_{s \in \mathbb{R}} \phi(s)^* \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(ist)\psi(t) \right) \quad (\text{B.30})$$

$$= \langle \phi, \mathcal{F}^* \psi \rangle_{L^2} \quad (\text{B.31})$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \mathcal{F}^* \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(ixt)\psi(t) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad . \quad (\text{B.32})$$

Demzufolge sind die FOURIER-Transformation und ihre Adjungierte durch eine Skalierung miteinander verbunden

$$\mathcal{F} = \sigma_{(-1)} \mathcal{F}^* \quad . \quad (\text{B.33})$$

---

<sup>118</sup> Im Rahmen dieser Herleitung darf die Integrationsreihenfolge getauscht werden, da  $\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})$  sind und  $\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  ist.

Da  $\sigma_{(-1)}$  unitär ist, ist  $\mathcal{F}^*$  surjektiv und damit ist  $\mathcal{F}$  unitär

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1} \quad . \quad (\text{B.34})$$

Mithilfe der partiellen Integration folgt für die FOURIER-Transformierte des Zeitableitungsoperators

$$\mathcal{F}\partial_0 = im_0\mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i}\partial_0 = \mathcal{F}^*m_0\mathcal{F} \quad , \quad (\text{B.35})$$

was eine Spektraldarstellung des Operators  $(1/i)\partial_0$  ist, d.h. eine unitäre Transformation, so dass  $(1/i)\partial_0$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator ist.

### B.2.3 Definition der verallgemeinerten Zeitableitung

Eine Möglichkeit, auch nichtglatte Funktionen ableiten zu können, ergibt sich durch die Einführung eines HILBERT-Raumes mit gewichtetem Skalarprodukt. Durch die Vervollständigung von  $\mathring{C}_\infty(\mathbb{R})$  bezüglich des gewichteten Skalarproduktes  $\langle \square, \square \rangle_{\nu,0}$

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \langle \phi, \psi \rangle_{\nu,0} = \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) \phi(t)^* \psi(t) \quad (\text{B.36})$$

entsteht der gewichtete  $L^2$ -HILBERT-Raum  $H_{\nu,0}$  für ein gewähltes  $\nu \in \mathbb{R}$ . Die zugehörige Norm wird mit  $\|\square\|_{\nu,0}$  bezeichnet. Für den Fall  $\nu = 0$  entsteht auf diese Weise der HILBERT-Raum  $H_{0,0}$ , welcher dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen  $L^2$  entspricht. Um auch im gewichteten HILBERT-Raum eine spektrale Zerlegung des Ableitungsoperators zu finden, ist es zweckmäßig einen passenden Multiplikationsoperator zu definieren. Dazu wird die stetige Fortsetzung des Operators

$$\begin{aligned} \widetilde{\exp}(-\nu m_0) : \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}) \subseteq H_{\nu,0} &\rightarrow \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}) \subseteq H_{0,0} \subseteq L^2(\mathbb{R}) \\ \phi &\mapsto \widetilde{\exp}(-\nu m_0)\phi \quad , \\ &\text{mit } (\widetilde{\exp}(-\nu m_0)\phi)(x) = (\widetilde{\exp}(-\nu x)\phi)(x) \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

mit  $\exp(-\nu m_0)$  bezeichnet. Wie sich zeigen lässt, ist  $\exp(-\nu m_0)$  normerhaltend und surjektiv und damit unitär

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \langle \exp(-\nu m_0)\phi, \exp(-\nu m_0)\psi \rangle_{\nu,0} = \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) (\exp(-\nu t)\phi(t))^* \exp(-\nu t)\psi(t) \quad (\text{B.38})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) \exp(\nu t)\phi(t)^* \exp(-\nu t)\psi(t) \quad (\text{B.39})$$

$$= \langle \phi, \psi \rangle_{\nu,0} \quad , \quad (\text{B.40})$$

$$\bigwedge_{\phi, \psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \langle \exp(-\nu m_0)\phi, \psi \rangle_{\nu,0} = \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) (\exp(-\nu t)\phi(t))^* \psi(t) \quad (\text{B.41})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) \phi(t)^* \exp(\nu t) \psi(t) \quad (\text{B.42})$$

$$= \langle \phi, \exp(\nu m_0) \psi \rangle_{\nu,0} \quad (\text{B.43})$$

Demnach gilt die Beziehung

$$(\exp(-\nu m_0))^* = (\exp(-\nu m_0))^{-1} \quad (\text{B.44})$$

Mithilfe des neu eingeführten Multiplikationsoperators auf dem Raum  $H_{\nu,0}$  lässt sich ein zu  $(1/i) \partial_0$  unitär äquivalenter Operator finden

$$\frac{1}{i} \partial_\nu := \exp(\nu m_0) \frac{1}{i} \partial_0 \exp(-\nu m_0) \quad (\text{B.45})$$

der auf  $H_{\nu,0}$  definiert ist. Analog zu  $(1/i) \partial_0$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  lässt sich die Selbstadjungiertheit für  $(1/i) \partial_\nu$  auf  $H_{\nu,0}$  beweisen. Anschaulich kann diese auch aus der Selbstadjungiertheit von  $(1/i) \partial_0$  gefolgert werden

$$\left( \frac{1}{i} \partial_\nu \right)^* = \left( \exp(\nu m_0) \frac{1}{i} \partial_0 \exp(-\nu m_0) \right)^* \quad (\text{B.46})$$

$$= (\exp(-\nu m_0))^* \left( \frac{1}{i} \partial_0 \right)^* (\exp(\nu m_0))^* \quad (\text{B.47})$$

$$= \frac{1}{i} \partial_\nu \quad (\text{B.48})$$

Wie diese kurze Untersuchung (unter Verwendung der Produktregel) herausstellt

$$\bigwedge_{\phi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})} \partial_\nu = \exp(\nu m_0) \partial_0 \exp(-\nu m_0) \phi \quad (\text{B.49})$$

$$= \exp(\nu m_0) (-\nu) \exp(-\nu m_0) \phi + \exp(\nu m_0) \exp(-\nu m_0) \partial_0 \phi \quad (\text{B.50})$$

$$= -\nu \phi + \partial_0 \phi \quad (\text{B.51})$$

geht der Operator  $\partial_\nu$  trotz seiner bisher gezeigten Eigenschaften für glatte Funktionen (außer bei der Wahl von  $\nu = 0$ ) nicht in den Ableitungsoperator  $\partial_0$  über. Demzufolge wird als Ableitungsoperator auf dem Raum  $H_{\nu,0}$  der Operator

$$\partial_{\nu 0} := \partial_\nu + \nu \quad (\text{B.52})$$

gewählt und als verallgemeinerter Ableitungsoperator bezeichnet. Mithilfe des Distributivgesetzes kann gezeigt werden, dass dieser Operator normal ist

$$\partial_{\nu 0} (\partial_{\nu 0})^* = (\partial_\nu + \nu) (\partial_\nu + \nu)^* \quad (\text{B.53})$$

$$= (\partial_\nu + \nu) (-\partial_\nu + \nu) \quad (\text{B.54})$$

$$= (-\partial_\nu + \nu) (\partial_\nu + \nu) \quad (\text{B.55})$$

$$= (\partial_\nu + \nu)^* (\partial_\nu + \nu) \quad (\text{B.56})$$

$$= (\partial_{\nu 0})^* \partial_{\nu 0} \quad (\text{B.57})$$

dabei werden die Beziehungen

$$(\partial_\nu)^* = -\partial_\nu \quad (\text{B.58})$$

$$(\nu)^* = \nu \quad (\text{B.59})$$

verwendet sowie die Tatsache, dass  $\partial_\nu$  und  $\nu$  dicht definiert und stetig sind.

### B.2.4 Beschränktheit der Inversen der verallgemeinerten Zeitableitung

Für die Lösung von Problemen, bei denen der Zeitableitungsoperator zu invertieren ist, ist es entscheidend, ob die Inverse dieses Zeitableitungsoperators beschränkt ist. Um festzustellen, ob  $\partial_\nu^{-1}$  beschränkt ist, muss für die Operatornorm der Inversen der verallgemeinerten Zeitableitung

$$\|\partial_{\nu 0}^{-1}\| = \sup \left\{ \|\partial_0^{-1} f\|_{\nu, 0}^2 \mid f \in H_{\nu, 0}(0, 1) \right\} \quad (\text{B.60})$$

eine Abschätzung gefunden werden. Dafür ist zunächst die Frage zu beantworten, welche Form  $\partial_{\nu 0}^{-1}$  hat.

Sei dazu  $\nu > 0$  angenommen, dann gilt

$$(\partial_{\nu 0}^{-1})^* = (\partial_{\nu 0}^*)^{-1} \quad (\text{B.61})$$

$$= (-\partial_\nu + \nu)^{-1} \quad (\text{B.62})$$

$$= (-\partial_0 + 2\nu)^{-1} \quad (\text{B.63})$$

Für ein  $\psi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R})$  entsteht hieraus die Differentialgleichung

$$-\partial_0 \mu + 2\nu \mu = \psi \quad (\text{B.64})$$

Mit dem Ansatz (Variation der Konstanten)

$$\mu(t) = C(t) \exp(2\nu t) \quad (\text{B.65})$$

folgt für die Konstante  $C$

$$C(t) = - \int_{\tau \in [t_0, t]} \exp(-2\nu \tau) \psi(\tau) \quad (\text{B.66})$$

und damit für die Lösung

$$\mu_{t_0}(t) = (\partial_{\nu 0}^{-1})^* \psi(\tau) = - \exp(2\nu t) \int_{\tau \in [t_0, t]} \exp(-2\nu \tau) \psi(\tau) \quad (\text{B.67})$$

was schon eine Idee der gesuchten Inversen vermittelt. Damit die gefundene Lösung für  $\mu$  Sinn hat, muss gelten

$$\mu_{t_0} \in H_{\nu, 0} \quad \Rightarrow \quad \|\mu_{t_0}\|_{\nu, 0} < \infty \quad (\text{B.68})$$

Dementsprechend ist ein  $t_0 \in \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gesucht, so dass  $\mu_{t_0}$  die angegebene Bedingung erfüllt. Eine erste Abschätzung für die Norm von  $\mu_{t_0}$  führt nach längerer Rechnung zu

$$\|\mu_{t_0}\|_{\nu, 0} \leq \int_{s \in \mathbb{R}} \left\| \frac{1 - \exp(-2\nu(t_0 - s))}{(2\nu)^2} \right\|_{\mathbb{R}} \exp(-2\nu s) \|\psi(s)\|_{\mathbb{R}}^2 \quad (\text{B.69})$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung ist beschränkt, wenn (für  $\nu > 0$ )

$$s \mapsto \left\| \frac{1 - \exp(-2\nu(t_0 - s))}{(2\nu)^2} \right\|_{\mathbb{R}} \quad (\text{B.70})$$



beschränkt ist. Dies gilt für

$$t_0 = \infty \tag{B.71}$$

und daraus folgt

$$\|\mu_{t_0}\|_{\nu,0} \leq \frac{1}{2\nu} \|\psi(s)\|_{\nu,0}^2 \tag{B.72}$$

Als Zwischenlösung lässt sich demnach die Adjungierte der gesuchten Inversen zu

$$\mu_\infty(t) = (\partial_{\nu 0}^{-1})^* \psi(\tau) = \exp(2\nu t) \int_{\tau \in [t, \infty)} \exp(-2\nu \tau) \psi(\tau) \tag{B.73}$$

angeben. Aus der Definition der Adjungierten und der (hier nur verkürzt wiedergegebenen) Rechnung

$$\langle \partial_{\nu 0}^{-1} \mu, \psi \rangle_{\nu,0} = \langle \mu, (\partial_{\nu 0}^{-1})^* \psi \rangle_{\nu,0} \tag{B.74}$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \left( \exp(-2\nu t) \mu(t)^* \exp(2\nu t) \int_{\tau \in [t, \infty)} \exp(-2\nu \tau) \psi(\tau) \right) \tag{B.75}$$

$$= \int_{\tau \in \mathbb{R}} \left( \exp(-2\nu \tau) \left( \int_{t \in (-\infty, \tau]} \mu(t)^* \right) \psi(\tau) \right) \tag{B.76}$$

lässt sich die Inverse des verallgemeinerten Zeitableitungsoperators als

$$(\partial_{\nu 0}^{-1} \mu)(t) = \int_{\tau \in (-\infty, t]} \mu(\tau) \tag{B.77}$$

ablesen. Als obere Abschätzung kann demnach für  $\nu \neq 0$  (nach relativ aufwendiger Rechnung, vgl. Abschnitt B.3)

$$\bigwedge_{\phi \in H_{\nu,0}} \|\partial_{\nu 0}^{-1} \phi\|_{\nu,0}^2 = \frac{1}{\nu^2} \|\phi\|_{\nu,0}^2 \Rightarrow \|\partial_{\nu 0}^{-1}\| = \frac{1}{\|\nu\|_{\mathbb{R}}} \tag{B.78}$$

angegeben werden.

Aus dieser Operatornorm des verallgemeinerten Zeitableitungsoperators lässt sich für global LIPSCHITZ-stetige Funktionen<sup>119</sup> ein sehr günstiges Verhalten bei der numerischen Invertierung der verallgemeinerten Zeitableitung feststellen. Denn es lässt sich zeigen, dass für ein ausreichend groß gewähltes  $\nu$  nach dem BANACH-Fixpunktsatz stets eine konvergierende, numerische Lösung vorhanden ist, deren Fehler sich sogar a priori abschätzen lässt.

<sup>119</sup> Diese Funktionen werden auch als dehnungsbeschränkt bezeichnet.

### B.2.5 Beispiele zur verallgemeinerten Zeitableitung

In einem kurzen Beispiel wird die verallgemeinerte Zeitableitung exemplarisch für die Funktion

$$\phi(t) = \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(t)t \quad (\text{B.79})$$

bestimmt. Diese Funktion ist im üblichen Sinne nichtdifferenzierbar, da sie an der Stelle  $t = 0$  einen Knick besitzt. Im Sinne der verallgemeinerten Zeitableitung kann jedoch eine Ableitung gefunden werden. Für eine Beispielfunktion  $\psi \in \dot{C}_{\infty}(\mathbb{R})$  lässt sich unter Verwendung der partiellen Integration

$$\langle \partial_{\nu 0} \phi, \psi \rangle_{\nu, 0} = \langle \phi, \partial_{\nu 0}^* \psi \rangle_{\nu, 0} \quad (\text{B.80})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) \phi(t)^* (-\partial_0 \psi(t) + 2\nu \psi(t)) \quad (\text{B.81})$$

$$= \int_{t \in [0, \infty)} \exp(-2\nu t) t (-\partial_0 \psi(t) + 2\nu \psi(t)) \quad (\text{B.82})$$

$$= \int_{t \in [0, \infty)} \exp(-2\nu t) \psi(t) + t (-\psi(t)) \Big|_0^{\infty} \quad (\text{B.83})$$

$$= \int_{t \in \mathbb{R}} \exp(-2\nu t) \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(t) \psi(t) \quad (\text{B.84})$$

$$= \langle \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \psi \rangle_{\nu, 0} \quad (\text{B.85})$$

zeigen. Damit ergibt sich für die verallgemeinerte Ableitung der Funktion  $\phi$

$$\partial_{\nu 0} \phi = \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \quad . \quad (\text{B.86})$$

Eine weitere Besonderheit der verallgemeinerten Zeitableitung ist, dass ihre Inverse stets eindeutig existiert. Um dieses Verhalten näher zu erläutern, sei beispielsweise

$$\phi := \partial_0 f(t) = \chi_{[1,3]}(t) = \begin{cases} 1 & , x \in [1, 3] \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus [1, 3] \end{cases} \quad (\text{B.87})$$

gegeben. Durch die Erkenntnisse des vorangegangenen Beispiels kann eine Vermutung für die Lösung angestellt werden

$$f(t) = \begin{cases} 0 + C & , x \in (-\infty, 1) \\ t - 1 + C & , x \in [1, 3] \\ 2 + C & , x \in (3, \infty) \end{cases} \quad , \quad (\text{B.88})$$

die abgeleitet wieder  $\phi$  ergibt. Damit  $f$  jedoch auch im gesuchten Lösungsraum liegt, muss die Quadratintegrabilität sichergestellt werden. Dies bedeutet, dass der Ausdruck

$$\|f\|_{\nu, 0}^2 = \int_{t \in (-\infty, 1)} \exp(-2\nu t) (0 + C)^2 + \int_{t \in [1, 3]} \exp(-2\nu t) (t - 1 + C)^2 + \int_{t \in (3, \infty)} \exp(-2\nu t) (2 + C)^2 \quad (\text{B.89})$$

beschränkt sein muss. Daraus ergibt sich die noch nicht bestimmte Konstante  $C$  für  $\nu > 0$  zu

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 1) \\ t - 1 & , x \in [1, 3] \\ 2 & , x \in (3, \infty) \end{cases} \quad (\text{B.90})$$

und für  $\nu < 0$  zu

$$C = -2 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \begin{cases} -2 & , x \in (-\infty, 1) \\ t - 3 & , x \in [1, 3] \\ 0 & , x \in (3, \infty) \end{cases} . \quad (\text{B.91})$$

### B.3 Abschätzung zur Hilfslösung beim Integrationsansatz

In Abschnitt 3.3.2 wird eine Abschätzung für eine Funktion benötigt, die aus der Invertierung des verallgemeinerten Zeitableitungsoperators entsteht. Aus Platzgründen wird diese Herleitung an dieser Stelle ausführlich dargestellt

$$\|w\|_{\nu,0}^2 = \int_{\bar{r} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \|w(\bar{t}, \bar{r})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu\bar{t}) \quad (\text{B.92})$$

$$= \int_{\bar{r} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \left\| \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} h(\bar{s}, r - A(\bar{s}) + A(\bar{t})) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu\bar{t}) \quad (\text{B.93})$$

$$= \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \left\| \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} h(\bar{s}, \bar{z}) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu\bar{t}) \quad (\text{Substitution}) \quad (\text{B.94})$$

$$\leq \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} \|h(\bar{s}, \bar{z})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\nu\bar{t}) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (\text{B.95})$$

$$\leq \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} \left\| \exp(-\frac{\nu}{2}\bar{s}) \exp(\frac{\nu}{2}\bar{s}) h(\bar{s}, \bar{z}) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\nu\bar{t}) \quad (\text{Erweiterung}) \quad (\text{B.96})$$

$$\leq \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} \left\| \exp(-\frac{\nu}{2}\bar{s}) h(\bar{s}, \bar{z}) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(\nu\bar{s}) \exp(-\nu\bar{t}) \quad (\text{B.97})$$

$$\leq \frac{1}{\nu} \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} \left\| \exp(-\frac{\nu}{2}\bar{s}) h(\bar{s}, \bar{z}) \right\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\nu\bar{t}) \quad (\text{B.98})$$

(CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung)

$$\leq \frac{1}{\nu} \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in (-\infty, \bar{t}]} \|h(\bar{s}, \bar{z})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\frac{\nu}{2}\bar{s}) \exp(-\nu\bar{t}) \quad (\text{B.99})$$

$$\leq \frac{1}{\nu} \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{t} \in (\bar{s}, \infty]} \|h(\bar{s}, \bar{z})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\nu \bar{s}) \exp(-\nu \bar{t}) \quad (\text{B.100})$$

(Tausch der Integrationsreihenfolge)

$$\leq \frac{1}{\nu^2} \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in \mathbb{R}} \|h(\bar{s}, \bar{z})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-\nu \bar{s}) \exp(-\nu \bar{s}) \quad (\text{Integration}) \quad (\text{B.101})$$

$$\leq \frac{1}{\nu^2} \int_{\bar{z} \in \mathbb{R}} \int_{\bar{s} \in \mathbb{R}} \|h(\bar{s}, \bar{z})\|_{\mathbb{R}}^2 \exp(-2\nu \bar{s}) \quad (\text{B.102})$$

$$\leq \frac{1}{\nu^2} \|h\|_{\nu, 0}^2 \quad . \quad (\text{B.103})$$

Abbildung B.1 zeigt schematisch wie in Gl. (B.100) bei obiger Herleitung die Integrationsreihenfolge vertauscht wird.

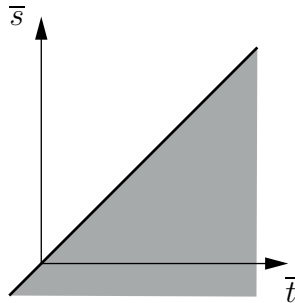


Abbildung B.1: Schaubild zum Vertauschen der Integrationsreihenfolge (zu integrierender Bereich grau hinterlegt)

#### B.4 Besondere Eigenschaften der DIRAC-Distribution

Es gelten für die DIRAC-Distribution  $\delta$  per definitionem folgende Zusammenhänge

$$\langle \delta, \delta \rangle_{L_2} = 1 \quad , \quad (\text{B.104})$$

$$\bigwedge_{\phi \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \langle \delta, \phi \rangle_{L_2} = \phi(0) \quad . \quad (\text{B.105})$$

$$(\text{B.106})$$

Umgekehrt kann die DIRAC-Distribution als eine Art Ableitung der charakteristischen Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.107})$$

interpretiert werden, d. h. es gilt

$$\partial_0 \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \delta \quad . \quad (\text{B.108})$$

Anschaulich kann die DIRAC-Distribution über die stetig differenzierbare Folge von Glockenfunktionen beschrieben werden.

$$\delta_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right) \quad , \quad (\text{B.109})$$

wobei im Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Eigenschaften der DIRAC-Distribution erhalten werden. Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \delta_\varepsilon(x) = 0 \quad . \quad (\text{B.110})$$

Mithilfe dieser Funktionenfolge lässt sich unter Anwendung der partiellen Integration zeigen, wie sich die DIRAC-Distribution bei einer Integration über einen Teilbereich der reellen Zahlen verhält

$$\bigwedge_{\alpha < 0} \bigwedge_{s \neq 0} \int_{\bar{r} \in [\alpha, s]} (\partial_0 \delta_\varepsilon \otimes \phi)(\bar{r}, \bar{r}) = \int_{\bar{r} \in [\alpha, s]} \partial_0 \delta_\varepsilon(\bar{r}) \phi(\bar{r}) \quad (\text{B.111})$$

$$= \delta_\varepsilon(\bar{r}) \phi(\bar{r}) \Big|_{\bar{r}=\alpha}^{\bar{r}=s} - \int_{\bar{r} \in [\alpha, s]} \delta_\varepsilon(\bar{r}) \partial_0 \phi(\bar{r}) \quad (\text{B.112})$$

$$\rightarrow \delta_\varepsilon(s) \phi(s) - \chi_{\mathbb{R}_{>0}}(s) \partial_0 \phi(0) \quad \text{für } \alpha \rightarrow -\infty \quad (\text{B.113})$$

$$\rightarrow -\partial_0 \phi(0) \quad \text{für } s \rightarrow \infty \quad . \quad (\text{B.114})$$

Demzufolge gilt für die Ableitung der DIRAC-Distribution

$$\bigwedge_{\phi \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \langle \partial_0 \delta, \phi \rangle_{L_2} = - \langle \phi, \partial_0 \delta \rangle_{L_2} = -\partial_0 \phi(0) \quad . \quad (\text{B.115})$$

### B.5 Bestimmung einer Stammfunktion zu $x \sin(ax) \sin(bx)$

In Abschnitt 4.2.1 wird eine Stammfunktion zur Funktion

$$g(x) = x \sin(ax) \sin(bx) \quad (\text{B.116})$$

benötigt. Da übliche Nachschlagewerke das zugehörige unbestimmte Integral nicht enthalten, wird es aus einer anderen Stammfunktion ermittelt. In [BRONSTEIN et al. 2008, S. 1074] kann hierfür die Stammfunktion zur Funktion

$$f(x) = \sin(ax) \sin(bx) \quad (\text{B.117})$$

als

$$F(x) = \int_x \sin(ax) \sin(bx) = \begin{cases} \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} & , \|a\|_{\mathbb{R}} \neq \|b\|_{\mathbb{R}} \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.118})$$

gefunden werden. Mithilfe dieser Stammfunktion und der Anwendung der Regel der partiellen Integration kann die gesuchte Stammfunktion für  $a, b \geq 0$  als

$$G(x) = \int_x x \sin(ax) \sin(bx) \quad (\text{B.119})$$

$$= xF(x) - \int_x F(x) \quad (\text{B.120})$$

$$= \begin{cases} x \left( \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} \right) + \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)^2} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)^2} & , a \neq b \\ x \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \right) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8a^2} \cos(2ax) & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.121})$$

formuliert werden. Nach der bestimmten Integration auf dem Intervall  $[0, \pi]$  und der Annahme, dass  $a, b \in \mathbb{N}$  gilt, ergibt sich

$$G(\pi) - G(0) = \int_{x \in [0, \pi]} x \sin(ax) \sin(bx) \quad (\text{B.122})$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos((a-b)\pi)}{2(a-b)^2} - \frac{\cos((a+b)\pi)}{2(a+b)^2} - \frac{1}{2(a-b)^2} + \frac{1}{2(a+b)^2} & , a \neq b \\ \frac{1}{4}\pi^2 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.123})$$

$$= \begin{cases} 0 & , (a \neq b) \wedge ((a+b) \bmod 2 = 0) \\ -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} & , (a \neq b) \wedge ((a+b) \bmod 2 \neq 0) \\ \frac{1}{4}\pi^2 & , \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad (\text{B.124})$$

was in Gl. (4.39) Anwendung findet.



In der vorliegenden Arbeit werden kontinuumsmechanische Probleme mit nichtmateriellen Randbedingungen untersucht. Randbedingungen gelten dabei als nichtmateriell, wenn sie im Zeitverlauf nicht ein und demselben materiellen Punkt zugeordnet werden können. Die Erweiterung der klassischen kontinuumsmechanischen Feldgleichungen um solche Randbedingungen erfolgt unter Anwendung einer Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik. Hierbei wird eine Notation entwickelt, bei der Feldgrößen und Operatoren ihre jeweilige Platzierung eindeutig zugeordnet wird. Insbesondere in Hinblick auf eine konsistente Darstellung von Ableitungsoperatoren werden die Vorteile dieser Schreibweise dargelegt.

Zur Ermittlung und Untersuchung (semi-)analytischer Lösungen dienen Beispiele eindimensionaler Kontinua, die sich zwei unterschiedlichen Problemklassen zuordnen lassen. In der ersten Problemklasse gelingen analytische Lösungen mit Hilfe eines Integrations- und eines Separationsansatzes für das Modell einer axial unbewegten, schwingenden Saite. Als nichtmaterielle Randbedingungen werden dabei die transversalen Verschiebungen an zwei zeitabhängigen Positionen zu null vorgeschrieben. In der zweiten Problemklasse sind eine Saite sowie ein Seil, die einer vorgegebenen axialen Führungsbewegung unterliegen, Gegenstand der Untersuchung. In diesem Fall sind die zwei vorgegebenen, räumlich festen Verschiebungsrandbedingungen nichtmateriell. Es finden (semi-)analytische Verfahren Anwendung. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den Randbedingungen und dem jeweils betrachteten Kontinuum wird dabei als beliebig zeitabhängig angenommen. Eine experimentelle Studie zum Schwingungsverhalten eines Monochords mit nichtmateriellen Randbedingungen vervollständigt die Analyse eindimensionaler Kontinua.

Aus den ermittelten (semi-)analytischen Lösungen werden Rückschlüsse auf das Transformationsverhalten der Bewegungsgleichungen dreidimensionaler Kontinua gezogen. Damit sind die entwickelten Methoden in vielen technischen Anwendungen einsetzbar. Als ein wirtschaftlich bedeutendes Beispiel ist die Schwingungsanalyse axial bewegter Papierbahnen in Papierproduktionsmaschinen zu nennen.