Beiträge zur expliziten Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz

Dem Wissenschaftlichen Rat
der Hochschule für Verkehrswesen "Friedrich List" Dresden
zur Erlangung des akademischen Grades eines

doctor scientiae naturalium
(Dr. sc. nat.)

vorgelegte Dissertationsschrift

von Dr.rer.nat. Ludwig Paditz, geb. am 18.09.1951 in Meißen

Tag der Einreichung: 1. Juni 1988

Vorsitzender der Prüfungskommission: o.Prof. Dr.sc.techn. K. Wächter
Dekan

Gutachter: o.Prof. Dr.sc.nat. W. Wolf,
Technische Universität Dresden

o.Prof. Dr. d. phys.-math. Wiss. A.V. Nagaev,
AdW d. Usbek. SSR, Taschkent

o.Prof. Dr.rer.nat.habil. H.-J. Roßberg,
Karl-Marx-Universität Leipzig

o.Prof. Dr.sc.nat. K. Ludwig,
HfV "Friedrich List" Dresden

Genehmigt | ~~nicht genehmigt~~

Vertraulichkeitsgrad: keiner

Tag der öffentlichen Verteidigung: 27. April 1989

Paditz, Ludwig

Beiträge zur expliziten Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. – 1988. – S. I – VII, S. 1 – 160. – Dresden, Hochschule für Verkehrswesen "Friedrich List", Fakultät für Technik und Naturwissenschaften, Dissertation B

In der Arbeit wird das asymptotische Verhalten von geeignet normierten und zentrierten Summen von Zufallsgrößen untersucht, die entweder unabhängig sind oder im Falle der Abhängigkeit als Martingaldifferenzfolge bzw. stark multiplikatives System auftreten.
Neben der klassischen Summationstheorie werden die Limitierungsverfahren mit einer unendlichen Summationsmatrix oder einer angepaßten Folge von Gewichtsfunktionen betrachtet.
Es werden die Methode der charakteristischen Funktionen und besonders die direkte Methode der konjugierten Verteilungsfunktionen weiterentwickelt, um quantitative Aussagen über gleichmäßige und ungleichmäßige Restgliedabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz zu beweisen.
Die Untersuchungen werden dabei in der L_p – Metrik, $1 \leq p \leq \infty$, durchgeführt, wobei der Fall $p = \infty$ der üblichen sup-Norm entspricht.
Darüber hinaus wird im Fall unabhängiger Zufallsgrößen der lokale Grenzwertsatz für Dichten betrachtet.
Die Arbeit wird abgerundet durch verschiedene Hinweise auf praktische Anwendungen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Bezeichnungen, die nur innerhalb eines Beweises oder Abschnittes benutzt werden und dort erklärt sind, wurden nicht in dieses Verzeichnis aufgenommen.

(X_k)	...	Folge von Zufallsgrößen ($k=1,2,\ldots$ oder $k=0,1,2,\ldots$)
(X_{nk})	...	Serienschema ($k=1,2,\ldots,k_n$ und $n=1,2,\ldots$)
$X_{k:n}$	...	k – te Ordnungsstatistik zur Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$
$\bar{\xi}_k$	...	abgeschnittene Zufallsgröße, s. (0.24)
ξ_k^*	...	"konjugierte" Zufallsgröße zu $\bar{\xi}_k$, s. (0.24)
S_n	...	Summe von Zufallsgrößen (Serienschema), s. S. 14, oder gewichtete Summe, s. S. 89, oder Summe (normiert) von Zufallselementen, s. S. 127
S_n^*	...	Summe von konjugierten Zufallsgrößen, s. (0.24)
S_N	...	gewichtete Summe ("Reihenentwicklung"), s. S. 105
S_{N_n}	...	Summe mit zufälligem Index N_n, s. Abschnitt 3.1.3
S	...	gewichtete Summe (unendliche Reihe), s. Abschnitt 6.2
Z_{vk}	...	gewichtete Zufallsgröße (normiert), s. S. 92
Z_v	...	normierte gewichtete Summe, s. S. 10
$\mathbf{1}\{A\}$	...	Indikatorfunktion für das Ereignis A
$\Phi(x)$	...	$N(0,1)$ – Verteilungsfunktion
$\Phi_\eta(x)$	...	quasigaußsche Verteilungsfunktion (Mischverteilung), s. S. 102, 103
$\varphi(x)$	...	$N(0,1)$ – Dichtefunktion
$g(t)$	...	charakteristische Funktion einer $N(0,1)$–Verteilung
$F_n(xB_n)$	...	normierte Verteilungsfunktion, s. S. 1
$F_v(xB_v)$	...	normierte Verteilungsfunktion, s. S. 10
$F_n^y(xB_n)$	...	Verteilungsfunktion (abgeschnittene Zufallsgrößen), s. (2.9)
$G_n(y)$	...	Summe von Restwahrscheinlichkeiten, s. S. 12
$f_n(t)$	...	charakteristische Funktion (Serienschema), s. S. 14
$f_v(t)$	...	charakteristische Funktion, s. S. 10
$f_N(t)$	...	charakteristische Funktion, s. Satz 1.16
$p_v(x)$	...	Dichtefunktion, s. S. 10
$\delta_v(-\Phi)(x)$	.	Entwicklungsglieder einer asymptotischen Entwicklung, s. (0.12)

$\delta_v^*(-\Phi)(x)$ ... Entwicklungsglieder einer asymptotischen Entwicklung, s. (0.13)

$\pi_v(t)$ ... Entwicklungsglieder einer asymptotischen Entwicklung, s. (0.14)

$w_v(t)$ ... Differenz von charakteristischen Funktionen (mit Entwicklungsgliedern), s. (0.20)

$w(s)$ ... Differenz von charakteristischen Funktionen, s. (1.1)

B_n^2 ... Gesamtstreuung von n Summanden, s. S. 1

B_v^2 ... Gesamtstreuung bei gewichteter Summation, s. S. 10, (3.11) oder (1.46) (bedingte Varianzen)

B_N^2 ... Gesamtstreuung bei gewichteter Summation, s. (1.51)

η_v^2 ... zufällige (bedingte) Gesamtstreuung, s. (3.19)

$(\bar{B}_n)^2$ ... modifizierte Gesamtstreuung, s. S. 139

$D_n(x)$ ... Restglied bei Normalapproximation, s. S. 1

$D_{n\delta p}$ ... Restglied bei Normalapproximation (gewichtete L_p-Metrik) s. (0.7) oder (0.17)

d_n, $d_n^{(m)}$, $D_n^{(m)}$ spezielle Restglieder, s. Abschnitt 6.1

$\Delta_{v\infty}$ ... Restglied (sup-Norm), s. (0.8)

Δ_{vp} ... Restglied (L_p-Norm), s. (0.9)

Δ_{np} ... Restglied (L_p-Norm), s. S. 105

δ_v ... Restglied (Dichten), s. (0.10)

$(\alpha_k(v))$ ... Folge von Gewichtsfunktionen, s. S. 10

(λ_{Nk}) ... Gewichtskoeffizienten (unendliche Summationsmatrix), s. S. 42

$\lambda_N = B_N^{-1}\sup\limits_k(|\lambda_{Nk}|\sqrt{EX_k^2})$ spezielle Charakteristik, s. S. 42

$\rho_v = B_v^{-1}\sup\limits_k(|\alpha_k(v)|\sqrt{E(X_k^2|X_{k-1}, \ldots, X_o)})$ spezielle Charakteristik, (nur bei Martingaldifferenzen), s. S. 41

$\rho_v = B_v^{-4}\sum\limits_k (EX_k^2)^2\alpha_k^4$ spezielle Momentcharakteristik, (nur bei unabhängigen Zufallsgrößen), s. S. 23

$\rho_n^* = (\bar{B}_n)^{-4}\sum\limits_k (EX_k^2)^2$ spezielle Momentcharakteristik, s. S. 139

a_n ... Summe der abgeschnittenen 1. Momente (Restmomente), s. S. 14

b_n^2 ... Summe der abgeschnittenen 2. Momente, s. S. 14

b_n^* ... Reststreuungen, s. S. 17

c_n	...	Summe der abgeschnittenen 3. Momente, s. S. 14
b_v^*	...	Reststreuungen, s. S. 21
c_v	...	Summe der abgeschnittenen 3. Momente, s. S. 21
$\mathfrak{A}$	...	System von Teilmengen (BOREL-Mengen) der reellen Achse, s. S. 23
$L_v(\mathfrak{A})$	...	Summe der abgeschnittenen 4. Momente, s. S. 23
$\tau_v^2(\gamma)$, ψ_v	.	spezielle Momentcharakteristika, s. S. 24
$L_{2+\delta,n}$	...	LJAPUNOV-Bruch der Ordnung $2+\delta$, s. S. 45
$L_{g,n}$	...	verallgemeinerter LJAPUNOV-Bruch, s. (7.1)
$\overline{L}_{3,n}$	...	modifizierter LJAPUNOV-Bruch, s. S. 139
$L'_{3,n}$	...	modifizierter LJAPUNOV-Bruch, s. S. 139
$L_n(u)$	...	LINDEBERG'sche Funktion, s. (3.9) und (3.10)
$\chi_n(u)$	...	modifizierte LINDEBERG'sche Funktion, s. (3.4)
(A_{nk})	...	Teilmengen (BOREL-Mengen) der reellen Achse, s. S. 14
(A_k)	...	Teilmengen (BOREL-Mengen) der reellen Achse, s. (3.5)
A_1, A_2, A_3		spezielle Zerlegung der reellen Achse, s. (2.6), (2.22)
$c_{n,\delta,a,\beta}(x)$		Schranke zur Festlegung von x-Zonen, s. (2.5)
τ_n	...	Stoppzeit (zufälliger Summationsindex), s. S. 103

0. Einleitung

0.1 Zur Entwicklung der klassischen Summationstheorie

Die Summationstheorie nimmt unter den verschiedenartigsten Forschungsrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie einen bedeutenden Platz ein und ist in unserer heutigen Zeit nicht mehr allein von theoretischem Interesse. Anwendungen z.B. in der mathematischen Statistik, der statistischen Physik, der statistischen Mechanik, der Informations- und Zuverlässigkeitstheorie und Nachrichtentechnik unterstreichen die Notwendigkeit der Untersuchung von Summationsprozessen, um im Fall der Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes mit der gut handhabbaren Normalverteilung näherungsweise rechnen zu können.
Wie es seine Bezeichnung schon andeutet, hat der zentrale Grenzwertsatz unumstritten seine "eindeutige Position im Herzen der Wahrscheinlichkeitstheorie" (vgl. HALL(1982)). Jedoch aus sich selbst heraus die große Bedeutung und Wichtigkeit zu erklären, die diesem mathematischen Resultat zukommt, ist hier völlig unzureichend, da es heute schon viele Anwendungen (s.o.) des zentralen Grenzwertsatzes auch außerhalb der Mathematik gibt. Deshalb charakterisiert ADAMS(1974) in der Einleitung zu seinem Buch den zentralen Grenzwertsatz als "one of the most remarkable results in all of mathematics" und als "a dominating personality in the world of probability and statistics".
Ausgehend von der Notwendigkeit der Untersuchung von Summationsprozessen mit Normalapproximation entsteht unwillkürlich die Frage nach qualitativ wie auch quantitativ brauchbaren Fehlerabschätzungen, um die Güte der Approximation mit der Normalverteilung zu analysieren. Das große Interesse gilt dabei insbesondere der Normalapproximation von Summen unabhängiger Zufallsgrößen:
Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $EX_k=0$ und $EX_k^2<\infty$ für alle k. Mit den Bezeichnungen $B_n^2=\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 \in (0,\infty)$, $F_n(x)=P(X_1+X_2+\ldots+X_n<x)$,

$D_n(x)=F_n(xB_n)-\phi(x)$, wobei $\phi(x)=(2\pi)^{-0.5}\int_{-\infty}^{x}\exp(-0.5u^2)du$ ist, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen $D_n(x)$ gleichmäßig für alle reellen Zahlen x gegen Null strebt.
Erste Untersuchungen zu dieser Problematik wurden bereits im 18. Jahrhundert und zu Anfang des 19. Jahrhunderts von J.BERNOULLI(1713), DE MOIVRE(1730) und LAPLACE(1812), sowie GAUß (Fehlerrechnung für eine große Anzahl kleiner, unabhängiger Summanden) durchgeführt.
Die Herausbildung der Summationstheorie ist verbunden mit den Namen bedeutender Mathematiker wie POISSON(1837), ČEBYŠEV(1890), LJAPUNOV

(1901), LINDEBERG(1922), BERNŠTEJN(1926), CRAMER(1928,1937,1938), KOLMOGOROV(1931–1933), FELLER(1935), LEVY(1937), CHINČIN(1937,1938) und GNEDENKO(1939).

Nachdem die grundlegenden Fragen der klassischen Summationstheorie weitgehend gelöst waren, setzte darauf aufbauend seit den vierziger Jahren eine breite Entwicklung ein.

Besonders hervorzuheben ist dabei die sowjetische Schule, die einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Summationstheorie leistete, die auch heute über führende Wissenschaftler auf diesem Gebiet verfügt und einen großen Anteil daran hat, daß sich dieser wichtige Zweig der Wahrscheinlichkeitstheorie auch in der DDR gut entwickeln konnte.

Auskunft über den aktuellen Entwicklungsstand geben z.B. die internationalen Konferenzen über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik, die im 4-Jahres-Rhythmus in Vilnius (die V. Konf. 1989) durchgeführt werden.

Kommen wir zurück zur oben aufgeworfenen Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz von $D_n(x)$ gegen Null (für $n \to \infty$). In den Arbeiten von BERRY(1941) und ESSEEN(1942,1945) wurden die nach ihnen benannten Ungleichungen bewiesen, die eine Abschätzung für die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz angeben.

Mittels FOURIER-analytischer Hilfsmittel (Methode der charakteristischen Funktionen) zeigte ESSEEN(1945) folgende Aussage:

Wenn die einzelnen Zufallsgrößen endliche absolute Momente dritter Ordnung besitzen, d.h. $E|X_k|^3 < \infty$, $k=1,2,\ldots,n$, dann gilt mit einer absoluten Konstanten C_1 die Ungleichung

$$\sup_{x \in R^1} |D_n(x)| \le C_1 B_n^{-3} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^3 . \qquad (0.1)$$

Die Bestimmung der dabei auftretenden absoluten Konstanten C_1 war und ist von unmittelbar theoretischem und praktischem Interesse. Darauf verwies bereits vor über 35 Jahren KOLMOGOROV(1953).

Folgende Konstantenabschätzungen seien hier genannt:

BERRY (1941): $C_1 < 1.88$ (Fall identisch verteilter Zufallsgrößen, HSU(1945) bemerkte einen Fehler in BERRY's Konstantenabschätzung)

ESSEEN (1945): $C_1 < 7.5$

BERGSTRÖM (1949): $C_1 < 4.8$

TAKANO (1950): $C_1 < 2.031$ (Fall identisch verteilter Zufallsgrößen)

WALLACE (1958): $C_1 < 2.05$ (Fall ident. vert. Zufallsgrößen, in Unkenntnis der Arbeit von TAKANO(1950))

WALLACE (1959): $C_1 < 1.98$ (Fall ident. vert. Zufallsgrößen)

Nach der bahnbrechenden Arbeit von ZOLOTAREV(1967) mit dem Ergebnis $C_1 < 0.9051$ und $C_1 < 0.82$ (Fall ident. vert. Zufallsgrößen) erhielt VAN BEEK(1971)

$C_1 < 0.7975$ und $C_1 < 0.7882$ (Fall ident. vert. Zufallsgrößen).

10 Jahre später konnte ŠIGANOV(1982), ein Schüler von ZOLOTAREV, schließlich unter Ausnutzung moderner Rechentechnik das bis heute beste Resultat berechnen:

$C_1 < 0.7915$ und $C_1 < 0.7655$ (Fall ident. vert. Zufallsgrößen).

Ähnliche Ungleichungen vom Typ (0.1) sind z.B. bei PRAWITZ(1975) zu finden, einschließlich Konstantenabschätzungen. Weitere Literaturhinweise findet man bei PETROV(1975).

Aus den Resultaten von KATZ(1963) und PETROV(1965) folgt eine etwas allgemeinere Ungleichung vom ESSEEN'schen Typ:

Für $\delta \varepsilon (0,1]$ sei $E|X_k|^{2+\delta} < \infty$, $k=1,2,\ldots,n$. Dann gilt mit einer nur von δ abhängigen Konstanten C_δ:

$$\sup_{x \varepsilon R^1} |D_n(x)| \leq C_\delta B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^{2+\delta} . \tag{0.2}$$

Bereits LJAPUNOV(1901), daher die Bezeichnung LJAPUNOV-Bruch, hatte eine Aussage dieses Typs erhalten. Jedoch erkannte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht in C_δ eine absolute Konstante.

Unter Ausnutzung der Methoden von ZOLOTAREV und VAN BEEK erhielt TYSIAK(1983), ein Schüler von MICHEL, folgende numerischen Ergebnisse:

δ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
C_δ	0.802	0.812	0.833	0.863	0.902	0.950	1.008	1.076	1.102

Es entsteht der Eindruck, daß C_δ mit kleiner werdendem δ anwächst.

Eine Aussage der Form $\sup_{0 \leq \delta \leq 1} C_\delta \leq C$ kann mit Hilfe eines Ergebnisses in |179| gemacht werden:

Ohne Voraussetzung der Existenz höherer als 2. Momente gilt mit einer absoluten Konstanten C die Ungleichung

$$\sup_{x \varepsilon R^1} |D_n(x)| \leq C \sum_{k=1}^{n} E((X_k/B_n)^2 \min(1, |X_k|/B_n)), \tag{0.3}$$

wobei $C < 3.51$ ist.

Ungleichungen dieses Typs wurden von FELLER(1968) mit $C<6.00$ und später in |173| mit $C<4.769$ angegeben.

Hierbei handelt es sich um Verallgemeinerungen der Ergebnisse von STUDNEV(1965) und OSIPOV(1966), wobei bemerkt werden muß, daß STUDNEV's Aussage wegen eines fehlerhaften Beweises nur hypothetischen Charakter trug (vgl. PETROV(1966) oder FELLER(1968)).

An dieser Stelle soll ein elementares Resultat von BHATTACHRYA|RAO (1976) erwähnt werden, daß ein wichtiges Hilfsmittel für Konstantenabschätzungen geworden ist:

Im Fall $\delta=0$ gilt

$$\sup_{x\in R^1} |D_n(x)| \leq C_0 \tag{0.4}$$

mit $C_0 < 0.5416$.

PADITZ präzisierte in |173| die Abschätzung der Konstanten auf $C_0 <$ 0.54094 und MAI|THRUM(1986) auf $C_0 < 0.5409366$.
ROGOZIN(1961), SURVILA(1962), S.NAGAEV(1965), BIKELIS(1966) und andere Autoren untersuchten in den sechziger Jahren die oben genannte Fragestellung mit dem Ziel, gleichzeitig das Argument x der Verteilungsfunktionen mit in die Abschätzungen zum zentralen Grenzwertsatz einzubeziehen. Eine ausführliche Darstellung historischer Etappen dazu wurde in |167| bereits gegeben, so daß hier sofort an das Resultat von BIKELIS(1966) angeknüpft werden soll:
Unter den Voraussetzungen zur Ungleichung (0.2) gilt für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x die Ungleichung

$$(1+|x|^{2+\delta})|D_n(x)| \leq K_\delta\, B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^{2+\delta} , \tag{0.5}$$

wobei die positive Konstante K_δ nur von δ abhängt.
Durch die von S.NAGAEV(1965) und BIKELIS(1966) einerseits und RUBIN|SETHURAMAN(1965) andererseits erfolgreich angewendete direkte Beweistechnik, die sogen. Faltungsmethode für die abgeschnittenen und konjugierten Verteilungsfunktionen, war es möglich geworden, optimale ungleichmäßige Fehlerabschätzungen zu erhalten. Jedoch mußte in den Folgejahren noch viel Kleinarbeit geleistet und diese Beweistechnik weiter verfeinert werden, um numerische Konstantenabschätzungen zu erzielen. 1977 wurden in |167,168| dazu erste Ergebnisse erhalten:

$K_1 < 114.667$ und $K_1 < 114.172$ (Fall ident. vert. Zufallsgr.).

Zwei Jahre später wurden in |170| erste Resultate im Fall $\delta\in(0,1)$ vorgelegt:

δ	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.99
K_δ	122.5	151.3	241.4	376.7	569.5	820.4	922.8

Dieses Ergebnis sollte nicht lange Bestand haben und wurde im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen durch MICHEL(1981) präzisiert:

$K_1 < C_1 + 8(1+e) < 30.54$.

Ein Jahr später behauptete MIRACHMEDOV(1982), daß die Konstantenabschätzung von MICHEL(1981) auch im Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen richtig sei. Jedoch enthielt sein danach veröffentlichter Beweis, vgl. MIRACHMEDOV(1984), einen Fehler, wodurch man seine Behauptung nicht aufrechterhalten konnte, vgl. Referat von WOLF in Math. Reviews 86i:60071.
Inzwischen hatte TYSIAK(1983) mit der Methode von MICHEL(1981) fol-

gendes gezeigt:

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
K_δ	17.05	18.17	19.32	20.58	21.94	23.41	25.06	27.21	29.83	32.88

Wie oben, vgl. |170|, ist auch in dieser Tabelle eine fallende Tendenz von K_δ mit kleiner werdendem δ erkennbar, so daß vorerst der Fall $\delta=1$ am interessantesten erscheint.

Auch in TYSIAK's Arbeit |260| hatten sich zwei Unkorrektheiten im Beweis eingeschlichen (fehlender Faktor x^8 in $g_3(x)$ auf S.50 und fehlender Faktor $g_4^{-1}(x)$ in $g_{20}(x)$ auf S.65|66), die jedoch keinen starken Einfluß auf das numerische Ergebnis bedeuteten.

Die festgestellten Unzulänglichkeiten bei MIRACHMEDOV(1982,1984) und TYSIAK(1983) wurden durch PADITZ|MIRACHMEDOV(1986) behoben. In |182| wurde das korrigierte Ergebnis $K_1 < 32.153$ mitgeteilt.

Durch einen neuen Beweisgedanken schließlich wurde dieses Ergebnis auf

$$K_1 < 31.935 \tag{0.6}$$

präzisiert und es wurde die analytische Struktur zur Berechnung von K_δ für $\delta\varepsilon(0,1)$ bereitgestellt, vgl. |183|.

Mit der nun zur Verfügung stehenden Beweistechnik wurde nach jahrelangem erfolglosen Bemühen der Weg geöffnet, eine brauchbare Konstantenabschätzung in der gewichteten L_p-Metrik durchzuführen, vgl. |192|.

Für $\delta\varepsilon(0,1]$ gilt

$$D_{n\delta p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}((1+|x|^{2+\delta-1/p})|D_n(x)|)^p\,dx\right)^{1/p} \leq C(p,\delta)B_n^{-(2+\delta)}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^{2+\delta} \tag{0.7}$$

Die absolute Konstante $C(p,\delta)$, die nur von p und δ abhängt, wurde bisher in der Literatur nicht untersucht. Der wichtige Fall $\delta=1$ bereitete vielen Autoren auf Grund der unausgereiften Beweistechnik besondere Probleme und würde z.B. bei MAEJIMA(1978) s.|126| oder bei AHMAD(1979) zu einer unendlich großen Konstanten führen. Bei ihnen tritt im Nenner einer Abschätzung die Größe $(1-\delta)$ auf. Ein ähnlicher unerwünschter Effekt war bereits in einem Artikel von VORONOVA(1972) eingetreten. In einer analogen Situation z.B. für m-abhängige Zufallsgrößen wird deshalb bei HEINRICH(1985,1986) der Fall $\delta=1$ ausgeschlossen und nicht untersucht.

Auch die globalen Fehlerabschätzungen von SAKOJAN(1974,1975) waren mit den dort formulierten Beweisschritten für eine numerische Auswertung der Konstanten $C(p,\delta)$ in (0.7) ungeeignet.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß Ungleichungen des Typs (0.7) u.a. bereits von S.NAGAEV|ČEBOTAREV(1978) und ČEBOTAREV(1979) zitiert und weiterbenutzt wurden. Schließlich war es die Arbeit von RYCHLIK(1983),

die zur Untersuchung von (0.7) neue Impulse gab, vgl. |183,192|.
Im Fall $\delta=1$ wird die Konstantenabschätzung

$$C(p,1) < 127.74 \sqrt[p]{7.31} \quad ; 1 \leq p \leq \infty ,$$

abgeleitet. Für den allgemeinen Fall $\delta \in (0,1]$ wird die analytische Struktur von $C(p,\delta)$ bereitgestellt, vgl. |192|.
An dieser Stelle sei bemerkt, daß das Ergebnis (0.3) im Abschnitt 3.1.5 im allgemeineren Fall der gewichteten Summation bewiesen wird. Die numerische Abschätzung (0.6) folgt aus den Überlegungen im Kapitel 2, vgl. auch Abschnitt 3.1.4. Die Ungleichung (0.7) wird, ebenfalls aufbauend auf Kapitel 2, im Abschnitt 4.1.2 diskutiert.

0.2 Gegenwärtige Entwicklungstendenzen in der Summationstheorie

Durch die Betrachtung von Folgen abhängiger Zufallsgrößen und die Übertragung der Resultate auf zufällige Vektoren bzw. HILBERT- oder BANACH-raumwertige Zufallselemente oder auch zufällige Felder gelang es, der Summationstheorie neue Anwendungsgebiete zu erschließen, vgl. HEINRICH (1986) und NAHAPETIAN(1988). Darüber hinaus wurde die Summationstheorie die Grundlage für weitere Gebiete der Stochastik, z.B. der Martingaltheorie (Martingaldifferenzen), für die Theorie der Markovschen Ketten, der stationären Prozesse oder für stark multiplikative Systeme. Einen Überblick über Grenzwertsätze für Funktionen zufälliger Größen (z.B. Grenzwertsätze für U-Statistiken) gibt die Monografie von GIRKO (1983).
Andererseits, wie es sich zeigte, waren und sind neue Probleme in der Summationstheorie nicht nur durch die innere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sondern vor allem auch durch praktische Aufgaben aus den verschiedensten Wissensgebieten hervorgegangen. An Anwendungsbeispielen aus der Nachrichtentechnik bzw. Zuverlässigkeitstheorie wird dies im Kapitel 6 demonstriert. Auf ungelöste Fragestellungen, die z.T. ebenfalls praktischen Problemen entspringen, wird in Kapitel 7 hingewiesen.
Verbesserungen theoretischer Resultate wirken sich ebenfalls auf die Verbesserung jener statistischer Verfahren und Methoden aus, die auf dem zentralen Grenzwertsatz aufbauen. Z.B. finden asymptotische Entwicklungen, die schon seit Jahrzehnten bekannt und umfassend untersucht sind, in den letzten Jahren immer mehr Eingang in statistische Verfahren, s. z.B. SCHMIDT|ZWANZIG(1986) oder SCHÄBE(1987). Bei LORZ (1986) findet man eine Anwendung der Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz für die Testtheorie (Konstruktion des kritischen Bereiches).
Durch das Studium zentraler Grenzwertsätze im Rahmen der Summations-

theorie haben sich international u.a. folgende eng miteinander verflochtene Schwerpunkte herauskristallisiert, die durch eine Vielzahl von Einzelbeiträgen und Monografien in der Literatur dokumentiert sind

1) Neben der Summationstheorie von Zufallsgrößen mit Werten im R^1 oder im R^k, $k>1$, werden Zufallselemente in allgemeineren Räumen, z.B. im Raum l_2, bis hin zu abstrakten Räumen (HILBERT- oder BANACH-Raum) untersucht, s. z.B. BHATTACHARYA|RAO(1976), ARAÚJO|GINE(1980), SAZONOV(1981,1982), SAZONOV|ZALESSKIJ(1983,1985), GÖTZE(1981), S.NAGAEV(1983), BOROVSKICH(1983), VAKHANIA(1981), BORISOV(1985), PAULAUSKAS|RAČKAUSKAS(1987, s.|279|), BENTKUS|ZALESSKIJ(1984), S.NAGAEV|ČEBOTAREV(1984). In den angegebenen Quellen findet man weitere z.T. sehr umfangreiche Literaturhinweise.
2) Neben der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen im Folgen- oder Serienschema werden analog auch Klassen abhängiger Zufallsgrößen studiert, z.B. schwach abhängige Zufallsgrößen, deren Abhängigkeit durch verschiedenartige Mischungsbedingungen charakterisiert wird, Markovsch verbundene Zufallsgrößen, Martingaldifferenzen oder stark multiplikative Systeme, s. z.B. NAHAPETIAN(1988), HEINRICH(1986), HALL|HEYDE(1980), SIRAŽDINOV|FORMANOV(1979) und |176,184,189,190|.
3) Die Untersuchung des Grenzverhaltens von Folgen $(S_n)_{n=1,2,...}$, wobei die Zufallsgrößen S_n, $n=1,2,...$, über einen Summationsprozeß entstehen, wird an Hand der charakteristischen Funktionen, Verteilungsfunktionen oder Dichtefunktionen, falls diese existieren, geführt. Wir sprechen dann z.B. von integralen Grenzwertsätzen im Falle des Studiums von Folgen von Verteilungsfunktionen oder von lokalen Grenzwertsätzen für Dichten im Falle des Studiums von Folgen von Dichtefunktionen. Wird dabei die L_p-Metrik benutzt, sprechen wir in beiden Fällen von globalen Grenzwertsätzen, s. z.B. GNEDENKO|KOLMOGOROV(1960), PETROV(1975,1987), IBRAGIMOV|LINNIK(1971), ZOLOTAREV(1986), MÜLLER(1988).
4) Je nach dem, ob das Argument der betrachteten Funktionen (s. 3)) in die durchgeführten Fehlerabschätzungen einbezogen ist oder nicht, sprechen wir von ungleichmäßigen oder gleichmäßigen Restgliedabschätzungen. Diese Sprechweise ist unabhängig von der verwendeten Norm oder Metrik. Bezüglich verschiedener Abstandsbegriffe s. z.B. ZOLOTAREV(1986). Eine guten Überblick über gleichmäßige asymptotische Aussagen für Summen unabhängiger Zufallsgrößen geben ARAK|ZAITCEV(1986).
5) Um die Genauigkeit der Approximation zu erhöhen, werden asymptotische Entwicklungen studiert, s. z.B. BHATTACHARYA|RAO(1976), WOLF(1976), CHRISTOPH(1987), HALL|NAKATA(1986, s.|280|).

6) Neben dem LJAPUNOV-Bruch werden verschiedenartige Momentcharakteristiken zur Fehlerabschätzung herangezogen, z.B. abgeschnittene Momente, Pseudomomente, Differenzenmomente u.a. Charakteristika, s. z.B. HALL(1982), CHRISTOPH(1987), MAI|THRUM(1987) und |191|.
7) Schließlich werden neben der klassischen Summationstheorie andere Summationsverfahren (Limitierungsverfahren) angewendet, z.B. die ABEL'sche Summation oder allgemeinere lineare Summationsverfahren mit Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))_{k\epsilon N_o}$, $v\epsilon(0,1)$, bzw. mit unendlichen Summationsmatrizen $(\lambda_{Nk})_{k\epsilon N_o}, N=1,2,\ldots$ oder es wird mit zufälligem Summationsindex N gearbeitet und das Verhalten von S_N studiert, s. z.B. CHRISTOPH(1987) und |175,176,180|.

Die vorliegende Arbeit enthält keine abgeschlossene Theorie sondern stellt einen Versuch dar, durch verschiedene Beiträge und neue Fehlerabschätzungen den internationalen Stand in einigen der genannten Forschungsschwerpunkte zu dokumentieren. Dabei soll einerseits die innere Verflechtung der sieben genannten Punkte zum Ausdruck gebracht und zum anderen auf die verschiedenen Beweistechniken hingewiesen werden, die für die hier behandelten Probleme tragfähig sind und im Rahmen dieser Arbeit eine Weiterentwicklung erfahren.

Entsprechend dem internationalen Trend wird in der Arbeit versucht, die Fehlerabschätzungen auch quantitativ exakt auszuwerten, d.h. die auftretenden absoluten Konstanten auch numerisch abzuschätzen. Als Beispiele für derartige Untersuchungen in der DDR-Literatur seien die kürzlich erschienenen Arbeiten von LORZ(1986) und MAI|THRUM(1987) genannt. Jedoch haben quantitative Untersuchungen im zentralen Grenzwertsatz in der DDR schon vor über 20 Jahren mit OSWALD(1965) ihren Anfang genommen. International ist in den letzten 10 Jahren eine zunehmende Tendenz festzustellen, in qualitativen Untersuchungen auch quantitative Auswertungen vorzunehmen. Dies wird letztlich durch die moderne Rechentechnik ermöglicht.

Nicht zuletzt gaben die Arbeiten |166 - 174| einen Anstoß dazu, daß weitere Wissenschaftler neue Beiträge zum zentralen Grenzwertsatz einschließlich Konstantenabschätzung und auch über Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeiten mittlerer Abweichungen veröffentlichten, s. z.B. MICHEL(1981), TYSIAK(1983), MIRACHMEDOV(1984) sowie ŠARACHMETOV(1981) und ZUPAROV|ŠARACHMETOV(1983).

Unabhängig davon gab BLÖNDAL(1973) erstmals explizite Abschätzungen des Fehlers im mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz, einschließlich Konstantenabschätzungen, an. Als Sonderfall der Ergebnisse im Abschnitt 6.1 ergeben sich ebenfalls quantitative Fehlerschranken für den mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz.

0.3 Zielstellung und Inhalt der Arbeit

Entsprechend den genannten Schwerpunkten im Abschnitt 0.2 läßt sich die Arbeit folgendermaßen charakterisieren:

1) Die Summationstheorie von Zufallsgrößen mit Werten im R^1 steht im Mittelpunkt, wobei im Kapitel 1 auch ein Beitrag zu mehrdimensionalen charakteristischen Funktionen und Zufallsvektoren im R^k zu finden ist. Kapitel 6 enthält eine Anwendung auf Zufallselemente mit Werten im Raum l_2 .
2) Neben der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen im Serienschema und speziell auch identisch verteilter Zufallsgrößen werden vor allem Zufallsgrößen betrachtet, die in einer Folge verbunden sind. Dabei werden auch zwei Klassen abhängiger Zufallsgrößen untersucht: Martingaldifferenzen und stark multiplikative Systeme.
3) Die Arbeit enthält Beiträge zu charakteristischen Funktionen (Kapitel 1), Verteilungsfunktionen (Kapitel 2 bis 4) und Dichtefunktionen (Kapitel 5).
4) Die gleichmäßigen und vor allen die ungleichmäßigen Fehlerabschätzungen bilden den Schwerpunkt der Arbeit und sind in jedem Kapitel vertreten. Der benutzte Abstandsbegriff ist dabei die L_p-Metrik, vgl. etwa (0.7), die im Fall $p=\infty$ in die übliche sup-Norm, vgl. etwa (0.5) und (0.2), übergeht.
   Dabei werden insbesondere charakteristische Funktionen in jedem Fall ungleichmäßig abgeschätzt, das in der anschließenden Anwendung (Methode der charakteristischen Funktionen - Glättungsungleichungen) begründet ist.
5) Asymptotische Entwicklungen werden in dieser Arbeit nur mit den ersten drei Approximationsgliedern qualitativ und quantitativ ausgewertet, vgl. Abschnitte 1.2.3, 3.1.5 und 5.3. Auf die erzielten Ergebnisse zu Restgliedabschätzungen bei Grenzwertsätzen für Wahrscheinlichkeiten mittlerer Abweichungen im Falle der gewichteten Summation wird aus Platzgründen im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen, vgl. |172,185|.
6) In der Arbeit werden hauptsächlich der LJAPUNOV-Bruch und abgeschnittene Momente bis hin zur vierten Ordnung ausgenutzt. Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen wird mit einer allgemeinen Pseudomomentcharakteristik gearbeitet.
   Der Frage einseitiger Fehlerabschätzungen wird hier ebenfalls nicht nachgegangen, vgl. |174|.
7) Entsprechend der Herkunft in der Literatur werden alle oben in Abschnitt 0.2 genannten Summationsverfahren demonstriert.

Ein großer Teil der dargelegten Ergebnisse ist bereits in Zeitschriftenartikeln veröffentlicht.

An Hand der gewichteten Summation geben wir nun einen tieferen Einblick in die Arbeit. Ausgangspunkt sei eine Folge $(X_k)_{k\in N_o}$ von Zufallsgrößen (i.a. nicht notwendig unabhängig sowie identisch verteilt) und eine Folge $(\alpha_k(v))_{k\in N_o}$, $v\in(0,1)$, von i.a. nichtnegativen Gewichtsfunktionen, die von einem Parameter v abhängen. Untersucht wird (unter gewissen Voraussetzungen) das Verhalten der Größe $Z_v=B_v^{-1}\sum_{k\in N_o}\alpha_k(v)X_k$, $B_v^2=D^2(\sum_{k\in N_o}\alpha_k(v)X_k)\in(0,\infty)$, an Hand der charakteristischen Funktion $f_v(t)=E\exp(itZ_v)$, der Verteilungsfunktion $F_v(xB_v)=P(Z_v<x)$ oder der Dichtefunktion $\frac{d}{dx}F_v(xB_v)=p_v(x)$, falls diese existiert.

Es seien $\Phi(x)$ die bereits in Abschnitt 0.1 eingeführte $N(0,1)$-Verteilungsfunktion, $\varphi(x)=\Phi'(x)$ deren Dichtefunktion und $g(t)=\exp(-0.5t^2)$ deren charakteristische Funktion.

Folgende Fehlergrößen werden abgeschätzt:

$$\Delta_{v\infty}=\sup_x|F_v(xB_v)-\Phi(x)|, \tag{0.8}$$

vgl. (0.3) mit $\sup_x|D_n(x)|$,

$$\Delta_{vp}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_v(xB_v)-\Phi(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\ 1\le p<\infty, \tag{0.9}$$

wobei der Fall $p=\infty$ durch (0.8) gegeben ist,

$$\delta_v=\sup_x|p_v(x)-\varphi(x)|, \tag{0.10}$$

$$\left|\frac{d^s}{dt^s}(f_v(t)-g(t))\right|,\ s=0,1,2, \tag{0.11}$$

und weiterhin die einfachen asymptotischen Entwicklungen

$$\sup_x|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| \tag{0.12}$$

mit $\delta_v(-\Phi)(x)=\sum_{k\in N_o}E(\Phi(x-B_v^{-1}\alpha_k(v)X_k)-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j!}(B_v^{-1}\alpha_k(v)X_k)^j\Phi^{(j)}(x))$,

$$\sup_x|p_v(x)-\varphi(x)-\delta_v'(-\Phi)(x)|, \tag{0.13}$$

wobei $\delta_v'(-\Phi)(x)=\frac{d}{dx}\delta_v(-\Phi)(x)$ ist,

$$\left|\frac{d^s}{dt^s}(f_v(t)-g(t)-g(t)\varkappa_v(t))\right|,\ s=0,1,2, \tag{0.14}$$

mit $\varkappa_v(t)=\sum_{k\in N_o}E(\exp(itB_v^{-1}\alpha_k(v)X_k)-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j!}(itB_v^{-1}\alpha_k(v)X_k)^j)$,

sowie die x-abhängigen Fehlergrößen

$$(1+x^2)|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| \tag{0.15}$$

und

$$(1+|x|^{2+\delta})|F_n(xB_n) - \phi(x)| \ , \ 0 < \delta \leq 1 \ , \qquad (0.16)$$

im Fall der "klassischen" Summation, vgl. (0.5), einschließlich L_p-Metrik, vgl. (0.7),

$$D_{n\delta p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|^{2+\delta-1/p})|F_n(xB_n)-\phi(x)|)^p \, dx \right)^{1/p} . \qquad (0.17)$$

Es finden folgende Glättungsungleichungen vom ESSEEN'schen Typ Anwendung (Methode der charakteristischen Funktionen):

$$\Delta_{v\infty} \leq \frac{b}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1}{|t|} \, |f_v(t)-g(t)|(1-\frac{|t|}{T}) \, dt + (2\pi)^{-0.5} \frac{c}{T} \ , \ T>0, \qquad (0.18)$$

mit $b=1/(2u-1)$, $c= 3.25ub$, $0.7872 \leq u \leq 0.78720072$,

vgl. Lemma 12.1 in BHATTACHARYA|RAO(1976) und die in |184| angegebene Spezialisierung.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß von weiteren Autoren ähnliche Glättungsungleichungen vom Typ (0.18) aufgestellt wurden, vgl. z.B. PAULAUSKAS(1971) oder PRAWITZ(1972).

$$\Delta_{v1} \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{T^2}} \sqrt{\int_{-T}^{T} \left|\frac{f_v(t)-g(t)}{t}\right|^2 dt} + \sqrt{\int_{-T}^{T} \left|\frac{d}{dt} \frac{f_v(t)-g(t)}{t}\right|^2 dt} + \frac{8\pi}{T} , \qquad (0.19)$$

vgl. Satz (1.5.4) in IBRAGIMOV|LINNIK(1971), weiterhin

$$(1+x^2)|F_v(xB_v) - \phi(x) - \delta_v(-\phi)(x)| \leq \qquad (0.20)$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_{-T}^{T} \left|\frac{1}{t} w_v(t) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{t} w_v(t)\right)\right| dt + 14 \cdot (2\pi)^{-0.5} \frac{24}{T} \ , \ T>0,$$

mit $w_v(t)=f_v(t)-g(t)-g(t)\pi_v(t)$, vgl. z.B. |181|, und

$$\delta_v \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_v(t)-g(t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-T}^{T} |f_v(t)-g(t)| dt + \int_{|t|\geq T} (|f_v(t)|+g(t)) dt \right) \qquad (0.21)$$

vgl. Formel (4.3.3) in IBRAGIMOV|LINNIK(1971).

Auf die bekannten Ungleichungen

$$\Delta_{vp} \leq \Delta_{v1}^{1/p} \Delta_{v\infty}^{1-1/p} , \qquad (0.22)$$

vgl. z.B. IBRAGIMOV|LINNIK(1971),

und entsprechend

$$D_{n\delta p} \leq 2^{1+\delta-1/p} D_{n\delta 1}^{1/p} D_{n\delta\infty}^{1-1/p} , \qquad (0.23)$$

vgl. z.B. |192|,

sei an dieser Stelle nur kurz verwiesen. Der zusätzliche Faktor $2^{1+\delta-1/p}$ tritt dabei infolge der Gewichtsfunktion $1+|x|^{2+\delta-1/p}$ auf.

Er ist überflüssig, wenn in der Gewichtsfunktion die Addition mit 1 entfällt, vgl. z.B. RYCHLIK(1983).
Schließlich wird im Fall der direkten Beweistechnik (Faltungsmethode) von folgender grundlegenden Ungleichung ausgegangen, die hier für die "klassische" Summation angegeben wird:

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq G_n(\gamma xB_n) + |\prod_{k=1}^{n} f_k(h)-\exp(\tfrac{1}{2}h^2B_n^2)|\exp(-hxB_n)P(S_n^*>xB_n)+$$
$$2\exp(\tfrac{1}{2}h^2B_n^2-hxB_n)\sup_{u\geq x}|P(S_n^*<uB_n)-\Phi(u-hB_n)| \qquad (0.24)$$

mit $f_k(h)=E\exp(h\bar{\xi}_k)$, $\bar{\xi}_k=X_k\,\mathbb{1}\{|X_k|<y\}$, $S_n^*=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^*$, wobei

$P(\xi_k^*<u)=f_k^{-1}(h)\int_{-\infty}^{u}e^{ht}dP(\bar{\xi}_k<t)$ die sogen. konjugierte Verteilungsfunktion der abgeschnittenen Zufallsgröße darstellt.
Die Parameter y und h sind wie üblich definiert: $y=\gamma xB_n$, $h=(1-\gamma)x/B_n$ mit $0<\gamma<0.5$. Weiterhin ist $G_n(y)=\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>y)$. Mit $\mathbb{1}\{A\}$ wird die Indikatorfunktion des Ereignisses A bezeichnet.
Die Ungleichung (0.24) geht in dieser präzisen Form auf MICHEL(1981) zurück und ist bei TYSIAK(1983) zu finden.
Aus (0.24) wird, ausgehend von den Untersuchungen im Kapitel 2, im Abschnitt 3.1.4 die Konstantenabschätzung (0.6) abgeleitet, vgl. |183|, und darauf aufbauend in Abschnitt 4.1.2 die Ungleichung (0.7) ausgewertet, vgl. |192|.
Aus der Gliederung ist der konkrete Aufbau der Arbeit erkennbar und soll hier nicht näher erläutert werden.
Mit dem gegebenen Überblick zur Entwicklung und zum gegenwärtigen Stand der Summationstheorie ist bereits eine erste Zielstellung der Arbeit erreicht. Die in den letzten Jahren immer stärker anwachsende Zahl von Publikationen zu diesem Themenkreis erfordert diese ausführliche Darstellung, da es zur vorliegenden Thematik noch keine geeigneten Gesamtdarstellungen gibt, auf die hingewiesen werden könnte. Viele Einzelthemen sind noch unabgeschlossen, wodurch die Aktualität des bearbeiteten Themas unterstrichen wird.

Zum Abschluß des einleitenden Kapitels ist es mir ein Bedürfnis, allen zu danken, die mich beim Zustandkommen dieser Arbeit in irgend einer Form unterstützt haben. Insbesondere möchte ich Herrn Prof. Dr. W.WOLF danken, der vor über 15 Jahren die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Thema gab und mit ständigem Interesse den Fortgang der Bearbeitung verfolgt und unterstützt hat.

1. Abschätzungen für charakteristische Funktionen

Als eines der wichtigsten analytischen Hilfsmittel in der Wahrscheinlichkeitstheorie erweist sich der Apparat der charakteristischen Funktionen, die als FOURIER-STIELTJES-Transformationen aus den Verteilungsfunktionen hervorgehen. Bereits LAPLACE(1812) begann mit der genaueren Untersuchung von Funktionen, die den charakteristischen Funktionen ähnlich sind. Seit LJAPUNOV(1901) sprechen wir von der Methode der charakteristischen Funktionen, die ein gut handhabbares Werkzeug beim Studium von Grenzwertsätzen darstellt. Inzwischen hat sich die Theorie der charakteristischen Funktionen zu einem eigenständigen Gebiet entwickelt, vgl. z.B. LUKACS(1970,1983). Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse tragen eigenständigen Charakter und werden dann z.T. in den Glättungsungleichungen (0.18) bis (0.21) angewendet, um Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz zu beweisen.

1.1. Allgemeine Abschätzungen einer charakteristischen Funktion

In den folgenden zwei Ungleichungen wird insbesondere die Bedeutung des Realteils einer charakteristischen Funktion für deren Abschätzung herausgearbeitet.

Satz 1.1. Sei X eine reelle Zufallsgröße und $f(s)=Ee^{isX}$ deren charakteristische Funktion. Dann gilt

$$|f(s)| \leq \exp(-0.5(1-g(\sqrt{2}\, s))+g(s)\mathrm{Re}\,w(s)+0.5|w(s)|^2), \tag{1.1}$$

wobei $g(s)=\exp(-0.5s^2)$ und $w(s)=f(s)-g(s)$ sind.

Beweis: Diese einfache Ungleichung wird über die Zerlegung

$$|f(s)|^2 = |w(s)|^2 - (1-g^2(s)) + 2g(s)\mathrm{Re}\,w(s) + 1$$

und unter Ausnutzung der Ungleichung $1+z \leq e^z$ abgeleitet. ∎

Diese Ungleichung spielt in |191| eine zentrale Rolle und motiviert die dort benutzte Pseudomomentcharakteristik

$$\gamma = \sup_s(|s|^{-3}|\mathrm{Re}\,w(s)|),$$

die die Nähe des Realteils von $f(s)$ zur reellen charakteristischen Funktion $g(s)$ beschreibt. Im Fall einer symmetrischen Zufallsgröße X entspricht γ einer von ZOLOTAREV |274| betrachteten Charakteristik. Eine ausführliche Diskussion über Pseudomomentcharakteristiken findet man bei CHRISTOPH(1987).

Satz 1.2. Für $f(s)$ gilt stets

$$|f(s)| \leq \exp(\mathrm{Re}\,f(s) - 1 + 0.5|f(s) - 1|^2) \,. \tag{1.2}$$

Beweis: Wird der Beweis zu (1.1) mit der Funktion $g(s)=1$ geführt, folgt sofort die Behauptung (1.2). ∎

Eine Anwendung von (1.2) ist z.B. in |181|, s. dort (29), zu finden. Die folgende Abschätzung ist insbesondere für lokale Grenzwertsätze für Dichten von Bedeutung, um ein hinreichendes Kriterium für die sogen. PETROV-Bedingung, vgl. z.B. Bedingung (P) in MACHT|WOLF(1987), zu haben.

Satz 1.3. Sei X eine Zufallsgröße mit den Eigenschaften $EX=0$ und $EX^2=1$ und der beschränkten Dichtefunktion $p(x)$: $p(x)\leq C<\infty$. Unter diesen Voraussetzungen ist C nicht kleiner als $1/(2\sqrt{3})$ und es gilt mit einer absoluten Konstanten α folgende Ungleichung

$$|f(s)| \leq \exp(-\alpha\, C^{-2}) \quad \text{für} \quad |s| \geq \pi\,, \tag{1.3}$$

wobei $\alpha > 0.00215$ ist.

Satz 1.3 stammt von SURVILA(1963), wobei dort noch keine Aussage über die Größenordnung von α zu finden ist. Die untere Schranke für α wurde erst jetzt auf Grundlage des in |257| angegebenen Beweises ermittelt. Aus Platzgründen wird an dieser Stelle auf die Rechnung verzichtet. Anwendungen von (1.3) in der Summationstheorie ergeben sich dadurch, daß $p(x)$ und damit auch C vom Summationsindex n abhängig werden und (1.3) eine von n abhängige Abschätzung liefert.

Weitere Ungleichungen für den Absolutbetrag einer charakteristischen Funktion sind z.B. bei PRAWITZ(1973,1974) zu finden.

1.2. Summen unabhängiger Zufallsgrößen

1.2.1 Serienschema und abgeschnittene Momente

In diesem Unterabschnitt werden Beweisgedanken aus |97| angegeben, die nun als eigenständige Aussagen formuliert werden. Es werden dabei drei Fälle betrachtet: (i) unendliche Streuungen, (ii) endliche Streuungen und (iii) endliche Streuungen mit Gesamtstreuung 1.

(i) unendliche Sreuungen: Es sei (X_{nk}), $k=1,2,\dots,k_n$; $n=1,2,\dots$; ein Serienschema von in jeder Serie unabhängigen Zufallsgrößen mit $EX_{nk}=0$ für alle k und n. Mit den Bezeichnungen

$$a_n=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{R^1\setminus A_{nk}}|u|\,dF_{nk}(u),\quad b_n^2=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{A_{nk}}u^2\,dF_{nk}(u)\ \text{und}\ c_n=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{A_{nk}}|u|^3\,dF_{nk}(u)$$

mit $F_{nk}(u)=P(X_{nk}<u)$, wobei (A_{nk}), $k=1,2,\dots,k_n$; $n=1,2,\dots$; BOREL-Mengen des R^1 sind, gilt für die charakteristischen Funktionen

$f_n(t)=E\exp(itS_n)$, $S_n=X_{n1}+X_{n2}+\dots+X_{nk_n}$; und $g(t)=\exp(-0.5t^2)$:

<u>Satz 1.4.</u> Für die Momentcharakteristika a_n, b_n^2 und c_n gelte die Beschränktheitsforderung $a_n+|1-b_n^2|+c_n \leq l^3$, wobei l eine positive Konstante ist. Sei nun $T_n' = \min(ac_n^{-1/3}, b/a_n)$ eine von diesen Charakteristika abhängige Schranke mit a und b als positive Konstanten. Dann gilt für alle t mit $|t| \leq T_n'$:

(a) $|f_n(t)-g(t)| \leq \exp(2b - 0.5mt^2)\cdot$ (1.4)

$$(a_n(2|t|+\frac{l^2}{1-c}(2lt^2+|t|))+\frac{t^2}{2}|1-b_n^2|+c_n(\frac{|t|^3}{6}+\frac{0.125}{1-c}lt^4)),$$

falls $c=0.5a^2+2b<1$ und $m=1-l^2(1+\frac{a}{3}+\frac{(a+4l^2)^2}{4(1-c)})>0$ ist.

(b) Wenn zusätzlich $1-b_n^2=0$ ist (bei geeigneter Wahl von (A_{nk})), dann gilt (1.4) mit der besseren Konstanten

$$m = 1 - l^2(\frac{a}{3}+\frac{(a+4l^2)^2}{4(1-c)}) \ (>0).$$

<u>Satz 1.5.</u> Es sei mit den oben eingeführten Bezeichnungen und $T_n = \min(d/c_n, b/a_n)$, wobei d wie auch b eine positive Konstante ist, die Bedingung $T_n' < T_n$, d.h. $ac_n^{-1/3} \leq T_n$, erfüllt.
Dann gilt für alle t mit $T_n' \leq |t| \leq T_n$:

(a) $|f_n(t)| \leq a^{-3}c_n|t|^3\exp(2.5b - 0.5t^2m)$, (1.5)
falls $m=1-d-l^3>0$ ist und l^3 eine Schranke für $|1-b_n^2|$ darstellt.

(b) Wenn $1-b_n^2=0$ ist, kann (1.5) ebenfalls verschärft werden:
$|f_n(t)| \leq a^{-3}c_n|t|^3\exp(2.5b - 0.5(1-d)t^2)$. (1.6)

(c) Für $g(t)$ gilt eine Abschätzung von gleichen Typ, die noch genauer ist:
$g(t) \leq a^{-3}c_n|t|^3\exp(-0.5t^2)$. (1.7)

<u>Beweis zu Satz 1.4.</u> Sei $f_{nk}(t)=E\exp(itX_{nk})$. Dann gelten wegen $EX_{nk}=0$ im betrachteten t-Intervall folgende Ungleichungen:

$$|f_{nk}(t)-1| = |\int_{A_{nk}}(e^{itu}-1-itu)dF_{nk}(u) + \int_{R^1\setminus A_{nk}}(e^{itu}-1-itu)dF_{nk}(u)| \leq$$

$$0.5\, t^2c_n^{2/3} + 2|t|a_n \leq c < 1, \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(t)-1|^2 \leq 0.25\, t^4c_n^{4/3} + 2|t|^3c_n^{2/3}a_n + 4t^2a_n^2 \leq \qquad (1.9)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 0.25\, l t^4 c_n + (2|t|^3 l^2 + 4t^2 l^3) a_n & (1.10) \\ 0.25\, t^2 l^2 (a+4l^2)^2 & (1.11) \end{array}\right.$$

und

$$\Big| \sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}(t)-1) + 0.5t^2 \Big| \le \frac{1}{6}|t|^3 c_n + 2|t| a_n + 0.5t^2 |1-b_n^2| \,. \qquad (1.12)$$

Mit (1.8) und (1.12) ergibt sich unter Beachtung von

$$\log f = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-1}{r} (1-f)^r \quad \text{für } |f-1|<1$$

die Abschätzung

$$r_n = \Big|\sum_{k=1}^{k_n} \log f_{nk}(t) + 0.5t^2\Big| \le \frac{1}{6}|t|^3 c_n + 2|t| a_n + \frac{1}{2}t^2 |1-b_n^2| + \frac{0.5}{1-c} \sum_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t)-1|^2$$

$$(1.13)$$

Über die Ungleichung

$$|f_n(t) - g(t)| \le r_n \exp(-0.5t^2 + r_n) \qquad (1.14)$$

folgt schließlich mit (1.13), sowie (1.10) bzw. (1.11) die Behauptung (1.4). Die Aussage (b) des Satzes 1.4 erhält man analog, wenn man in (1.12) und (1.13) den Wegfall des Summanden $0.5t^2|1-b_n^2|$ beachtet, der dann auch in (1.4) verschwindet. ■

Beweis zu Satz 1.5: Aus Satz 1.2 erhält man unter Ausnutzung der SCHWARZ'schen Ungleichung unschwer

$$|f_n(t)| \le \exp\Big(-\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(tu))\,dF_{nk}(u) + 0.5 \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(tu))^2 \cdot$$

$$dF_{nk}(u) + 0.5 \sum_{k=1}^{k_n} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tu)\,dF_{nk}(u) \Big| \Big) \,. \qquad (1.15)$$

Die Einzelabschätzungen der Summanden in (1.15) werden mit einer analogen Integralzerlegung wie in (1.8) vorgenommen:

$$-\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(tu))\,dF_{nk}(u) \le -0.5t^2 + |t| a_n + \frac{1}{2}t^2|1-b_n^2| + \frac{1}{6}|t|^3 c_n \qquad (1.16)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(tu))^2\,dF_{nk}(u) \le 0.5|t| a_n + 0.25|t|^3 c_n \qquad (1.17)$$

und

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tu)\,dF_{nk}(u) \Big| \le |t| a_n + \frac{1}{12} |t|^3 c_n \,. \qquad (1.18)$$

Aus (1.15) bis (1.18) folgen für das betrachtete t-Intervall die Behauptungen (1.5) und (1.6). Wegen $a^{-3} c_n |t|^3 \ge 1$ ist (1.7) trivial. ■

(ii) endliche Streuungen: Sei b_n^* die Reststreuung zu der oben eingeführten Größe b_n^2, d.h. $b_n^* = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{R^1 \setminus A_{nk}} u^2 \, dF_{nk}(u)$.

Satz 1.6. Wenn a, b, l_b, l_c positive Konstanten sind und für die abgeschnittenen Momente die Ungleichungen $b_n^* + |1-b_n^2| \leq l_b^2$ und $c_n \leq l_c^3$ gelten, dann ist für alle t mit $|t| \leq T_n' = \min(a c_n^{-1/3}, b/\sqrt{b_n^*})$ die Ungleichung

$$|f_n(t)-g(t)| \leq \exp(-0.5mt^2) \cdot \tag{1.19}$$

$$\left(\frac{1}{6}|t|^3 c_n\left(1+\frac{3|t|l_c}{4(1-c)}\right)+0.5t^2|1-b_n^2|+0.5t^2 b_n^*\left(1+\frac{0.5}{1-c}\,t^2\left(l_c^2+\frac{1}{2}\,l_b^2\right)\right)\right)$$

erfüllt, falls

$c=0.5(a^2+b^3)<1$ und $m=1-l_c^2\left(\frac{1}{3}\,a+\frac{a^2+2b^2}{4(1-c)}\right)-l_b^2\left(1+\frac{b^2}{4(1-c)}\right)>0$ ist.

Satz 1.7. Sei $T_n' \leq |t| \leq T_n = d/c_n$, wobei T_n' wie in Satz 1.6 definiert ist und d ebenfalls eine positive Konstante darstellt, dann gilt

(a) $$|f_n(t)| \leq (a^{-3}c_n|t|^3+b^{-2}b_n^* t^2)\exp(-0.5mt^2) \; , \tag{1.20}$$

falls $m=1-d-2\cdot l_b^2 > 0$ ist und l_b^2 hierbei wie in Satz 1.6 die Schranke für $b_n^*+|1-b_n^2|$ bedeutet.

(b) $$g(t) \leq (a^{-3}c_n|t|^3+b^{-2}b_n^* t^2)\exp(-0.5\,t^2) \; . \tag{1.21}$$

Die Beweise zu den Sätzen 1.6 und 1.7 unterscheiden sich nur unwesentlich von denen zu den entsprechenden Sätzen 1.4 und 1.5 und werden deshalb an dieser Stelle nicht geführt.

(iii) endliche Streuungen und Gesamtstreuung $\sum_{k=1}^{k_n} EX_{nk}^2 = 1$:

Die oben eingeführten Bezeichnungen c_n für die Summe der abgeschnittenen dritten Momente und b_n^* für die Summe der Reststreuungen werden hier weiterbenutzt.

Satz 1.8. Sei $b_n^* + c_n \leq l^3 = a_1^{-2} a_2/\sqrt{8}$ eine beschränkte Momentencharakteristik und $T_n = (a_1 c_n + a_2 b_n^*)^{-1}$ eine von c_n und b_n^* abhängige t-Schranke, wobei $a_1 > a_2 > 1/\sqrt{2}$ gelten möge und a_1, a_2 positive Konstanten sind. Dann ergibt sich für alle t mit $|t| \leq T_n$:

$$|f_n(t)-g(t)| \leq \left(\left(\frac{1}{6}|t|^3+\frac{1}{8}\,lt^4\right)c_n+\left(t^2+\frac{1}{4}\,l^2t^4\right)b_n^*\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\,mt^2\right) , \tag{1.22}$$

wobei $m=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a_1^{-1}-\frac{1}{4}\,a_2^2\,a_1^{-2}$ ist.

Die Beweisidee zur Ungleichung (1.22) stammt von FELLER(1968) und wurde in |173,175| weiter ausgebaut. Deshalb soll hier nur eine Beweisskizze gegeben werden.

<u>Zum Beweis von Satz 1.8:</u> Zu Beginn sei bemerkt, daß aus $a_1>a_2>1/\sqrt{2}$ die Ungleichung $m>0$ folgt. Mit $g_{nk}(t)$ wird die charakteristische Funktion einer $N(0,EX_{nk}^2)$-Verteilung bezeichnet.

Dann gilt mit den bereits oben benutzten Bezeichnungen

$$f_n(t)-g(t) = \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{k_n} g_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \Big(\prod_{p=1}^{k-1} f_{np} \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq}(f_{nk}-g_{nk})\Big), \qquad (1.23)$$

wobei das Argument t zur Vereinfachung weggelassen wurde. Nun ist

$$\sum_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t)-g_{nk}(t)| \le \left(\frac{1}{6}|t|^3+\frac{1}{8}\, l t^4\right)c_n + \left(t^2+\frac{1}{4}\, l^2t^4\right)b_n^* , \qquad (1.24)$$

vgl. (19) in |173| oder (18) in |175|. Die Abschätzung der Produkte

$$\prod_{p=1}^{k-1} f_{np} \quad \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq}$$

erfolgt wie in den zitierten Arbeiten üblich durch Zerlegung der Indexmenge $\{1,2,\ldots,k_n\}$, wobei die nichtleere Teilmenge N_1 von Indizes k durch die "Kleinheitseigenschaft" $EX_{nk}^2\, \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\} \le 2\cdot T_n^{-2}$ an die abgeschnittenen Streuungen charakterisiert ist.

Aus den Voraussetzungen von Satz 1.8 folgt die Ungleichungskette

$$c_n+b_n^* < a_2\sqrt{2}\,(c_n+b_n^*) < \sqrt{2}\, T_n^{-1} < a_1\sqrt{2}\,(c_n+b_n^*) < 1 \,. \qquad (1.25)$$

Angenommen N_1 wäre eine leere Teilmenge, d.h. $EX_{nk}^2\, \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\} > 2T_n^{-2}$ für alle $k=1,2,\ldots,k_n$. Dann ist mit der LJAPUNOV-Ungleichung

$$c_n \ge \min_k \sqrt{EX_{nk}^2\, \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\}}\,(1-b_n^*) > 2\, T_n^{-1}(1-b_n^*), \text{ d.h. } c_n+b_n^* > 1 ,$$

vgl. |173|. Damit entsteht ein Widerspruch zu (1.25) und somit ist N_1 tatsächlich nichtleer. Im Fall $q\notin N_1$ und $k\in N_1$ gilt

$$g_{nq}(t) \le \exp\Big(-\frac{1}{2}\, t^2\big(EX_{nk}^2\, \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\} - \frac{1}{3}\, T_n E|X_{nk}|^3\, \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\}$$
$$- EX_{nk}^2\, \mathbb{1}\{X_{nk}\notin A_{nk}\}\big)\Big) \,. \qquad (1.26)$$

Die Ungleichung (1.26) gilt offensichtlich erst recht, wenn auf der rechten Seite von (1.26) der Index k durch q ersetzt wird und dann q als beliebiger Index angesehen wird. Für $p\in N_1$ und $f_{np}(t)$ gilt analog

$$|f_{np}(t)| \le \exp\Big(-\frac{1}{2}\, t^2\big(EX_{np}^2\, \mathbb{1}\{X_{np}\in A_{np}\} - \frac{1}{3}\, T_n E|X_{np}|^3\, \mathbb{1}\{X_{np}\in A_{np}\} -$$

$$- EX_{np}^2 \, 1\{X_{np} \notin A_{np}\}))\ ;$$

vgl. |173,175|. Damit sind die Produkte in (1.23) abschätzbar:

$$|\prod_{p=1}^{k-1} f_{np}(t) \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq}(t)| \leq \exp(-\frac{1}{2} t^2 (\sum_{k\in N_1} (EX_{nk}^2 \, 1\{X_{nk}\in A_{nk}\} - \tag{1.27}$$

$$- \frac{1}{3} T_n \, E|X_{nk}|^3 \, 1\{X_{nk}\in A_{nk}\} - EX_{nk}^2 \, 1\{X_{nk}\notin A_{nk}\}) - 2T_n^{-2}))$$

und mit den Voraussetzungen des Satzes 1.8 folgt

$$\sum_{k\in N_1} (EX_{nk}^2 1\{X_{nk}\in A_{nk}\} - \frac{1}{3} T_n E|X_{nk}|^3 1\{X_{nk}\in A_{nk}\} - EX_{nk}^2 1\{X_{nk}\notin A_{nk}\}) - 2T_n^{-2} \geq m. \blacksquare$$

<u>Satz 1.9.</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 1.8 gilt für alle t mit $|t| \leq T_n$ die Ungleichung

$$|\frac{d}{dt}\frac{1}{t}(f_n(t)-g(t))| \leq ((\frac{2}{3}|t| + \frac{5}{8} l t^2) c_n + (3 + \frac{5}{4} l^2 t^2) b_n^*) \exp(-\frac{1}{2} m t^2)$$

$$+ (t^2(\frac{1}{6}|t| + \frac{1}{8} l t^2) c_n + (t^2 + \frac{1}{4} l^2 t^4) b_n^*)(\frac{1}{2}|t| c_n + 2b_n^* + 1) \exp(-\frac{1}{2} p t^2) \tag{1.28}$$

mit $p = 1 - 4a_1^2 l^6 - a_1^{-1}/\sqrt{2}$; Koeffizient m vgl. Satz 1.8 .

<u>Zum Beweis von Satz 1.9:</u> Der Satz 1.9 wurde bereits für den Fall einer Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängiger Zufallsgrößen in |179| als Lemma 2 formuliert und dort bewiesen. Es wird deshalb hier nur eine Beweisskizze angegeben. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{t}(f_n(t)-g(t)) = -t^{-2}(f_n(t)-g(t)) + \frac{1}{t}(f_n'(t)-g'(t)), \tag{1.29}$$

wobei

$$f_n'(t)-g'(t) = \Big(\sum_{k=1}^{k_n} \prod_{p=1}^{k-1} f_{np} \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq}(f_{nk}-g_{nk}) \Big)' =$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \prod_{p=1}^{k-1} f_{np} \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq} \, (f_{nk}' - g_{nk}') +$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} f_{nj}' \prod_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{k-1} f_{np} \prod_{q=k+1}^{k_n} g_{nq} \, (f_{nk} - g_{nk}) +$$

$$\sum_{j=k+1}^{k_n} g_{nj}' \prod_{p=1}^{k-1} f_{np} \prod_{\substack{q=k+1\\q\neq j}}^{k_n} g_{nq} \, (f_{nk} - g_{nk}) \Big) \tag{1.30}$$

ist. Folgende Fehlerabschätzungen werden zusätzlich bereitgestellt:

$$\Big| \prod_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{k-1} f_{np}(t) \prod_{\substack{q=k+1\\ q\neq j}}^{k_n} g_{nq}(t) \Big| \leq \exp(-\frac{1}{2}pt^2) \tag{1.31}$$

mit $p=1-4a_1^2 l^6 - a_1^{-1}/\sqrt{2}$, wobei die Herleitung analog zu (1.27) erfolgt. Weiterhin gilt in Analogie zu (1.24) für $|t| \leq T_n$:

$$\sum_{k=1}^{k_n} |f'_{nk}(t)-g'_{nk}(t)| = \sum_{k=1}^{k_n} |iEX_{nk}\exp(itX_{nk})+tEX_{nk}^2\exp(-\frac{1}{2}t^2EX_{nk}^2)| \leq$$

$$|t|((\frac{1}{2}|t|+\frac{1}{2}lt^2)c_n+(2+t^2l^2)b_n^*) \tag{1.32}$$

und

$$\sum_{j=1}^{k-1} |f'_{nj}(t)| + \sum_{j=k+1}^{k_n} |g'_{nj}(t)| \leq |t|(\frac{1}{2}|t|c_n+2b_n^*+1) \,. \tag{1.33}$$

Die Teilabschätzungen (1.24), (1.27) und (1.31) bis (1.33) werden nun in (1.29) bzw. (1.30) ausgenutzt und es ergibt sich daraus mit Satz1.8 die behauptete Ungleichung (1.28). ∎

1.2.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen und Pseudomomente

In diesem Unterabschnitt werden ohne Beweis Aussagen aus |191| angegeben, die dort ausführlich abgeleitet sind.
Es sei X eine zentrierte und normierte Zufallsgröße, d.h. $EX=0$ und $EX^2=1$, und $f(t)=E\exp(itX)$ die zugehörige charakteristische Funktion. Mit $g(t)$ und $w(t)$ werden die charakteristische Funktion $\exp(-0.5t^2)$ bzw. die Differenz $f(t)-g(t)$ bezeichnet.
Es sei γ die bereits in Abschnitt 1.1 erwähnte Charakteristik, d.h.

$$|\mathrm{Re}\; w(t)| \leq \gamma |t|^3 \,,\quad t\in R^1 \,,$$

und ϑ eine ähnliche, bereits von ZOLOTAREV |274| betrachtete Charakteristik mit der Eigenschaft

$$|w(t)| \leq \vartheta |t|^3 \,,\quad t\in R^1 \,.$$

Offenbar ist ϑ nicht kleiner als γ und es gilt mit einem $\varepsilon \in (0,1]$

$$\gamma = \varepsilon\vartheta \,.$$

Satz 1.10. Sei $n \geq \max((8\gamma)^{-1/3}, n_o)$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle t mit $|t| \leq T'_n = \sqrt{n}\min(\frac{a}{2\vartheta}, \sqrt{2c})$, wobei a, c und auch n_o feste positive Zahlen sind, die Ungleichung

$$|f^n(t/\sqrt{n})-g(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}|t|^3\,\vartheta\exp(-(1-ae^c)\frac{n_o-1}{2n_o}t^2) =$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}}\,|t|^3\,\varepsilon^{-1}\gamma\exp(-(1-ae^c)\frac{n_o-1}{2n_o}t^2) \,. \tag{1.34}$$

Die Herleitung der Ungleichung ist in |191| zu finden.

Satz 1.11. Sei $n \geq \max((8\gamma)^{-1/3}, n_o)$ eine natürliche Zahl. Dann gelten für alle t mit $T_n' \leq |t| \leq T_n = \sqrt{n}\,(\frac{d}{\vartheta})^{1/3}$, wobei d und n_o feste positive Zahlen und T_n' die in Satz 1.10 eingeführte Größe sind, die Ungleichungen

(i) $|f(t/\sqrt{n})| \leq \exp(-m\vartheta^{2/3}\,t^2/n)$, (1.35)

falls $m = \frac{1}{2}(1-e^{-2c})d^{-2/3} - \varepsilon e^{-c}\,d^{1/3} - d^{4/3} > 0$ ist, und

(ii) $$|f^n(t/\sqrt{n}) - g(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}|t|^3\vartheta(2\gamma^{1/3}\exp(-(n-1)m\vartheta^{2/3}t^2/n) + \exp(-\gamma^{1/3}\,0.5t^2)) \leq$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|t|^3\frac{\gamma}{\varepsilon}(2\gamma^{1/3}\exp(-\frac{1}{2n}(n-1)t^2) + \exp(-\gamma^{1/3}\,t^2/2)). \quad (1.36)$$

Bemerkung: Damit das betrachtete t-Intervall in Satz 1.11 nicht entartet, müssen die Parameter c und d die Bedingung $(2c)^{-1.5}d \geq \vartheta$ erfüllen.

Zur Herleitung der Ungleichungen in Satz 1.11 wird wieder auf |191| verwiesen.

1.2.3 Gewichtete Summation

Hier wird das bereits in der Einleitung, s. Abschnitt 0.3, vorgestellte Schema der gewichteten Summation betrachtet, wobei die Zufallsgrößen $X_o, X_1, \ldots$ unabhängig sein mögen.

Es wird darauf verzichtet, die im Abschnitt 1.2.1 für das Serienschema formulierten Sätze auch für die nun vorliegende Situation bereitzustellen. Es wird deshalb nur der Fall endlicher Streuungen betrachtet, wie es bereits in Abschnitt 0.3 mit der Bedingung $B_v^2 \varepsilon (0, \infty)$ angedeutet ist. Am Schluß dieses Abschnittes wird eine einfache asymptotische Entwicklung, vgl. (0.14), betrachtet.

(i) endliche Streuungen: Die abgeschnittenen Momente b_n^* und c_n aus Abschnitt 1.2.1 werden hier wie folgt definiert:

$$b_v^* = B_v^{-2}\sum_{k\in N_o}\alpha_k^2(v)\int_{u\notin\alpha_k^{-1}(v)A_k} u^2\,dP(X_k<u)$$

und

$$c_v = B_v^{-3}\sum_{k\in N_o}\alpha_k^3(v)\int_{u\in\alpha_k^{-1}(v)A_k}|u|^3\,dP(X_k<u);$$

wobei (A_k), $k\in N_o$, BOREL-Mengen des R^1 sind. Die Gewichtsfunktionen und weitere auftretende Größen wurden bereits in Abschnitt 0.3 eingeführt, so daß wir sofort zur Formulierung von Fehlerabschätzungen kommen.

Satz 1.12. Es sei (X_k), $k\in N_o$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ und $EX_k^2<\infty$ für alle $k\in N_o$. Die Folge $(\alpha_k(v))$, $k\in N_o$, $v\in(0,1)$, der Gewichtsfunktionen sei derart, daß $B_v^2=\sum_{k\in N_o}\alpha_k^2(v)EX_k^2\in(0,\infty)$ gilt. Dann hat man für die charakteristische Funktion $f_v(t)$ der Größe Z_v, vgl. Abschnitt 0.3, folgende Fehlerabschätzungen

(i) Es sei $b_v^*+c_v\le l^3=a_1^{-2}a_2/\sqrt{8}$ und $T_v=(a_1c_v+a_2b_v^*)^{-1}$ mit $a_1>a_2>1/\sqrt{2}$ eine t-Schranke (analog wie in Satz 1.8). Dann gilt für alle t mit $|t|\le T_v$ die Ungleichung

$$|f_v(t)-g(t)|\le\left(\left(\frac{1}{6}|t|^3+\frac{1}{8}t^4l\right)c_v+\left(t^2+\frac{1}{4}t^4l^2\right)b_v^*\right)\exp\left(-\frac{1}{2}mt^2\right),\quad(1.36)$$

wobei $m=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a_1^{-1}-\frac{1}{4}a_2^2\,a_1^{-2}$ ist.

(ii) Sei $\delta>0$ eine Konstante so, daß $\delta^3/6+\delta^2<2$ ist. Dann gilt für alle m mit $0<m<\sqrt{\frac{2}{36}}$ und alle t mit $|t|\le T_v=\min(\delta^2m/(6b_v^*),\ \delta m^2/c_v)$ die Ungleichung

$$|f_v(t)-g(t)|\le\left(C_1(\delta)t^2b_v^*+C_2(\delta)|t|^3c_v\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right),\quad(1.37)$$

wobei $C_i(\delta)=\max(C_i'(\delta),C_i''(\delta))$, $i=1,2$, mit

$C_1'(\delta)=(1+(d^2+\delta^2)a(d))\exp(b(\delta))$, $C_2'(\delta)=(\frac{1}{6}+\delta a(d))\exp(b(\delta))$,

$C_1''(\delta)=6\delta^{-3}(1+\exp(-\frac{3}{4}\delta^3))$ und $C_2''(\delta)=\frac{1}{6}C_1''(\delta)$ ist und

$a(d)=d^{-4}(-\ln(1-\frac{1}{2}d^2)-\frac{1}{2}d^2)$ sowie

$b(\delta)=\frac{1}{6}\delta^3(1+(d^2+\delta^2)a(d))+\delta^3(\delta a(d)-\frac{7}{12})^+$ mit $d=\sqrt{\delta^3/6+\delta^2}$

gilt. Die Symbolik x^+ bedeutet hier wie üblich $x\cdot\mathbb{1}\{x>0\}$.

(iii) Unter den Voraussetzungen von (1.37) an δ und m gilt für alle t mit $|t|\le T_v'=\min(\delta c_v^{-1/3},\sqrt{\delta^3/6}/\sqrt{b_v^*},\ \delta m^2/c_v)$

$$|f_v(t)-g(t)|\le\left(C_1'(\delta)t^2b_v^*+C_2'(\delta)|t|^3c_v\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right),\quad(1.38)$$

wobei $C_i'(\delta)$, $i=1,2$, die in (ii) erklärten Größen sind.

(iv) Unter den Voraussetzungen von (1.37) an δ und m gilt mit den in (ii) und (iii) eingeführten Schranken T_v und T_v' für alle t mit $T_v'\le|t|\le T_v$ die Ungleichung

$$|f_v(t)-g(t)|\le\left(C_1''(\delta)t^2b_v^*+C_2''(\delta)|t|^3c_v\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right),\quad(1.39)$$

wobei $C_i''(\delta)$, $i=1,2$, die in (ii) erklärten Größen sind.

Zur Interpretation von Satz 1.12 sind mehrere Kommentare notwendig. Die Ungleichung (1.36) ist das Analogon zu Satz 1.8 im Fall der gewichteten Summation und wurde in dieser Form in |175| benutzt und bewiesen. Die Ungleichungen (1.37) bis (1.39) sind in |187| hergeleitet worden. Wie bereits nach Satz 1.11 bemerkt wurde, gilt auch hier für (1.39) die Feststellung, daß nur im Fall eines nichtentarteten t-Intervalls, d.h. $T'_v \leq T_v$, die Ungleichung (1.39) von Interesse ist.

Die Bedeutung von (1.36) (und auch von (1.22) oder (1.28)) besteht darin, daß ein Zusammenhang zwischen den Schranken l^3 an die abgeschnittenen Momente und T_v (bzw. T_n) als t-Schranke einerseits und den angegebenen Fehlerschranken andererseits klar herausgestellt wurde und einzig und allein über die Konstanten a_i, i=1,2 , beschrieben ist. Spätere Anwendungen dieser Fehlerabschätzungen in Glättungsungleichungen vom Typ (0.18) oder (0.19) zeigen die Wirksamkeit dieser Abschätzungen.

In den Ungleichungen (1.37) bis (1.39) liegt eine ähnliche Situation vor. Zwei positive Parameter beschreiben den Zusammenhang zwischen t-Intervallen und Fehlerschranken (Parameter δ und m). Jedoch werden hier nicht die abgeschnittenen Momente durch diese Parameter beschränkt so daß ein höherer Allgemeinheitsgrad im Vergleich zu (1.36) vorliegt. Damit fallen aber erwartungsgemäß die Fehlerschranken nicht ganz so günstig wie in (1.36) aus. Als Anwendung seien hier die lokalen Grenzwertsätze für Dichten genannt, vgl. Glättungsungleichung (0.21), wo man von vornherein nicht von einer bestimmten Kleinheit der Momentencharakteristik ausgehen darf, wie das bei integralen Grenzwertsätzen wegen der Ungleichung (0.4) der Fall ist. In |187| werden Folgerungen aus (1.37) angegeben, die dann einen Vergleich mit entsprechenden Resultaten von PETROV(1975,1987), s. Lemma 1 in Kap. V, § 2, MEREDOV (1979), s. Lemma 2, oder WOLF(1985), s.S.246, Formel (7), zulassen und den Allgemeinheitsgrad dieser Abschätzungen verdeutlichen.

Im folgenden Satz werden Abschätzungen für $f_v(t)$ und die Ableitungen $f'_v(t)$ und $f''_v(t)$ angegeben, die als Lemma 2 in |181| abgeleitet wurden. Es werden dazu noch folgende Bezeichnungen bereitgestellt:
Das System (A_k), $k\in N_o$, der bisher betrachteten BOREL-Mengen bezeichnen wir kurz durch $\mathcal{A}$ und schreiben $b^*_v = b^*_v(\mathcal{A})$. Analog dem abgeschnittenen Moment $c_v = c_v(\mathcal{A})$ definieren wir $L_v(\mathcal{A}) = B_v^{-4} \sum_{k\in N_o} \alpha_k^4(v) EX_k^4 \, 1\{\alpha_k(v)X_k \in A_k\}$ als Summe der abgeschnittenen 4. Momente. Sei $\rho_v = B_v^{-4} \sum_{k\in N_o} (EX_k^2)^2 \alpha_k^4(v)$.
In den folgenden Ausführungen werden nur solche Systeme $\mathcal{A}$ betrachtet, die

$$0 \leq b^*_v(\mathcal{A}) < \gamma < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq L_v(\mathcal{A}) < \infty \quad \text{für alle } v\in(0,1) \qquad (1.40)$$

bewirken. Dann sei die Größe $\tau_v(\gamma)>0$ definiert als Wurzel aus

$$\tau_v^2(\gamma) = \inf_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \rho_v + \frac{1}{6} L_v(\mathfrak{A})\right)/(\gamma - b_v^*(\mathfrak{A})) .$$

Satz 1.13. Es sei $\gamma\varepsilon(0,1)$ ein Parameter, mit dem die Bedingung (1.40) erfüllt sein soll, d.h. durch γ und (1.40) werde die Klasse der betrachteten Systeme $\mathfrak{A}$ beschrieben (bei Vorgabe der Folgen (X_k) und $(\alpha_k(v))$, $k\varepsilon N_o$). Wie in Satz 1.12 sei die Folge (X_k), $k\varepsilon N_o$, zentriert und besitze 2. Momente.

Dann gilt für alle t mit $|t| \leq \tau_v^{-1}(\gamma)$ und $s= 0,1,2$:

$$\left| \frac{d^s}{dt^s} f_v(t)\right| \leq e^{s/2}(\delta_{2s} +|t|^s)\exp\left(-\frac{1}{2}(1-\gamma)t^2\right) , \qquad (1.41)$$

wobei $\delta_{2s}=0$ für $s=0,1$ und $\delta_{2s}=1$ für $s=2$ ist.

Die Bedeutung von (1.41) besteht neben der Abschätzung der Ableitungen darin, daß die abgeschnittenen Momente sowohl im t-Intervall als auch in der Fehlerschranke nicht explizit auftreten und eine recht einfache Darstellung mit Hilfe des Parameters γ gefunden wurde. Ist nur ein konkretes System $\mathfrak{A}$ von Interesse, entfällt die Infimum-Bildung in der Definition von $\tau_v(\gamma)$ und somit wird diese t-Schranke wieder konkret durch die vorliegenden abgeschnittenen Momente beschrieben. In (1.41) kann dann ebenfalls γ durch $B_v^*(\mathfrak{A})$ abgeschätzt werden.

Verblüffend einfach erscheint die in (1.41) auftretende Konstante $e^{s/2}$. In |181| werden noch andere t-Schranken vom Typ $\tau_v(\gamma)$ diskutiert, wie sie bei MEREDOV (Kand. Diss. 1978) oder ROZOVSKIJ(1974) aufgetreten sind. Der Beweis von Satz 1.13 wird mit Hilfe von Satz 1.2 geführt, vgl. |181|. Abschätzungen des Typs (1.41) findet man z.B. auch in BHATTACHARYA|RAO(1976), s. Lemma 14.3, bei GAFUROV(1972), ROZOVSKIJ (1974) und in |177|.

Eine Anwendung von Satz 1.13 ergibt sich im Zusammenhang mit der Herleitung einfacher asymptotischer Entwicklungen im Kapitel 3, vgl. auch |181|, Satz 1 und 5 .

(ii) eine asymptotische Entwicklung: Es sei $\pi_v(t)$ die bereits in (0.14) angegebene Größe. Für die Entwicklung von $f_v(t)$ in (0.14) schreiben wir kurz $w_v(t) = f_v(t) - g(t)(1+\pi_v(t))$.

Neben ρ_v und $\tau_v(\gamma)$ wird die Momentencharakteristik

$$\Psi_v = \inf_{\mathfrak{A}} \left(b_v^*(\mathfrak{A})+|B_v^{-3} \sum_{k\varepsilon N_o} \alpha_k^3(v)EX_k^3 \, 1\{\alpha_k(v)X_k\varepsilon A_k\}| +L_v(\mathfrak{A})\right)$$

eingeführt, vgl. |181|.

Der folgende Satz enthält eine allgemeine Aussage über die Stuktur des Restgliedes in der asymptotischen Zerlegung $w_v(t)$.

Satz 1.14. Wie im Satz 1.12 sei die Folge (X_k), $k\in N_o$, zentriert und besitze 2. Momente. Weiterhin sei $(\alpha_k(v))$, $k\in N_o$, derart, daß für alle $v\in(0,1)$ die Momentencharakteristik $\psi_v < \infty$ ist.

Dann gilt für alle t mit $|t| \leq (2\psi_v)^{-1/4}$ und $s = 0,1,2$:

$$\left|\frac{d^s}{dt^s} w_v(t)\right| \leq C_s|t|^{4-s}(1+t^{2(s+2)})g(t)(\rho_v+\psi_v^2) ; \tag{1.42}$$

wobei $C_o<1.4$, $C_1<5.8$ und $C_2<38.04$ sind.

Zum Beweis dieses Satzes wird wieder auf |181| verwiesen.
Dieser Satz verallgemeinert entsprechende Aussagen von ROZOVSKIJ(1974, 1976), AZLAROV|MEREDOV(1977) und MEREDOV(1979) auf den Fall beliebiger Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))$, $k\in N_o$, und gibt außerdem eine Abschätzung der absoluten Konstanten C_s, $s=0,1,2$, und eine genaue Beschreibung der Nullpunktumgebung $|t| \leq (2\psi_v)^{-1/4}$ an.

Dieser Satz findet z.B. in der Ungleichung (0.20) Anwendung, um eine ungleichmäßige Restgliedabschätzung über die Methode der charakteristischen Funktionen ableiten zu können, s. auch |181|.

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Math. Nachr. 115 (1984) 201–214

Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Von Ludwig Paditz in Dresden

(Eingegangen am 15. 7. 1982)

Zusammenfassung

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind Fehlerabschätzungen im mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz, die auf dem bekannten LJAPUNOV-Bruch L_n basieren. Bei der Ableitung derartiger Fehlerschranken wird von der grundlegenden Fallunterscheidung $L_n \leqq \delta_k$ (s. (3)) und $L_n > \delta_k$ (s. (12)) ausgegangen. Nach einer Diskussion verschiedener in der Literatur benutzter Größen $\delta_k^{(\cdot)}$(s. (16), (17)) werden für den Fall $L_n \leqq \delta_k$ (Satz 1) und $L_n < \infty$ (Sätze 2 und 3) Fehlerabschätzungen für die Differenz von charakteristischen Funktionen, die bei den Untersuchungen zum zentralen Grenzwertsatz auftritt, abgeleitet. Die dabei auftretenden absoluten Konstanten werden genau bestimmt. Es ergeben sich Verallgemeinerungen bekannter Abschätzungen für die charakteristische Funktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen bzw. zufälliger Vektoren.

1. Einleitung

(i) Es seien $\{X^{(j)}\}_{j=1,2,\dots,n}$ eine Folge zentrierter zufälliger Vektoren im R^k mit endlichen dritten Momenten, d. h.

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{E}X^{(j)}=0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\,\|X^{(j)}\|^3<\infty, \quad j=1,2,\dots,n,$$

und $B_j=\operatorname{cov}(X^{(j)})$, $j=1,2,\dots,n$, die entsprechenden Kovarianzmatrizen. Mit $V=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B_j$ wird die gemittelte Kovarianzmatrix bezeichnet. Im Falle der Regularität von V werden die weiteren Betrachtungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall

$$\text{(2)} \qquad V=I$$

reduziert, wobei I die k-reihige Einheitsmatrix ist (vgl. [1] Abschnitt 16, S. 160). Wir definieren den Ljapunov-Bruch

$$L_n=n^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|X^{(j)}\|^3$$

und fordern mit einer positiven Zahl $\delta_k=\delta(k)$ eine gewisse Kleinheit der Charakteristik L_n:

$$\text{(3)} \qquad L_n \leqq \delta_k\,.$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Die auftretende Norm $\|\cdot\|$ sei hierbei stets die Euklidische Vektor- bzw. Matrixnorm. L_n erweist sich als Spezialfall folgender allgemeineren Charakteristik

$$\Lambda_{qn}(\varepsilon)=n^{-q/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|X^{(j)}\|^q\,\mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>\varepsilon\sqrt{n}\}},\quad q\geqq 2,\quad \varepsilon\geqq 0\,,$$

wobei $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion von A ist (vgl. (14.105) in [1]). Es gilt nun

$$L_n=\Lambda_{3n}(0)\,.$$

(ii) Neben der Folge $\{X^{(j)}\}_{j=1,2,\ldots,n}$ wird noch eine Folge $\{Y_\vartheta^{(j)}\}_{j=1,2,\ldots,n}$ unabhängiger Zufallsgrößen betrachtet, die zusätzlich von einem gewissen Parameter ϑ abhängen kann. Es seien

$$m_{\vartheta,j}=\mathbf{E}\,Y_\vartheta^{(j)},\quad \sigma_{\vartheta,j}^2=\mathbf{D}^2Y_\vartheta^{(j)}\quad\text{und}\quad \beta_{\vartheta,j}^3=\mathbf{E}\,|Y_\vartheta^{(j)}-m_{\vartheta,j}|^3$$

der Erwartungswert, die Streuung und das dritte absolute Moment von $Y_\vartheta^{(j)}$. Der Parameter ϑ sei derart, daß

$$0<s_{\vartheta,n}^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{\vartheta,j}^2<\infty \tag{4}$$

und

$$L_{3n}=s_{\vartheta,n}^{-3}\sum_{j=1}^{n}\beta_{\vartheta,j}^3<\infty \tag{5}$$

gilt.

Insbesondere ist ein Zusammenhang zu den Zufallsvektoren $X^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n$, gegeben, wenn $Y_\vartheta^{(j)}$ speziell als

$$Y_\vartheta^{(j)}=(\vartheta,X^{(j)}),\quad j=1,2,\ldots,n\,, \tag{6}$$

definiert wird, wobei für den Parameter ϑ jetzt

$$\vartheta\in R^k,\quad \|\vartheta\|=1 \tag{7}$$

gelten möge. Wie üblich wird hierbei mit $(.,.)$ das Skalarprodukt zweier k-dimensionaler Vektoren bezeichnet. Mit der Darstellung (6) gilt für die in (4) definierte Größe $s_{\vartheta,n}^2$:

$$s_{\vartheta,n}^2=\sum_{j=1}^{n}(\vartheta,B_j\vartheta)=nQ(\vartheta)\,, \tag{8}$$

wobei $Q(\vartheta)$ die quadratische Form

$$Q(\vartheta)=(\vartheta,V\vartheta),\quad \vartheta\in R^k,\quad \|\vartheta\|=1\,, \tag{9}$$

ist. Im Fall (2) ergibt sich sofort

$$s_{\vartheta,n}^2=n\,. \tag{10}$$

Weiterhin gilt mit der Darstellung (6) für die in (5) definierte Charakteristik L_{3n}:

$$L_{3n}=\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}^2(\vartheta,X^{(j)})\right)^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,|(\vartheta,X^{(j)}-\mathbf{E}X^{(j)})|^3,\quad \vartheta\in R^k,\quad \|\vartheta\|=1\,,$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wobei mit (2) unmittelbar

$$L_{3n}=n^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\,|(\vartheta,\,X^{(j)})|^3\leq L_n \tag{11}$$

folgt (vgl. LJAPUNOV-Koeffizient (8.10) in [1]). Schließlich sei noch erwähnt, daß sich mit einer geeigneten reellen Zahl $\lambda\in R^1$ jeder Vektor $t\in R^k$ über $\vartheta\in R^k$, $\|\vartheta\|=1$, in der Form

$$t=\lambda\vartheta$$

darstellen läßt. In diesem Fall gilt dann

$$Q(t)=\lambda^2Q(\vartheta)\quad\text{und es ist}\quad\lambda^2=\|t\|^2\,.$$

(iii) Die spezielle Problematik dieses Artikels hat beim zentralen Grenzwertsatz (ZGWS) ihren Ursprung und zwar in folgender Weise: Die Gültigkeit des ZGWS für die Summenverteilungsfunktion der Folge $\{X^{(j)}\}_{j=1,2,\ldots,n}$ folgt z. B. sofort aus der bekannten LJAPUNOV-Bedingung (vgl. (18.24) in [1])

$$\lim_{n\to\infty}L_n=0\,.$$

Die Bedingung (3) ist aber bereits hinreichend dafür, daß sich in entsprechenden Fehlerabschätzungen beim ZGWS quantitativ brauchbare Ergebnisse ableiten lassen. Andererseits ist (3) im Falle einer gleichmäßigen Fehlerabschätzung keine wesentliche Einschränkung für die Größenordnung von L_n, da im Fall

$$L_n>\delta_k \tag{12}$$

die bekannten gleichmäßigen Fehlerschranken i. a. keine guten quantitativen Fehlerabschätzungen liefern.

Jedoch erscheint im Falle ungleichmäßiger Fehlerabschätzungen beim ZGWS die Bedingung (3) etwas einschränkend, so daß deshalb bei der Herleitung derartiger Fehlerschranken sowohl der Fall (3) als auch der Fall (12) untersucht werden (vgl. [8]). Konkret finden wir diese Vorgehensweise bei V. I. ROTAR' [12], wo speziell mit der Größe

$$\delta_k=\delta_k^{(R)}=\frac{1}{8k^2}$$

gearbeitet wird und sich die Bedingung (3) insbesondere dann in der Voraussetzung (4.2) (s. [12], S. 655) widerspiegelt. In der Monographie von R. N. BHATTACHARYA und R. R. RAO [1] gibt es die Bedingung (3) in ähnlicher Form als (s. [1], Bedingung (14.20))

$$\Lambda_{qn}(1)\leq\delta_k$$

mit $\delta_k=\delta_k^{(B1)}=\dfrac{1}{8k}$ bzw.

$$\Lambda_{qn}(2/3)\leq\delta_k$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

mit $\delta_k = \delta_k^{(B2)} = c_{40}(q, k) = \dfrac{0{,}75^{q/2}}{16k}$ (s. [1], Bedingung (14.108), Darstellung von $c_{40}(s, k)$ s. [1], S. 142) und in der Form

(13) $\quad \Lambda_{sn}(0) < \delta_k$

mit $\delta_k = \delta_k^{(B3)} = c_{15}(s, k)$, $s \geqq 3$, s ganzzahlig, (s. [1], Bedingung (17.24)), wobei in [1] die Konstante c_{15} nicht konkret angegeben ist. [1]) Wie bereits oben erwähnt, sind die Bedingungen (3) bzw. (13) im Falle einer ungleichmäßigen Fehlerabschätzung etwas einschränkend, jedoch wird im Gegensatz zu V. I. Rotar' [12] in der Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] wieder an der Bedingung (13) festgehalten (s. [1], Theorem 17.6).

In einer Bemerkung zur ungleichmäßigen Fehlerabschätzung im mehrdimensionalen ZGWS versucht R. Michel [8], sich von dieser etwas unschönen Einschränkung (13) zu befreien und betrachtet jetzt allerdings für

$$\delta_k = \delta_k^{(M)} = \frac{1}{\alpha_{q,k}} = \min\left\{\frac{1}{3\,(k+1)}, \frac{c_{15}(s, k)}{2^{2s+1}}, \frac{c_{40}(s, k)}{2^{2s+1}}\right\}$$

mit

$$s = \begin{cases} \text{entier } (q) + 1, & \text{falls } q \notin N\,, \\ q\,, & \text{falls } q \in N\,, \end{cases}$$

die Fallunterscheidung

(14) $\quad \Lambda_{qn}(0) < \delta_k$

und

(15) $\quad \Lambda_{qn}(0) \geqq \delta_k$

mit $q > 2$.

Bemerkung. Offensichtlich gilt

(16) $\quad \delta_k^{(M)} \leqq \min\{\delta_k^{(B1)}, \delta_k^{(B2)}, \delta_k^{(B3)}\} \leqq \delta_k^{(B1)}$

und

(17) $\quad \delta_k^{(R)} \leqq \delta_k^{(B1)}$.

Es sei an dieser Stelle weiterhin nur bemerkt, daß die Herleitung von Fehlerabschätzungen im Fall (12) bzw. (15) relativ einfach ist und über die Untersuchung der „Schwänze" der Summenverteilungsfunktion und der approximierenden Normalverteilungsfunktion realisiert wird.

(iv) Die nun folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den anderen Fall $L_n \leqq \delta_k$, d. h. es wird die Bedingung (3) vorausgesetzt. In diesem Fall wird zur Herleitung einer Fehlerabschätzung gewöhnlich die auf A. Bikelis [3], S. 411, zurückgehende Methode der Abschneidung zufälliger Vektoren benutzt, die hier folgende Form haben soll:

(18) $\quad X^{(j,n)} = X^{(j)} 1_{\{\|X^{(j)}\| \leqq f(n)\}}$,

[1]) V. V. Sazonov benutzt in [13] für seine Betrachtungen ebenfalls den Wert $\delta_k = \dfrac{1}{8k}$ (vgl. [13], S. 43 Formel (5) und S. 61 Formel (63)).

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wobei $f(n)$ eine monoton gegen Unendlich wachsende Funktion von n ist (z. B. $f(n)=\varepsilon\sqrt{n}$, $\varepsilon>0$, oder $f(n)=r\,(1+\beta(A))\sqrt{n}$, $r>0$, vgl. R. Michel [9], Formel (20), R. Michel [8], Formel (9), A. Bikelis [3], S. 411, V. I. Rotar' [12], S. 655 und R. N. Bhattacharya/R. R. Rao [1], Formel (14.2)). Es sei nun

$$(19)\qquad \zeta_n=n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}^{(j,n)}$$

eine normierte Summe von abgeschnittenen Zufallsvektoren und

$$(20)\qquad \bar{f}_n(t)=\mathbf{E}\exp\,(i(t,\,\zeta_n)),\quad t\in R^k\,,$$

deren charakteristische Funktion. Der Inhalt des vorliegenden Artikels besteht darin, den Fehler abzuschätzen, der bei der Approximation von $\bar{f}_n(t)$ durch

$$(21)\qquad g(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\|t\|^2\right),\quad t\in R^k\,,$$

entsteht, wobei $g(t)$ die charakteristische Funktion der standardisierten Normalverteilung ist.

Derartige Abschätzungen sind der Ausgangspunkt, um dann über Umkehrformeln für die Fourier-Transformation (Fourier-Inversion) und unter Benutzung sogenannter Glättungsungleichungen Aussagen über die Annäherung der Verteilung von ζ_n (s. (19)) an die Normalverteilung treffen zu können.

Dieser Weg wird konsequent in der Arbeit von V. I. Rotar' [12] verfolgt und nimmt auch in der Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] breiten Raum ein. Ebenfalls finden wir eine solche Vorgehensweise z. B. bei Š. A. Mirachmedov [10] und der Monographie von S. Ch. Siraždinov und Š. K. Formanov [14].

2. Resultate

Mit den nun folgenden Ausführungen wird versucht, bekannte Abschätzungen der Differenz $\bar{f}_n(t)-g(t)$ zu verbessern und die dabei auftretenden Konstanten exakter zu berechnen. Dabei wird andererseits gleichzeitig angestrebt, die Voraussetzung (3) so allgemein wie möglich zu gestalten, d. h. die Schranke δ_k nicht so klein zu halten, wie es in den bisher vorliegenden Arbeiten der Fall war (vgl. Ungleichungen (16) und (17)). Konkrete Beispiele werden daher auf den Fall $\delta_k=\delta_k^{(B1)}$ bezogen. Es seien

$$\varepsilon=\varepsilon_n=n^{-1/2}f(n),\quad \gamma=\gamma_k=k\delta_k\quad\text{und}\quad \bar{d}$$

drei positive Größen mit der Eigenschaft

$$(22)\qquad \varepsilon^{-1}\gamma\,(1+\varepsilon^{-3}\gamma)<1\quad\text{bzw.}\quad \bar{d}<3/2\,.$$

Anschaulich bedeutet hierbei ε das Verhältnis aus Wachstumsgeschwindigkeit $f(n)$ zu $\sqrt{n}$, wobei $f(n)$ als Abschneidungsfunktion in (18) auftritt. In vielen An-

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wendungsfällen ist ε von n unabhängig und es gilt z. B. $\varepsilon=1$ oder $\varepsilon=2/3$. Die Größe γ ist die k-fache Schranke aus (3) und z. B. im Fall $\delta_k=\delta_k^{(B1)}$ von k unabhängig. Die Zahl $\bar{d}$ schließlich ist eine vom Folgenindex n und von der Dimension k unabhängige Konstante und dient mit zur Begrenzung eines symmetrisch um Null liegenden t-Intervalls (Kugel). Die Ungleichungen (22) sind beweistechnischer Natur und stellen für die praktisch interessanten Fälle keine Einschränkung dar. Weiterhin werden mit C_i, $i=0, 1, \ldots, 4$, folgende Konstanten bezeichnet:

$$C_0=C_0(\bar{d}, \varepsilon, \gamma)=\bar{d}\,(1-\varepsilon^{-1}\gamma\,(1+\varepsilon^{-3}\gamma))\,(1+\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3}\,(3+\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3}))^{-1},$$

$$C_1=C_1(\bar{d}, \varepsilon, \gamma)=C_3\,(1+\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3}\,(3+\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3}))$$
$$+\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-3}\gamma)+\varepsilon^{-2}\right)\exp\left(\frac{3}{4\bar{d}}\varepsilon^{-4}\gamma^2\,(1-\varepsilon^{-1}\gamma\,(1+\varepsilon^{-3}\gamma))^{-1}\right),$$

$$C_2=C_2(\bar{d}, \varepsilon, \gamma)=C_4\,(1-\varepsilon^{-1}\gamma\,(1+\varepsilon^{-3}\gamma)),$$

$$C_3=0{,}79325$$

und

$$C_4=C_4(\bar{d})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,\bar{d}\,.$$

Der Satz 1 stellt eine Verallgemeinerung des Lemmas 6 aus der Arbeit [12] von V. I. Rotar' dar.

Satz 1. *Die Bedingungen* (1) *bis* (3) *und* (22) *seien erfüllt. Dann gilt für alle* $t\in R^k$ *mit* $\|t\|\leq T_n=C_0/L_n$ *die Ungleichung*

$$|\bar{f}_n(t)-g(t)|\leq C_1kL_n\max(1, \|t\|^3)\exp(-C_2\|t\|^2), \tag{23}$$

wobei $\bar{f}_n(t)$ *und* $g(t)$ *die in* (20) *bzw.* (21) *definierten charakteristischen Funktionen sind.*

Im Lemma 6 von V. I. Rotar [12] wurde für C_2 konkret der Wert 1/4 erreicht, allerdings für ein recht schmales t-Intervall (Kugel) mit $C_0=1/30$ und die bereits oben erwähnte relativ kleine Schranke $\delta_k^{(R)}$.

In der Monograhpie [1] von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao wird schon mit dem größeren Wert $C_0=1/16$ (s. z. B. (14.26) in [1]) und den in der Einleitung angegebenen Schranken $\delta_k^{(B1)}$ bis $\delta_k^{(B3)}$ gerechnet.

Die Folgerung 1 enthält nun eine spezielle Ungleichung, die illustrieren soll, welche Intervallbreiten T_n für $\|t\|$ und Schranken δ_k für L_n sogar möglich sind unter der Maßgabe, in der Ungleichung (23) den Wert $C_2=1/4$ zu garantieren.

Um einen Vergleich zu Rotar's Ergebnis anstellen zu können, sei $\varepsilon=1$. Mit Blick auf die Größen $\delta_k^{(\cdot)}$, die insbesondere in der Monographie [1] von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao sowie bei R. Michel [8] benutzt wurden (s. o. (16) und (17)), wählen wir $\delta_k=\delta_k^{(B1)}$.

Folgerung 1. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *mit* $\varepsilon=1$ *und* $\delta_k=\dfrac{1}{8k}$ *gilt für alle* $t\in R^k$ *mit* $\|t\|\leq C_0/L_n$ *die Ungleichung*

$$|\bar{f}_n(t)-g(t)|\leq C_1kL_n\max(1, \|t\|^3)\exp\left(-\frac{1}{4}\|t\|^2\right), \tag{24}$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wobei C_0 und C_1 folgende Konstanten sind:

$$C_0 = \frac{69}{232} = 0{,}2974\ldots$$

und

$$C_1 = \frac{1}{16}(29C_3 + 25e^{1/46}) = 3{,}0346\ldots$$

Bei V. I. Rotar [12] waren keine Angaben zur Größenordnung von C_1 gemacht worden und in der Abschätzung (24) stand anstatt k noch der ungünstigere Faktor k^2.

In Satz 2 wird die charakteristische Funktion der normierten Summe einer Folge nicht abgeschnittener zufälliger Vektoren betrachtet, d. h. es sei $\varepsilon = \infty$. Entsprechend (20) sei $f_n(t)$ folgende Funktion:

$$f_n(t) = \mathbf{E} \exp\left(i\left(t, n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}^{(j)}\right)\right), \quad t \in R^k. \tag{25}$$

Da jetzt das „Schwanz"-Verhalten der Verteilungen der $\mathbf{X}^{(j)}$ im Gegensatz zu (20) bereits in $f_n(t)$ Berücksichtigung findet, wird damit dann auch eine Bedingung der Form (3) überflüssig, d. h. δ_k kann in (3) beliebig groß sein. Die Bedingung $L_n < \infty$ ist durch (1) schon gegeben.

Satz 2. *Es seien die Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt. Dann gilt für alle* $t \in R^k$ *mit* $\|t\| \leq \bar{d}/L_n$, $\bar{d} \in (0{,}3/2)$, *die Ungleichung*

$$|f_n(t) - g(t)| \leq C_3 L_n \|t\|^3 \exp(-C_4\|t\|^2), \tag{26}$$

wobei $f_n(t)$ *und* $g(t)$ *die charakteristischen Funktionen in* (25) *bzw.* (21) *sind.*

Im Vergleich zu Satz 1 ist in der Fehlerschranke (26) der Faktor k entfallen und der Faktor $\max(1, \|t\|^3)$ wurde durch $\|t\|^3$ ersetzt.

Bemerkung. Die Ungleichung (26) bleibt richtig, wenn die Größe L_n durch die kleinere Charakteristik L_{3n} ersetzt und außerdem das t-Intervall zu $\|t\| \leq \bar{d}/L_{3n}$ vergrößert wird (vgl. (11)).

Auf Grund der soeben getroffenen Bemerkung und unter Beachtung des Abschnittes (ii) der Einleitung läßt sich folgende leichte Modifikation des Satzes 2 formulieren:

Satz 3. *Die Bedingungen* (4) *und* (5) *mögen erfüllt sein. Dann gilt für alle* $\lambda \in R^1$ *mit* $|\lambda| \leq \bar{d}/L_{3n}$, $\bar{d} \in (0{,}3/2)$, *die Ungleichung*

$$\left|\mathbf{E} \exp\left(i\lambda \frac{1}{s_{\theta,n}} \sum_{j=1}^{n} (Y_\theta^{(j)} - m_{\theta,j})\right) - e^{-\lambda^2/2}\right| \leq C_3 L_{3n} |\lambda|^3 \exp(-C_4\lambda^2). \tag{27}$$

Es ist offensichtlich, daß auf Grund der Definition (6) und der danach folgenden Ausführungen die Ungleichung (26) sofort als Spezialfall aus (27) folgt.

In der Folgerung 2 wird der Satz 1 aus der Arbeit [2] von A. Bikelis im Spezialfall $s = 3$, d. h. der Existenz dritter Momente, verschärft. Ausgangspunkt ist

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wieder die Darstellung (6) mit $\mathbf{E}\mathbf{X}^{(j)}=0, j=1,2,\ldots,n$. Es seien jetzt die Bedingungen (2) und damit (10) nicht notwendig erfüllt, d. h. V ist nicht notwendig regulär. Wir setzen in Satz 3

$$\lambda=\frac{\|t\|}{\sqrt{n}}s_{\vartheta,n} \quad \text{und} \quad \vartheta=\frac{1}{\|t\|}t$$

und erhalten unter Beachtung von (8)

Folgerung 2. *Es gelte* $0<Q(t)<\infty$ *und* $\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,|(t,\mathbf{X}^{(j)})|^3<\infty$. *Dann gilt für alle* $t\in R^k$ *mit* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathbf{E}\,|(t,\mathbf{X}^{(j)})|^3}{Q(t)}\leqq \bar{d}n^{1/2}$ *die Ungleichung*

$$\left|\mathbf{E}\exp\left(i\left(\frac{t}{\sqrt{n}},\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}^{(j)}\right)\right)-e^{-\frac{1}{2}Q(t)}\right| \tag{28}$$
$$\leqq C_3 n^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,|(t,\mathbf{X}^{(j)})|^3\exp\left(-C_4Q(t)\right).$$

In dem bei A. Bikelis [2] betrachteten Fall $\bar{d}=1/8$ ergibt sich in (28) $C_4=$ $=11/24$. In der eben genannten Arbeit [2] waren die Konstanten nur als $C_3=$ $=(2/0{,}99)^2=4{,}08\ldots$ und $C_4=1/4$ angegeben. Im Satz 2 in [2] fällt (im Fall $r=0$ und $s=3$) die hier als C_3 bezeichnete Konstante noch ungünstiger aus.[2])

Die Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] enthält ähnliche Abschätzungen wie im Satz 3 bzw. Folgerung 2 (s. Theorem 9.9 und dessen Folgerungen) und zwar bereits für den Fall asymptotischer Entwicklungen und partieller Ableitungen der betrachteten charakteristischen Funktionen. Allerdings wird in [1] generell mit der Konstanten $C_4=1/4$ gearbeitet, da dort quantitative Untersuchungen noch nicht von Interesse sind. In [1] wird weiterhin über die Konstanten $\bar{d}$ und C_3 bis auf deren Existenz keine konkrete Aussage getroffen, so daß auf einen weiteren Vergleich mit den Ergebnissen in [1] nicht eingegangen werden kann.

Die Sätze 2 und 3 stellen eine Verallgemeinerung entsprechender Ungleichungen aus den bekannten Monografien von B. V. Gnedenko und A. N. Kolmogorov [5], von I. A. Ibragimov und J. V. Linnik [6] sowie M. Loéve [7] und V. V. Petrov [11] dar, die hier in den Folgerungen 3 und 4 diskutiert werden sollen.

Folgerung 3. *Es sei* $\bar{d}=1/5$. *Dann gilt für die Konstante* C_4 *in den Ungleichungen* (26) *und* (27)

$$C_4=13/30.$$

In Satz 2, S. 203, der Monographie von B. V. Gnedenko und A. N. Kolmogorov [5] sowie im Satz 3.2.1, S. 95, der Monographie von I. A. Ibragimov und J. V. Linnik [6] wurden für den Spezialfall $\bar{d}=1/5$ die ungünstigeren Konstanten $C_3==7/6$ und $C_4=1/4$ angegeben. Dabei wurden außerdem nur der Fall identisch verteilter Zufallsgrößen betrachtet (vgl. auch Lemma 2, S. 6, in [13]).

[2]) Vgl. auch Lemma 2. (a) in B. von Bahr, Multi-dimensional integral limit theorems, Arkiv för Matem. 7, H. 1 (1967), S. 72.

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Folgerung 4. *Es sei $\bar{d}=1/4$. Dann gilt für die Konstante C_4 in den Ungleichungen* (26) *und* (27)

$$C_4=5/12\,.$$

Auf S. 300 in der Monographie von M. Loève [7] und im Lemma 1, S. 109, der Monographie von V. V. Petrov [11] wurden für diesen Spezialfall $\bar{d}=1/4$ die ungünstigeren Konstanten $C_3=16$ und $C_4=1/3$ angegeben, wobei dort bereits der Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen betrachtet wurde.

Bemerkung. In der Monographie von W. Feller [4] wird auf S. 621, Formel (5.7), speziell für $\bar{d}=1$ ebenfalls eine Ungleichung vom Typ (26) bzw. (27) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen abgeleitet, dabei werden dort für C_3 der kleinere Wert 5/12 aber für C_4 der ungünstigere Wert 1/12 erhalten.

Die Sätze 2 und 3 sind weiterhin das wesentliche Hilfsmittel, um die Ungleichung (23) des Satzes 1 ableiten zu können. Jedoch werden hier im Gegensatz zu (6) die Zufallsgrößen $Y_\vartheta^{(j)}$ wie folgt festgelegt:

$$Y_\vartheta^{(j)}=(\vartheta,\, X^{(j,n)}),\quad j=1,2,\dots,n\,, \tag{29}$$

Hierbei sind $X^{(j,n)}$ die in (18) eingeführten abgeschnittenen Zufallsvektoren und ϑ der in (7) charakterisierte Parameter.

Es seien

$$\bar{\mu}_n=n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}X^{(j,n)}\quad\text{und}\quad \widetilde{\sum}_n=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}\,(X^{(j,n)})$$

der Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix des zufälligen Vektors ζ_n (s. (19)).

Die eindimensionale Größe λ in (27) wird nun wie vor Folgerung 2 festgelegt, d. h. $\lambda=\dfrac{\|t\|}{\sqrt{n}}\,s_{\vartheta,n}$, und wir erhalten entsprechend der Gleichungen (8) und (9) die Beziehung

$$\lambda^2=(t,\,\widetilde{\sum}_n t)\,. \tag{30}$$

Folgerung 5. *Für in das Satz 1 betrachtete t-Intervall $\|t\|\leqq T_n$ ergibt sich mit* (30) *das λ-Intervall $|\lambda|\leqq\bar{d}/L_{3n}$, für das mit* (27) *die elementare Ungleichung*

$$\begin{aligned}|\bar{f}_n(t)-g(t)|\leqq{}&C_3n^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\beta_{\vartheta,j}^3\|t\|^3\exp\left(-C_4(t,\,\widetilde{\sum}_n t)\right)\\&+\left(\frac{1}{2}\|t\|^2\,\|\widetilde{\sum}_n-I\|+\|t\|\,\|\bar{\mu}_n\|\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\|t\|^2\left(1-\|\widetilde{\sum}_n-I\|\right)+\|t\|\,\|\bar{\mu}_n\|\right)\end{aligned} \tag{31}$$

folgt.

Aus dieser Folgerung wird nun mittels des nachstehenden Lemmas 1 die Ungleichung (23) des Satzes 1 abgeleitet.

Lemma 1. *Es gelten folgende Abschätzungen:*

(i) $\|\bar{\mu}_n\|\leqq\varepsilon^{-(q-1)}\sqrt{k}\,\Lambda_{qn}(\varepsilon),\quad q\geqq1,$

(ii) $\|\widetilde{\sum}_n-I\|\leqq\varepsilon^{-(q-2)}k\Lambda_{qn}(\varepsilon)\,(1+\varepsilon^{-q}\Lambda_{qn}(\varepsilon))$
$\qquad\leqq\varepsilon^{-(q-2)}\,(1+\varepsilon^{-q}\delta_k)\,k\Lambda_{qn}(0),\quad q\geqq2\,,$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

wobei die letzte Ungleichung unter der Voraussetzung (14) *erhalten wird.*

(iii) *Für die quadratische Form von* $\widetilde{\sum}_n$ *gilt*

$$(t, \widetilde{\sum}_n t) \geqq (1 - \|\widetilde{\sum}_n - I\|) \|t\|^2 \geqq (1 - \gamma\varepsilon^{-(q-2)} (1 + \varepsilon^{-q}\delta_k)) \|t\|^2, \quad q \geqq 2\,,$$

wobei die letzte Ungleichung wieder unter der Voraussetzung (14) *erhalten wird.*

(iv) *Unter der Bedingung* (14) *mit* $q=3$ *bzw.* (3) *gilt*

$$n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} \beta_{s,j}^3 \leqq (1 + 3\varepsilon^{-2} \sqrt{k}\delta_k^{2/3} + \varepsilon^{-4} k \delta_k^{4/3})\, \Lambda_{3n}(0)\,.$$

Die Ungleichungen des Lemmas 1 haben auch eigenständige Bedeutung und finden in anderen Zusammenhängen Anwendung. Im Fall $\varepsilon = 1$ folgt z. B. aus (i) die Ungleichung (11) von R. MICHEL [8] (vgl. auch Ungleichung (23) von R. MICHEL [9]).

Ebenfalls für $\varepsilon = 1$ ergeben sich aus (ii) die Ungleichung (12) in [8] und die Abschätzung (14.19) in der Monographie von R. N. BHATTACHARYA und R. R. RAO [1] (vgl. auch Ungleichung (24) in [9] sowie (11) in V. V. SAZONOV [13], S. 44).

3. Beweise

Zum Beweis des Satzes 1. Aus Folgerung 5 ergibt sich unter Benutzung von Lemma 1

$$\begin{aligned}|\tilde{f}_n(t) - g(t)| \leqq{} & C_3\,(1 + 3\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3} + \varepsilon^{-4}\gamma^{4/3})\, \|t\|^3 L_n \\ & \cdot \exp\,(-C_4\,(1 - \varepsilon^{-1}\gamma\,(1 + \varepsilon^{-3}\gamma))\, \|t\|^2) \\ & + \left(\frac{1}{2}\|t\|^2\varepsilon^{-1}\,(1 + \varepsilon^{-3}\gamma)\, k + \|t\|\, \varepsilon^{-2}\sqrt{k}\right) L_n \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|t\|^2\,(1 - \varepsilon^{-1}\gamma\,(1 + \varepsilon^{-3}\gamma)) + \|t\|\,\varepsilon^{-2}\gamma\right).\end{aligned}$$

Nach Ausklammern des Faktors $\exp\,(-C_2 \|t\|^2)$ aus beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Ungleichung verbleibt im zweiten Summanden der Restexponent

$$-\frac{1}{3}\bar{d}\,(1 - \varepsilon^{-1}\gamma\,(1 + \varepsilon^{-3}\gamma))\,\|t\|^2 + \varepsilon^{-2}\gamma\,\|t\|\,,$$

der für

$$\|t\| = \varepsilon^{-2}\gamma\frac{3}{2\bar{d}}\,(1 - \varepsilon^{-1}\,(1 + \varepsilon^{-3}\gamma))^{-1}$$

maximal wird. Mit dem soeben genannten Wert für $\|t\|$ läßt sich der verbliebene Restfaktor abschätzen durch

$$C_1 k L_n \max\,(1, \|t\|^3)\,.$$

Damit ist die Ungleichung (23) bewiesen. In Ergänzung der Bemerkungen zum Erhalt der Folgerung 1 sei noch bemerkt, daß $\bar{d} = 69/110$ gewählt wurde.

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Zum Beweis der Sätze 2 und 3. Wie bereits oben bemerkt wurde, ist Satz 2 ein Spezialfall des eigentlichen Hauptergebnisses dieses Artikels, des Satzes 3. Innerhalb des nun folgenden Beweises sei

$$f_n(\lambda)=\mathrm{E}\exp\left(\mathrm{i}\lambda\frac{1}{s_{\vartheta,n}}\sum_{j=1}^{n}(Y_\vartheta^{(j)}-m_{\vartheta,j})\right)$$

and

$$g(\lambda)=\exp(-\lambda^2/2).$$

Für $|\lambda|\le\min(dL_{3n}^{-1/3},\bar{d}L_{3n}^{-1})$ mit $d\in(0,\sqrt{2})$ und $\bar{d}\in(0,3/2)$ folgt entsprechend dem Beweis zu Theorem 8.4 in der Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] mit

$$a(d)=d^{-4}(-\ln(1-d^2/2)-d^2/2)$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|f_n(\lambda)-g(\lambda)|\\
&\le\left(da(d)+\frac{1}{6}\right)L_{3n}|\lambda^3|\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}+\left(da(d)+\frac{1}{6}\right)L_{3n}|\lambda|^3\right)\\
&\le\left(da(d)+\frac{1}{6}\right)\exp\left(d^3\left(da(d)-\frac{1}{6}\right)^+\right)L_{3n}|\lambda|^3\exp\left(-\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\bar{d}}{3}\right)\right)\\
&=C_3L_{3n}|\lambda|^3\exp(-C_4\lambda^2),
\end{aligned}$$

falls

$$d=1{,}243841\ldots$$

gewählt wird.

Damit ist im Fall $dL_{3n}^{-1/3}\ge\bar{d}L_{3n}^{-1}$ der Satz 3 bewiesen. Genau für $L_{3n}<(\bar{d}/d)^{3/2}$ gilt $dL_{3n}^{-1/3}<\bar{d}L_{3n}^{-1}$ und es ist somit noch der Fall $|\lambda|\in[dL_{3n}^{-1/3},\bar{d}L_{3n}^{-1}]$ zu untersuchen. Entsprechend dem Theorem 8.9 in der Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] folgt jetzt

$$|f_n(\lambda)|\le\exp\left(-\lambda^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\bar{d}}{3}\right)\right)\le d^{-3}|\lambda|^3L_{3n}\exp(-C_4\lambda^2).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
|g(\lambda)|&=\exp\left(-\lambda^2/2+\frac{1}{3}L_{3n}|\lambda|^3-\frac{1}{3}L_{3n}|\lambda|^3\right)\\
&\le d^{-3}\exp(-d^3/3)\,|\lambda|^3L_{3n}\exp(-C_4\lambda^2).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|f_n(\lambda)-g(\lambda)|&\le(1+\exp(-d^3/3))\,d^{-3}|\lambda|^3L_{3n}\exp(-C_4\lambda^2)\\
&=C_3|\lambda|^3L_{3n}\exp(-C_4\lambda^2),
\end{aligned}$$

falls

$$d=1{,}243841\ldots$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

gilt. Damit ist Satz 3 bewiesen. Die erste Aussage der Folgerung 5 erhält man mittels (iii) und (iv) aus Lemma 1 und zwar gilt

$$|\lambda|\left(\frac{d}{L_{3n}}\right)^{-1}=\frac{1}{d}\,\frac{\sum_{j=1}^{n}\beta_{\theta,j}^{3}}{n^{3/2}(t,\,\tilde{\Sigma}_n t)}\|t\|^3\le\frac{1}{d}\,\frac{n^{3/2}\|t\|^3\,(1+3\varepsilon^{-2}\gamma^{2/3}+\varepsilon^{-6}\gamma^{4/3})}{n^{3/2}\|t\|^2\,(1-\gamma\varepsilon^{-1}\,(1+\varepsilon^{-3}\gamma))}\,L_n$$
$$\le\|t\|\,L_n/C_0\le 1\,,$$

d. h. es ist

$$|\lambda|\le d/L_{3n}\,.$$

Weiter ergibt sich nun

$$|\tilde{f}_n(t)-g(t)|$$
$$=\left|\mathbf{E}\exp\left(i\lambda\frac{1}{s_{\theta,n}}\sum_{j=1}^{n}(Y_\theta^{(j)}-m_{\theta,j})\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\|t\|^2-i(t,\,\bar{\mu}_n)\right)\right|$$
$$\le\left|\mathbf{E}\exp\left(i\lambda\frac{1}{s_{\theta,n}}\sum_{j=1}^{n}(Y_\theta^{(j)}-m_{\theta,j})\right)-\exp\,(-\lambda^2/2)\right|$$
$$+\left|\exp\left(-\frac{1}{2}\|t\|^2-i(t,\,\bar{\mu}_n)\right)-\exp\,(-\lambda^2/2)\right|\,.$$

Der letzte Summand wird umgeformt in

$$\exp\,(-\|t\|^2/2)\left|1-\exp\left(-\frac{1}{2}(t,\,(\tilde{\Sigma}_n-I)\,t)+i(t,\,\bar{\mu}_n)\right)\right|$$

Unter Ausnutzung der Ungleichung $|1-e^z|\le|z|\,e^{|z|}$ und des Satzes 3 folgt hieraus die Abschätzung (31).

Zum **Beweis** des Lemmas 1. Es sei $X^{(j,n)}=(X_1^{(j,n)},\,X_2^{(j,n)},\,\dots,\,X_k^{(j,n)})'$.

(i) Aus der Bedingung (1) folgt $\mathbf{E}X_p^{(j)}=0$, $p=1,\,2,\,\dots,\,k$, und wir erhalten damit die Ungleichungskette

$$\|\bar{\mu}_n\|=n^{-1/2}\sqrt{\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}X_p^{(j,n)}\right)^2}\le n^{-1/2}\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{E}X_p^{(j,n)}|\right)$$
$$=n^{-1/2}\sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|\mathbf{E}X_p^{(j)}\,\mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}|$$
$$\le n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\sum_{p=1}^{k}|X_p^{(j)}|\,\mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}\,,$$

die sich mittels der Hölder-Ungleichung ([1] Formel (6.26)) weiter abschätzen läßt durch

$$n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}k^{1/2}\sqrt{\sum_{p=1}^{k}(X_p^{(j)})^2\,\mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}}$$
$$=\sqrt{\frac{k}{n}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|X^{(j)}\|\,\mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}\,.$$

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

$$\leq \sqrt{\frac{k}{n}} \sum_{j=1}^{n} (f(n))^{-(q-1)} \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}$$

$$= \varepsilon^{-(q-1)} k^{1/2} n^{-q/2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}.$$

(ii) Entsprechend dem Beweis zu Korollar 14.2 in der Monographie von R. N. Bhattacharya und R. R. Rao [1] erhalten wir bei genauerer Abschätzung

$$\|\tilde{\textstyle\sum}_n - I\| = \sup_{\|t\|\leq 1} |(t, (\tilde{\textstyle\sum}_n - I)\, t)|$$

$$\leq \sup_{\|t\|\leq 1} \sum_{p,q=1}^{k} |t_p|\, |t_q| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{cov}\,(X_p^{(j,n)}, X_q^{(j,n)}) - \mathrm{cov}\,(X_p^{(j)}, X_q^{(j)})|$$

$$= \sup_{\|t\|\leq 1} \sum_{p,q=1}^{k} |t_p|\, |t_q| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{E}(X_p^{(j,n)} X_q^{(j,n)} - X_p^{(j)} X_q^{(j)}) - \mathbf{E}X_p^{(j,n)} \mathbf{E}X_q^{(j,n)}|$$

$$\leq \sup_{\|t\|\leq 1} \sum_{p,q=1}^{k} |t_p|\, |t_q| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (|\mathbf{E}X_p^{(j)} X_q^{(j)} \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}|$$

$$+ |\mathbf{E}X_p^{(j)} \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}|\, |\mathbf{E}X_q^{(j)} \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}|)$$

$$\leq \frac{k}{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^2 \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}} + (\mathbf{E}\, \|X^{(j)}\| \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}})^2)$$

$$\leq \frac{k}{n} \sum_{j=1}^{n} ((f(n))^{-(q-2)} \mathbf{E}\, |X^{(j)}|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}$$

$$+ (f(n))^{-2(q-1)} (\mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}})^2)$$

$$= \varepsilon^{-(q-2)} k n^{-q/2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}$$

$$\cdot \left(1 + \varepsilon^{-q} n^{-q/2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^q \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}\right).$$

(iii) Diese Abschätzung folgt mit (14) unmittelbar aus (ii).

(iv) Aus der Definition von $\beta^3_{\vartheta,j}$ ergibt sich die Ungleichungskette

$$\beta^3_{\vartheta,j} \leq \mathbf{E}(Y_\vartheta^{(j)} - m_{\vartheta,j})^2 (|Y_\vartheta^{(j)}| + |m_{\vartheta,j}|)$$

$$\leq \mathbf{E}(|Y_\vartheta^{(j)}|^3 + 3\, (Y^{(j)})^2\, |m_{\vartheta,j}| + m^2_{\vartheta,j} \mathbf{E}\, |Y_\vartheta^{(j)}|)$$

$$\leq \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^3 + 3\mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^2\, \|\mathbf{E}X^{(j)} \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}\|$$

$$+ \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|\, \|\mathbf{E}X^{(j)} \, \mathbf{1}_{\{\|X^{(j)}\|>f(n)\}}\|^2$$

$$\leq \mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^3\, (1 + 3(f(n))^{-2} k^{1/2} (\mathbf{E}\, \|X^{(j)}\|^3)^{2/3} + (f(n))^{-4} k (\mathbf{E}\|X^{(j)}\|^3)^{4/3}).$$

Hieraus folgt die letzte Abschätzung des Lemmas 1.

1.2.4 Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |177| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnittes wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Literatur

[1] R. N. Bhattacharya/R. R. Rao, Normal Approximation and Asymptotic Expansions, Wiley – New York 1976
[2] А. Бикялис, О многомерных характеристических функциях, Liet. matem. rink. VIII, Nr. 1 (1968) 21–39
[3] А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинакого распределенных случайных, векторов, Liet. matem. rink. VIII, Nr. 3 (1968) 405–422
[4] W. Feller, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 2, Мир – Москва 1967 (Übersetzung aus dem Englischen)
[5] B. V. Gnedenko/A. N. Kolmogorov, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen, Akademie-Verlag Berlin 1960 (Übersetzung aus dem Russischen)
[6] I. A. Ibragimov/Yu. V. Linnik, Independent and stationary sequences of random variables, Noordhoff – Groningen 1971 (Übersetzung aus dem Russischen)
[7] M. Loève, Теория вероятностей, ИЛ – Москва 1962. (Übersetzung aus dem Englischen)
[8] R. Michel, A remark on nonuniform estimates in the central limit theorem for sums of independent random vectors, Sankhya, Ser. A 40, Pt. 4 (1978) 388–392
[9] R. Michel, Necessary and sufficient conditions on rates of convergence in the multidimensional central limit theorem, manuscr. mathem. 28 (1979) 361–377
[10] Ш. А. Мирахмедов, О скорости слабой сходимости в многомерной предельной теореме, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук 18, № 2 (1974) 23–28
[11] V. V. Petrov, Sums of Independent Random Variables, Akademie-Verlag Berlin 1975 (Übersetzung aus dem Russischen)
[12] В. И. Ротарь, Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Теория вер. и ее примен. 15, вып. 4 (1970) 647–665
[13] V. V. Sazonov, Normal Approximation – Some Recent Advances, Lecture Notes in Math., vol. 879, Springer-Verlag Berlin 1981
[14] С. Х. Сираждинов/Ш. К. Форманов, Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова, Фан – Ташкент 1979

Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List" Dresden
Sektion Mathematik, Rechentechnik und Naturwissenschaften
DDR – 8072 Dresden
PSF 103

1.3 Summen abhängiger Zufallsgrößen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, werden zwei Klassen abhängiger Zufallsgrößen betrachtet: Folgen von Martingaldifferenzen und stark multiplikative Systeme zufälliger Größen.
Für Martingaldifferenzenfolgen wird das im Unterabschnitt 1.2.3 betrachtete Summationsverfahren mittels Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))$, $k \in N_o$, $v \in (0,1)$, beibehalten.
Hingegen bei stark multiplikativen Systemen wird, wie in der Literatur üblich, mit unendlichen Summationsmatrizen (λ_{Nk}), $k \in N_o$, $N=1,2,\ldots$, gearbeitet.

1.3.1 Martingaldifferenzen

Die Voraussetzung der Unabhängigkeit der betrachteten Zufallsgrößen ist in praktischen Anwendungen oft nicht gegeben bzw. nicht nachprüfbar. Daher bemühte man sich schon seit Anfang dieses Jahrhunderts um entsprechende Resultate (z.B. zentrale Grenzwertsätze) im Fall abhängiger Zufallsgrößen. Jedoch beschränkte man sich dabei auf solche Abhängigkeitsstrukturen, die übersichtlich zu beschreiben sind, etwa MARKOVsche Ketten, m-abhängige Zufallsgrößen, mischende Variable oder multiplikative Systeme. Besonderes Interesse richtete man seit Anfang der siebziger Jahre auf Martingaldifferenzen, um in Analogie zu unabhängigen Zufallsgrößen auch hier entsprechende Fehlerabschätzungen und Konvergenzgeschwindigkeitsaussagen ableiten zu können.
Eine grundlegende Schwierigkeit besteht hierbei in folgender Tatsache: Eine gute Fehlerabschätzung ist stets an gewisse Voraussetzungen an die betrachteten Zufallsgrößen gebunden, so daß man den vielfältigen Möglichkeiten, Grenzwertsätze unter schwachen Voraussetzungen zu beweisen, nicht mehr gerecht wird. Andererseits liefern eben schwache Voraussetzungen nur noch Fehlerabschätzungen, die mehr von theoretischem Interesse und kaum noch praktisch verwertbar sind. Dieses Dilemma spiegelt sich in der bisher geringen Anzahl von Veröffentlichungen wider, die sich mit Fehlerabschätzungen befassen. STROBEL(1978) gibt einen guten Überblick über den bis vor etwa 10 Jahren erreichten Stand. Eine erste Monografie zu diesem Problemkreis stammt von HALL|HEYDE(1980). Die Arbeiten |184,189| verweisen auf die neuesten Ergebnisse der letzten Jahre, wobei die Arbeit von BOLTHAUSEN(1982) besondere Beachtung verdient, s. auch |281| (auf S.5 der Thesen).
Eine Martingaldifferenzfolge ist bereits dadurch charakterisiert, daß es sich um eine Folge integrierbarer Variabler handelt mit

$$EX_o=0,\ E(X_k|X_{k-1},\ldots,X_o)=0 \text{ P-f.s. für alle } k=1,2,\ldots \quad (1.43)$$

Wie in fast allen Arbeiten über Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz werden auch hier quadratintegrierbare Zufallsgrößen betrachtet, wobei zusätzlich gefordert wird, daß die bedingten Varianzen konstant sein mögen:

$$EX_0^2=\text{const.},\ E(X_k^2|X_{k-1}, \ldots, X_0)=\text{const. } P\text{-f.s.},\ k=1,2,\ldots \quad (1.44)$$

Die Konstantheit der bedingten Varianzen ist nicht von prinzipieller Bedeutung, s. STROBEL(1978). Dadurch wird lediglich eine einfachere Darstellung der Fehlerschranken erzielt, einschließlich der expliziten Abschätzung auftretender absoluter Konstanten.

Die Fehlerabschätzungen werden unter folgender Beschränktheitsvoraussetzung abgeleitet:

$$|X_k| \leq M \sqrt{E(X_k^2|X_{k-1}, \ldots, X_0)} \quad P\text{-f.s. für alle } k \quad (1.45)$$

wobei $M<\infty$ eine Konstante ist. Sei nun $(\alpha_k(v))$, $k\in N_0$, $v\in(0,1)$, eine geeignete Folge von Gewichtsfunktionen derart, daß

$$0 < B_v^2 = \sum_{k\in N_0} \alpha_k^2(v)E(X_k^2|X_{k-1}, \ldots, X_0) < \infty \quad (1.46)$$

gilt. Im folgenden Satz benutzen wir die Bezeichnung

$$\rho_v = B_v^{-1} \sup_k (|\alpha_k(v)| \sqrt{E(X_k^2|X_{k-1}, \ldots, X_0)}) .$$

<u>Satz 1.15.</u> Für eine Martingaldifferenzfolge $(X_k)_{k\in N_0}$ und Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))$, $k\in N_0$, $v\in(0,1)$, mit den Eigenschaften (1.43) bis (1.46) gilt für alle $t\in R^1$:

(i) $|f_v(t)-g(t)|\leq(1+ \frac{1}{2} t^2\rho_v^2)(\frac{M}{3} + \frac{1}{4} |t|\rho_v)|t|\rho_v$, (1.47)

(ii) $|f_v(t)-g(t)|\leq (\frac{1}{4} \rho_v + \frac{1}{6} |t|M + \frac{1}{8} t^2\rho_v^3)t^2\rho_v$ (1.48)

und

(iii) $| \frac{d}{dt} (f_v(t) - g(t))| \leq$ (1.49)

$$|t|\rho_v((1+ \frac{1}{2} t^2\rho_v^2)((1+2|t|)(\frac{M}{3} + \frac{1}{4} |t|\rho_v)+\rho_v)+ \frac{1}{2} |t|M) .$$

Zum Beweis dieser Ungleichungen wird auf |184,189| verwiesen.

Der wesentliche Unterschied zwischen (1.47) und (1.48) besteht in den unterschiedlichen Ordnungen von t: $|t|$ bzw. t^2. Eine Anwendung der Abschätzungen erfolgt über die Glättungsungleichungen (0.18) und (0.19).

1.3.2 Stark multiplikative Systeme

Bereits bei KOMLOS(1973) und ŠARACHMETOV(1982) findet man den Hinweis, daß es sich bei Martingaldifferenzfolgen mit der Eigenschaft (1.44) um spezielle Anwendungsfälle stark multiplikativer Systeme handelt.

In diesem Unterabschnitt soll die allgemeine Situation eines stark multiplikativen Systems betrachtet werden. Im Gegensatz zu Martingaldifferenzfolgen gibt es für diese Klasse abhängiger Zufallsgrößen noch relativ wenig publizierte Resultate. Auch in einschlägigen Monografien findet diese Klasse abhängiger Zufallsgrößen kaum Erwähnung. Einen Überblick zum derzeitigen Stand vermitteln die Arbeiten |176, 190|. Nach GAPOŠKIN(1972) heißt eine zentrierte Folge von Zufallsgrössen stark multiplikativ, wenn sie folgende Mischungsbedingung 2. Ordnung erfüllt:

$$E \prod_{i=1}^{s} X_{k_i}^{r_i} = \prod_{i=1}^{s} E\, X_{k_i}^{r_i}\,, \quad r_i \in \{1, 2\},\ i=1,2,\ldots,s\,, \tag{1.50}$$

und $0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, $s=1,2,\ldots$.

Für die betrachtete Folge $(X_k)_{k\in N_0}$ setzen wir hier anstatt (1.43), (1.44) und (1.46) voraus, daß für alle k und N die Bedingungen

$$EX_k=0 \quad \text{und} \quad B_N^2 = \sum_{k\in N_0} \lambda_{Nk}^2\, EX_k^2 \ \in (0,\infty) \tag{1.51}$$

gelten mögen, wobei $(\lambda_{Nk})_{k\in N_0}$, $N=1,2,\ldots$ eine unendliche Summationsmatrix ist. In Analogie zu ρ_X aus dem vorangehenden Unterabschnitt 1.3.1 benutzen wir hier die übliche Bezeichnung

$$\lambda_N = B_N^{-1} \sup_k \left(|\lambda_{Nk}| \sqrt{EX_k^2} \right).$$

Die Beschränktheitsvoraussetzung (1.45) lautet hier entsprechend

$$|X_k| \leq M \sqrt{EX_k^2} \quad \text{P-f.s. für alle } k\in N_0\,, \tag{1.52}$$

wobei $M<\infty$ ist.

<u>Satz 1.16.</u> Es sei $(X_k)_{k\in N_0}$ ein stark multiplikatives System und (λ_{Nk}), $k\in N_0$, $N=1,2,\ldots$, eine unendliche Summationsmatrix, so daß (1.51) und (1.52) erfüllt sein mögen. Der Parameter ρ sei eine obere Schranke für $(M^2\lambda_N)^{2/7}$, d.h. $T_N \geq \alpha/\rho$. Hierbei ist $T_N = \alpha(M^2\lambda_N)^{-2/7}$ mit $\alpha>0$ als weiteren Parameter. Dann gilt für alle t mit $|t|\leq T_N$:

(i) $$|f_N(t)-g(t)| \leq C_1 M\lambda_N |t|^3 + C_2\lambda_N^2 t^4 \exp(-t^2/2), \tag{1.53}$$

(ii) $$\left|\frac{d}{dt}(f_N(t)-g(t))\right| \leq C_1 M^2\lambda_N(3t^2+|t|^3) + C_2\lambda_N^2(4|t|^3+|t|^5)\exp(-t^2/2). \tag{1.54}$$

Für die Konstanten $C_i=C_i(\alpha,\rho)$, $i=1,2$, gilt dabei

$C_1 = \frac{1}{6}\exp(\frac{1}{8}\alpha^4\rho^3)$ und $C_2 = (8-4\alpha^2\rho^5)^{-1}$, $(\alpha^2\rho^5<2)$, und $f_N(t)$ ist die charakteristische Funktion der normierten gewichteten Summe $\left(\sum_{k\in N_0} \lambda_{Nk}^2\, EX_k^2\right)^{-1/2} \sum_{k\in N_0} \lambda_{Nk} X_k$.

Satz 1.17. Es sei $(X_k)_{k\in N_o}$ ein stark multiplikatives System und (λ_{Nk}), $k\in N_o$, $N=1,2,\ldots$, eine unendliche Summationsmatrix, so daß (1.51) und (1.52) erfüllt sein mögen. Der Parameter ρ sei eine obere Schranke für $(M\lambda_N)^{1/4}$, d.h. $T_N \geq \alpha/\rho$. Hierbei ist $T_N=\alpha(M\lambda_N)^{-1/4}$ mit $\alpha>0$. Dann gilt für alle t mit $|t| \leq T_N$:

$$|f_N(t) - g(t)| \leq C_1 M\lambda_N |t|^3 + C_2\lambda_N^2 t^4 \exp(-t^2/2) \qquad (1.55)$$

mit $C_1=C_1(\alpha,\rho)=\frac{1}{6}\exp(\frac{1}{8}\alpha^4\rho^4)$ und $C_2=C_2(\alpha,\rho)=(8-4\alpha^2\rho^6)^{-1}$; $(\alpha^2\rho^6<2)$. $f_N(t)$ ist wie in Satz 1.16 definiert.

Satz 1.17 stellt eine Modifikation von Satz 1.16 (i) dar, wobei die t-Schranke T_N verändert wurde. Zum Beweis dieser Sätze wird auf |176, 190| verwiesen.
Eine Anwendung der Sätze 1.16 und 1.17 erfolgt wie bei den Martingaldifferenzfolgen über die Glättungsungleichungen (0.18) und (0.19), wobei der Index v durch N zu ersetzen ist.
Weitere Anwendungsbeispiele für stark multiplikative Systeme ergeben sich in der Theorie stark lakunärer trigonometrischer Systeme, vgl. MORICZ(1970), GAPOŠKIN(1968), ZYGMUND(1959) und |176|.
Eine Übersichtsarbeit zum Problemkreis "Multiplikative Systeme" wurde von MORICZ|REVESZ(1980) geschrieben.

2. Abschätzungen für Verteilungsfunktionen auf direktem Weg

2.1 Elementare Abschätzungen von Differenzen von Normalverteilungen

Mit $\Phi(x)$ wird, wie bereits in Abschnitt 0.1 eingeführt, die $N(0,1)$-Verteilungsfunktion bezeichnet.
Im folgenden Satz werden die elementaren Ungleichungen (3.3) und (3.4) aus dem Kapitel V der Monografien von PETROV(1975,1987) präzisiert, um quantitativ bessere Abschätzungen zu erhalten.

Satz 2.1. Es seien a und c beliebige reelle und B eine positive reelle Zahl. Dann gelten folgende Abschätzungen:

(i) $$\sup_{x\geq a}|\Phi(xB)-\Phi(x)|\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\,|B^2-1|\max(1,B^{-2})\sup_{s\geq a\min(1,B)}|s|e^{-s^2/2} \tag{2.1}$$

und

(ii) $$\sup_{x\geq a}|\Phi(xB)-\Phi(xB+c)|\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,|c|\sup_{s\geq \min(aB,aB+c)} e^{-s^2/2}\,. \tag{2.2}$$

Der Beweis des Satzes folgt sofort aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung unter Beachtung einer Fallunterscheidung $B<1$ oder $B\geq 1$.
Eine Anwendung von Satz 2.1 besteht in der Abschätzung des letzten Terms auf der rechten Seite der grundlegenden Ungleichung (0.24):

$$\sup_{u\geq x}|P(S_n^*<uB_n)-\Phi(u-hB_n)| = \sup_{u\geq x}\Big|P\Big(\frac{S_n^*-ES_n^*}{DS_n^*}<\frac{uB_n-ES_n^*}{DS_n^*}\Big)-\Phi\Big(\frac{uB_n-ES_n^*}{DS_n^*}\Big)$$

$$+\Phi\Big(\frac{uB_n-ES_n^*}{DS_n^*}\Big)-\Phi\Big(\frac{uB_n-ES_n^*}{B_n}\Big)+\Phi\Big(\frac{uB_n-ES_n^*}{B_n}\Big)-\Phi(u-hB_n)\Big|$$

$$\leq 0.7915\,(D^2S_n^*)^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}E|\zeta_k^*-E\zeta_k^*|^3 +$$

$$(8\pi)^{-1/2}|B_n^{-2}D^2S_n^*-1|\max(1,B_n^2/D^2S_n^*)\sup_{s\geq \frac{xB_n-ES_n^*}{DS_n^*}\min(1,B_n^{-1}DS_n^*)}|s|e^{-s^2/2}$$

$$+(2\pi)^{-1/2}\Big|\frac{ES_n^*-hB_n^2}{B_n}\Big|\sup_{s\geq\min(x-B_n^{-1}ES_n^*,\,x-hB_n)}\exp(-s^2/2). \tag{2.3}$$

Um (2.3) zu erhalten, wurde weiterhin die ESSEEN'sche Ungleichung (0.1) ausgenutzt. Die Idee zur Herleitung von (2.3), die in der Zwischenschaltung (durch Addition und Subtraktion) geeigneter Terme und der anschließenden Anwendung der Dreiecksungleichung besteht, ist eine bekannte Beweistechnik, die von vielen Autoren benutzt wird.

2.2 Ungleichmäßige Abschätzungen in verschiedenen x - Zonen

Es wird wieder die bereits in Abschnitt 0.1 eingeführte Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängiger und zentrierter Zufallsgrößen betrachtet. Für den LJAPUNOV'schen Bruch in den Ungleichungen (0.2), (0.5) und (0.7) schreiben wir jetzt kurz

$$L_{2+\delta,n} = B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^{2+\delta} \quad , \ \delta\varepsilon(0,1],$$

und fordern innerhalb des gesamten Abschnitts 2.2 stets

$$L_{2+\delta,n} < \infty \quad \text{für ein } \delta\varepsilon(0,1] \ . \qquad (2.4)$$

Die grundlegende Idee beim Beweis ungleichmäßiger Fehlerabschätzungen vom Typ (0.5) oder (0.7) besteht in der Betrachtung verschiedener Größenordnungen von x, d.h. in der Einteilung der x-Achse in verschiedene x-Zonen mit Hilfe eines Parameters K>0 und einer Funktion $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$:

$$\begin{array}{lccc} \text{(i)} & 0 & \leq x^2 \leq & K^2 \\ \text{(ii)} & K^2 & \leq x^2 \leq & c_{n,\delta,a,\beta}(x) \\ \text{(iii)} & c_{n,\delta,a,\beta}(x) & \leq x^2 < & \infty \ . \end{array}$$

Der bereits vor dem Ergebnis (0.6) erwähnte neue Beweisgedanke, vgl. |183|, besteht in der günstigen Wahl der Funktion $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$:

$$c_{n,\delta,a,\beta}(x) = 2\beta(\log|x|^{2+\delta} - \log(aL_{2+\delta,n})), \qquad (2.5)$$

wobei a>0 und β>1 zusätzliche, günstig zu wählende Parameter sind. In den bisher vorliegenden Untersuchungen mit ähnlicher Zoneneinteilung, vgl. etwa MICHEL(1981), TYSIAK(1983) oder MIRACHMEDOV(1984), wurde die Funktion $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$ stets spezieller eingeführt und insbesondere ohne den Parameter β>1 definiert, d.h. bisher betrachtete man stets die Funktion in (2.5) mit β=1. Dadurch war die Zone (iii), die x-Zone für "große" x, etwas zu breit und konnte bisher nicht zur Untersuchung von (0.7) ausgenutzt werden. Mit der nun in (2.5) eingeführten Funktion kann in (0.7) die Zerlegung

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|^{2+\delta-1/p})|D_n(x)|^p dx = \Big(\int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} \Big) \ldots dx \qquad (2.6)$$

mit $A_1=\{x|\ 0\leq x^2\leq K^2\}$, $A_2=\{x|\ K^2\leq x^2\leq c_{n,\delta,a,\beta}(x)\}$, $A_3=\{x|c_{n,\delta,a,\beta}(x)\leq x^2<\infty\}$ erfolgreich ausgewertet, integriert und abgeschätzt werden, vgl. |192| und Abschnitt 4.1.2, und außerdem ergibt sich die präzisierte

Konstantenabschätzung (0.6) für die bekannte Ungleichung (0.5) durch Ausnutzung der vorgeschlagenen Zerlegung. Dieses Ergebnis wird ebenfalls in den folgenden Unterabschnitten hergeleitet, vgl. auch |183|.

2.2.1 Eine Untersuchung in der Zone für "große" x

In Verallgemeinerung des Satzes 2.2.4 in TYSIAK(1983), der dort für x-Werte mit der Bedingung

$$x^2 \geq \max((2\pi)^{-1},\ c_{n,\delta,a,1}(x))\ ,\ (x>0),$$

aufgestellt wurde und die Abschätzung

$$|D_n(x)| \leq (2^{2+\delta} + a \exp(\tfrac{1}{a}\, 2^{2+\delta}))\ x^{-(2+\delta)}\ L_{2+\delta,n}$$

ergab, wird nun folgender Satz formuliert, vgl. |183|,

Satz 2.2. Es sei $x^2 \geq \max(K^2,\ c_{n,\delta,a,\beta}(x))$ und $c_{n,\delta,a,\beta}(K) \geq K^2 \geq (2+\delta)\beta$, wobei $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$ die in (2.5) definierte Funktion ist und a, K und β positive Parameter sind (β>1). Dann gilt die Ungleichung

$$| D_n(x) | \leq G_n(\gamma|x|B_n) + a \exp(\tfrac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta})|x|^{-(2+\delta)\beta}(K^{2+\delta}\exp(-K^2/(2\beta)))^{\beta-1}L_{2+\delta,n} \tag{2.7}$$

wobei $0 < \gamma \leq 1/(2\beta)$ ist. ($G_n(y)$ vgl. (0.24)).

Im Fall β=1 erhält man das oben zitierte Resultat von TYSIAK(1983), welches in der Terminologie einseitiger Momente bereits in |174|, vgl. dort Satz 4, zu finden ist.

Beweis zu Satz 2.2: O.B.d.A. sei x>0. Entsprechend |174|, S.592, gilt

$$| D_n(x) | \leq \max(1-F_n(xB_n),\ 1-\Phi(x)) .$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt $x^2 \geq c_{n,\delta,a,\beta}(x) \geq K^2 \geq (2+\delta)\beta$ und

$$\begin{aligned}1-\Phi(x) &\leq (2\pi)^{-1/2}\,\frac{1}{x}\exp(-x^2/2) \leq \exp(-\log\frac{|x|^{2+\delta}}{aL_{2+\delta,n}} - \frac{\beta-1}{2\beta}x^2) = \\ &\frac{aL_{2+\delta,n}}{|x|^{(2+\delta)\beta}}\ |x|^{(2+\delta)(\beta-1)}\exp(-\frac{\beta-1}{2\beta}x^2) \leq \\ &\frac{aL_{2+\delta,n}}{|x|^{(2+\delta)\beta}}\ (K^{2+\delta}\exp(-K^2/(2\beta)))^{\beta-1}\ ,\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei in der letzten Teilabschätzung die Ungleichung (4.16) aus |174| ausgenutzt wurde. Für $1-F_n(xB_n)$ erhält man nun mit einer Standardmethode die gesuchte Abschätzung (2.7) wie folgt:

$$1 - F_n(xB_n) \leq 1 - F_n^y(xB_n) + |F_n^y(xB_n) - F_n(xB_n)|, \tag{2.9}$$

wobei $F_n^y(xB_n) = P(\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}\{|X_k| \leq y\} < xB_n)$ und $y=xB_n/(2\beta)$, β>1, ist.

Für die zweite Differenz auf der rechten Seite von (2.9) gilt die bekannte Abschätzung, vgl. z.B. |170|,

$$|F_n^y(xB_n) - F_n(xB_n)| \leq G_n(y) \leq G_n(\gamma|x|B_n) \tag{2.10}$$

und mit $h = c_{n,\delta,a,\beta}(x)/(xB_n)$ ergibt sich, vgl. z.B. |166|,

$$1 - F_n^y(xB_n) \leq \exp(-hxB_n + \frac{1}{2} h^2B_n^2 + y^{-(2+\delta)}e^{hy} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^{2+\delta}) =$$

$$\exp(-c_{n,\delta,a,\beta}(x) + \frac{1}{2x^2} c^2_{n,\delta,a,\beta}(x) + \frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta}) .$$

Mit der Ungleichung $\frac{1}{2x^2} c^2_{n,\delta,a,\beta}(x) \leq \frac{1}{2} c_{n,\delta,a,\beta}(x)$ erhält man nun in der vorangehenden Abschätzung

$$1 - F_n^y(xB_n) \leq \exp(-\frac{1}{2} c_{n,\delta,a,\beta}(x) + \frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta}) =$$

$$a \exp(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta})|x|^{-(2+\delta)\beta} L_{2+\delta,n} (aL_{2+\delta,n})^{\beta-1} , \tag{2.11}$$

Für die betrachteten Werte des LJAPUNOV-Bruches gilt $aL_{2+\delta,n} \leq K^{2+\delta} \cdot \exp(-K^2/(2\beta))$, das unmittelbar aus der Bedingung $c_{n,\delta,a,\beta}(K) \geq K^2$ folgt. Andernfalls entartet die x-Zone (ii), vgl. A_2.
Damit ergibt sich in (2.11) die Abschätzung (2.8) mit dem zusätzlichen Faktor $a \exp(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta}) > 1$. Aus (2.8) bis (2.11) folgt die Behauptung (2.7) des Satzes 2.2. ■
Im Satz 2.3 werden die Voraussetzungen des Satzes 2.2 etwas abgeschwächt:

Satz 2.3. Es sei $x^2 \geq \max(c_{n,\delta,a,\beta}(x), (2\pi)^{-1})$ und $c_{n,\delta,a,\beta}(x) \geq K^2$, wobei $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$ die in (2.5) definierte Funktion ist und a, K und β positive Parameter sind (β>1). Dann gilt die Ungleichung

$$| D_n(x) | \leq \tag{2.12}$$

$$((2\beta)^{2+\delta} + a \exp(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta})\exp(-K^2(\beta-1)/(2\beta)))|x|^{-(2+\delta)}L_{2+\delta,n}$$

Der Beweis dieses Satzes verläuft analog dem vorangehenden und ist im Fall β=1 bei TYSIAK(1983) zu finden, wobei im Fall β=1 die Bedingung $c_{n,\delta,a,\beta}(x) \geq K^2$ nicht notwendig ist.
Die Ungleichung (2.12) entspricht der Ungleichung (0.5) für die hier betrachtete x-Zone, wenn man in (0.5)

$$K_\delta = C_\delta + ((2\beta)^{2+\delta} + a \exp(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta})\exp(-K^2(\beta-1)/(2\beta))) \tag{2.13}$$

setzt, wobei C_δ die Konstante aus (0.2) ist.
Im Fall p=1 ergibt sich für das dritte Teilintegral in (2.6) unter Ausnutzung von Satz 2.2 folgendes Hilfsergebnis:

$$\int_{A_3} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \leq \int_{A_3} |x|^{1+\delta} G_n(\gamma|x|B_n)\,dx + \tag{2.14}$$

$$2 \int_K^\infty x^{1+\delta-(2+\delta)\beta}\,dx\; a \exp\left(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta} - \frac{\beta-1}{2\beta} K^2\right) K^{(2+\delta)(\beta-1)} L_{2+\delta,n}$$

$$= \int_{A_3} |x|^{1+\delta} G_n(\gamma|x|B_n)\,dx + \frac{2a}{(2+\delta)(\beta-1)} \exp\left(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta} - \frac{\beta-1}{2\beta} K^2\right) L_{2+\delta,n} .$$

In der Abschätzung (2.14) ist die Bedeutung des Parameters $\beta>1$ erkennbar, ohne den eine derartige Vorgehensweise unmöglich wäre.

2.2.2 Eine Untersuchung in der Zone für "gewöhnliche" x

Die x-Zone (i), vgl. A_1, wird einfach über die ESSEEN'sche Ungleichung (0.2) ausgewertet, d.h. für $|x| \leq K$ gilt

$$| D_n(x) | \leq C_\delta K^{2+\delta} |x|^{-(2+\delta)} L_{2+\delta,n} \tag{2.15}$$

und

$$\int_{A_1} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \leq \frac{2}{2+\delta} K^{2+\delta} C_\delta L_{2+\delta,n} , \tag{2.16}$$

d.h. die Ungleichung (2.15) entspricht der Ungleichung (0.5) für die hier betrachtete x-Zone (i), wenn man in (0.5)

$$K_\delta = C_\delta + C_\delta K^{2+\delta} \tag{2.17}$$

setzt. Für ein festes Parametertripel (a,β,δ) mit $a>0$, $\beta>1$ und $\delta\varepsilon(0,1]$ ergibt sich nun offenbar eine optimale Konstante in (0.5), wenn (2.13) und (2.17) identische Werte K_δ liefern, d.h. wenn

$$C_\delta K^{2+\delta} = (2\beta)^{2+\delta} + a \exp\left(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta} - \frac{\beta-1}{2\beta} K^2\right)$$

gilt. Die soeben aufgestellte Identität läßt sich als Fix-Punkt-Gleichung schreiben:

$$K=f(K):= \left(\frac{(2\beta)^{2+\delta} + a \exp\left(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta} - \frac{\beta-1}{2\beta} K^2\right)}{C_\delta} \right)^{1/(2+\delta)} , \tag{2.18}$$

woraus sich z.B. im Fall $\delta=1$ folgendes Iterationsverfahren für K anbietet:

$$K_{m+1}=f(K_m)=\left(\frac{8\beta^3 + a \exp\left(\frac{1}{a} 8\beta^3 - \frac{\beta-1}{2\beta} K_m^2\right)}{0.7915}\right)^{1/3} , \quad m=0,1,2,\ldots \tag{2.19}$$

Z.B. erhält man für $\beta=1.063$ und $a=17.543$ mit dem Startwert $K_0=3.4$ in (2.19) die Lösung $K=3.40122$. Mit diesen Werten liefern die Gleichungen (2.13) und (2.17) bereits die in (0.6) angegebene Schranke für K_1 . Es bleibt damit noch zu zeigen, daß diese Schranke auch in der x-Zone (ii), vgl. A_2, richtig ist.

2.2.3 Eine Untersuchung in der Zone für "mittlere" x

Wir setzen hier eine ähnliche Bedingung wie im Satz 2.2 voraus:

$$c_{n,\delta,a,\beta}(K) \geq K^2 \geq \max\left(\frac{3}{2}(2+\delta)\beta,\ 4\beta\right) \tag{2.20}$$

und natürlich gilt für die hier betrachtete x-Zone (ii), vgl. A_2,

$$K^2 \leq x^2 \leq c_{n,\delta,a,\beta}(x)\ . \tag{2.21}$$

Die Bedingung (2.20) sichert, wie bereits im Beweis zu Satz 2.2 erwähnt, daß die x-Zone (2.21) nicht entartet. An dieser Stelle sei bemerkt, daß MIRACHMEDOV(1985) für die x-Zone ebenfalls die Mengensymbolik und nicht die reine Intervallschreibweise, vgl. etwa (2.21), benutzt. In seiner Symbolik hätte (2.21) etwa folgendes Aussehen:

$$A_2 = \left\{x \mid |x|^{-(2+\delta)}\exp\left(\frac{1}{2\beta}x^2\right) \leq \frac{1}{a}L^{-1}_{2+\delta,n}\right\} \cap \left\{x \mid |x| \geq K\right\}. \tag{2.22}$$

Bei dieser Symbolik verschwindet die x-abhängige Intervallgrenze $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$. Aus (2.21) bzw. $x\varepsilon A_2$, vgl. (2.22), folgen die Ungleichungen

$$L_{2+\delta,n} \leq \frac{1}{a}|x|^{2+\delta}\exp\left(-\frac{1}{2\beta}x^2\right) \tag{2.23}$$

und, vgl. |174| S.598, falls $x \geq \sqrt{r/(2s)}$, $(r>0,\ s>0)$, oder $r \leq 0$ ist,

$$x^r\exp(-sx^2) \leq K^r\exp(-sK^2)\ . \tag{2.24}$$

Ausgangspunkt der Untersuchung ist nun die grundlegende Ungleichung (0.24) mit den dort festgelegten Größen h und y. O.B.d.A. sei wieder $x>0$, um in den folgenden Betrachtungen die Betragsstriche einsparen zu können. Um

$$I_1 := \left|\prod_{k=1}^{n} f_k(h) - \exp\left(\frac{1}{2}h^2B_n^2\right)\right| \exp(-hxB_n)$$

abzuschätzen, benutzen wir ein Teilresultat von TYSIAK(1983), das sich mit den hier üblichen Standardmethoden ergibt:

$$I_1 \leq \max\Bigg(\exp\left(\frac{1}{2}h^2B_n^2-hxB_n+(\gamma x)^{-(2+\delta)}L_{2+\delta,n}e^{hy}\right)(\gamma x)^{-(2+\delta)}L_{2+\delta,n}e^{hy}\ ,$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}h^2B_n^2-hxB_n\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{4}h^4(EX_k^2)^2+y^{-(2+\delta)}E|X_k|^{2+\delta}e^{hy}}{1-(\gamma x)^{-(2+\delta)}L_{2+\delta,n}e^{hy}}\Bigg)\ .$$

Mit (2.23) erhält man für die Differenz im Nenner:

$$1-(\gamma x)^{-(2+\delta)}L_{2+\delta,n}e^{hy} \geq 1-\frac{1}{a}\gamma^{-(2+\delta)}\exp\left(\left(\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{2\beta}\right)x^2\right) =: \alpha_1(x).$$

Hier und weiterhin bezeichnen $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ... positive Funktionen, die neben x auch von den Parametern a, β, γ und δ abhängen.

Mit der Abschätzung

$$((EX_k^2)^{1/2}/B_n)^{2-\delta} \leq (L_{2+\delta,n})^{(2-\delta)/(2+\delta)}$$

und (2.23) ergeben sich für die Summe der Größen im Zähler:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4} h^4 (EX_k^2)^2 + y^{-(2+\delta)} E|X_k|^{2+\delta} e^{hy} \right) \le$$

$$x^{-(2+\delta)} \left(\frac{1}{4} (1-\gamma)^4 a^{-(2-\delta)/(2+\delta)} x^8 \exp\left(-\frac{2-\delta}{2+\delta} \frac{x^2}{2\beta}\right) + \frac{\exp(\gamma(1-\gamma)x^2)}{\gamma^{2+\delta}} \right) L_{2+\delta,n}$$

und mit der Ungleichung $\exp(1-\alpha_1(x)) \le 1/\alpha_1(x)$, $\alpha_1(x)>0$, folgt

$$\exp\left(\frac{1}{2} h^2 B_n^2 - hxB_n + (\gamma x)^{-(2+\delta)} L_{2+\delta,n} e^{hy}\right) \le$$

$$\exp\left(\frac{1}{2} h^2 B_n^2 - hxB_n + 1 - \alpha_1(x)\right) \le \frac{1}{\alpha_1(x)} \exp\left(\frac{1}{2} h^2 B_n^2 - hxB_n\right) .$$

Unter der Parameterbedingung $\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2\beta} < 0$, d.h. $\beta < \frac{1}{2\gamma(1-\gamma)}$, gilt $\alpha_1(x) \ge \alpha_1(K)$ und mit der Forderung $\alpha_1(K)>0$ erhält man schließlich

$$I_1 \le \frac{1}{\alpha_1(K)} \alpha_2(x) x^{-(2+\delta)} L_{2+\delta,n} , \tag{2.25}$$

wobei

$$\alpha_2(x) := \frac{1}{4}(1-\gamma)^4 a^{-(2-\delta)/(2+\delta)} x^8 \exp\left(-\frac{2-\delta}{2+\delta} \frac{x^2}{2\beta} - (1-\gamma^2) \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{(1-\gamma)^2 x^2}{2}\right)}{\gamma^{2+\delta}}$$

ist. Bei TYSIAK(1983) wurde in der entsprechenden Teilabschätzung der Faktor x^8 vergessen, vgl. $g_3(x)$ in |260|.
Mehrfach wird nun die Abschätzung

$$f_k(h) \ge 1 - y^{-(1+\delta)} hE|X_k|^{2+\delta} \ge 1 - \frac{1-\gamma}{\gamma^{1+\delta}} \frac{1}{a} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta}\right) =: \alpha_3(x)$$

benötigt, die mit (2.23) folgt (vgl. auch (4.18) in |174|).
Wir kommen nun zur Abschätzung von Momenten der konjugierten Zufallsgrößen ξ_k^*, $k=1,2,\ldots,n$, die in (0.24) bzw. auch in (2.3) auftreten.

Wir beginnen mit der Untersuchung von $B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} (E\xi_k^*)^2$. Wie bei TYSIAK (1983) erhält man im Fall $K^2 \ge 2\beta$ mittels (2.24):

$$B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} (E\xi_k^*)^2 \le \alpha_3^{-2}(K) B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} (hEX_k^2 + E|X_k|^{2+\delta} y^{-(1+\delta)} e^{hy})^2$$

$$\le \alpha_4(x) L_{2+\delta,n} , \tag{2.26}$$

wobei

$$\alpha_4(x) := \alpha_3^{-2}(K) x^{-\delta} \exp\left(-\frac{2-\delta}{2+\delta} \frac{x^2}{2\beta}\right) a^{-(2-\delta)/(2+\delta)} \Big((1-\gamma)x^2 + \gamma^{-(1+\delta)} a^{-\delta/(2+\delta)} \exp\left(\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{\delta}{(2+\delta)2\beta}\right)x^2\right) \Big)^2$$

gilt. Weiterhin erhält man

$$B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} f_k^{-1}(h) EX_k^2 \ge B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 (2 - f_k(h)) \ge$$

$$B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 \left(1 - \frac{1}{2} h^2 EX_k^2 - y^{-(2+\delta)} E|X_k|^{2+\delta} e^{hy}\right) \ge 1 - \alpha_5(x) L_{2+\delta,n} .$$

Hierbei ist

$$\alpha_5(x) := \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\, a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\, x^{4-\delta} \exp\left(-\frac{2-\delta}{2+\delta}\frac{x^2}{2\beta}\right) +$$
$$\gamma^{-(2+\delta)}\, a^{-2/(2+\delta)}\, x^{-\delta} \exp\left(\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{(2+\delta)\beta}\right) x^2\right) .$$

Außerdem gilt

$$f_k(h)\, E(\xi_k^*)^2 \geq EX_k^2 - E|X_k|^{2+\delta} \max(y^{-\delta}, hy^{1-\delta}) .$$

Damit ist alles bereitgestellt zur Abschätzung der Größe $D^2S_n^*$:

$$D^2S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \left(E(\xi_k^*)^2 - (E\xi_k^*)^2\right) \geq$$
$$\sum_{k=1}^{n} f_k^{-1}(h)\left(EX_k^2 - E|X_k|^{2+\delta} \max(y^{-\delta}, hy^{1-\delta})\right) - \sum_{k=1}^{n} (E\xi_k^*)^2 \geq$$
$$B_n^2(1-\alpha_5(x)L_{2+\delta,n}) - B_n^2 L_{2+\delta,n} \max((\gamma x)^{-\delta}, (\gamma x)^{1-\delta}(1-\gamma)x)\alpha_3^{-1}(K) - B_n^2 L_{2+\delta,n}\alpha_4 =$$
$$B_n^2\,(1 - \alpha_6(x)L_{2+\delta,n})$$

mit

$$\alpha_6(x) := \alpha_4(x) + \alpha_5(x) + \alpha_3^{-1}(K)(\gamma x)^{-\delta} \max(1, \gamma(1-\gamma)x^2) .$$

Eine Anwendung von (2.23) liefert nun

$$D^2S_n^* \geq \left(1 - \frac{1}{a} x^{2+\delta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta}\right) \alpha_6(x)\right) B_n^2 =: \alpha_7(x)\, B_n^2 \tag{2.27}$$

und

$$(D^2S_n^*)^{-1}\,(B_n^2 - D^2S_n^*) \leq \alpha_7^{-1}(x)\, \alpha_6(x)\, L_{2+\delta,n} . \tag{2.28}$$

Die in (2.3) auftretenden dritten Momente $E|\xi_k^* - E\xi_k^*|^3$ werden wie folgt abgeschätzt:

$$\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k^* - E\xi_k^*|^3 \leq \sum_{k=1}^{n} E\left((|\xi_k^*| + |E\xi_k^*|)(\xi_k^* - E\xi_k^*)^2\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left(E|\xi_k^*|^3 + 3E(\xi_k^*)^2|E\xi_k^*| + E|\xi_k^*|(E\xi_k^*)^2\right)$$

und nun weiter wie bei TYSIAK(1983):

$$\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k^*|^3 \leq \alpha_3^{-1}(K) \sum_{k=1}^{n} y^{1-\delta} e^{hy} E|X_k|^{2+\delta} \leq$$
$$\alpha_3^{-1}(K)(\gamma x)^{1-\delta} \exp(\gamma(1-\gamma)x^2)\, B_n^3\, L_{2+\delta,n} ,$$

$$3\sum_{k=1}^{n} E(\xi_k^*)^2|E\xi_k^*| \leq 3\,\alpha_3^{-2}(K)x^{-\delta}\Big((1-\gamma)a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}x^3 \exp\left(-\frac{2-\delta}{2+\delta}\frac{x^2}{2\beta}\right) +$$
$$(1+x^2\gamma(1-\gamma))\gamma^{-(1+\delta)}a^{-2/(2+\delta)}x \exp\left(\left(\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{(2+\delta)\beta}\right)x^2\right) +$$
$$\gamma^{-(1+2\delta)}\frac{1}{a}\, x \exp\left(\left(2\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2\beta}\right)x^2\right)\Big) B_n^3 L_{2+\delta,n} =: \alpha_8(x) B_n^3 L_{2+\delta,n}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k^*|(E\xi_k^*)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{E(\xi_k^*)^2}\,(E\xi_k^*)^2 \leq$$

$$\alpha_3^{-2.5}(K)\ a^{-(3-\delta)/(2+\delta)}\ x^{1-\delta}\ \exp((2.5\gamma(1-\gamma)-\frac{3}{4\beta})x^2)\cdot$$

$$(\gamma^{-\delta}\ a^{-\delta/(2+\delta)} + \exp((\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta}-\gamma(1-\gamma))x^2))^{1/2}\cdot$$

$$(\gamma^{-(1+\delta)}a^{-\delta/(2+\delta)}+x^2(1-\gamma)\exp((\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta}-\gamma(1-\gamma))x^2))^2\ B_n^3\ L_{2+\delta,n}$$

$$=: \alpha_9(x)\ B_n^3\ L_{2+\delta,n}\ .$$

Diese Ungleichungen ergeben nun

$$\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k^* - E\xi_k^*|^3 \leq \alpha_{10}(x)\ B_n^3\ L_{2+\delta,n} \tag{2.29}$$

mit

$$\alpha_{10}(x) := \alpha_3^{-1}(K)(\gamma x)^{1-\delta}\exp(\gamma(1-\gamma)x^2) + \alpha_8(x) + \alpha_9(x)\ .$$

Mit (2.27) und (2.29) erhält man für den ersten Term in (2.3):

$$0.7915(D^2S_n^*)^{-1.5}\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k^*-E\xi_k^*|^3 \leq 0.7915\ \alpha_7^{-1.5}(x)\alpha_{10}(x)L_{2+\delta,n} \tag{2.30}$$

In der entsprechenden Abschätzung bei MIRACHMEDOV(1984), vgl. dort Formel (15), wurde der Faktor $\alpha_7^{-1.5}(x)\alpha_{10}(x)$ vergessen.

Mit der Voraussetzung

$$\alpha(x) := \frac{1}{2}\ \gamma^{-(2-\delta)}\ a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\ \exp(-\frac{2-\delta}{2+\delta}\frac{x^2}{2\beta}) +$$

$$\gamma^{-4}(1-\gamma)^{-2}x^{-4}\ a^{-2/(2+\delta)}\exp((\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2) \leq \frac{1}{6}\ ,$$

vgl. auch eine entsprechende Bedingung an $g_{19}(x)$ bei TYSIAK(1983), ergibt sich für die Differenz $|ES_n^* - hB_n^2|$ in (2.3) die Ungleichung

$$|ES_n^* - hB_n^2| \leq B_nL_{2+\delta,n}\ \alpha_3^{-1}(K)\ \gamma^{-(1+\delta)}\ x^{-\delta}\cdot \tag{2.31}$$

$$(\frac{1}{x}\exp(\gamma(1-\gamma)x^2)+(1-\gamma)^2x^3\ a^{-2/(2+\delta)}\exp(-\frac{x^2}{(2+\delta)\beta}))=:\alpha_{11}(x)B_nL_{2+\delta,n}\cdot$$

In der entsprechenden Abschätzung bei TYSIAK(1983), vgl. dort $g_{20}(x)$, fehlt ein Faktor der Form $\alpha_3^{-1}(x)$.

Wir untersuchen nun eine Abschätzung der Art (2.28) in der anderen Richtung:

$$D^2S_n^* - B_n^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(f_k^{-1}(h)y^{-\delta}e^{hy}E|X_k|^{2+\delta} + (f_k^{-1}(h)-1)EX_k^2) \leq$$

$$B_n^2L_{2+\delta,n}\alpha_3^{-1}(K)(\gamma x)^{-\delta}(\exp(\gamma(1-\gamma)x^2)+\frac{1-\gamma}{\gamma}\ x^2a^{-2/(2+\delta)}\exp(-\frac{x^2}{(2+\delta)\beta}))$$

$$=: \alpha_{12}(x)\ B_n^2\ L_{2+\delta,n}$$

und erhalten damit für die Differenz $|D^2S_n^* - B_n^2|$ in (2.3)

$$|D^2S_n^* - B_n^2|\max(B_n^{-2},(D^2S_n^*)^{-1}) \leq \max(\alpha_{12}(x), \frac{\alpha_6(x)}{\alpha_7(x)})\, L_{2+\delta,n}. \qquad (2.32)$$

Nun sind wir in der Lage, die Größe

$$I_2 := P(S_n^* > xB_n)$$

in (0.24) abzuschätzen und die Untersuchung von (2.3) fortzuführen.
Im Gegensatz zu (2.27) benötigen wir noch eine obere Schranke für $D^2S_n^*$ und nutzen dabei die Identität $(1-z)^{-1} = (1-z)^{-1}z + 1$ aus:

$$D^2S_n^* \leq \sum_{k=1}^n E(\zeta_k^*)^2 \leq \sum_{k=1}^n (1-\frac{h}{y^{1+\delta}}E|X_k|^{2+\delta})^{-1}(EX_k^2+y^{-\delta}e^{hy}E|X_k|^{2+\delta}) =$$

$$\sum_{k=1}^n ((1-y^{-(1+\delta)}hE|X_k|^{2+\delta})^{-1}\frac{hE|X_k|^{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + 1)(EX_k^2+y^{-\delta}e^{hy}E|X_k|^{2+\delta}) \leq$$

$$\alpha_3^{-1}(K)\sum_{k=1}^n(\frac{hEX_k^2E|X_k|^{2+\delta}}{y^{1+\delta}} + \frac{he^{hy}(E|X_k|^{2+\delta})^2}{y^{1+2\delta}} + \alpha_3(K)(EX_k^2 + \frac{e^{hy}E|X_k|^{2+\delta}}{y^\delta}))$$

$$\leq \alpha_{13}(x)\, B_n^2$$

mit

$$\alpha_{13}(x) := 1+(\gamma x)^2(1-\alpha_1(K)) + \alpha_3^{-1}(K)(1-\alpha_3(K))\,\frac{1}{a}\,x^2 \cdot$$

$$(e^{\delta/(2+\delta)}\exp(-\frac{x^2}{(2+\delta)\beta}) + \gamma^{-\delta}\exp((\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{2\beta})x^2)) \;.$$

Es wird noch speziell eine obere Schranke für $ES_n^* - xB_n$ benötigt, siehe auch (2.31),

$$ES_n^* - xB_n = ES_n^* - hB_n^2 + hB_n^2 - xB_n \leq (\alpha_{11}(x)\frac{1}{a}\,x^{2+\delta}\exp(-\frac{x^2}{2\beta}) - \gamma x)B_n$$

d.h.

$$\frac{xB_n - ES_n^*}{DS_n^*} \geq \alpha_{13}^{-0.5}(x)\;(\gamma x - \alpha_{11}(x)\frac{1}{a}\,x^{2+\delta}\exp(-\frac{x^2}{2\beta})) =: \alpha_{14}(x). \qquad (2.33)$$

Unter Ausnutzung der Abschätzung (2.30) erhält man nun für I_2 :

$$I_2 \leq |P(S_n^* < xB_n) - \Phi((xB_n - ES_n^*)/DS_n^*)| + \Phi((ES_n^* - xB_n)/DS_n^*) \leq$$

$$0.7915\,\alpha_7^{-1.5}(x)\,\alpha_{10}(x)\frac{1}{a}\,x^{2+\delta}\exp(-\frac{x^2}{2\beta}) + \frac{1}{2\pi}\,\alpha_{14}^{-1}(x)\exp(-\frac{1}{2}\,\alpha_{14}^2(x))$$

$$=: \alpha_{15}(x), \qquad (2.34)$$

falls $\alpha_{14}(x) \geq 1$ gilt $(x \in A_2)$.

Die Ungleichung (2.3) wird jetzt mittels (2.30) bis (2.33) weiter abgeschätzt und ergibt schließlich

$$\sup_{u \geq x} |P(S_n^* < uB_n) - \Phi(u - hB_n)| \leq \alpha_{16}(x)\, L_{2+\delta,n} \qquad (2.35)$$

mit

$$\alpha_{16}(x) := 0.7915\,\alpha_7^{-1.5}(x)\alpha_{10}(x)+(8\pi)^{-1/2}\max(\alpha_{12}(x), \frac{\alpha_6(x)}{\alpha_7(x)})\,\cdot$$

$$\cdot\alpha_{14}(x)\exp(-\frac{1}{2}\,\alpha_{14}^2(x))+(2\pi)^{-1/2}\alpha_{11}(x)\exp(\frac{-1}{2}(\gamma x - \alpha_{11}(x)\frac{1}{a}\,x^{2+\delta}e^{-x^2/2\beta})^2)$$

Bei der Ableitung von (2.35) wurde zusätzlich $\alpha_{14}(x) \geq 1$ vorausgesetzt, was unter anderem sofort

$$\gamma x - \alpha_{11}(x)\,\frac{1}{a}\,x^{2+\delta}\exp(-\frac{x^2}{2\beta}) \geq 0$$

nach sich zieht, vgl. untere Schranken für s in (2.3).
Nun werden die gewonnenen Teilabschätzungen (2.25), (2.34) und (2.35) in die Ausgangsungleichung (0.24) einbezogen. Damit erhält man in der x-Zone (2.21) folgende Fehlerabschätzung:

$$|D_n(x)| \leq G_n(\gamma|x|B_n) + (\alpha_1^{-1}(K)\,\alpha_2(x)\,\alpha_{15}(x)\,x^{-(2+\delta)} + 2\,\alpha_{16}(x)\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2))\,L_{2+\delta,n}\,. \tag{2.36}$$

Aus (2.36) ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

<u>Satz 2.4.</u> Es seien a, K, γ und β positive Parameter derart, daß für alle $x\in A_2$, vgl. (2.21) oder (2.22), die Bedingungen $\alpha(x) \leq \frac{1}{6}$, $\alpha_7(x) > 0$ und $\alpha_{14}(x) \leq 1$ erfüllt sein mögen. Weiterhin mögen mit den Parametern die Bedingungen $\alpha_1(K) > 0$, $\alpha_3(K) > 0$ und $1 < \beta < \min(\frac{1}{2\gamma(1-\gamma)}, K^2/2)$ mit $\gamma < \frac{1}{2}$ gelten. Dann erhält man für alle $x\in A_2$ (und alle $n\in N$ und $\delta\in(0,1]$) die Ungleichung

$$|\,D_n(x)\,| \leq \alpha_{17}(x)\,x^{-(2+\delta)}\,L_{2+\delta,n} \tag{2.37}$$

mit

$$\alpha_{17}(x) := \gamma^{-(2+\delta)} + \alpha_1^{-1}(K)\alpha_2(x)\alpha_{15}(x) + 2x^{2+\delta}\alpha_{16}(x)\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2).$$

Der Beweis dieses Satzes ist das Kernstück von |183|. An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Bedingung (2.20) erst weiter unten (Satz 2.5) in vollem Umfang ausgenutzt wird.
Zur Illustration von (2.37) betrachten wir den Fall $\delta=1$ und wählen die Parameter a, K, γ und β wie folgt:

$$a = 17.543, \quad \gamma = 0.4485, \quad \beta = 1.063 \quad \text{und} \quad K = 3.40122$$

(vgl. Zahlenbeispiel nach (2.19)). Unter Ausnutzung von (2.24) erhält man

$$\max_{x\in A_2} \alpha_{17}(x) \leq 31.1428\,,$$

d.h. auch für die x-Zone (ii), vgl. (2.21) bzw. (2.22) gilt die in (0.6) angegebene Schranke $K_1 < 31.1428 + 0.7915 < 31.935$.

Daß die in Satz 2.4 angegebenen Voraussetzungen für die Gültigkeit von (2.37) für die hier konkret betrachteten Parameter tatsächlich erfüllt sind, sei hier nur erwähnt. Die hier abgeleiteten Formelstrukturen wurden mittels eines BASIC-Programms an PC 1715 ausgewertet.
Im allgemeinen Fall $\delta\varepsilon(0,1]$ entspricht (2.37) der Ungleichung (0.5) für die hier betrachtete x-Zone (ii), vgl. A_2, wenn man in (0.5)

$$K_\delta = C_\delta + \max_{x\varepsilon A_2} \alpha_{17}(x) \qquad (2.38)$$

setzt. Damit haben wir für alle Größenordnungen von x die analytische Struktur von $K_\delta = K_\delta(C_\delta, a, K, \gamma, \beta)$ aufgezeigt.

Mit Blick auf die Ungleichung (2.6) untersuchen wir nun in Analogie zu (2.14) und (2.16) das noch verbliebene Integral

$$\int_{A_2} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\, dx \qquad (2.39)$$

und schätzen es unter Ausnutzung der Ungleichung (2.36) nach oben ab. Dazu wird die bereits am Anfang des Abschnitts gestellte Bedingung (2.20) benötigt. Mit (2.36) gilt in (2.39), wobei wir jetzt stets $\gamma = \frac{1}{2\beta}$ setzen, um das Integral über G_n so klein wie möglich zu halten,

$$\int_{A_2} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\, dx \leq \int_{A_2} |x|^{1+\delta} G_n(\gamma|x|B_n)\, dx + (I_a+I_b+I_c+I_d) L_{2+\delta,n}. \qquad (2.40)$$

In (2.40) handelt es sich dabei um folgende Teilintegrale:

$$I_a = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_K^\infty x^{1+\delta} \alpha_{11}(x) \exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)\, dx ,$$

wobei der exponentielle Faktor $\exp(-(\gamma x - \alpha_{11}(x)\frac{1}{a}\, x^{2+\delta} \exp(-\frac{x^2}{2\beta}))^2/2)$, vgl. Definition von $\alpha_{16}(x)$ in (2.35), bereits durch 1 abgeschätzt wurde.

$$I_b = 2\, \alpha_1^{-1}(K) \int_K^\infty \frac{1}{x}\, \alpha_2(x)\, dx ,$$

wobei hier anstatt der Ungleichung (2.34) die triviale Abschätzung $I_2 \leq 1$ verwendet wurde.

$$I_c = \frac{4}{\sqrt{8\pi e}} \int_K^\infty x^{1+\delta} \max(\alpha_{12}(x), \frac{\alpha_6(x)}{\alpha_7(x)}) \exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)\, dx ,$$

wobei der Faktor $\alpha_{14}(x)\exp(-\frac{1}{2}\alpha_{14}^2(x))$, vgl. Definition von $\alpha_{16}(x)$ in (2.35), bereits durch $\exp(-0.5)$ abgeschätzt wurde.
In I_c wird weiterhin folgende Abschätzung ausgenutzt:

$$\max(\alpha_{12}(x), \alpha_7^{-1}(x)\alpha_6(x)) \leq \alpha_7^{-1}(x)(\alpha_4(x) + \alpha_5(x) + \alpha_{12}(x)) \quad \text{für } x \geq K ,$$

die aus den Definitionen für $\alpha_6(x)$ und $\alpha_{12}(x)$ sowie der Ungleichung

$$\max(1,\ \gamma(1-\gamma)x^2) \leq \exp(\gamma(1-\gamma)x^2)$$

folgt, wenn außerdem beachtet wird, daß $\alpha_7(x) < 1$ ist, vgl. Definition von $\alpha_7(x)$ in (2.27). Durch mehrfache Anwendung der Ungleichung (2.24) ergibt sich wegen $K^2 \geq \max(1.5(2+\delta)\beta,\ 4\beta)$; vgl. (2.20), außerdem die Abschätzung $\alpha_7(x) \geq \alpha_7(K)$, die ebenfalls zur Auswertung von I_c mit ausgenutzt wird.

Das Integral I_d schließlich setzt sich wie folgt zusammen:

$$I_d = 0{,}7915\ \alpha_7^{-1.5}(K)\ 4 \int_K^\infty x^{1+\delta}\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)\alpha_{10}(x)\ dx\ .$$

Wir kommen zur weiteren Abschätzung der Integrale I_a bis I_d :

Für den Integranden in I_a gilt

$$x^{1+\delta}\alpha_{11}(x)\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2) = \alpha_3^{-1}(K)\gamma^{-(1+\delta)}(\exp(-(1-\gamma)^2x^2/2) + (1-\gamma)^2 a^{-2/(2+\delta)}x^4\exp(-x^2(\frac{1-\gamma^2}{2} + \frac{1}{(2+\delta)\beta}))\ ;$$

woraus sofort

$$I_a \leq \frac{2}{1-\gamma}\ \gamma^{-(1+\delta)}\alpha_3^{-1}(K)(1+3(1-\gamma)^3a^{-2/(2+\delta)}(1-\gamma^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta})^{-2.5})$$

folgt. Dabei wurde das bekannte Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\ dx = \frac{1}{2}\ a^{-(n+1)/2}\ \Gamma(\frac{n+1}{2});\quad a>0,\quad n>-1\ ; \qquad (2.41)$$

ausgenutzt. Für I_b gilt

$$\frac{1}{x}\ \alpha_2(x) = \frac{1}{x}\ \gamma^{-(2+\delta)}\exp(-\frac{1}{2}(1-\gamma)^2x^2) + \frac{1}{4}(1-\gamma)^4\ a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\ x^7\cdot \exp(-\frac{x^2}{2\beta}\ (\frac{2-\delta}{2+\delta} + (1-\gamma^2)\beta))\ .$$

Mit (2.41) ergibt sich

$$I_b \leq \frac{1}{1-\gamma}\ \alpha_1^{-1}(K)(\frac{1}{K}\sqrt{2\pi}\ \gamma^{-(2+\delta)} + 24(1-\gamma)^5a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}(1-\gamma^2+\frac{2-\delta}{(2+\delta)\beta})^{-4})\ .$$

Zur Abschätzung von I_c betrachten wir den Integranden

$$\begin{aligned}
&x^{1+\delta}(\alpha_4(x)+\alpha_5(x)+\alpha_{12}(x))\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2) = \\
&(\tfrac{1}{2} + \alpha_3^{-2}(K))(1-\gamma)^2\ a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\ x^5\ \exp(-(1-\gamma^2+\frac{2-\delta}{(2+\delta)\beta})x^2/2) + \\
&\gamma^{-(2+\delta)}\ a^{-2/(2+\delta)}\ x\ \exp(-(\frac{(1-\gamma)^2}{2} + \frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2) + \\
&\alpha_3^{-2}(K)\ \frac{1}{a}\ \gamma^{-(2+2\delta)}\ x\ \exp(-(\frac{1}{2}(1-\gamma)(1-3\gamma) + \frac{1}{2\beta})x^2) + \\
&\alpha_3^{-2}(K)\ 2(1-\gamma)\gamma^{-(1+\delta)}\ a^{-2/(2+\delta)}\ x^3\ \exp(-(\frac{1}{2}(1-\gamma)^2 + \frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2) + \\
&\alpha_3^{-1}(K)\ \gamma^{-\delta}\ x\ \exp(-\frac{1}{2}\ (1-\gamma)^2x^2) + \alpha_3^{-1}(K)(1-\gamma)\gamma^{-(1+\delta)}a^{-2/(2+\delta)}\ x^3\cdot \\
&\exp(-(\frac{1}{2}(1-\gamma^2) + \frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2)
\end{aligned}$$

und erhalten mit (2.41) die Abschätzung

$$I_c \lesssim (2\pi e)^{-0.5}\, \alpha_7^{-1}(K)\cdot(\ 2\,\alpha_3^{-1}(K)(1-\gamma)^{-2}\gamma^{-\delta} \;+$$
$$16(\tfrac{1}{2}+\alpha_3^{-2}(K))(1-\gamma)^2\, a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}(1-\gamma^2+\frac{2-\delta}{(2+\delta)\beta})^{-3} \;+$$
$$2\gamma^{-(2+\delta)}\, a^{-2/(2+\delta)}((1-\gamma)^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta})^{-1} \;+$$
$$2\alpha_3^{-2}(K)\,\frac{1}{a}\,\gamma^{-(2+2\delta)}((1-\gamma)(1-3\gamma)+\frac{1}{\beta})^{-1} \;+$$
$$8\alpha_3^{-2}(K)(1-\gamma)\gamma^{-(1+\delta)}\, a^{-2/(2+\delta)}((1-\gamma)^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta})^{-2} \;+$$
$$4\alpha_3^{-1}(K)(1-\gamma)\gamma^{-(1+\delta)}\, a^{-2/(2+\delta)}(1-\gamma^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta})^{-2}\ ).$$

Die Abschätzung von I_d verläuft noch etwas komplizierter:
Zuerst wird in $\alpha_9(x)$ der Wurzelfaktor abgeschätzt:

$$(\gamma^{-\delta}\, a^{-\delta/(2+\delta)} + \exp(-(\gamma(1-\gamma)-\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta})x^2)^{+0.5} \lesssim$$
$$\gamma^{-\delta/2}\, a^{-\delta/(4+2\delta)} + \frac{1}{2}\,\gamma^{\delta/2}\, a^{\delta/(4+2\delta)}\, \exp(-(\gamma(1-\gamma)-\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta})x^2)\ ,$$

wobei hier die Ungleichung $(a+b)^{0.5} \lesssim a^{0.5} + \frac{1}{2}\, b\, a^{-0.5}$ ausgenutzt wurde. Zum Integranden von I_d :

$$x^{1+\delta}\exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)\ \alpha_{10}(x) \ \lesssim\ \exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)\cdot$$
$$(\ \alpha_3^{-1}(K)\gamma^{1-\delta}\ x^2\ \exp(\gamma(1-\gamma)x^2) \;+$$
$$3\ \alpha_3^{-2}(K)(1-\gamma)\ a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\ x^4\ \exp(-\frac{2-\delta}{2+\delta}\,\frac{x^2}{2\beta}) \;+$$
$$3\ \alpha_3^{-2}(K)(1-\gamma)\gamma^{-\delta}\ a^{-2/(2+\delta)}\ x^4\ \exp((\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2) \;+$$
$$3\ \alpha_3^{-2}(K)\gamma^{-(1+\delta)}\ a^{-2/(2+\delta)}\ x^2\ \exp((\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{(2+\delta)\beta})x^2) \;+$$
$$3\ \alpha_3^{-2}(K)\gamma^{-(1+2\delta)}\ \frac{1}{a}\ x^2\ \exp((2\gamma(1-\gamma)-\frac{1}{2\beta})x^2) \;+$$
$$\alpha_3^{-2.5}(K)\ \gamma^{\delta/2}\ a^{-(3-1.5\delta)/(2+\delta)}\ x^2\ \exp((2.5\gamma(1-\gamma)-\frac{3}{4\beta})x^2)\cdot$$
$$(\gamma^{-\delta}\ a^{-\delta/(2+\delta)} + \frac{1}{2}\exp(-(\gamma(1-\gamma)-\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta})x^2)\cdot$$
$$(\gamma^{-(1+\delta)}\ a^{-\delta/(2+\delta)} + (1-\gamma)x^2\exp(-(\gamma(1-\gamma)-\frac{\delta}{(2+\delta)2\beta})x^2))^2\ ).$$

Nach dem Quadrieren des letzten Faktors wird alles ausmultipliziert und mittels (2.41) gliedweise integriert. Man erhält dann

$$I_d \lesssim 6\cdot 0{,}7915\ \sqrt{2\pi}\ \alpha_7^{-1.5}(K)\ \alpha_3^{-2.5}(K)\cdot(\ \alpha_3^{1.5}(K)\gamma^{1-\delta}(1-\gamma)^{-3}\cdot\frac{1}{3} \;+$$
$$\alpha_3^{0.5}(K)\gamma^{-(1+2\delta)}\ \frac{1}{a}\ ((1-\gamma)(1-3\gamma)+\frac{1}{\beta})^{-1.5} \;+$$
$$\alpha_3^{0.5}(K)\gamma^{-(1+\delta)}\ a^{-2/(2+\delta)}((1-\gamma)^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta})^{-1.5} \;+$$
$$\frac{1}{3}\ \gamma^{-(2+2.5\delta)}\ a^{-(3+1.5\delta)/(2+\delta)}((1-\gamma)(1-4\gamma)+\frac{3}{2\beta})^{-1.5} \;+$$

$$\frac{1}{6}\,\gamma^{-(2+1.5\delta)}\,a^{-(3+0.5\delta)/(2+\delta)}\Big((1-\gamma)(1-2\gamma)+\frac{6+\delta}{(2+\delta)2\beta}\Big)^{-1.5}\;+$$
$$3\,\alpha_3^{0.5}(K)(1-\gamma)\,a^{-(2-\delta)/(2+\delta)}\Big(1-\gamma^2+\frac{2-\delta}{(2+\delta)\beta}\Big)^{-2.5}\;+$$
$$3\,\alpha_3^{0.5}(K)(1-\gamma)\gamma^{-\delta}\,a^{-2/(2+\delta)}\Big((1-\gamma)^2+\frac{2}{(2+\delta)\beta}\Big)^{-2.5}\;+$$
$$2(1-\gamma)\gamma^{-(1+1.5\delta)}a^{-(3+0.5\delta)/(2+\delta)}\Big((1-\gamma)(1-2\gamma)+\frac{6+\delta}{(2+\delta)2\beta}\Big)^{-2.5}\;+$$
$$\gamma^{-(1+0.5\delta)}(1-\gamma)\,a^{-(3-0.5\delta)/(2+\delta)}\Big(1-\gamma+\frac{6-\delta}{(2+\delta)2\beta}\Big)^{-2.5}\;+$$
$$5\,\gamma^{-\delta/2}(1-\gamma)^2\,a^{-(3-0.5\delta)/(2+\delta)}\Big(1-\gamma+\frac{6-\delta}{(2+\delta)2\beta}\Big)^{-3.5}\;+$$
$$2.5\,\gamma^{\delta/2}(1-\gamma)^2a^{-(3-1.5\delta)/(2+\delta)}\Big((1-\gamma)(1+2\gamma)+\frac{6-3\delta}{(2+\delta)2\beta}\Big)^{-3.5}\Big)\,.$$

Damit gilt für die Summe $I_a+I_b+I_c+I_d$ der betrachteten Teilintegrale die Abschätzung

$$I_a+I_b+I_c+I_d \;\leq\; L = L(a,K,\gamma,\beta,\delta), \tag{2.42}$$

wobei L eine absolute Konstante ist, die nur von den Parametern a, K, γ, β und δ abhängt. Aus den vorangehenden Überlegungen ergibt sich

Satz 2.5. Es seien a, K, γ ($=\frac{1}{2\beta}$) und β positive Parameter derart, daß für alle $x \in A_2$, d.h. x aus der x-Zone (2.21), die Bedingung $\alpha(x) \leq \frac{1}{6}$ erfüllt sein möge. Weiterhin mögen mit diesen Parametern die Bedingungen $\alpha_1(K)>0$, $\alpha_3(K)>0$, $\alpha_7(K)>0$, $1<\beta\leq 1.5$ sowie (2.20) gelten. Dann erhält man für das Integral (2.39) die Abschätzungen (2.40) und (2.42).

Zur Illustration der Abschätzung (2.42) betrachten wir wieder den Fall $\delta=1$ und wählen die Parameter a, K, β wie folgt:

$$a= 17.5604,\ \beta= 1.12918 \ \text{ und }\ K= \frac{1}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}} = 2.01322\ \Big(\gamma= \frac{1}{2\beta} = 0.4428\Big).$$

Die Konstante L in (2.42) ergibt dann den Wert 282,700 . Der Zahlenwert wurde über ein BASIC-Programm am PC 1715 berechnet.
Zum Vergleich (mit den oben gewählten Parametern) die Konstanten in (2.14) und (2.16):

$$\frac{2a}{(2+\delta)(\beta-1)}\exp\Big(\frac{1}{a}(2\beta)^{2+\delta}-\frac{\beta-1}{2\beta}K^2\Big) = 138{,}493$$

und

$$\frac{2}{2+\delta}K^{2+\delta}\,c_\delta = 4{,}3056\ .$$

Offen ist die Abschätzung von $\Big(\int\limits_{A_2}+\int\limits_{A_3}\Big)|x|^{1+\delta}G_n(\gamma|x|B_n)\,dx$:

Es gilt mit partieller Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} G_n(\gamma|x|B_n)dx = \frac{2}{2+\delta}\gamma^{-(2+\delta)} L_{2+\delta,n} , \qquad (2.43)$$

wobei in unserem Zahlenbeispiel die Konstante folgenden Wert hat:

$$\frac{2}{2+\delta}\gamma^{-(2+\delta)} = 7{,}6787 .$$

Damit haben wir im Fall $\delta=1$ folgendes Hilfsergebnis: Mit der Bedingung (2.23) im Fall $x=K$, vgl. linke Ungleichung in (2.20), gilt mit den konkret gewählten Parametern $\bar{a}$, K, β (s. oben) die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} |D_n(x)| dx \leq 433{,}178\, L_{2+\delta,n} \quad (\delta=1) . \qquad (2.44)$$

Diese Ungleichung stellt ein wichtiges Hilfsergebnis zur Abschätzung der Konstanten $C(p,\delta)$ in (0.7) im Fall $\delta=1$ dar.

Ohne Beweis sei an dieser Stelle noch folgende Bemerkung angefügt: Aus den Untersuchungen zu den Integralen I_a, I_b, I_c und I_d ergibt sich für die "mittleren" Abweichungen des Arguments x, d.h. $x \in A_2$, folgende Asymptotik in (2.36):

für $x = x(n) \longrightarrow \infty$, $n \longrightarrow \infty$, gilt

$$(\alpha_1^{-1}(K)\, \alpha_2(x)\, \alpha_{15}(x)\, x^{-(2+\delta)} + 2\, \alpha_{16}(x) \exp(-(1-\gamma^2)x^2/2)) = O(x^{1-\delta} \exp(-(1-\gamma)^2 x^2/2)).$$

2.3. Zur STEIN'schen Methode

Neben der traditionellen Methode der charakteristischen Funktionen oder der im Abschnitt 2.2 benutzten direkten Beweismethode hat eine weitere direkte Beweistechnik, die auf STEIN(1970) zurückgeht, an Bedeutung gewonnen. Nicht zuletzt durch die Arbeit von HEINRICH(1986) wurde diese wirksame Methode erfolgreich für m-abhängige Zufallsgrössen ausgebaut und angewendet. Verblüffend einfach sind hier die Beweisschritte, wenn man zum Fall unabhängiger Zufallsgrößen übergeht. Jedoch gelingt damit keine Präzisierung bekannter Konstantenabschätzungen. Die STEIN'sche Beweistechnik soll als Abschluß dieses Kapitels demonstriert werden, wobei die Ungleichung (0.3) mit $C < 7{,}4596$ hergeleitet wird (Das genauere Ergebnis $C < 3{,}51$ wird dann mit der Methode der charakteristischen Funktionen im folgenden Kapitel 3 erhalten). Bei allen numerischen Konstantenabschätzungen liegt stets die Idee zugrunde, im Beweis zusätzliche frei wählbare Parameter einzubauen, danach die analytische Struktur der Konstanten in Abhängigkeit von diesen Parametern zu ermitteln und schließlich die Parameter zu optimieren, damit die Konstantenabschätzung so klein wie eben möglich ausfällt. Dieser Gedanke wurde z.B. mit der Gleichung (2.18) verdeutlicht und soll auch hier zum Tragen kommen.

Es wird folgende Hilfsaussage über Größenvergleiche abgeschnittener Momente benutzt:

<u>Lemma 2.6.</u> Es sei X eine Zufallsgröße mit $EX=0$ und $EX^2=1$. Dann gilt

$$E\,X^2 \min(1,\ |X|) \geq \frac{23}{27} \tag{2.45}$$

und für alle $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$E\,X^2\,\mathbb{1}\{|X| \leq 1\}\ E\,X\,\mathbb{1}\{\varepsilon < X \leq 1\} \leq \tag{2.46}$$

$$(1+\tfrac{2}{9}\sqrt{3})\ E\,|X|^3\,\mathbb{1}\{|X| \leq 1\} - E\,|X|^3\,\mathbb{1}\{-1 \leq X \leq -\varepsilon\}.$$

Die Ungleichung (2.45) gibt eine untere Schranke für die abgeschnittene Streuung $EX^2\min(1,|X|)$ an und Ungleichung (2.46) enthält eine nichttriviale Abschätzung nach oben für das Produkt abgeschnittener 2. und 1. Momente durch abgeschnittene 3. Momente.

<u>Zum Beweis von Lemma 2.6:</u> Sei $a= E\,X^2\,\mathbb{1}\{|X| \geq 1\}$. Dann ist mit der LJAPUNOV-Ungleichung $EX^2=1=a+1-a \leq a+(E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\})^{2/3}$.

Hieraus folgt $(1-a)^{1.5} \leq E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\}$ und $EX^2\min(1,|X|)\geq a+(1-a)^{1.5}$.

Die rechte Seite der letzten Ungleichung erreicht für $a=5/9$ ihr Minimum, woraus sofort (2.45) folgt.

Sei nun $b= E|X|^3\,\mathbb{1}\{\varepsilon<X<1\}$. Dann ist $EX^2\,\mathbb{1}\{|X|<1\}EX\,\mathbb{1}\{\varepsilon<X<1\}$ + $E|X|^3\,\mathbb{1}\{-1<X<-\varepsilon\} \leq (E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\})^{2/3}\,b^{1/3} + E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\} - b$.

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird für $b=\sqrt{1/27}\,E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\}$ maximal, d.h. sie erreicht den Wert $(1+\frac{2}{9}\sqrt{3})E|X|^3\,\mathbb{1}\{|X|<1\}$.

Daraus folgt die Ungleichung (2.46). ■

<u>Ein Beweis der Ungleichung (0.3):</u> Wir benutzen die im Abschnitt 0.1 eingeführten Bezeichnungen und schreiben weiter $Y_i=B_n^{-1}X_i$, $i=1,2,\ldots,n$, d.h. $EY_i=0$ und $\sum_{i=1}^{n} EY_i^2 = 1$. Über die Methode der vollständigen Induktion beweisen wir (0.3) für $n=1$ und dann für $n=k$ unter der Voraussetzung, daß (0.3) für $n=k-1$ gilt.

Im Fall $n=1$ folgt aus (0.4) und (2.45)

$$\sup_x |D_n(x)| \leq 0.5416 \leq \frac{23}{27}\cdot 0{,}8 \leq 0{,}8\ EY_1^2\min(1,|Y_1|),$$

d.h. (0.3) gilt im Fall $n=1$ mit einer absoluten Konstanten $C = 0{,}8$ (oder allgemeiner $C \geq 0{,}8$). Gelte nun für $n=k-1$ die Ungleichung (0.3)

$$|D_{k-1}(x)| \leq C\sum_{i=1}^{k-1} EY_i^2\min(1,|Y_i|) \quad \text{mit} \quad C \geq 0{,}8.$$

O.B.d.A. sei mit einem Parameter $\gamma \in ((0{,}54094\sqrt{2}/C)^{1/3},\ 1)$ die Bedingung

$$\max_{1\le i\le k} EY_i^2 \le \gamma^2$$

erfüllt. Angenommen, es existiert ein Index i_0 mit $EY_{i_0}^2 > \gamma^2$. Dann erhält man die Schranke in (0.3) mit n=k als triviale Folgerung aus (0.4):

$$\sup_x |D_k(x)| \le 0.5416 \le 2^{-0.5} C\gamma^3 \le 2^{-0.5} C (EY_{i_0}^2)^{1.5} \le$$

$$2^{-0.5} C (E|Y_{i_0}^2|\, \mathbf{1}\{|Y_{i_0}|>1\} + (E|Y_{i_0}|^3\, \mathbf{1}\{|Y_{i_0}|\le 1\})^{2/3})^{1.5} \le$$

$$C\, EY_{i_0}^2 \min(|Y_{i_0}|,1) \le C \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \min(|Y_i|,1),$$

wobei in der Ungleichungskette die LJAPUNOV- und c_r-Ungleichung (s. |117| S.168) ausgenutzt wurden. Sei nun

$$Z_i = \sum_{j=1}^{i-1} Y_j + \sum_{j=i+1}^{k} Y_j = \sum_{j=1}^{k} Y_j - Y_i$$

und

$$\rho_i^2 = EZ_i^2 = 1 - EY_i^2 \ge 1 - \gamma^2, \quad \rho := \min_{1\le i\le k} \rho_i .$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(a \le Z_i < b)$, die weiter unten in (2.53) benötigt wird, gilt nun mit der Induktionsvoraussetzung

$$P(a\le Z_i<b) = P(Z_i/\rho_i<b/\rho_i) - \Phi(\frac{b}{\rho_i}) + \Phi(\frac{b}{\rho_i}) - \Phi(\frac{a}{\rho_i}) - (P(Z_i/\rho_i<\frac{a}{\rho_i}) - \Phi(\frac{a}{\rho_i}))$$

$$\le 2C\rho^{-3} \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \min(|Y_i|,1) + (2\pi)^{-0.5}(b-a)/\rho .$$

Wir schreiben nun durch Erweitern mit einem weiteren Parameter $\beta>0$ für den ersten Summanden auf der rechten Seite der letzten Ungleichung

$$2C\rho^{-3} \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \min(|Y_i|,1) = (\beta\rho)^{-1}\varepsilon ,$$

wobei

$$\varepsilon = \varepsilon_k = 2C\beta\rho^{-2} \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \min(|Y_i|,1)$$

ist, und haben

$$P(a \le Z_i < b) \le (\beta\rho)^{-1}\varepsilon + (2\pi)^{-0.5}(b-a)/\rho . \tag{2.47}$$

Der Kerngedanke der STEIN'schen Methode besteht nun in der Ausnutzung einer einfachen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion

$$f(t) := e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}(h(u) - Eh(N))du ,$$

wobei N eine N(0,1)-verteilte Zufallsgröße ist und h irgendeine beschränkte Funktion bezeichnet,

$$f'(t) - tf(t) = h(t) - Eh(N) . \tag{2.48}$$

Mit den oben eingeführten Größem Y_i und Z_i gilt nun in (2.48)

$$E(h(\sum_{i=1}^{k} Y_i) - h(N)) = Ef'(\sum_{i=1}^{k} Y_i) - \sum_{i=1}^{k} E(Y_i f(Z_i + Y_i)). \qquad (2.49)$$

Für $f(Z_i+Y_i)$ wird die TAYLOR-Entwicklung in folgender Form eingesetzt:

$$f(Z_i+Y_i) = f(Z_i) + Y_i f'(Z_i) + \int_0^{Y_i} (f'(Z_i+u) - f'(Z_i))\, du$$

und dabei der Faktor $1 = B_k^{-2} \sum_{i=1}^{k} EX_i^2 = \sum_{i=1}^{k} EY_i^2$ eingefügt:

$$E(h(\sum_{i=1}^{k} Y_i) - h(N)) = \sum_{i=1}^{k} E(B_n^{-2} EX_i^2 (f'(Z_i) + \alpha_i) - Y_i f(Z_i) - Y_i^2 f'(Z_i) - Y_i A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} E(B_n^{-2} EX_i^2\, \alpha_i - Y_i A_i), \qquad (2.50)$$

wobei

$$\alpha_i = f'(Z_i+Y_i) - f'(Z_i) \quad \text{und} \quad A_i = \int_0^{Y_i} (f'(Z_i+u) - f'(Z_i))\, du$$

ist. In (2.50) wurde die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen Y_i und Z_i ausgenutzt. Nun wird die beschränkte Funktion h fest gewählt:

$$h(t) = 1\{t < x\}, \quad \text{d.h.} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t<x, \\ 0 & \text{für } t \geq x, \end{cases}$$

ist eine Indikatorfunktion bezüglich des festen Intervalls $(-\infty, x)$. Damit geht die linke Seite von (2.49) oder (2.50) über in

$$E(1\{\sum_{i=1}^{k} Y_i < x\} - 1\{N < x\}) = D_k(x),$$

d.h. in (2.50) müssen noch die Größen $E\,\alpha_i$ und EY_iA_i weiter untersucht werden. Mit der Funktion

$$g(t) := (tf(t))' = f(t) + tf'(t),$$

d.h. $0 \leq g(t) \leq 1+|t|$ und $|\int_a^b g(t)\, dt| \leq 1$, vgl. STEIN(1970), erhalten wir für α_i:

$$\alpha_i = h(Z_i+Y_i) - h(Z_i) + \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} g(z)\, dz$$

und für A_i:

$$A_i = \int_0^{Y_i} (h(Z_i+u) - h(Z_i))\, du + \int_0^{Y_i} (\int_{Z_i}^{Z_i+u} g(z)\, dz)\, du.$$

Die Identität (2.50) geht über in

$$D_k(x) = \sum_{i=1}^{k} E(B_n^{-2} EX_i^2 (h(\sum_{i=1}^{k} Y_i) - h(Z_i) + \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} g(z)\, dz) -$$

$$- Y_i^2 \int_0^1 h(Z_i+tY_i)dt + Y_i^2 h(Z_i) - Y_i^2 \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} Y_i^{-1}(Z_i+Y_i-z)g(z)\,dz\ ,$$

wobei die Integrale durch Substitution oder partielle Integration umgeformt wurden. Mit der Bezeichnung

$$I_i := E(Y_i^2 \int_0^1 h(Z_i+tY_i)dt)$$

geht die letzte Gleichung über in

$$\sum_{i=1}^{k} I_i - \phi(x) = \sum_{i=1}^{k} E(B_n^{-2}EX_i^2 \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} g(z)dz - Y_i^2 \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} Y_i^{-1}(Z_i+Y_i-z)g(z)dz). \tag{2.51}$$

Das zweite Integral in (2.51) schreiben wir als

$$EY_i^2 \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} Y_i^{-1}(Z_i+Y_i-z)g(z)(\,\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} + \mathbb{1}\{|Y_i|>1\})dz$$

und schätzen es ab durch

$$\frac{7}{6}\, E|Y_i|^3\, \mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} + EY_i^2\, \mathbb{1}\{|Y_i|>1\},$$

wobei die Substitution $t=Z_i+Y_i-z$ und Abschätzungen für $g(t)$ bzw. $\int g(t)\,dt$ ausgenutzt wurden:

$$|EY_i^2 \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} Y_i^{-1}(Z_i+Y_i-z)g(z)\,\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}dz| = |EY_i \int_0^{Y_i} tg(Z_i+Y_i-t)\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}\cdot dt\,|$$

$$\leq |E|Y_i| \int_0^{Y_i} |t|(1+|Z_i|+|Y_i-t|)\,\mathbb{1}\{|Y_i|<1\}dt\ |\ \leq$$

$$\frac{1}{2}\, E|Y_i|^3(1+|Z_i|)\,\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} + E|Y_i|\ \left|\int_0^{Y_i}(tY_i-t^2)dt\right|\ \mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} \leq$$

$$\frac{1}{2}\, E|Y_i|^3\, \mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}(1+\sqrt{EZ_i^2}\,) + \frac{1}{6}\, E|Y_i|^3\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} \leq \frac{7}{6}\, E|Y_i|^3\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}$$

und

$$|EY_i^2 \int_0^{Y_i} Y_i^{-1} tg(Z_i+Y_i-t)\ \mathbb{1}\{|Y_i|>1\}dt\,| \leq EY_i^2\ \mathbb{1}\{|Y_i|>1\}.$$

Für das erste Integral in (2.51) schreiben wir mit $t=z-Z_i$:

$$|E \int_{Z_i}^{Z_i+Y_i} g(z)dz\,| \leq E|\int_0^{Y_i}(1+|t|+|Z_i|)dt\,| \leq E(|Y_i| + \frac{1}{2}Y_i^2 + |Y_i|\,|Z_i|)$$

$$\leq 2B_k^{-1}\sqrt{EX_i^2} + \frac{1}{2}\, B_k^{-2}EX_i^2\ .$$

Mit der anfangs gestellten Bedingung $B_k^{-1}\sqrt{EX_i^2} \leq \gamma$ folgt nun in (2.51)

$$|\sum_{i=1}^{k} I_i - \phi(x)| \leq (2+\frac{\gamma}{2}) \sum_{i=1}^{k} B_k^{-3}(EX_i^2)^{1.5} + \sum_{i=1}^{k} (EY_i^2 \,\mathbb{1}\{|Y_i|>1\} + \frac{7}{6} E|Y_i|^3 \,\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\})$$

$$\leq (2\sqrt{2} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} +1) \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \mathbb{1}\{|Y_i|>1\} + (2\sqrt{2} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{7}{6}) \sum_{i=1}^{k} E|Y_i|^3 \mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}. \tag{2.52}$$

Als weitere Abschätzung benötigen wir

$$|\sum_{i=1}^{k} I_i - P(\sum_{i=1}^{k} Y_i<x+2\varepsilon)| \leq (\frac{1}{\rho}(\beta^{-1}+(2\pi)^{-0.5})+1) \sum_{i=1}^{k} EY_i^2 \,\mathbb{1}\{|Y_i|>1\} + \frac{1}{\rho}(\beta^{-1}+(2\pi)^{-0.5})(1+\frac{2}{9}\sqrt{3}) \sum_{i=1}^{k} E|Y_i|^3 \,\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\}, \tag{2.53}$$

wobei (2.46) aus Lemma 2.6 ausgenutzt wurde und $\varepsilon>0$ die oben definierte Größe in (2.47) ist. (2.53) erhält man wie folgt:

$$I_i = EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i>-\varepsilon\} \int_0^1 h(Z_i+tY_i)dt + EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i\leq-\varepsilon\} \int_0^1 h(Z_i+tY_i)dt$$

$$\leq B_n^{-2}EX_i^2 \; Eh(Z_i-\varepsilon) + EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i\leq-\varepsilon\}(h(Z_i+Y_i)-h(Z_i-\varepsilon))$$

$$=B_n^{-2}EX_i^2Eh(Z_i-\varepsilon)(\mathbb{1}\{Y_i\leq\varepsilon\} +\mathbb{1}\{Y_i>\varepsilon\}) +EY_i^2\mathbb{1}\{Y_i\leq-\varepsilon\}(h(Z_i+Y_i)-h(Z_i-\varepsilon))$$

$$\leq B_n^{-2}EX_i^2 \; Eh(Z_i+Y_i-2\varepsilon)+ B_n^{-2}EX_i^2 \; E\mathbb{1}\{Y_i>\varepsilon\}(h(Z_i-\varepsilon)-h(Z_i+Y_i-2\varepsilon)) + EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i\leq-\varepsilon\}(h(Z_i+Y_i)-h(Z_i-\varepsilon))$$

$$= B_n^{-2}EX_i^2 \; P(\sum_{i=1}^{k} Y_i<x+2\varepsilon) + B_n^{-2}EX_i^2 \; E\mathbb{1}\{Y_i>\varepsilon\}P(x+2\varepsilon-Y_i\leq Z_i<x+\varepsilon \mid Y_i)+ EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i\leq-\varepsilon\}P(x+\varepsilon\leq Z_i<x-Y_i \mid Y_i) .$$

Für den zweiten Summanden folgt nun mit (2.47):

$$E(\mathbb{1}\{Y_i>1\}+ \mathbb{1}\{\varepsilon<Y_i\leq 1\}) P(x+2\varepsilon-Y_i\leq Z_i<x+\varepsilon \mid Y_i) \leq P(Y_i>1) + \frac{1}{\rho}(\beta^{-1}+(2\pi)^{-0.5})EY_i \,\mathbb{1}\{\varepsilon<Y_i\leq 1\}.$$

Entsprechend ergibt sich für den dritten Summanden mittels (2.47):

$$EY_i^2(\mathbb{1}\{Y_i<-1\}+ \mathbb{1}\{-1\leq Y_i\leq-\varepsilon\}) P(x+\varepsilon\leq Z_i<x-Y_i \mid Y_i) \leq EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i<-1\} + \frac{1}{\rho}(\beta^{-1}+(2\pi)^{-0.5})E|Y_i|^3 \,\mathbb{1}\{-1\leq Y_i\leq-\varepsilon\}.$$

Die Summation über i liefert nun mit $P(Y_i>1)\leq EY_i^2\mathbb{1}\{Y_i>1\}$ und $B_n^{-2}EX_i^2\leq 1$:

$$|\sum_{i=1}^{k} I_i - P(\sum_{i=1}^{k} Y_i<x+2\varepsilon)| \leq \sum_{i=1}^{k}(EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i>1\} +EY_i^2 \,\mathbb{1}\{Y_i<-1\}) + \frac{1}{\rho}(\beta^{-1}+(2\pi)^{-0.5})\sum_{i=1}^{k}(EY_i^2(\mathbb{1}\{|Y_i|\leq 1\} +\mathbb{1}\{|Y_i|>1\})EY_i\mathbb{1}\{\varepsilon<Y_i\leq 1\} +E|Y_i|^3 \cdot \mathbb{1}\{-1<Y_i<-\varepsilon\}).$$

Mit der Abschätzung (2.46) folgt schließlich (2.53). Nun ist

$$\sup_x |D_k(x)| = \sup_x |P(\sum_{i=1}^k Y_i < x+2\varepsilon) - \Phi(x+2\varepsilon)| \leq$$

$$\sup_x |\sum_{i=1}^k I_i - P(\sum_{i=1}^k Y_i < x+2\varepsilon) + \Phi(x+2\varepsilon) - \Phi(x) - \sum_{i=1}^k I_i - \Phi(x)| .$$

Mit (2.52) und (2.53) erhält man hieraus:

$$\sup_x |D_k(x)| \leq f_1(\beta,\gamma,C) \sum_{i=1}^k EY_i^2 1\{|Y_i|>1\} + f_2(\beta,\gamma,C) \sum_{i=1}^k E|Y_i|^3 1\{|Y_i| \leq 1\}$$

mit

$$f_1(\beta,\gamma,C) = \frac{4\beta C}{(1-\gamma^2)\sqrt{2\pi}} + 2(1+\sqrt{2}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + (1-\gamma^2)^{-0.5}(\beta^{-1} + (2\pi)^{-0.5})$$

und

$$f_2(\beta,\gamma,C) = \frac{4\beta C}{(1-\gamma^2)\sqrt{2\pi}} + 2(\frac{7}{12} + \sqrt{2}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + (1-\gamma^2)^{-0.5}(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}})(1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}) .$$

Nun werden f_1 und f_2 gleichgesetzt, um eine optimale Konstantenabschätzung zu erhalten. Es folgt ein Zusammenhang zwischen β und γ :

$$\frac{5}{6} = (1-\gamma^2)^{-0.5} (\beta^{-1} + (2\pi)^{-0.5}) \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

und somit

$$\beta^{-1} = \frac{5}{4}\sqrt{3}\sqrt{(1-\gamma^2)} - (2\pi)^{-0.5} .$$

Mit $\gamma = (\sqrt{2} \cdot 0{,}54094/C)^{1/3}$ gilt für die Konstante C in (0.3) die Fixpunktgleichung

$$C = f(C) := \frac{4C}{(1-\gamma^2)\sqrt{2\pi}\,(\frac{5}{4}\sqrt{3(1-\gamma^2)} - (2\pi)^{-0.5})} + 2(1+\sqrt{2}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{5}{4}\sqrt{3} .$$

Die numerische Auswertung liefert das optimale C : $C = 7{,}4596$, d.h. $\gamma = 0.468$ und $\beta = 0.66$. Wir bemerken, daß hierbei für ε gilt:

$$\varepsilon \leq (2 \cdot 0{,}66 \cdot 7{,}4596)/(1-\gamma^2) = 0{,}9149 < 1 ,$$

womit die Anwendung von (2.46) gerechtfertigt ist. ■

Mit einer ähnlichen, jedoch nicht ganz so ausgefeilten Beweistechnik zeigten BARBOUR|HALL(1984), daß (0.3) mit C=22 gilt.

Abschließend sei bemerkt, daß es weitere Beweistechniken für den zentralen Grenzwertsatz gibt, z.B. die Operatorenmethode, vgl. z.B. BUTZER|HAHN(1975) oder BISCHOFF|VOIGTLÄNDER(1986), die jedoch nicht unmittelbar zu quantitativen Restgliedabschätzungen führen.

3. Restgliedabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz

3.1 Summen unabhängiger Zufallsgrößen

3.1.1 Serienschema - abgeschnittene Momente

Es werden hier die Bezeichnungen aus dem Abschnitt 1.2.1 weiterbenutzt und zwei Fälle unterschieden: (i) unendliche Streuungen und (ii) endliche Streuungen. Die hier formulierten Resultate stellen bereits eine Präzisierung der Ergebnisse in |97| dar.

(i) unendliche Streuungen:

Satz 3.1. Es sei (X_{nk}) das in Abschnitt 1.2.1 eingeführte Serienschema mit $EX_{nk}=0$ für alle $k=1,2,\ldots,k_n$ und $n=1,2,\ldots$. Dann gilt

$$\sup_x \left|P\left(\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq L_1 \inf_{(A_{nk})} (a_n+|1-b_n^2|+c_n) \tag{3.1}$$

mit $L_1 < 13{,}7$.

In |97| findet man dieses Ergebnis mit $L_1 < 18{,}56$.
Der Beweis wird mittels der Glättungsungleichung (0.18) geführt unter Ausnutzung der oben formulierten Sätze 1.4 und 1.5. Dabei wird das Integrationsgebiet $(-T,T)$ zerlegt in $(-T_n',T_{n}')$ und $(-T_n,-T_n')\cup(T_n',T_n)$.
Die Parameter a, b und d werden nun wie folgt gewählt (vgl. Definition von T_n' und T_n in den Sätzen 1.4 und 1.5): $a= 0{,}7705$, $b= 0{,}2035$ und $d= 0{,}348$. Die weiteren Werte lauten $l= L_1^{-1/3} = 13{,}7^{-1/3}$, da andernfalls bei noch größerer Wahl von l die rechte Seite in (3.1) trivial wird, $c= 0{,}7038\ldots$ und $m= 0{,}5637\ldots$. ■

Satz 3.2. Wir betrachten in Satz 3.1 ein System (A_{nk}), welches $b_n^2=1$ liefert (bei einem fest vorgegebenen Serienschema (X_{nk}) mit $EX_{nk}=0$). Für ein solches System kann L_1 etwas präziser abgeschätzt werden:

$$\sup_x \left|P\left(\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq L_2 (a_n+c_n) \tag{3.2}$$

mit $L_2 < 13{,}09$.

In |97| wurde dieses Ergebnis mit $L_2 < 17{,}96$ hergeleitet.
Im Beweis, der analog zu Satz 3.1 geführt wird, wählt man hier $a= 0{,}7482$, $b= 0{,}207$ und $d= 0{,}365$, sowie $l= 0{,}4243$, $c= 0{,}6939$ und $m= 0{,}63805$. ■
Im Fall $A_{nk} = [-\varepsilon,\varepsilon]$ für $k=1,2,\ldots,k_n$ und $n\in N$ (wobei $\varepsilon>0$ ist) wurde die Abschätzung von IGNAT(1981) bewiesen, jedoch ohne Konstantenab-

schätzung. Auf Grund der Ungleichungskette (für $s=1, 2$) :

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|u|>1}|u|^s dF_{nk}(u)+\int_{|u|\leq 1}|u|^3 dF_{nk}(u)+\Big|1-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|u|\leq 1}u^2 dF_{nk}(u)\Big|\Big) \leq$$

$$\inf_{(A_{nk})}\Big(\sum_{k=1}^{k_n}\int_{R^1\setminus A_{nk}}|u|^s dF_{nk}(u)+c_n+|1-b_n^2|\Big) \leq \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|u|>1}|u|^s dF_{nk}(u)+\int_{|u|\leq 1}|u|^3 dF_{nk}(u)+\Big|1-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|u|\leq 1}u^2 dF_{nk}(u)$$

erscheint es uneffektiv, andere Mengen A_{nk} als $A_{nk}=[-1, 1]$ für alle k und n zu betrachten, wenn keine Konstantenabschätzung vorgenommen wird. Eine Bemerkung zur Optimalität der in (3.3) untersuchten Momentencharakteristik ist sinngemäß bereits in |179| zu finden, vgl. dort (7). Aus Satz 3.2 ergibt sich eine interessante Folgerung:

Folgerung 3.3. Es sei (X_k), $k=1,2,\ldots,n$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ für alle k. Sei $b>0$ eine beliebige reelle Zahl mit $b_n^2 := \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 \mathbb{1}\{|X_k| \leq b\} > 0$. Dann gilt die Ungleichung

$$\sup_x |F_n(xb_n)-\Phi(x)| \leq L_3 \max\Big(\frac{b^2}{b_n^2},\frac{b_n^2}{b^2}\Big)\, b_n^{-1}\int_0^{b_n}\chi_n(u)du \tag{3.4}$$

mit $\chi_n(u) = ub_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|v|>u}|v|dP(X_k<v)$ und $L_3 < 26{,}18$.

Zum Beweis ist zunächst zu bemerken, daß $b_n^2 = b_n^2(b)$ gilt. Nun setzen wir in (3.2) $X_{nk} = X_k/b_n(b)$ und $k_n=n$ sowie $A_{nk} = [-\frac{b}{b_n(b)}, \frac{b}{b_n(b)}]$. Damit ist die Voraussetzung $\sum_{k=1}^{n} EX_{nk}^2 \mathbb{1}\{X_{nk}\in A_{nk}\} = 1$ erfüllt, vgl. Satz 3.2. Nun gilt für die Momentencharakteristik a_n+c_n in (3.2):

$$a_n+c_n = b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|\mathbb{1}\{|X_k|>b\}+b_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^3\mathbb{1}\{|X_k|\leq b\} \leq$$

$$\max\Big(\frac{b^2}{b_n^2},\frac{b_n^2}{b^2}\Big)\, b_n^{-3}\Big(b_n^2\sum_{k=1}^{n}E|X_k|\mathbb{1}\{|X_k|>b_n\}+\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^3\mathbb{1}\{|X_k|\leq b_n\}\Big) =$$

$$\max\Big(\frac{b^2}{b_n^2},\frac{b_n^2}{b^2}\Big)\, 2b_n^{-3}\int_0^{b_n}u\int_{|v|>u}|v|dP(X_k<v)\,du .$$

Hieraus folgt (3.4), wobei die letzte Identität durch partielle Integration nachgewiesen wird. ∎

Zur Illustration von (3.4) wird ein Anwendungsbeispiel untersucht:

Die Zufallsgrößen (X_k), $k=1,2,\ldots,n$, mögen folgende Dichtefunktion besitzen: $\frac{d}{du}P(X_k<u) = 2|u|^{-3}\ln|u|\,\mathbb{1}\{|u|\geq 1\}$. Zur Vereinfachung weiterer Überlegungen wird n über eine reelle Zahl m>1 dargestellt:

$n = 0.5\,m^{-2}e^{2m}$. Die Streuung der betrachteten Zufallsgrößen ist unendlich, jedoch existieren die abgeschnittenen Momente (b>1):

$E|X_k|^3\mathbb{1}\{|X_k|\leq b\} = 4(b(\ln b - 1)+1)$, $E|X_k|^2\mathbb{1}\{|X_k|\leq b\} = 2(\ln b)^2$ und

$E|X_k|\mathbb{1}\{|X_k|>b\} = \frac{4}{b}(\ln b + 1)$. Mit der Festlegung $b = e^m$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2\mathbb{1}\{|X_k|\leq b\} = 2n(\ln b)^2 = b^2,\ \text{d.h. } b_n^2 = b_n^2(b) = b^2 .$$

Weiterhin ist $b = \sqrt{2n}\,\ln b = \sqrt{2n}\,(\ln\sqrt{2n} + \ln\ln b)$ und folglich hat die normierende Konstante b_n in $F_n(xb_n)$ in (3.4) die Gestalt (für $n \to \infty$):

$b_n = b = \sqrt{2n}\,\ln\sqrt{2n}\,(1+o(1))$. Wir erhalten für den Fehler $R_n :=$ $\sup_x|F_n(x\sqrt{2n}\,\ln\sqrt{2n}) - \Phi(x)|$ mittels (3.4) die Abschätzung

$$R_n \leq \sup_x|F_n(xb)-\Phi(x)| + \sup_x|\Phi(\tfrac{x}{b}\sqrt{2n}\,\ln\sqrt{2n})-\Phi(x)| \leq L_2(1+\frac{e^{-m}}{2m})\frac{4}{m} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\,\frac{\ln m}{m-\ln m}.$$

Wegen $m = \ln b > \ln\sqrt{2n}$ folgt hieraus (für $n \geq 115$)

$$\sup_x|F_n(x\sqrt{2n}\,\ln\sqrt{2n}) - \Phi(x)| \leq 78\,\frac{\ln\ln\sqrt{2n}}{\ln\sqrt{2n}}$$

Dieses Beispiel wurde bereits in KOROLJUK(1978) untersucht. Anstatt der normierenden Konstanten $\sqrt{2n}\,\ln\sqrt{2n}$ findet man auf S.68 in |111| die Größe $\sqrt{2\pi}\,\ln n$ und in der zweiten Auflage von |111|, erschienen 1985, auf S.75 die Größe $\sqrt{2\pi\,\ln n}$. Offenbar wird bei diesen Normierungen nicht die behauptete schwache Konvergenz (s. |111|) zur N(0,1)-Verteilung erreicht.

Abschließend sei bemerkt, daß (3.4) die Ungleichung von STUDNEV(1963) verallgemeinert, die dort für identisch verteilte Zufallsgrößen und unter der Bedingung $b_n(b) = b$ abgeleitet wurde.

Aus Satz 3.2 ergibt sich weiterhin die

Folgerung 3.4. Es sei (X_k), $k=1,2,\ldots,n$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ für alle k. Sei (A_k), $k=1,2,\ldots,n$, eine Folge von BOREL-Mengen des R^1 derart, daß $0<b_n^2=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}u^2dP(X_k<u)<\infty$ ist. Dann gilt die Ungleichung

$$\sup_x|F_n(xb_n)-\Phi(x)| \leq L_2\Big(\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{R^1\setminus A_k}|u|\,dP(X_k<u) + \frac{1}{b_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}|u|^3dP(X_k<u)\Big). \tag{3.5}$$

Zum Beweis setzen wir $\mathfrak{A}=(A_k)$ und schreiben $b_n=b_n(\mathfrak{A})$. Nun setzen wir in

(3.2) $X_{nk} = X_k/b_n(\mathfrak{A})$, $k_n=n$ und $A_{nk}=\{u|\ ub_n(\mathfrak{A})\in A_k\}$ und erhalten damit sofort (3.5). ■

Mit $A_k = [-b, b]$ ergibt sich (3.4) auch aus (3.5).

Folgerung 3.4 ist ein Analogon zu dem Resultat in |173|:

Für (X_k), $k=1,2,\dots,n$, sei $EX_k=0$ und $0<B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 <\infty$. Dann gilt mit jeder Folge (A_k), $k=1,2,\dots,n$, die Ungleichung (mit $L < 4{,}769$)

$$\sup_x |F_n(xB_n)-\Phi(x)| \le L\Big(\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{R^1\setminus A_k} u^2 dP(X_k<u) + \frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}|u|^3 dP(X_k<u)\Big). \tag{3.6}$$

<u>(ii) endliche Streuungen:</u>

<u>Satz 3.5.</u> Es sei (X_{nk}) das in Abschnitt 1.2.1 eingeführte Serienschema mit $EX_{nk}=0$ und $EX_{nk}^2 < \infty$ für alle $k=1,2,\dots,k_n$ und $n=1,2,\dots$. Dann gilt

$$\sup_x |P(\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}<x)-\Phi(x)| \le L_4 \inf_{(A_{nk})} (b_n^{*} + |1-b_n^2| + c_n) \tag{3.7}$$

mit $L_4 < 7{,}67$. Dabei sind die auf der rechten Seite von (3.7) auftretenden Momentcharakteristika wieder die in Abschnitt 1.2.1 eingeführten Größen.

In |97| findet man dieses Ergebnis mit $L_4 < 10{,}9$. IGNAT(1981) bewies (3.7) für den Fall $A_{nk} = [-\varepsilon, \varepsilon]$, ohne Konstantenabschätzung, vgl. Bemerkung im Zusammenhang mit Ungleichung (3.3).

Der Beweis wird mittels der Glättungsungleichung (0.18) geführt unter Ausnutzung der oben formulierten Sätze 1.6 und 1.7 (analoges Vorgehen wie im Beweis zu Satz 3.1). Die Parameter a, b und d wurden wie folgt gewählt: $a= 1{,}071$, $b= 0{,}5475$ und $d= 0{,}454$. Weiterhin ist $l_c = (C_0/L_4)^{1/3}$, wobei C_0 die Konstante in (0.4) ist, da andernfalls bei noch größerer Wahl von l_c die Behauptung (3.7) trivial wird. Der Zahlenwert von l_c lautet 0,41316. Weiterhin ist $l_b=(C_0/(L_4-0{,}5726))^{1/2} = 0{,}2761$, wobei die zusätzliche Konstante 0,5726 aus der Anwendung der Ungleichung $|\Phi(px)-\Phi(x)| \le 0{,}5726|p-1|$, $p\ge 0$, herrührt, vgl. |167,170|. Bei noch größerer Wahl von l_b wäre (3.7) ebenfalls trivial. Damit sind l_b und l_c für die Anwendung der Sätze 1.6 und 1.7 optimal gewählt und insbesondere ergibt sich $m= 0{,}57273$ und $c= 0{,}7234$. ■

<u>Satz 3.6.</u> Für das in Satz 3.5 betrachtete Serienschema (X_{nk}) gelte zusätzlich $EX_{n1}^2+EX_{n2}^2+\dots+EX_{nk_n}^2=1$ für alle $n\in N$. Dann ist

$$\sup_x \left| P\left(\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq L_5 \sum_{k=1}^{k_n} E \min(X_{nk}^2, |X_{nk}|^3) \tag{3.8}$$

mit $L_5 < 3{,}51$.

Dieser Satz stellt eine Präzisierung des Ergebnisses in |173| dar, vgl. (3.6). Über die Optimalität der Momentencharakteristik in (3.8), $E \min(X_{nk}^2, |X_{nk}|^3)$, wurde in |179| diskutiert. Dort findet man ebenfalls bereits den Hinweis auf die hier angegebene genauere Konstantenabschätzung mit 3,51 .

Ber Beweis von (3.8) wird wieder mit (0.18) und mit Satz 1.8 geführt, wobei jetzt in (0.18) sofort $T = T_n$ gesetzt wird. Wir wählen $l = (C_0/L_5)^{1/3}$ und integrieren in (0.18) mit Hilfe von (2.41). Man erhält mit den in (0.18) angegebenen Werten für b und u und mit $M = \frac{2}{m}$ die Abschätzung $\sup_x |P(X_{n1}+X_{n2}+ \ldots +X_{nk_n} < x) - \Phi(x)| \leq$

$$(b_n^* + c_n) \max\left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \frac{M^{1.5}}{24} + \frac{b}{\pi} \frac{lM^2}{16} + a_1 \frac{3.25ub}{\sqrt{2\pi}}, \frac{bM}{2\pi} + \frac{bl^2M^2}{8\pi} + a_2 \frac{3.25ub}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

An dieser Stelle soll noch einmal die optimale Wahl der freien Parameter a_1 und a_2 demonstriert werden, vgl. auch (2.18). Jede der zwei an der max-Bildung beteiligten Größen wird gleich L gesetzt und durch Auflösung beider Gleichungen nach a_1 bzw. a_2 erhält man die Darstellung

$$a_1 = a_1(M,L) \quad \text{und} \quad a_2 = a_2(M,L) .$$

Die Gleichungen für l^3 und m in Satz 1.8 werden nun umgeschrieben in folgende Fixpunktgleichungen:

$$M = f_1(M,L) := 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}\, a_1(M,L)} + \frac{1}{4} a_2^2(M,L)\, a_1^{-2}(M,L)\right)^{-1}$$

und

$$L = f_2(M,L) := \sqrt{8}\, C_0\, a_1^2(M,L)\, a_2^{-1}(M,L) ,$$

wobei L_5 vorerst ohne Index geschrieben wurde. Nun wird die allgemeine Fixpunktgleichung (zweidimensional) $(M,L) = (f_1(M,L), f_2(M,L))$ durch das Iterationsverfahren

$$(M^{(m+1)}, L^{(m+1)}) = (f_1(M^{(m)}, L^{(m)}), f_2(M^{(m)}, L^{(m)})),\ m=0,1,\ldots ,$$

mit den Startwerten $L^{(0)} = 3{,}5$ und $M^{(0)} = 4{,}7$ gelöst. Man erhält $L = 3{,}50965\ldots$ und $M = 4{,}73647\ldots$. Somit hat man $m = 0{,}4222\ldots$, $a_1 = 1{,}50328\ldots$ und $a_2 = 0{,}98516\ldots$, d.h. die im Satz 1.8 geforderte Bedingung $a_1 > a_2 > 1/\sqrt{2}$ ist erfüllt. ∎

<u>Folgerung 3.7.</u> Es sei (X_k), $k=1,2,\ldots,n$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ für alle k und $0<B_n^2=EX_1^2+EX_2^2+\ldots+EX_n^2< \infty$.

Dann gilt

$$\sup_x |D_n(x)| \leq L_5 \inf_{(A_k)} \left(\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{R^1 \setminus A_k} u^2 dP(X_k<u) + \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |u|^3 dP(X_k<u) \right)$$

$$= L_5 \sum_{k=1}^{n} E \min(B_n^{-2} X_k^2,\ B_n^{-3} |X_k|^3)$$

$$= L_5 B_n^{-1} \int_0^{B_n} L_n(u) du \qquad (3.9)$$

mit $L_n(u) = B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|v|>u} v^2 dP(X_k<v)$.

(3.9) ist das Analogon zu (3.4) im Fall endlicher Streuungen.
Aus (3.9) folgen die Ungleichungen (3.6) sowie die Ergebnisse von OSIPOV(1966), wenn man $A_k=[-\varepsilon B_n, \varepsilon B_n]$, $\varepsilon>0$, setzt, und FELLER(1968), wenn man $A_k=[-\tau_k, \tau_k']$, $-\infty \leq -\tau_k < 0 < \tau_k' \leq \infty$, setzt, und STUDNEV(1965) für $A_k=[-B_n, B_n]$, wobei STUDNEV's Resultat wegen eines fehlerhaften Beweises damals nur hypothetischen Charakter trug, vgl. PETROV(1966).
(3.9) entspricht außerdem dem in der Einleitung angegebenen Ergebnis (0.3).
An dieser Stelle wird bereits auf Abschnitt 3.1.4 verwiesen, wo die LINDEBERG'sche Funktion $L_n(u)$ aus (3.9) etwas allgemeiner definiert wird und das Argument x einbezogen ist, vgl. auch |170|.

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |191| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Math. Nachr. 136 (1988) 59–68

A Non-Classical Error-Estimate in the Central Limit Theorem

By Ludwig Paditz of Dresden

(Received January 21, 1986)

The paper is concerned with non-classical bounds on the uniform metric δ_n for the distance between distribution functions in the central limit theorem for sums of independent and identically distributed random variables. Various non-classical error-bounds previously given are improved by the help of the characteristics ϑ and γ, see (5) and (15), combined with an explicit estimate of the constant.

1. Introduction

Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with mean 0 and variance 1. Denote $F_n(x) = P\left(X_1 + X_2 + \dots + X_n < x\sqrt{n}\right)$ and let Φ be the standard normal distribution function on R^1.

This paper is devoted to the problem of estimation of the speed of convergence in the central limit theorem, i.e. we want to estimate the difference

$$\delta_n = \sup_{x \in R^1} |F_n(x) - \Phi(x)| .$$

Our estimates are expressed not in terms of absolute moments but in terms of pseudo-moments or difference-moments, i.e. we consider the problem of the non-classical error-estimation. If the distance from the distribution $F(x)$ of the summands to the corresponding normal measure $\Phi(x)$ is small enough, this makes the estimations sharper. The estimates will have the usual order $n^{-1/2}$. In the proof we use the method of characteristic functions.

Let $f(t)$ and $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ be the characteristic functions of F and Φ, respectively. We write $H(x) = F(x) - \Phi(x)$, $w(t) = f(t) - \varphi(t)$. It is well known that for the difference-moment

$$(1) \qquad \varkappa_3 = 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |H(x)| \, dx$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in [19] publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

and the characteristic

$$\vartheta_3 = \sup_{t>0} |t|^{-3}\,|w(t)| = \sup_{t>0} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx - (itx)^2/2}{t^3}\, dH(x) \right| \tag{2}$$

the following upper estimates of the distance δ_n are true

$$\delta_n \leq \frac{C}{n^{1/2}} \max\left\{\varkappa_3, \varkappa_3^{\frac{1}{3+1/n}}\right\} \tag{3}$$

see [20], [21], and

$$\delta_n \leq \frac{C}{n^{1/2}} \max\left\{\vartheta_3, \vartheta_3^{\frac{1}{3+1/n}}\right\} \tag{4}$$

see [22]. A characteristic of the general kind (2) is also used in [14]. Furthermore we have in [21] the following proposition:

Let, for all real t and for any characteristic ϑ

$$|w(t)| \leq \vartheta\, |t|^3, \tag{5}$$

then for all n

$$\delta_n \leq \frac{C}{n^{1/2}} \max\left\{\vartheta, \vartheta^{\frac{1}{3+1/n}}\right\}. \tag{6}$$

Obviously (3) and (4) follow from (6). A condition of the type (5) can already be found in [13, proposition 1, p. 169] or in [8], [10], [11].

On the other hand for several truncated pseudo- or difference-moments, e.g.

$$\gamma_3 = \sup_{z>0} \left\{3 \int\limits_{|x|\leq z} x^2\, |H(x)|\, dx + 2z \int\limits_{|x|>z} |x|\, |H(x)|\, dx\right\}, \quad [1], \tag{7}$$

$$\gamma_{3,n} = \sup_{0<z\leq\sqrt{n}} \left\{\left|\int\limits_{|x|\leq z} x^2 H(x)\, dx\right| + z \int\limits_{|x|>z} |x|\, |H(x)|\, dx\right\}, \quad [16], [18], \tag{8}$$

$$\nu_3 = \sup_{z>0} \left\{\left|\int\limits_{|x|\leq z} x^3\, dH(x)\right| + z \int\limits_{|x|>z} x^2\, |dH(x)|\right\}, \quad [7], [9], \tag{9}$$

$$\nu_{3,n} = \sup_{0<z\leq\sqrt{n}} \left\{\left|\int\limits_{|x|\leq z} x^3\, dH(x)\right| + z \int\limits_{|x|>z} x^2\, |dH(x)|\right\}, \quad [16], \tag{10}$$

$$\tau_3 = 6 \left\{\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty H(z)\, dz\, dy\right| dx + \int\limits_{-\infty}^0 \left|\int\limits_{-\infty}^x \int\limits_{-\infty}^y H(z)\, dz\, dy\right| dx\right\}, \quad [3], \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \sup_{z>0} \Bigg\{&\left|\int\limits_0^z \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty H(w)\, dw\, dy\, dx + \int\limits_{-z}^0 \int\limits_{-\infty}^x \int\limits_{-\infty}^y H(w)\, dw\, dy\, dx\right| \\ &+ z \int\limits_z^\infty \left|\int\limits_x^\infty H(y)\, dy\right| dx + z \int\limits_{-\infty}^{-z} \left|\int\limits_{-\infty}^x H(y)\, dy\right| dx\Bigg\}, \quad [4], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\lambda_{3,1} = \sup_{|t|\leq 1} \left|\int\limits_0^\infty e^{itx} \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty H(w)\, dw\, dy\, dx + \int\limits_{-\infty}^0 e^{itx} \int\limits_{-\infty}^x \int\limits_{-\infty}^y H(w)\, dw\, dy\, dx\right| \quad [5], \tag{13}$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |191| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

we have the following inequality

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \min\left\{\max\{\gamma_3, \gamma_3^{1/4}\}, \max\{\nu_3, \nu_3^{1/4}\}, \max\{\tau_3, \tau_3^{1/4}\}\right\}, \tag{14}$$

see [1], [3], [4], [7], [9].

In the present paper we will show that the exponents $\frac{1}{3+1/n}$ and 1/4 in the inequalities (3), (4), (6) and (14), respectively, can be replaced by the exponent 1/3, if n is large enough. In addition we will estimate the constant C in each case.

In this area the paper [16] already makes considerable progress. E.g., for the characteristic (10) you can find in [16] the following upper bound

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \nu_{3,n} \quad \text{if } n \geqq 9, \text{ without computation of } C.$$

It is well known, if we use a bigger characteristic, say e.g.

$$\bar{\nu}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 \, |dH(x)|, \qquad \bar{\bar{\nu}}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \max\{1, |x|^3\} \, |dH(x)|,$$

$$\bar{\varkappa}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \max\{1, 3x^2\} \, |H(x)| \, dx,$$

then the appearence of a better exponent is provable

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \min\left\{\bar{\nu}_3, \max\{\bar{\bar{\nu}}_3, \bar{\bar{\nu}}_3^{\min(1, n/4)}\}, \max\left\{\bar{\varkappa}_3, \bar{\varkappa}_3^{\frac{1}{1+1/n}}\right\}\right\},$$

see [17], [19], [21]. But in some cases it is possible, that such a bigger characteristic will be infinite, but a smaller characteristic, see e.g. (14) or (6), may have a better behaviour and may be finite. The use of a bigger characteristic means a loss of information about the closeness of F to Φ. For further discussion about replacing one characteristic by another see [21].

A further discussion on other new introduded characteristics can be found in the paper [16].

Other interesting characteristics are:

$$\varrho_3 = \sup_{z>0} \left\{ \left| \int_{|x|\leqq z} x^3 \, dF(x) \right| + z \int_{|x|>z} x^2 \, dF(x) \right\}, \quad [6],$$

and

$$\lambda_{2,1} = \sup_{z>0} \left\{ \frac{1}{2} z \int_{|x|>z} x^2 \, dF(x) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix/z} \int_{|x|}^{\infty} (1 - \Phi(y)) \, dy \, dx \right| \right.$$
$$\left. + \left| \int_0^z x \int_x^{\infty} (F(y) - 1) \, dy \, dx + \int_{-z}^0 x \int_{-\infty}^x F(y) \, dy \, dx \right| \right\}, \quad [5].$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |191| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

75.

However, in this case we have

$$\sup_{z>0} z \int\limits_{|x|>z} x^2\, dF(x) \geqq \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0.3849, \text{ see [6], lemma 2,}$$

i.e. the existence of such big characteristics immediately gives us the rate of convergence $n^{-1/2}$ and the estimate

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \min\{\varrho_3, \lambda_{3,1}\}.$$

Several results and characteristics, cited above, are already given for the general case of a stable limit law, i.e. those results we only improve in the case of the normal limit law Φ.

2. Results

In addition to (5) we consider the following condition:

Let, for all real t and for any characteristic γ

(15) $$|\mathrm{Re}\, w(t)| \leqq \gamma\, |t|^3.$$

ϑ in (5) is a characteristic for the general closeness of $f(t)$ and $\varphi(t)$, however γ is a characteristic for describing the behaviour of $\mathrm{Re}\, f(t)$ to the real characteristic function $\varphi(t)$. We will suppose that the characteristic ϑ is not essentially bigger then γ and fulfils the following condition

(16) $$\varepsilon\vartheta = \gamma \text{ for some } \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqq 1.$$

In the case of symmetric random variables (5) and (15) are equivalent, i.e. $\varepsilon = 1$.

In the case $\varepsilon = \gamma/\vartheta < 1$ the consideration of two conditions (5) and (15) makes sense. Thus we get in the case of non-symmetric random variables by (16), i.e. by ε, more information for the calculation of the constant $C = C_\varepsilon$.

In all considerations we suppose that n is large enough in the following sense:

(17) $$n \geqq (8\gamma)^{-1/3}, \quad \text{i.e. } \frac{1}{(2n)^3} \leqq \gamma.$$

Now we will formulate the main result in the terminology of the general characteristic γ.

Theorem 1. *For all n with the property* (17) *we have the following upper estimate of the distance δ_n*

(18) $$\delta_n \leqq C_\varepsilon \max\{\gamma, \gamma^{1/3}\}\, n^{-1/2},$$

where C_ε is a positive constant, only depending on ε, γ is any characteristic from (15) *and γ/ε is a characteristic in* (5). ($C_\varepsilon < C_1/\varepsilon$ *if* $\varepsilon < 1$.)

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen - Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |19| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

The constant C_ε has the following analytic structure:

$$C_\varepsilon = \inf_{\substack{n_0>1\\ a,c>0}} \max \left\{A_1(n_0), \frac{1}{\varepsilon} A_2(n_0, a, c), \varepsilon^2 A_3(\varepsilon, n_0, a, c) + \varepsilon A_4(n_0, a, c) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_5(a, c) + \frac{1}{\varepsilon} A_6(a)\right\},$$

where

$$A_1 = 1.0832(n_0 - 1)^{3/2}, \qquad A_2 = \frac{8c}{a^2} A_4(n_0, a, c) + A_6(a),$$

$$A_3 = \frac{1}{1.1488\sqrt{\pi}} \left(\frac{n_0}{(n_0-1)\, p(\varepsilon, a, c)}\right)^{3/2},$$

$$A_4 = \frac{1}{1.1488\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}\, a^2}{8c} \left(\frac{n_0}{(n_0-1)(1-ae^c)}\right)^{3/2},$$

$$A_5 = \frac{1}{1.1488} \left(\frac{a}{\pi\sqrt{2c}}\right)^{1/2}, \qquad A_6 = \frac{5.11745}{0.5744\sqrt{2\pi}\, a}$$

and

$$p(\varepsilon, a, c) = 2a^{-2}(1 - e^{-2c}) - \frac{a}{2} e^{-c}\varepsilon^3 - \frac{a^4}{16} \varepsilon^4.$$

Corollary 1. (i) *Let ϑ be any characteristic in* (5) *and* (15), *i.e.* $\gamma = \vartheta$ *and* $\varepsilon = 1$. *Then*

$$\delta_n \leqq \frac{10.138}{n^{1/2}} \max(\vartheta, \vartheta^{1/3}) \quad \textit{for all} \quad n \geqq (8\vartheta)^{-1/3}. \tag{19}$$

(ii) *Let* $\varkappa/3!$ *be any characteristic in* (5) *and* (15), *i.e.* $\gamma = \vartheta = \varkappa/3!$ *and* $\varepsilon = 1$. *Then*

$$\delta_n \leqq \frac{5.58}{n^{1/2}} \max(\varkappa/36^{1/3}, \varkappa^{1/3}) \quad \textit{for all} \quad n \geqq \left(\frac{4}{3}\varkappa\right)^{-1/3}. \tag{20}$$

We remark that (19) improves the proposition 1 in [13] p. 169 in the special case considered here, i.e. we get in [13]

$$C(\infty, a_2, 3, 2) = 10.138 \max(a_2, a_2^{1/3}) \quad \text{if} \quad n \geqq 0.5a_2^{-1/3}.$$

In addition we get in (6) and (4) $C = 10.138$ and in the exponent $\dfrac{1}{3 + 1/n}$ we can omit $1/n$, if $n \geqq 0.5\vartheta^{-1/3}$.

Finally we immediately can improve the result in [1] with the truncated pseudo-moment γ_3, see (7),

$$\delta_n \leqq \frac{10.138}{n^{1/2}} \max(\gamma_3, \gamma_3^{1/3}) \quad \text{if} \quad n \geqq 0.5\gamma_3^{-1/3}.$$

The inequality (20) makes the following result in [10] more precise:

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \max\left(\varkappa, \varkappa^{1/4}, \frac{1}{b}\right), \qquad b > 0,$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |19| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

and the following result in [11]:

$$\delta_n \leqq \frac{1}{n^{1/2}} \left\{0.23 \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2} \varkappa + 1.251\lambda(\varkappa)\right\}$$

(17*) for all n with $\big(1.5(n-1)\big)^{-1/2} \leqq \lambda(\varkappa)$,
where $\lambda = \lambda(\varkappa)$ is a solution of the inequality

$$1.7374\varkappa \leqq \lambda \exp\{-\lambda^{-2}\}.$$

I.e. we consider in (17) a condition which is similar to (17*). However in (20) we have an explicit structure of $\lambda(\varkappa)$:

$$\lambda(\varkappa) = \text{const.} \max\{\varkappa, \varkappa^{1/3}\}.$$

Now we immediately can sharpen the result (3), i.e. in (3) we get $C = 5.58$ and in the exponent $\dfrac{1}{3+1/n}$ again we can omit $1/n$ if $n \geqq \left(\dfrac{4}{3}\varkappa_3\right)^{-1\,3}$. With the absolute integral difference-moment τ_3, see (11), we also get

$$\delta_n \leqq \frac{5.58}{n^{1/2}} \max\{\tau_3/36^{1/3}, \tau_3^{1/3}\} \quad \text{if} \quad n \geqq \left(\frac{4}{3}\tau_3\right)^{-1/3},$$

which improves the result in [3].

Now we want to discuss what happens if we omit the conditions (15) and (16) in the "non-symmetric" case $\varepsilon < 1$:
We have (with ϑ in (5) and (15))

$$\delta_n \leqq \frac{C_1}{n^{1/2}} \max(\vartheta, \vartheta^{1/3}) = \frac{C_1}{n^{1/2}} \max\big(\gamma/\varepsilon, (\gamma/\varepsilon)^{1/3}\big)$$

$$= \frac{C_1/\varepsilon}{n^{1/2}} \max\big(\gamma, (\varepsilon^2\gamma)^{1/3}\big).$$

On the other hand if we suppose (5), (15) and (16) the following inequality is valid, see (18),

$$\delta_n \leqq \frac{C_\varepsilon}{n^{1/2}} \max(\gamma, \gamma^{1/3}).$$

Because of $C_\varepsilon < C_1/\varepsilon$ it is possible that the last inequality is in some cases somewhat sharper. We shall illustrate this fact in the following corollary, which also results from (18):

Corollary 2.

(i) *Let* $\gamma = \max\left\{\sup\limits_{t>0} |t|^{-3} |\mathrm{Re}\, w(t)|, \sup\limits_{t>0} |t|^{-3} |\mathrm{Im}\, w(t)|\right\}$ *and* $\vartheta = \sqrt{2}\gamma$ *be, i.e.* $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. *Then from* (18) *we get*

(21) $$\delta_n \leqq \frac{13.729}{n^{1/2}} \max\{\gamma, \gamma^{1/3}\} \quad \textit{for all} \quad n \geqq (8\gamma)^{-1/3}.$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen - Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |19| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

(ii) *Let* $\gamma = \vartheta_3 = \sup_{t>0} |t|^{-3} |w(t)|$ *be (see* [14], [22]), *i.e.* $\varepsilon = 1$, *then*

$$\delta_n \leqq \frac{10.138}{n^{1/2}} \max\{\vartheta_3, \vartheta_3^{1/3}\} \quad \textit{for all} \quad n \geqq (8\vartheta_3)^{-1/3}. \tag{22}$$

It is easy to see that for $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$:

$$C_\varepsilon = 13.729 < C_1/\varepsilon = \sqrt{2} \cdot 10.138 = 14.337.$$

Now let us discuss the other characteristics in (14):

Corollary 3. (i) *For the truncated difference-moment* $\gamma_{3,\infty}$ *in* (8) *it holds that*

$$\delta_n \leqq \frac{21.966}{n^{1/2}} \max\left\{\gamma_{3,\infty}, \left(\frac{6}{13}\right)^{2/3} \gamma_{3,\infty}^{1/3}\right\} \quad \textit{if} \quad n \geqq \left(\frac{52}{3}\gamma_{3,\infty}\right)^{-1/3}. \tag{23}$$

(ii) *For the truncated pseudomoment* (9) *it holds that*

$$\delta_n \leqq \frac{10.561}{n^{1/2}} \max\left\{\nu_3, \left(\frac{24}{25}\right)^{2/3} \nu_3^{1/3}\right\} \quad \textit{if} \quad n \geqq \left(\frac{25}{3}\nu_3\right)^{-1/3}. \tag{24}$$

We remark, that in the above considered special case (24) from [18] we only get:

$$\delta_n \leqq \frac{61.405}{n^{1/2}} \max\{\gamma_{3,n}, \gamma_{3,n}^{1/4}\},$$

but from [16]

$$\delta_n \leqq \frac{C}{n^{1/2}} \max\{\gamma_{3,n}, \gamma_{3,n}^{1-4/n}\} \quad \text{if} \quad n \geqq 6, \text{ without computation of } C.$$

Additionally in [18] (see also [15]) the truncated difference-moment

$$\nu_3 = \nu_{3,n} = \int_{|x|\leq\sqrt{n}} x^2 |H(x)|\, dx + \sqrt{n} \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|\, |H(x)|\, dx$$

with the exponent 1/4 and $\dfrac{1}{3 + 1/n}$, respectively, is considered.

Corollary 4. *For the truncated integral difference-moment* γ_3, *see* (12), *it holds that*

$$\delta_n \leqq \frac{40.552}{n^{1/2}} \max\{\gamma_3, (\gamma_3/16)^{1/3}\} \quad \textit{if} \quad n \geqq (32\gamma_3)^{-1/3}. \tag{25}$$

3. Proof of the Theorem 1

Note that if $1 \leqq n < n_0$, then with (17) and Lemma 12.3 [2] we have:

$$\delta_n \leqq 0.5416 \leqq A_1(n_0)\, n^{-1/2}\gamma^{1/3}. \tag{25}$$

Assuming now that $n \geqq n_0$. Following the well known proposition by C.-G. Esseen in the version of Lemma 12.2 [2] with $0.7872 \leqq \alpha \leqq 0.78720072$ we have

$$\delta_n \leqq \frac{0.5}{(2\alpha - 1)\pi} \int_{-T_n}^{T_n} \frac{|w_n(t)|}{t}\, dt + \frac{3.25\alpha}{(2\alpha - 1)\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T_n}, \tag{27}$$

where $w_n(t) = f^n(t/\sqrt{n}) - \varphi(t)$.

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits im |191| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Write

$$w_n(t) = w(s) \sum_{j=1}^{n} f^{n-j}(s) \exp\left(-\frac{j-1}{2} s^2\right), \tag{28}$$

where $s = t/\sqrt{n}$.

Denote $d = a^2\varepsilon^2/8$, $m = \frac{1}{2}(1 - e^{-2c})\, d^{-2/3} - se^{-c}d^{1/3} - d^{4/3}$, $a > 0$, $c > 0$, and write $T_n = \sqrt{n}\, T$, $T'_n = \sqrt{n}\, T'$, where $T = (d/\vartheta)^{1/3}$, $T' = \min\left\{\frac{a}{2\vartheta}, \sqrt{2c}\right\}$.

Obviously with (5)

$$|f(s)| \leqq \varphi(s)\left(1 + \frac{1}{\varphi(s)}|w(s)|\right) \leqq \exp\{-(1 - ae^c)\, s^2/2\}$$

for all $|s| \leqq T'$, hence immediately by means of (28) and (5)

$$|w_n(t)| \leqq \vartheta n\, |s|^3 \exp\left\{-(1 - ae^c)\frac{n_0 - 1}{2n_0} ns^2\right\}$$

and

$$\frac{1}{(2\alpha - 1)\,\pi}\int_0^{T'_n} |w_n(t)|\frac{dt}{t} \leqq \frac{\vartheta}{n^{1/2}}\frac{1}{1.1488}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{n_0}{(n_0 - 1)(1 - ae^c)}\right\}^{3/2} \tag{29}$$

$$= \frac{\vartheta}{n^{1/2}}\frac{8c}{a^2} A_4(n_0, a, c) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\gamma}{n^{1/2}}\frac{8c}{a^2} A_4(n_0, a, c).$$

In the case $\vartheta > d(2c)^{-3/2}$ we can finish our proof by means of (27) and

$$\frac{3.25\alpha}{(2\alpha - 1)\sqrt{2\pi}}\frac{1}{T'_n} \leqq \frac{1}{2}\frac{5.11745}{0.5744\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}} \max\left\{\frac{2\vartheta}{a}, (\vartheta/d)^{1/3}\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon} A_5(a)\frac{1}{n^{1/2}} \max\{\gamma, \gamma^{1/3}\},$$

i.e. in the case $\vartheta > d(2c)^{-3/2}$, $n \geqq n_0$, we get

$$\delta_n \leqq \frac{1}{\varepsilon} A_3(n_0, a, c)\frac{1}{n^{1/2}} \max\{\gamma, \gamma^{1/3}\}. \tag{30}$$

In the case $\vartheta \leqq d(2c)^{-3/2}$ we get with (5) and (15)

$$|f(s)| \leqq \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\sqrt{2}\, s\right)\right) + \varphi(s)\operatorname{Re} w(s) + \frac{1}{2}|w(s)|^2\right\}$$

$$\leqq \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{1 - \varphi\left(\sqrt{2}\, s\right)}{s^2\vartheta^{2/3}} s^2\vartheta^{2/3}\right\} + \varphi(s)\,\gamma\,|s|^3 + \frac{1}{2}\vartheta^2 s^6\right\}$$

$$\leqq \exp\{-ms^2\vartheta^{2/3}\}, \quad \text{if } T' \leqq s \leqq T.$$

Hence with (28) we have

$$|w_n(t)| \leqq \vartheta\, |s|^3 \sum_{j=1}^{n} \exp\left\{-\frac{j-1}{2} s^2 - (n - j)\, ms^2\vartheta^{2/3}\right\}.$$

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |19| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

Now we consider the decomposition of the sum

$$\sum_{j=1}^{n} = \sum_{j \le [n\gamma^{1/n}+1]} + \sum_{j > [n\gamma^{1/n}+1]}$$

and thus we obtain by (17) and $m\vartheta^{2/3} \le \frac{1}{2}$

$$\sum_{j \le [n\gamma^{1/n}+1]} \exp\left\{-\frac{j-1}{2}s^2 - (n-j)\, ms^2\vartheta^{2/3}\right\} \le 2n\gamma^{1/3} \exp\{-(n-1)\, ms^2\vartheta^{2/3}\}$$

and

$$\sum_{j > [n\gamma^{1/n}+1]} \exp\left\{-\frac{j-1}{2}s^2 - (n-j)\, ms^2\vartheta^{2/3}\right\} \le n \exp\{-n\gamma^{1/3}s^2/2\}.$$

A simple calculation shows that

$$\frac{1}{(2\alpha-1)\pi} \int_{T_n'}^{T_n} |w_n(t)| \frac{dt}{t} \le \frac{\gamma^{1/3}}{1.1488\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \left(\frac{n_0}{(n_0-1)\,m}\right)^{3/2} + \frac{1}{1.1488}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\vartheta}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\le \frac{\gamma^{1/3}}{1.1488\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \left\{\left(\frac{n_0}{(n_0-1)\,m}\right)^{3/2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon}\,(2c)^{1/4}}\right\}$$

$$= \frac{\gamma^{1/3}}{n^{1/3}} \left\{\varepsilon^2 A_3(\varepsilon, n_0, a, c) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_5(a, c)\right\},$$

if we consider that $m = \varepsilon^{-4/3}p$.

Furthermore

$$\frac{3.25\alpha}{(2\alpha-1)\sqrt{2\pi}}\frac{1}{T_n} \le \frac{\vartheta^{1/3}}{n^{1/3}} \frac{3.25}{(2\alpha-1)\sqrt{2\pi}\, d^{1/3}} = \frac{\gamma^{1/3}}{n^{1/3}}\frac{1}{\varepsilon} A_6(a)$$

and with (29)

$$\frac{1}{(2\alpha-1)\pi} \int_0^{T_n'} |w_n(t)| \frac{dt}{t} \le \frac{\gamma^{1/3}}{n^{1/3}} \varepsilon A_4(n_0, a, c).$$

From (27) we get

$$\delta_n \le \frac{\gamma^{1/3}}{n^{1/3}} \left\{\varepsilon^2 A_3 + \varepsilon A_4 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_5 + \frac{1}{\varepsilon} A_6\right\}. \tag{31}$$

Summarizing all estimates (26), (30) and (31) we get the desired result.

The constants in (19) and (22) follow, if we put

$$\varepsilon = 1, \quad a = 0.526, \quad c = 0.071 \quad \text{and} \quad n_0 = 5.$$

The constant in (21) we get by the help of

$$\varepsilon = 1/\sqrt{2}, \quad a = 0.549, \quad c = 0.0368 \quad \text{and} \quad n_0 = 6.$$

Acknowledgement. The author is indebted to Dr. G. Christoph for suggestions which have led to improvements in presentation.

3.1.2 Identisch verteilte Zufallsgrößen – Pseudomomente

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sind bereits in |191| publiziert worden und stellen einen in sich abgeschlossenen Teil der Arbeit dar. Der Inhalt dieses Abschnitts wird als Sonderdruck wiedergegeben.

81

References

[1] Ahmad, I. A., On the remainder term in the central limit theorem. Ark. Mat. **20** (1982) 1, 165–168

[2] Bhattacharya, R. N. and R. R. Rao, Normal Approximation and Asymptotic Expansions. Wiley, New York 1976

[3] Кристоф, Г., О скорости сходимости в центральной предельной теореме в случае устойчивого предельного закона. Литовск. матем. сб. **19** (1979) 1, 129–141

[4] Christoph, G., Über notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenzgeschwindigkeitsaussagen im Falle einer stabilen Grenzverteilung. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **54** (1980) 29–40

[5] Дубинскайте, Й., О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин устойчивым распределением. Литовск. матем. сб. **23** (1983) 1, 74–91

[6] Esseen, C.-G., On the remainder term in the central limit theorem. Ark. Mat. **8** (1969) 1, 7–15

[7] Гафуров, М. У., Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме посредством псевдомоментов. В сб.: Случайные процессы и статистические выводы. вып. 3, ФАН, Ташкент 1973, 39–48

[8] Игнат, Ю. И. и П. В. Слюсарчук, О сходимости к устойчивым законам распределения. Докл. АН Укр. ССР, Сер. А (1977) № 10, 912–913

[9] Каровлис, А., Одна оценка остаточного члена в теореме Ляпунова. Литовск. матем. сб. **14** (1974) 1, 49–54

[10] —, Об аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин. Литовск. матем. сб. **23** (1983) 1, 101–107

[11] Каровлис, А. и К. Падвельскис, Об аппроксимации распределений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин. Литовск. матем. сб. **24** (1984) 1, 83–92

[12] Паулаускас, В. И., Об одном усилении теоремы Ляпунова. Литовск. матем. сб. **9** (1969) 2, 323–328

[13] —, Оценка остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона. Литовск. матем. сб. **14** (1974) 1, 165–187

[14] —, Две неравномерные оценки остаточного члена при сближении распределений двух сумм независимых случайных величин. Литовск. матем. сб. **15** (1975) 2, 77–91

[15] Ротарь, В. И., О неклассических оценках точности аппроксимации в центральной предельной теореме. Матем. заметки **23** (1978) 1, 143–154

[16] Салахутдинов, Р. З., Об уточнении остаточного члена в центральной предельной теореме. Теория вероятн. и ее примен. **23** (1978) 3, 688–692

[17] Sazonov, V. V., Normal Approximation — Some Recent Advances. Lect. Notes in Math., vol. 879, Springer, Berlin 1981

[18] Стейшунас, С. П., Об оценке скорости сходимости в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона. Литовск. матем. сб. **14** (1974) 3, 179–185

[19] Ульянов, В. В., К уточнению оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме. Теория вероятн. и ее примен. **23** (1978) 3, 684–688

[20] Золотарев, В. М., Оценка различения распределений в метрике Леви. Труды Матем. ин-та им. Стеклова **112** (1971), 224–231

[21] Zolotarjev, V. M., Exactness of an Approximation in the Central Limit Theorem. in: Lect. Notes in Math., vol. 330, Springer, Berlin 1973, 531–541

[22] Золотарев, В. М., Оценка близости двух сверток распределений. Internat. Conference on Probab. Theory and Mathem. Statist., Abstracts of Communications, vol. 1, Vilnius 1973, 257–259

Sektion Mathematik, Rechentechnik und Naturwissenschaften
Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List“
PSF 103
DDR-Dresden
8072

82 – 86

3.1.3 Identisch verteilte Zufallsgrößen – zufälliger Index

Mit diesem Abschnitt soll anhand der Gemeinschaftspublikation |180| nur ein Ausblick in die Summationstheorie bei einer zufälligen Anzahl (zufälliger Index) von Summanden gegeben werden ohne breite Vorstellung dieses wichtigen Teilgebiets der Summationstheorie. Es handelt sich hier um qualitative Resultate (O-Symbolik). Erste Ergebnisse mit Konstantenabschätzungen sind z.B. bei ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986) zu finden.

82

BULLETIN OF THE POLISH
ACADEMY OF SCIENCES
MATHEMATICS
Vol. 34, No. 11-12, 1986

PROBABILITY THEORY

A Note on the Katz Type Theorem for Random Sums

by

Ludwig PADITZ and Zdzisław RYCHLIK

Presented by K. URBANIK on April 16, 1986

Summary. In this note the Katz theorem is generalized to random sums. The theorem presented extends results of Callaert and Janssen [2].

1. Introduction. Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with mean 0 and variance 1. Let $\{N_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive integer-valued random variables such that

$$(1) \qquad N_n/n \xrightarrow{P} \tau \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

where τ is a positive random variable.

It is well known [1] that if (1) holds, then

$$(2) \qquad \sup_x |P(S_{N_n} < x(n\tau)^{1/2}) - \Phi(x)| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

and

$$(3) \qquad \sup_x |P(S_{N_n} < xN_n^{1/2}) - \Phi(x)| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

where $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, and Φ is the standard normal distribution function.

The aim of this note is to give the rate of convergence in (2) and (3) in the case where no assumption on the independence between $\{N_n, n \geq 1\}$ and $\{X_n, n \geq 1\}$ is made. But we do assume that the random variable τ is independent on the random variables $\{X_n, n \geq 1\}$. The result presented here extends the results obtained by Callaert and Janssen [2] and Landers and Rogge [4] and [5] (the onedimensional case) and Katz [3].

3.1.3 Identisch verteilte Zufallsgrößen - zufälliger Index

Mit diesem Abschnitt soll anhand der Gemeinschaftspublikation |180| nur ein Ausblick in die Summationstheorie bei einer zufälligen Anzahl (zufälliger Index) von Summanden gegeben werden ohne breite Vorstellung dieses wichtigen Teilgebiets der Summationstheorie. Es handelt sich hier um qualitative Resultate (O-Symbolik). Erste Ergebnisse mit Konstantenabschätzungen sind z.B. bei ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986) zu finden.

2. Result. Let G be the set of functions, defined for all x, that satisfy the following conditions:

(4) $g(x)$ is non-negative, even and non-decreasing in the interval $(0, \infty)$ with $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

(5) The function $x/g(x)$ does not decrease on $(0, \infty)$.

In what follows $[x]$ denotes the integer part of x.

THEOREM. *Let $\{X_n, n \geqslant 1\}$ be a sequence of i.i.d. random variables such that $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ and let $g \in G$ be such that $EX_1^2 g(X_1) < \infty$. Let $\{N_n, n \geqslant 1\}$ be a sequence of positive integer-valued random variables. Assume that there exist a sequence $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ with $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ and constants $c_1, c_2 > 0$ such that as $n \to \infty$*

$$P(|N_n/[n\tau]-1| > c_1 \varepsilon_n^*) = 0(\sqrt{\varepsilon_n^*}) \tag{6}$$

and

$$P(n\tau < c_2/\varepsilon_n) = 0(\sqrt{\varepsilon_n^*}), \tag{7}$$

where τ is a positive random variable independent on $\{X_n, n \geqslant 1\}$ and $\varepsilon_n^* = (g(\varepsilon_n^{-1/2}))^{-2}$.

Then as $n \to \infty$

$$\sup_x |P(S_{N_n} < x(n\tau)^{1/2}) - \Phi(x)| = 0(1/g((c^*/\varepsilon_n)^{1/2})) \tag{8}$$

and

$$\sup_x |P(S_{N_n} < xN_n^{1/2}) - \Phi(x)| = 0(1/g((c^*/\varepsilon_n)^{1/2})), \tag{9}$$

where $c^* = \min(c_2/4; 1)$.

We remark that (7) implies the condition $n\varepsilon_n \geqslant$ const. > 0, and therefore we do not assume that "$\varepsilon_n \geqslant 1/n$" or "$\varepsilon_n \geqslant n^{-\delta}$" as it was done in [4, 5] and [2], respectively.

Let us observe that in the case $g(x) = |x|^\delta$, $0 < \delta \leqslant 1$, our theorem gives the results of Callaert and Janssen [2]. It is enough to choose $\varepsilon_n = \xi_n^{1/\delta}$, where $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ is the sequence from our theorem. Then the assumption $n^{-\delta} \leqslant \xi_n$, given by Callaert and Janssen, yields $\varepsilon_n n \geqslant 1$. Thus such a sequence $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ agrees with (7) and the rate of convergence in (8) and (9) is equal to

$$0(1/(c^*/\varepsilon_n)^{\delta/2}) = 0(\xi_n^{1/2}),$$

which was proved in [2]. We would also like to remark that the approximation order given in the theorem cannot, in general, be improved. This fact follows from the remarks of Landers and Rogge [4].

In the case when, for each $n \geqslant 1$, the random variable N_n is independent

3.1.3 Identisch verteilte Zufallsgrößen – zufälliger Index

Mit diesem Abschnitt soll anhand der Gemeinschaftspublikation |180| nur ein Ausblick in die Summationstheorie bei einer zufälligen Anzahl (zufälliger Index) von Summanden gegeben werden ohne breite Vorstellung dieses wichtigen Teilgebiets der Summationstheorie. Es handelt sich hier um qualitative Resultate (O-Symbolik). Erste Ergebnisse mit Konstantenabschätzungen sind z.B. bei ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986) zu finden.

of the sequence $\{X_k, k \geq 1\}$ and $\tau > 0$ is a random variable then the assertion of our theorem can be improved in the sense that a somewhat weaker condition than (6), namely the two-sided condition

$$(6.1) \qquad P(|N_n/[n\tau]-1| > \alpha) = 0\left(\sqrt{\varepsilon_n^*}\right)$$

for some $0 < \alpha < 1$ is sufficient to get (8), and the one-sided condition

$$(6.2) \qquad P(N_n/[n\tau]-1 < -\alpha) = 0\left(\sqrt{\varepsilon_n^*}\right),$$

for some $\alpha \leq \max(1/2; 1-2/c_2) < 1$ to get (9), respectively.

Let us remark that (6.1) is weaker than (+) in [4, p. 276] and (i) in [2, p. 150], indeed (+) and (i) may be replaced by (6.1).

3. Proof. In the proof we use the ideas developed by Landers and Rogge [4] and [5] therefore we indicate only the changes that should be made in our case. At first we prove that as $n \to \infty$

$$(10) \qquad \sup_x \left|P\left(\sum_{k=1}^{[n\tau]} X_k < x\,[n\tau]^{1/2}\right) - \Phi(x)\right| = 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right).$$

Using the fact that τ is independent of $\{X_n, n \geq 1\}$ we obtain

$$(11) \qquad \sup_x \left|P\left(\sum_{k=1}^{[n\tau]} X_k < x\,[n\tau]^{1/2}\right) - \Phi(x)\right| \leq$$
$$\leq P\left([n\tau] < c_2/(2\varepsilon_n)\right) + \sup_{l \geq c_2/(2\varepsilon_n)} \sup_x |P(S_l < x l^{1/2}) - \Phi(x)|.$$

On the other hand, from Katz theorem [3], we get

$$(12) \qquad \sup_{l \geq c_2/(2\varepsilon_n)} \sup_x |P(S_l < x l^{1/2}) - \Phi(x)| \leq$$
$$\leq C\, EX_1^2\, g(X_1) \sup_{l \geq c_2/(2\varepsilon_n)} (1/g(l^{1/2})) \leq C\, EX_1^2\, g(X_1)/g\left((c_2/(2\varepsilon_n))^{1/2}\right),$$

so that (10) follows from (11), (12) and (7).

Let $b_n(x) = x\,[n\tau]^{1/2}$, and let

$$I_n = \{i: [n\tau](1-c_1\varepsilon_n^*) \leq i \leq [n\tau](1+c_1\varepsilon_n^*)\},$$
$$A_n(x) = [\max_{i \in I_n} S_i < b_n(x)],$$
$$B_n(x) = [\min_{i \in I_n} S_i < b_n(x)].$$

Now, from (10) and (6), we get

$$(13) \qquad \sup_x |P(S_{N_n} < x\,[n\tau]^{1/2}) - \Phi(x)| \leq \sup_x P(S_{N_n} < x\,[n\tau]^{1/2}) -$$

3.1.3 Identisch verteilte Zufallsgrößen – zufälliger Index

Mit diesem Abschnitt soll anhand der Gemeinschaftspublikation |180| nur ein Ausblick in die Summationstheorie bei einer zufälligen Anzahl (zufälliger Index) von Summanden gegeben werden ohne breite Vorstellung dieses wichtigen Teilgebiets der Summationstheorie. Es handelt sich hier um qualitative Resultate (O-Symbolik). Erste Ergebnisse mit Konstantenabschätzungen sind z.B. bei ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986) zu finden.

$$-P(S_{[n\tau]} < x[n\tau]^{1/2})| + 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup\left(P(B_n(x)) - P(A_n(x))\right) + 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right).$$

Furthermore, by the independence τ of $\{X_k, k \geqslant 1\}$, we have

$$(14) \qquad P(B_n(x)) - P(A_n(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} P([n\tau] = k)\left(P(B_n^k(x)) - P(A_n^k(x))\right),$$

where $A_n^k(x) = [\max_{i \in I_n^k} S_i < xk^{1/2}]$, $B_n^k(x) = [\min_{i \in I_n^k} S_i < xk^{1/2}]$ and $I_n^k = \{i: k(1-c_1\varepsilon_n^*) \leqslant i \leqslant k(1+c_1\varepsilon_n^*)\}$.

Using Lemma 7 [4], we obtain

$$(15) \qquad P(B_n^k(x)) - P(A_n^k(x)) \leqslant C\left(P(S_{p_{kn}} \leqslant xk^{1/2}, S_{q_{kn}} \geqslant xk^{1/2}) + \right.$$
$$\left. + P(S_{p_{kn}} \geqslant xk^{1/2}, S_{q_{kn}} \leqslant xk^{1/2})\right),$$

where $p_{kn} = \min\{i: i \in I_n^k\}$, $q_{kn} = \max\{i: i \in I_n^k\}$ and $C > 0$ is an absolute constant.

Let F be the distribution of X_n. Then, following the proof of Lemma 8 [4] and from Katz theorem [3], we get

$$(16) \qquad P(S_{p_{kn}} \leqslant xk^{1/2}, S_{q_{kn}} \geqslant xk^{1/2}) \leqslant 2\sup_x |P(S_{p_{kn}} \leqslant xp_{kn}^{1/2}) - \Phi(x)| +$$
$$+ ((q_{kn} - p_{kn})/q_{kn})^{1/2} \leqslant 0\left(1/g\,(p_{kn}^{1/2})\right) + (2c_1\varepsilon_n^*)^{1/2} =$$
$$= 0\left(1/g\left((k(1-c_1\varepsilon_n^*))^{1/2}\right)\right) + 0\left(1/g\,(\varepsilon_n^{-1/2})\right).$$

By the same way we get

$$(17) \qquad P(S_{p_{kn}} \geqslant xk^{1/2}, S_{q_{kn}} \leqslant xk^{1/2}) = 0\left(1/g\left((k(1-c_1\varepsilon_n^*))^{1/2}\right)\right) + 0\left(1/g\,(\varepsilon_n^{-1/2})\right).$$

Thus from (14)–(17) and (7) we obtain

$$(18) \qquad P(B_n(x)) - P(A_n(x)) = 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right).$$

Now (13) and (18) yields

$$(19) \qquad \sup_x |P(S_{N_n} < x[n\tau]^{1/2}) - \Phi(x)| = 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right).$$

For (8) it therefore suffices to show, according to Lemma 10 of [4], that

$$P\left(|(n\tau/[n\tau])^{1/2} - 1| > 1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right) = 0\left(1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right).$$

By (4), (5) and (7) we have

$$P\left(|(n\tau/[n\tau])^{1/2} - 1| > 1/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right) \leqslant P(|n\tau/[n\tau] - 1| > \varepsilon_n/c^*) \leqslant$$
$$\leqslant P(1 > 4\varepsilon_n[n\tau]/c_2) = 0\left(1/g\,(\varepsilon_n^{-1/2})\right).$$

Hence we get (8). On the other hand by (4), (5) and (6) we have

3.1.3 Identisch verteilte Zufallsgrößen – zufälliger Index

Mit diesem Abschnitt soll anhand der Gemeinschaftspublikation |180| nur ein Ausblick in die Summationstheorie bei einer zufälligen Anzahl (zufälliger Index) von Summanden gegeben werden ohne breite Vorstellung dieses wichtigen Teilgebiets der Summationstheorie. Es handelt sich hier um qualitative Resultate (O-Symbolik). Erste Ergebnisse mit Konstantenabschätzungen sind z.B. bei ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986) zu finden.

$$P\left(\left|(N_n/[n\tau])^{1/2}-1\right| > c_1^{1/2}/g\left((c^*/\varepsilon_n)^{1/2}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant P\left(|N_n/[n\tau]-1| > c_1\,\varepsilon_n^*\right) = 0\left(1/g\left(\varepsilon_n^{-1/2}\right)\right).$$

So that (9) also follows from (19) and Lemma 10 [4].

HOCHSCHULE FÜR VERKEHRSWESEN "FRIEDRICH LIST", SEKTION MATHEMATIK, RECHENTECHNIK UND NATURWISSENSCHAFTEN DDR – 8072 DRESDEN PSF 103
INSTITUTE OF MATHEMATICS, MARIA CURIE-SKŁODOWSKA UNIVERSITY, NOWOTKI 10 20-031 LUBLIN (INSTYTUT MATEMATYKI, UMCS)

REFERENCES

[1] D. J. Aldous, *Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **83** (1978), 117–126.
[2] H. Callaert, P. Janssen, *A note on the convergence rate of random sums*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **28** (1983), 2, 147–151.
[3] M. L. Katz, *Note on the Berry-Esseen theorem*, Ann. Math. Statist., **34** (1963), 1107–1108.
[4] D. Landers, L. Rogge, *The exact approximation order in the central-limit-theorem for random summation*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, **36** (1976), 269–283.
[5] D. Landers, L. Rogge, *A counterexample in the approximation theory of random summation*, Ann. Prob., **5** (1977), 1018–1023.

Л. Падиц, З. Рыхлик, Заметка о теореме Каца для сумм случайного числа слагаемых

В работе обобщается теорема Каца для сумм случайного числа случайных величин. Полученная теорема обобщает результаты работы [2].

Bemerkung:

Erste Ergebnisse zur hier angesprochenen Problematik im Fall nicht notwendig identisch verteilter Zufallsgrößen wurden kürzlich von KRAJKA|RYCHLIK(1988) publiziert, s. |282| in der Ergänzung zum Literaturverzeichnis (auf S.5 der Thesen).

3.1.4 Über die ungleichmäßigen Fehlerabschätzungen von BIKELIS

Die Ungleichung (0.5) von BIKELIS(1966) wurde bereits im Kapitel 2 hinsichtlich der analytischen Struktur der Konstanten K_δ vollständig diskutiert, vgl. (2.13), (2.17) bis (2.19) und (2.38). Ebenso wurde dort für den Spezialfall $\delta=1$ die Ungleichung (0.6) gezeigt.

In diesem Abschnitt soll eine weitere auf BIKELIS(1966) zurückgehende Ungleichung diskutiert werden, so wie sie bereits in |170| publiziert wurde. Man kann feststellen, daß aus dieser Ungleichung, s. (3.10), auch Ergebnisse folgen, die z.T. erst später als eigenständige Resultate von anderen Autoren publiziert wurden, z.B. von NAKATA(1979) oder IGNAT(1981,1984).

Satz 3.8. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 3.7 gilt

$$|D_n(x)| \leq C\,\frac{1}{y}\int_0^y L_n(u)\,du, \quad n\in N, \quad x\in R^1, \tag{3.10}$$

wobei $C = C(\gamma)$ eine positive Konstante ist, die nur von γ anhängt. Für y gilt dabei die Darstellung $y = \gamma(1+|x|)B_n$ und $L_n(u)$ ist folgende LINDEBERG'sche Funktion:

$$L_n(u) = y^{-2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|v|>u} v^2 dP(X_k<v) .$$

γ ist ein freiwählbarer positiver Parameter. Die analytische Struktur von $C(\gamma)$ ist in |170| zu finden, einschließlich Wertetabelle.

Der universelle Charakter von (3.10) ergibt sich aus der Tatsache, daß die Fehlerschranke bezüglich y monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} y^{-1}\int_0^y L_n(u)du &= y^{-3}\sum_{k=1}^{n}\left(y\, EX_k^2\, \mathbf{1}\{|X_k|>y\} + E|X_k|^3\, \mathbf{1}\{|X_k|\leq y\}\right) \\ &\leq y^{-3}\sum_{k=1}^{n}\left(y\, EX_k^2\, \mathbf{1}\{|X_k|>y\} + y\, EX_k^2\, \mathbf{1}\{y_0<|X_k|\leq y\} + E|X_k|^3\mathbf{1}\{|X_k|\leq y_0\}\right) \\ &\leq y_0^{-1}\int_0^{y_0} L_n(u)du \quad \text{für} \quad 0 < y_0 \leq y . \end{aligned}$$

In den Ungleichungen (3.9) und (3.10) ist die Idee der "Mittelung" der LINDEBERG'schen Funktion realisiert. Im Fall $\gamma=1$ ergibt (3.10) die Ergebnisse von BIKELIS(1966) und HEYDE(1975). Für $y_0=B_n$ erhält man (3.9), jedoch ohne die Konstantenabschätzung für L_5. Für $y_0=\gamma B_n$ ergeben sich das Ergebnis von OSIPOV(1966) und Satz 2 von IGNAT(1981). Mit der zusätzlichen Voraussetzung $E|X_k|^{2+\delta}<\infty$ für ein $\delta\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots,n$, lassen sich Ergebnisse von HEYDE(1975) und NAKATA(1979) sowie die bekannten Ungleichungen (0.1), (0.2) und (0.5) von BERRY, ESSEEN, S.NAGAEV bzw. BIKELIS ableiten, jedoch ohne die bereits bekannten präzisen Konstantenabschätzungen. Aus (3.10) erhält man ebenfalls die bekannten Ungleichungen von KATZ(1963) und PETROV(1965) unter den entsprechenden Zusatzvoraussetzungen.

Satz 3.8 verschärft weiterhin den Satz 2 von STUDNEV|IGNAT(1967) und die ungleichmäßige Fehlerabschätzung von IGNAT(1984), denn ($\gamma=1$)

$$y^{-1}\int_0^y L_n(u)du \leq \frac{1}{(1+|x|)^2 B_n^2}\,\frac{1}{|x|B_n}\int_0^{|x|B_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|v|>u} v^2 dP(X_k<v)\,du\ .$$

Abschließend sei noch darauf verwiesen, daß sich weitere Autoren mit ungleichmäßigen Fehlerabschätzungen beschäftigt haben, aber zu keinen qualitativ und quantitativ besseren Resultaten als hier dargestellt gekommen sind, z.B. GHOSH|DASGUPTA(1978), AHMAD|LIN(1977) oder MAEJIMA (1978 |125|).

3.1.5 Gewichtete Summation

Wir kommen nun zurück zu der bereits in Abschnitt 0.3 eingeführten gewichteten Summation der Folge (X_k), $k\in N_0$, mit den Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))$, $k\in N_0$, $v\in(0,1)$. Die Zufallsgrößen mögen unabhängig sein und es gelte $EX_k=0$ sowie $EX_k^2<\infty$ für alle $k\in N_0$. Die Gewichtsfunktionen seien derart gewählt, daß

$$B_v^2 = \sum_{k\in N_0}\alpha_k^2(v)EX_k^2 \in (0,\infty) \tag{3.11}$$

gilt.

In diesem Abschnitt werden drei Fragestellungen diskutiert: (i) eine Fehlerabschätzung unter Voraussetzung (3.11), (ii) eine asymptotische Entwicklung mit gleichmäßiger Fehlerabschätzung und (iii) eine asymptotische Entwicklung mit ungleichmäßiger Fehlerabschätzung.

(i) Eine Fehlerabschätzung unter Voraussetzung (3.11): Im folgenden Satz wird die Ungleichung (3.9) für den Fall der gewichteten Summation angegeben:

Satz 3.9. Für eine Folge (X_k), $k\in N_0$ unabhängiger und zentrierter Zufallsgrößen und eine Folge $(\alpha_k(v))$, $k\in N_0$, $v\in(0,1)$, von Gewichtsfunktionen derart, daß (3.11) gilt, erhält man für die Fehlergröße $\Delta_{v\infty}$, vgl. (0.8), die Abschätzung

$$\Delta_{v\infty} \leq L_5 \sum_{k\in N_0} E\min\left(\frac{\alpha_k^2(v)X_k^2}{B_v^2}, \frac{|\alpha_k(v)|^3|X_k|^3}{B_v^3}\right), \tag{3.12}$$

wobei L_5 die Konstante in (3.8) ist.

Der Beweis dieses Satzes ist Inhalt der Arbeit |175|. Jedoch ist dort das Ergebnis in der Form (3.6) angegeben, also ohne die Infimum-Bildung über die Mengen (A_k), $k\in N_0$, die sofort auf die Momentcharakteristik auf der rechten Seite von (3.12) führen würde. Ebenfalls ist in |175| noch die ungenauere Konstante L, vgl. (3.6), angegeben.
Um die genauere Konstantenabschätzung $L_5 < 3{,}51$ in (3.12) zu erhalten, wird die Ungleichung (1.36) aus Satz 1.12 in die Glättungsungleichung (0.18) eingesetzt und entsprechend dem Beweis zu Satz 3.6 verfahren.■

In |175| werden zahlreiche Folgerungen abgeleitet, die auf bereits in der Literatur vorhandene Ergebnisse führen bzw. diese verallgemeinern. Die wichtigsten Folgerungen werden an dieser Stelle noch einmal wiedergegeben. In der klassischen Summationstheorie wird stets mit der Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} B_n^2 = \infty$ gearbeitet, so daß hier entsprechend eine Bedingung der Art $\lim\limits_{v\to 1-0} B_v^2 = \infty$ ins Spiel kommt, d.h. o.B.d.A. soll das Anwachsen von B_v^2 über alle Grenzen dann eintreten, wenn der Parameter v gegen die rechte Grenze des Intervalls (0,1) strebt. Diese Betrachtungsweise ist im Spezialfall der ABEL'schen Summation, d.h. $\alpha_k(v)=v^k$ für alle $k\in N_0$ und $v\in(0,1)$, begründet.
Wir betrachten nun einen von v abhängigen Index $n = n(v) = n_v$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{v\to 1-0} n_v = \infty$, z.B. $n_v = \operatorname{entier}\left(\frac{1}{1-v}\right)$, und definieren die Gewichtsfunktionen folgendermaßen:

$$\alpha_k(v) = \begin{cases} 1, & k=1,2,\ldots,n_v \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Mit diesen Gewichtsfunktionen erhält man sofort aus (3.12) den Fall der klassischen Summation (3.9). Mit der Festlegung

$$\alpha_k(v) = \begin{cases} \alpha_{n_v,k}, & k=1,2,\ldots,n_v, \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

ist $(\alpha_k(v))$, $k=1,2,\ldots,n_v$, $v\in(0,1)$, eine Doppelfolge von Gewichtskoeffizienten, wie sie z.B. in |172| betrachtet wurden. Dort werden weitere Autoren genannt, die gewichtete Summen der Form

$$S_n = \alpha_{n1}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \ldots + \alpha_{nk_n}X_{k_n}$$

untersucht haben, z.B. BOOK(1972,1973), SAULIS|STATULEVIČIUS(1976), SAULIS(1979), STEINEBACH(1976) und WOLF(1980).
Für den bereits erwähnten Spezialfall der ABEL'schen Summation ergeben sich aus (3.12) Ergebnisse, wie sie z.B. bei MEREDOV(1976) und WOLF (1982) veröffentlicht wurden. Bei entsprechender Wahl der Gewichtskoeffizienten enthält die hier betrachtete Summation auch den Spezialfall der CESARO-Limitierung, vgl. GAPOŠKIN(1965) oder |175|.
Umfangreiche Untersuchungen zu weiteren Limitierungsverfahren findet

man z.B. bei EMBRECHTS|MAEJIMA(1984), BINGHAM|MAEJIMA(1985) und MAEJIMA(1987).
Der allgemeine Fall der Summation mit Gewichtsfunktionen $(\alpha_k(v))$ trat erstmals in der Literatur bei JÖCKEL|SENDLER(1981) auf (im zentralen Grenzwertsatz mit identisch verteilten Zufallsgrößen) und wurde für verschieden verteilte Zufallsgrößen danach gleichzeitig in |269| und |175| untersucht. Die Ungleichung (3.12) umfaßt die Resultate dieser Arbeiten.
Wir kommen nun zu einigen Folgerungen aus (3.12). Sei G wieder die bereits in Abschnitt 3.1.3 eingeführte Funktionenklasse.

Folgerung 3.10. Neben (3.11) seien für eine Funktion $g \in G$ die Bedingungen $\sup_k EX_k^2 g(X_k) < \infty$ und $\sum_k \left(g\left(\frac{B_v}{\alpha_k(v)}\right)\right)^{-1} \alpha_k^2(v) < \infty$ erfüllt. Dann gilt

$$\Delta_{v\infty} \leq L_5 B_v^{-2} \sum_k \left(g\left(\frac{B_v}{\alpha_k(v)}\right)\right)^{-1} \alpha_k^2(v) EX_k^2 g(X_k) \;. \qquad (3.13)$$

Aus (3.13) folgen die bekannte Ungleichung von KATZ(1963) und PETROV (1965) und deren Verallgemeinerungen von MEREDOV(1976) und WOLF(1982, 1984), wobei jetzt zusätzlich eine genaue Konstantenabschätzung von L_5 berechnet wurde. Aus (3.13) erhält man nun sofort, vgl. Satz 1 in |184|,

Folgerung 3.11. Sei in Folgerung 3.10 $g(x) = |x|^\delta$, $0<\delta\leq 1$, und $\sup_k E|X_k|^{2+\delta} < \infty$ sowie $\sum_k |\alpha_k(v)|^{2+\delta} < \infty$. Mit (3.11) gilt dann

$$\Delta_{v\infty} \leq L_5 B_v^{-(2+\delta)} \sum_k |\alpha_k(v)|^{2+\delta} E|X_k|^{2+\delta} \;. \qquad (3.14)$$

Die folgende Aussage verallgemeinert das Resultat von JÖCKEL|SENDLER (1981):

Folgerung 3.12. Sei $\sigma = \inf_k DX_k > 0$, $\rho_\delta = \sup_k E|X_k|^{2+\delta} < \infty$, $M_\delta(v) = \sup_k |\alpha_k(v)|^\delta < \infty$ für ein $\delta \in (0,1]$ und $d^2(v) = \sum_k \alpha_k^2(v) \in (0,\infty)$ für $v \in (0,1)$. Dann gilt

$$\Delta_{v\infty} \leq L_5 \frac{\rho_\delta}{\sigma^{2+\delta}} \frac{M_\delta(v)}{d^\delta(v)} \;. \qquad (3.15)$$

JÖCKEL|SENDLER(1981) erhielten die Ungleichung (3.15) im Fall $\delta=1$ für identisch verteilte Zufallsgrößen mit einer ungünstigeren Konstantenabschätzung für L_5. Im Fall der ABEL'schen Summation folgt aus (3.15) das Ergebnis von GERBER(1971), jedoch gilt dann (3.15) sogar mit der Konstanten C_1 aus (0.1), wie [redacted] bemerkte, vgl. dazu |268|.
Abschließend wird folgende Version des zentralen Grenzwertsatzes ange-

geben:

Folgerung 3.13. Der zentrale Grenzwertsatz gilt in der Form

$$\lim_{v \to 1-0} \Delta_{v\infty} = 0 ,$$

d.h. die Zufallsgröße $Z_v = B_v^{-1} \sum_k \alpha_k(v) X_k$ ist für $v \to 1-0$ asymptotisch $N(0,1)$-verteilt, falls die Bedingungen

$\sup_k E|X_k/DX_k|^{2+\delta} < \infty$, $\delta \varepsilon (0,1]$, und $\lambda_v = B_v^{-1} \sup_k |\alpha_k(v)| DX_k = o(1)$

für $v \to 1-0$ gelten.

Diese Folgerung läßt sich sofort aus (3.14) ableiten.

(ii) Eine asymptotische Entwicklung - gleichmäßige Fehlerabschätzung:

An dieser Stelle wird ein Ergebnis aus |181| wiedergegeben:

Satz 3.14. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.9 und der Bedingung (1.40) gilt für die Fehlergröße (0.12) die Abschätzung

$$\sup_x |F_v(xB_v) - \Phi(x) - \mathfrak{S}_v(-\Phi)(x)| \le L_6 \, (\rho_v + \mathfrak{r}_v^2 + \tau_v(\gamma)), \qquad (3.16)$$

wobei $L_6 = L_6(\gamma) < \frac{1}{\pi}(2060 + 384(1-\gamma)^{-4})$, $\gamma \varepsilon (0,1)$, ist.

Die in (3.16) auftretenden Momentcharakteristika wurden in Abschnitt 1.2.3 eingeführt, s. S. 23|24.

Im Fall der klassischen Summation kann man dieses Ergebnis bei ROZOVSKIJ(1974), vgl. dort (17), finden - jedoch ohne Konstantenabschätzung. Der Beweis wird mittels der Sätze 1.13 und 1.14 (jeweils für s=0) geführt unter Ausnutzung folgender ESSEEN'scher Ungleichung:

$$\sup_x |F_v(xB_v) - \Phi(x) - \mathfrak{S}_v(-\Phi)(x)| \le \frac{1}{\pi} \Big(\int_{|t| \le (2\mathfrak{r}_v)^{-1/4}} |w_v(t)| \frac{dt}{|t|} +$$

$$\int_{(2\mathfrak{r}_v)^{-1/4} < |t| \le \tau_v^{-1}} (|f_v(t)| + (1 + |\pi_v(t)|) e^{-t^2/2}) \frac{dt}{|t|} + 24 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \tau_v \Big) ,$$

vgl. ROZOVSKIJ(1974). Die Integrale werden wieder mittels (2.41) ausgewertet. ■

Aus Satz 3.14 erhält man

Folgerung 3.15. Die Voraussetzungen von Satz 3.14 seien erfüllt. Wenn zusätzlich die Bedingungen $\lim_{v \to 1-0} \mathfrak{r}_v = 0$ und

$\overline{\lim_{v \to 1-0}} \sum_k EZ_{vk}^2 \, \mathbf{1}\{|Z_{vk}| \ge \sqrt{\rho_v}\} < \gamma < 1$ gelten, dann ist

$$\sup_x |F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| = O(\rho_v^{1/2} + \gamma_v^2) \text{ für } v \to 1-0 \,.$$

Hierbei ist $Z_{vk} = B_v^{-1}\alpha_k(v)X_k$.

Der Beweis dieser Folgerung ergibt sich mit den Ungleichungen $\rho_v \leq 2b_v^{*}(R)+L_v(R)$ sowie $L_v((-\sqrt{\rho_v}\,B_v, \sqrt{\rho_v}\,B_v)) \leq \rho_v$, vgl. |181|. ■

(iii) Eine asymptotische Entwicklung – ungleichmäßige Fehlerabschätzung:

Die Aussagen dieses Abschnittes sind ebenfalls in |181| enthalten.

Satz 3.16. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.14 gilt für die Fehlergröße (0.15) die Abschätzung

$$(1+x^2)|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| \leq L_7\,(\rho_v + \gamma_v^2 + \tau_v(\gamma)), \tag{3.17}$$

wobei $L_7 = L_7(\gamma) < 2\cdot 10^4 + \frac{1}{\pi}2^{10}\,(9(1-\gamma)^{-5}+3(1-\gamma)^{-4}+\frac{1}{8}(1-\gamma)^{-3})$, $\gamma\epsilon(0,1)$, ist.

Der Beweis dieses Satzes wird mit der Glättungsungleichung (0.20) und unter Ausnutzung der Sätze 1.13 und 1.14 geführt, vgl. |181|. ■
Die Ungleichung (0.20) wurde sinngemäß bereits bei ROZOVSKIJ(1976, S. 202) benutzt und ist in PETROV(1975) zu finden.

Folgerung 3.17. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 3.15 gilt

$$(1+x^2)|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| = O(\rho_v^{1/2} + \gamma_v^2),\ v \to 1-0 \,.$$

Diese asymptotische Relation ergibt sich mit ähnlichen Überlegungen wie Folgerung 3.15. ■
Entsprechende ungleichmäßige Abschätzungen für den Spezialfall der ABEL'schen Summation und in der L_p-Metrik kann man bei MEREDOV(1981, 1982,1984) finden.
Andererseits gibt es bereits auch ungleichmäßige Fehlerabschätzungen dieses Typs in der Terminologie der Pseudomomente, vgl. BANIS(1974), PAULAUSKAS(1974,1975).
Als Anwendungsbeispiel wird in |181| zuerst die klassische Summation für identisch verteilte Zufallsgrößen betrachtet: Es gelte

$$(D^2X_1)^{-1}EX_1^2\,\mathbb{1}\{|X_1|>DX_1\} = \gamma_0 < \gamma < 1 \quad \text{und} \quad EX_1^2 g(X_1) < \infty,$$

wobei g einer Funktionenklasse G angehört, die wie in 3.1.3 definiert ist, jedoch unter Ersetzung der Bedingung $x/g(x)$ durch eine entsprechende Bedingung an $\sqrt{x}/g(x)$.
Mit Folgerung 3.17 ergibt sich dann die asymptotische Relation

$$(1+x^2)|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| = O((g(\sqrt{n}))^{-2}),\ n = n_v \to \infty \,.$$

Im Fall der ABEL'schen Summation erhält man mit der zusätzlichen Bedingung

$$(1-v^2) \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} / g((v^{2k}(1+v^2))^{-1/2}) \to 0 \quad \text{für} \quad v \to 1-0$$

die Relation

$$(1+x^2)|F_v(xB_v)-\Phi(x)-\delta_v(-\Phi)(x)| = O((g((1-v)^{-1/2}))^{-2}), \quad v \to 1-0.$$

3.2 Summen abhängiger Zufallsgrößen

3.2.1 Martingaldifferenzen

In diesem Abschnitt wird versucht, die Folgerung 3.11 (für unabhängige Zufallsgrößen) in entsprechender Weise für eine Folge von Martingaldifferenzen zu formulieren.
Ausgangspunkt ist die in Abschnitt 1.3.1 betrachtete Martingaldifferenzfolge mit den Eigenschaften (1.43) bis (1.46), d.h. es wird die in Abschnitt 3.1.5 betrachtete gewichtete Summation beibehalten.
Auf Grund der Beschränktheitsvoraussetzung (1.45) wird das Hauptergebnis nicht in der Terminologie absoluter Momente der Ordnung $2+\delta$ formuliert sondern mittels der in (1.45) auftretenden Schranke M und der in Abschnitt 1.3.1 eingeführten Charakteristik ρ_v.
Das Hauptergebnis dieses Abschnittes einschließlich eine Reihe von Folgerungen wurden in |184| publiziert und sind dem folgenden Sonderdruck zu entnehmen.

statistics 18 (1987) 1, 141–149

On the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem for Discounted Sums of Martingale Differences

LUDWIG PADITZ

Hochschule für Verkehrswesen Dresden

Summary. In this paper the behaviour of the distribution function of $Z_v = B_v^{-1} \sum_{k \in N_0} \alpha_k(v) X_k$ is studied, where $(X_k)_{k \in N_0}$ is a sequence of bounded martingale differences with a.s. constant conditional variances (see (5), (9), (10)) and $(\alpha_k(v))_{k \in N_0}$, $v \in (0, 1)$, is a sequence of discounting factors such that (1) is valid. The main result (11) consists in the sharpening of the error-estimate (8) derived by the author in [17] on the central limit theorem for strongly multiplicative systems to the case of martingale differences. This case here considered steadily has grown in importance (see [9]). The first investigations on such dependent random variables are due to P. LÉVY [13] and J. L. DOOB [4].

AMS 1980 *subject classifications:* Primary 60 F 05; secondary 60 G 42.

Key words: Central limit theorem, generalized linear discounting (A-limitation), discounted sums of martingale differences, error-estimate, estimate of absolute constant.

1. Introduction

Investigations on the central limit theorem for generalized linear discounting have been made to a greater degree during the last years. By generalizing many well-known results on error-estimates in the central limit theorem an estimate for discounted sums of independent random variables is proved in [16]. From the main result of [16] we arrive at the following conclusion.

Let $(X_k)_{k \in N_0}$ and $(\alpha_k(v))_{k \in N_0}$ be a sequence of independent random variables and a sequence of discounting factors, respectively, depending on a parameter $v \in (0, 1)$, satisfying the condition

$$0 < B_v^2 = \sum_{k \in N_0} \alpha_k^2(v)\, \sigma_k^2 < \infty \,, \tag{1}$$

with $\sigma_k^2 = \mathsf{D}^2 X_k$, $k \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Without any loss of generality suppose

$$\mathsf{E} X_k = 0,\ k \in N_0 \,. \tag{2}$$

Theorem 1 (*see Corollary* 6 *in* [16]). *Under the assumption* (1), (2) *and*

$$\sum_{k \in N_0} |\alpha_k(v)|^{2+\delta}\, \mathsf{E}|X_k|^{2+\delta} < \infty \,, \tag{3}$$

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

with a constant δ, $0<\delta\leqq 1$, the inequality

$$\sup_{x\in R^1}|\mathsf{P}(B_v^{-1}\sum_{k\in N_0}\alpha_k(v)\,X_k<x)-\Phi(x)| \leqq L_1 B_v^{-(2+\delta)}\sum_{k\in N_0}|\alpha_k(v)|^{2+\delta}\,\mathsf{E}|X_k|^{2+\delta} \tag{4}$$

with the absolute constant $L_1<3.510$ holds, where the constant given here was improved by the help of Lemma 2, see (15).

Here and further on $\Phi(x)$ is the distribution function of the standard normal law. In the case of identically distributed random variables and $\delta=1$ an inequality of this type first was given by K.-H. Jöckel and W. Sendler [11].

In the following considerations the normed random variables are uniformly bounded, i.e. with a constant $M<\infty$ for all $k\in N_0$

$$|X_k|\leqq M\sigma_k \quad \text{a.s.} \tag{5}$$

Then in (4) the expression $\sum_{k\in N_0}|\alpha_k(v)|^{2+\delta}\,\mathsf{E}\,|X_k|^{2+\delta}$ can be estimated by $M^\delta B_v^2 \sup_{k\in N_0}\times$ $\times(|\alpha_k(v)|\,\sigma_k)^\delta$ and we get with $\varrho_v=B_v^{-1}\sup_{k\in N_0}(|\alpha_k(v)|\,\sigma_k)$ the following estimate:

Corollary 1. *Under the conditions of the Theorem 1 and the condition (5) the inequality*

$$\sup_{x\in R^1}|\mathsf{P}(B_v^{-1}\sum_{k\in N_0}\alpha_k(v)\,X_k<x)-\Phi(x)|\leqq L_1M^\delta\varrho_v^\delta \tag{6}$$

holds.

It is interesting to know whether the inequality (6) remains valid also in the case of dependent random variables. Recently in the case $\delta=1/4$ the error-estimate (6) was generalized by L. Paditz [17] to a certain class of dependent random variables, where the constant L_1 was improved. In view of the result in [17] now let $(X_k)_{k\in N_0}$ and $(\alpha_k(v))_{k\in N_0}$, $v\in(0,1)$, be a sequence of dependent random variables and the already above introduced sequence of discounting factors with the properties (1), (2) and (5), respectively. Further one suppose that the sequence $(X_k)_{k\in N_0}$ satisfies the following mixing condition of second order (see [7]):

$$\mathsf{E}\prod_{i=1}^{s}X_{k_i}^{r_i}=\prod_{i=1}^{s}\mathsf{E}X_{k_i}^{r_i}, \tag{7}$$
$$0\leqq k_1<k_2<\ldots<k_s,\ r_i\in\{1,2\},\quad i=1,2,\ldots,s,\quad s=1,2,\ldots$$

The property (7) characterizes the sequence $(X_k)_{k\in N_0}$ as a multiplicative system (see e.g. [19]).

The following error-estimate is based on the investigations in [17] (see Folgerung 2), where the absolute constant given here was improved by the help of Lemma 2, see (15).

Theorem 2. *For a sequence $(X_k)_{k\in N_0}$ of strongly multiplicative random variables (see (7)) and a sequence $(\alpha_k(v))_{k\in N_0}$, $v\in(0,1)$, of discounting factors with the properties*

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

(1), (2) *and* (5) *the estimate*

$$\sup_{x\in R^1} |\mathsf{P}\,(B_v^{-1} \sum_{k\in N_0} \alpha_k(v)\, X_k < x) - \Phi(x)| \leqq L_2 M^{1/4}\, \varrho_v^{1/4} \tag{8}$$

holds, where $L_2 < 1.141$ *is an absolute constant.*

Estimates of this type go back to V. F. GAPOŠKIN [6] and Š. ŠARACHMETOV [18]. In the papers by J. KOMLÓS [12] and Š. ŠARACHMETOV [19] it is mentioned that sequences $(X_k)_{k\in N_0}$ of certain martingale differences, i.e. sequences satisfying with probability one the conditions

$$\mathsf{E}X_0 = 0,\ \mathsf{E}(X_k/X_{k-1}, \dots, X_0) = 0\ (\mathsf{E}|X_k| < \infty), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

and additionally

$$\mathsf{E}X_0^2 = \sigma_0^2 = \text{const.},\ \mathsf{E}(X_k^2/X_{k-1}, \dots, X_0) = \sigma_k^2 = \text{const.}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

are also strongly multiplicative, supposing that the expectations on the left of (7) exist.

However, the error-estimate by I. A. IBRAGIMOV [10] in the central limit theorem on martingales (see also the monograph by P. HALL and C. C. HEYDE [9]) indicates, that in the case of uniformly bounded martingale differences better results as in (8) can be obtained.

The purpose of the present paper consists in the precising of the error-bound (8) in the case of martingale differences with the property (10). Investigations on such martingale differences are of special interest. Already in the monograph by J. L. DOOB [4] (see p. 382–384) and formerly by P. LÉVY [13] (see Théorème 67,1.] first investigations on the central limit theorem for sequences $(X_k)_{k\in N_0}$ of dependent random variables with the properties (9) and (10) are contained (see also [3]).

2. Main result and corollaries

In the following Theorem 3 the error-estimate (6) with $\delta = 1/2$ is established for martingale differences. Thus we simultaneously get a sharpening of Theorem 2 in the case of the here considered dependent random variables.

Theorem 3. *For the sequence* $(X_k)_{k\in N_0}$ *of martingale differences* (*i.e.* (9)) *with the properties* (5), (10) *and* (1), *where* $(\alpha_k(v))_{k\in N_0}$, $v\in(0,1)$, *in* (1) *is a suitable sequence of discounting factors, the estimate*

$$\sup_{x\in R^1} |\mathsf{P}\,(B_v^{-1} \sum_{k\in N_0} \alpha_k(v)\, X_k < x) - \Phi(x)| \leqq L_3 M^{1/2}\, \varrho_v^{1/2} \tag{11}$$

holds. Here $L_3 < 1.0578$ *is an absolute constant.*

Write

$$\lambda_v = (\sum_{k\in N_0} \alpha_k^2(v))^{-1/2} \sup_{k\in N_0} |\alpha_k(v)|\,.$$

Corollary 2. *Suppose that* $\sigma = \inf_{k\in N_0} \sigma_k > 0$ *and* $\varkappa = \sup_{k\in N_0} \sigma_k < \infty$, *then from* (11) *the*

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

error-bound

$$\sup_{x\in R^1} |\mathsf{P}\,(B_v^{-1} \sum_{k\in N_0} \alpha_k(v)\, X_k < x) - \Phi(x)| \leq L_3(M\varkappa/\sigma)^{1/2}\, \lambda_v^{1/2}$$

results.

In the Corollary 2 the error-bound is split in three factors, which allow the following interpretation. The first factor is an absolute constant. The second factor is a characteristic of the considered sequence $(X_k)_{k\in N_0}$ and last but not least the third factor only is defined by the used discounting functions $(\alpha_k(v))_{k\in N_0}$, $v\in(0, 1)$. A decomposition of the error-bound in such three factors you already can observe in the above cited paper by K.-H. Jöckel and W. Sendler [11].

Corollary 3. *Suppose that in Corollary 2 $\sigma=\varkappa$ and*

$$\alpha_k(v)=\alpha_k(v_n)=\begin{cases}1, & 1\leq k\leq n\,,\\ 0, & k=0 \quad \text{or} \quad k>n\,,\end{cases}$$

i.e. $\alpha_k(v_n)=1_{\{1,2,\dots,n\}}(k)$ is the indicator function of a set and the parameter $v=v_n$ is discretized. Then the inequality

$$\sup_{x\in R^1}\left|\mathsf{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k < x\right)-\Phi(x)\right|\leq L_3M^{1/2}\, n^{-1/4} \tag{12}$$

holds.

The rate of convergence (12) first was obtained by I. A. Ibragimov [10]. On this occasion it is remarkable, that in [10] for the special case of classical summation the condition (10) is not supposed and therefore instead of the sum $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ the more general sum $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{\tau_n} X_k$ is considered. Here the stopping time τ_n is defined by

$$\tau_n=\inf\left\{k:\sum_{i=1}^{k+1}\mathsf{E}(X_i^2/X_{i-1},\dots,X_1)\geq n\right\}.$$

By means of another method of proof E. Bolthausen [2] shows in (12) that the exact rate of convergence is $Ln^{-1/2}\log n$. However, the constant $L=L(M)$ is not given explicitely in [2]. For variables with bounded moments of order $2+2\delta$, $\delta>1$, E. Haeusler [8] obtains in (12) the estimate $0(n^{-1(2+3/\delta)}\log n)$. For $\delta>3/2$ this rate is better than $n^{-1/4}$. In the monograph by P. Hall and C. C. Heyde [9] under an assumption on the conditional variances a little weaker than (10) the optimal rate of convergence $n^{-1/4}\log n$ is proved. According to the paper by R. V. Erickson, M. P. Quine and N. C. Weber [5] under the neglect of the condition (5) but under the assumption $\mathsf{E}|X_k|^3<\infty$, $k\in N_0$, only the rate of convergence $n^{-1/8}$ is provable. However in this case $n^{-1/4}$ is the exact rate, see [2, 14].

Corollary 4. *From the inequality* (11) *the estimate* (8) *results if we consider the sequence $(X_k)_{k\in N_0}$ of martingale differences introduced in the Theorem 3. On this*

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

occasion L_2 can be substituted by the smaller constant $L_4 = \sqrt{CL_3} < 0.7565$, where $C < 0.54094$ is the universal constant appearing in Lemma 1.

In Corollary 5 an application to the ABELIAN method of summation is given.

Corollary 5. *Suppose that $\alpha_k(v) = v^k$, $v \in (0, 1)$, $k \in N_0$, and $\sigma_k = \sigma =$const. for all $k \in N_0$. Then $B_v^2 = \sigma^2/(1-v^2)$ and $\varrho_v = (1-v^2)^{1/2}$ hold and from* (11) *the central limit theorem*

$$\mathsf{P}\,(B_v^{-1} \sum_{k \in N_0} v^k X_k < x) = \Phi(x) + 0\,((1-v)^{1/4}), \quad v \to 1-0\,, \tag{13}$$

results.

E.g., if we set $v = v_n = 1 - n^{-a}$, $a > 0$, then we ~~immediately~~ get in (13) the rate of convergence $0(n^{-a/4})$.

3. Some preliminary propositions

The proof of the main result is based on the method of characteristic functions according to the technique which is used in [8]. Again to obtain an absolute constant L_3 as small as possible (see [16, 17]) a Lemma due to R. N. BHATTACHARYA and R. R. RAO [1] (see Lemma 12.3) is used, where the constant C given here was improved on the base of proof in [1].

Lemma 1. *Suppose that F_v is a standardized distribution function. Then the inequality*

$$\sup_{x \in R^1} |F_v(x) - \Phi(x)| \leq C \tag{14}$$

with the absolute constant $C < 0.54094$ holds.

According to the papers [5, 6, 10, 11, 14 and 16–18] here also the error-estimate is derived by the help of the well-known proposition due to C.-G. ESSEEN. However we use the somewhat sharper version, see Lemma 12.1 in [1],:

Lemma 2. *Let f_v and g be the characteristic function of F_v and Φ, respectively. Then for all $T > 0$ the inequality*

$$\sup_{x \in R^1} |F_v(x) - \Phi(x)| \leq \frac{b}{\pi} \int_0^T t^{-1}\, |f_v(t) - g(t)|\, (1 - t/T)\, \mathrm{d}t + \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\, T^{-1} \tag{15}$$

holds, where $b = 1/(2u-1)$ and $c = 3.25u/(2u-1)$, $0.7872 \leq u \leq 0.78720072$.

The following elementary Lemma 3 contains the decomposition of differences with certain infinite products and the estimation of certain infinite series.

Lemma 3. *Let $\sum_{k \in N_0} a_k$ and $\sum_{k \in N_0} b_k$, $b_k \geq 0$, be convergent complex and real series, respectively. Then the identity*

(i) $\prod_{k \in N_0} \mathrm{e}^{a_k} - \prod_{k \in N_0} \mathrm{e}^{-b_k} = \prod_{k \in N_0} \mathrm{e}^{-b_k} \sum_{k \in N_0} \prod_{p=0}^{k-1} \mathrm{e}^{a_p} \prod_{q=0}^{k} \mathrm{e}^{b_q} (\mathrm{e}^{a_k} - \mathrm{e}^{-b_q})$

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

and the inequalities

$$\text{(ii)}\quad \sum_{k\in N_0}\prod_{q=0}^{k-1} e^{b_q} b_k \leqq \prod_{k\in N_0} e^{b_k}-1\,,$$

$$\sum_{k\in N_0}\prod_{q=0}^{k} e^{b_q} b_k \leqq \Big(\prod_{k\in N_0} e^{b_k}-1\Big)\,(1+\sup_{k\in N_0} b_k)$$

hold.

Proof. The first part of (ii) results from the inequality $b_k \leqq e^{b_k}-1$ and from the special case of (i):

$$\sum_{k\in N_0}\prod_{q=0}^{k-1} e^{b_q}\,(e^{b_k}-1)=\prod_{k\in N_0} e^{b_k}-1\,.$$

The other inequality of (ii) is obvious if we consider the estimate

$$\prod_{q=0}^{k} e^{b_q} b_k \leqq \prod_{q=0}^{k-1} e^{b_q}\,(e^{b_k}-1)\sup_{k\in N_0} b_k+\prod_{q=0}^{k-1} e^{b_q} b_k\,.$$

Further on we need the following convergence theorem resulting from the martingale theory (see [15], Satz 4.6.2).

Lemma 4. *Let $(Y_k)_{k\in N_0}$ be a sequence of martingale differences (see (9)). Suppose that the series $\sum_{k\in N_0} \mathsf{E}(Y_k^2/Y_{k-1}, \ldots, Y_0)$ is convergent with probability one. Then the series $\sum_{k\in N_0} Y_k$ also is convergent with probability one.*

4. Proofs

To prove Theorem 3 we set in Lemma 4 $Y_k=B_v^{-1}\alpha_k(v)\,X_k$, $k\in N_0$. Because of this Lemma and the conditions (1) and (10) the series $Z_v=\sum_{k\in N_0} Y_k$ is a random variable.

Now put $F_v(x)=\mathsf{P}\,(Z_v<x)$ and $a_k=itY_k$ and $b_k=t^2B_v^{-2}\alpha_k^2(v)\,\sigma_k^2/2$, $k\in N_0$, where F_v is the distribution function in Lemma 1 and 2 and $(a_k)_{k\in N_0}$ and $(b_k)_{k\in N_0}$ are the sequences appearing in Lemma 3. Hence, from (i) of Lemma 3,

$$|f_v(t)-g(t)|=|\mathsf{E}\prod_{k\in N_0} e^{itY_k}-e^{-t^2/2}| \tag{16}$$

$$\leqq \exp\,(-t^2/2)\sum_{k\in N_0}\prod_{q=0}^{k} e^{b_q}\,|\,\mathsf{E}\prod_{p=0}^{k-1} e^{itY_p}\,(e^{itY_k}-e^{-b_k})|$$

$$\leqq \exp\,(-t^2/2)\sum_{k\in N_0}\prod_{q=0}^{k} e^{b_q}\mathsf{E}\,|\,\mathsf{E}\,((e^{itY_k}-e^{-b_k})/Y_{k-1}, \ldots, Y_0)|\,.$$

Using the equalities

$$e^{itY_k}=1+itY_k-t^2Y_k^2/2+\vartheta_1\,|t|^3\,Y_k^3/6$$

and

$$e^{-b_k}=1-b_k+\vartheta_2 b_k^2/2\,,$$

where $|\vartheta_i|\leqq 1$, $i=1, 2$,

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

we get from (9), (10) and (16)

$$|f_v(t)-g(t)| \le \exp(-t^2/2) \sum_{k\in N_0} \prod_{q=0}^{k} e^{b_q} \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(\frac{1}{6}|t|^3 |Y_k|^3/Y_{k-1}, \ldots, Y_0\right) + \frac{1}{2} b_k^2\right). \tag{17}$$

Now because of (5) and (10) the following estimate is valid

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{6}|t|^3 |Y_k|^3/Y_{k-1}, \ldots, Y_0\right) \le \frac{1}{6}|t|^3 M(B_v^{-1}|\alpha_k(v)|\sigma_k)^3 \le \frac{1}{3}|t| M\varrho_v b_k .$$

An application of (ii) in Lemma 3 yields

$$\sum_{k\in N_0} \prod_{q=0}^{k} e^{b_q} b_k |t| M\varrho_v/3 \le (\exp(t^2/2)-1)(1+t^2\varrho_v^2/2)|t| M\varrho_v/3$$

and

$$\sum_{k\in N_0} \prod_{q=0}^{k} e^{b_q} b_k^2/2 \le (\exp(t^2/2)-1)(1+t^2\varrho_v^2/2) t^2\varrho_v^2/4 .$$

Consequently, from (17) we obtain the inequality

$$|f_v(t)-g(t)| \le (1+t^2\varrho_v^2/2)(M/3+|t|\varrho_v/4)|t|\varrho_v . \tag{18}$$

Now applying the Lemma 2 with

$$T=T_v=\alpha(M\varrho_v)^{-1/2}, \quad \text{where} \quad \alpha=2.726 ,$$

we get

$$\sup_{x\in R^1}|F_v(x)-\Phi(x)| \le \frac{b}{\pi} T_v\varrho_v\left(\frac{M}{6}+\frac{1}{24}T_v\varrho_v+\frac{M}{72}(T_v\varrho_v)^2+\frac{1}{160}(T_v\varrho_v)^3\right)+\frac{c}{\sqrt{2\pi}}T_v^{-1} . \tag{19}$$

Because of Lemma 1 we only carry out the proof for $L_3(M\varrho_v)^{1/2}<C$ and thus we can suppose that the inequality

$$(M\varrho_v)^{1/2}<C/L_3 \tag{20}$$

holds. Furthermore using the condition (5) we have

$$1=\mathsf{E}(X_k/\sigma_k)^2 \le M^2, \quad \text{i.e.} \quad M\ge 1 . \tag{21}$$

Hence it follows that

$$\sup_{x\in R^1}|F_v(x)-\Phi(x)| \le (M\varrho_v)^{1/2}\,\frac{b}{\pi}\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\alpha^2}{24}C/L_3+\frac{\alpha^3}{72}(C/L_3)^2+\frac{\alpha^4}{160}(C/L_3)^3+\frac{3.25\pi u}{\sqrt{2\pi}\alpha}\right).$$

Finally to obtain the desired result of Theorem 3 we remark that

$$\frac{b}{\pi}\left(\frac{\alpha}{6}+\frac{\alpha^2}{24}C/L_3+\frac{\alpha^3}{72}(C/L_3)^2+\frac{\alpha^4}{160}(C/L_3)^3+\frac{3.25\pi u}{\sqrt{2\pi}\alpha}\right)<L_3<1.0578 .$$

To establish Corollary 4 we first observe that the inequality

$$\sup_{x\in R^1}|F_v(x)-\Phi(x)| \le L_4(M\varrho_v)^{1/4} \tag{22}$$

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

is obvious for $L_4(M\varrho_v)^{1/4} \geqq C$ because of Lemma 1. Now let $L_4(M\varrho_v)^{1/4} < C$ be. Then we have $(M\varrho_v)^{1/4} < C/L_4 = (C/L_3)^{1/2}$. Hence it follows in the error-bound (11)

$$L_3(M\varrho_v)^{1/2} < L_3(M\varrho_v)^{1/4}\,(C/L_3)^{1/2} = L_4(M\varrho_v)^{1/4}\,.$$

This completes the proof of Corollary 4.

The other assertions are obvious thus we omit the proof.

References

[1] Bhattacharya, R. N., Rao, R. R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.* Wiley, New York.

[2] Bolthausen, E. (1982). Exact Convergence Rates in Some Martingale Central Limit Theorems. *Ann. Prob.* **10**, 672–688.

[3] Csörgő, M. (1968). On the Strong Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem for Martingales. *Trans. Amer. Math. Soc.* **131**, 259–275, **136**, 545.

[4] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes.* Wiley, New York.

[5] Erickson, R. V., Quine, M. P., Weber, N. C. (1979). Explicit Bounds for the Departure from Normality of Sums of Dependent Random Variables. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **34**, 27–32.

[6] Гапошкин, В. Ф. (1968). О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов. *Теория вероятн. примен.* **13**, 445–461.

[7] Гапошкин, В. Ф. (1972). О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций. *Матем. сб.* **89**, 355–365.

[8] Haeusler, E. (1984). A Note on the Rate of Convergence in the Martingale Central Limit Theorem. *Ann. Prob.* **12**, 635–639.

[9] Hall, P., Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Application.* Academic Press, New York.

[10] Ибрагимов, И. А. (1963). Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин. *Теория вероятн. примен.* **8**, 89–94.

[11] Jöckel, K.-H., Sendler, W. (1981). A Central Limit Theorem for Generalized Discounting. *Math. Operationsforsch. Statist., ser. statistics* **12**, 605–608.

[12] Komlós, J. (1973). A Central Limit Theorem for Multiplicative Systems, *Canad. Math. Bull.* **16**, 67–73.

[13] Lévy, P. (1937, 1954). *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris.

[14] Mukerjee, H. G. (1982). On a Improved Rate of Convergence to Normality for Sums of Dependent Random Variables with Applications to Stochastic Approximation. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **40**, 229–236.

[15] Neveu, J. (1969). *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Oldenbourg Verlag, München.

[16] Paditz, L. (1984). On Error-Estimates in the Central Limit Theorem for Generalized Linear Discounting. *Math. Operationsforsch. Statist., ser. statistics* **15**, 601–610.

[17] Paditz, L. (1984). Zur Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz für stark multiplikative Systeme. *Wiss. Z. der H/V* „Friedrich List" *Dresden* **31**, 589–597.

[18] Шарахметов, Ш. (1978). Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для сильно мультипликативной системы функций. Сб. "*Вероятностн. процессы и матем. статистика*" Фан, Ташкент. с. 178–182.

[19] Шарахметов, Ш. (1982). Вероятностные неравенства для сильно мультипликативных систем. *Изв. АН Уз ССР, Сер. физ.-мат. наук* **26**, 34–37.

Der Inhalt dieser Arbeit |184| wurde 1985 in Vilnius auf der IV. Internationalen Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik vorgestellt, vgl. |178|.

Als eine mögliche Erweiterung der Untersuchungen bietet sich an, auf die Konstantheitsforderung (1.44) an die bedingten Varianzen zu verzichten. Es gibt dabei zwei Untersuchungsrichtungen:

(i) Unter Verzicht auf (1.44) wird gefordert:

$$B_v^2 = \sum_k \alpha_k^2(v) E(X_k^2 | X_{k-1}, \ldots, X_o) = \text{const.} \quad P-\text{f.s.} \qquad (3.18)$$

Im Fall der klassischen Summation wird mit einer derartigen Bedingung z.B. bei BOSE(1986) gearbeitet.

(ii) Die Bedingung (3.18) wird in abgeschwächter Form gestellt:

$$\eta_v^2 = \sum_k \alpha_k^2(v) E(X_k^2 | X_{k-1}, \ldots, X_o) \text{ und } E\eta_v^2 = B_v^2 . \qquad (3.19)$$

Im Fall der klassischen Summation wird mit einer derartigen Bedingung z.B. bei STROBEL(1978) gearbeitet.

Unter der Voraussetzung (3.19) läßt sich z.B. folgendes Analogon zu Folgerung 3.11 finden:

Satz 3.18. Mit einer Martingaldifferenzfolge (X_k), $k \in N_o$, mit der Eigenschaft $\sup_k E|X_k|^{2+\delta} < \infty$, $\delta \in (0,1]$, und einer Folge $(\alpha_k(v))$, $k \in N_o$ und $v \in (0,1)$, gelte die Bedingung (3.19). Dann erhält man

$$\Delta_{v\infty} \leq L\left(\left(B_v^{-(2+\delta)} \sum_k |\alpha_k(v)|^{2+\delta} E|X_k|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{3+\delta}} + \left(B_v^{-2} E|\eta_v^2 - B_v^2|\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$

wobei L eine absolute Konstante ist.

Satz 3.18 trägt hypothetischen Charakter, da die Untersuchungen in dieser Richtung bisher nicht weitergeführt wurden. Im Fall der klassischen Summation (Serienschema) wurde dieses Resultat mit $L < 3{,}42$ von PADITZ (1984, unveröffentlicht) erzielt (vgl. hierzu Bemerkungen zur Arbeit |250| in einem offiziellen Brief von 29.3.84 an STROBEL).

In Satz 3.18 ist zu erkennen, daß der Verzicht auf die Konstantheitsforderung (1.44) bewirkt, daß ein zusätzlicher Term in die Fehlerschranke aufgenommen werden muß, der von $E|\eta_v^2 - B_v^2|$ abhängt, s. |281|.

Bereits im oben genannten Brief wurde der Gedanke geäußert, daß hier anstatt mit $\Phi(x)$ durch die angepaßte Verteilungsfunktion $\Phi_\eta(x)$ approximiert werden sollte. Dadurch würde der zusätzliche Term mit $E|\eta_v^2 - B_v^2|$ in der Fehlerschranke wieder entfallen. $\Phi_\eta(x)$ ist hierbei die Verteilungsfunktion von $\eta^2 N$ mit $\eta = \eta_v$ und $N \in N(0,1)$ unabhängig von η, d.h.

$$\Phi_\eta(x) = P(\eta^2 N < x) = \int_{R^1} \left(\int_{u < \frac{x}{v}} (2\pi)^{-0.5} \exp(-u^2/2)\, du \right) dP(\eta < v) .$$

Auf Grund dieser Definition wird hier auch von einer "gewichteten" Normalverteilung gesprochen, vgl. LOEVE(1962). STROBEL(1978) spricht in diesem Zusammenhang von einer "Mischung" von Normalverteilungen und bei GAPOŠKIN(1966) werden diese Verteilungen "pseudogaußsch" oder "quasigaußsch" bzw. "η – gaußsch" genannt, falls η der "mischende Faktor" ist. Die charakteristische Funktion hat folgende einfache Gestalt

$$E(\exp(-0{,}5\,\eta^2 t^2)), \quad t\varepsilon R^1 .$$

Mischungen von Normalverteilungen als Grenzverteilung werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter diskutiert. Hinweise zu Mischungen von Verteilungen findet man z.B. in der Monografie von ROSSBERG|JESIAK|SIEGEL (1985). Anstatt "Mischung von Verteilungen" oder kurz "Mischverteilung" wird in der Literatur oft auch von "zusammengesetzten Verteilungen" gesprochen, vgl. |148|.

Weitere explizite Fehlerabschätzungen unter den Bedingungen (3.18) bzw. (3.19) wurden z.B. von KOROLJUK|BOROVSKICH(1984) oder CHOW|TEICHER (1978) angegeben, jedoch stets ohne Konstantenabschätzung.

Eine andere Möglichkeit, im Fall der klassischen Summation den zusätzlichen Term mit $E|\eta_v^2 - B_v^2|$ zu umgehen, besteht in der Betrachtung von Summen mit einem zufälligen Summationsindex τ_n, wie es im Abschnitt 3.1.3 angedeutet wurde. Dabei ist z.B.

$$\tau_n = \inf\left\{K: \sum_{i=1}^{K+1} E(X_i^2 | X_{i-1}, \ldots, X_1) \geq n\right\}$$

eine geeignete Stoppzeit, vgl. IBRAGIMOV(1963) .

3.2.2 Stark multiplikative Systeme

Im vorangehenden Abschnitt 3.2.1 wurde die Martingaldifferenzfolge mit der Eigenschaft (1.44) als spezieller Anwendungsfall eines stark multiplikativen Systems betrachtet, vgl. Abschnitt 1.3.2 .

Das Hauptresultat in Abschnitt 3.2.1 lautete, vgl. Satz 3 in |184|,

$$\Delta_{v\infty} \leq L\, M^{1/2}\, \rho_v^{1/2} \quad \text{mit} \quad L < 1{,}0578 . \tag{3.20}$$

Nun soll ein entsprechendes Resultat für den allgemeinen Fall eines stark multiplikativen Systems, so wie es in Abschnitt 1.3.2 eingeführt wurde, angegeben werden.

Satz 3.19. Es sei (X_k), $k\varepsilon N_o$, ein stark multiplikatives System, d.h. es sei (1.50) erfüllt. Weiterhin gelte die Beschränktheitsbedingung (1.52). Mit (λ_{Nk}), $k\varepsilon N_o$, $N=1,2,\ldots$, als einer unendlichen Summationsmatrix sei die Bedingung (1.51) erfüllt. Dann gilt

$$\sup_x |P(B_N^{-1} \sum_k \lambda_{Nk} X_k < x) - \Phi(x)| \leq L_8\, M^{1/4}\, \lambda_N^{1/4} \tag{3.21}$$

mit $L_8 < 0{,}9182$ als absolute Konstante.

In Satz 3.19 ist zu erkennen, daß der Exponent 1/2 in (3.20) durch den etwas ungünstigeren Exponenten 1/4 ersetzt wurde. Auf Grund des hier betrachteten Summationsverfahrens wurde die Charakteristik ρ_v durch λ_N ersetzt, vgl. Abschnitt 1.3.2 . Die Ungleichung (3.21) geht in dieser Art auf |176| zurück und wurde dort mit $L_8 < 1{,}76852$ angegeben. In |184| ist dieses Ergebnis mit $L_8 < 1{,}141$ zu finden.
Mittels der in Satz 1.17 angegebenen Abschätzung und der Glättungsungleichung (0.18) erhält man nun das Ergebnis (3.21) mit der dort angegebenen verbesserten Konstantenabschätzung für L_8. Die einzelnen Beweisschritte verlaufen dabei so, wie es in |176| angegeben wurde.
Der Parameter α, vgl. Satz 1.17, wird jetzt wie folgt gewählt: $\alpha = 2{,}35$
Wegen der Ungleichung (0.4) ist $\rho = 1/K$ mit $K = L_8/C_0 = 1{,}6974\ldots$ zu setzen. ■
Im Gegensatz zu Martingaldifferenzfolgen gibt es für stark multiplikative Systeme noch keine Untersuchungen zur Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz, wo auf die Beschränktheitsvoraussetzung (1.52) verzichtet wurde. Offenbar aus beweistechnischen Gründen wird hier immer wieder auf diese Bedingung zurückgegriffen, vgl. z.B. auch MORICZ(1980).
Im Spezialfall $\lambda_{Nk} = a_k$ für $k=1,2,\ldots,N$ und $\lambda_{Nk} = 0$ sonst ist

$$\lambda_N = \Big(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \Big)^{-1/2} \max_{1\leq k\leq N} |a_k| \ .$$

ŠARACHMETOV(1978) erhielt für diesen Spezialfall die Abschätzung (3.21) in der Form $L_8 M \lambda_N^{1/4}$ mit $L_8 < 4$, d.h. sein Resultat war nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ schlechter, da M ohne den Exponenten 1/4 auftrat.
GAPOŠKIN(1968) untersuchte gewichtete Summen im Spezialfall stark lakunärer trigonometrischer Systeme und erhielt dafür eine noch ungünstigere Fehlerabschätzung als ŠARACHMETOV(1978). Andererseits stellt das Resultat von GAPOŠKIN(1968) die erste Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz für stark multiplikative Systeme dar.
Betrachtet man das stark multiplikative System (X_k), $k \in N_0$, als ein Funktionensystem im HILBERT-Raum $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, dann stellt die Bedingung (1.50) eine Orthogonalitätsbedingung dar. Setzt man nun voraus, daß die Größen X_k, $k \in N_0$, nicht nur zentriert sondern auch normiert sind, d.h. $EX_k^2 = 1$ für alle k, dann haben wir es gleichzeitig mit einem Orthonormalsystem über dem Raum $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ zu tun.
Ein schon klassisches Beispiel eines solchen Systems ist die Folge

$$X_k = \sqrt{2} \cos(2 m_k \pi \omega) \quad \text{mit } \omega \in [0,1] \ ,$$

wobei die Koeffizienten (m_k) eine spezielle Bedingung, die sogenannte HADAMARD'sche Lückenbedingung $m_{k+1}/m_k \geq q \geq 3$ für alle k erfüllen. Dann kann man die gewichtete Summe $\sum_k \lambda_{Nk} X_k$ als die Reihenentwicklung einer Zufallsgröße S_N ($= \sum_k \lambda_{Nk} X_k$) nach dem System (X_k), $k \in N_0$, interpretieren. Es handelt sich dann hier um eine spezielle FOURIER-Reihe mit den FOURIER-Koeffizienten (λ_{Nk}), $k \in N_0$.

Damit deuten sich hier interessante Zusammenhänge an, Reihenentwicklungen (Orthogonalreihen, trigonometrische Reihen) im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes zu interpretieren. Bereits bei ZYGMUND(1959) wird in der Theorie lakunärer trigonometrischer Systeme ein zentraler Grenzwertsatz (qualitativ, ohne Fehlerabschätzung) angegeben, vgl. z.B. auch MORICZ(1970).

Als eine weitere Klasse abhängiger Zufallsgrößen werden in der Literatur seit einigen Jahren die orthogonalen Zufallsgrößen untersucht, jedoch wird darauf hier nicht näher eingegangen, vgl. z.B. MORICZ (1980).

4. Abschätzungen im globalen zentralen Grenzwertsatz

4.1 Unabhängige Zufallsgrößen

4.1.1 Gleichmäßige Abschätzung

Die Zielstellung dieses Abschnittes besteht in der Übertragung der Ungleichung (3.9) auf den allgemeineren Fall der L_p-Metrik mit $1 \leq p \leq \infty$.

Die sup-Norm entspricht dabei dem Fall $p = \infty$. Entsprechend (0.9) sei hier

$$\Delta_{np} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad 1 \leq p \leq \infty .$$

Auf Grund der Ungleichung (0.22) ist also nur noch eine Abschätzung in der L_1-Metrik bereitzustellen. Es gilt folgender Satz:

Satz 4.1. Es sei (X_k), $k=1,2,\dots,n$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ für alle k und $0 < B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 < \infty$. Dann gilt

$$\Delta_{n1} \leq K \sum_{k=1}^{n} E \min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right) \quad \text{mit} \quad K < 33{,}40 . \qquad (4.1)$$

In Satz 4.1 tritt also die gleiche Momentencharakteristik wie in (3.9) auf, so daß die äquivalenten Darstellungen dieser Charakteristik dort zu ersehen sind.

Dieser Satz wurde in |179| bewiesen, jedoch mit der etwas ungenaueren Konstantenabschätzung $K < 33,88$.

Zum Beweis dieses Satzes wird ein ähnliches Hilfsmittel wie die Ungleichung (0.4) im Fall der L_∞ – Metrik benötigt, um eine günstige Konstantenabschätzung zu erzielen. Es gilt

<u>Lemma 4.2.</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 gilt

$$\Delta_{n1} \leq K_0^{0.5} \left(\sum_{k=1}^{n} E \min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right)\right)^{0.5} \tag{4.2}$$

mit $K_0 = 8L_5(1+2\gamma) < 8\cdot 3,51\cdot(1+2\gamma) = 33,76498\ldots$, wobei

$\gamma = \max\limits_{a>0} (a\phi'(a) - a^2\phi(-a)) \leq 0,1012283$ ist.

(L_5 war hierbei die Konstante aus der Ungleichung (3.9).)

Der Beweis von (4.2) ist elementar und in |179| zu finden. Es wird dabei das Integrationsgebiet $(-\infty, \infty)$ zerlegt in $\{x: |x| \leq a\} \cup \{x: |x| > a\}$, dann wird (3.9) ausgenutzt. Die jetzige Konstantenabschätzung für K_0 im Vergleich zu |179| ergab sich durch die verbesserte Abschätzung von L_5 in (3.9). ■

Wegen Lemma 4.2 ist Satz 4.1 nur noch im Fall

$$\sum_{k=1}^{n} E \min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right) < K^{-2} K_0 = 1^3 \quad \text{mit} \quad 1 = 0,3116 \tag{4.3}$$

zu beweisen. Andernfalls ergibt sich aus Lemma 4.2 sofort Satz 4.1.

Der weitere Beweis von (4.1) wird nun mit der Glättungsungleichung (0.19) geführt, wobei die Differenz der entsprechenden charakteristischen Funktionen in den Sätzen 1.8 und 1.9 abgeschätzt wird. Nach Anwendung der Sätze 1.8 und 1.9 werden die Integrale in (0.19) mittels (2.41) ausgewertet. Auf diese umfangreiche Rechnung wird an dieser Stelle verzichtet, s. |179|. Auf die numerischen Überlegungen zur optimalen Wahl der freien Parameter a_1 und a_2 (allgemeines Iterationsverfahren in einer geeigneten Fixpunktgleichung), die schließlich die Konstante K mit der angegebenen Abschätzung zulassen, wird ebenfalls nicht eingegangen. Entsprechende Überlegungen dazu wurden im Beweis zu Satz 3.6 angedeutet.

<u>Folgerung 4.3.</u> Mit den Ergebnissen (3.9) und (4.1) ergibt sich über die Abschätzung (0.22) die Ungleichung

$$\Delta_{np} \leq L_5 M^{1/p} \sum_{k=1}^{n} E \min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right) \quad \text{mit} \quad M = K/L_5. \tag{4.4}$$

Die hier vorgestellen Abschätzungen gehen auf ERICKSON(1973) zurück,

wo $K < 72$ angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit $K < 36$ gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall $p = 2$ ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

107

LUDWIG PADITZ

DK 519.25/.26

Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz[1])

1. Einleitung

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit endlichen Streuungen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte nun

$$EX_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

und es sei

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 > 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Durch $F_n(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < x)$ und $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$ werden die Verteilungsfunktion der Summe der ersten n Zufallsgrößen und die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnet.
In den Arbeiten [5, 7] wurden unter den Voraussetzungen (1) und (2) die absolute Konstante in der Fehlerabschätzung des Restgliedes $|F_n(xB_n) - \Phi(x)|$ in der Norm des Raumes L_∞ präzisiert und folgendes Resultat erhalten:

$$\delta_{n\infty} = \sup_{x \in R^1} |F_n(xB_n) - \Phi(x)| \leq L \sum_{k=1}^{n} E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2} \tag{3}$$

mit $L < 4{,}77$, wobei L eine absolute Konstante ist. (vgl. Folgerung 3.7)
Mit Hilfe von Lemma 12.2 in [11] und der in [5, 7] angegebenen Beweistechnik läßt sich in (3) sogar $L < 3.51$ zeigen. Ziel dieser Note ist die Betrachtung einer entsprechenden Aufgabe im Raum L_p mit der Metrik

$$\delta_{np} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(xB_n) - \Phi(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

und die Präzisierung des Resultats von *R. V. Erickson* [2].

2. Resultat und Diskussion

Es gilt folgende Fehlerabschätzung (vgl. Satz 4.1)

Satz 1: Die Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, unabhängiger Zufallsgrößen möge die Bedingungen (1) und (2) erfüllen. Dann gilt mit einer absoluten Konstanten K

[1]) Dieser Beitrag basiert auf einem Vortrag, gehalten am 13. November 1984 an der Staatl. Univ. Leningrad.

wo K < 72 angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit K < 36 gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall p = 2 ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

die Ungleichung

$$\delta_{n1} \leqq K \sum_{k=1}^{n} E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2}, \tag{4}$$

wobei K < 33,88 ist.

Unter Benutzung der Abschätzungen (3) und (4) folgt sofort (vgl. Folg.4.3)

Folgerung 1: Es gilt mit M = K/L folgende Abschätzung

$$\delta_{np} \leqq L\, M^{1/p} \sum_{k=1}^{n} E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2}. \tag{5}$$

Auf Grund der Identität

$$\sum_{k=1}^{n} E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2} = B_n^{-2} \int\limits_{|u|>B_n} u^2\, dV_k(u) + B_n^{-3} \int\limits_{|u|\leqq B_n} |u|^3\, dV_k(u) = B_n^{-1} \int\limits_0^{B_n} L_n(u)\, du, \tag{6}$$

mit $L_n(u) = B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|v|>u} v^2\, dV_k(v)$, $V_k(u) = P(X_k < u)$, ist in (5) die L_p-Version bekannter Abschätzungen des Raumes L_∞ (vgl. [8], Kap. 5) erkennbar.

Im Fall p = 2 wurde die Abschätzung (5) von *J. P. Studnev* [9] angegeben. Für beliebige p kann man die Abschätzung (5) bei *J. P. Studnev* und *J. I. Ignat* [10] finden. Jedoch erfolgte in diesen Arbeiten keine Konstantenberechnung. In der Arbeit von *R. V. Erickson* [2] wird K mit 72 abgeschätzt und darauf verwiesen, daß K < 36 nachweisbar ist.

Entsprechend einer Bemerkung von *L. V. Rozovskij* ist die in (5) oder (6) auftretende Momentencharakteristik in folgendem Sinne optimal: Es seien $A_k \in \mathbf{R}^1$ beliebige *Borel*-Mengen, k = 1, 2, ..., n. Dann gilt

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=1}^{n} E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2} 1\{X_k \in A_k\} + E \min\left(1, \frac{|X_k|}{B_n}\right) \frac{X_k^2}{B_n^2} 1\{X_k \notin A_k\}\right\} \\ &\leqq B_n^{-3} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} |u|^3\, dV_k(u) + B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{R}^1 \setminus A_k} u^2\, dV_k(u), \end{aligned} \tag{7}$$

wobei $1\{E\}$ die Indikatorfunktion des Ereignisses E bedeutet. Wegen der Ungleichung (7) führt die Betrachtung von abgeschnittenen Momenten auf beliebigen Mengen A_k und $\mathbf{R}^1 \setminus A_k$ (vgl. [5, 7]) stets zu einer Vergröberung der Momentencharakteristik. $A_k = (-B_n, B_n)$ ist damit optimal, und die in [2, 3] betrachteten Intervalle $A_k = (-\tau_k, \tau_k')$, $-\infty \leqq -\tau_k < 0 < \tau_k' \leqq \infty$, bedeuten keine Verallgemeinerung, ebenso nicht der in der Literatur betrachtete Fall $A_k = (-\varepsilon B_n, \varepsilon B_n)$, $\varepsilon > 0$, (vgl. [8], Kap. 5, Satz 8).

Außerdem ist eine Vergröberung im Sinne von (7) für praktische Anwendungen bedeutungsvoll, wenn die Berechnung einer Abschätzung für R erfolgen oder an andere Resultate angeknüpft werden soll (vgl. z. B. Ungleichung (3.II) in [8], Kap. 5 oder Beweis von Satz 2 in [6]).

Der Fall $A_k = \mathbf{R}^1$ z. B. führt auf den bekannten *Ljapunov*-Bruch, vorausgesetzt $E|X_k|^3 < \infty$, k = 1, 2, ..., n, (vgl. [4], Satz 5.3.1. oder [8], Kap. 5, Satz 16).

wo K < 72 angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit K < 36 gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall p = 2 ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

Abschließend soll auf eine „ungleichmäßige" L_p-Version einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz hingewiesen werden, vgl. [1]:

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\{(1+|x|^{2+\delta-1/p})\,|F_n(xB_n)-\Phi(x)|\}^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq CB_n^{-2-\delta}\sum_{k=1}^{n}E\,|X_k|^{2+\delta}, \quad \text{(vgl.(0.7))}$$

falls $E\,|X_k|^{2+\delta}<\infty$, $k=1,2,\ldots,n$, $0<\delta<1$.
C ist hierbei wieder eine (unbekannte) absolute Konstante, die nur von δ und p abhängt. Bei genauer Analyse des Beweises in [1] ist zu bemerken, daß $C = C_{\delta,p}$ über alle Grenzen anwächst, falls δ beliebig nahe an 1 herankommt. Der gleiche Effekt ist auch in [12] festzustellen.

3. Beweis

Im Beweis des Satzes 1 spielt folgender *Esseen*scher Satz, vgl. [4], Satz 1.5.4., die zentrale Rolle:

$$\delta_{n1} \leqq \frac{8\pi}{T} + (1/2 + 4/T^2)^{1/2}\,\varepsilon + \delta,\ T > 0, \tag{8}$$

wobei $\varepsilon^2 = \int_{-T}^{T}|t^{-1}(f_n(t)-g(t))|^2\,dt,$

$$\delta^2 = \int_{-T}^{T}\left|\frac{d}{dt}(t^{-1}(f_n(t)-g(t)))\right|^2 dt,$$

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_n(xB_n),\ g(t) = e^{-t^2/2}.$$

Die Beweisschritte verlaufen etwa wie in den Arbeiten [2, 5, 7] und gehen auf *W. Feller* [3] zurück.
Folgende Lemmata führen zum Beweis des Satzes 1: (vgl. Lemma 4.2)

Lemma 1: Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt

$$\delta_{n1} \leqq \sqrt{K_0 R}, \tag{9}$$

wobei $K_0 = 8L(1+2\gamma) \leqq 45{,}8762,$
$\gamma = \max\limits_{a>0}(a\Phi'(a) - a^2\Phi(-a)) \leqq 0{,}1012283\,.$
Wegen Lemma 1 ist der Satz 1 nur noch im Fall $KR < \sqrt{K_0R}$, d. h.

$$R \leqq K^{-2}K_0 \leqq \varrho^3,\quad \varrho = 0{,}34192, \tag{10}$$

zu zeigen. Wir führen weitere Bezeichnungen ein:

$$\Gamma = B_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}E\,|X_k|^3\,1\{|X_k|\leqq B_n\},\ B = B_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2\,1\{|X_k|>B_n\},$$

$w_n(t) = f_n(t) - g(t),\ \varphi(t) = (|t|/6 + t^2\varrho/8)\,\Gamma + (1 + t^2\varrho^2/4)\,B,$
$\chi(t) = (2|t|/3 + 5t^2\varrho/8)\,\Gamma + (3 + 5t^2\varrho^2/4)\,B,\ \eta(t) = |t|\,\Gamma/2 + 2B,$
$T = (a_1\Gamma + a_2B)^{-1},\ a_1 = 1{,}042,\ a_2 = 0{,}65,$ d. h. $a_1 > a_2,$

$$M = \left(1 - 2a_1^2\varrho^6 - \frac{1}{\sqrt{2}\,a_1}\right)^{-1},\quad N = \left(1 - 4a_1^2\varrho^6 - \frac{1}{\sqrt{2}\,a_1}\right)^{-1},$$

$L = 2MN/(M+N),\ \gamma_s = \varrho\sqrt{s},\ s = L, M, N.$

59611 VV Freiberg

wo K < 72 angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit K < 36 gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall p = 2 ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

110 *Lemma 2:* Unter den Bedingungen (1), (2), (10) und $|t| \leqq T$ gilt

$$\left|\frac{w_n(t)}{t}\right| \leqq |t|\,\varphi(t)\exp(-t^2/(2M)), \quad \text{(vgl. Satz 1.8)} \tag{11}$$

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{w_n(t)}{t}\right| \leqq \chi(t)\exp(-t^2/(2M)) + t^2\varphi(t)(\eta(t)+1)\exp(-t^2/(2N)). \tag{12}$$
(vgl. Satz 1.9)

Lemma 3: Unter den Bedingungen des Lemmas 2 gilt

$$\varepsilon^2 \leqq M^{3/2}\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{48} + \frac{1}{12}\gamma_M + \frac{15\sqrt{\pi}}{512}\gamma_M^2}\;\Gamma\sqrt{M} + \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\gamma_M^2 + \frac{15\sqrt{\pi}}{128}\gamma_M^4}\,B\right\}^2, \tag{13}$$

$$\delta^2 \leqq \left\{\Gamma + \sqrt{\frac{9\sqrt{\pi} + \frac{15\sqrt{\pi}}{4}\gamma_M^2 + \frac{75\sqrt{\pi}}{48}\gamma_M^4}{\frac{2\sqrt{\pi}}{9} + \frac{5}{6}\gamma_M + \frac{75\sqrt{\pi}}{256}\gamma_M^2}} : \frac{\sqrt{M}}{B}\right\}^2 \cdot \left\{M^{3/2}\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{9} + \frac{5}{6}\gamma_M + \frac{75\sqrt{\pi}}{256}\gamma_M^2\right) + L^{5/2}(2\varrho^3+1)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6} + \frac{3}{4}\gamma_L + \frac{75\sqrt{\pi}}{256}\gamma_L^2\right) + N^{7/2}(2\varrho^3+1)^2\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{96} + \frac{1}{4}\gamma_N + \frac{105\sqrt{\pi}}{1024}\gamma_N^2\right)\right\}. \tag{14}$$

Aus Lemma 3 folgt wegen (8) im Fall (10) die Abschätzung

$$\delta_{n1} \leqq 8\pi(a_1\Gamma + a_2 B) + \sqrt{1/2 + 4a_1^2\varrho^6}\,\varepsilon + \delta \leqq KR.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen, wenn die Lemmata gezeigt werden.

Beweis von Lemma 1: Es sei $a = \sqrt{(1+2\gamma)/(2LR)}$. Mit der Ungleichung $\delta_{n\infty} \leqq LR$ folgt mit $F^*(z) = F(-z) + 1 - F(z)$, $z > 0$, die Abschätzung

$$\delta_{n1} \leqq 2aLR + \int_a^\infty (F^*(xB_n) + \Phi^*(x))\,dx \leqq 2aLR + \int_{|x|>a}(|x|-a)\,d\Phi(x) + \frac{1}{a}\int_{|x|>a} x^2\,dF_n(xB_n) \leqq 2aLR + 2\Phi'(a) - 2a\Phi(-a) + \frac{1}{a} \leqq 2aLR + \frac{1}{a}(1+2\gamma) = \sqrt{K_0R}.$$

Beweis von Lemma 2: Entsprechend der Beweistechnik aus [2, 5, 7] folgt im Fall (10)

$$\sum_{r=1}^{n}|v_r(t/B_n) - \varphi_r(t/B_n)| \leqq t^2\varphi(t),$$

wobei $v_r(t) = E\exp(itX_r)$, $\varphi_r(t) = \exp(-0.5\,t^2 E X_r^2)$ gilt.
Weiter folgt im Fall (10) für $|t| \leqq T$

$$\left|\prod_{p=1}^{r-1}\;\prod_{q=r+1}^{n} v_p(t/B_n)\,\varphi_p(t/B_n)\right| \leqq \exp(-0{,}5\,t^2/M).$$

wo K < 72 angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit K < 36 gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall p = 2 ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

Hieraus erhält man (11). Entsprechend gelten die Teilabschätzungen

$$\sum_{r=1}^{n} |v_r'(t/B_n) - \varphi_r'(t/B_n)| \leq |t|\,\psi(t),\ \psi(t) = \varphi(t) + \chi(t),$$

$$\sum_{j=1}^{r-1} |v_j'(t/B_n)| + \sum_{j=r+1}^{n} |\varphi_j'(t/B_n)| \leq |t|\,(\eta(t) + 1) \quad \text{und}$$

$$\left| \prod_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{r-1} \prod_{\substack{q=r+1\\q\neq j}}^{n} v_p(t/B_n)\,\varphi_q(t/B_n) \right| \leq \exp(-0{,}5t^2/N),$$

falls $|t| \leq T$ und $R \leq \varrho^3$ ist. (12) folgt nun aus

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}\frac{w_n(t)}{t}\right| &= \left|\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\sum_{r=1}^{n}\prod_{p=1}^{r-1}\prod_{q=r+1}^{n} v_p\varphi_q(v_r - \varphi_r)\right| \\ &\leq |t|^{-1}\sum_{r=1}^{n}\left|\prod_{p=1}^{r-1}\prod_{q=r+1}^{n} v_p\varphi_q\right| |v_r' - \varphi_r'| + t^{-2}|w_n(t)| \\ &+ |t|^{-1}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{r-1}\left|\prod_{\substack{p=1\\p\neq j}}^{r-1}\prod_{q=r+1}^{n} v_p\varphi_q\right| |v_j'|\,|v_r - \varphi_r|\right. \\ &\left. + \sum_{j=r+1}^{n}\left|\prod_{p=1}^{r-1}\prod_{\substack{q=r+1\\q\neq j}}^{n} v_p\varphi_q\right| |\varphi_j'|\,|v_r - \varphi_r|\right\}.\end{aligned}$$

Das Argument t/B_n wurde zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen. Es ist noch anzumerken, daß entsprechend den Bedingungen (22), (23) der Arbeit [5] hier ausgenutzt wurde, daß

$$1/T \leq a_1\varrho^3 \leq \sqrt{0{,}5}\,\min\left\{0{,}5\,a_2/a_1,\ \sqrt{1 - \frac{1}{M} - \frac{1}{\sqrt{2}\,a_1}},\ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{\sqrt{2}\,a_1}\right)}\right\}.$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Zum Beweis von Lemma 3: Es wird folgendes bestimmte Integral ausgenutzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^r \exp(-t^2/s)\,dt = c_r s^{(r+1)/2},\ c_r = \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right),\ r = 0, 1, \ldots, 10,\ s \in \{L, M, N\}.$$

Wir haben nun

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &\leq \Gamma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2(|t|/6 + t^2\varrho/8)^2 \exp(-t^2/M)\,dt \\ &+ 2\Gamma B\int_{-\infty}^{\infty} t^2(|t|/6 + t^2\varrho/8)(1 + t^2\varrho^2/4)\exp(-t^2/M)\,dt \\ &+ B^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2(1 + t^2\varrho^2/4)^2\exp(-t^2/M)\,dt \\ &\leq M^{3/2}\left\{\sqrt{\frac{c_4}{36} + \frac{c_5}{24}\gamma_M + \frac{c_6}{64}\gamma_M^2}\,\sqrt{M}\,\Gamma + \sqrt{c_2 + \frac{c_4}{2}\gamma_M^2 + \frac{c_6}{16}\gamma_M^4}\,B\right\}^2,\end{aligned}$$

wo K < 72 angegeben ist und der Hinweis auf die mögliche Abschätzung mit K < 36 gegeben wird. Aus (4.4) erhält man sofort die L_p-Version bekannter Abschätzungen in der L_∞-Metrik (sup-Norm), so wie sie z.B. in PETROV(1975,1987), Kapitel V (Ungleichungen von KATZ-PETROV, Ungleichung von OSIPOV, Ungleichungen (0.1) bis (0.3)), angegeben sind, dabei jetzt mit einer Konstantenabschätzung.
Der Fall p = 2 ist bereits bei STUDNEV(1961) zu finden (ohne Konstantenabschätzung). Für beliebige p haben STUDNEV|IGNAT(1967) die Ungleichung (4.4) als qualitatives Resultat formuliert. Zur weiteren Information wird der Sonderdruck |179| eingefügt.

wobei die letzte Ungleichung sofort durch numerisches Nachrechnen überprüft werden kann. Damit ist (13) bewiesen.
In gleicher Weise ergibt sich durch präzises Nachrechnen die Ungleichung (14), unter Berücksichtigung von $L \leqq N \leqq 4$.
Auf diese umfangreiche Rechnung wird jedoch an dieser Stelle verzichtet.
Folgerung 1 erhalten wir mittels der bekannten Abschätzung $\delta_{np}{}^p \leqq \delta_{n1}\,\delta_{n\infty}{}^{p-1}$, vgl. [4], S. 179.

4. Zusammenfassung

Es werden eine im Zusammenhang mit dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie untersuchte globale Fehlerabschätzung (5) in der L_p-Metrik, $1 \leqq p \leqq \infty$, betrachtet und die dabei auftretende absolute Konstante $LM^{1/p}$ abgeschätzt.
Beim Vergleich mit bekannten Resultaten wird über die Optimalität der verwendeten Momentencharakteristik R, vgl. (7), diskutiert, die den Voraussetzungen (1) und (2) angepaßt ist.

Literatur

[1] *Ahmad, I. A.:* On some L_p bounds of convergence rates in the central limit theorem. The Fourteenth Annual Conference in Statistics, Computer Science, Operation Research & Mathematics. vol. 2, p. 1—8. — Cairo, University Press 1979.
[2] *Erickson, R. V.:* On an L_p version of the Berry-Esseen theorem for independent and m-dependent variables. — In: Ann. Prob. 1 (1973) 3. — p. 497—503
[3] *Feller, W.:* On the Berry-Esseen theorem. — In: Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 10 (1968) 3. — p. 261—268
[4] *Ибрагимов, И. А.; Линник, Ю. В.:* Независимые и стационарно связанные величины. Москва, 1965
[5] *Paditz, L.:* Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — In: WZ Hochsch. Verkehrsw. — Dresden 27 (1980) 4. — S. 829—837
[6] *Paditz, L.:* Einseitige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz. — In: Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. statistics. — 12 (1981) 4. — S. 587—604
[7] *Paditz, L.:* On Error-Estimates in the Central Limit Theorem for Generalized Linear Discounting. — In: Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. statistics. — 15 (1984) 4. — p. 601—610
[8] *Петров, В. В.:* Суммы независимых случайных величин. Москва, 1972
[9] *Студнев, Ю. П.:* О скорости в среднем к нормальному закону. Доклч и сообщ. Ужг. ун-та, Сер. физ.-мат. наук № 4, 1961, с. 96—97
[10] *Студнев, Ю. П.; Игнат, Ю. И.:* Об уточнении центральной предельной теоремы и ее глобального варианта. Теория вероятн. и ее примен. 12 (1967) 3, с. 562—566
[11] *Bhattacharya, R. N.; Rao, R. R.:* Normal Approximation and Asymptotic Expansions. — Wiley — New York, 1976
[12] *Maejima, M.:* Some L_p versions for the central limit theorem. — In: Ann. Prob. — 6 (1978) 2. — p. 341—344

Eingegangen am 5. Januar 1985

Verfasser: Dr. rer. nat. *Ludwig Paditz*, Sektion Mathematik, Rechentechnik und Naturwissenschaften, Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List" Dresden

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß sich die hier formulierten Ergebnisse auch problemlos für den Fall der Summation im Serienschema oder der gewichteten Summation angeben lassen. Jedoch wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

4.1.2 Ungleichmäßige Abschätzung

Wir bleiben auch in diesem Abschnitt beim klassischen Summationsschema für unabhängige Zufallsgrößen und untersuchen die Ungleichung (0.7). Wichtige Überlegungen dazu gibt es bereits im Abschnitt 2.2 mit der Gleichung (2.6), den Ungleichungen (2.14), (2.16) und (2.40), vgl. auch (2.39) und Satz 2.5. Damit haben wir im Fall p=1 und unter der wichtigen Voraussetzung (2.20) und unter Beachtung der Gleichung (2.43) bereits folgendes Hilfsresultat abgeleitet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \;\leq\; L \circ L_{2+\delta,n}\,, \tag{4.5}$$

wobei $L = L(\delta)$ eine absolute Konstante ist, die nur von δ und den fest zu wählenden Parametern a, K und β anhängt.

Die Ungleichung (2.44) gibt im Fall $\delta=1$ einen konkreten L-Wert an. Die linke Ungleichung in (2.20) beinhaltet folgende Kleinheitsforderung an $L_{2+\delta,n}$, vgl. (2.23) mit $x = K$,

$$L_{2+\delta,n} \;\leq\; \frac{1}{a} K^{2+\delta} \exp(-\frac{1}{2\beta} K^2),$$

d.h. wir benötigen noch eine Abschätzung der Art (4.5) ohne diese Kleinheitsforderung. Sei deshalb ab sofort

$$L_{2+\delta,n} \;>\; \frac{1}{a} K^{2+\delta} \exp(-\frac{1}{2\beta} K^2). \tag{4.6}$$

Satz 4.4. Unter der Voraussetzung (4.6) mit $a>0$ und $K>0$, sowie $\beta>1$, gilt für alle $\delta \varepsilon (0,1]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \;\leq\; M \cdot L_{2+\delta,n} \tag{4.7}$$

mit $M=M(\delta)= \frac{1}{2+\delta}((1+\delta)2^{\delta/2}+D_\delta)aK^{-(2+\delta)}\exp(\frac{K^2}{2\beta})+(2+\frac{\delta}{2})^{2+\delta})$ und

$$D_\delta = 2e((2+\frac{\delta}{2})e)^{1+\delta/2}\,.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigt man folgende Hilfsaussage:

Lemma 4.5. Für $\delta \varepsilon (0,1]$ gilt die Abschätzung

$$E \,\Big|\, B_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \,\Big|^{2+\delta} \;\leq\; D_\delta + (2+\frac{\delta}{2})^{2+\delta} L_{2+\delta,n}\,, \tag{4.8}$$

wobei D_δ die in Satz 4.4 angegebene Konstante ist.

Der Beweis dieses Lemmas ist z.B. bei S. NAGAEV(1979), S.784, oder in

S. NAGAEV|PINELIS(1977), S. 258, zu finden, indem man dort $t = 2+\delta$ und $c = 2+0.5\delta$ wählt. Die Einschränkung $\delta \leq 1$ ist in Lemma 4.5 nicht notwendig und wurde nur von Satz 4.4 übernommen. In Lemma 4.5 gilt $D_\delta < 96,4$. Zum Beweis des Satzes 4.4 schreiben wir nun entsprechend S. NAGAEV|ČEBOTAREV(1978), S. NAGAEV(1979) oder ČEBOTAREV(1979)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{2+\delta} E\left|B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^{2+\delta} + 2\int_0^{\infty} x^{1+\delta}(1-\Phi(x))\,dx \leq$$

$$\frac{1}{2+\delta} D_\delta + \frac{1}{2+\delta}\left(2+\frac{\delta}{2}\right)^{2+\delta} L_{2+\delta,n} + \frac{1}{2+\delta}(2\pi)^{-0.5}\, 2^{(3+\delta)/2}\,\Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right).$$

Mit der Bedingung (4.6) folgt hieraus die Abschätzung (4.7) mit der dort angegebenen Konstanten. ∎

Wir kommen im Fall $\delta=1$ wieder zu dem bereits in Kapitel 2 betrachteten Zahlenbeispiel mit $a = 17,5604$, $\beta = 1,12918$ und $K = 2,01322$ zurück und erhalten ebenfalls den in (2.44) angegebenen Zahlenwert

$$M \leq 433,178. \qquad (4.9)$$

Aus (4.5) und (4.7) erhält man für eine beliebige Größenordnung von $L_{2+\delta,n}$ die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} |D_n(x)|\,dx \leq \min_{a,K,\beta} \max(L(\delta,a,K,\beta), M(\delta,a,K,\beta))\, L_{2+\delta,n}. \qquad (4.10)$$

Im Fall $\delta<1$ wurden bisher keine numerischen Untersuchungen zur günstigen Wahl der Parameter a, K und β in (4.10) durchgeführt.

Aus (4.10) und (4.1) erhält man nun wegen der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} E\min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right) \leq L_{2+\delta,n} \qquad (4.11)$$

die Abschätzung der Größe (0.17) für $p=1$ (L_1 – Metrik). Im Fall $p=\infty$ haben wir die Abschätzung (0.5) und können so mittels (0.23) die in der Einleitung erwähnte Ungleichung (0.7) ableiten.

Für $\delta=1$ ergibt sich mit den errechneten Zahlenwerten

$$C(p,\delta) \leq 2^{2-1/p}(33.4 + 433.178)^{1/p}\, 31.935^{1-1/p} < 127.74 \cdot 7.31^{1/p}.$$

4.2 Martingaldifferenzen

In diesem Abschnitt wird wieder die gewichtete Summation entsprechend dem Abschnitt 3.2.1 untersucht. Die Zielstellung des Abschnitts 4.2 besteht in der Übertragung der Fehlerabschätzung (3.20) auf den Fall der L_p – Metrik mit $p \geq 1$. Das Ergebnis wurde bereits in |189| angegeben und wird hier noch einmal zitiert:

Satz 4.5. Für eine Martingaldifferenzfolge (X_k), $k \in N_o$, mit den Eigenschaften (1.43) bis (1.46), wobei $(\alpha_k(v))$, $k \in N_o$, $v \in (0,1)$, eine geeignete Folge von Gewichtsfunktionen ist, gilt die Abschätzung

$$\Delta_{vp} \leq L\,(K/L)^{1/p}(M\rho_v)^{(5p-1)/(10p)} \quad , \quad p \geq 1, \tag{4.12}$$

wobei $L < 1{,}0578$ und $K < 14{,}072$ ist (Δ_{vp} vgl. (0.9)).

Der Beweis wird über die Ungleichung (0.22) geführt. Es wird dabei die Abschätzung (3.20) ausgenutzt. Somit ist nur noch eine Abschätzung in der L_1 - Metrik bereitzustellen. Dazu wird die Ungleichung (0.19) verwendet, wobei der Satz 1.15 zum Einsatz gelangt.
Vorher wird jedoch eine zu Lemma 4.2 analoge Aussage formuliert, um entsprechend (4.3) eine obere Schranke für die benutzte Charakteristik $(M\rho_v)^{2/5}$ zu bekommen.

Lemma 4.6. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 gilt

$$\Delta_{v1} \leq K_o^{0.5}\,(M\rho_v)^{0.25} \tag{4.13}$$

mit $K_o = 8L(1+2\gamma) \leq 10{,}17567$,

wobei γ die in (4.2) eingeführte Konstante ist.

Der Beweis verläuft entsprechend Lemma 4.2, vgl. |179|, mit dem Unterschied, daß jetzt (3.20) mit $L < 1{,}0578$ ausgenutzt wird. ■
Wegen Lemma 4.6 ist Satz 4.5 nur noch im Fall

$$K(M\rho_v)^{2/5} < K_o^{1/2}\,(M\rho_v)^{1/4} \quad , \text{d.h.}$$

$$(M\rho_v)^{2/5} < (K_o/K^2)^{4/3} = 1 = 0.019105 \tag{4.14}$$

zu beweisen (mit p=1).
Die Ungleichung (0.19) wird mit $T = T_v = \alpha(M\rho_v)^{-2/5}$, $\alpha=3$, verwendet, wobei wegen (4.14) die Bedingung $T_v > \alpha/1$ ausgenutzt werden kann. Da der Satz 1.15 nur Abschätzungen ohne einen exponentiellen Faktor liefert (im Gegensatz zu entsprechenden Abschätzungen für unabhängige Zufallsgrößen), kommt (2.41) hier nicht zum Einsatz. Die Integrale in (0.19) werden sofort direkt ausgerechnet, vgl. |189|. Die optimale Wahl des Parameters α erfolgte wieder über ein geeignetes numerisches Verfahren. ■
Der erste globale Grenzwertsatz für Martingaldifferenzfolgen wurde von NAKATA(1976) bewiesen und zwar im Fall der klassischen Summation, d.h. (vgl. Abschnitt 3.1.5)

$$\alpha_k(v) = \begin{cases} 1, & k=1,2,\ldots,n_v , \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der zusätzlichen Forderung der Gleichheit der bedingten Varianzen in (1.44) ergibt sich dann aus (4.12) die Fehlerabschätzung

$$\Delta_{vp} \leq L\,(K/L)^{1/p}(Mn_v^{-1/2})^{(5p-1)/(10p)}\ , \ p \geq 1\ . \qquad (4.15)$$

Die in (4.15) angegebene Konvergenzgeschwindigkeit wurde bereits von NAKATA(1976) erhalten. Dabei ist bemerkenswert, daß er die Bedingung (1.44) nicht voraussetzte, sondern mit einer geeigneten Stoppzeit τ_n, vgl. Abschnitt 3.2.1, die Summation vornahm (jedoch ohne Abschätzung der Konstanten in der Fehlerschranke).
Im Fall der ABEL'schen Summation, d.h. $\alpha_k(v) = v^k$ für alle k, erhält man unter den Voraussetzungen zu (4.15) die Ungleichung

$$\Delta_{vp} \leq L\,(K/L)^{1/p}\,M^{(5p-1)/(10p)}\,(1-v^2)^{(5p-1)/(20p)}, \ p \geq 1\ .$$

Mit dieser Ungleichung hat man damit einen ersten globalen Grenzwertsatz für Martingaldifferenzfolgen im Fall der ABEL'schen Summation. Setzt man z.B. $v = v_n = 1 - n^{-\alpha}$, $\alpha>0$, dann erhält man aus dieser Ungleichung sofort die Konvergenzgeschwindigkeit

$$\Delta_{vp} = O(n^{-\alpha(5p-1)/(20p)}),\ n \to \infty\ . \qquad (4.16)$$

4.3 Stark multiplikative Systeme

Das Ergebnis dieses Abschnittes wurde gemeinsam mit ŠARACHMETOV erzielt vgl. |190|. Hier wird wie in Abschnitt 3.2.2 die Summation mit einer unendlichen Summationsmatrix (λ_{Nk}), $k\in N_0$, $N=1,2,\ldots$, betrachtet. Entsprechend dem vorangehenden Abschnitt wird nun die Ungleichung (3.21) auf den Fall der L_p – Metrik, $p \geq 1$, übertragen.

Satz 4.7. Es sei (X_k), $k\in N_0$, ein stark multiplikatives System, d.h. es sei (1.50) erfüllt. Weiterhin gelte die Beschränktheitsvoraussetzung (1.52). Mit (λ_{Nk}), $k\in N_0$, $N=1,2,\ldots$, als einer unendlichen Summationsmatrix sei die Bedingung (1.51) erfüllt. Dann gilt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |P(B_N^{-1}\sum_k \lambda_{Nk}X_k<x)-\Phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq L_8\left(\frac{K}{L_8}\right)^{\frac{1}{p}} M^{\frac{7p+9}{28p}}\,\lambda_N^{\frac{7p+1}{28p}}, \qquad (4.17)$$

$p \geq 1$, wobei $L_8 < 0{,}9182$ und $K < 11{,}45$ ist.

Der Beweis verläuft entsprechend dem Satz 4.5, also mittels der Ungleichungen (0.22) und (0.19) und einer zu Lemma 4.6 ähnlichen Aussage

Lemma 4.8. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.7 gilt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |P(B_N^{-1}\sum_k \lambda_{Nk}X_k<x)-\Phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_0^{0.5}\,(M\lambda_N)^{1/8} \qquad (4.18)$$

mit $K_0 = 8L_8(1+2\gamma) \leq 8{,}83277$,

wobei γ die in (4.2) eingeführte Konstante ist.

Der Beweis dieses Lemmas verläuft ebenfalls entsprechend Lemma 4.2, vgl. |179|, mit dem Unterschied, daß jetzt (3.21) mit $L_8 < 0{,}9182$ ausgenutzt wird. ∎

Entsprechend (4.14) ergibt sich hier die Schranke (für p=1)

$$(M^2\lambda_N)^{2/7} < (K_-^{-2}K_0)^{4/4.5} = \rho = 0{,}090919 \ . \qquad (4.19)$$

Zum Beweis von (4.17) wird die Ungleichung (0.19) mit $T=T_N= \alpha(M^2\lambda_N)^{-2/7}$, $\alpha=3{,}09$, verwendet, wobei wegen (4.19) die Bedingung $T_N > \alpha/\rho$ ausgenutzt werden kann. Damit ergibt sich die Möglichkeit der Anwendung von Satz 1.16 in der Glättungsungleichung (0.19). Auf die nun folgenden Auswertungen der Integrale in (0.19) wird hier nicht eingegangen, vgl. |190|. In der zuletzt genannten Arbeit wird auch das numerische Verfahren zur optimalen Wahl des Parameters α beschrieben. ∎

Abschließend sei festgestellt, daß die Ungleichung (4.17) ein erstes Resultat zur Fehlerabschätzung im globalen zentralen Grenzwertsatz bei stark multiplikativen Systemen darstellt. In der bisher vorliegenden Literatur wurden für diese Klasse von Zufallsgrößen noch keine Untersuchungen in der L_p – Metrik durchgeführt.

5. Abschätzungen im lokalen zentralen Grenzwertsatz für Dichten bei gewichteter Summation unabhängiger Zufallsgrößen

In diesem Kapitel wird wieder die gewichtete Summation betrachtet, so wie sie bereits in Abschnitt 0.3 eingeführt wurde.
Die Restgliedabschätzungen werden mittels abgeschnittener Momente angegeben. In Abschnitt 5.1 gehen abgeschnittene dritte Momente in die Fehlerschranke ein, so wie sie sinngemäß im Abschnitt 1.2.1 mit der Größe c_n definiert wurden. In Abschnitt 5.2 wird die Fehlerschranke mit abgeschnittenen vierten Momenten gebildet, vgl. $L_v(A)$ in Abschnitt 1.2.3 und die dort definierte Charakteristik Ψ_v. In Abschnitt 5.3 wird eine asymptotische Entwicklung untersucht.

5.1 Eine Fehlerschranke mit abgeschnittenen dritten Momenten

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden bereits in |187| publiziert und werden hier auf den folgenden Seiten als Sonderdruck wiedergegeben. Bei allen Aussagen spielt eine Voraussetzung eine Rolle, die der PETROV'schen Bedingung ähnlich ist, vgl. etwa Bedingung (P) in MACHT| WOLF(1987).

statistics 18 (1987) 3, 415–422

Об одной оценке остаточного члена в локальной предельной теореме для взвешенных сумм независимых случайных величин

Людвиг Падитц

Дрезденский институт инженеров транспорта и связи им. Фридриха Листа

Резюме. В настоящей работе исследуется поведение характеристической функции и плотности величины $Z_v = B_v^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v) X_k$, где $(X_k)_{k \in N_0}$ – последовательность независимых случайных величин и все $\alpha_k(v)$ – весовые факторы, зависящие от параметра $v \in (0, 1)$. Статья продолжает исследования автора [5, 8] и обобщает известные результаты, полученные для более специальных методов суммирования.

AMS 1980 *subject classifications*: Primary 60F05; secondary 60E10.

Key words: Central limit theorem, discounted sums of independent random variables, characteristic function, local limit theorem, error estimate.

1. Введение

Пусть $\{X_k\}$, $k \in N_0$, – последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями.

Пусть $\{\alpha_k(v)\}$, $k \in N_0$, $v \in (0, 1)$, – последовательность неотрицательных весовых факторов, зависящих от параметра v.

Пусть $\{A_k\}$, $k \in N_0$, – произвольные борелевские множества. Положим

$$V_k(x) = \mathsf{P}\,(X_k < x), \quad v_k(t) = \mathsf{E}\exp(itX_k), \quad \sigma_k^2 = \mathsf{E}X_k^2, \quad B_v^2 = \sum_{k \in N_0} \alpha_k^2(v)\,\sigma_k^2,$$

$$\beta_{vk}^2 = \int_{u \in \alpha_k^{-1}(v) A_k} u^2 \,\mathrm{d}V_k(u), \quad \gamma_{vk} = \int_{u \in \alpha_k^{-1}(v) A_k} |u|^3 \,\mathrm{d}V_k(u),$$

$$b_v^2 = \sum_{k \in N_0} \alpha_k^2(v)\,\beta_{vk}^2, \quad c_v = \sum_{k \in N_0} \alpha_k^3(v)\,\gamma_{vk}, \quad \Omega_v = B_v^{-2} b_v^2, \quad \Gamma_v = B_v^{-3} c_v,$$

$$F_v(xB_v) = \mathsf{P}\,\Big(\sum_{k \in N_0} \alpha_k(v)\,X_k < xB_v\Big), \; p_v(x) = F_v'(xB_v), \; f_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,\mathrm{d}F_v(xB_v),$$

$$\varphi(t) = \exp(-t^2/2).$$

Мы требуем, чтобы $0 < B_v^2 < \infty$ и $0 < c_v < \infty$.

В настоящей работе исследуется поведение характеристической функции величины $Z_v = B_v^{-1} \sum_{k \in N_0} \alpha_k(v)\,X_k$. Общая лемма посвящена исследованию структуры остаточного члена в оценке $|f_v(t) - \varphi(t)|$. С помощью этой леммы мы докажем локальную предельную теорему для плотностей.

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

2. Общая лемма (vgl. Satz 1.12 (ii))

Лемма. *Пусть* $\delta>0$ *такое, что* $\delta^3/6+\delta^2<2$. *Тогда при всех* $0<m<\sqrt{\frac{2}{3\delta}}$ *и при всех* $|t|\leqq T_v=\min\left\{\frac{\delta^2 m/6}{\Omega_v},\frac{\delta m^2}{\Gamma_v}\right\}$ *имеет место неравенство*

$$|f_v(t)-\varphi(t)|\leqq(C_1t^2\Omega_v+C_2|t|^3\Gamma_v)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right), \tag{1}$$

где постоянные C_1 *и* C_2 *лишь зависят от* δ.

Аналитическую структуру постоянных C_1 и C_2 можно найти в доказательстве леммы.

Следствие 1. *Пусть* $m=\sqrt{\frac{2}{9\delta}}$ *тогда при всех*

$$|t|\leqq T_v=\min\left\{\frac{1}{\Omega_v}\sqrt{2\delta^3}/18,\frac{1}{4.5\,\Gamma_v}\right\}$$

имеет место

$$|f_v(t)-\varphi(t)|\leqq(C_1t^2\Omega_v+C_2|t|^3\Gamma_v)\exp\left(-\frac{1}{3}t^2\right). \tag{2}$$

Следствие 2. *Пусть в следствии 1* $\delta=3\sqrt[3]{0.06}$, *тогда при всех*

$$|t|\leqq T_v=\min\left\{\frac{1}{10\Omega_v},\frac{1}{4.5\Gamma_v}\right\}$$

имеет место

$$|f_v(t)-\varphi(t)|\leqq(3.76t^2\Omega_v+1.05\,|t|^3\Gamma_v)\exp\left(-\frac{1}{3}t^2\right). \tag{3}$$

Если, кроме того, $b_v^2=0$ (*напр.* $A_k=R^1$, $k=1,2,\ldots,n$), *тогда при* $|t|\leqq\frac{1}{4.5L_v}$ *имеет место*

$$|f_v(t)-\varphi(t)|\leqq1.05\,L_v|t|^3\exp\left(-\frac{1}{3}t^2\right), \tag{4}$$

где $L_v=B_v^{-3}c_v$.

Оценки (1) – (4) являются обобщением нескольких известных оценок, см. напр. лемму 1, с. 137, в [9] или лемму 2 в [4]. Широкую дискуссию об оценках типа (1) в случае классического суммирования и существования третьих моментов можно найти в [6].

3. Локальные теоремы

С помощью неравенства (3) мы докажем локальные предельные теоремы для плотностей, которые со своей стороны обобщают оценки В. В. Петрова [9], Ю. П. Студнева [10], Б. Мередова [4] и В. Вольфа [11].

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{v\to 1-0} T_v = \infty \quad u \tag{5}$$

$$\int\limits_{|t|>T_v} \prod_{k\in N_0} \left| v_k\left(\frac{\alpha_k(v)t}{B_v}\right)\right| \mathrm{d}t \leqq C_0/T_v\,. \tag{6}$$

Тогда для всех достаточно близких к единице величин $v\in(0,1)$ существует всюду непрерывная плотность $p_v(x)$ и, кроме того,

$$\sup_{x\in R^1} \left| p_v(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right| \leqq \frac{5}{\pi}\,(3.8 + C_0)\,(\Omega_v + \Gamma_v)\,, \tag{7}$$

где $T_v = \min\left\{\frac{1}{10\Omega_v}, \frac{1}{4.5\Gamma_v}\right\}$ *и* C_0 *положительная абсолютная постоянная.*

Замечание. Сумма $\Omega_v + \Gamma_v$ достигает минимума, если выбираем $A_k = [-B_v, B_v]$, $k\in N_0$, см. [3, 7].

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{v\to 1-0} B_v^2 = \infty \quad u \quad B_v\,(\Omega_v + \Gamma_v) \leqq G < \infty\,, \tag{8}$$

где G — положительная постоянная. Пусть

$$\int\limits_{|t|>\frac{1}{10G}} \prod_{k\in N_0} |v_k(\alpha_k(v)\,t)|\,\mathrm{d}t \leqq \frac{10GC_0}{B_v^2}\,. \tag{9}$$

Тогде теорема 1 имеет место и, кроме того, в (7) получаем оценку $\frac{5}{\pi}\,(3.8 + C_0)\,G/B_v$.

Это предложение является очевидным следствием теоремы 1. Теорема 2 обобщает теорему 10 в [9], с. 249, теорему 2 в [4] и результат в [11]. Пусть $A_k = [-B_v, B_v]$, $k\in N_0$. Тогда

$$\Omega_v + \Gamma_v = B_v^{-1}\int_0^{B_v} L_v(u)\,\mathrm{d}u, \quad \text{где} \quad L_v(u) = B_v^{-2}\sum_{k\in N_0}\alpha_k^2(v) \int\limits_{|x|\geqq \alpha_k^{-1}(v)u} x^2\mathrm{d}\,V_k(x)\,.$$

Теорема 3. *Пусть* $B_v^{-1}\int_0^{B_v} L_v(u)\,\mathrm{d}u \to 0$, $v\to 1-0$, *и для всех* $\varepsilon>0$

$$\int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{k\in N_0} |v_k(\alpha_k(v)\,t)|\,\mathrm{d}t = 0\left(B_v^{-2}\int_0^{B_v} L_v(u)\,\mathrm{d}u\right), \quad v\to 1-0\,.$$

Тогда для всех достаточно близких к единице величин $v\in(0,1)$ существует всюду непрерывная плотность $p_v(x)$ и, кроме того,

$$\sup_{x\in R^1}\left| p_v(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right| = 0\left(B_v^{-1}\int_0^{B_v} L_v(u)\,\mathrm{d}u\right), \quad v\to 1-0\,.$$

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

121

Из теоремы 3 следует предложение в [10], если положим

$$\alpha_k(v)=\begin{cases}1, & 1\leqq k\leqq n,\\ 0, & k=0 \quad \text{или} \quad k>n\,,\end{cases} \qquad \text{где напр.} \quad n=n_v=\operatorname{entier}\left(\frac{1}{1-v}\right).$$

Это случай классического суммирования.

Теорема 4. *Пусть* $\liminf\limits_{v\to 1-0}(1-v)\,B_v^2>0$, $\limsup\limits_{v\to 1-0}(1-v)\,(B_v b_v^2+c_v)<\infty$ *и для всех* $\varepsilon>0$ $\int\limits_{|t|>\varepsilon}\prod\limits_{k\in N_0}|v_k(\alpha_k(v)\,t)|\,dt=0\left(\frac{\sqrt{1-v}}{B_v}\right)$, $v\to 1-0$. *Тогда для всех достаточно близких к единице значений* $v\in(0,1)$ *существует всюду непрерывная плотность* $p_v(x)$ *и, кроме того,*

$$\sup_{x\in R^1}\left|p_v(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right|=0\,(\sqrt{1-v}),\quad v\to 1-0\,.$$

Из теоремы 4 следует теорема 3 в [4], если выбираем $\alpha_k(v)=v^k$ (метод суммирования по Абелю). В этом случае имеем

$$B_v\sqrt{1-v}=0(1),\quad v\to 1-0\,.$$

Что же касается других примеров выбора весовых факторов $\{\alpha_k(v)\}$, см. [5], и примеров практического применения, см. напр. [2, 12, 13].

Надо заметить, что в [13] появляется ненормальный предельный закон.

4. Доказательство леммы

Введем еще следующие обозначения:

$$\varrho_v=B_v^{-4}\sum_{k\in N_0}\alpha_k^4(v)\,\sigma_k^4\,,\qquad T_v'=\min\left\{\frac{\delta}{\Gamma_v^{1/3}},\frac{\sqrt{\delta^3/6}}{\Omega_v^{1/2}},\frac{\delta m^2}{\Gamma_v}\right\},$$

$$d^2=\delta^3/6+\delta^2 \quad \text{и} \quad a(d)=d^{-4}\,(-\ln(1-d^2/2)-d^2/2)$$

(ср. [6] с. 211 или [1] теорема 8.4).

Рассмотрим сначала случай $|t|\leqq T_v'$ и оценим разность $|f_v(t)-\varphi(t)|$ как в работах [1, 3, 6, 7, 8]: Из оценок

$$\left|v_k\left(\frac{\alpha_k(v)\,t}{B_v}\right)-1\right|\leqq\frac{1}{2}\,t^2\left(\frac{\alpha_k^2(v)\,\beta_{vk}^2}{B_v^2}+\left(\frac{\alpha_k^3(v)\,\gamma_{vk}}{B_v^3}\right)^{2/3}\right)\leqq d^2/2<1\,,$$

$$\begin{aligned} r_v&=\left|\sum_{k\in N_0}\left(\log v_k\left(\frac{\alpha_k(v)\,t}{B_v}\right)+\frac{\alpha_k^2(v)\,\sigma_k^2t^2}{2B_v^2}\right)\right|\\ &\leqq\left|\sum_{k\in N_0}\left(v_k\left(\frac{\alpha_k(v)\,t}{B_v}\right)-1+\frac{\alpha_k^2(v)\,\sigma_k^2t^2}{2B_v^2}\right)\right|\\ &\quad+\left|\sum_{k\in N_0}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r}\left(1-v_k\left(\frac{\alpha_k(v)\,t}{B_v}\right)\right)^r\right|\\ &\leqq t^2\Omega_v+\frac{1}{6}\,|t|^3\,\Gamma_v+t^4\varrho_v a(d)\end{aligned}$$

и

$$t^4\varrho_v\leqq t^2\,(\Omega_v\delta^3/6+2\Omega_v\delta^2)+|t|^3\,\Gamma_v\delta$$

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

вытекает

$$r_v \leqq t^2 \Omega_v \left(1+(d^2+\delta^2)\, a(d)\right) + |t|^3 \Gamma_v \left(\frac{1}{6}+\delta a(d)\right)$$
$$\leqq \frac{1}{6}\delta^3 \left(1+(d^2+\delta^2)\, a(d)\right) + \frac{3}{4}|t|^3 \Gamma_v + |t|^3 \Gamma_v \left(\delta a(d) - \frac{7}{12}\right)$$
$$\leqq \frac{3}{4} t^2 \delta m^2 + \frac{1}{6}\delta^3 \left(1+(d^2+\delta^2)\, a(d)\right) + \delta^3 \left(\delta a(d) - \frac{7}{12}\right)^+ ,$$

где $x^+ = \begin{cases} x, & x>0\,, \\ 0, & x\leqq 0\,, \end{cases}$ и

$$|f_v(t)-\varphi(t)| \leqq (C_1' t^2 \Omega_v + C_2' |t|^3 \Gamma_v) \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right),$$

где

$$C_1' = C_1'(\delta) = \left(1+(d^2+\delta^2)\, a(d)\right) \exp\left(g(\delta)\right),$$
$$C_2' = C_2'(\delta) = \left(\frac{1}{6}+\delta a(d)\right) \exp\left(g(\delta)\right)$$

и

$$g(\delta) = \frac{1}{6}\delta^3 \left(1+(d^2+\delta^2)\, a(d)\right) + \delta^3 \left(\delta a(d) - \frac{7}{12}\right)^+ .$$

Теперь рассмотрим случай $T_v' < |t| \leqq T_v$, т.е. $\frac{\delta}{\Gamma^{1/3}} = T_v' < T_v$ или $\Omega_v^{-1/2}\sqrt{\delta^3/6} = T_v' < T_v$, поскольку противоположеное неравенство только упрощает оценки. Согласно [3] и [7] получаем

$$|f_v(t)| \leqq \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^2\Omega_v + \frac{1}{2}|t|^3 \Gamma_v\right).$$

В случае $\delta\Gamma_v^{-1/3} = T_v' < T_v$ имеем $\delta\Gamma_v^{-1/3} < \delta m^2/\Gamma_v$, т.е. $\Gamma_v < m^3$, и

$$\delta\Gamma_v^{-1/3} < \delta^2 m/(6\Omega_v), \quad \text{т.е.} \quad \Omega_v < \delta m^2/6\,.$$

В случае $\Omega_v^{-1/2}\sqrt{\delta^3/6} = T_v' < T_v$ тоже имеем $\Omega_v < \delta m^2/6$. Следовательно

$$|f_v(t)| \leqq \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right).$$

Дальше, если $\delta\Gamma_v^{-1/3} = T_v' < |t| \leqq T_v$, тогда

$$|\varphi(t)| = \exp\left(-t^2/2 + \frac{9}{2}|t|^3 \frac{m}{\delta}\Omega_v - \frac{9}{2}|t|^3\frac{m}{\delta}\Omega_v\right)$$
$$\leqq \exp\left(-\frac{3}{4}\delta^3 - \frac{t^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right),$$

так как $|t|^3\Omega_v \geqq \delta_4/(6m)$.
Следовательно в случае $T_v' < |t| \leqq T_v$ получаем

$$|f_v(t)-\varphi(t)| \leqq \left(1+\exp\left(-\frac{3}{4}\delta^3\right)\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right)$$
$$\leqq (C_1'' t^2\Omega_v + C_2''|t|^3\Gamma_v) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\delta m^2\right)\right).$$

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

123

где

$$C_1'' = C_1''(\delta) = 6\delta^{-3}\left(1 + \exp\left(-\frac{3}{4}\delta^2\right)\right), \quad C_2'' = C_2''(\delta) = \frac{1}{6} C_1''(\delta).$$

Теперь выбор $C_i(\delta) = \max(C_i'(\delta), C_i''(\delta))$, $i = 1, 2$, завершает доказательство леммы.

5. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что $f_v(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ для всех достаточно близких к единице величин $v \in (0, 1)$. Мы имеем (ср. [9])

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_v(t)|\, dt \leq \int_{|t| \leq T_v} |f_v(t) - \varphi(t)|\, dt + \int_{|t|>T_v} \exp(-t^2/2)\, dt + \sqrt{2\pi}$$
$$+ \int_{|t|>T_v} \prod_{k \in N_0} \left| v_k\left(\frac{\alpha_k(v)\, t}{B_v}\right)\right| dt = I_1 + I_2 + \sqrt{2\pi} + I_3 .$$

В силу условий теоремы 1 и следствия 2

$$I_1 \leq \frac{3}{2}\sqrt{3\pi} C_1 \Omega_v + 9 C_2 \Gamma_v \leq 18(\Omega_v + \Gamma_v), \quad I_2 \leq 2/T_v \leq 20(\Omega_v + \Gamma_v),$$
$$I_3 \leq C_0/T_v \leq 10 C_0 (\Omega_v + \Gamma_v).$$

Отсюда следует, что $f_v(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ и существует производная $p_v(x)$ для всех x и всех достаточно близких к единице значений v. Следовательно

$$\sup_{x \in R^1} \left| p_v(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{3} I_s \leq \frac{5}{\pi}(3.8 + C_0)(\Omega_v + \Gamma_v).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $T_v = \frac{1}{10}\min(\Omega_v^{-1}, \Gamma_v^{-1})$. Согласно доказательству теоремы 1 оценим I_s, $s = 1, 2, 3$. С помощью (8) и (9) получаем $I_1 \leq 18(\Omega_v + \Gamma_v) \leq 18G/B_v$, $I_2 = 20G/B_v$ и

$$I_3 = B_v \int_{|t|>(10B(\Omega_v+\Gamma_v))^{-1}} \prod_{k \in N_0} |v_k(\alpha_k(v)\, t)|\, dt \leq 10 G C_0/B_v, \quad \text{т.е.}$$
$$\sum_{s=1}^{3} I_s \leq 10G(3.8 + C_0)/B_v .$$

Доказательство теоремы 3. Из $B_v^{-1} \int_0^{B_v} L_v(u)\, du \to 0$ следует, что $\Omega_v \to 0$ и следовательно $\Gamma_v \to 0$, $v \to 1 - 0$, т.е. $T_v \to \infty$, $v \to 1 - 0$. Теперь из теоремы 1 вытекает утверждение теоремы 3.

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

118 – 124
124

Доказательство теоремы 4. Мы имеем в силу условий теоремы 4

$$(1-v)\, B_v^2 \geqq g_0 > 0 \quad \text{и} \quad (1-v)\,(B_v b_v^2 + c_v) \leqq G_0 < \infty \quad \text{для} \quad v = v_0, \quad \text{т.е.}$$

$$B_v\,(\Omega_v + \Gamma_v) \leqq G_0 B_v^{-2}/(1-v) \leqq G_0/g_0 \quad \text{и} \quad \Omega_v + \Gamma_v \leqq \sqrt{1-v}\, G_0 g_0^{-3/2}.$$

Следовательно согласно доказательствам теорем 1 и 2 получаем

$$I_1 \leqq 18 G_0 g_0^{-3/2} \sqrt{1-v}, \quad I_2 = 20 G_0 g_0^{-3/2} \sqrt{1-v} \quad \text{и} \quad I_3 \leqq C_0 \sqrt{1-v}.$$

Теорема 4 доказана.

Автор благодарен В. Вольфу и Б. Мередову за полезные замечания.

Литература

[1] Бхаттачария, Р. Н., Рао, Р. Р. (1982). *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*. Изд-во «Наука», Москва. Bhattacharya, R. N., Rao, R. R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*. Wiley, New York.

[2] Hill, F. S., Blanco, M. A. (1973). Random Geometric Series and Intersymbol Interference. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-**19**, No. 3, p. 326–335.

[3] Игнат, Ю. И., Падитц, Л. (1987). Уточнение некоторых оценок отклонения от нормального закона распределения суммы независимых случайных величин. сб. «*Теория вероятностей и математическая статистика*», № 37, Изд-во Киев. унив.

[4] Мередов, Б. (1979). Об одной оценке остаточного члена в локальной предельной теореме для плотностей. *Изв. АН Туркм. ССР. Сер. физ.-тех., хим, и геол. наук*, № 2, с. 3–8.

[5] Paditz, L. (1984). On Error-Estimates in the Central Limit Theorem for Generalized Linear Discounting. *Math. Operationsforsch. u. Statist., ser. statist.*, **15**, 601–610.

[6] Paditz, L. (1984). Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren. *Math. Nachr.*, **115**, 201–214.

[7] Paditz, L. (1986). Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. *Wiss. Zeitschr. der HfV „Friedrich List" Dresden*, **33**, Heft 2, 399–404.

[8] Падитц, Л. (1986). О предельных теоремах в схеме суммирования случайных величин с весами. *Math. Nachr.* **127**, 281–298.

[9] Петров, В. В. (1972). *Суммы независимых случайных величин*. Изд-во «Наука», Москва. Petrov, V. V. (1975). *Sums of Independent Random Variables*. Akademie-Verl., Berlin.

[10] Студнев, Ю. П. (1961). Несколько предельных теорем для плотностей. *Докл. и сообщ. ужг. ун-та., Сер. физ.-мат. наук*, № 4, с. 98–100.

[11] Wolf, W. (1985). Lokale Grenzwertsätze für gewichtete Summen. *Statistics* **16**, 243–247.

[12] Paditz, L. (1987). Ein statistisches Modell für die Genauigkeit der Informationsübertragung bei Intersymbolinterferenz. *15. Verkehrswissenschaftliche Tage an der HfV „Friedrich List" Dresden*, Tagungsberichte, H. 5, S. 47–48.

[13] Rice, S. O. (1973). Distribution of $\sum a_n/n$, a_n Randomly Equal to ± 1. *Bell System Techn. J.* **52**, 1097–1103.

Summary

In this paper the behaviour of the characteristic function and density of $Z_v = B_v^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v)\, X_k$ is studied, where $(X_k)_{k \in N_0}$ is a sequence of independent random variables and the $\alpha_k(v)$'s are discounting factors depending on a parameter $v \in (0, 1)$. The article is a continuation of the researchs carried through by the author [5, 8] and generalizes known results, obtained for more special methods of limitation.

Received December 1984; revised May 1986.

L. Paditz
Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List" Dresden,
Sektion Mathematik, Rechentechnik und Naturwissenschaften,
DDR - 8072 Dresden, PSF 103.

In MACHT|WOLF(1987) werden Fehlerschranken unter der Voraussetzung einer HÖLDER-Stetigkeitsbedingung (gleichmäßige HÖLDER-Stetigkeit, asymptotische HÖLDER-Stetigkeit, LIPSCHITZ-Stetigkeit) an die Dichten angegeben, allerdings in der O-Symbolik. Dort findet man auch weitere Literaturhinweise, insbesondere auch zur L_p – Version des lokalen

Grenzwertsatzes. Darauf wird an dieser Stelle nicht noch einmal eingegangen. Weitere Ergebnisse zur vorliegenden Problematik wurden von WOLF|SASVARI(1986) und SASVARI|WOLF(1987) publiziert. Diese beiden Arbeiten befassen sich ebenfalls mit der gewichteten Summation.
In MAEJIMA(1980) findet man eine ungleichmäßige Fehlerabschätzung im lokalen Grenzwertsatz.
Zur Information über weitere Fragestellungen im Zusammenhang mit dem lokalen Grenzwertsatz (Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen, m-Abhängigkeit) wird auf MACHT(1986) verwiesen.

5.2 Eine Fehlerschranke mit abgeschnittenen vierten Momenten

Es gilt folgende Aussage:

Satz 5.1. Es sei (X_k), $k\varepsilon N_0$, eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_k=0$ und $EX_k^2 < \infty$ für alle $k\varepsilon N_0$. Weiterhin sei $(\alpha_k(v))$, $k\varepsilon N_0$, $v\varepsilon(0,1)$, derart, daß neben $B_v^2\varepsilon(0,\infty)$ und $\psi_v < \infty$ die Limesbeziehung $\lim\limits_{v\to 1-0} \psi_v = 0$ und die spezielle PETROV'sche Bedingung

$$\int\limits_{|t|>(2\psi_v)^{-1/4}} \prod_{k\varepsilon N_0} |E\exp(itB_v^{-1}\alpha_k(v)X_k)|\, dt \leq M_0\psi_v$$

gelten mögen. Dabei ist $M_0>0$ eine absolute Konstante. Dann existiert für alle hinreichend nahe an 1 liegenden Werte $v\varepsilon(0,1)$ eine überall stetige Dichte $p_v(x)$ und außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$\delta_v \leq L\psi_v \quad \text{mit} \quad L = L(M_0) < \frac{1}{2\pi}(1231 + M_0). \qquad (5.1)$$

Die im Satz 5.1 auftretende Größe δ_v ist in (0.10) definiert. Zur Definition von $p_v(x)$ siehe ebenfalls Abschnitt 0.3)
Das vorliegende Ergebnis (5.1) wurde im Fall der ABEL'schen Summation von MEREDOV(1979) erhalten, jedoch ohne Konstantenabschätzung.
Der Beweis dieses Satzes ist in |181| zu finden und wird mittels der Ungleichung (0.21) sowie Satz 1.14 (mit s=0) geführt. Die Integrationsgrenze T ist dabei gleich $(2\psi_v)^{-1/4}$.
Abschließend sei bemerkt, daß $\rho_v \leq 2\psi_v$ gilt, wobei ρ_v ebenfalls eine in Abschnitt 1.2.3 eingeführte Momentencharakteristik darstellt.

5.3 Eine asymptotische Entwicklung

Satz 5.2. Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt, wobei jedoch in der dort gestellten PETROV'schen Bedingung die Schranke $M_0\rho_v$ stehen möge. Dann gilt für die in (0.13) eingeführte Größe folgende Fehlerabschätzung

$$\sup_x |p_v(x) - \varphi(x) - \delta_v'(-\varphi)(x)| \leq L\cdot(\rho_v + \gamma_v^2) \tag{5.2}$$

mit $L = L(M_0) < \max(1736,\ 61 + M_0/(2\pi))$.

Der Beweis dieses Satzes ist ebenfalls in |181| zu finden und verläuft auch über eine Glättungsungleichung des Typs (0.21) und unter Ausnutzung von Satz 1.14.
Wegen der Relation $\rho_v \leq 2\gamma_v$ ist auch in (5.2) offensichtlich, daß die dort angegebene Fehlerschranke unter den Voraussetzungen des Satzes gegen Null strebt (für $v \to 1-0$). Die gleiche Bemerkung gilt auch für Folgerung 3.15.

6. Anwendungen

6.1 Anwendung einer globalen Abschätzung bei der Normalapproximation von Zufallselementen im Raum l_2

Es sei $X_k = (X_{k1}, X_{k2}, \dots) = (X_{kj})_{j=1,2,\dots,\infty}$, $k=1,2,\dots,n$, eine Folge unabhängiger Zufallselemente mit Werten x_k im Raum l_2, d.h.

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{kj}^2 = \| x_k \|^2 < \infty, \quad k=1,2,\dots,n .$$

Zur Vereinfachung betrachten wir hier identisch verteilte Zufallselemente mit den Eigenschaften

$$EX_1 = 0, \quad E\|X_1\|^2 = 1 \quad \text{und} \quad E\|X_1\|^3 < \infty . \tag{6.1}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen $EX_{1j}^2 = \alpha_j^2$ und $E|X_{1j}|^3 = \beta_j$.
Es sei nun $Z = (Z_1, Z_2, \dots) = (Z_j)_{j=1,2,\dots,\infty}$ ein gaußsches Zufallselement im l_2 mit $EZ = 0$ und $EZ_j^2 = \alpha_j^2$ für alle j, wobei noch zusätzlich (um brauchbare Fehlerabschätzungen zu erhalten) die Unabhängigkeit der Koordinaten sowohl von Z als auch von X_k, $k=1,2,\dots,n$, vorausgesetzt wird. O.B.d.A. gelte nun $\alpha_j \geq \alpha_{j+1}$ für alle j.
An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Kovarinazoperatoren von X_k und Z übereinstimmen. Die Bedingung (6.1) wird nun ergänzt durch

$$\min_{1\le j\le 4} \alpha_j \geqq \text{const.} > 0. \tag{6.2}$$

Wir bezeichnen mit S_n die normierte Summe $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} X_k$ und mit S_{nj} die j-te Koordinate von S_n: $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} X_{kj}$. Schließlich sei

$$d_n = \sup_x |P(\|S_n\|<x) - P(\|Z\|<x)| .$$

In der Summationstheorie l_2 – wertiger Zufallselemente wird die Normalapproximation im Sinne einer Abschätzung des Abstandes, der soeben eingeführten Größe d_n, untersucht, vgl. z.B. S.NAGAEV|ČEBOTAREV(1978) oder ČEBOTAREV(1979). Es sei weiterhin

$$d_n^{(m)} = \sup_x |P(\sum_{j=1}^{m} S_{nj}^2 < x) - P(\sum_{j=1}^{m} Z_j^2 < x)| ,$$

$d_n = d_n^{(\infty)}$. Bei S.NAGAEV|ČEBOTAREV(1978) findet man folgende Aussage

<u>Satz 6.1.</u> Es sei X_k, $k=1,2,\dots,n$, eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallselemente mit Werten im Raum l_2 . Die Koordinaten von X_k mögen unabhängig sein und es gelten die Bedingungen (6.1) und (6.2). Dann ist mit dem oben eingeführten gaußschen Zufallselement Z folgende Fehlerabschätzung richtig:

$$d_n \leq C\, n^{-1/2} \left(\prod_{j=1}^{4} \alpha_j\right)^{-3/4} \sum_{j=5}^{\infty} \beta_j + d_n^{(4)} , \tag{6.3}$$

wobei C eine absolute Konstante ist.

Es sei bemerkt, daß die Ungleichung (6.3) auch im endlichdimensionalen Fall brauchbare und zum Teil neue Fehlerschranken liefert und z.B. Formel (3.19) bei VAKHANIA(1981) präzisiert wird:

<u>Folgerung 6.2.</u> Es sei X_k, $k=1,2,\dots,n$, eine Folge unabhängiger, identisch verteilter r-dimensionaler Zufallsvektoren mit unabhängigen Koordinaten, wobei die Bedingungen (6.1) und o.B.d.A. $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_r > 0$ gelten mögen. Dann erhält man mit der absoluten Konstanten C aus Satz 6.1 die Ungleichungskette

$$d_n = d_n^{(r)} \leqq$$

$$C n^{-1/2}\, 1\{r\geq 5\} \left(\prod_{j=1}^{4} \alpha_j\right)^{-3/4} \sum_{j=5}^{r} \beta_j + 2\cdot 0{,}7655\, n^{-1/2} \sum_{j=1}^{\min(r,4)} \alpha_j^{-3}\beta_j \leqq$$

$$C\, n^{-1/2} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{-3}\beta_i .$$

<u>Zum Beweis der Folgerung 6.2:</u> Die Unabhängigkeit der Koordinaten und der Zufallselemente (Zufallsvektoren) gestattet die Umformung (mit $m = \min(r,4)$):

$$d_n^{(m)} \leq 2 \sup_x \sum_{j=1}^{m} |P(S_{nj}<x) - P(Z_j<x)| \leq 2\cdot 0{,}7655 \sum_{j=1}^{m} n^{-1/2}\alpha_j^{-3}\beta_j ,$$

wobei zuletzt die Ungleichung von BERRY-ESSEEN, vgl. (0.1), angewendet wurde. Wegen der Monotonie der Folge (α_j), $j=1,2,\ldots,r$, folgt sofort die zweite Abschätzung in Folgerung 6.2:

$$\Big(\prod_{j=1}^{4} \alpha_j\Big)^{-3/4} \leq \alpha_4^{-3} \leq \alpha_i^{-3} \quad \text{für alle } i \geq 5 . \blacksquare$$

Der wesentliche Beweisgedanke zu Satz 6.1 besteht im Übergang zu den eindimensionalen Größen S_{nj} und der Abschätzung eines "Pseudomoments" für S_{nj}:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |P(S_{nj} < \alpha_j x) - \Phi(x)| \, dx . \tag{6.4}$$

Auf Grund der Ungleichung (4.10) ergibt sich für (6.4) sofort die obere Schranke (mit $\delta=1$):

$$\min_{a,K,\beta} \max(L, M)\, L_{2+\delta,n} \leq C_1\, n^{-1/2}\, \alpha_j^{-3}\, \beta_j \tag{6.5}$$

mit $C_1 = 433{,}178$.

Mit Hilfe der Abschätzung (6.5) wird es möglich, die Konstante C in (6.3) numerisch abzuschätzen:

$$C \leq 2\, C_1 = 866{,}356 . \tag{6.6}$$

In der folgenden Beweisskizze soll noch einmal aufgezeigt werden, wie bei der Abschätzung von d_n, vgl. linke Seite in (6.3), die Größe (6.4) entsteht und sich dabei die Konstantenabschätzung (6.6) ergibt.

Sei $F_{nj}(x) = P(S_{nj}^2<x)$ und $G_j(x) = P(Z_j^2 <x)$. Dann ist wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten

$$d_n = \sup_x \Big|\Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} F_{nj}\Big)(x) - \Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} G_j\Big)(x)\Big| \leq$$

$$\sup_x \Big|\Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{m} F_{nj} - \mathop{\ast}_{j=1}^{m} G_j\Big) \ast \mathop{\ast}_{j=m+1}^{\infty} F_{nj}(x)\Big| + \sup_x \Big|\Big(\mathop{\ast}_{j=m+1}^{\infty} F_{nj} - \mathop{\ast}_{j=m+1}^{\infty} G_j\Big) \ast \mathop{\ast}_{j=1}^{m} G_j(x)\Big|$$

$$\leq d_n^{(m)} + D_n^{(m)} ,$$

wobei

$$D_n^{(m)} = \sup_x \Big|\mathop{\ast}_{j=1}^{m} G_j \ast \Big(\mathop{\ast}_{j=m+1}^{\infty} F_{nj} - \mathop{\ast}_{j=m+1}^{\infty} G_j\Big)(x)\Big|$$

ist. Mit f_{nj} und g_j werden nun die charakteristischen Funktionen zu F_{nj} bzw. G_j bezeichnet. Dann liefert die Umkehrformel

$$D_n^{(m)} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} \; |\prod_{j=1}^{m} g_j(t)| \; | \prod_{j=m+1}^{\infty} f_{nj}(t) - \prod_{j=m+1}^{\infty} g_j(t)| \; dt. \quad (6.7)$$

Die Differenz im Integranden wird abgeschätzt durch $\sum_{j=m+1}^{\infty} |f_{nj} - g_j|$, wobei das Argument t zur Vereinfachung weggelassen wurde. Nun ergibt sich mit partieller Integration

$$|f_{nj}(t) - g_j(t)| = | \int_{0\,(-\infty)}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) d(F_{nj}(x) - G_j(x)) \; | =$$

$$| \; t \int_{0}^{\infty} (e^{itx} - 1)(F_{nj}(x) - G_j(x)) dx \; | \; =$$

$$| \; t \int_{0}^{\infty} (e^{ity^2} - 1)(P(|S_{nj}|<y) - P(|Z_j|<y)) \; dy^2 \; | \; ,$$

wobei zuletzt $x = y^2$ substituiert wurde. Hieraus erhält man

$$|f_{nj}(t) - g_j(t)| \leq 2|t| \int_{-\infty}^{\infty} |y(e^{ity^2} - 1)(P(S_{nj}<y) - P(Z_j<y))| \; dy \; \leq$$

$$4|t|^{1.5} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 |P(S_{nj}<y) - P(Z_j<y)| \; dy \; =$$

$$4|t|^{1.5} \alpha_j^3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |P(S_{nj}<\alpha_j x) - \Phi(x)| \; dx \; , \quad (6.8)$$

zuletzt wurde $y = \alpha_j x$ substituiert und vorher kamen die Ungleichungen

$$|e^{is} - 1| \leq \begin{cases} |s|, & \text{für } |s| \leq 1, \\ 2 \;, & \text{für } |s|>1, \end{cases} \quad (s \text{ reell}), \text{ und } \; |s| \leq |s|^{1/2} \text{ für } |s| \leq 1$$

zur Anwendung. Die Fehlerschranke (6.8) wird in (6.7) ausgenutzt, wobei vorher das Integrationsgebiet zerlegt wird:

$$D_n^{(m)} \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq T_n} \ldots \, dt \; + \; \frac{1}{\pi} \int_{|t|>T_n} \ldots \, dt \; =: I_1 + I_2 \; .$$

I_1 wird weiter abgeschätzt mittels der Schranke (6.5) für das in (6.8) auftretende Pseudomoment (6.4):

$$I_1 \leq \frac{4}{\pi} C_1 \, n^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j \int_{|t| \leq T_n} |t|^{1/2} \; |\prod_{j=1}^{m} g_j(t)| \; dt \; .$$

Andererseits erhält man für I_2 mit $T_n = \gamma n^{1/3} (\sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j)^{-2/3}$, $\gamma > 0$,

$$I_2 \leq \frac{2}{\pi} T_n^{-3/2} \int_{|t|>T_n} |t|^{1/2} \; |\prod_{j=1}^{m} g_j(t)| \; dt \; .$$

In der letzten Ungleichung wurde die Differenz der charakteristischen Funktionen in (6.7) einfach mit 2 abgeschätzt. Es ergibt sich

$$D_n^{(m)} \leq \max\left(\frac{4}{\pi} C_1, \frac{2}{\pi} \gamma^{-3/2}\right) 2n^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{\infty} \beta_j \int_0^{\infty} |t|^{1/2} \left|\prod_{j=1}^{m} g_j(t)\right| dt .$$

Nun wird γ als Lösung der Gleichung $\frac{4}{\pi} C_1 = \frac{2}{\pi} \gamma^{-3/2}$ gewählt.

Unter Ausnutzung folgender Darstellung für $|g_j(t)|$:

$$|g_j(t)| = (1 + 4\, \alpha_j^4\, t^2)^{-1/4}$$

wird schließlich im Fall m=4 eine Abschätzung des noch verbliebenen Integrals durch die CAUCHY'sche Ungleichung vorgenommen. Man erhält

$$\int_0^{\infty} |t|^{1/2} \left|\prod_{j=1}^{4} g_j(t)\right| dt \leq \left(\prod_{j=1}^{4} \int_0^{\infty} |t|^{1/2} (1 + 4\alpha_j^4 t^2)^{-1} dt\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{4}\left(\prod_{j=1}^{4} \alpha_j^{3/4}\right)^{-1} .$$

Damit ist Satz 6.1 mit der in (6.6) angegebenen Konstantenabschätzung bewiesen. ■

Aus der Beweisskizze ist zu erkennen, daß der Hauptteil des Beweises im Nachweis einer Abschätzung für (6.4) mittels (6.5) besteht.

Satz 6.1 bleibt auch im Fall nicht notwendig identisch verteilter Zufallselemente im Raum l_2 richtig, vgl. ČEBOTAREV(1979). Ebenfalls bei ČEBOTAREV(1979) findet man eine zu Satz 6.1 entsprechende Aussage für die Normalapproximation von Summen unabhängiger Zufallselemente im Raum l_p, $2<p<\infty$, jedoch ohne Konstantenabschätzung. In diesem Fall spielt die Abschätzung einer zu (6.4) analogen Größe mit $|x|^p$ anstatt x^2 im Integranden eine zentrale Rolle. Die Schranke (6.5) enthält dann neben dem LJAPUNOV-Bruch $L_{3,n}$ noch einen additiven Term mit dem LJAPUNOV-Bruch $L_{p+1,n}$, vgl. ČEBOTAREV(1979) oder RYCHLIK(1983). Konstantenabschätzungen wurden im Fall p>2 noch nicht durchgeführt. Sie können aber mit der im Kapitel 2 vorgeschlagenen Beweistechnik realisiert werden.

Wird auf die hier stets vorausgesetzte Unabhängigkeit der Koordinaten der Zufallselemente im HILBERT-Raum verzichtet, versagt die vorgestellte Beweistechnik. Wesentliche Gedanken hierzu entwickelten u.a. GÖTZE und darauf aufbauende Autoren, vgl. Schwerpunkt 1) in Abschnitt 0.2.

Abschließend sei bemerkt, daß die Frage nach der asymptotischen Verteilung der Norm einer Summe von Zufallselementen im Raum l_2 speziell auch beim Studium linearer Gleichungssysteme mit zufälligen Koeffizienten auftritt, vgl. z.B. RICHTER(1979).

6.2 Anwendung der Summationstheorie (gewichtete Summation) in der Nachrichtentechnik

In digitalen Übertragungssystemen mit Amplitudenmodulation werden die Effekte der Nachbarimpulsstörungen (Intersymbolinterferenz) durch ein stochastisches Modell beschrieben, das auf der gewichteten Summation unabhängiger Zufallsgrößen beruht. Unter gewissen Voraussetzungen kann der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgenutzt werden. Damit können die im Übertragungssystem auftretenden Fehlerwahrscheinlichkeiten durch die Gauß-Verteilung approximiert werden, vgl. |186|.

Entsprechend der in der nachrichtentechnischen Literatur üblichen Betrachtungsweise, vgl. z.B. LUCKY|SALZ|WELDON(1968) oder PROAKIS(1983), unterteilt sich ein Übertragungssystem in den Sender, den Übertragungskanal und den Empfänger. Im Bereich des Senders erfolge eine Anpassung des Eingangssignals an den Kanal in der Form

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(t - kT),$$

wobei $s_k(t - kT)$ ein digitales Signalelement darstellt, d.h.

$$s_k(t - kT) = \begin{cases} a_k, & t \in [kT, (k+1)T), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Antwort am Ausgang des Kanals wird beschrieben durch

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t - kT) .$$

Dabei ergibt sich der Empfangsimpuls $w_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(u-x)g(x)dx$ als Faltung des Signalelements mit einer Gewichtsfunktion $g(x)$. In unserem Fall ist

$$w_k(t) = a_k \int_{kT}^{(k+1)T} g(t-x)\, dx =: a_k r(t - kT).$$

Zum Zeitpunkt $t = nT$ erhält man somit

$$w(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r((n-k)T) ,$$

wobei $r((n-k)T)$, $k=0,1,2,\ldots$, die sogenannte Kanalcharakteristik darstellt.

Bei einem Kanal mit Intersymbolinterferenz ist $w_k(t) \neq 0$, d.h. $r(t-kT) \neq 0$, in einem theoretisch unendlich langen Intervall möglich. Das führt zur Überlagerung der früher gesendeten Signalelemente a_k, $k < n$, mit a_n und $w(nT)$ spaltet sich dadurch in folgende Anteile auf:

$$w(nT) = a_n r(0) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k r((n-k)T) + \text{Restsumme},$$

wobei der mittlere Summand $\sum_{m=1}^{n} a_{n-m} r(mT)$, $m = n-k$, die Intersymbolinterferenz charakterisiert und die "Restsumme" später vernachlässigt wird. Daß die Antwort $w(t)$ am Kanalausgang zusätzlich noch additiv durch ein Gauß'sches Rauschen $n(t)$ überlagert wird, sei jetzt nur erwähnt.

Aus der Sicht des Empfängers kann nun die Folge (a_k), $k=0,1,\ldots$, der Signale als eine Folge zufälliger Größen interpretiert werden, so daß die Frage entsteht, die Zwischensymbolinterferenz durch eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung zu beschreiben. Damit können dann genauere Aussagen zur Fehlerwahrscheinlichkeit in digitalen Übertragungssystemen mit Zwischensymbolinterferenz erhalten werden. Die Grössen $r(mT)$, $m=0,1,\ldots$, werden in der Nachrichtentechnik als Kanalcharakteristik bezeichnet. Die Kanalcharakteristik ist durch die technische Beschaffenheit des Übertragungssystems determiniert. RICE(1973) untersuchte die Kanalcharakteristik $r(mT) = 1/m$ im Fall $P(a_k = +1) = P(a_k = -1) = 0.5$. Das statistische Modell für die Intersymbolinterferenz ist hier die gewichtete Summe

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} X_m \quad \text{mit} \quad X_m = a_{n-m}.$$

Für sehr große n ($n \to \infty$) wird S_n durch S appoximiert:

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} X_m \;;\; P(X_m=1) = P(X_m=-1) = 0.5 \quad \text{für alle m.}$$

Die charakteristische Funktion $f(u)$ von S kann man folgendermaßen darstellen

$$f(u) = \prod_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{u}{m}\right) = 1 - \frac{\pi^2 u^2}{216} + \frac{11\pi^4 u^4}{4!\,180} - \frac{233\pi^6 u^6}{6!\,7560} + \frac{2887\pi^8 u^8}{8!\,226800} - + \ldots .$$

Durch numerische Integration von

$$F_S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{u}\sin(ux)f(u)du \quad \text{und} \quad p_S(x) = F_S'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(ux)f(u)du,$$

vgl. ROSSBERG|JESIAK|SIEGEL(1985, S.45), ist es in RICE(1973) möglich, die Verteilungsfunktion $F_S(x)$ und Dichtefunktion $p_S(x)$ von S tabellarisch anzugeben. Obwohl die Dichtefunktion von S glockenförmige Gestalt hat, handelt es sich hier nicht um eine Gauß'sche Verteilung.

Anders hingegen ist die Situation bei HILL|BLANCO(1973). Hier wird die sogenannte exponentiell fallende Kanalcharakteristik $r(mT) = (1 - a^2)^{1/2} a^m$, $0 < a < 1$, für die auch bei RICE(1973) untersuchten Signalelemente (a_k) mit $P(a_k=1) = P(a_k=-1) = 0.5$ betrachtet. Diese Kanalcharakteristik findet auch in zwei Beispielen bei PROAKIS(1983),

s. dort S. 372 und 385, Erwähnung und taucht aber bereits in der Monografie von LUCKY|SALZ|WELDON(1968) auf. Genau wie RICE(1973) haben auch HILL|BLANCO(1973) versucht, die Grenzverteilung von

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} (1-a^2)^{1/2} a^m X_m , \quad P(X_m=1) = P(X_m=-1) = 0.5, \qquad (6.9)$$

zu modellieren (für den Fall a -> 1-0). Dabei gelang es HILL|BLANCO (1973) im Fall $a = \sqrt[K]{0.5}$, K=1,2,... , jeweils eine Berechnungsvorschrift für $F_S(x)$ und $p_S(x)$ anzugeben und die Dichtefunktion $p_S(x)$ für K = 1,2,...,5 grafisch darzustellen.
Während im Fall K=1, d.h. a = 0.5, noch eine Rechteckverteilung mit

$$p_S(x) = \begin{cases} 0.5, & |x| \leq 1, \\ 0 \;, & |x| > 1, \end{cases} \qquad (6.10)$$

vorliegt, ist aus den Grafiken in HILL|BLANCO(1973) zu erkennen, daß mit wachsendem K, d.h. a -> 1-0, die Dichten $p_S(x)$ eine glockenförmige Gestalt annehmen. Die Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes wird jedoch hierbei von den Autoren nicht erkannt.
Jedoch bei MEREDOV(1979) findet man bereits den Hinweis darauf, daß im Fall der hier vorliegenden ABEL'schen Summation (d.h. exponentiell fallende Kanalcharakteristik) für a -> 1-0 die Dichte einer Gauß-Verteilung vorliegt.
Die Arbeit von HILL|BLANCO(1973) ist noch in anderer Hinsicht interessant: Es wird darauf hingewiesen, daß die Verteilung von S, vgl. (6.9), absolut stetig oder singulär sein kann je nach dem, welchen Wert a besitzt. Z.B. liegt für $a \in (0, 0.5)$ eine singuläre Verteilung vor. Ebenso geht die in (6.10) vorhandene Dichte verloren, wenn die Gleichwahrscheinlichkeit für $a_k \in \{-1 , 1\}$ verletzt ist. Sofort wird S singulär (bei a= 0.5). Auch im Bereich $a \in (0.5 , 1)$ existieren Stellen, die zur Singularität von S führen, z.B. a= 0,618... oder a= 0,755... als Wurzeln der Gleichung $a^{-2} - a^{-1} - 1 = 0$ bzw. $a^{-3} - a^{-1} - 1 = 0$, vgl. dazu auch SASVARI|WOLF(1987) und WOLF|SASVARI(1986).

Mit den in den Kapiteln 3 und 5 erhaltenen Grenzwertsätzen für gewichtete Summen ergibt sich nun für das geschilderte Übertragungssystem folgende Anwendung. Die Gewichtskoeffizienten $(\alpha_m(a))$, $m \in N_0$, werden als eine von einem Parameter a, 0<a<1, abhängige Kanalcharakteristik interpretiert, d.h.

$$r(mT) = r_a(mT) = \alpha_m(a), \quad a \in (0,1).$$

Die Folge (X_m) mit $X_m = a_{n-m}$, $m \in N_0$, beschreibt die Folge der zufälligen Signalelemente, die jetzt nicht notwendig identisch verteilt sein müssen. Das Verhalten der Intersymbolinterferenz wird damit durch die gewichtete Summe

$$S = S_a = \alpha_0(a)X_0 + \alpha_1(a)X_1 + \alpha_2(a)X_2 + \ldots$$

beschrieben, wobei hier bereits wieder der "stationäre" Fall, d.h.

$n \to \infty$, ins Auge gefaßt wird. Es entsteht die Frage nach Bedingungen an die Kanalcharakteristik $(\alpha_m(a))$ und an das zufällige Verhalten der Signalelemente (X_m), $m\varepsilon N_0$, damit wie im Fall $\alpha_m(a) = (1-a)^{1/2}a^m$, $a\varepsilon (0,1)$, und $X_m = \pm 1$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auch allgemeiner gesehen wieder "gauß'sches" Verhalten eintritt.

Auf Grund der Untersuchungen in Kapitel 3 und 5 kann man folgende Bedingungen angeben:

(i) X_m habe endliche Varianz, d.h. $D^2X_m < \infty$. O.B.d.A. seien dann die Signalelemente zentriert: $EX_m = 0$, $m\varepsilon N_0$.

(ii) Die nichtnegative Folge $(\alpha_m(a))$, $m\varepsilon N_0$, als Kanalcharakteristik mit $a\varepsilon(0,1)$ erfülle die Bedingung $0 < B_a^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^2(a)EX_m^2 < \infty$ und es gelte $\lim_{a \to 1-0} B_a^2 = \infty$.

Weitere Bedingungen werden in den nachstehenden Sätzen angegeben.

Satz 6.3. (vgl. Folgerung 3.13). Mit den Bedingungen (i) und (ii) und der Momentenbedingung $\sup_m E|X_m/DX_m|^{2+\delta} < \infty$ für ein $\delta\varepsilon(0,1]$ gilt, daß die Intersymbolinterferenz S_a asymptotisch normalverteilt ist, d.h. $F_{S_a}(xB_a) \to \Phi(x)$ für $a \to 1-0$, wobei zusätzlich gelten muß:

$$\lambda_a = B_a^{-1} \sup_m \alpha_m(a)DX_m \to 0 \quad (\text{für } a \to 1-0).$$

Satz 6.4. (vgl. |187|). Mit (i) und (ii) und der Momentenbedingung $B_a^{-2} \sum_m \alpha_m^3(a)E|X_m|^3 \leq C < \infty$ und der Zusatzbedingung an die charakteristische Funktion von $\alpha_m(a)X_m$, $m\varepsilon N_0$,

$$\int_{|t|>\varepsilon} \prod_{m=0}^{\infty} |E\exp(ju\alpha_m(a)X_m)| \, du \leq B_a^{-2}C,$$ wobei C und ε geeignete positive Konstanten sind, kann die Dichtefunktion von S_a durch die Dichtefunktion der $N(0,1)$-Verteilung approximiert werden.

In entsprechender Weise kann man auch Klassen abhängiger Signalelemente untersuchen, wenn man z.B. die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.2.1 oder 3.2.2 anwendet.

Die von RICE(1973) betrachtete Kanalcharakteristik $\alpha_m(a) = \frac{1}{m}$ für $1 \leq m \leq n_a$ erfüllt die Bedingung (i) nicht, denn

$$B_a^2 = \sum_{m=1}^{n_a} m^{-2} \to \frac{1}{6}\pi^2 \neq \infty \quad \text{für} \quad \lim_{a \to 1-0} n_a = \infty.$$

Damit ist die von RICE(1973) modellierte Intersymbolinterferenz nicht durch den zentralen Grenzwertsatz beschreibbar, der letztlich die Summation unendlich vieler Größen betrachtet, die alle unendlich klein

werden (nach Normierung mit B_a).
Die Ermittlung der Fehlerwahrscheinlichkeit P_e für die Fehlinterpretation eines empfangenen Signals wird hier am einfachsten Fall binärer Signale, d.h. $a_k = \pm 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit, demonstriert.
In der Nachrichtentechnik wird P_e als die Wahrscheinlichkeit des Überschreitens der Entscheidungsschwelle 1 für S_a+N interpretiert, d.h.

$$P_e = P(S_a+N > 1),$$

wobei S_a die Intersymbolinterferenz und N das Gauß'sche Rauschen bedeuten. Erfüllt S_a die Bedingungen der Sätze 6.3 oder 6.4, so ist S_a+N als Summe unabhängiger Gauß'scher Zufallsgrößen wieder Gaußverteilt und kann bequem berechnet werden.
Wir betrachten folgendes Beispiel: Sei $S_a \varepsilon N(0, \sigma_a^2)$ mit $\sigma_a = 0,1$ und $N \varepsilon N(0, \sigma_o^2)$, wobei $1/\sigma_o^2$ das sogenannte Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) darstellt. SNR wird üblicherweise in dB ($10 \lg \sigma_o^{-2}$) angegeben. Es ergibt sich damit folgende Abhängigkeit für P_e von SNR:

$$P_e = 1 - \Phi((0.01 + \sigma_o^2)^{-1/2}).$$

Zur Illustration wird P_e tabelliert:

SNR(in dB)	10	11	12	13	14
P_e	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$4,01 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$2,23 \cdot 10^{-5}$	$3,88 \cdot 10^{-6}$
	15	16	17	18	19
	$5,32 \cdot 10^{-7}$	$4,53 \cdot 10^{-8}$	$3,09 \cdot 10^{-9}$	$3,00 \cdot 10^{-10}$	$2,15 \cdot 10^{-11}$

Die angegebenen Werte für P_e entsprechen tatsächlich praktischen Erfahrungswerten, vgl. HILL|BLANCO(1973).

6.3 Eine Anwendung in der Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen

Entsprechend BEICHELT|FRANKEN(1983), Kapitel 8, wird das sogenannte "k – aus – n – System" dadurch charakterisiert, daß es solange intakt ist, solange mindestens k der n Elemente des Systems funktionstüchtig sind, d.h. solange weniger als n−k+1 Elemente ausgefallen sind.
Die Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t eines derartigen Systems wird durch

$$P(n,k) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i < k - \frac{1}{2}\right) = P(X_{n-k+1:n} < t) \tag{6.11}$$

erhalten, wobei die Subtraktion mit $\frac{1}{2}$ lediglich eine Stetigkeitskorrektur im Zusammenhang mit der Normalapproximation bedeutet. Dabei sind $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken zur Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$, wobei X_i die zufällige Lebensdauer des i-ten Elements des

betrachteten Systems angibt. Die Lebensdauer des k-aus-n-Systems ist also durch die Ordnungsstatistik $X_{n-k+1:n}$ charakterisiert.
Andererseits gibt (6.11) eine Charakterisierung über die Summenverteilungsfunktion der Z_i, $i=1,2,\ldots,n$, wobei es sich hier um sogenannte binäre oder BOOLE'sche Zufallsgrößen handelt mit

$$Z_i = 1\{X_i \geq t\} \in \{0, 1\} \tag{6.12}$$

und

$$P(Z_i=0) = P(X_i<t) = F_i(t) \quad \text{bzw.} \quad P(Z_i=1) = 1 - F_i(t) =: p_i \ .$$

Die Z_i beschreiben den Ausfall ($Z_i=0$) bzw. das Funktionieren ($Z_i=1$) des i-ten Elements (zum Zeitpunkt t). Die Wahrscheinlichkeit p_i heißt auch Verfügbarkeit des i-ten Elements zum Zeitpunkt t.
Der Vektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ heißt Zustandsvektor des Systems.
Es sei nun $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Dann gilt $A_n(t) := ES_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - F_i(t))$ und $B_n(t) := D^2 S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t)(1-F_i(t))$ sowie

$$E|Z_i - EZ_i|^3 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) = B_n(t) \ .$$

Mit den Ungleichungen (0.5) und (0.6) folgt nun, falls $B_n(t)>0$ ist,

$$|P(n,k) - \Phi(\frac{k-0.5-A_n(t)}{\sqrt{B_n(t)}})| \leq \frac{31{,}935}{1+\frac{|k-0.5-A_n(t)|^3}{(B_n(t))^{3/2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{B_n(t)}} \ . \tag{6.13}$$

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen erhält man aus (6.13) die Ungleichung (mit $\lambda_{n,k} := \frac{n-k-0.5}{n}$ und $F(t) := P(X_1<t)$)

$$|P(n,k) - \Phi(\frac{k-0.5-A_n(t)}{\sqrt{B_n(t)}})| \leq \frac{31{,}935\, F(t)(1-F(t))}{(F(t)(1-F(t)))^{3/2}\sqrt{n} + |F(t)-\lambda_{n,k}|^3 n^2} \ . \tag{6.14}$$

Die Ungleichungen (6.13) und (6.14) stellen neuartige Fehlerschranken für die in der Zuverlässigkeitsanalyse auftretenden k-aus-n-Systeme dar. Sie enthalten alle wichtigen Parameter: die Systemparameter k und n, sowie den Zeipunkt t.
Eine Fehlerschranke des Typs (6.13) wurde bereits von SCHÄBE |238| in der Form

$$|P(n,k) - \Phi(\frac{k-0.5-A_n(t)}{\sqrt{B_n(t)}})| \leq \frac{12}{\sqrt{B_n(t)}} \tag{6.15}$$

angegeben.
Auf Grund der Gleichungen (6.11) und (6.12) stellen die Resultate (6.13) bis (6.15) gleichzeitig Fehlerschranken für die Normalapproxi-

mation von Ordnungsstatistiken dar. D.h., definiert man umgekehrt zu einer Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ einfach über (6.12) die BOOLE'schen Zufallsgrößen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, dann kann die Normalapproximation von Ordnungsstatistiken über die Summationstheorie analysiert werden. Eine derartige Vorgehensweise ist bereits bei ENGLUND |54| zu finden, in dessen Ergebnissen auch das Resultat (6.15) enthalten ist (vgl. (2.15) in |54|).

Abschließend sei folgendes bemerkt: Im Fall $\lambda_{n,k} = F(t)$ geht die Schranke(6.14) über in

$$\frac{C}{\sqrt{n}}\sqrt{F(t)(1-F(t))} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}\sqrt{1-F^2(t)} \quad . \tag{6.16}$$

Das Auftreten des Terms $\sqrt{1-F^2(t)}$ in einer Fehlerschranke wurde bereits in einem anderen Zusammenhang bei WOLF(1982) beobachtet, indem im Fall der gewichteten Summation (ABEL'sche Summation) die Gewichtskoeffizienten $\alpha_k(t) = F^k(t)$, $k \in N_0$, gewählt wurden (vgl. Folgerung 4 in WOLF(1982)). Hierbei handelte es sich um die Normalapproximation für den Summationsprozeß

$$S(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P(\max(X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}) < t) \cdot X_k$$

im Fall $t \rightarrow \infty$.

7. Hinweise auf weitere Probleme

Wie in der Einleitung, vgl. Kapitel 0, bereits betont wurde und auch in den einzelnen Abschnitten zu erkennen war, sind noch viele Einzelthemen unabgeschlossen. Andererseits werfen praktische Probleme neue Fragestellungen auf.

Es sollen hier einige Anregungen für weitere Untersuchungen gegeben werden.

1) Mit der im Kapitel 2 bereitgestellten analytischen Struktur für K_δ in (0.5) sind im Falle $\delta \in (0,1)$ optimale Konstantenabschätzungen zu ermitteln, so wie es für $\delta = 1$ durch die Ungleichung (0.6) getan wurde. Damit könnten die bei TYSIAK(1983) angegebenen Werte für K_δ korrigiert und gleichzeitig präzisiert werden.
2) Auf 1) aufbauend ist in (0.7) die Konstante $C(p,\delta)$, $\delta \in (0,1)$, numerisch abzuschätzen, so wie es im Fall $\delta = 1$ im Kapitel 2 und Abschnitt 4.1.2 realisiert wurde. Dafür gibt es bisher noch keine numerischen Ergebnisse in der Literatur.
3) Im Fall $\delta > 1$ steht in den Fehlerschranken (0.5) und (0.7) anstatt $L_{2+\delta,n}$ die Charakteristik $L_{3,n} + L_{2+\delta,n}$, vgl. z.B. OSIPOV(1967),

ČEBOTAREV(1979) oder RYCHLIK(1983) und Abschnitt 6.1. Derartige Fehlerschranken sind erst dann von praktischem Interesse, wenn sie mit einer quantitativen Abschätzung auftretender absoluter Konstanten verbunden sind, da hier keine qualitative Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit eintritt (, falls nicht zu asymptotischen Entwicklungen übergegangen wird). Mit der in Kapitel 2 vorgeschlagenen Beweistechnik könnte diese Aufgabe gelöst werden, vgl. auch MIRACHMEDOV(1985).

4) Aufbauend auf 3) können die quantitativen Untersuchungen von Abschnitt 6.1 auf den Fall der Normalapproximation von Zufallselementen im Raum l_p, $p>2$, ausgedehnt werden, vgl. ČEBOTAREV(1979).

5) Interpretiert man in (0.7) die Gewichtsfunktion $f(x)=|x|^{2+\delta-1/p}$ (mit p=1) als Spezialfall von $f(x)=\frac{1}{2+\delta}\, g'(|x|)\, \exp(g(|x|))$

(mit $g(x) = (2+\delta)\ln x$), wobei $g(x)$ einer gewissen Funktionenklasse G angehört, so kommt man zu folgender Variante des globalen Grenzwertsatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(|x|)\, e^{g(|x|)}\, |D_n(x)|\, dx \leq C\cdot(L_{2+\delta,n} + L_{g,n}), \tag{7.1}$$

wobei $L_{g,n} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{g(|x|)}\, dP(X_k<xB_n)$ ist

und $C > 0$ eine absolute Konstante darstellt, die nur von der betrachteten Funktionenklasse G abhängt. Die Ungleichung (7.1) trägt in dieser allgemeinen Form hypothetischen Charakter und es ergeben sich daraus die Aufgabenstellungen

- Charakterisierung der Klasse G, für die eine Abschätzung des Typs (7.1) möglich ist (im Zusammenspiel mit vorgegebenen Eigenschaften der Zufallsgrößen (X_k)), vgl. dazu SAKOJAN(1975),
- Untersuchung der analytischen Struktur von $C = C(G)$ mit dem Ziel, in Spezialfällen (feste Wahl von $g(x)$) eine exakte numerische Konstantenabschätzung zu erhalten.

Mit der im Kapitel 2 vorgeschlagenen Beweistechnik könnte ein Zugang zum Beweis von (7.1) gegeben sein. Eine "einseitige" Version von (7.1), d.h. Ersetzung des Integrationsgebietes $(-\infty, \infty)$ in (7.1) und $L_{g,n}$ durch $(0, \infty)$, wurde im Fall $\delta=1$ (bzw. $\delta\geq 1$) von SAKOJAN(1975) untersucht, wobei zusätzlich eine gewisse Kleinheit des verallgemeinerten Moments $L_{g,n}$ vorausgesetzt wurde, d.h. $L_{g,n} \leq$ const., vgl. dazu auch S.NAGAEV(1979). Die Bedingung $L_{g,n} \leq$ const. erscheint hierbei unnatürlich und nur auf Grund der verwendeten Beweistechnik erforderlich zu sein. Zu einseitigen Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz siehe auch |222| und |174|.

6) PRAWITZ(1975) benutzt anstatt der Streuungsgröße B_n^2 die kleinere Charakteristik

$$(\overline{B}_n)^2 = B_n^2 - \max_{1\leq k\leq n} EX_k^2$$

und definiert entsprechend dem LJAPUNOV-Bruch $L_{3,n}$ die Größen

$$\overline{L}_{3,n} = (\overline{B}_n)^{-3} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^3$$

und

$$L'_{3,n} = (\overline{B}_n)^{-3} \sum_{k=1}^{n} (EX_k^2)^{1.5} \leq \overline{L}_{3,n}$$

und entsprechend ρ_v, vgl. Abschnitt 1.2.3, die Größe

$$\rho_n^{*} = (\overline{B}_n)^{-4} \sum_{k=1}^{n} (EX_k^2)^2 .$$

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen (mit $EX_1^2 = 1$) kündigt PRAWITZ(1975) ein interessantes Ergebnis an:

$$\sup_x |D_n(x)| \leq \frac{4E|X_1|^3+3}{6\sqrt{2\pi(n-1)}} + \frac{1}{n-1}\left(C_2(E|X_1|^3)^2 + C_3E|X_1|^3 + C_4\right), \quad (7.2)$$

wobei C_2 bis C_4 absolute Konstanten sind. Jedoch blieb der geplante 2. Teil seiner Arbeit mit dem Beweis zu (7.2) unveröffentlicht. Diese Ungleichung ist von der Konstantenabschätzung her interessant und sollte genauer untersucht werden.

7) Die in Abschnitt 3.2.1 aufgeworfenen Fragen sind zu untersuchen, einmal hinsichtlich der Bedingungen (3.18) oder (3.19) und zum anderen hinsichtlich der Untersuchung von Grenzprozessen mit Mischverteilungen (quasigaußsch) bzw. hinsichtlich der Ausdehnung auf Summationsprozesse mit zufälliger Stoppzeit bzw. zufälligem Summationsindex.

8) Die im Abschnitt 3.1.3 durchgeführten qualitativen Untersuchungen sind zu quantifizieren. Vgl. z.B. ENGLUND(1983) oder KOROLEV(1986).

9) Für abhängige Zufallsgrößen (z.B. Martingaldifferenzen oder stark multiplikative Systeme) sind lokale Grenzwertsätze zu untersuchen. Im Fall der m-Abhängigkeit gibt es dazu bereits Untersuchungen z.B. bei MACHT(1986).

10) Für zufällige Elemente im Raum l_p, $p \geq 2$, sind die Untersuchungen zu lokalen Grenzwertsätzen weiterzuführen, einschließlich Konstantenabschätzung, vgl. ČEBOTAREV(1982).

11) Ein breites Feld von Untersuchungen ergibt sich für quantitative Fehlerabschätzungen bei asymptotischen Entwicklungen. In den Abschnitten 1.2.3, 3.1.5 und 5.3 werden hier erste Beiträge dazu geliefert. Vgl. z.B. auch MIRACHMEDOV(1985), HALL|NAKATA(1986,|280|).

12) Für abhängige Zufallsgrößen (z.B. Martingaldifferenzen) sind ungleichmäßige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz zu untersuchen, vgl. z.B. BOSE(1986).

13) Für abhängige Zufallsgrößen (z.B. Martingaldifferenzen) sind Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeiten mittlerer und großer Abweichungen zu behandeln, vgl. z.B. BOSE(1986).
Im Fall der m-Abhängigkeit gibt es zu den unter 12) und 13) angesprochenen Fragen bereits Ergebnisse z.B. bei HEINRICH(1985).

14) Es sind entsprechende Grenzwertsätze für den Fall einer nichtnormalen Grenzverteilung zu untersuchen. Im Fall stabiler Grenzverteilungen gibt CHRISTOPH(1987) einen guten Überblick über den derzeitigen Wissensstand.
Insbesondere ist die bei RICE(1973), vgl. Abschnitt 6.2, auftretende Grenzverteilung weiter zu untersuchen hinsichtlich der möglichen Zuordnung zu einem bekannten Verteilungstyp.

15) Zwei wichtigen Fragestellungen wurde in der Arbeit nicht nachgegangen:
- der HEYDE'schen Fragestellung, d.h. Abschätsung von Fehlerschranken mit Summencharakter, z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta/2} |D_n(x)|$, und
- der Fragestellung nach Fehlerabschätzungen nach unten, vgl. z.B. HALL|BARBOUR(1984) und PETROV(1987).
Hier liegt ebenfalls ein breites Feld für weitere Untersuchungen.

16) Es ist zu untersuchen, inwiefern bekannte Resultate unter abgeschwächten Voraussetzungen erhalten bleiben und dabei insbesondere die eingeschränkte Konvergenz eine Rolle spielt, vgl. z.B. ROSSBERG (1987).

17) Es sei $v_n(x)$ die Dichtefunktion einer geeignet zentrierten und normierten Summe von n unabhängig und identisch verteilten Zufallsgrößen mit der Eigenschaft

$$v_n(x) \to \varphi(x), \; x \in S, \quad (\text{z.B. } S = (-\infty, \tau)). \tag{7.3}$$

Lassen sich aus der eingeschränkten Konvergenz heraus lokale Grenzwertsätze vom GNEDENKO-Typ ableiten? Wenn ja, unter welchen Voraussetzungen? Diese Frage wurde 1982 einmal angesprochen und ist in der jetzt formulierten Fassung als Problemstellung in ROSSBERG|JESIAK|SIEGEL(1985), S. 207, zu finden.

18) Andere als hier betrachtete Klassen abhängiger Zufallsgrößen (z.B. schwach abhängige Zufallsgrößen mit verschiedenen Mischungsbedingungen, m-abhängige Zufallsgrößen oder orthogonale Zufallsgrößen) sowie Zufallselemente in allgemeineren Räumen bieten ebenfalls eine große Anzahl von Untersuchungsrichtungen, auf die jedoch hier nicht eingegangen wird, vgl. z.B. HEINRICH(1986).

19) Anhand der Gleichungen (6.11) und (6.12) sind weitere Untersuchungen zur Normalapproximation von Ordnungsstatistiken auf Grundlage der Summationstheorie zu führen, vgl. ENGLUND |54|.

20) Die für die Erneuerungstheorie wichtige Ungleichung von ENGLUND |53|

ist zu präzisieren. Es handelt sich dabei um folgenden Sachverhalt: Ausgangspunkt ist ein Erneuerungsprozeß, d.h. eine Folge unabhängiger nichtnegativer Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, vgl. BARLOW|PROSCHAN(1981), Kapitel 6, § 3. Die Anzahl $N(t)$ der Erneuerungen hat in der Erneuerungstheorie eine wichtige Bedeutung. Es gilt die fundamentale Identität:

$$P(N(t)<n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > t\right), \tag{7.4}$$

wobei $N(t) = \max\{k: \sum_{i=1}^{k} X_i < t\}$ ist.
Wie in Abschnitt 6.3 sind die Größen X_i, $i=1,2,\ldots$, zufällige Lebensdauern und $N(t)$, $t\geq 0$, ist der sogenannte Erneuerungszählprozeß. Auf Grund der Identität (7.4) kann der Prozeß $N(t)$ ebenfalls mit Hilfe der Summationstheorie untersucht und eine Normalapproximation ins Auge gefaßt werden. Bei ENGLUND |53| und SCHÄBE |236| wird dieser Idee bereits nachgegangen. Während in BEICHELT|FRANKEN (1983) nur die Grenzaussage (für identisch verteilte Zufallsgrößen)

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - t/EX_1}{(tD^2X_1/(EX_1)^3)^{1/2}} < x\right) = \Phi(x) \tag{7.5}$$

zu finden ist, gibt ENGLUND |53| bereits eine Fehlerabschätzung an:

$$\sup_n \left|P(N(t)<n) - \Phi\left(\frac{(nEX_1-t)\sqrt{EX_1}}{\sqrt{t\, D^2X_1}}\right)\right| \leq 4\left(\frac{E|X_1-EX_1|^3}{(DX_1)^3}\right) \sqrt{\frac{EX_1}{t}} \tag{7.6}$$

und formuliert eine entsprechende Ungleichung, wenn nur das Moment $E|X_1-EX_1|^{2+\delta}$, $\delta\varepsilon(0,1)$, existiert. Jedoch wurde in diesem Fall die auftretende absolute Konstante $C = C(\delta)$ nicht mehr berechnet.
Mit (7.6) erhält man eine Restgliedabschätzung für (7.5), vgl. Satz 4.10 in BEICHELT|FRANKEN(1983), S. 88. Bei SCHÄBE |236| erfolgt keine allgemeine Fehlerabschätzung, lediglich anhand von Beispielen (Exponential- bzw. Weibull-Verteilung) wird eine Fehlerdiskussion durchgeführt.
Mit dem bei ENGLUND |53| gegebenen Beweis und den hier benutzten Beweisideen eröffnet sich der Weg, die Konstante in der Ungleichung (7.6) zu präzisieren und im Fall $\delta\varepsilon(0,1)$ eine Konstantenberechnung vorzunehmen.
Weiterhin dürfte es jetzt auch möglich sein, genau wie in (6.13) oder (6.14) auch hier zu einer ungleichmäßigen Fehlerschranke zu kommen, d.h. in (7.6) auch n in die Schranke einzubeziehen (die sup-Bildung entfällt dann auf der linken Seite von (7.6)).

21) Die von SCHÄBE |236| vorgeschlagene Normalapproximation für den Erneuerungszählprozeß $N_s(t) = \sum_{i=1}^{l} N_i(t)$ des Gesamtsystems aus l

unabhängigen Elementen ist genauer zu studieren.

22) In der Straßenverkehrstechnik werden u.a. sogenannte Rangfolgekurven ermittelt, die dadurch entstehen, daß alle Stundenerhebungen eines Jahres für einen bestimmten Straßenquerschnitt der Größe nach geordnet werden, vgl. SCHNABEL|LOHSE(1980). Dieses Vorgehen läßt sich offensichtlich durch Ordnungsstatistiken beschreiben. Es ist zu untersuchen, ob hier eine Normalapproximation der Ordnungsstatistiken erfolgen kann. Welche Zusammenhänge ergeben sich dabei zwischen den Parametern der Rangfolgekurven und den Parametern der approximierenden Normalverteilungen? Welche Bedeutung hat z.B. ein starkes Abklingen der Rangfolgekurve für die Varianz der Verteilung der Ordnungsstatistik?

23) An dieser Stelle soll der Hinweis auf kumulative Prozesse im Belastungsmodell (sogenanntes Schock-Modell), so wie es bei DESMOND(1985) untersucht wird, erfolgen. Hierbei wird das Verhalten eines Systems untersucht, bei dem es durch plötzliche Einwirkungen (Belastungen, Schocks) zum Ausfall von Systemelementen kommt. Unterliegt das System wiederholt gleichartigen Belastungszyklen, wird es allmählich zerstört. Bei bestimmten, dabei ablaufenden (kumulativen) Prozessen ist eine Normalapproximation naheliegend, vgl. auch BEICHELT|FRANKEN(1983), auf der aufbauend die sogenannte BIRNBAUM-SAUNDERS-Verteilung entsteht. Für vorhandene asymptotische Aussagen sind hier noch keine Fehlerabschätzungen (Konvergenzgeschwindigkeiten) bekannt.

24) Bei MAEJIMA(1975) wird der Zusammenhang zwischen lokalen Grenzwertsätzen und dem BLACKWELL'schen Erneuerungstheorem, vgl. BEICHELT|FRANKEN(1983), Satz 4.7, S. 87, studiert. Diese interessante Untersuchung sollte vertieft werden.

25) Mit dieser letzten Bemerkung soll auf eventuelle Anwendungsmöglichkeiten in der mathematischen Statistik (Testtheorie) hingewiesen werden. Es sei $T_n = Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ eine statistische Testgröße, die als Summe von Zufallsvariablen Y_k, $k=1,2,\ldots,n$, darstellbar ist. Unter einer bestimmten Nullhypothese sei T_n für $n \to \infty$ asymptotisch $N(0,1)$-verteilt. Für ein festes n jedoch besitze T_n die Verteilungsfunktion $F_n(x)=P(T_n<x)$. Um im statistischen Test zum Testniveau $q\in(0,1)$ die Entscheidung $T_n<z_{q,n}$ für $T_n=t_n$ treffen zu können, ist das Quantil $z_{q,n}$ von F_n, d.h. $F_n(z_{q,n})=q$, notwendigerweise zu ermitteln. Dieses läßt sich bei Normalapproximation durch die CORNISH-FISHER-Inversion (vgl. MÜLLER |148|) über das Quantil z_q der standardisierten Normalverteilung darstellen:

$$z_{q,n} = z_q + \frac{1}{6} L_{3,n}(z_q^2 - 1) + \ldots \quad \text{mit} \quad \Phi(z_q)=q \; . \qquad (7.7)$$

$L_{3,n}$ bezeichnet hier wie üblich den LJAPUNOV-Bruch dritter Ordnung der Zufallsgrößen Y_k, $k=1,2,\ldots,n$. Diese Vorgehensweise ist z.B. bei SCHÄBE |235, 237| zu finden. Bei Benutzung von (7.7) bleibt die Frage des Fehlers

$$r_n = z_{q,n} - \left(z_q + \frac{1}{6} L_{3,n}(z_q^2 - 1)\right) \qquad (7.8)$$

unbeantwortet.

Praktisch hat sich folgendes Vorgehen bewährt: Sei t_n ein konkreter Wert von T_n. Dann folgt aus der Berechnung von $F_n(t_n)=q_n$ (falls die Berechnung möglich ist), sofort die gewünschte Entscheidung, indem q_n mit dem Testniveau q verglichen wird. Damit erübrigt sich die Bereitstellung des Quantils $z_{q,n}$ (Nach diesem Prinzip wird oft auch Statistik-Software programmiert.).

Aus den Ungleichungen (0.5) und (0.6) folgt nun

$$F_n(x) = \Phi(x) + \vartheta \frac{31.935}{1+|x|^3} L_{3,n} \quad \text{mit} \quad |\vartheta|<1,$$

und mit $x=t_n$ gilt

$$q_n = \Phi(t_n) + \vartheta \frac{31.935}{1+|t_n|^3} L_{3,n}, \quad |\vartheta|<1. \qquad (7.9)$$

Aus (7.9) erhält man bereits eindeutig die Entscheidung $T_n<z_{q,n}$ für $T_n=t_n$, falls

$$(q_n \leq)\ \Phi(t_n) + \frac{31.935}{1+|t_n|^3} L_{3,n} \leq q \qquad (7.10)$$

gilt, bzw. $T_n>z_{q,n}$ für $T_n=t_n$, falls

$$(q_n \geq)\ \Phi(t_n) - \frac{31.935}{1+|t_n|^3} L_{3,n} \geq q \qquad (7.11)$$

ist. Mit anderen Worten, die Ungleichungen (7.10) und (7.11) liefern eine Abschätzung für den Fehler erster Art, falls anstatt $z_{q,n}$ das Quantil z_q benutzt wird:

$$\text{Fehler erster Art} \in \left(q - \frac{31.935}{1+|z_q|^3} L_{3,n}\,;\ q + \frac{31.935}{1+|z_q|^3} L_{3,n}\right). \qquad (7.12)$$

Dieser Gedanke ist auch bei LORZ(1987) enthalten.

Andererseits liefern die entsprechenden Lösungen der Gleichungen

$$\Phi(z_{q,n}^{(max)}) - \frac{31.935}{1+|z_{q,n}^{(max)}|^3} L_{3,n} = q \qquad (7.13)$$

bzw.

$$\Phi(z_{q,n}^{(min)}) + \frac{31.935}{1+|z_{q,n}^{(min)}|^3} L_{3,n} = q \qquad (7.14)$$

ein Intervall für $z_{q,n}$:

$$z_{q,n} \in (z_{q,n}^{(min)}, z_{q,n}^{(max)}), \qquad (7.15)$$

womit auch der Fehler r_n in (7.8) abgeschätzt werden kann.

Literaturverzeichnis (Ergänzungen s. Thesen S.5)

1 ADAMS,W.J.(1974). The Life and Times of the Central Limit Theorem. Kaedmon, New York.

2 AHMAD,I.A.|LIN,P.-E.(1977). A Berry-Esseen Type Theorem. Utilitas Mathematica 11, 153 - 160.

3 AHMAD,I.A.(1979). On some L_p bounds of convergence rates in the central limit theorem. The Fourteenth Annual Conference in Stat., Computer Sci., Operation Research and Math., vol.2, p. 1 - 8, University Press, Cairo.

4 AHMAD,I.A.(1982). On the remainder term in the central limit theorem. Ark. Mat. 20, 1, 165 - 168.

5 ALEXITS,G.(1961). Convergence problems of orthogonal series. Budapest.

6 ARAK,T.V.|ZAJCEV,A.JU.(1986). Ravnomernye predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. (Trudy Mat. inst. im. V.A.Steklova AN SSSR, tom 174), Nauka, Leningrad.

7 ARAUJO,A.|GINE,E.(1980). The central limit theorem for real and Banach valued random variables. Wiley, New York.

8 AZLAROV,T.A.|MEREDOV,B.(1977). Nekotorye ocenki v predel'noj teoreme dlja summirovanija slučajnych veličin po Abelju. Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, No.5, 7 - 15.

9 BANIS,I.I.(1974). O neravnomernoj ocenke ostatočnogo člena v integral'noj predel'noj teoreme. Lit. matem. sb. 14, 3, 57 - 65.

10 BARBOUR,A.D.|HALL,P.(1984). Stein's method and the Berry-Esseen Theorem. Austral. J. Statist. 26, 1, 8 - 15.

11 BARLOW,R.E.|PROSCHAN,F.(1981). Statistische Theorie der Zuverlässigkeit. Akademie-Verl. Berlin.

12 BAUER,H.(1968). Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Springer, Berlin.

13 VAN BEEK,P.(1971). Fourieranalytische Methoden zur Verschärfung der Berry-Esseen-Schranke. Diss., Univ. Bonn.

14 BEICHELT,F.|FRANKEN,P.(1983). Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Verl. Technik, Berlin.

15 BENTKUS,V.JU.|ZALESSKIJ,B.A.(1984): Razloženija Edžvorta c neravnomernymi ostatkami v gil'bertom prostranstve. Preprint No.3 (188), Inst. Matem. AN BSSR, Minsk.

16 BERGSTRÖM,H.(1949). On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. Skand. Aktuarietidskrift 32, 1, 37 - 62.

17 BERNOULLI,J.(1713). Ars Conjectandi. Basel. (russ. Übers. in: O zakone bol'šich čisel. Nauka, Moskva 1986)

18 BERNSTEJN,S.N.(1926). Sur l'extension du theoreme limite du calcul des probabilites aux sommes de quantites dependantes. Math.

Ann. 97, 1 – 59. (russ. Übers. in: Uspechi mat. nauk 10(1944) 65 – 114)

19 BERRY, A. C. (1941). The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc. 49, No.1

20 BHATTACHARYA, R. N. | RAO, R. R. (1976). Normal Approximation and Asymptotic Expansions. Wiley, New York.

21 BIKELIS, A. (1966). Ocenki ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Lit. mat. sb. 6, 3, 323 – 346.

22 BIKELIS, A. | JASJUNAS, G. (1967). O predel'nych teoremach v metrike prostranstva L_1 i l_1. Lit. mat. sb. 7, 2, 195 – 218.

23 BIKELIS, A. (1968). O mnogomernych charakterističeskych funkcijach. Lit. mat. sb. 8, 1, 21 – 39.

24 BIKELIS, A. (1968). Asimptotičeskie razloženija dlja plotnostej i raspredelenij summ nezavisimych odinakogo raspredelennych slučajnych vektorov. Lit. mat. sb. 8, 3, 405 – 422.

25 BIKELIS, A. (1972). Zum zentralen Grenzwertsatz in R^k. Teil I, II und III. Preprint No. 1972-9, 1972-14, 1972-21. Chalmers Inst. of Techn. and the Univ. of Göteborg, Departm. of Math.

26 BINGHAM, N. H. | MAEJIMA, M. (1985). Summability Methods and Almost Sure Convergence. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 68, 383-392

27 BISCHOFF, D. | VOIGTLÄNDER, E. (1986). An operator proof for the Lindeberg theorem in the non-classic form of Zolotarev. Statistics 17, 4, 609 – 615.

28 BLÖNDAL, P. H. (1973). Explizite Abschätzung des Fehlers im mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz. Diss. Köln.

29 BOLTHAUSEN, E. (1982). Exact convergence rates in some martingale central limit theorems. Ann. Prob. 10, 672 – 688.

30 BOOK, S. A. (1972). Large deviation probabilities for weighted sums. Ann. Math. Statist. 43, 1221 – 1234.

31 BOOK, S. A. (1973). A large deviation theorem for weighted sums. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 26, 43 – 49.

32 BORISOV, I. S. (1985). On the Convergence Rate in the Central Limit Theorem. In: "Limit Theorems for Sums of Random Variables". Springer-Verl., New York, p. 186 – 213. (Übers. aus d. Russ.)

33 BOROVSKICH, JU. V. (1983). Approksimacija verojatnostnych raspredelenij v beskonečnomernych prostranstvach. Preprint 83.42, Inst. mat. AN USSR, Kiev.

34 BOSE, A. (1986). Certain Nonuniform Rates of Convergence to Normality for a Restricted Class of Martingales. Stochastics 16, 279-294

35 BUTZER, P. L. | HAHN, L. (1976). Approximationsordnung im Zentralen Grenzwertsatz und für den Erwartungswert der standardisierten Summenvariablen. Math. Nachr. 75, 113 – 126.

36 ČEBOTAREV, V. I. (1979). Ocenki skorosti schodimosti v central'noj

predel'noj teoreme v l_p. Sibirsk. matem. Žurn. 20, 5, 1099 - 1116.

37 ČEBOTAREV,V.I.(1982). Ob ocenkach skorosti schodimosti v lokal'noj predel'noj teoreme dlja kvadrata normy v l_p. in: "Predel'nye teoremy teorii verojatnostej i smežnye voprosy", 122 - 126, Nauka, Novosibirsk.

38 ČEBYŠEV,P.L.(1890). Sur le developpement des fonctions a une seule variable. Bull. Acad. Sci. St. Petersbourg (3), vol.1, 193-202

39 CHINČIN,A.J.(1937). Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. Matem. sb. 2(44), No.1, 79 - 119.

40 CHINČIN,A.J.(1938). Predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. GONTI, Moskva - Leningrad.

41 CHOW,Y.S.|TEICHER,H.(1978). Probability Theory - Independence, Interchangeability, Martingales. Springer-Verl. New York.

42 CHRISTOPH,G.(1979). O skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme v slučae ustojčivogo predel'nogo zakona. Lit. mat. sb. 19, 1, 129 - 141.

43 CHRISTOPH,G.(1980). Über notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenzgeschwindigkeitsaussagen im Falle einer stabilen Grenzverteilung. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 54, 29 - 40.

44 CHRISTOPH,G.(1987). Beiträge zur Summationstheorie von Folgen unabhängiger Zufallsgrößen im Falle eines stabilen Grenzverteilungsgesetzes. Diss. B, TU Dresden.

45 CRAMER,H.(1928). On the composition of elementary errors. Skand. Aktuarietidskrift 11, 13 - 74 and 141 - 180.

46 CRAMER,H.(1937). Random Variables and Probability Distributions. Cambridge (third ed. 1970).

47 CRAMER,H.(1938). Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilites. Actual. sci. et ind., Paris, No.736, III, 5-23, (russ. Übers. in: Uspechi mat. nauk 10(1944), 166 - 178).

48 CSÖRGŐ,M.(1968). On the Strong Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem for Martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 131, 259 - 275 and 136, p. 545.

49 DESMOND,A.(1985). Stochastic models of failure in random environments. Canad. J. Statist. 13, 2, 171 - 183.

50 DOOB,J.L.(1953). Stochastic Processes. Wiley, New York.

51 DUBINSKAITE,J.(1983). O točnosti approksimacii raspredelenij summ nezavisimych slučajnych veličin ustojčivym raspredeleniem. Lit. mat. sb. 23, 1, 74 - 91.

52 EMBRECHTS,P.,MAEJIMA,M.(1984). The Central Limit Theorem for Summability Methods of I.I.D. Random Variables. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 68, 191 - 204.

53 ENGLUND,G.(1980). Remainder Term Estimate for the Asymptotic Normality of the Number of Renewals. J. Appl. Prob. 17, 1108–1113.
54 ENGLUND,G.(1980). Remainder Term Estimates for the Asymptotic Normality of Order Statistics. Scand. J. Statist. 7, 197 – 202.
55 ENGLUND,G.(1983). A remainder term estimate in a random-sum central limit theorem. Teorija verojatn. primen. 28, 1, 143 – 149 and 29, 1, 200 – 201.
56 ERICKSON,R.V.(1973). On an L_p version of the Berry-Esseen theorem for independent and m-dependent variables. Ann. Prob. 1, 3, 497 – 503.
57 ERICKSON,R.V.|QUINE,M.P.|WEBER,N.C.(1979). Explicit Bounds for the Departure from Normality of Sums of Dependent Random Variables. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 34, 27 – 32.
58 ESSEEN,C.-G.(1942). On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. Arkiv Mat., Astr. och Fysik 28A, 2, 1 – 19.
59 ESSEEN,C.-G.(1958). On the mean central limit theorem. Trans. Roy. Inst. Technol. Stockholm 121, 1 – 31.
60 ESSEEN,C.-G.(1945). Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta Math. 77, 1 – 125.
61 ESSEEN,C.-G.(1969). On the remainder term in the central limit theorem. Arkiv Mat. 8, 1, 7 – 15.
62 FELLER,W.(1935). Über den zentralen Grenswertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie. Teil I und II. Math. Z. 40, 521 – 559 und 42(1937), 301 – 312.
63 FELLER,W.(1968). On the Berry-Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10, 3, 261 – 268.
64 FELLER,W.(1984). Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee priloženija. t. 2, Mir, Moskva.
65 GAFUROV,M.U.(1972). Ob ostatočnom člene v central'noj predel'noj teoreme. Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, No.5, 3 – 8.
66 GAFUROV,M.U.(1973). Ocenka skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme posredstvom psevdomomentov. in: "Slučajnye processy i statist. vyvody" No.3, 39 – 48, FAN, Taškent.
67 GAFUROV,M.U.(1974). Nekotorye zamečanija ob ostatočnom člene v central'noj predel'noj teoreme. Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, No.6, 3 – 7.
68 GAPOŠKIN,V.F.(1965). Zakon povtornogo logarifma dlja metodov summirovanija Čezaro i Abelja. Teorija verojatn. primen. 10, 449 – 459.
69 GAPOŠKIN,V.F.(1966). Lakunarnye rjady i nezavisimye funkcii. Uspechi mat. nauk 21, 6, 3 – 82.
70 GAPOŠKIN,V.F.(1966). Posledovatel'nosti funkcij i central'naja pre-

del'naja teorema. Matem. sb. 70, 2, 145 – 171.

71 GAPOŠKIN, V.F.(1968). O skorosti približenija k normal'nomu zakonu raspredelenij vzvešennych summ lakunarnych rjadov. Teorija verojatn. primen. 13, 3, 445 – 461.

72 GAPOŠKIN, V.F.(1969). Central'naja predel'naja teorema dlja sil'no mul'tiplikativnych sistem funkcij. Matem. zametki 6, 443–450.

73 GAPOŠKIN, V.F.(1972). O skorosti rjadov po slabo mul'tiplikativnym sistemam funkcii. Matem. sb. 89, 355 – 365.

74 GERBER, H.(1971). The discounted central limit theorem and its Berry–Esseen Analogue. Ann. Math. Statist. 42, 389 – 392.

75 GHOSH, M. | DASGUPTA, R.(1978). On some nonuniform rates of convergence to normality. Sankhya 40A, 347–368 and 43A(1981) p. 120.

76 GIRKO, V.L.(1983). Predel'nye teoremy dlja funkcij slučajnych veličin. Višča škola, Kiev.

77 GNEDENKO, B.V.(1939). K teorii predel'nych teorem dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Izv. AN SSSR, Ser. matem., 181 – 232, 643 – 647.

78 GNEDENKO, B.V. | KOLMOGOROV, A.N.(1960). Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Akademie-Verl. Berlin (2. Aufl.)

79 GÖTZE, F.(1981). On the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem in Banach Spaces. Preprint in Statistics No.68, Köln

80 GÖTZE, F.(1981). Convergence Rate in the Central Limit Theorem in Hilbert Space. 14th Europ. Meeting of Statist. – Abstracts, Wroclaw, p. 35.

81 HAEUSLER, E.(1984). A Note on the Rate of Convergence in the Martingale Central Limit Theorem. Ann. Prob. 12, 635 – 639.

82 HALL, P. | HEYDE, C.C.(1980). Martingale Limit Theory and its Application. Academic Press, New York.

83 HALL, P.(1982). Rates of convergence in the central limit theorem. Pitman, London.

84 HALL, P. | BARBOUR, A.D.(1984). Reversing the Berry–Esseen Inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 90, 1, 107 – 110.

85 HEINRICH, L.(1985). Nonuniform estimates, moderate and large deviations in the central limit theorem for m-dependent random variables. Math. Nachr. 121, 107 – 121.

86 HEINRICH, L.(1986). Beiträge zur Summationstheorie von Folgen und Feldern m-abhängiger Zufallsgrößen. Diss. B, BA Freiberg.

87 HEINRICH, L.(1987). A Method for the Deviation of Limit Theorems for Sums of Weakly Dependent Random Variables: A Survey. Optimization 18, 5, 715 – 735.

88 HEYDE, C.C.(1975). A nonuniform bound on convergence to normality. Ann. Prob. 3, 5, 903 – 907.

89 HILL, F.S. | BLANCO, M.A.(1973). Random Geometric Series and Intersym-

bol Interference. IEEE Trans. Inform. Theory IT-19, 326-335.
90 HSU,P.L.(1945). The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. Ann. Math. Statist 16, 1, 1 - 29.
91 IBRAGIMOV,I.A.(1963). Central'naja predel'naja teorema dlja odnogo klassa zavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. primen. 8, 89 - 94.
92 IBRAGIMOV,I.A.|LINNIK,YU.V.(1971). Independent and Stationary Sequences of Random Variables. Wolters-Noordhoff, Groningen.
93 IGNAT,JU.I.|SLJUSARČYK,P.V.(1977). O schodimosti k ustojčivym zakonam raspredelenija. Dokl. AN USSR, Ser. A, No.10, 912-913.
94 IGNAT,JU.I.(1981). Ob odnoj ocenke otklonenija ot normal'nogo zakona raspredelenija summy v scheme serij. Teorija verojatn. i matem. statist. (Kiev), vyp. 25, 25 - 29.
95 IGNAT,JU.I.(1984). Odna neravnomernaja ocenka ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. i matem. statist. (Kiev), vyp. 31, 40 - 44.
96 IGNAT,JU.I.(1984). Nekotorye ocenki ostatočnogo člena v predel'nych teoremach dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. primen. 29, 2, 401 - 402.
97 IGNAT,JU.I.|PADITZ,L.(1987). Utočnenie nekotorych ocenok otklonenija ot normal'nogo zakona raspredelenija summy nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. i matem. statist.(Kiev) vyp. 37, 57 - 66.
98 JÖCKEL,K.-H.|SENDLER,W.(1981). A Central Limit Theorem for Generalized Discounting. MOS, ser. statistics 12, 605 - 608.
99 KAROBLIS,A.(1974). Odna ocenka ostatočnogo člena v teoreme Ljapunova. Lit. mat. sb. 14, 1, 49 - 54.
100 KAROBLIS,A.(1983). Ob approksimacii raspredelenij summ nezavisimych slučajnych veličin. Lit. mat. sb. 23, 1, 101 - 107.
101 KAROBLIS,A.|PADVEL'SKIS,K.(1984). Ob approksimacii raspredelenij summ nezavisimych neodinakogoraspredelennych slučajnych veličin. Lit. mat. sb. 24, 1, 83 - 92.
102 KATZ,M.L.(1963). Note on the Berry-Esseen theorem. Ann. Math. Statist. 34, 3, 1107 - 1108.
103 KNOPP,K.(1964). Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer-Verl. Berlin.
104 KOLMOGOROV,A.N.(1931). Eine Verallgemeinerung des Laplace-Ljapunovschen Satzes. Izv. AN SSSR, Ser. fiz.-mat., 956 - 962.
105 KOLMOGOROV,A.N.(1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeno. Rend. Accad. Lincei 15, 805 - 808, 866 - 869. (russ. Übers. in: "Teorija verojatn. i matem. statistika" (Sb. statej) Nauka, Moskva 1986, 117 - 123.)

106 KOLMOGOROV,A.N.(1933). Über Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Izv. AN SSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, 363 – 372.

107 KOLMOGOROV,A.N.(1953). Nekotorye raboty poslednich let v oblasti predel'nych teorem teorii verojatnostej. Vestn. Mosk. Univ. 10, 29 – 38.

108 KOMLOS,J.|REVESZ,P.(1972). Remark to a paper of Gapoškin. Acta sci. math. 33, 237 – 241.

109 KOMLOS,J.(1973). A central limit theorem for multiplicative systems Canad. Math. Bull. 16, 67 – 73.

110 KOROLEV,V.JU.(1986). On the accuracy of the normal approximation to random sums. 1st World Congress of Bernoulli Society, USSR, Taškent 1986, Abstracts vol. 2, p. 788.

111 KOROLJUK,V.S.(1978). Spravočnik po teorii verojatnostej i matem. statistike. Naukova dumka, Kiev (2oe izdanie, Nauka, Moskva)

112 KOROLJUK,V.S.|BOROVSKICH,JU.V.(1984). Martingal'naja teorija U-statistik, Preprint 84.63, AN USSR Inst. mat., Kiev.

113 LAPLACE,P.S.(1812). Theorie analytique des probabilites. Paris (3. ed. 1886)

114 LEVY,P.(1937). Theorie de l'addition des variables aleatoires. Gauthier-Villars, Paris (2. ed. 1954).

115 LINDEBERG,J.W.(1922). Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. 15, 211 – 225.

116 LJAPUNOV,A.M.(1901). Nouvelle forme du theoreme sur la limite de probabilite. Mem. Acad. Sci. St. Petersbourg (8), vol.12,N.5

117 LOEVE,M.(1962). Teorija verojatnostej. IL Moskva.

118 LORZ,U.(1986). Sekundärgrößen Poissonscher Punktprozesse – Grenzwertsätze und Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit. Rostock. Math. Kolloqu. 29, 99 – 111.

119 LUCKY,R.W.|SALZ,J.|WELDON,E.J.(1968). Principles of Data Communication. Mc Graw-Hill, New York.

120 LUKACS,E.(1970). Characteristic Functions. 2nd ed. Griffin, London.

121 LUKACS,E.(1983). Developments in Characteristic Function Theory. Griffin, London.

122 MACHT,W.(1986). Beiträge zu lokalen Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Diss. A, TU Dresden.

123 MACHT,W.|WOLF,W.(1987). On the Local Central Limit Theorem. in: "Limit Theorems in Probability Theory and Related Fields", p. 69 – 87. TU Dresden.

124 MAEJIMA,M.(1975). On local limit theorems and Blackwell's renewal theorem for independent random variables. Ann. of the Inst. of Statist. Math. 27, 3, 507 – 520.

125 MAEJIMA,M.(1978). Non-uniform estimates in the central limit theorem. Yokohama Math. J. 26, 2, 137 – 149.

126 MAEJIMA,M.(1978). Some L_p versions for the central limit theorem. Ann. Prob. 6, 2,341 – 344.

127 MAEJIMA,M.(1980). The Remainder Term in the Local Limit Theorem for Independent Random Variables. Tokyo J. of Math. 3, 2, 311–329

128 MAEJIMA,M.(1987). Some Limit Theorems for Summability Methods of I.I.D. Random Variables. Lect. Notes in Math. 1233, 57–68.

129 MAI,K.|THRUM,R.(1987). Approximation of Distribution Functions under a Cumulant Condition. Preprint Nr. 139 (Neue Folge), HU Berlin, Sekt. Math.

130 MEREDOV,B.(1976). Ocenki v predel'noj teoreme dlja summirovanija slučajnych veličin, po Abelju. in: "Predel'nye teoremy i matem. statistika", 71 – 81, FAN, Taškent.

131 MEREDOV,B.(1979). Ob odnoj ocenke ostatočnogo člena v lokal'noj predel'noj teoreme dlja plotnostej. Izv. AN Turkm.SSR, Ser. fiz.–tech.,chim. i geol. nauk, No.2, 3 – 8.

132 MEREDOV,B.(1981). O skorosti schodimosti k normal'nomu raspredeleniju v L_p. Ukr. matem. Ž. 33, 3, 415 – 421.

133 MEREDOV,B.(1982). O približenii k normal'nomu raspredeleniju v L_p. Izv. AN Turkm.SSR, Ser. fiz.–tech.,chim. i geol. nauk, No.4, 10 – 16.

134 MEREDOV,B.(1984). Ob ocenkach sverchu i snizu v odnoj predel'noj teoreme v L_p. Izv. AN Turkm.SSR, Ser. fiz.–tech.,chim. i geol nauk, No.4, 91 – 94.

135 MICHEL,R.(1976). Nonuniform central limit bounds with applications to probability of deviations. Ann. Prob. 4, 1, 102 – 106.

136 MICHEL,R.(1978). A remark on nonuniform estimates in the central limit theorem for sums of independent random vectors. Sankhya 40A, 4, 388 – 392.

137 MICHEL,R.(1979). Necessary and sufficient conditions on rates of convergence in the multidimensional central limit theorem. manuscr. mathem. 28, 361 – 377.

138 MICHEL,R.(1981). On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 55, 109 – 117.

140 MIRACHMEDOV,Š.A.(1974). O skorosti slaboj schodimosti v mnogomernoj predel'noj teoreme. Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.–mat. nauk, No.2, 23 – 28.

141 MIRACHMEDOV,Š.A.(1982). O neravnomernych ocenkach ostatočnogo člena v predel'nych teoremach dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Tezisy dokladov 16. vsesojuznoj školy–kollokvium po teorii verojatn. i matem. statist. Bakuriani, 55 – 63.

142 MIRACHMEDOV,Š.A.(1984). Ob absoljutnoj postojannoj v neravnomernoj ocenke skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme.

Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, No.4, 26 – 30.

143 MIRACHMEDOV,Š.A.(1985). Ob ocenke ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme i o verojatnostjach umerennych uklonenij. in: "Predel'nye teoremy dlja verojatnostnych raspredelenij" 63 – 79, FAN, Taškent.

144 MOIVRE,A.(1730). Miscellanea Analytica Supplementum. London.

145 MORICZ,F.(1970). The central limit theorem for multiplicative systems. Acta sci. math. 31, 1 –2, p. 43 – 51.

146 MORICZ,F.(1980). A Note on the Central Limit Theorem for Orthogonal Series. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 54, 41 – 46.

147 MORICZ,F.|REVESZ,P.(1980). Multiplicative Systems. Matem. Lapok 28, 1 – 3, p. 43 – 63.

148 MÜLLER,P.H.(1988). Lexikon der Stochastik. Akademie-Verl. Berlin (5. Aufl. – im Druck)

149 MUKERJEE,H.G.(1982). On a Improved Rate of Convergence to Normality for Sums of Dependent Random Variables with Applications to Stochastic Approximation. Acta Math. Sci. Hungar. 40,229–236.

150 NAGAEV,S.V.(1965). Nekotorye predel'nye teoremy dlja bol'šich uklonenij. Teorija verojatn. primen. 10, 2, 231 – 254.

151 NAGAEV,S.V.|PINELIS,I.F.(1977). Nekotorye neravenstva dlja raspredelenij summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. primen. 22, 2, 254 – 263.

152 NAGAEV,S.V.|ČEBOTAREV,V.I.(1978). Ob ocenkach skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme dlja vektorov so značenijami v prostranstve l_2. in: "Matematičeskij analiz i smežnye voprosy matematiki" p. 153 – 182, Nauka, Novosibirsk.

153 NAGAEV,S.V.(1979). Large Deviations of Sums of Independent Random Variables. Ann. Prob. 7, 5, 745 – 789.

154 NAGAEV,S.V.(1983). On the Accuracy of Normal Approximation for Distribution of Sum of Independent Hilbert Space Valued Random Variables. Lect. Notes in Math. 1021, 461 – 473.

155 NAGAEV,S.V.|ČEBOTAREV,V.I.(1984). Utočnenie ocenki pogrešnosti normal'noj approksimacii v gil'bertovom prostranstve. Preprint No. 84, AN SSSR Sibirsk. otdel. Inst. matem.

156 NAHAPETIAN,B.S.(1988). Limit Theorems and Its Applications in Statistical Physics. Teubner-Verl. Leipzig (in Vorbereitung)

157 NAKATA,T.(1976). On the Rate of Convergence in Mean Central Limit Theorem for Martingale Differences. Rep. of Statist. Appl. Res., Union of Japan. Sci. and Engrs. 23, No.4, 10 – 15.

158 NAKATA,T.(1979). A Remark to a Paper of Heyde. Rep. of Statist. Appl. Res. JUSE 26, No.1, 11 – 13.

159 NEVEAU,J.(1969). Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Oldenbourg-Verl. München.

160 OSIPOV,L.V.(1966). Utočnenie teoremy Lindeberga. Teorija verojatn. primen. 11, 2, 339 – 342.

161 OSIPOV,L.V.(1967). Asimptotičeskie razloženija v central'noj predel'noj teoreme. Vestn. Leningrad. univ. 22, No.19, 45 – 62.

162 OSIPOV,L.V.|PETROV,V.V.(1967). Ob ocenka ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. primen. 12, 2, 322 – 329.

163 OSIPOV,L.V.(1968). O točnosti približenija raspredelenija summy nezavisimych slučajnych veličin k normal'nomu raspredeleniju. Dokl. AN SSSR 178, 5, 1013 – 1016.

164 OSIPOV,L.V.(1971). Ob asimptotičeskich razloženijach dlja raspredelenij summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. primen. 16, 2, 328 – 338.

165 OSWALD,H.(1965). Über eine Abschätzung des Restgliedes im zentralen Grenzverteilungssatz. Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Naturwiss. Reihe 14, 5, 261 – 268.

166 PADITZ,L.(1976). Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. TU Dresden, 25, 1169–1177.

167 PADITZ,L.(1977). Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer Beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Diss.A, TU Dresden.

168 PADITZ,L.|WOLF,W.(1977). Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion von Summen unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion Φ(x) der standardisierten Normalverteilung. II. Vil'njuser Konferenz über Wahrscheinlichkeitstheorie und mathem. Statist., Thesen Teil III, 158 – 159.

169 PADITZ,L.(1978). Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente. Math. Nachr. 82, 131 – 156.

170 PADITZ,L.(1979). Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. TU Dresden 28, 5, 1197 – 1200.

171 PADITZ,L.(1979). On Moderate Deviations. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 46, 277 – 288.

172 PADITZ,L.(1980). Über Wahrscheinlichkeiten mittlerer Abweichungen für gewichtete Summen. Math. Nachr. 98, 7 – 19.

173 PADITZ,L.(1980). Bemerkungen zu einer Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. "Friedr.List" Dresden 27, 4, 829 – 837.

174 PADITZ,L.(1981). Einseitige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz. MOS, Ser. statistics, 12, 4, 587 – 604.

175 PADITZ,L.(1984). On Error-Estimates in the Central Limit Theorem

for Generalized Linear Discounting. MOS, Ser. statistics 15, 4, 601 – 610.

176 PADITZ, L. (1984). Zur Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz für stark multiplikative Systeme. Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. "Friedr. List" Dresden 31, 3, 589 – 597.

177 PADITZ, L. (1984). Zur Abschätzung der charakteristischen Funktion einer Summe zufälliger Vektoren. Math. Nachr. 115, 201 – 214.

178 PADITZ, L. (1985). O skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme dlja vzvešennych summ martingal-raznostej. IV. Vil'njuser Konferenz über Wahrscheinlichkeitsth. u. mathem. Statist., Thesen Teil III, 17 – 18.

179 PADITZ, L. (1986). Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. "Friedr. List" Dresden 33, 2, 399 – 404.

180 PADITZ, L. | RYCHLIK, Z. (1986). A Note on the Katz Type Theorem for Random Sums. Bull. Polish Acad. Sci. Mathem. 34, 723 – 727.

181 PADITZ, L. (1986). O predel'nych teoremach v scheme summirovanija slučajnych veličin s vesami. Math. Nachr. 127, 281 – 298.

182 PADITZ, L. | MIRACHMEDOV, Š. A. (1986). Pis'mo v redakciju. (Zamečanie k ocenke absoljutnoj postojannoj v neravnomernoj ocenke skorosti schodimosti v c.p.t.), Izv. AN UzSSR, ser. fiz.-mat. n., No. 3, c. 80.

183 PADITZ, L. (1987). On the Analytical Structure of the Constant in the Nonuniform Version of the Esseen Inequality. Statistics (eingereicht)

184 PADITZ, L. (1987). On the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem for Discounted Sums of Martingale Differences. Statistics 18, 1, 141 – 149.

185 PADITZ, L. | ŠARACHMETOV, Š. (1987). Verojatnosti umerennych uklonenij dlja vzvešennych summ. Dokl. AN UzSSR, No. 5, 15 – 17.

186 PADITZ, L. (1987). Ein statistisches Modell für die Genauigkeit der Informationsübertragung bei Intersymbolinterferenz. 15. Verkehrswiss. Tage an der HfV "Friedr. List" Dresden, Tagungsberichte H. 5, S. 47 – 48.

187 PADITZ, L. (1987). Ob odnoj ocenke ostatočnogo člena v lokal'noj predel'noj teoreme dlja vzvešennych summ nezavisimych slučajnych veličin. Statistics 18, 3, 415 – 422.

189 PADITZ, L. (1987). The Mean Central Limit Theorem for Martingale Differences. in: "Limit Theorems in Probability Theory and Related Fields" p. 49 – 58. (TU Dresden)

190 PADITZ, L. | ŠARACHMETOV, Š. (1988). A Mean Central Limit Theorem for Multiplicative Systems. Math. Nachr. ~~(to appear)~~ 139, 87-94.

191 PADITZ, L. (1988). A Non-Classical Error-Estimate in the Central Li-

mit Theorem. Math. Nachr. 135, 59 - 68.

192 PADITZ, L. (1988). On the Error-Bound in the Nonuniform Version of Esseen's Inequality in the L_p - Metric. Preprint P-MAT-26/88, Inst. f. Math. AdW der DDR, Berlin.

193 PAULAUSKAS, V.I. (1969). Ob odnom usilenii teoremy Ljapunova. Lit. mat. sb. 9, 2, 323 - 328.

194 PAULAUSKAS, V.I. (1971). O neravenstve sglaživanija. Lit. mat. sb. 11, 4, 861 - 866.

195 PAULAUSKAS, V.I. (1974). Ocenka ostatočnogo člena v predel'noj teoreme dlja slučaja ustojčivogo predel'nogo zakona. Lit. mat. sb. 14, 1, 165 - 187.

196 PAULAUSKAS, V.I. (1974). Ravnomernye i neravnomernye ocenki ostatočnogo člena v predel'noj teoreme s ustojčivym predel'nym zakonam. Lit. mat. sb. 14, 4, 171 - 185.

197 PAULAUSKAS, V.I. (1975). Dve neravnomernye ocenki ostatočnogo člena pri sbliženii raspredelenij dvuch summ nezavisimych slučajnych veličin. Lit. mat. sb. 15, 2, 77 - 91.

198 PETROV, V.V. (1955). O točnych ocenkach v predel'nych teoremach. Dokl. AN SSSR, 104, 180 - 182.

199 PETROV, V.V. (1965). Odna ocenka otklonenija raspredelenija summy nezavisimych slučajnych veličin ot normal'nogo zakona. Dokl. AN SSSR 160, 5, 1013 - 1015.

200 PETROV, V.V. (1966). Pis'mo v redakciju. Teorija verojatn. primen. 11, s. 362 .

201 PETROV, V.V. (1975). Sums of Independent Random Variables. Akademie-Verl. Berlin (Übers. der russ. Ausgabe, Nauka, Moskva 1972).

202 PETROV, V.V. (1987). Predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Nauka, Moskva.

203 POISSON, S.D. (1837). Recherches sur la probabilite des jugements, Paris.

204 PRAWITZ, H. (1972). Limits for a Distribution, if the Characteristic Function is given in a Finite Domain. Skand. Aktuarietidskr. 55, 2, 138 - 154 (Teil II dieser Arbeit nicht nachweisbar).

205 PRAWITZ, H. (1973). Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charakteristischen Funktion. Skand. Aktuarietidskr. 56, 1, 11-16.

206 PRAWITZ, H. (1974). Weitere Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charakteristischen Funktion. Scand. Actuarial J., No.1, 21 - 28.

207 PRAWITZ, H. (1975). On the Remainder in the Central Limit Theorem. Scand. Actuarial J., No. 3, 145 - 156 (Teil II dieser Arbeit nicht nachweisbar).

209 PROAKIS, J.G. (1983). Digital Communications, Mc Graw-Hill, New York

210 REVESZ, P. (1968). Die Gesetze der großen Zahlen. Basel.

211 RICE,S.O.(1973). Distribution of $\sum a_n | n$; a_n Randomly Equal to ±1 . Bell System Techn. J. 52, 7, 1097 - 1103.

212 RICHTER,G.(1979). Zur Verteilung der Norm des Lösungsvektors linearer Gleichungssysteme mit zufälligen Koeffizienten. Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. "Friedr. List" Dresden 26, 1, 79 - 84.

213 ROGOZIN,B.A.(1961). Nekotorye ekstremal'nye zadači v oblasti predel'nych teorem. Diss., Moskva.

214 ROSSBERG,H.-J.|JESIAK,B.|SIEGEL,G.(1985). Analytic Methods of Probability Theory. Akademie-Verl. Berlin.

215 ROSSBERG,H.-J.(1987). The Berry-Esseen inequalities derived from restricted convergence. Statistics (eingereicht).

216 ROTAR',V.I.(1970). Neravnomernaja ocenka skorosti schodimosti v mnogomernoj central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. primen. 15, 647 - 665.

217 ROTAR',V.I.(1975). K obobščeniju teoremy Lindeberga-Fellera. Mat. Zametki 18, 129 - 135.

218 ROTAR',V.I.(1978). O neklassičeskich ocenkach točnosti approksimacii v central'noj predel'noj teoreme. Mat. Zametki 23,143 - 154.

219 ROZOVSKIJ,L.V.(1974). O skorosti schodimosti v teoreme Lindeberga-Fellera. Vestn. Leningrad. univ., No.1, 70 - 75.

220 RUBIN,H.|SETHURAMAN,J.(1965). Probabilities of moderate deviations. Sankhya A27, No.2-4, 325 - 346.

221 RYCHLIK,Z.(1983). Nonuniform Central Limit Bounds with Application to Probabilities of Deviations. Teorija verojatn. primen. 28, 646 - 652.

222 SAKOJAN,S.K.(1974). Nekotorye ocenki funkcij raspredelenija summ slučajnych veličin. in: "Slučajnye processy i statist. vyvody", FAN, Taškent, No.4, 136 - 151.

223 SAKOJAN,S.K.(1975). Nekotorye predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. in: "Slučajnye processy i statist. vyvody", FAN, Taškent, No.5, 132 - 140.

224 SALACHUTDINOV,R.Z.(1978). Ob utočnenii ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. primen. 23, 688 - 692.

225 ŠARACHMETOV,Š.(1978). Ocenka ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme dlja sil'no mul'tiplikativnoj sistemy funkcij. in: "Verojatn. processy i matem. statistika", FAN, Taškent, 178 - 182.

226 ŠARACHMETOV,Š.(1981). Verojatnosti umrennych uklonenij dlja absoljutno reguljarnych processov. III. Internat. Conference on Prob. Theory and Math. Statist., Abstracts of Communications vol. II, 246 - 247.

227 ŠARACHMETOV,Š.(1982). Verojatnostnye neravenstva dlja sil'no mul'tiplikativnych sistem. Izv. AN UzSSR, Ser. fiz.-mat. nauk, 26, 34 - 37.
228 SASVARI,W.|WOLF,W.(1987). On the Existence of the Density of Weighted Sums. in: "Limit Theorems in Probability Theory and Related Fields", 89 - 102, (TU Dresden).
229 SAULIS,L.|STATULEVIČIUS,V.(1976). O bol'šich uklonenijach v scheme summirovanija slučajnych veličin s vesami. Lit. mat. sb. 16, 2, 145 - 154.
230 SAULIS,L.(1979). O bol'šich uklonenijach v scheme summirovanija slučajnych veličin s vesami. Lit. mat. sb. 19, 2, 179 - 187.
231 SAZONOV,V.V.(1981). Normal Approximation - Some Recent Advances. Lect. Notes in Math. 879.
232 SAZONOV,V.V.(1982). On normal approximation in Banach spaces. in: Lect. Notes in Control and Inform. Sci. 42, 344 - 352.
233 SAZONOV,V.V.|ZALESSKIJ,B.A.(1983). On the Central Limit Theorem in Hilbert Space. Preprint - Techn. Rep. No.35, Univ. North Carolina.
234 SAZONOV,V.V.|ZALESSKIJ,B.A.(1985). On the Central Limit Theorem in Hilbert Space. in: "Multivariate Analysis - VI" (ed. Krishnaiah,P.R.), p. 495 - 526.
235 SCHÄBE,H.(1985). Zur Parameterschätzung in einem Modell der forcierten Lebensdauerprüfung. Preprint P-MECH-01|85, Inst. f. Mech. der AdW der DDR, Berlin.
236 SCHÄBE,H.(1987). Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion unter Zuhilfenahme von Edgeworth-Reihen. Wiss. Z. Hochsch. Verkehrsw. "Friedr. List" Dresden 34, 3, 533 - 539.
237 SCHÄBE,H.(1987). Schiefe und Exzeß als Teststatistiken. Statistics 18, 4, 613 - 621.
238 SCHÄBE,H.(1987). Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit von k-aus-n-Systemen. msr 30, 5, 221 - 223.
239 SCHATTE,P.(1975). Zur Anwendung von Limitierungsverfahren auf das Gesetz der großen Zahlen. Math. Nachr. 65, 179 - 182.
240 SCHATTE,P.(1975). Zum Gesetz der Großen Zahlen für allgemeinere Mittel. Math. Nachr. 65, 183 - 186.
241 SCHMIDT,W.H.|ZWANZIG,S.(1986). Second order asymptotics in nonlinear regression. J. Multivar. Analysis 18, 187 - 215.
242 SCHNABEL,W.|LOHSE,D.(1980). Grundlagen der Straßenverkehrstechnik und der Straßenverkehrsplanung. Transpress-Verl. Berlin.
243 ŠIGANOV,I.S.(1982). Ob utočnenii verchnoj ocenki konstanty v ostatočnogo člene central'noj predel'noj teoreme. in: "Problemy ustojcivosti stochasticeskich modelej", 109 - 115, Moskva.
244 SIRAŽDINOV,S.CH.|GAFUROV,M.U.(1973). Zamečnie k odnoj predel'noj

teoreme. in: "Slučajnye processy i statist. vyvody", FAN, Taškent, No.3, 170 – 172.

245 SIRAŽDINOV,S.CH.|FORMANOV,Š.K.(1979). Predel'nye teoremy dlja summ slučajnych vektorov, svjazannych v cep' Markova. FAN, Taškent.

246 STEIN,C.(1970). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., vol. II, 582 – 602, Univ. of California Press (1972), Berkeley.

247 STEINEBACH,J.(1976). Exponentielles Konvergenzverhalten von Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Diss., Düsseldorf.

249 STEJŠUNAS,S.P.(1974). Ob ocenke skorosti schodimosti v predel'noj teoreme v slučae ustojčivogo predel'nogo zakona. Lit. mat. sb. 14, 3, 179 – 185.

250 STROBEL,J.(1978). Konvergenzraten in zentralen Grenzwertsätzen für Martingale. Diss., Bochum.

251 STUDNEV,JU.P.(1961). O skorosti v srednem k normal'nomu zakonu. Dokl. i soobšč. Užg. univ., ser. fiz.-mat. nauk, No.4, 96–97.

252 STUDNEV,JU.P.(1961). Neskol'ko predel'nych teorem dlja plotnostej. Dokl. i soobšč. Užg. univ., ser. fiz.-mat. nauk, No.4, 98–100

253 STUDNEV,JU.P.(1963). Ob odnoj universal'noj ocenke. in: "Predel'nye teoremy teorii verojatnostej", FAN, Taškent, 131 – 135.

254 STUDNEV,JU.P.(1965). Zamečanie po povodu teoremy Kaca–Petrova. Teorija verojatn. primen. 10, 4, 751 – 753.

255 STUDNEV,JU.P.|IGNAT,JU.I.(1967). Ob utočnenii central'noj predel'noj teoremy i ee global'nogo varianta. Teorija verojatn. primen. 12, 3, 562 – 567.

256 SURVILA,P.(1962). K voprosu ob ostatočnom člene v central'noj predel'noj teoreme. Lit. mat. sb. 2, 1, 179 – 194.

257 SURVILA,P.(1963). O lokal'noj predel'noj teoreme dlja plotnostej. Lit. mat. sb. 3, 1, 225 – 236.

258 TAKANO,K.(1950). A remark to a result of A.C.Berry. (in Japan.) Kakyuraku of Inst. Statist. Math. 6, No.9, 408 – 415.

259 THRUM,R.(1987). A remark on almost sure convergence of weighted sums. Probab. Theory and Related Fields 75, 425 – 430.

260 TYSIAK,W.(1983). Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry-Esseen Abschätzungen. Diss., Wuppertal.

261 ULJANOV,V.V.(1978). K utočneniju ocenok skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. primen. 23, 684 – 688.

262 VAKHANIA,N.N.(1981). Probability Distributions on Linear Spaces. Elsevier North Holland, New York.

263 VORONOVA,M.L.(1972). Ob ocenke ostatočnogo člena v central'noj

predel'noj teoreme. Vestn. Leningrad. univ., No.19, 9 – 13.
264 WALLACE,D.L.(1958). Asymptotic approximations to distributions. Ann. Math. Statist. 29, 635 – 654.
265 WALLACE,D.L.(1959). A corrected computation of Berry's bound for the central limit theorem error. Stat. Res. Cent., Univ. of Chicago.
266 WOLF,W.(1976). Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Diss. B, TU Dresden.
267 WOLF,W.(1980). Some remarks on large deviations for weighted sums if Cramer's condition is not satisfied. Banach Center Publ. vol.6 (Math. Statist.), 347 – 352.
268 WOLF,W.(1982). Eine Bemerkung zur Berry-Esseen-Ungleichung für Abelsche Summen. Wiss. Z. TU Dresden 31, 215 – 217.
269 WOLF,W.(1984). Der zentrale Grenzwertsatz und Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen für Summen $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\delta)X_k$. MOS, Ser. statistics, 15, 389 – 395.
270 WOLF,W.(1985). Lokale Grenzwertsätze für gewichtete Summen. Statistics 16, 243 – 247.
271 WOLF,W.|SASVARI,Z.(1986). Neskol'ko zamečanij o suščestvovanii plotnosti summ s vesami. in: "Verojatnostnye raspredelenija i matem. statistika", FAN, Taškent, 83 – 94.
272 ZOLOTAREV,V.M.(1967). A sharpening of the inequality of Berry-Esseen. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. 8, 32 – 42.
273 ZOLOTAREV,V.M.(1971). Ocenka različenija raspredelenij v metrike Levi. Trudy matem. inst. im. Steklova 112, 224 – 231.
274 ZOLOTAREV,V.M.(1973). Exactness of an Approximation in the Central Limit Theorem. Lect. Notes in Math. 330, 531 – 541.
275 ZOLOTAREV,V.M.(1973). Ocenka blizosti dvuch svertok raspredelenij. Internat. Conf. on Prob. Theory and Math. Statist., Vilnius, Abstr. of Comm., vol.1, 257 – 259.
276 ZOLOTAREV,V.M.(1986). Sovremennaja teorija summirivanija nezavisimych slučajnych veličin. Nauka, Moskva.
277 ZUPAROV,T.M.|ŠARACHMETOV,Š.(1983). O verojatnosti umerennych uklonenij. in: "Slučajnye processy i matem. statist.", FAN, Taškent, 73 – 80.
278 ZYGMUND,A.(1959). Trigonometric Series. vol.II, Cambridge.
279 PAULAUSKAS,V.I.|RAČKAUSKAS,A.JU.(1987). Točnost' approksimacii v central'noj predel'noj teoreme v banachovych prostranstvach. Mokslas, Vil'njus.
280 HALL,P.|NAKATA,T.(1986). On non-uniform and global descriptions of the rate of convergence of asymptotic expansions in the central limit theorem. J. Austral. Math. Soc. 41A, 326 – 335.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit

"Beiträge zur expliziten Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz"

selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt und an keiner anderen Einrichtung als Promotionsschrift B eingereicht habe.

Dresden, am 1. Juni 1988

Ludwig Paditz

Thesen

zu der beim Wissenschaftlichen Rat der
Hochschule für Verkehrswesen "Friedrich List"
Dresden eingereichten Dissertation B

Beiträge zur expliziten Fehlerabschätzung
im zentralen Grenzwertsatz

vorgelegt von: Dr. rer. nat. Ludwig Paditz
geb. am 18.09.1951 in Meißen

Dresden, am 1. Juni 1988

1. Die Summationstheorie nimmt unter den verschiedenartigsten Forschungsrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie einen bedeutenden Platz ein und ist in unserer heutigen Zeit nicht mehr allein von theoretischem Interesse. Anwendungen z.B. in der mathematischen Statistik, der statistischen Physik, der statistischen Mechanik, der Informations- und Zuverlässigkeitstheorie und Nachrichtentechnik unterstreichen die Notwendigkeit der Untersuchung von Summationsprozessen, um im Fall der Gültigkeit eines zentralen Grenzwertsatzes mit der gut handhabbaren Normalverteilung näherungsweise rechnen zu können.
Ausgehend von der Notwendigkeit der Untersuchung von Summationsprozessen mit Normalapproximation entsteht unwillkürlich die Frage nach qualitativ wie auch quantitativ brauchbaren Fehlerabschätzungen, um die Güte der Approximation mit der Normalverteilung zu analysieren.
In der vorgelegten Dissertationsschrift werden Beiträge zu neueren Problemstellungen aus der Summationstheorie von Zufallsgrößen untersucht, die entweder unabhängig sind oder im Falle der Abhängigkeit als Martingaldifferenzfolge bzw. stark multiplikatives System auftreten. Es handelt sich dabei um Problemstellungen, die erst in den letzten 10 bis 20 Jahren durch eine zunehmende Zahl von Einzelbeiträgen in der Literatur behandelt worden sind und zu denen es noch keine zusammenfassenden Monografien gibt.
Ausgehend von dem Stand, der etwa in den Büchern von PETROV(1975, 1987), SAZONOV(1981), HALL(1982) und HALL|HEYDE(1980) sowie in einem Übersichtsartikel von MORICZ|REVESZ(1980) gegeben ist, wird im einleitenden Kapitel die neueste Literatur der letzten Jahre eingeordnet und diskutiert. Dabei werden verschiedene Entwicklungstendenzen herausgearbeitet und Anknüpfungspunkte genannt, die dann im Rahmen dieser Dissertation bearbeitet wurden.
Insbesondere seien hier die zum Abschluß gebrachten Untersuchungen über die analytische Struktur der auftretenden absoluten Konstanten in der ungleichmäßigen Fehlerabschätzung von BIKELIS(1966) erwähnt, einschließlich der Klärung dieses Problems in der L_p-Metrik, $p \geq 1$, (s. These 6).
Es kann festgestellt werden, daß sich die Summationstheorie von Zufallsgrößen auch weiterhin als Eckpfeiler der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie erweist, wobei aus heutiger Sicht die Untersuchung immer mehr zu Grenzwertsätzen für abhängige Zufallsgrößen tendiert. In diesem Sinne ergaben sich die Beiträge zu den bereits oben genannten zwei Klassen abhängiger Zufallsgrößen, wobei auch dort z.T. neue quantitative Restgliedabschätzungen für Summationsprozesse mit Normalapproximation abgeleitet werden.

2. Neben der klassischen Summationstheorie für Folgen unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bzw. $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ (n-te Serie im Serienschema) oder Zufallsvektoren im R^k (Abschnitt 1.2.4) bzw. Zufallselementen im Raum l_2 (Abschnitt 6.1) werden die Limitierungsverfahren mit einer unendlichen Summationsmatrix (λ_{Nk}), $k=0,1,2,\ldots$ und $N=1,2,\ldots$, (bei stark multiplikativen Systemen) oder einer angepaßten Folge $(\alpha_k(v))$, $k=0,1,\ldots$ und $v\in(0,1)$, von Gewichtsfunktionen (bei unabhängigen Zufallsgrößen oder Martingaldifferenzen) betrachtet.
Der wichtige Fall einer Summation mit zufälligem Index wird nur kurz erwähnt (Abschnitt 3.1.3), indem ein gemeinsam mit RYCHLIK erzieltes Ergebnis vorgestellt wird.

3. Neben dem LJAPUNOV-Bruch $L_{2+\delta,n}$ der Ordnung $2+\delta$, $\delta\in(0,1]$, werden verschiedenartige Momentcharakteristika zur Fehlerabschätzung herangezogen, wobei die abgeschnittenen Momente bis hin zur 4. Ordnung eine große Rolle spielen. Eine kurze Diskussion über Pseudo- und Differenzmomente ("nichtklassische" Fehlerschranken) wird in Abschnitt 3.1.2 geführt.

4. Die Untersuchung des Verhaltens von Folgen (S_n), $n=1,2,\ldots$, bzw. (S_v), $v \to 1-0$, wobei die Zufallsgrößen S_n bzw. S_v über einen Summationsprozeß entstehen (z.B. $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$, $S_v = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v)X_k$), wird an Hand der charakteristischen Funktionen (Kapitel 1), Verteilungsfunktionen (Kapitel 2 bis 4) oder Dichtefunktionen (Kapitel 5), falls diese existieren, vorgenommen.

5. Im Kapitel 1 werden ausschließlich ungleichmäßige Fehlerschranken für die Normalapproximation von charakteristischen Funktionen $f_n(t) = Ee^{itS_n}$ bzw. $f_v(t) = Ee^{itS_v/B_v}$ bereitgestellt, um diese dann in verschiedenen Glättungsungleichungen für die Normalapproximation von Verteilungsfunktionen oder Dichten auszunutzen.
Dabei werden auch die 1. und 2. Ableitung der charakteristischen Funktionen betrachtet.
Zur Illustration wird Ungleichung (1.22) angegeben:

$$|f_n(t)-g(t)| \leq \left(\left(\tfrac{1}{6}|t|^3+\tfrac{1}{8}lt^4\right)c_n+\left(t^2+\tfrac{1}{4}l^2t^4\right)b_n^*\right)\exp\left(-\tfrac{1}{2}mt^2\right) \quad \text{für}$$

$|t| \leq (a_1c_n+a_2b_n^*)^{-1}$. Dabei sei die Momentcharakteristik $b_n^*+c_n$ durch l^3 ($= a_1^{-2}a_2/\sqrt{6}$) nach oben beschränkt. Die Konstante $m>0$ ist ebenfalls wie l über die Parameter a_1 uns a_2 erklärt. $g(t)$ bezeichnet die charakteristische Funktion einer $N(0,1)$-Verteilung.
Die Herausarbeitung eibes derartig exakten Zusammenhangs zwischen

dem t-Intervall und der Fehlerschranke mittels frei wählbarer Parameter wird in jedem Falle vorgenommen. Dabei werden viele bekannte Ungleichungen dieses Typs präzisiert und auch neue Ungleichungen erhalten (s. Abschnitt 1.3).

6. Im Kapitel 2 wird die direkte Beweistechnik für Verteilungsfunktionen so weit ausgebaut, daß darauf aufbauend genaue Aussagen zur analytischen Struktur für die absoluten Konstanten in ungleichmässigen Fehlerabschätzungen für die Differenz normierter Summenverteilungsfunktionen $F_n(xB_n)$ und der $N(0,1)$-Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ möglich werden. Insbesondere wird das abschließende Ergebnis

$$(1+|x|^3)|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq 31{,}935\ L_{3,n} \quad \text{(s. (0.5), (0.6))}$$

abgeleitet, das in ähnlicher Form im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen 1981 von MICHEL erhalten wurde.
Für die L_p-Metrik wird auf Grund der präzisierten Beweistechnik erstmalig eine Konstantenabschätzung in der Ungleichung

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|^{3-1/p})|F_n(xB_n)-\Phi(x)|)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 127{,}74\ \sqrt[p]{7{,}31}\ \ L_{3,n}$$

möglich (s. (0.7) und Abschnitt 4.1.2).
Mit diesen Resultaten werden gleichzeitig einige in der Literatur vorhandenen Unkorrektheiten bei der Beweisführung beseitigt. Betreffs der Konstantenabschätzung in der ESSEEN'schen Ungleichung wird auf die Resultate von ŠIGANOV(1982) und TYSIAK(1983) hingewiesen.
Die bekannte Beweisidee der Zerlegung der reellen x-Achse in die drei x-Zonen A_1, A_2 und A_3 der sogenannten "gewöhnlichen", "mittleren" und "großen" x-Werte wurde durch die Präzisierung der dabei benötigten Funktion $c_{n,\delta,a,\beta}(x)$, vgl. (2.5) und Abschnitt 2.2, weiter abgerundet und führte zu den vorstehenden Ergebnissen.
Am Ende des 2. Kapitels wird die STEIN'sche Beweistechnik betrachtet, die aber nicht zur Verbesserung der in These 7 angegebenen quantitativen Fehlerabschätzung führt.

7. Im Kapitel 3 werden Restgliedabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz untersucht und dabei zuerst Situationen mit unendlichen Streuungen analysiert (vgl. (3.1), (3.2), (3.4) und (3.5)). Dabei wird erneut auf ein bei KOROLJUK(1978) angegebenes Beispiel eingegangen und die Konvergenzgeschwindigkeit abgeschätzt. Im Fall endlicher Streuungen lautet ein wichtiges Ergebnis (vgl. (3.9))

$$\sup_x |F_n(xB_n) - \Phi(x)| \leq 3{,}51 \sum_{k=1}^{n} E \min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right),$$

das über die Methode der charakteristischen Funktionen mittels der

in These 5 angegebenen Ungleichung bewiesen wird.
Im Fall der gewichteten Summation werden die in These 2 beschriebenen Limitierungsverfahren untersucht und entsprechende Restgliedabschätzungen angegeben, wobei im Falle abhängiger Zufallsgrößen stets mit einer Beschränktheitsvoraussetzung, vgl. (1.45) oder (1.52), für die Zufallsgrößen gearbeitet wird. Für die Martingaldifferenzfolge wird zusätzlich die Konstantheit der bedingten Varianzen, vgl. (1.44), angenommen. Es wird jedoch hier ein Ausblick auf Verallgemeinerungen gegeben, vgl. Satz 3.18, und in diesem Zusammenhang auf Mischverteilungen (quasigaußsche Verteilungen) hingewiesen.

8. Kapitel 4 beinhaltet Abschätzungen im globalen zentralen Grenzwertsatz und gibt u.a. in Analogie zu dem in These 7 wiedergegebenen Resultat das Ergebnis, vgl. (4.4),

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(xB_n) - \Phi(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 3{,}51 \left(\frac{33{,}40}{3{,}51}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{n} E\min\left(\frac{X_k^2}{B_n^2}, \frac{|X_k|^3}{B_n^3}\right)$$

an $(p \geq 1)$. Entsprechende Abschätzungen werden für Martingaldifferenzen und stark multiplikative Systeme erhalten (unter den in These 7 angegebenen Einschränkungen).

9. Im Kapitel 5 werden lokale Grenzwertsätze bei gewichteter Summation unabhängiger Zufallsgrößen betrachtet. Dabei wird wieder an der bekannten PETROV-Bedingung festgehalten.
Abschließend wird, wie auch im Abschnitt 3.1.5, eine einfache asymptotische Entwicklung studiert, jeweils aufbauend auf einer entsprechenden asymptotischen Entwicklung für charakteristische Funktionen (vgl. (0.14)):

$$\left|f_v(t) - g(t)\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\exp(itZ_{vk}) - \sum_{j=0}^{2} \frac{1}{j!}(itZ_{vk})^j\right)\right)\right| \leq \ldots$$

In den Restgliedabschätzungen spielen die Momentcharakteristika ρ_v, ψ_v und τ_v eine Rolle.
Eine ungleichmäßige Fehlerabschätzug mit anschließendem Beispiel runden die kurzen Untersuchungen zu asymptotischen Entwicklungen ab (vgl. Satz 3.16).

10. Kapitel 6 beinhaltet Anwendungssituationen der erzielten Resultate bei der Normalapproximation von Summen von Zufallselementen im Raum l_2, in der Nachrichtentechnik (gewichtete Summation) oder in der Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen. Hier wird insbesondere auch noch einmal auf den Zusammenhang zwischen den Ordnungsstatistiken und der Summationstheorie hingewiesen. 25 Hinweise auf weitere theoretische und praktische Probleme (Kapitel 7) beschließen die vorliegende Arbeit.

11. Als wesentliche Hilfsmittel zum Erhalt expliziter Fehlerabschätzungen dienten numerische Verfahren (z.B. allgemeines Iterationsverfahren auf Grundlage einer Fixpunktgleichung, s. (2.18) und (2.19) oder Beweis zu Satz 3.6) zur optimalen Wahl freier Parameter, die zur Beschreibung von t- oder x-Intervallen dienen oder bei der Einführung der konjugierten Verteilungen (s. (0.24)) auftreten. Genau diese Parameter gehen in die analytische Struktur auftretender (absoluter) Konstanten ein (neben der Ordnung $2+\delta$, $\delta \in (0,1]$, existierender Momente der Zufallsgrößen und der Zahl $p \geq 1$ aus der L_p-Metrik).
Umfangreichere Rechnungen wurden über BASIC-Programme am PC 1715 realisiert.

Ergänzungen zum Literaturverzeichnis:

188 PADITZ, L. (1988). On the Error-Bound in the Nonuniform Version of Esseen's Inequality in the L_p- Metric and its Application. 18. Europ. Meeting of Statisticians, Berlin, Thesen.

281 HAEUSLER, E. (1988). On the Rate of Convergence in the Central Limit Theorem for Martingales with Discrete and Continuous Time. Ann. Prob. 16, No.1, 275 - 299.

282 KRAJKA, A. | RYCHLIK, Z. (1988). The Order of Approximation in the Central Limit Theorem for Random Summation. Acta Math. Hung. 51, No. 1-2, 109 - 115.

01210|20|88 40x