Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer Beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

Der Fakultät für Naturwissenschaften und Mathematik des Wissenschaftlichen Rates der Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor des Wissenschaftszweiges Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

vorgelegte Dissertation.

P a d i t z, Ludwig
geboren am 18.09.1951
in Meißen

Tag der Einreichung: 30.04.1977

Gutachter: Prof. V. Petrov, Dr. d. phys.-math. Wiss. Staatl. Univ. Leningrad
Doz. A. Semjonov, Kand. d. phys.-math. Wiss. Inst. f. Wirtschaftswiss. Novosibirsk
Doz. W. Wolf, Dr. sc. nat. Sektion Math. TU Dresden

Genehmigt/ ~~nicht genehmigt~~

Vertraulichkeitsgrad: keiner

Prof. Dr. rer. nat. habil. K.-H. Körber
(Vorsitzender der Prüfungskommission)

Tag der öffentlichen Verteidigung: 25.08.1977

Meinen Eltern gewidmet

Ludwig Paditz
28. April 1977

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I
Einleitung 1-14
1. Zur Entwicklung der Theorie der Grenzwertsätze 1
2. Zum Problem der Approximation von Verteilungsfunktionen . . . 3

Kapitel II
Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion 14-24
1. Allgemeine Bemerkungen 14
2. Zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zu einer unbegrenzt teilbaren Grenzverteilungsfunktion mit Hilfe von Pseudomomenten. . . . 17

Kapitel III
Ungleichmäßige Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen 24-29
1. Allgemeine Sätze zur Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen 24
2. Spezielle Abschätzungen der Differenz einer Verteilungsfunktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung . 26
3. Eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz der Binomialverteilungsfunktion zur POISSONschen Verteilungsfunktion. . . . 28

Kapitel IV
Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung 29-48
1. Allgemeine Bemerkungen 29
2. Ungleichmäßige Abschätzungen der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ für große x. 32
3. Ungleichmäßige Abschätzungen für die Verteilungsfunktion $\emptyset(x)$ der standardisierten Normalverteilung. 35
4. Ungleichmäßige Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung 37
5. Zur numerischen Bestimmung der absoluten Konstanten in den Ungleichungen von S.V.NAGAEV und A.BIKELIS 40

Kapitel V
Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe

unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente 48- 62
1. Allgemeine Bemerkungen 48
2. Ungleichmäßige Abschätzungen der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung 50
3. Zur numerischen Bestimmung der absoluten Konstanten in den Ungleichungen zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung 56

Kapitel VI
Integrale Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen 62- 74
1. Allgemeine Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen mit Angabe der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit. 62
2. Die Existenz von Momenten als notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit von Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen. . . 69
3. Ein Grenzwertsatz für Doppelfolgen unabhängiger Zufallsgrößen unter der Voraussetzung endlicher Streuungen. 74

Kapitel VII
Beweis der Ergebnisse zu den mittels Pseudomomente gewonnenen Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im Falle einer unbegrenzt teilbaren Grenzverteilungsfunktion 75- 84
1. Beweis des Satzes 2.2.1. 75
2. Beweis der Folgerungen 2.2.1 und 2.2.2 und der Sätze 2.2.2 bis 2.2.5 78
3. Beweis der Sätze 2.2.6 und 2.2.7 und der Folgerung 2.2.3. . . 81
4. Beweis des Satzes 2.2.8. 83

Kapitel VIII
Beweis der ungleichmäßigen Abschätzungen der Differenz zweier Verteilungsfunktionen 85- 92
1. Beweis der Sätze 3.1.1 und 3.1.2 und der Folgerungen 3.1.1 und 3.1.2 85
2. Beweis des Satzes 3.2.1. 88
3. Zum Beweis des Satzes 3.3.1 92

Kapitel IX
Beweis der Ungleichungen zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung 92-125

1. Beweis des Satzes 4.2.1 92
2. Zum Beweis der Folgerungen 4.2.1 und 4.2.2 97
3. Beweis des Satzes 4.2.2 und der Folgerungen 4.2.3 und 4.2.4 . 100
4. Beweis des Satzes 4.3.1 und des Lemmas 4.3.1 102
5. Beweis des Satzes 4.4.2 105
6. Zum Beweis der Sätze 4.4.3 bis 4.4.5 123

Kapitel X

Beweis der Abschätzungen der Abweichung der Summenverteilungsfunktion von der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente 125-141

1. Zum Beweis der Sätze 5.2.1 und 5.2.2 und der Folgerung 5.2.1 . 125
2. Beweis der Sätze 5.2.4 und 5.2.5 126
3. Beweis des Satzes 5.2.6 129
4. Beweis der Sätze 5.2.7 und 5.2.8 und Bemerkungen zu dem im Abschnitt 5.1 angeführten Beispiel 139

Kapitel XI

Beweis der Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen 142-172

1. Beweis des Satzes 6.1.1 142
2. Zum Beweis des Satzes 6.1.2 152
3. Beweis des Satzes 6.1.3 153
4. Zum Beweis der Sätze 6.1.4 und 6.1.5 159
5. Beweis des Satzes 6.3.1 162
6. Beweis der Sätze über die Existenz von Momenten 166

Kapitel XII

Anhang (Rechnerprogramme) 173-184

Literaturverzeichnis 185-194

Thesen

Kapitel I

Einleitung

1. Zur Entwicklung der Theorie der Grenzwertsätze

Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Zufallsgrößen nehmen unter den verschiedenartigsten Forschungsrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie einen bedeutenden Platz ein. Sie sind in unserer heutigen Zeit nicht mehr allein von theoretischem Interesse. Besonders in der Statistik haben die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie für die praktischen Anwendungen mehr und mehr an Bedeutung gewonnen.

Als zentrales Problem erweist sich dabei die Untersuchung des Grenzverhaltens von Folgen $(S_n)_{n=1,2,\ldots}$ von Zufallsgrößen oder deren Verteilungsfunktionen für $n \longrightarrow \infty$, wobei die Zufallsgrößen S_n, $n=1,2,\ldots$, selbst als Summe von unabhängigen Zufallsgrößen X_i, $i=1,2,\ldots,n$, bzw. X_{ni}, $i=1,2,\ldots,k_n$, aufgefaßt werden können.

In den vierziger Jahren, nach den hervorragenden Arbeiten von J.W.LINDEBERG [60], P.LEVY [59], S.N.BERNŠTEJN [10], H.CRAMÉR [24], A.J.CHINČIN [19,20], A.N.KOLMOGOROV [53], B.V.GNEDENKO [43,44], G.M.BAVLI [4], W.FELLER [35], W.DOEBLIN [31] und einer Reihe anderer Wissenschaftler, waren die grundlegenden Fragen der klassischen Summationstheorie weitgehend gelöst und darauf aufbauend setzte eine breite Entwicklung ein. Es wurden neue interessante Probleme aufgeworfen, die ihren Ursprung in der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen hatten, und tiefliegende Ergebnisse hervorgebracht.

Einen Überblick über die bis etwa Anfang der siebziger Jahre erzielten Resultate geben die Lehrbücher von B.V.GNEDENKO/A.N.KOLMOGOROV [45], I.A.IBRAGIMOV/J.V.LINNIK [50], V.V.PETROV [91] und R.N.BHATTACHARYA/ R.R.RAO [12].

Neben den Erfolgen in der Entwicklung der Summationstheorie selbst ergab sich eine Vielzahl tiefliegenderer und interessanter Resultate durch Anwendung dieser Theorie in den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft und Praxis, z.B. in der mathematischen Statistik (H.CHERNOFF [18], H.E.DANIELS [28], W.RICHTER [95], S.A.BOOK [15]), in der statistischen Mechanik (A.J.CHINČIN [21]), in der Zahlentheorie (I.P.KUBILJUS [57,58], J.V.LINNIK [62]), in der Informationstheorie (P.L.DOBRUŠIN [30], H.WOLD [111]) und in der statistischen Physik (A.J.CHINČIN [22], M.L.KATZ [52], M.V.VOL'KENŠTEJN [110], L.TRELOAR [109]).

Wie es sich zeigte, waren und sind neue Probleme in der Summationstheorie nicht nur durch die innere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sondern vor allem auch durch praktische Aufgaben aus den verschiedensten

Wissensgebieten hervorgegangen. Jedoch gehen wir im Rahmen dieser Arbeit nicht auf spezielle Ergebnisse ein, die bei der Behandlung dieser oder jener oben genannten Anwendungsprobleme gewonnen wurden.
Es sei $(F_n(x))_{n=1,2,\dots}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, die auf der reellen Achse definiert sind.
International haben sich in der Theorie der Grenzwertsätze zwei Hauptrichtungen herauskristallisiert:
Einerseits gilt es, Bedingungen aufzustellen, unter denen die Folge $(F_n(x))_{n=1,2,\dots}$ gegen eine vorgegebene Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ konvergiert, wobei $F(x)$ z.B. ganz allgemein eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion oder spezieller eine stabile Verteilungsfunktion und insbesondere die Verteilungsfunktion $\phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung sein kann. Die nunmehr bereits klassischen Grenzwertsätze geben hierauf eine Antwort. Darauf aufbauend entsteht unwillkürlich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit die Annäherung von $(F_n(x))_{n=1,2,\dots}$ gegen die Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ erfolgt, d.h. wie schnell die Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Dabei kann die Abschätzung der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ gleichmäßig bezüglich x oder nach n und x erfolgen, wobei x selbst auch eine Funktion von n sein kann.
Andererseits erhebt sich die Frage, welcher Fehler begangen wird, wenn die Verteilungsfunktion $F_n(x)$, die in praktischen Aufgaben eine oft recht komplizierte und nur schwer greifbare Struktur haben kann, durch eine andere Verteilungsfunktion $F(x)$ approximiert wird. Dabei wird primär eine Fehlerabschätzung der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ untersucht und nicht unbedingt mehr das Konvergenzverhalten von $(F_n(x))_{n=1,2,\dots}$ ins Auge gefaßt, d.h. n ist beliebig aber fest.
Wird nun anstatt der Folge $(F_n(x))_{n=1,2,\dots}$ ebenfalls eine beliebige aber feste Verteilungsfunktion $F_o(x)$ betrachtet, kommt man zu folgendem Problem: Die Abschätzung des Fehlers, der begangen wird, wenn eine beliebige Verteilungsfunktion $F_o(x)$ durch eine andere Verteilungsfunktion $F(x)$ ersetzt wird. Obwohl dieses Problem von der Aufgabenstellung her selbst nichts mehr mit Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu tun hat, ist es in natürlicher Weise aus der Theorie der Grenzwertsätze heraus entstanden und kann mit den in dieser Theorie gewonnenen Methoden bearbeitet werden.
Sowohl zur Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit in allgemeinen Grenzwertsätzen als auch zur Fehlerabschätzung bei der Approximation von

gewissen Verteilungsfunktionen durch andere Verteilungsfunktionen werden in der vorliegenden Arbeit Untersuchungen angestellt.

2. Zum Problem der Approximation von Verteilungsfunktionen

Die vorliegende Arbeit enthält Beiträge zu Problemstellungen aus der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen, die erstmalig in den fünfziger bzw. sechziger Jahren in der Literatur auftauchten und in den letzten zehn Jahren mit großem Interesse von mehreren Mathematikern untersucht worden sind. Es handelt sich dabei um folgende Problemkreise:

a) Annäherung von Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen und Angabe der Konvergenzgeschwindigkeit.

Nachdem in den oben erwähnten Arbeiten von A.J.CHINČIN [19,20], A.N.KOLMOGOROV [53] und P.LEVY [59] die Konvergenz gewisser Folgen von Verteilungsfunktionen gegen eine unbegrenzt teilbare Grenzverteilungsfunktion bereits in den dreißiger Jahren untersucht worden war, gelang es erstmalig J.M.SHAPIRO [16,104] und V.BOONYASOMBUT [16] 1955 und 1970 eine Fehlerabschätzung zu dieser allgemeinen Problemstellung anzugeben. Dabei spielte stets die sogenannte Infinitesimalitätsbedingung eine wesentliche Rolle, damit im Falle $n \rightarrow \infty$ die gefundenen Abschätzungen auch gegen Null konvergieren.

Auf einem Gedanken des Artikels [118] von V.M.ZOLOTAREV von 1965 aufbauend werden im Kapitel II der vorliegenden Arbeit Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit unter Benutzung gewisser Pseudomomente angegeben, wodurch die Infinitesimalitätsbedingung nicht mehr benötigt wird.

b) Ungleichmäßige Abschätzungen der Differenz zweier Verteilungsfunktionen.

1968 untersuchte S.F.KOLODJAŽNIJ [56] die Abschätzung der Differenz einer beliebigen Verteilungsfunktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Im Kapitel III der vorliegenden Arbeit wird dieses Problem noch allgemeiner gefaßt, indem (s. auch [83]) die Abschätzung der Differenz zweier beliebiger Verteilungsfunktionen untersucht wird. Dabei spielen Momente und Pseudomomente eine gewisse Rolle. Unter Voraussetzung der Existenz sogenannter einseitiger Momente gelingt es ebenfalls, entsprechende Abschätzungen zu der aufgeworfenen allgemeinen Fragestellung anzugeben. Schließlich werden aus den aufgestellten allgemeinen Sätzen Folgerungen abgeleitet, insbesondere ein zentraler Grenzwertsatz von C.G.ESSEEN [34] und eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz der Binomialverteilungsfunktion zur POISSONschen Verteilungsfunktion.

c) Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

Bekanntlich konvergiert die Verteilungsfunktion der standardisierten Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, wenn die einzelnen Zufallsgrößen endliche absolute Momente dritter Ordnung besitzen. In den Arbeiten von A.C.BERRY [11] und C.G.ESSEEN [34] wurden in den vierziger Jahren die nach ihnen benannten Ungleichungen bewiesen, die eine Abschätzung für die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz angeben. Die Bestimmung der dabei auftretenden absoluten Konstanten war und ist von unmittelbar theoretischem und praktischem Interesse. Darauf verwies 1953 A.N.KOLMOGOROV [54]. In den vergangenen Jahrzehnten widmeten sich mehrere Autoren diesem Problem, wie z.B. C.G.[redacted] [34], H.BERGSTRÖM [7], K.TAKANO [108], V.M.ZOLOTAREV [120,121] und P. VAN BEEK [5,6].
B.A.ROGOZIN [70,97], P.SURVILA [107], S.V.NAGAEV [77], A.BIKELIS [14] und andere Autoren untersuchten in den sechziger Jahren diese Fragestellung mit dem Ziel, gleichzeitig das Argument x der Verteilungsfunktionen in die Abschätzungen zum zentralen Grenzwertsatz einzubeziehen und erhielten folgende grundlegende Resultate:

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit endlichem absoluten dritten Moment $\beta_{3i}=E|X_i|^3$, $i=1,2,\ldots,n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Erwartungswerte gleich Null sind $EX_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Wir bezeichnen mit σ_i^2 die Streuungen der Zufallsgrößen X_i, $i=1,2,\ldots,n$. Es sei $B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2>0$, $V_i(x)=P(X_i<x)$ und $F_n(x)=P(\sum_{i=1}^{n}X_i<x)$. Damit ist $F_n(xB_n)$ die oben erwähnte Verteilungsfunktion der standardisierten Summe von n unabhängigen Zufallsgrößen. Im weiteren werden wir F_n Summenverteilungsfunktion nennen. Für identisch verteilte unabhängige Zufallsgrößen formulierte C.G.ESSEEN [34] bereits 1945 folgendes Ergebnis:

Für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x gilt die ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_n(x\sigma_1\sqrt{n})-\Phi(x)| \leq \gamma\left(\frac{\beta_{31}}{\sigma_1^3}\right)\frac{\ln(2+|x|)}{(1+|x|^3)\sqrt{n}} .$$

Dabei werden mit $\gamma(\frac{\beta_{31}}{\sigma_1^3})$ eine gewisse Funktion des Quotienten $\frac{\beta_{31}}{\sigma_1^3}$ und mit $\emptyset(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(\frac{-u^2}{2})du$ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnet.

C. G. ESSEEN [34] bewies hierzu, daß für $|x|>\sqrt{(1+\delta)\ln n}$, $0<\delta<1$, der logarithmische Faktor $\ln(2+|x|)$ nicht nötig ist. Es entstand die Frage, ob nicht dieser logarithmische Faktor für alle x durch 1 ersetzt werden kann. Anfang der sechziger Jahre wurden dazu mittels der Methode der charakteristischen Funktionen von B. A. ROGOZIN [70,97], L. D. MEŠALKIN [70] und P. SURVILA [107] Versuche unternommen. B. A. ROGOZIN [97] zeigte, daß in der obigen Ungleichung $\gamma(\beta_{3,1}/\sigma_1^3)=C_0\beta_{3,1}/\sigma_1^3$ gilt. Dabei ist C_0 eine absolute Konstante.

Im Fall identisch verteilter unabhängiger Zufallsgrößen erhielt B. A. ROGOZIN 1961 folgendes Resultat:

Satz 1.2.1([70,97]):Für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x gilt die ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_n(x\sigma_1\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq C_1\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3(1+x^2)\sqrt{n}}. \tag{1.1}$$

C_1 ist eine absolute Konstante.

P. SURVILA [107] verallgemeinerte 1962 dieses Ergebnis auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen:

Satz 1.2.2([107]):Für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x gilt die ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq C_2\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{3i}}{B_n^3(1+x^2)}. \tag{1.2}$$

C_2 ist eine absolute Konstante.

Erst mit der von S. V. NAGAEV [77] und A. BIKELIS [14] angewendeten direkten Beweismethode, der sogenannten Faltungsmethode, war es möglich, Mitte der sechziger Jahre die ungleichmäßige Abschätzung von C. G. ESSEEN [34] für alle x ohne den logarithmischen Faktor $\ln(2+|x|)$ zu beweisen. Für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen erhielt 1965 S. V. NAGAEV [77] folgendes Resultat:

Satz 1.2.3([77]):Für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x gilt die Abschätzung

$$|F_n(x\sigma_1\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq C_3\frac{\beta_{3,1}}{\sigma_1^3(1+|x|^3)\sqrt{n}}. \tag{1.3}$$

C_3 ist eine absolute Konstante.

Den allgemeineren Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen betrachtete A. BIKELIS [14]:

Satz 1.2.4([14]): Für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x gilt die Abschätzung

Das Ergebnis von A. Bikelis lautet allgemeiner $|\ldots| \leq C \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_{2+\delta, i}}{B_n^{2+\delta}(1+|x|^{2+\delta})}$ mit $0 < \delta \leq 1$.

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq C_4 \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_{3i}}{B_n^3(1+|x|^3)} . \qquad (1.4)$$

C_4 ist eine absolute Konstante.

Die Beweise von B. A. ROGOZIN [70,97] und P. SURVILA [107] bzw. von S. V. NAGAEV [77] und A. BIKELIS [14] zur ungleichmäßigen Abschätzung des Fehlers im zentralen Grenzwertsatz sind Existenzbeweise und gestatten kaum, Aussagen über Zahlenwerte der absoluten Konstanten C_1 bis C_4 zu machen.

Für die Aussagen von B. A. ROGOZIN und P. SURVILA wurden in den Arbeiten von H. OSWALD [82] und A. A. DŽAMIRZAEV/D. SATUBALDYEV [32] erstmalig für die absoluten Konstanten C_1 und C_2 mögliche Zahlenwerte angegeben.

A. A. DŽAMIRZAEV und D. SATUBALDYEV bewiesen 1975

$$C_1 = 103{,}25 .$$

Schon 1965 hatte sich H. OSWALD mit der numerischen Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 befaßt und Folgendes erhalten:

$$C_1 = 25{,}35 \quad \text{und} \quad C_2 = 153{,}5 .$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_3 und C_4 lagen bisher die Ergebnisse von L. PADITZ [84,85] vor. Im Kapitel IV der vorliegenden Arbeit wird bewiesen:

$$C_1 = 22{,}428 , \quad C_2 = 22{,}584 ,$$

$$C_3 = 114{,}172 \quad \text{und} \quad C_4 = 114{,}667 .$$

Außerdem werden im Kapitel IV einige weitere Ergebnisse abgeleitet, die mit der ungleichmäßigen Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ bzw. der ungleichmäßigen Abschätzung der Ausdrücke $1-F_n(x)$, $1-\Phi(x)$, $F_n(-x)$ und $\Phi(-x)$ für $x > 0$ im Zusammenhang stehen.

Durch die zahlenmäßige Bestimmung der absoluten Konstanten C_3 und C_4 wird damit eine breitere praktische Anwendung der Ungleichungen (1.3) und (1.4) möglich.

Mit der ungleichmäßigen asymptotisch echten Abschätzung des Restgliedes im zentralen Grenzwertsatz befaßte sich V. M. ZOLOTAREV [119] in einem Artikel. Er betrachtete verschiedene x-Intervalle und bewies für identisch verteilte Zufallsgrößen mit $EX_1=0$ und $EX_1^2=1$ folgende asymptotisch echte Abschätzungen für die Differenz $|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)|$:

$$|F_n(x\sqrt{n})-\emptyset(x)| \leq \begin{cases} 0{,}4097\,\dfrac{B_{3,1}}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n), \text{ falls} & |x|<0{,}5904 \\ \dfrac{0{,}2419}{|x|}\,\dfrac{B_{3,1}}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n), \text{ falls } 0{,}5904 \leq |x| < 1{,}4698 \\ \dfrac{0{,}5233}{|x|^3}\,\dfrac{B_{3,1}}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon_n), \text{ falls } 1{,}4698 \leq |x|\,. \end{cases}$$

ε_n ist von x unabhängig und konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null.
Unter schärferen Bedingungen hatten J.V.LINNIK [61] 1947 und später V.V. PETROV [88] bewiesen, daß für eine beliebige aber feste Konstante M und alle $|x| \leq M$ folgende Abschätzung richtig ist:

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) L_{3n}\,(1+\varepsilon_n(M)),$$

wobei $\varepsilon_n(M) \to 0$ für $n \to \infty$ und $L_{3n}=B_n^{-3}\sum_{i=1}^{n} B_{3i}$ gilt.

Ein Jahr nach der Arbeit [14] von A.BIKELIS veröffentlichte L.V.OSIPOV [79] eine ungleichmäßige Abschätzung der Form (1.3), die mit Hilfe der Methode der charakteristischen Funktionen erhalten wurde. V.PIPIRAS [92] verallgemeinerte diese Ergebnisse von L.V.OSIPOV auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen.
In der Arbeit von L.V.OSIPOV und V.V.PETROV [81] wird eine ungleichmäßige Abschätzung nach n und x angegeben, wobei es durch Einführung sogenannter abgeschnittener Zufallsgrößen gelang, auf die Voraussetzung der Existenz jeglicher Momente zu verzichten.
Weitere Arbeiten zur Abschätzung der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz wurden von A.BIKELIS [13], C.C.HEYDE [49], R.MICHEL [73] und anderen Mathematikern veröffentlicht.
Neben der Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\emptyset(x)|$ ergab sich als weitere Aufgabe die Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Reihen der Form besser: $n^{-1+\alpha}$ ($\alpha \geq 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sup_x |F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \quad (\alpha \text{ gewisse positive Zahl}).$$

N.FRIEDMAN/M.KATZ/L.H.KOOPMANS [40], C.C.HEYDE [47,48], F,N,GALSTJAN [41,42], V.K.ROHATGI [98] und andere widmeten sich dieser Problemstellung. In der Arbeit von G.CHRISTOPH [23] wird dieses Konvergenzproblem allgemeiner für eine stabile Grenzverteilungsfunktion betrachtet.

d) Abschätzung der Annäherung der Summenverteilungsfunktion gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente.

Untersuchungen zu dieser Aufgabenstellung werden im Kapitel V durchgeführt. Erste Ergebnisse dazu wurden in [84,85] veröffentlicht. An Hand eines Beispiels wird gezeigt, daß es Folgen unabhängiger Zufallsgrößen gibt, die nur endliche zweite Momente besitzen, aber durchaus die Existenz einseitiger dritter Momente gesichert ist. Es erhebt sich nun die Frage, ob auch in diesem Fall nicht zumindest auf einer reellen Halbachse die Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ ungleichmäßig durch x^{-3} abschätzbar ist. Anders verhält es sich mit der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit. Im Vergleich zu den Sätzen 1.2.3 und 1.2.4 von S.V.NAGAEV und A. BIKELIS erhält man hier eine andere Abschätzung für die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit. Da die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit von der Ordnung existierender absoluter Momente abhängig ist, ergibt sich im Fall der Existenz keiner höheren als zweiten Momente eine schlechtere Abschätzung bezüglich n. Im Kapitel V wird folgendes Ergebnis abgeleitet:

<u>Satz 1.2.5:</u> Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$, $D^2X_i=\sigma_i^2<\infty$, $B_n^2>0$ und es sei $E(X_i^+)^3=\int_0^\infty u^3 dV_i(u)$ $=\gamma_{3i}<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Wir verwenden die Abkürzungen

$g_{3i}=\max(\sigma_i^3,\gamma_{3i})$, $G_{3n}=\sum_{i=1}^n g_{3i}$ und $\Lambda_{3n}=B_n^{-3}G_{3n}$.

Wenn für $\Lambda_{3n}<1$ die Bedingung

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^n\int_{-\infty}^{-H_n}u^2dV_i(u) \leq \frac{1}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \text{ mit } H_n=\frac{B_n}{(\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2)^{3/2}} \qquad (1.5)$$

erfüllt ist, dann gilt für alle n mit $\Lambda_{3n}<1$ und für alle $x\geq 0$ die Abschätzung

16180R.

352,078

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{C_5}{(1+x^3)\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \text{ mit } C_5=(396{,}149). \qquad (1.6)$$

<u>Satz 1.2.6:</u> Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\sigma_i^2=1$ und $\gamma_{3i}\leq 1$ gilt unter der Bedingung (1.5) für alle natürlichen Zahlen $n>1$ und für alle reellen Zahlen $x\geq 0$ die Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\Phi(x)| \leq \frac{C_6}{(1+x^3)\ln n} \qquad \text{mit } C_6=(115{,}754). \qquad (1.7)$$

111,994

Die Bedingung (1.5) hat hierbei die einfachere Gestalt 16180R

$$\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_1(u) \leq \frac{1}{\ln n} \quad \text{mit} \quad H_n = \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{3/2}} \; (n > 1). \qquad (1.8)$$

Zwischen der logarithmischen Konvergenzgeschwindigkeit $\frac{1}{\ln n}$ in der Ungleichung (1.7) und der logarithmischen Konvergenzgeschwindigkeit $\frac{1}{\ln n}$ in der Bedingung (1.8) besteht ein Zusammenhang. Die Existenz allein der Streuung ist noch nicht ausreichend, um bezüglich n eine gewisse Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit zu erhalten, da in diesem Fall die Konvergenz gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung beliebig langsam erfolgen kann.

In der Arbeit von L.V.ROZOVZKIJ [100] werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Summenverteilungsfunktion gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung mit einer bestimmten Geschwindigkeit konvergiert. Diese Bedingungen haben folgende Form:

$$\int_{|u|>H_n} u^2 dV_1(u) = O\left(\frac{1}{\tilde{H}_n}\right).$$

Dabei sind H_n und $\tilde{H}_n$ gewisse Funktionen, die für $n \to \infty$ gegen Unendlich streben. In Abhängigkeit der Wachstumsordnung von H_n und $\tilde{H}_n$ werden bei L.V.ROZOVZKIJ im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen Konvergenzgeschwindigkeiten im zentralen Grenzwertsatz untersucht. Wenn speziell gilt $H_n = n^{\delta}$ und $\tilde{H}_n = \ln^{-p} n$, $\delta > 0$, $p > 0$, dann wird in [100] für die Konvergenz der Summenverteilungsfunktion $F_n(x\sigma_1\sqrt{n})$ gegen die Verteilungsfunktion $\emptyset(x)$ der standardisierten Normalverteilung genau eine Konvergenzgeschwindigkeit der Ordnung $\ln^{-p} n$, $p > 0$, erhalten.

Mit dieser Bemerkung sollen die Bedingungen (1.5) bzw. (1.8) motiviert werden. Aus der Beziehung $E(X_i^+)^3 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, folgt auch sofort für die Summen $\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{H_n}^{\infty} u^2 dV_i(u)$, also auf der positiven reellen Halbachse, die Abschätzung

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{H_n}^{\infty} u^2 dV_i(u) \leq \frac{1}{H_n B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{H_n}^{\infty} u^3 dV_i(u) \leq \left(\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{G_{3n}}{B_n^3} =$$

$$= \left\{ \frac{5 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^{2/5}}{\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^{2/5}} \right\}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} \leq \left(\frac{5}{e}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2}.$$

Hiermit ist im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen gesichert, daß in der Ungleichung (1.7) die Abschätzung bezüglich n die Ordnung $\frac{1}{\ln n}$ hat.

Der Beweisgedanke für die in den Kapiteln IV und V erhaltenen quantitativen Abschätzungen (1.1) bis (1.4), (1.6) und (1.7) beruht darauf, daß die reelle Achse in disjunkte Intervalle, sogenannte x-Zonen, zerlegt wird und daß in diesen x-Zonen eigenständige und qualitativ verschiedene Abschätzungen der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ nach n und x erhalten werden können. Eine solche Vorgehensweise ist in den oben genannten Arbeiten von J.V.LINNIK [61], V.V.PETROV [88] und V.M.ZOLOTAREV [119] schon praktiziert worden. Dieser Gedanke wurde in den Arbeiten von S.V.NAGAEV [77], A.BIKELIS [14] und L.PADITZ [84,85] weiter verfolgt und ausgebaut. Die vorliegenden Konstanten C_1 bis C_6 wurden schließlich mittels eines numerischen Iterationsverfahrens erhalten.

e) Integrale Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen.

In den klassischen Grenzwertsätzen wird das asymptotische Verhalten von Summenverteilungsfunktionen bei unbegrenzter Vergrößerung der Anzahl n der Summanden untersucht und dabei werden entsprechende Resultate nur für solche Argumente x angegeben, die in endlichen Intervallen bleiben. Will man jedoch bei unbegrenzt wachsender Anzahl der Summanden das Verhalten von Summenverteilungsfunktionen bei gleichzeitigem Anwachsen des Arguments x (bis $+\infty$ oder $-\infty$) untersuchen, so liefern die klassischen Grenzwertsätze nur triviale Ergebnisse: Die Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen konvergiert gegen 1 bzw. gegen Null. Eine wichtige Aufgabe der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen für große Abweichungen des Arguments x vom Nullpunkt ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der "Schwänze" der Summenverteilungsfunktion $F_n(xB_n)$, wenn x von n abhängt und für $n \to \infty$ unbeschränkt wächst. Als Maßstab für das asymptotische Verhalten der Schwänze von $F_n(xB_n)$ wird speziell das asymptotische Verhalten der Schwänze der Grenzverteilungsfunktion genommen. Insbesondere wurden bei den großen Abweichungen im zentralen Grenzwertsatz die Quotienten

$$\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)}$$

betrachtet. Das erste allgemeine Ergebnis zu dieser Problematik stammt für den Fall identisch verteilter unabhängiger Zufallsgrößen von H.CRAMÉR [25]. Die nach ihm benannte CRAMÉRsche Beweismethode, die auf der Benutzung sogenannter konjugierter Verteilungsfunktionen beruht, erwies sich als bahnbrechend und bestimmte die Entwicklung dieses jungen Zweiges der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen wesentlich. In der Folgezeit beschäftigten sich eine große Anzahl von Mathematikern mit diesem Problemkreis. Dabei wurde einerseits versucht, die an die Zufallsgröße X_1 gestellte CRAMÉRsche Bedingung

$$E\exp(tX_1) < \infty \quad , |t| < H, \ H > 0,$$

abzuschwächen (LINNIKsche Bedingung, NAGAEVsche Bedingung, Bedingung an die Existenz des Moments der Ordnung k, $k > 2$) und für die oben betrachteten Quotienten asymptotische Beziehungen in gewissen von n abhängigen x-Zonen zu erhalten. Andererseits wurden die hierzu erzielten Resultate auf den Fall verschieden verteilter unabhängiger Zufallsgrößen übertragen. In Abhängigkeit von der Wachstumsgeschwindigkeit des Arguments $x=x(n)$ gegen Unendlich kristallisierte sich Mitte der sechziger Jahre eine Unterteilung des Forschungsgebietes der großen Abweichungen heraus, und zwar finden wir in der Arbeit von H. RUBIN/J. SETHURAMAN [101] aus dem Jahre 1965 folgende Klassifikation der großen Abweichungen:

gewöhnliche Abweichungen,
mittlere Abweichungen,
große Abweichungen und
übergroße Abweichungen.

Die Grenzwertsätze für gewöhnliche Abweichungen des Arguments x vom Nullpunkt sind die klassischen Grenzwertsätze.
Unter Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen wird verstanden, daß lediglich gewisse Bedingungen an die Existenz der Momente der Ordnung k, $k > 2$, der Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ vorausgesetzt werden.
Wenn den Zufallsgrößen noch stärkere Bedingungen als nur die Existenz der k-ten Momente, $k > 2$, k beliebig, auferlegt werden, so können die x-Zonen, in denen die erhaltenen asymptotischen Beziehungen gelten, erweitert werden. Die dabei untersuchten Grenzwertsätze sind die eigentlichen Grenzwertsätze für große Abweichungen. Grenzwertsätze für übergroße Abweichungen sind noch verhältnismäßig wenig untersucht.
Die Betrachtungen zur Theorie der Grenzwertsätze mittlerer Abweichungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen haben in den letzten 10 Jahren eine rasche Entwicklung genommen. Viele eigenständige Arbeiten sind zu diesem Problemkreis erschienen, z.B. von H. RUBIN/J. SETHURAMAN [101], J.A. DAVIS [29], V.K. ROHATGI [98,99], N.N. AMOSOVA [1], R. MICHEL [71], W. WOLF [114] und L. PADITZ [85].
Im Kapitel VI werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen untersucht. Gleichzeitig wird die einseitige Fragestellung betrachtet, d.h. unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente wird das asymptotische Verhalten der Summenverteilungsfunktionen auf einer reellen Halbachse studiert. Dabei werden bekannte Grenzwertsätze verallgemeinert, indem

die bisherigen Voraussetzungen abgeschwächt und die x-Zonen genaustens studiert werden, so daß mit der vorliegenden Arbeit die Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen eine gewisse Abrundung erhalten. Gleichzeitig wird in den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen das auftretende Restglied angegeben.

Wir führen an dieser Stelle zwei wichtige Resultate an:

Satz 1.2.7: Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$, $\sigma_i^2<\infty$, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$, und

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}B_n^2>0, \tag{1.9}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^q<\infty \text{ für ein } q=2+c_o^2,\ c_o>0. \tag{1.10}$$

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet $1\leq x\leq c\sqrt{\ln n}$, $c>0$, folgende asymptotische Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)}&=1+O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{n^t}\right), \text{ falls } c<c_o,\\ \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)}&=1+O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{n^t}\right), \text{ falls } c<c_o,\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

mit $t=\min\left(\frac{c_o^2-c^2}{2}, \frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)\right)$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)}&=1+o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln n}\right), \text{ falls } c\leq c_o,\\ \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)}&=1+o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln n}\right), \text{ falls } c\leq c_o.\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Daß in gewissem Sinne die Existenz der absoluten Momente der Ordnung $2+c_o^2$, $c_o>0$, für die Gültigkeit asymptotischer Beziehungen vom Typus (1.11) bzw. (1.12) notwendig ist, zeigt folgender Satz:

Satz 1.2.8: Es sei F_n die Summenverteilungsfunktion einer beliebigen Folge unabhängiger Zufallsgrößen. Es mögen solche positiven Konstanten $\varepsilon>0$, $b>0$ und $c>0$ existieren, so daß für $n\to\infty$

$$1-F_n(\varepsilon x\sqrt{n})\leq b\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \text{ und } F_n(-\varepsilon x\sqrt{n})\leq b\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \tag{1.13}$$

mit $x=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$ ist.

Dann gilt für alle $i=1,2,\ldots$ und $0\leq c_o<c$

$$E|X_i|^{2+c_o^2}<\infty. \tag{1.14}$$

Im Fall $c=c_0$ leitete V.K.ROHATGI [99] aus einer etwas stärkeren Voraussetzung als (1.13) die Gültigkeit der Bedingung (1.14) ab.
Wir bemerken, daß in dem hier formulierten Grenzwertsatz 1.2.7 nur die Existenz der Momente der Ordnung $2+c_0^2$, $c_0>0$, und nicht wie bisher in vielen Arbeiten mindestens dritte Momente vorausgesetzt werden.
Entsprechende Ergebnisse werden für die schon oben erwähnte einseitige Fragestellung erhalten. Dabei spielt wieder eine Bedingung ähnlich der Beziehung (1.5) eine wesentliche Rolle.
Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen kann in der Bedingung (1.13) das Argument x sogar gleich $\sqrt{c \ln n}$ gesetzt werden, um die Aussage (1.14) zu erhalten (s. Satz 6.2.1'). Hieraus ergibt sich im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen, daß die Voraussetzung

$$E|X_1|^{2+c_0^2}<\infty \quad , c_0>0,$$

notwendig für die Gültigkeit einer asymptotischen Beziehung vom Typus (1.12) in der Zone

$$1 \leqq x \leqq (c_0+\delta)\sqrt{\ln n} \; , \; c_0>0, \; \delta>0,$$

und hinreichend für die Gültigkeit der asymptotischen Beziehung (1.12) in der Zone

$$1 \leqq x \leqq \; c_0\sqrt{\ln n} \quad , c_0>0,$$

ist. Der Fall $\delta=0$ wird im Satz 6.2.2 betrachtet. Damit ist die genaue Abhängigkeit der x-Zone von der Größenordnung existierender Momente der Zufallsgrößen geklärt. Mit dieser Frage hatte sich 1975 W.WOLF [114] in Verallgemeinerung einer Arbeit von S.V.NAGAEV [77] beschäftigt.
In einem weiteren Grenzwertsatz für Summen identisch verteilter Zufallsgrößen wird die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x_n^{2+c_0^2} \exp\left(\frac{x_n^2}{2}\right) \left|1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\Phi(-x_n)\right|$$

untersucht, wobei $x_n \to \infty$, $n\to\infty$, gilt.

Weiterhin werden im Kapitel VI allgemeine Grenzwertsätze für das Serienschema formuliert. Das abschließende Ergebnis des Kapitels VI stellt ein Grenzwertsatz dar, in dem ebenfalls die Konvergenz gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung betrachtet wird, wenn nur zweite Momente vorausgesetzt werden und $x=x(n)\to\infty$, $n\to\infty$, gilt.
Mit diesen einleitenden Bemerkungen sollte ein Überblick zum Anliegen der Arbeit gegeben werden. In den entsprechenden Kapiteln werden dann noch ergänzende Bemerkungen zur Entwicklung des jeweiligen Problems, wie es sich in der internationalen Literatur abgezeichnet hat, gemacht.
Am Ende der Arbeit sind die Rechnerprogramme angeführt, die zur numeri-

schen Bestimmung der Konstanten C_1 bis C_6 in den Sätzen 1.2.1 bis 1.2.6 notwendig waren.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer Herrn Dr. sc. nat. W.WOLF für sein gezeigtes Interesse an den Problemen und für die Anregungen danken, die zum Gelingen der jetzt vorliegenden Arbeit beigetragen haben.

Kapitel II

Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion

1. Allgemeine Bemerkungen

Es sei $(F_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, die auf der reellen Achse definiert sind, und $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion. Wie schon erwähnt wurde, werden wir hier auf zwei Probleme näher eingehen:

Einerseits ist der Fehler zu erforschen, der begangen wird, wenn $F_n(x)$ durch eine Verteilungsfunktion $F(x)$ approximiert wird, und andererseits gilt es, die Konvergenzgeschwindigkeit zu untersuchen, mit der die Folge $(F_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ gegen $F(x)$ konvergiert, falls $F(x)$ die Grenzverteilungsfunktion dieser Folge ist. Somit interessieren besonders solche Fehlerabschätzungen der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$, die im Fall einer Konvergenz von $F_n(x)$ gegen $F(x)$ ebenfalls gegen Null konvergieren.

Speziell haben diese Probleme verschiedene Autoren untersucht, wenn $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion einer gewissen Summe von unabhängigen Zufallsgrößen ist. Für den klassischen Spezialfall $F(x)=\Phi(x)$, das heißt für den zentralen Grenzwertsatz, gibt es eine ganze Reihe von bekannten Ergebnissen (s. z.B. die Abschätzungen (1.3) und (1.4)). An dieser Stelle bemerken wir, daß die Ungleichungen (1.3) und (1.4) optimal in dem Sinne sind, daß sie bezüglich des Summationsindexes n und des reellen Arguments x nicht zu verbessern sind. Ebenfalls für stabile Grenzverteilungsfunktionen mit charakteristischem Exponent $0<\alpha<2$ wurden in den letzten Jahren Abschätzungen gefunden, so z.B. von H.BERGSTRÖM [8,9], M.LIPSCHUTZ [66,67], H.CRAMÉR [26,27], V.M.ZOLOTAREV [116], A.A.MITALAUSKAS [74,75] und K.I.SATYBALDINA [103]. Im Falle einer POISSONschen Grenzverteilungsfunktion gibt es Ergebnisse von J.V.PROCHOROV [93], I.P.CAREGRADSKIJ [17], B.GRIGELIONIS [46], P.FRANKEN [39], J.M.SHAPIRO [104], L.PADITZ [83] und anderen. Hierauf wird im Kapitel III näher eingegangen.

Im Falle beliebiger unbegrenzt teilbarer Grenzverteilungsfunktionen sind bisher nur zwei Arbeiten bekannt, die sich mit Abschätzungen der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ gleichmäßig bezüglich x befassen, d.h. mit der Abschätzung von $M_n=\sup_x|F_n(x)-F(x)|$, und zwar die Arbeiten von J.M.SHAPIRO [16,104] und V.BOONYASOMBUT [16]. Ungleichmäßige Abschätzungen der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ liegen für den zuletzt betrachteten allgemeinen Fall bisher nicht vor.

In diesem Kapitel geht es darum, eine weitere Abschätzung gleichmäßig bezüglich x für den Fall einer beliebigen unbegrenzt teilbaren Grenzverteilungsfunktion anzugeben. Der Gedanke zum Erhalt dieser Abschätzung beruht darauf, daß die Grenzverteilungsfunktion ebenfalls als k_n-fache Faltung gewisser Verteilungsfunktionen aufgefaßt wird und somit die Differenz zweier Folgen von Verteilungsfunktionen abzuschätzen ist, wie wir es in einer Arbeit von V.M.ZOLOTAREV [118] finden. Zur Abschätzung von M_n werden dabei gewisse Pseudomomente verwendet, wodurch diese Abschätzungen einen etwas anderen Charakter als die von J.M.SHAPIRO und V. BOONYASOMBUT haben.

Da die analytische Struktur der charakteristischen Funktionen von unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktionen hinreichend bekannt ist, erweist sich der Apparat der charakteristischen Funktionen als das kräftigste Beweismittel für diese allgemeinen Grenzwertsätze. Direkte wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden können bis jetzt nur im Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes mit den Möglichkeiten des analytischen Apparates der charakteristischen Funktionen konkurrieren, wie wir es in den folgenden Kapiteln sehen werden.

An dieser Stelle sei gesagt, daß sich in einer etwas anderen Fragestellung A.N.KOLMOGOROV [55], J.V.PROCHOROV [94], F.M.KAGAN [51], L.D. MEŠALKIN [69] und andere mit der Approximation von Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen durch unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen befaßten.

Zuerst wollen wir Ergebnisse von J.M.SHAPIRO angeben.

<u>Satz 2.1.1</u>([104]): Es sei F(x) eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ und der endlichen Streuung σ^2. Weiterhin möge die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ existieren, für die für alle x $|F'(x)| \leq C$ mit $0 \leq C < \infty$ gilt.

Mit K(u) wird die entsprechende KOLMOGOROV-Spektralfunktion aus der kanonischen Darstellung der charakteristischen Funktion von F(x) bezeichnet.

Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) eine Doppelfolge von Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß für jedes n die Zufallsgrößen $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ voneinander unabhängig sind. Mit $EX_{nk}=\mu_{nk}$, $D^2X_{nk}=\sigma^2_{nk} \leq 1$ und $F_n(x)=P(\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}<x)$ werden der Erwartungswert, die endliche Streuung der Zufallsgröße X_{nk} und die Summenverteilungsfunktion der Zufallsgrößen der n-ten Serie bezeichnet.

Dann gilt für beliebige Zahlen $b>\frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$M_n \leq k(b,C)\; g(n,m(A,\delta)) \;. \tag{2.1}$$

Dabei sind $k(b,C)=b(1+C\cdot c^2(b))$, $c(b)$ die Lösung der Gleichung

$$\int_0^{c(b)/4} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b} \tag{2.2}$$

und

$$\begin{aligned} g(n,m(A,\delta)) = {} & \Big(\tfrac{1}{3}\,\sigma_n^2 \max_{1\leq k\leq k_n} \sigma^2_{nk}\Big)^{1/5} + \Big(\tfrac{5}{6}\,\delta(\sigma_n^2+\sigma^2)\Big)^{1/4} + \\ & + \Big(\tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}|K_n(u_i)-K(u_i)|\Big)^{1/3} + \\ & + \Big(\tfrac{4}{A}(K_n(+\infty)-K_n(A)+K(+\infty)-K(A)+K_n(-A)+K(-A))+ \\ & +2|\mu_n-\mu|\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

mit $\mu_n=\sum_{k=1}^{k_n}\mu_{nk}$, $\sigma_n^2=\sum_{k=1}^{k_n}\sigma^2_{nk}$ und $K_n(u)=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u} v^2 dP(X_{nk}+\mu_{nk}<v)$.

Die Konstante $A>0$ ist dabei so gewählt, daß $-A$ und A Stetigkeitspunkte von $K(u)$ sind und $0<\delta\leq 2A$ gilt. Weiterhin ist $(u_i)_{i=0,1,\ldots,m}$ mit $m=m(A,\delta)=\left[\frac{2A}{\delta}\right]+1$ eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften, daß $-A=u_0<u_1<\ldots<u_m=A$ ist, die u_i Stetigkeitspunkte der Spektralfunktion $K(u)$ sind und $\max_{1\leq i\leq m}|u_i-u_{i-1}|<\delta$ gilt.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß die Ungleichung (2.1) eine Fehlerabschätzung für die Differenz M_n darstellt. Die Konvergenz von F_n gegen F wird dabei nicht betrachtet.

<u>Satz 2.1.2</u>([104]): Es sei $(X_{nk},\ k=1,2,\ldots,k_n,\ n=1,2,\ldots)$ wiederum die in Satz 2.1.1 betrachtete Doppelfolge. Folgende Bedingungen mögen

erfüllt sein:

Die Zufallsgrößen $X_{nk}-\mu_{nk}$, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$ sind infitesimal.

Die Folge der Summenverteilungsfunktionen $F_n(x)$ konvergiert im Sinne der schwachen Konvergenz gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ (Nach dem Satz von BAVLI-CHINČIN ist somit $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion).

Weiterhin sei $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$ und es gelte die Abschätzung (2.1).

Dann existiert eine Zahlenfolge $(\delta_n)_{n=1,2,\ldots}$ mit den Eigenschaften $0<\delta_n<1$ und $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ derart, daß für $A=\delta_n^{-1/2}$

$$\lim_{n\to\infty} g(n,m(A,\delta_n))=0 \tag{2.3}$$

gilt.

In diesem Satz wird also die Konvergenzgeschwindigkeit untersucht, mit der F_n gegen F konvergiert.

Die Voraussetzung, daß sowohl die X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$ als auch $F(x)$ endliche Streuungen besitzen, wird in der Arbeit von V. BOONYASOMBUT/J. M. SHAPIRO [16] abgeschwächt. Dadurch gelang es, Ergebnisse vom Typ (2.1) und (2.3) für stabile Grenzverteilungsfunktionen mit charakteristischem Exponenten α, $0<\alpha<2$, zu erhalten.

2. Zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zu einer unbegrenzt teilbaren Grenzverteilungsfunktion mit Hilfe von Pseudomomenten

a) Abschätzungen unter Voraussetzung endlicher Streuungen

Es sei $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann folgt aus der kanonischen Darstellung für unbegrenzt teilbare charakteristische Funktionen sofort, daß $\varphi^\lambda(t)$, $\lambda>0$, ebenfalls eine charakteristische Funktion einer gewissen unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $F(x;\lambda)$ ist.

Wir führen folgende Pseudomomente ein:

$$\varkappa_{nk}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} u^s d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk})),\ s\geq 0, \qquad \varkappa_n(s)=\sum_{k=1}^{k_n}|\varkappa_{nk}(s)|,$$

$$\nu_{nk}(r)=\int_{-\infty}^{\infty} |u|^r\, |d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk}))|,\ r\geq 0,\ \nu_n(r)=\sum_{k=1}^{k_n}\nu_{nk}(r),$$

$$\nu_F(r)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^r|d(F(u+a_n;\lambda_n)-F(u))|\,,\ \varkappa_F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u^s d(F(u+a_n;\lambda_n)-F(u)).$$

Dabei sind $F_{nk}(x)=P(X_{nk}<x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X_{nk}, a_{nk}, λ_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$, beliebige reelle Zahlen mit $\lambda_{nk}>0$ und es gilt $a_n=\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}$ und $\lambda_n=\sum_{k=1}^{k_n}\lambda_{nk}$.

Wir können nun folgende Fehlerabschätzung für M_n angeben:

__Satz 2.2.1:__ Es sei $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ und der endlichen Streuung σ^2.
Weiterhin möge die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ existieren, für die für alle x die Abschätzung $|F'(x)|\leqq C$ mit $0\leqq C<\infty$ gilt.
Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) die in Satz 2.1.1 eingeführte Doppelfolge von Zufallsgrößen mit $D^2X_{nk}<\infty$.
Außerdem seien die Pseudomomente $\nu_n(r)$ und $\nu_F(r)$ endlich für ein $2\leqq r\leqq 3$.
Dann gilt für beliebige Zahlen $b>\frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$M_n \leqq k(b,C)\ \tilde{g}(n,r)\ . \tag{2.4}$$

Dabei ist $k(b,C)$ die Konstante aus Satz 2.1.1 und es gilt

$$\tilde{g}(n,r)=\left[\frac{72}{r6^r}(\nu_n(r)+\nu_F(r))\right]^{1/(r+1)}+\left[\frac{1}{2}(\varkappa_n(2)+|\varkappa_F(2)|\,)\right]^{1/3}+$$
$$+\left[2(\varkappa_n(1)+|\varkappa_F(1)|\,)\right]^{1/2}\ .$$

Hieraus sind unmittelbar zwei Folgerungen ableitbar:

__Folgerung 2.2.1:__ Die Folgen (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$, mögen derart gewählt sein, daß für $s=1,2$ $\varkappa_{nk}(s)=0$ ist für $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$. Weiterhin gelte für M_n die Fehlerabschätzung (2.4).
Dann gilt

$$\tilde{g}(n,r)=\left[\frac{72}{r6^r}(\nu_n(r)+\nu_F(r))\right]^{1/(r+1)}+\left(\frac{1}{2}|\sigma^2-\sigma_n^2+\mu^2-\mu_n^2|\right)^{1/3}+$$
$$+\left(2|\mu-\mu_n|\right)^{1/2}\ .$$

__Folgerung 2.2.2:__ Es möge die Fehlerabschätzung (2.4) für M_n gelten und weiterhin sei $\sigma_n^2=\sigma^2$ und $\mu_n=\mu$.

Dann gilt

$$M_n \leq D\cdot(\nu_n(r))^{1/(r+1)} \quad \text{mit } D=D(r,b,C)=(\frac{72}{r6^r})^{1/(r+1)} k(b,C).$$

Im folgenden Satz wird analog zu Satz 2.1.2 eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit untersucht, mit der M_n unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen gegen Null konvergiert.

Satz 2.2.2: Wenn die Abschätzung (2.4) gilt und die absoluten Pseudomomente $\nu_F(r)$ und $\nu_n(r)$ für $n\to\infty$ gegen Null konvergieren, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{g}(n,r) = 0,$$

d.h. $F_n(x)$ konvergiert im Sinne der starken Konvergenz gegen $F(x)$.

Die Abschätzung (2.4) in Satz 2.2.1 bleibt richtig, wenn in der Definition der Pseudomomente $\nu_n(r)$ und $\nu_F(r)$ anstatt $F(u+a_{nk};\lambda_{nk})$ die sogenannten begleitenden unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktionen $\tilde{F}_{nk}(u)$ verwendet werden, die die charakteristischen Funktionen

$$\tilde{\varphi}_{nk}(t)=\exp(it\mu_{nk}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)dF_{nk}(u+\mu_{nk})),$$

$k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$,

besitzen. Die Pseudomomente $\varkappa_n(s)$ und $\varkappa_F(s)$ sind in diesem Fall für $s=1,2$ stets Null.

Im folgenden Satz sollen gewisse Unstetigkeiten von $F(x)$ zugelassen werden.

Satz 2.2.3: Es sei $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert μ und der endlichen Streuung σ^2 und Unstetigkeiten in höchstens abzählbar vielen Punkten x_i, $x_i < x_{i+1}$, $i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

Weiterhin mögen eine Konstante $L>0$ mit $L \leq \min_i(x_{i+1}-x_i)$ und die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ mit $|F'(x)| \leq C < \infty$ für alle $x\neq x_i$, $i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, existieren.

Wenn die in Satz 2.1.1 für die Doppelfolge (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) eingeführte Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ eine Treppenfunktion ist, deren möglichen Unstetigkeiten nur bei $x=x_i$, $i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, auftreten, dann gilt für beliebige Zahlen $b > \frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$M_n \leq k(b,C)\, \tilde{g}(n,r), \tag{2.5}$$

falls $\frac{L}{\tilde{g}(n,r)} \geq s(b)$ ist. Dabei sind $k(b,C)$ die Konstante aus Satz 2.1.1 und $s(b)$ eine gewisse pos. Konstante, die nur von b abhängt.

<u>Satz 2.2.4:</u> Es mögen alle Voraussetzungen des Satzes 2.2.3 mit $F(x)$ als Treppenfunktion erfüllt sein.
Dann gilt für beliebige Zahlen $b > \frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$M_n \leq k(b)\, \tilde{g}_1(n,r) \tag{2.6}$$

mit

$$\tilde{g}_1(n,r) = \frac{72}{r6^r}(\nu_F(r) + \nu_n(r)) + 2\sum_{s=1}^{2} 4^{1-s}(|\varkappa_n(s)| + |\varkappa_F(s)|)$$

und $k(b) = b \cdot \max\limits_{i=1,2,r} \left(\frac{s(b)}{L}\right)^i$. Dabei ist $s(b)$ eine Konstante, die nur von b abhängt.

<u>Satz 2.2.5:</u> Wenn die Abschätzung (2.5) oder (2.6) gilt und die absoluten Pseudomomente $\nu_F(r)$ und $\nu_n(r)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren, dann ist
$\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{g}(n,r) = 0$ oder entsprechend $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{g}_1(n,r) = 0$.

Satz 2.2.5 ist eine zu Satz 2.2.2 entsprechende Aussage. Aus den Sätzen 2.2.3 und 2.2.4 lassen sich wie aus Satz 2.2.1 Folgerungen über die Fehlerabschätzung von M_n herleiten.

Die Approximation von $F_n(x)$ durch $F(x)$ ist ein typisches Problem der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen. Ein charakteristisches Merkmal aller klassischen Grenzwertsätze ist die Forderung einer in gewissem Sinne gleichmäßigen Kleinheit der Summanden X_{nk} im Vergleich zur Summe $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n}$. So spielte auch die Infinitesimalitätsbedingung im Satz 2.1.2 eine wesentliche Rolle, um $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ zu erhalten.

Anders ist es im Satz 2.2.2. Wie aus dem Beweis zu diesem Satz ersichtlich ist, wird die Annäherung von $F_n(x)$ gegen $F(x)$ über die Annäherung der entsprechenden Komponenten $F_{nk}(x)$ von $F_n(x)$ und $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$ von $F(x)$ untersucht. Der Terminologie V.M.ZOLOTAREVs [118] folgend stellen die Pseudomomente $\nu_{nk}(r)$ und $\varkappa_{nk}(s)$ ein natürliches Charakteristikum für die Annäherung der Komponenten $F_{nk}(x)$ und $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$ dar. In diesem Sinne spielen sie auch im Satz 2.2.2 die wesentliche Rolle. Damit gibt Satz 2.2.2 eine Bedingung für die Konvergenz von $F_n(x)$ gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $F(x)$ an, ohne daß die Infinitesimalitätsbedingung benötigt wird.

b) Abschätzungen ohne die Voraussetzung über die Existenz der Streuungen

Es seien $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion und (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) eine Doppelfolge von in jeder Serie unabhängigen Zufallsgrößen. Im weiteren werden wir eine solche Doppelfolge kurz "Serienschema" nennen.

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F_{nk}(x)$ führen wir eine neue Verteilungsfunktion $F^a_{nk}(x)$, die sogenannte abgeschnittene Verteilungsfunktion, folgendermaßen ein:

$$F^a_{nk}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -\alpha , \\ F_{nk}(x)-F_{nk}(-\alpha) & , \quad -\alpha < x \leq 0 , \\ F_{nk}(x)+1-F_{nk}(\beta) , & \quad 0 < x \leq \beta , \\ 1 & , \quad \beta < x . \end{cases} \tag{2.7}$$

Dabei sind α und β beliebige positive Konstanten.

Weiterhin bezeichnen wir mit Hilfe des Symbols $\overset{k_n}{\underset{k=1}{\boxed{*}}}$ die k_n-fache Faltung der Verteilungsfunktionen F^a_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, d.h. $F^a_n(x)=(\overset{k_n}{\underset{k=1}{\boxed{*}}} F^a_{nk})(x)$, und mit $\mu_{nk}(a)$ und $\sigma^2_{nk}(a)$ den Erwartungswert und die Streuung von $F^a_{nk}(x)$ und setzen wir

$$\mu_n(a)= \sum_{k=1}^{k_n} \mu_{nk}(a) \quad \text{und} \quad \sigma^2_n(a)= \sum_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{nk}(a).$$

Nun definieren wir folgendermaßen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $\overset{a}{F}(x)$, indem wir von der unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $F(x)$ ausgehen: Bekanntlich ist jede unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion über die kanonische Darstellung ihrer charakteristischen Funktion in der Form von LEVY-CHINČIN eindeutig durch die LEVY-CHINČIN-Spektralfunktion $G(u)$ und eine reelle Zahl γ darstellbar: Es sei

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

dann gilt

$$\varphi(t)=\exp(i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)),$$

$G(u)$ ist eine nichtfallende beschränkte Funktion mit $G(-\infty)=0$. Der Integrand wird für $u=0$ gleich $-t^2/2$ gesetzt.
Wir definieren

$$\overset{a}{G}(u)=\begin{cases}0 & , \ u \leq -\alpha\\ G(u)-G(-\alpha), & -\alpha < u \leq \beta\\ G(\beta)-G(-\alpha), & \beta < u\end{cases}$$

und setzen

$$\overset{a}{\gamma} = \gamma-(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty})\frac{dG(u)}{u}.$$

Hierbei seien α und β beliebig positiv und zusätzlich Stetigkeitspunkte von $G(u)$.

Damit ist über $\overset{a}{\gamma}$ und $\overset{a}{G}(u)$ eindeutig eine unbegrenzt teilbare charakteristische Funktion $\overset{a}{\varphi}(t)$ definiert, zu der die entsprechende Verteilungsfunktion $\overset{a}{F}(x)$ gehören soll.
Wir führen wie im Abschnitt 2.2a) Pseudomomente ein:

$$\varkappa_{nk}^{a}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}u^s d(F_{nk}^{a}(u)-\overset{a}{F}(u+a_{nk};\lambda_{nk})), \ s \geq 0,$$

entsprechend werden $\nu_{nk}^{a}(r)$, $\varkappa_{n}^{a}(s)$, $\nu_{n}^{a}(r)$, $\varkappa_{\overset{a}{F}}(s)$ und $\nu_{\overset{a}{F}}(r)$ definiert.

Es seien $\mu(a)$ und $\sigma^2(a)$ der Erwartungswert und die Streuung von $\overset{a}{F}(x)$.
Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes 2.2.1 dar.
Satz 2.2.6: Es sei $F(x)$ eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion.

Weiterhin möge die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ existieren, für die für alle x die Abschätzung $|F'(x)| \leq C$ mit $0 \leq C < \infty$ gilt.
Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) ein Serienschema und $F_n(x)$ die Summenverteilungsfunktion der Zufallsgrößen der n-ten Serie.
Es mögen α, β, r, p, beliebige positive reelle Zahlen mit $2 \leq r \leq 3$ und $0 < p \leq 1$ sein. Dabei seien $-\alpha$ und β Stetigkeitspunkte der LEVY-CHINČIN-Spektralfunktion $G(u)$ von $F(x)$.
Weiterhin sei

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u|^p dG(u) < \infty.$$

Dann gilt für alle Zahlen $b > \frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$M_n \leq \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta)) + k(b,C)\; g^a(\alpha,\beta,r,p). \tag{2.8}$$

Hierbei ist $k(b,C)$ die Konstante aus Satz 2.1.1 und es gilt

$$g^a(\alpha,\beta,r,p) = \left[\frac{4}{p2^p}\left(1+\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p dG(u)\right]^{1/(p+1)} +$$

$$+ \left[\frac{72}{r6^r}(\nu_{\underset{F}{a}}(r)+\nu_n^a(r))\right]^{1/(r+1)} +$$

$$+ (2\varkappa_n^a(1)+|\varkappa_{\underset{F}{a}}(1)|)^{1/2} + (\tfrac{1}{2}(\varkappa_n^a(2)+|\varkappa_{\underset{F}{a}}(2)|))^{1/3}.$$

Folgerung 2.2.3: Die Folgen (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$, mögen derart gewählt sein, daß für $s=1,2$ $\varkappa_{nk}^a(s)=0$ ist für $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$. Weiterhin gelte für M_n die Fehlerabschätzung (2.8).

Dann gilt

$$g^a(\alpha,\beta,r,p) = \left[\frac{4}{p2^p}\left(1+\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p dG(u)\right]^{1/(p+1)} +$$

$$+ \left[\frac{72}{r6^r}(\nu_{\underset{F}{a}}(r)+\nu_n^a(r))\right]^{1/(r+1)} + (2|\mu(a)-\mu_n(a)|)^{1/2} +$$

$$+ (\tfrac{1}{2}|\sigma^2(a)-\sigma_n^2(a)+\mu^2(a)-\mu_n^2(a)|)^{1/3}.$$

Wir schneiden jetzt einfachheitshalber die Verteilungsfunktionen $F_{nk}(x)$, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$, symmetrisch ab, d.h. $\alpha=\beta$, und formulieren folgenden Satz:

Satz 2.2.7: Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |u|^p dG(u) < \infty$ für ein p aus $(0,1]$,
2) Die Abschätzung (2.8) gilt mit $\alpha=\beta$,
3) Der Punkt $\alpha=\beta$ ist von n abhängig, d.h. $\alpha=\alpha_n$,
4) Die Zahlenfolge $(\alpha_n)_{n=1,2,\ldots}$ ist so monoton wachsend, daß $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$ und die Limesbeziehungen $\lim_{n\to\infty}\nu_{\underset{F}{a}}(r)=0$, $\lim_{n\to\infty}\nu_n^a(r)=0$ und $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(F_{nk}(-\alpha_n)+1-F_{nk}(\alpha_n))=0$ gelten.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} g^{a}(\alpha_n,\alpha_n,r,p)=0$$

und F_n konvergiert im Sinne der starken Konvergenz gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion F.

Wir bemerken, daß nach J.M.SHAPIRO [105] für den Fall $\alpha=\beta$ aus der schwachen Konvergenz von $F_n(x)$ gegen $F(x)$ auch die schwache Konvergenz von $F_n^a(x)$ gegen $F^a(x)$ folgt.

Abschließend formulieren wir eine Aussage über den Zusammenhang zwischen der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ und der Verteilungsfunktion $F_n^a(x)$.

Satz 2.2.8: Für beliebige Verteilungsfunktionen $F_{nk}(x)$, $k=1,2,\dots,k_n$, gilt stets folgende Abschätzung für die Differenz der Faltung F_n^a der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen zur Faltung F_n der Ausgangsverteilungsfunktionen:

$$|F_n(x)-F_n^a(x)| \leq \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta)), \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

Kapitel III

Ungleichmäßige Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen

1. Allgemeine Sätze zur Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen

Es seien a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen und $F_i(x)$, $i=1,2$, zwei beliebige Verteilungsfunktionen mit endlichem absoluten bzw. einseitigen Moment der Ordnung $\nu>0$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\beta_{\nu,i}^{a,b} = \int_D |u|^\nu \, dF_i(u), \qquad \beta_\nu^{a,b} = \min(\beta_{\nu,1}^{a,b}, \beta_{\nu,2}^{a,b}),$$

$$\beta_{\nu,i}^{b} = \int_{(b,\infty)} u^\nu \, dF_i(u), \qquad \beta_\nu^{b} = \min(\beta_{\nu,1}^{b}, \beta_{\nu,2}^{b}),$$

$$\mu_{\nu,i}^{a} = \int_{[-a,\infty)} |u|^\nu \, dF_i(u), \quad \mu_\nu^a = |\mu_{\nu,1}^a - \mu_{\nu,2}^a| \quad ,$$

Dabei wird mit D folgendes Integrationsgebiet bezeichnet: $(-\infty,-a)\cup(b,\infty)$.

Die Größen $\beta^{b}_{\nu,i}$ und $\mu^{a}_{\nu,i}$, $i=1,2$, bezeichnen die sogenannten einseitigen (rechtsseitigen) Momente.
Weiterhin vereinbaren wir

$$\beta_{\nu,i} = \beta^{0,0}_{\nu,i}\ ,\ \beta_\nu = \max(\beta_{\nu,1},\beta_{\nu,2}),\ \mu_\nu = |\beta_{\nu,1}-\beta_{\nu,2}|$$

sowie

$$\varrho = \sup_u |F_1(u)-F_2(u)|\ .$$

<u>Satz 3.1.1:</u>Unter der Voraussetzung, daß $\beta_{\nu,i}<\infty$ ist für $i=1,2$ und $\nu>0$, gilt für alle reellen x folgende ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leq \min\left(\varrho, \frac{\min\limits_{a\geq 0,\, b\geq 0}(\beta^{a,b}_\nu+(2a^\nu+2b^\nu+1)\varrho)+\mu_\nu}{1+|x|^\nu}\right). \tag{3.1}$$

Satz 3.1.1 läßt sich verallgemeinern, indem nur noch die Existenz einseitiger Momente vorausgesetzt und eine entsprechende Abschätzung auf einer reellen Halbachse erhalten wird.
<u>Satz 3.1.2:</u>Unter der Voraussetzung, daß $\mu^{a}_{\nu,i}<\infty$ ist für $i=1,2$ und $\nu>0$ und $a\geq 0$, gilt für alle reellen $x\in[-\max(a,b),\infty)$

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leq \min\left(\varrho, \frac{\min\limits_{b\geq 0}(\beta^{b}_\nu+(2a^\nu+2b^\nu+1)\varrho)+\mu^{a}_\nu}{1+|x|^\nu}\right). \tag{3.2}$$

Es läßt sich eine zu Satz 3.1.2 entsprechende Aussage für alle $x\in(-\infty,\max(a,b)]$ angeben, wenn $\mu^{a}_{\nu,i}$ und $\beta^{b}_{\nu,i}$ durch die einseitigen (linksseitigen) Momente

$$\mu^{b}_{\nu,i} = \int\limits_{(-\infty,b]} |u|^\nu dF_i(u) \quad \text{bzw.} \quad \beta^{a}_{\nu,i} = \int\limits_{(-\infty,-a)} |u|^\nu dF_i(u)$$

ersetzt werden.
Aus dem Satz 3.1.1 erhalten wir eine bekannte Aussage von V.V.PETROV [91]
<u>Folgerung 3.1.1</u>([91]):Wenn $\beta_\nu<\infty$ ist für $\nu>0$, dann gilt

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leq \left[\frac{(1+\beta_\nu)^s\varrho^r}{(1+|x|^\nu)^s}\right]^{1/(r+s)}\ . \tag{3.3}$$

Dabei sind r und s nichtnegative Zahlen mit $r+s>0$.
<u>Folgerung 3.1.2</u>(ČEBYŠEVsche Ungleichung):Wenn $\beta_\nu<\infty$ ist für $\nu>0$, dann gilt

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leq \min\left(\varrho, \frac{\beta_\nu}{|x|^\nu}\right) \tag{3.4}$$

für alle $|x|>0$.

Im allgemeinen Fall ist es schwierig zu entscheiden, welche der beiden Abschätzungen, die gleichmäßige oder die ungleichmäßige, in (3.1), (3.2) oder (3.4) das Minimum darstellt. Im Vergleich mit der gleichmäßigen Abschätzung durch ϱ wird für große x die ungleichmäßige Abschätzung geeigneter sein.

In (3.3) wurde versucht, eine gleichmäßige und eine ungleichmäßige Abschätzung zu einer zu verbinden. Jedoch stellt sich heraus, daß diese Ungleichung dadurch an Schärfe verliert, wie es folgender Hilfssatz zeigt:

<u>Lemma 3.1.1:</u> Für beliebige positive Zahlen A und B und beliebige nichtnegative Zahlen r und s mit $r+s>0$ ist

$$\min(A,B) \leqq (A^r B^s)^{1/(r+s)} \leqq \max(A,B) . \tag{3.5}$$

Da das Minimum von A und B speziell für r=1 und s=0 bzw. r=0 und s=1 aus dem mittleren Ausdruck der Ungleichungskette (3.5) folgt, kann die Abschätzung (3.3) in folgender Form verschärft werden:

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leqq \min(\varrho, \frac{1+\beta_\nu}{1+|x|^\nu}) . \tag{3.6}$$

Andererseits ist wegen (3.5) die Ungleichung (3.3) in gewissem Sinne optimaler als eine der beiden Abschätzungen

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leqq \varrho$$

und

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leqq \frac{1+\beta_\nu}{1+|x|^\nu} ,$$

wenn in der entsprechenden Situation nicht bekannt ist, welche der beiden Abschätzungen schärfer ist. Hierbei entsteht nun bei praktischen Anwendungen das Problem einer optimalen Bestimmung der Parameter r und s.

2. Spezielle Abschätzungen der Differenz einer Verteilungsfunktion zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

Es sei wieder $\emptyset(x)$ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Aus Satz 3.1.1 ergeben sich einige spezielle Aussagen.

<u>Satz 3.2.1:</u> Es sei $F_1(x)=F(x)$ eine beliebige Verteilungsfunktion und $F_2(x)=\emptyset(x)$. Wenn $\beta_{\nu,1}<\infty$ ist für $\nu>0$ und $0<\varrho\leqq e^{-N}$ mit $N>0$, dann gilt für alle reellen x

$$|F(x)-\emptyset(x)| \leqq \min(\varrho, \frac{C_\nu(\ln\frac{1}{\varrho})^{\nu/2}\varrho+\mu_\nu}{1+|x|^\nu}) .$$

Dabei ist $C_\nu=C_\nu(N)$ eine absolute Konstante, die nur von ν und

N abhängt:

$$C_\nu(N) = 2^{\nu/2}\left(\frac{K_\nu}{\sqrt{N\pi}}+4\right)+N^{-\nu/2}$$

mit

$$K_\nu = \sup_{a \geq \sqrt{2N}} a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\int_a^\infty u^\nu e^{-u^2/2}du \text{ .}$$

S. auch [91] Kap. 5 Satz 9/10/11

Dieser Satz wurde 1968 von S.F.KOLODJAŽNIJ [56] für $N=\frac{1}{2}$ bewiesen.

<u>Satz 3.2.2:</u> Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$, $D^2X_i=\sigma_i^2<\infty$ und $B_n^2=\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. $F_n(x)$ sei die Summenverteilungsfunktion dieser Zufallsgrößen und weiterhin sei $\varphi(n)=\sup_x |F_n(xB_n)-\varnothing(x)|$.

Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ und alle reellen Zahlen x folgende Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz

$$|F_n(xB_n)-\varnothing(x)| \leq \min\left(\varphi(n), C\frac{\varphi(n)\ \ln\frac{1}{\varphi(n)}}{1+x^2}\right),$$

falls für $n \geq n_0$ die Ungleichung $\varphi(n) \leq e^{-N}$ mit $N>0$ gilt.

Dabei ist $C=C(N)$ eine Konstante, die nur von N abhängt.

Die letzte Aussage wurde 1945 von C.G.ESSEEN in [34] für $N=\ln 2$ bewiesen. Von besonderem Interesse sind die Abschätzungen (3.1) bis (3.3) und (3.6), wenn $F_1(x)$ das allgemeine Glied einer Folge von Verteilungsfunktionen ist, d.h. $F_1(x)=V_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, und $F_2(x)=V(x)$ die Grenzverteilungsfunktion der Folge $(V_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ darstellt. Da in diesem Falle die zu Beginn des Abschnittes 3.1 eingeführten Größen von n abhängen, also

$$\varphi=\varphi(n),\ B_\nu^{a,b}=B_\nu^{a,b}(n),\ \mu_\nu=\mu_\nu(n),\ B_\nu^b=B_\nu^b(n),\ \mu_\nu^a=\mu_\nu^a(n),\ B_\nu=B_\nu(n)$$

ist, und mit wachsendem n

$$\varphi(n) \rightarrow 0$$

gilt, erweist sich (für ein beliebiges aber festes x) in (3.6) die gleichmäßige Abschätzung als eine stärkere, da

$$\frac{1+B_\nu(n)}{1+|x|^\nu}$$

im allgemeinen nicht gegen Null konvergiert.

Anders verhält es sich mit dem Abschätzungen (3.1) bzw. (3.2) (speziell auch mit den Sätzen 3.2.1 und 3.2.2). Der Ausdruck

$$\min_{a\geq 0, b\geq 0}(\beta_\nu^{a,b}(n)+(2a^\nu+2b^\nu+1)\varrho(n))+\mu_\nu(n)$$

konvergiert mit wachsendem n ebenfalls gegen Null, falls für $n\to\infty$ $\varrho(n)$ und $\mu_\nu(n)$ gegen Null konvergieren. Damit ist die Abschätzung (3.1) auch qualitativ besser als (3.6).

Es mögen jetzt $a=a(n)$ und $b=b(n)$ zwei beliebige nichtnegative Zahlenfolgen sein und für $n\to\infty$ mögen $\varrho(n)$ und $\mu_\nu(n)$ gegen Null konvergieren. Wegen

$$\begin{aligned}&\min_{a\geq 0, b\geq 0}(\beta_\nu^{a,b}(n)+(2a^\nu+2b^\nu+1)\varrho(n))+\mu_\nu(n) \leq \\ &\leq (\beta_\nu^{a(n),b(n)}(n)+(2a^\nu(n)+2b^\nu(n)+1)\varrho(n))+\mu_\nu(n)\end{aligned} \tag{3.7}$$

können parallel zur Folge der Verteilungsfunktionen $(V_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ diese Zahlenfolgen $(a(n))_{n=1,2,\ldots}$ und $(b(n))_{n=1,2,\ldots}$ derart festgelegt werden, daß für $n\to\infty$ $a(n)\to\infty$ und $b(n)\to\infty$ und

$$a(n)=o(\varrho^{-1/\nu}(n)) \quad \text{und} \quad b(n)=o(\varrho^{-1/\nu}(n)) \quad \text{für } n\to\infty$$

ist. Damit konvergiert also der Ausdruck (3.7) gegen Null.

Spezielle Anwendungen hierfür sind z.B. Satz 3.2.2 mit

$$\nu=2,\ \mu_2(n)=0 \quad \text{und} \quad a(n)=\left(2\ln\frac{1}{\varrho(n)}\right)^{1/2}$$

oder der folgende Satz 3.3.1 mit

$$p=p(n)=\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \lambda=1.$$

3. Eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz der Binomialverteilungsfunktion zur POISSONschen Verteilungsfunktion

Es sei

$$F_1(x)=B(x;n,p)=\sum_{i<x}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, \quad 0<p<1,$$

und

$$F_2(x)=\Gamma(x;\lambda)=\sum_{i<x}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad \lambda>0.$$

Es gilt folgende ungleichmäßige Abschätzung:

<u>Satz 3.3.1:</u> Für $\nu>0$ gilt

$$|B(x;n,p)-\Gamma(x;\lambda)| \leq \min\left(\varrho, \frac{\min\limits_{m=0,1,\ldots}\left(\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} i^\nu\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}+2m^\nu\varrho\right)+\mu_\nu}{k^\nu}\right),$$

wobei $k-1<x\leq k$, $k=1,2,\ldots$ ist.

Gleichmäßige Abschätzungen für die Approximation der Binomialverteilungsfunktion durch die POISSONsche Verteilungsfunktion sind von vielen Autoren untersucht worden, z.B. von J.V.PROCHOROV [93], I.P.CAREGRADSKIJ [17], B.GRIGELIONIS [46], P.FRANKEN [39] und J.M.SHAPIRO [104].

Für $p=p(n)=\frac{1}{n}$ gilt nach [93,104] $\varrho(n)=O(\frac{1}{n})$. Mit Satz 3.3.1 soll nunmehr eine ungleichmäßige Abschätzung zu diesem Problem angegeben werden.

Wir untersuchen den Ausdruck

$$\min_{m=0,1,\ldots} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} i^{\nu} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} + 2m^{\nu} \varrho(m)\right) + \mu_{\nu}(n), \tag{3.8}$$

wenn $B(x;n,p)$ im Sinne der schwachen Konvergenz gegen $\Gamma(x;\lambda)$ konvergiert, d.h. $\varrho(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. In diesem Falle schätzen wir (3.8) wieder nach oben durch

$$\sum_{i=m(n)+1}^{\infty} i^{\nu} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} + 2m^{\nu}(n) \varrho(n)) + \mu_{\nu}(n) \tag{3.9}$$

ab. Die Folge $(m(n))_{n=1,2,\ldots}$ wird analog zu $(a(n))_{n=1,2,\ldots}$ aus Abschnitt 3.2 als unbeschränkt wachsende Folge gewählt mit

$$m(n)=o(\varrho^{-1/\nu}(n)) \text{ für } n \rightarrow \infty .$$

Damit konvergiert der Ausdruck (3.9) im Fall $\varrho(n) \rightarrow 0$ und $\mu_{\nu}(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null.

Kapitel IV

Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

1. Allgemeine Bemerkungen

Wir betrachten eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit den Verteilungsfunktionen $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)$.

Es sei $F_n(x)$ die Summenverteilungsfunktion der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Mit β_{3i} bezeichnen wir das dritte absolute Moment der Zufallsgröße X_i: $\beta_{3i}=E|X_i|^3$ und $\sigma_i^2=E(X_i-EX_i)^2$ sei die Streuung der Zufallsgröße X_i, $i=1,2,\ldots,n$. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 , \quad B_{3n} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{3i} \quad \text{und} \quad L_{3n} = \frac{B_{3n}}{B_n^3} .$$

$\Phi(x)$ sei die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Wenn nichts anderes vermerkt ist, sei im Verlauf des gesamten Kapitels IV

$$\beta_{3i} < \infty \quad , \ i=1,2,\ldots,n, \quad \text{und} \quad B_n^2 > 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$EX_i = 0, \ i=1,2,\ldots,n .$$

Um die Differenz $|F_n(xB_n) - \Phi(x)|$ ungleichmäßig nach n und x abzuschätzen, untersuchen wir das Verhalten dieser Differenz in verschiedenen x-Zonen, und zwar für

1) $|x| \leqq K$ und n beliebig,

2) $|x| > K$ und n derart, daß $\frac{1}{L_{3n}} \leqq P$ ist,

3) $K < |x| \leqq \sqrt{A \ln \frac{1}{ML_{3n}}}$ und n derart, daß $\frac{1}{L_{3n}} > \max(P, M\exp(\frac{K^2}{A}))$ ist

4) $|x| > \max(K, \sqrt{A \ln \frac{1}{ML_{3n}}})$ und n derart, daß $\frac{1}{L_{3n}} > P$ ist.

Dabei sind A, K, M und P absolute positive Konstanten.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden alle folgenden Betrachtungen auf der positiven reellen Halbachse, also für $x \geqq 0$, durchgeführt.

Der Fall 1) baut auf der bekannten Ungleichung von ESSEEN auf.

Im Falle 2) und 4) wird jeweils von der Ungleichung

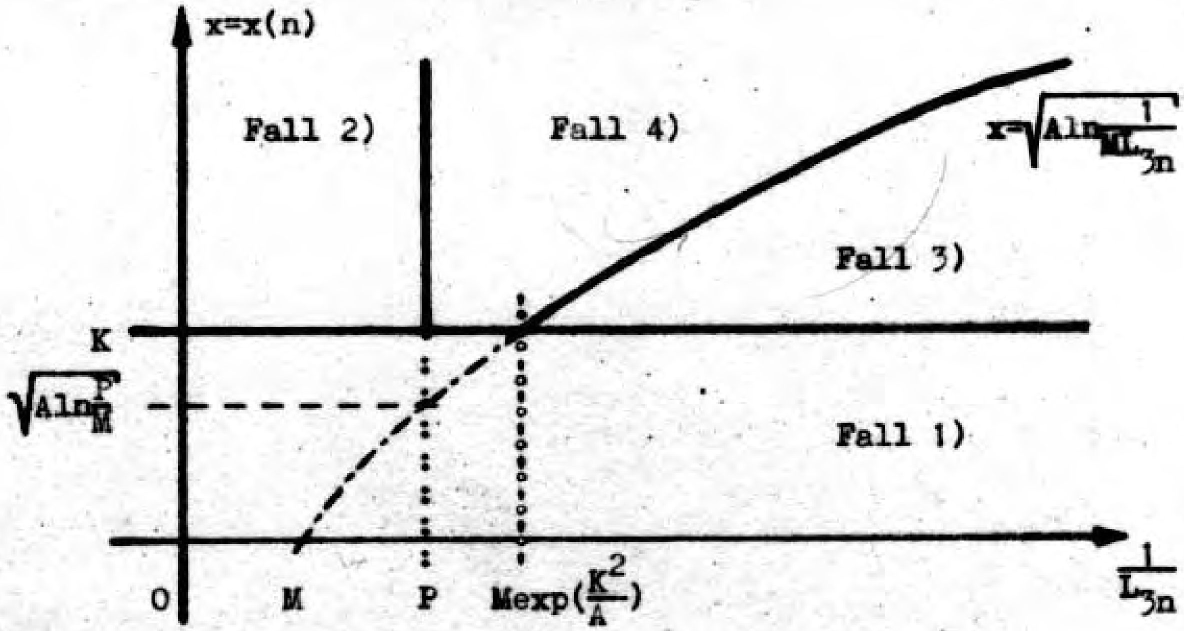
$$|F_n(xB_n) - \Phi(x)| \leqq \max(1-F_n(xB_n), 1-\Phi(x)) \underset{i.a.}{\leqq} \overbrace{\sqrt{1-F_n(xB_n)}}^{\text{Abschätzung von}}{}^{(*)} \qquad (4.1)$$

ausgegangen und das Verhalten der Schwänze $1-F_n(xB_n)$ und $1-\Phi(x)$ der Verteilungsfunktionen $F_n(xB_n)$ und $\Phi(x)$ studiert.

Zur Untersuchung des Falles 3) schließlich wird der Apparat der Faltungsmethode eingesetzt, wie wir ihn aus der Theorie der großen bzw. mittleren Abweichungen her kennen. Ausgangspunkt für die hier benutzte Faltungsmethode bilden die Arbeiten von S.V.NAGAEV [77,78], A.BIKELIS [14], S.K.SAKOJAN [78,102], R.MICHEL [73] und W.WOLF [114,115]. Dabei fließen an einigen Stellen neue Beweisgedanken ein, wodurch viele durch diese Methode erhaltenen Abschätzungen verbessert werden konnten und eine numerische Bestimmung der absoluten Konstanten C_1 bis C_4 aus Abschnitt 1.2 möglich wurde.

An einer Skizze wollen wir die Aufteilung der x-Zonen illustrieren:

(*) $F_n(xB_n)$ enthält als Spezialfall $\Phi(x)$



Die numerische Bestimmung der absoluten Konstanten C_1 bis C_4 in den Sätzen 1.2.1 bis 1.2.4 beruht darauf, daß einerseits die Konstanten A, K, M und P unabhängig voneinander frei wählbar sind und dadurch die Größe der einzelnen Gebiete der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene (s. Skizze) festgelegt wird, und andererseits die quantitative Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\emptyset(x)|$ in solch einem Teilgebiet (Fall 1) bis Fall 4)) von der Wahl der Konstanten A, K, M und P, also von der Größe des dadurch bestimmten Teilgebietes, abhängig ist.

Das Problem der Bestimmung der vorliegenden Werte der absoluten Konstanten C_1 bis C_4 wird dadurch gelöst, daß mittels eines numerischen Iterationsverfahrens die Konstanten A, K, M und P derart ermittelt werden, daß in allen vier Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene die gleiche quantitative Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\emptyset(x)|$ erhalten wird.

Wenn für die Differenz $|F_n(xB_n)-\emptyset(x)|$ eine Abschätzung nur für ein vorgegebenes x-Intervall und bestimmte n (d.h. für eine bestimmte Größe des LJAPUNOV-Bruches L_{3n}) benötigt wird, dann können die Parameter A, K, M und P so vorgegeben werden, daß dadurch das gewünschte Gebiet definiert wird und dabei kleinere absolute Konstanten in den Abschätzungen (1.1) bis (1.4) erhalten werden können. Damit sind die erhaltenen Abschätzungen der Differenz $|F_n(xB_n)-\emptyset(x)|$ innerhalb der vier durch die Parameter A, K, M und P bestimmten Gebiete auch von eigenständiger Bedeutung.

2. <u>Ungleichmäßige Abschätzungen der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ für große x</u>

Wir betrachten den Fall $x > 0$ und schätzen den Schwanz $1-F_n(x)$ der Verteilungsfunktion $F_n(x)$ ab.

Es sei

$$\gamma_{mi} = \int_0^{\infty} u^m dV_i(u), \quad m > 0,$$

das rechtsseitige Moment m-ter Ordnung und

$$\beta_{\nu i} = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\nu} dV_i(u), \quad \nu > 0,$$

das absolute Moment ν-ter Ordnung der Verteilungsfunktion $V_i(u)$, $i=1,2,\ldots,n$. Weiter sei

$$g_{mi} = \max(\sigma_i^m, \gamma_{mi}), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad G_{mn} = \sum_{i=1}^{n} g_{mi}, \quad \Gamma_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi},$$

$$B_{\nu n} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{\nu i} \quad \text{und} \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i \ .$$

Es sei

$$F_n^y(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n} {}^{*} V_i^y\Big)(x)$$

die n-fache Faltung der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen V_i^y mit

$$V_i^y(z) = \begin{cases} V_i(z) & , \quad z \leq 0, \\ V_i(z)+1-V_i(y), & 0 < z \leq y, \\ 1 & , \quad y < z \ . \end{cases}$$

Dabei ist y beliebig positiv.

<u>Satz 4.2.1:</u> 1) Es sei $0 < \gamma_{mi} < \infty$, $0 < m < 1$, $i=1,2,\ldots,n$, und $x > 0$, $y > 0$.

Dann gilt

$$1-F_n(x) \leq F_n^y(x) - F_n(x) +$$

$$+ \Big(\frac{\Gamma_{mn} K_m}{y^m}\Big)^{\frac{x}{y}} \exp\Big(1 + \Gamma_{mn} \varepsilon^{1-m} \big(1 + \varepsilon \min\big(\frac{e^{\varepsilon}}{2}, \frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\big)\big) \Big[\frac{1}{y} \ln \frac{y^m}{\Gamma_{mn} K_m}\Big]^m\Big)$$

mit $\varepsilon > 0$ und $K_m = K_m(\varepsilon) = \dfrac{e^{\varepsilon} m^m}{\varepsilon^m e^m}$.

2) Es sei $0 < \gamma_{mi} < \infty$, $1 \leq m < \infty$, $i=1,2,\ldots,n$, und $x > 0$, $y > 0$.

Dann gilt

$$1-F_n(x) \leq F_n^y(x)-F_n(x) +$$

$$+ \left(\frac{\Gamma_{mn}K_m}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} \exp\left(1+\Gamma_{1n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{\Gamma_{mn}K_m}\right|+\Gamma_{\vartheta n}\varepsilon^{2-\vartheta}\min\left(\frac{e^\varepsilon}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{\Gamma_{mn}K_m}\right|^{\vartheta}\right)$$

mit $\vartheta=\min(2,m)$.

3) Es sei $0<\gamma_{mi}<\infty$, $0<m<\infty$, und $B_{2i}<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$, und $x>0$, $y>0$.

Dann gilt

$$1-F_n(x) \leq F_n^y(x)-F_n(x) +$$

$$+ \left(\frac{\Gamma_{mn}K_m}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} \exp\left(1+|A_n|\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{\Gamma_{mn}K_m}\right|+B_{2n}\min\left(\frac{e^\varepsilon}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{\Gamma_{mn}K_m}\right|^{2}\right).$$

Zum Satz 4.2.1 möchten wir folgendes bemerken:

1) Auf Grund des Monotonieverhaltens von $K_m(\varepsilon)$ reicht es, für ε das Intervall $0<\varepsilon\leq m$ zu betrachten. Es gilt dabei $K_m(\varepsilon)\geq K_m(m)=1$.
2) Die Aussagen 1) bis 3) bleiben erhalten, wie aus dem Beweis ersichtlich wird, wenn im Falle der Existenz von B_{mi} das einseitige Moment γ_{mi} durch B_{mi} bzw. im Falle $m\geq 2$ durch δ_{mi}, $i=1,2,\ldots,n$, ersetzt wird. Natürlich muß dann in 1) bis 3) Γ_{mn} durch B_{mn} bzw. G_{mn} ersetzt werden.
3) Die Differenz $F_n^y(x)-F_n(x)$ läßt sich analog zum Beweis des Satzes 2.2.8 mittels vollständiger Induktion wie folgt abschätzen:

$$F_n^y(x)-F_n(x) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) \leq \sum_{i=1}^{n}(1-V_i(y)) .$$

Aussagen der Art, wie sie in Satz 4.2.1 formuliert wurden, finden wir in den Arbeiten von S.V.NAGAEV [77], A.BIKELIS [14] und L.PADITZ [84]. Durch die Einführung des freiwählbaren Parameters $\varepsilon>0$ und die weitere Verbesserung der Konstanten $K_m(\varepsilon)$ konnten die bisher bekannten Aussagen verschärft werden. Dabei gelang es, den Faktor $\min\left(\frac{e^\varepsilon}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)$ einzuführen. Bisher stand anstatt dieses Faktors die Zahl e [14] bzw. $\frac{e}{2}$ [84] oder 2 [77].

Aus Satz 4.2.1 lassen sich einige Folgerungen ableiten:

Folgerung 4.2.1: Es sei $0<\gamma_{mi}<\infty$ für ein $m\geq 2$, $EX_i=0$ und $\sigma_i^2<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

Dann gilt für $x\geq kB_n(K_m\Lambda_{mn})^{1/m}$, $k>0$, die Abschätzung

$$1-F_n(x)\leq F_n^{x/k}(x)-F_n(x)+\exp\left\{1+\left(\frac{m}{e}\right)^2\frac{\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)}{(K_m\Lambda_{mn})^{2/m}}\right\}\left(\frac{k^mK_m\Gamma_{mn}}{x^m}\right)^k$$

mit $\Lambda_{mn}=\frac{\Gamma_{mn}}{B_n^m}$ und $K_m=K_m(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leq m$.

<u>Folgerung 4.2.2:</u> Es sei $0<\gamma_{mi}<\infty$ für ein $m\geq 2$, $EX_i=0$ und $\sigma_i^2<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

Dann gilt für alle $x\geq 4B_n\sqrt{\max\left(1,\ln\frac{1}{K_m(2)\Lambda_{mn}}\right)}$ die Ungleichung

$$1-F_n(x)\leq\frac{D_m\Gamma_{mn}}{x^m}\,.$$

Dabei ist D_m eine Konstante, die nur von m abhängt. Es gilt

$$D_m=2^m+\exp\left\{1+\frac{e}{8}m^2\ln^2\left(\frac{\vartheta m+4}{2}\right)\right\}(\vartheta m)^mK_m(2)\quad\text{mit }\vartheta=\frac{4}{8-e}\,.$$

Speziell gilt für m=2 bzw. m=3

$D_2=29{,}243$ und

$D_3=2157{,}936$.

Für identisch verteilte Zufallsgrößen finden wir diese Folgerung bei S.V.NAGAEV [77], allerdings ohne nähere Angaben über D_m.

Für m=3 betrachten wir folgenden Satz:

<u>Satz 4.2.2:</u> Es sei $EX_i=0$ und $\beta_{3i}<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Für ein ε mit $0<\varepsilon\leq 3$ sei $K_3=K_3(\varepsilon)$. Unter der Voraussetzung $x>K$ und $\frac{1}{L_{3n}}\leq P\leq P_0$ gilt die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n)\leq 8(1+K_3e)\frac{L_{3n}}{x^3}\,.$$

Unter der Voraussetzung $x>\max\left(K,\sqrt{A\max\left(0,\ln\frac{1}{ML_{3n}}\right)}\right)$ und $\frac{1}{L_{3n}}>P$, $M\leq M_0$, $A>A_0$, gilt ebenfalls

$$1-F_n(xB_n)\leq 8(1+K_3e)\frac{L_{3n}}{x^3}\,.$$

Dabei sind A, K, M und P absolute positive Konstanten und die Größen A_0, M_0 und P_0 sind folgendermaßen definiert:

$A_0=A_0(\varepsilon)=4\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)$, $M_0=M_0(A,\varepsilon)=\left(\left(\frac{1}{A_0}-\frac{1}{A}\right)\frac{8e}{3}\right)^{\frac{3}{2}}K_3(\varepsilon)$ und

$$P_o = P_o(\varepsilon) = \left(\frac{8e}{3A_o}\right)^{\frac{3}{2}} K_3(\varepsilon) \; .$$

Folgerung 4.2.3: Es sei $EX_i=0$ und $\beta_{3i}<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

ε_o sei die kleinste Lösung der Gleichung

$$K_3(\varepsilon_o) = \frac{Z-8}{8e},\; 0<\varepsilon_o \leqq 3,\; Z \geqq Z_o \; .$$

1) Es sei K eine beliebige positive Konstante. Dann gilt für alle $x>K$ und $\frac{1}{L_{3n}} \leqq P_o(\varepsilon_o)$ die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n) \leqq \frac{ZL_{3n}}{x^3} \; .$$

2) Es seien A und K beliebige positive Konstanten mit $A> A_o(\varepsilon_o)$. Dann gilt für $x>\max\left(K,\sqrt{A\ln\frac{1}{M_o(A,\varepsilon_o)L_{3n}}}\right)$ und $\frac{1}{L_{3n}}>P_o(\varepsilon_o)$ die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n) \leqq \frac{ZL_{3n}}{x^3} \; .$$

Dabei ist Z_o eine absolute Konstante mit $Z_o=8(1+e)$.

Die Bedeutung der Folgerung 4.2.3 besteht darin, daß gewisse Gebiete der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene angegeben werden, in denen die Abschätzung von $1-F_n(xB_n)$ bezüglich $\frac{L_{3n}}{x^3}$ mit einer vorgegebenen absoluten Konstanten Z gilt. Dabei werden in Abhängigkeit von Z und A die Konstanten P_o und M_o festgelegt.

Folgerung 4.2.4: Unter allen Voraussetzungen der Folgerung 4.2.3 gilt in den dort festgelegten Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n) \leqq \frac{Z}{K}\frac{L_{3n}}{x^2} \; .$$

3. Ungleichmäßige Abschätzungen für die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung

Satz 4.3.1: Es seien $A>2$, K, M und P beliebige positive Konstanten. Dann gilt

1) für alle $x>K$ und $\frac{1}{L_{3n}} \leqq P$ die Abschätzung

$$1-\Phi(x) \leqq \frac{U_1 L_{3n}}{x^3}$$

und

2) für alle $x > \max(K, \sqrt{A\max(0,\ln\frac{1}{ML_{3n}})})$ und $\frac{1}{L_{3n}} > P$ die Abschätzung

$$1-\phi(x) \leq \frac{U_2 L_{3n}}{x^3} .$$

Dabei sind U_1 und U_2 ebenfalls positive Konstanten und es gilt

$$U_1=U_1(K,P)= \frac{P}{\sqrt{2\pi}}\max(\tfrac{2}{e}\mathrm{sign}(2-K^2),K^2\exp(-K^2/2))$$

und

$$U_2=U_2(A,K,M,P)= \frac{2AM}{\sqrt{2\pi}(A-2)}\max(\tfrac{1}{e}\mathrm{sign}(1-K_0),K_0\exp(-K_0))$$

mit $K_0=\max(K^2,A\max(0,\ln\frac{P}{M}))\frac{A-2}{2A}$.

<u>Folgerung 4.3.1:</u> Für ein $Z \geq Z_0$ sei ε_0 die kleinste Lösung der Gleichung

$$K_3(\varepsilon_0)= \frac{Z-8}{8e},\ 0< \varepsilon_0 \leq 3,\ Z_0=8(1+e).$$

Dann gilt für alle $x > \max(K,\sqrt{A\ln\frac{1}{M_0(A,\varepsilon_0)L_{3n}}})$ und $\frac{1}{L_{3n}} > P_0(\varepsilon_0)$

die Abschätzung

$$1-\phi(x) \leq \frac{U_2 L_{3n}}{x^3}$$

mit $U_2=U_2(A,K,A_0,M_0)= \frac{M_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{2A}{A-2}\max(\tfrac{1}{e}\mathrm{sign}(1-K_0),K_0\exp(-K_0))$

und $K_0= \frac{A-2}{2A}\max(K^2,\frac{3}{2}A\ln\frac{A}{A-A_0})$.

<u>Folgerung 4.3.2:</u> Für ein $Z \geq Z_0$ sei ε_0 die kleinste Lösung der Gleichung

$$K_3(\varepsilon_0)= \frac{Z-8}{8e},\ 0<\varepsilon_0 \leq 3,\ Z_0=8(1+e).$$

Dann gilt für $x > K$ und $\frac{1}{L_{3n}} \leq P=P_0(\varepsilon_0)$ die Abschätzung

$$1-\phi(x) \leq \frac{U_1' L_{3n}}{x^2}$$

und für $x > \max(K,\sqrt{A\ln\frac{1}{M_0(A,\varepsilon_0)L_{3n}}})$ und $\frac{1}{L_{3n}} > P_0(\varepsilon_0)$ die

Abschätzung

$$1-\phi(x) \leq \frac{U_2' L_{3n}}{x^2} .$$

Dabei sind U_1' und U_2' ebenfalls positive Konstanten und es gilt

$$U_1'=U_1'(K,P)= \frac{P}{\sqrt{2\pi}}\max(K\exp(\frac{-K^2}{2}),\frac{1}{\sqrt{e}}\mathrm{sign}(1-K))$$

und

$$U_2' = U_2'(A,K,A_o,M_o) = M_o\sqrt{\frac{A}{\pi(A-2)}}\max\left(\sqrt{K_o}\exp(-K_o), \frac{1}{\sqrt{2e}}\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2} - K_o\right)\right)$$

mit $K_o = \frac{A-2}{2A}\max\left(K^2, \frac{3}{2}A\ln\frac{A}{A-A_o}\right)$.

Die in beiden Folgerungen auftretenden Größen $A_o(\varepsilon_o)$, $M_o(A,\varepsilon_o)$ und $P_o(\varepsilon_o)$ sind in Satz 4.2.2 definiert. K und $A > \max(2, A_o(\varepsilon_o))$ sind beliebige positive Konstanten.

Lemma 4.3.1: Für beliebige reelle Zahlen x und p mit $p \geq 0$ gilt

$$|\Phi(px) - \Phi(x)| \leq k_2|p-1| .$$

Dabei ist k_2 eine absolute Konstante und es gilt

$$k_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{e\pi}{2}}\right)\right)^{-1} = 0{,}5725 .$$

vgl. Lemma 2.9 von G. Englund Z. Wahrsch. verw. Geb. 60 (1982) 381-391

4. Ungleichmäßige Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

P. VAN BEEK [5,6] bestimmte 1971 die absoluten Konstanten in den Ungleichungen von ESSEEN bzw. BERRY-ESSEEN und erhielt folgendes Ergebnis:

Satz 4.4.1 ([5,6]): Für eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $EX_i = 0$ und $B_{3i} < \infty$, $i = 1,2,\ldots,n$, gilt die Ungleichung von ESSEEN mit der absoluten Konstanten

$$L_o = 0{,}7975 ,$$

d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|F_n(xB_n) - \Phi(x)| \leq L_o L_{3n} . \qquad n = 1,2,\ldots$$

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen gilt die Ungleichung von BERRY-ESSEEN mit der absoluten Konstanten

$$L_o' = 0{,}7882 ,$$

d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|F_n(x\sigma_1\sqrt{n}) - \Phi(x)| \leq L_o' \frac{B_{3,1}}{\sigma_1^3\sqrt{n}} .$$

Hieraus erhalten wir sofort als ungleichmäßige Abschätzungen die Folgerungen:

Folgerung 4.4.1: Es sei K eine beliebige positive Konstante. Dann gilt für alle $|x| \leq K$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n) - \Phi(x)| \leq \frac{L_1 L_{3n}}{1+|x|^3} \quad \text{mit } L_1 = L_o(1+K^3).$$

Folgerung 4.4.2: Es sei K eine beliebige positive Konstante.
Dann gilt für alle $|x| \leq K$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{L_1' L_{3n}}{1+x^2} \quad \text{mit } L_1'=L_0(1+K^2).$$

In den Folgerungen ist ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen K und L_1 bzw. L_1' gegeben. Damit ist für eine vorgegebene Konstante $L_1 > L_0$ eine x-Zone $|x| \leq K$ festgelegt, in der die Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ in der Nullpunktumgebung mit dieser Konstanten L_1 gilt.

Es mögen α, β und γ gewisse positive Zahlen sein. Wir definieren folgende Konstanten:

$$k_3=k_3(\alpha,\gamma)=\max\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\alpha^3, \min\left[\alpha^2\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}\right), \frac{\alpha^2}{2}+\alpha^3\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]\right\}$$

und

$$\begin{aligned}
k_4&=k_4(\alpha,\beta,\gamma)=\\
&=\left(1-\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\alpha^3\right)^{-2}\beta\Bigg\{\alpha\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\alpha^2\right)+\\
&\qquad +\max\Bigg[\frac{1}{\gamma}, 1+\frac{\alpha^2}{2},\\
&\qquad\qquad \alpha^2\min\left(e^\gamma,\frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma}\right)+\alpha^2(1+\alpha^2)\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\Bigg]+\\
&\qquad +\alpha^3\max\Bigg[\frac{\alpha^2}{\gamma^6}+\frac{1+\alpha^2}{\gamma^4}+\frac{1+\alpha^2/2}{2\gamma^2}+\frac{2\alpha^2}{\gamma^5}+\frac{1+\alpha^2}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^4}\max(0,\alpha^2-1),\\
&\qquad\qquad \frac{1}{4}\left(1+\frac{\alpha^2}{9}\right), \min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right)+\alpha^2\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{36},\frac{4e^{2\gamma-4}}{\gamma^4}\right),\\
&\qquad\qquad \frac{\alpha^2}{6\gamma^3}+\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{\alpha^2}{6\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{12\gamma}\max(0,\alpha^2-1),\\
&\qquad\qquad \frac{e^\gamma}{2}\left(\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma}\min\left(\frac{1}{6},\frac{2e^{-2}}{\gamma^2}\right)\right),\\
&\qquad\qquad \frac{e^\gamma}{12}\left(1+\min\left(1,\frac{12e^{-2}}{\gamma^2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Satz 4.4.2: Es seien A, K, M und P positive Konstanten und γ ein positiver Parameter. Mit

$$\alpha=\alpha(A,K,M,P)=\left\{\max\left(\frac{(AN_0)^{\frac{3}{2}}}{Me^{N_0}}, \left(\frac{3A}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}M^{-1}\operatorname{sign}\left(\frac{3}{2}-N_0\right)\right)\right\}^{\frac{1}{3}}, \quad N_0=\max\left(\frac{K^2}{A},\ln\frac{P}{M}\right),$$

und

$$B=B(A,K,M,P)=\max\left(\frac{\sqrt{AN_o}}{Me^{N_o}},\sqrt{\frac{A}{2e}}\,M^{-1}\operatorname{sign}\left(\tfrac{1}{2}-N_o\right)\right),\quad N_o=\max\left(\frac{K^2}{A},\ln\frac{P}{M}\right),$$

mögen folgende Relationen erfüllt sein

$$A>2,\ K^2>\gamma A,\ M>\left(\frac{A}{K}\right)^3,\ \frac{\alpha^3A^2}{K^4}<1,\ k_3(\alpha,\gamma)<1,\ k_4(\alpha,B,\gamma)<1. \quad (4.2)$$

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$ und $B_{3i}<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Dann gilt für alle x mit $K<|x|\leq\sqrt{A\ln\frac{1}{ML_{3n}}}$ und $\frac{1}{L_{3n}}>\max(P,M\exp(\frac{K^2}{A}))$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\varnothing(x)|\leq\frac{L_2L_{3n}}{|x|^3}.$$

Dabei ist L_2 eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, M und P sowie γ abhängt.

Wie aus Abschnitt 4.5 ersichtlich ist, gibt es Punkte $(A,K,M,P,\gamma)\in R^5$, die die an die Parameter A, K, M, P und γ in Satz 4.4.2 gestellten Bedingungen erfüllen. Damit ist durch die Relationen (4.2) ein nichtleeres Gebiet des R^5 bestimmt.

Satz 4.4.3: Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit $EX_1=0$, $EX_1^2=1$ und $B_{3,1}<\infty$.

Wenn wir in allen Voraussetzungen (4.2) im Satz 4.4.2, die an die Konstanten A, K, M, P und γ gestellt werden, die Zahl α durch die Zahl B ersetzen, dann gilt für alle

$$K<|x|\leq\sqrt{A\ln\frac{\sqrt{n}}{MB_{3,1}}} \quad \text{und} \quad n>B_{3,1}^2\max(P^2,M^2\exp(\frac{2K^2}{A}))$$

die Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\varnothing(x)|\leq\frac{L_2'B_{3,1}}{|x|^3\sqrt{n}}.$$

Dabei ist L_2' eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, M, P und γ abhängt.

Weitere qualitative Aussagen über die Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\varnothing(x)|$ unter den in den Sätzen 4.4.2 bzw. 4.4.3 gestellten Voraussetzungen und definierten Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene werden im den folgenden zwei Ergebnissen gemacht.

Satz 4.4.4: Unter den Bedingungen des Satzes 4.4.2 im Falle verschieden verteilter Zufallsgrößen bzw. des Satzes 4.4.3 im Falle identisch verteilter Zufallsgrößen gilt in den dort festgelegten Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$; x-Ebene die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{xB_n}{A}\right)+\frac{L_3 L_{3n}}{x^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\left(1-\frac{2}{A}\right)\right), \quad (x>0).$$

Dabei ist L_3 eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, M, P und γ abhängt.

Aussagen dieser Art finden wir in den Arbeiten von A.BIKELIS [14], R.MICHEL [72] und L.PADITZ [84]. Dabei ist in den Arbeiten [14] und [72] über die Struktur der Konstanten L_3 nichts ausgesagt.

Satz 4.4.5: Unter den Bedingungen des Satzes 4.4.2 im Falle verschieden verteilter Zufallsgrößen bzw. des Satzes 4.4.3 im Falle identisch verteilter Zufallsgrößen gilt in den dort festgelegten Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$; x-Ebene die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{L_4 L_{3n}}{x^2}.$$

Dabei ist L_4 eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, M, P und γ abhängt.

Die genaue Struktur der Konstanten L_2 bis L_4 wird im folgenden Abschnitt angegeben.

Wir bemerken noch, daß für negative x eine zu Satz 4.4.4 entsprechende Aussage gilt, wenn dabei in der Abschätzung

$$1-\prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{xB_n}{A}\right) \quad \text{durch} \quad \prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{-xB_n}{A}\right)$$

ersetzt wird.

5. Zur numerischen Bestimmung der absoluten Konstanten in den Ungleichungen von S.V.NAGAEV und A.BIKELIS

In diesem Abschnitt wird die analytische Struktur der Konstanten L_2 bis L_4 auf der Grundlage der in Kapitel IX zu den Sätzen 4.4.2 bis 4.4.5 geführten Beweise für die numerische Auswertung aufgeschlüsselt und zusammengefaßt. Darauf aufbauend erhalten wir schließlich die absoluten Konstanten C_1 bis C_4 in den in Kapitel I angeführten Ungleichungen (1.1) bis (1.4).

1) Entsprechend dem Ergebnis in Satz 4.4.2 gilt

$$L_2=L_2(A,K,M,P,\gamma).$$

L_2 ist die Summe folgender Größen

$$L_2=k_5(A)+k_6(\alpha,\alpha,\gamma,\delta_o,A,K)+k_7(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

mit

$$k_5=k_5(A)=A^3,$$

$$k_6=k_6(\alpha,\beta,\gamma,\delta_o,A,K)=$$

$$=\left(1-\frac{\beta^3A^2}{K^4}\right)^{-1}\left(\frac{3A}{\gamma}\right)^3\exp\left(-\frac{A-2}{2A}K^2+\gamma-2+\alpha^3\min\left(\frac{e^{\delta_o}}{6},\frac{2e^{\delta_o-2}}{\delta_o^{\,2}}\right)\right),$$

und

$$k_7=k_7(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})=$$

$$=\frac{2k_8k_{10}L_o}{k_{11}^{3/2}}\max\left(\left(\frac{3}{e}\right)^{1,5}\operatorname{sign}(3-K^2),K^3\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+2k_2k_8k_{12}\max\left(\left(\frac{4}{e}\right)^2\operatorname{sign}(4-K^2),K^4\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+(2k_1k_8k_{13}+k_1k_9)\max\left(\left(\frac{5}{e}\right)^{2,5}\operatorname{sign}(5-K^2),K^5\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right).$$

Dabei sind δ_o die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$K_3(\delta_o)=M\left(\frac{K}{A}\right)^3,\quad 0<\delta_o\leq 3,$$

und k_1, k_2 und L_o die absoluten Konstanten aus den Lemmata 9.2 und 4.3.1 bzw. Satz 4.4.1. Die Konstanten k_8 bis k_{13} hängen von α, β und γ in folgender Weise ab:

$$k_8=k_8(\alpha,\gamma)=\exp\left(\alpha^3\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right),$$

$$k_9=k_9(\alpha,k_{14})=k_{14}\exp(\alpha^3k_{14})$$

mit

$$k_{14}=k_{14}(\alpha,\gamma)=$$

$$=\max\Bigg\{\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right),$$

$$\max\left(\frac{1}{6},\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\right)\right)+\frac{0{,}5\alpha}{1-k_3(\alpha,\gamma)}\max\Bigg\{\frac{\alpha^2(1+\gamma)^2}{\gamma^6},$$

$$\min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\left(\frac{1}{2}+\alpha\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right)^2\right]\Bigg\}\Bigg\}.$$

Dabei ist $k_3(\alpha,\gamma)$ die im vorangehenden Abschnitt eingeführte Konstante.

$$k_{10}=k_{10}(\alpha,\gamma)=((e^{\gamma}k_{15}(\alpha,\gamma))^{1/3}+k_{16}(\alpha,\gamma))^3$$

mit

$$k_{15}(\alpha,\gamma)=(1-\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\alpha^3)^{-1}$$

und

$$k_{16}(\alpha,\gamma)=k_{15}(\alpha,\gamma)\max(\frac{\alpha^2}{\gamma^2},\alpha+\alpha^2\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma})).$$

$$k_{11}=k_{11}(\alpha,\beta,\gamma)=1-k_4(\alpha,\beta,\gamma),$$

wobei $k_4(\alpha,\beta,\gamma)$ die im vorangehenden Abschnitt eingeführte Konstante ist.

$$k_{12}=k_{12}(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{k_{15}^2(\alpha,\gamma)\max(k_{17}(\alpha,\gamma),k_{18}(\alpha,\gamma))}{1+\sqrt{k_{11}(\alpha,\beta,\gamma)}}$$

mit

$$\begin{aligned}
k_{17}(\alpha,\gamma)=\;&\alpha(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\alpha^2)+\\
&+\max(\frac{1}{\gamma},1+\frac{\alpha^2}{2},\alpha^2\min(e^{\gamma},\frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma})+\alpha^2(1+\alpha^2)\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}))+\\
&+\alpha^3\max\Big[\frac{\alpha^2}{\gamma^6}+\frac{1+\alpha^2}{\gamma^4}+\frac{1+\alpha^2/2}{2\gamma^2}+\frac{2\alpha^2}{\gamma^5}+\frac{1+\alpha^2}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^4}\max(0,\alpha^2-1),\frac{1}{4}(1+\frac{\alpha^2}{9}),\\
&\qquad\min(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2})+\alpha^2\min(\frac{e^{2\gamma}}{36},\frac{4e^{2\gamma-4}}{\gamma^4}),\\
&\qquad\frac{\alpha^2}{6\gamma^3}+\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{\alpha^2}{6\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{12\gamma}\max(0,\alpha^2-1),\\
&\qquad\frac{e^{\gamma}}{2}(\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma}\min(\frac{1}{6},\frac{2e^{-2}}{\gamma^2})),\frac{e^{\gamma}}{12}(1+\min(1,\frac{12e^{-2}}{\gamma^2}))\Big],
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
k_{18}(\alpha,\gamma)=\;&\max\Big\{\frac{\alpha^2}{\gamma^3}(1+\alpha^2)+\frac{\alpha^2(3+\alpha^2)}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\max(0,-1+2\alpha^2+\frac{\alpha^4}{2}),\\
&\qquad\frac{\alpha^2(7+\alpha^2)}{6},e^{\gamma}(1+\frac{\alpha^2}{2})\Big\}+\\
&+\alpha^3\max\Big\{(\frac{1}{2\gamma}\max(0,\alpha^2-1)+\frac{\alpha^2(1+\gamma)}{\gamma^3})\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}),\\
&\qquad\frac{1}{2}\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma})+\frac{\alpha^2}{6}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}),\frac{1}{\gamma^4},\frac{1}{6},e^{\gamma}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}),\\
&\qquad\frac{1}{2}(\frac{1+\gamma}{\gamma^3}+\frac{2}{3\gamma})\Big\}.
\end{aligned}$$

$$k_{13}=k_{13}(\alpha,\gamma)=k_{15}(\alpha,\gamma)\max(k_{19}(\alpha,\gamma),k_{20}(\alpha,\gamma))$$

mit

$$k_{19}(\alpha,\gamma)=\max\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^2}\max(0,\alpha^2-1)+\frac{1}{\gamma}\max(0,\frac{\alpha^2}{2}-1),\frac{\alpha^2}{6}\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma})\right)$$

und

$$k_{20}(\alpha,\gamma)=\max\left(\frac{1+\gamma}{\gamma^2},\frac{1}{2},\alpha^2\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})\right)+\frac{\alpha}{2}.$$

Die Zahlen α und β sind die in Satz 4.4.2 eingeführten Konstanten, die nur von A, K, M und P abhängen. Für δ_0 gilt ebenfalls $\delta_0=\delta_0(A,K,M)$.

Über die oben definierten Konstanten k_3 bis k_{20} ist zu erkennen, daß L_2 tatsächlich eine Konstante ist, die nur von den Parametern A, K, M, P und γ abhängt.

Die Voraussetzungen des Satzes 4.4.2 haben folgende Bedeutung:

Aus $M>(\frac{A}{K})^3$ folgt die Existenz von δ_0.

Mit $\frac{\alpha^3A^2}{K^4}<1$ ergibt sich, daß k_6 eine positive Konstante ist.

Aus $k_3<1$ folgt, daß in k_{14} keine Division durch Null auftritt und k_{15} eine positive Konstante ist. Die Bedingung $k_4<1$ sichert schließlich, daß k_{11} eine positive Konstante ist. Die Voraussetzung $A>2$ ist ebenfalls zum Erhalt der Konstanten k_6 notwendig. Schließlich bedeutet die Voraussetzung $K^2>\gamma A$, daß zwischen den im Beweis zu Satz 4.4.2 eingeführten Parametern h und y die Relation $y\geq\frac{\gamma}{h}$ besteht.

2) Wir kommen nun zur Beschreibung der Konstanten L_2':

Entsprechend dem Ergebnis in Satz 4.4.3 gilt

$$L_2'=L_2'(A,K,M,P,\gamma).$$

L_2' setzt sich wie folgt zusammen:

$$L_2'=k_5(A)+k_6(\alpha,\beta,\gamma,\delta_0,A,K)+k_7(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

mit

$$k_8=k_8(\alpha,\gamma),\ k_9=k_9(\alpha,k_{14}),\ k_{14}=k_{14}(\beta,\gamma),$$
$$k_{10}=k_{10}(\beta,\gamma),\ k_{11}=k_{11}(\beta,\beta,\gamma),\ k_{12}=k_{12}(\beta,\beta,\gamma)$$

und

$$k_{13}=k_{13}(\beta,\gamma).$$

Im Unterschied zu L_2 wurde also hier an einigen Stellen α durch β ersetzt.

In k_7 wird jetzt anstatt L_o die absolute Konstante L_o' verwendet.

3) Zur Beschreibung der Konstanten L_3:

Entsprechend dem Ergebnis in Satz 4.4.4 gilt

$$L_3=L_3(A,K,M,P,\gamma)$$

mit

$$L_3=k_{21}(\alpha,\alpha,\gamma,\delta_o,A,K)+k_{22}(A,K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

und

$$k_{21}(\alpha,\beta,\gamma,\delta_o,A,K)=\left(1-\frac{\beta^3A^2}{K^4}\right)^{-1}\left(\frac{3A}{\gamma}\right)^3\exp\left(\gamma-2+\alpha^3\min\left(\frac{e^{\delta_o}}{6},\frac{2e^{\delta_o-2}}{\delta_o^2}\right)\right),$$

$$k_{22}(A,K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})=$$

$$=\frac{2k_8k_{10}L_o}{k_{11}^{3/2}}A^{\frac{3}{2}}\max\left(\left(\frac{1,5}{e}\right)^{1,5}\mathrm{sign}\left(1,5-\frac{K^2}{A}\right),\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^3\exp\left(\frac{-K^2}{A}\right)\right)+$$

$$+2k_2k_8k_{12}A^2\max\left(\left(\frac{2}{e}\right)^2\mathrm{sign}\left(2-\frac{K^2}{A}\right),\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^4\exp\left(\frac{-K^2}{A}\right)\right)+$$

$$+(2k_1k_8k_{13}+k_1k_9)A^{\frac{5}{2}}\max\left(\left(\frac{2,5}{e}\right)^{2,5}\mathrm{sign}\left(2,5-\frac{K^2}{A}\right),\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^5\exp\left(\frac{-K^2}{A}\right)\right).$$

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen gelten

$$L_3=k_{21}(\alpha,\beta,\gamma,\delta_o,A,K)+k_{22}(A,K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

und die im Unterpunkt 2) gemachten Bemerkungen.

4) Zur Beschreibung der Konstanten L_4:

Es gilt

$$L_4=L_4(A,K,M,P,\gamma)=$$

$$=k_{23}(A,K)+k_{24}(\alpha,\alpha,\gamma,\delta_o,A,K)+k_{25}(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

mit

$$k_{23}(A,K)=\frac{A^3}{K},$$

$$k_{24}(\alpha,\beta,\gamma,\delta_o,A,K)=$$

$$=\left(1-\frac{\beta^3A^2}{K^4}\right)^{-1}\left(\frac{3A}{\gamma}\right)^3\frac{1}{K}\exp\left(-\frac{A-2}{2A}K^2+\gamma-2+\alpha^3\min\left(\frac{e^{\delta_o}}{6},\frac{2e^{\delta_o-2}}{\delta_o^2}\right)\right)$$

und

$$k_{25}(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})=$$

$$=\frac{2k_8k_{10}L_o}{k_{11}^{3/2}}\max\left(\frac{2}{e}\mathrm{sign}(2-K^2),K^2\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+2k_2k_8k_{12}\max\left(\left(\frac{3}{e}\right)^{1,5}\mathrm{sign}(3-K^2),K^3\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+(2k_1k_8k_{13}+k_1k_9)\max\left(\left(\frac{4}{e}\right)^2 \operatorname{sign}(4-K^2),K^4\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right).$$

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen gelten

$$L_4=k_{23}(A,K)+k_{24}(\alpha,\beta,\gamma,\delta_o,A,K)+k_{25}(K,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13})$$

und die im Unterpunkt 2) gemachten Bemerkungen.

5) Berechnung der absoluten Konstanten C_4:

Die zu beweisende Ungleichung des Satzes 1.2.4 folgt offensichtlich aus der ungleichmäßigen Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \frac{LL_{3n}}{x^3}, (x \neq 0)$$

und der gleichmäßigen Abschätzung des Satzes 4.4.1. Es gilt dann

$$C_4 = L+L_o .$$

Aus den vorangehenden Abschnitten erhalten wir für L folgende Bestimmungsgleichung:

$$L=\min_K\max\left\{L_oK^3,U_1,\min_A\left[\max(U_2,\min_\gamma L_2)\right]\right\}$$

mit

$$U_1=U_1(K,P_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3)),$$

$$U_2=U_2(A,K,A_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3),M_o(A,\varepsilon_o/Z=L_oK^3))$$

und

$$L_2=L_2(A,K,M_o(A,\varepsilon_o/Z=L_oK^3),P_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3),\gamma).$$

Die Konstanten A_o, M_o und P_o werden unter der Bedingung $Z=L_oK^3$ betrachtet und sind entsprechend der Folgerung 4.2.3 festgelegt. Weiterhin wird die Minimierung von L bezüglich der Parameter γ, A und K lokal betrachtet und zwar für folgende Intervalle:

$$0<\gamma\leq 3,$$

$$\max(2,A_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3)) < A \leq K\sqrt[3]{L_o},$$

$$K \geq \sqrt[3]{8(1+e)/L_o} .$$

Außer den hier angegebenen Intervallen für γ, A und K unterliegen diese Größen noch den Einschränkungen, die ihnen durch die Voraussetzungen des Satzes 4.4.2 auferlegt sind. Die Einschränkung $K \geq \sqrt[3]{8(1+e)/L_o}$ bedeutet $Z\geq Z_o$, d.h. zusammen mit der Bedingung $A > A_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3)$ kann die Folgerung 4.2.3 zur Berechnung der absoluten Konstanten C_4 herangezogen werden. Die Bedingung $A \leq K\sqrt[3]{L_o}$ ergibt sich einfach aus der Definition der

Konstanten k_5, die als Summand in die Konstante L_2 eingeht. Andernfalls hätten wir sofort $L_2 > L_o K^3$. Den Wert $L_o K^3$ erhalten wir durch Anwendung der Folgerung 4.4.1. Die Konstanten U_1 und U_2 aus dem Satz 4.3.1 bzw. der Folgerung 4.3.1 müssen entsprechend der Ungleichung (4.1) aus dem Abschnitt 4.1 bei der Berechnung von L ebenfalls mit betrachtet werden. Es zeigt sich aber bei der numerischen Berechnung von L, daß für die in Frage kommenden Werte von K die Ungleichungen

$$U_1 < L_o K^3 \quad \text{und} \quad U_2 < L_o K^3$$

gelten, d.h. in den betrachteten Gebieten der $\frac{1}{L_{3n}}$;x-Ebene erfolgt die Annäherung der Verteilungsfunktion $F_n(xB_n)$ gegen 1 im allgemeinen langsamer als die Annäherung der Verteilungsfunktion $\emptyset(x)$ der standardisierten Normalverteilung gegen 1. Damit reduziert sich das Problem der Bestimmung von L darauf, daß A und K derart bestimmt werden müssen, daß unter Beachtung der Einschränkungen an A und K die Beziehung

$$\min_{0<\gamma\leq 3} L_2(A,K,M_o(A,\varepsilon_o/Z=L_oK^3),P_o(\varepsilon_o/Z=L_oK^3),\gamma) = L_oK^3$$

gilt.

Zur Festlegung des Intervalls für γ gibt es folgendes zu bemerken: Wenn man die Beweise über die Existenz von absoluten Konstanten C_3 und C_4, so wie sie von S.V.NAGAEV und A.BIKELIS geführt wurden, betrachtet, so entsprechen diese Beweise in gewissem Sinne dem Fall γ=1 (siehe Definition der Funktionen $H_{i1}(h)$, $H_{i2}(h)$ und $\emptyset_{ih}(z)$ zu Beginn des Beweises von Satz 4.4.2). Deshalb lag es auf der Hand, den Parameter γ ähnlich wie die Parameter δ und ε (siehe Bemerkung 1) nach Satz 4.2.1) in der Umgebung der Zahl 1 zu betrachten. Bei der numerischen Realisierung der Minimierung von L_2 bezüglich γ bestätigte sich die Vermutung $0<\gamma\leq 3$.

Die Minimierung von L bezüglich der Parameter A, K und γ erfolgt über ein numerisches Iterationsverfahren, bei dem von gewissen Startwerten für A, K und γ ausgegangen wird. Als Startwerte für K und γ dienen empirisch gefundene Zahlenwerte und als Startwert für A wird die obere Schranke von A $K\sqrt[3]{L_o}$ verwendet. Für diesen Startwert von A gilt offensichtlich

$$\min_{\gamma} L_2(A,K,M_o,P_o,\gamma) > L_oK^3$$

(siehe Definition von k_5). Bei hinreichend großem Startwert für K läßt sich durch numerische Iteration A so verkleinern, daß für den festen Startwert von K die Ungleichung

$$\min_{A}\min_{\gamma} L_2(A,K,M_o,P_o,\gamma) \leq L_oK^3$$

gilt. Nun wird mittels numerischer Iteration K so verkleinert, bis in der vorangehenden Ungleichung Gleichheit eintritt, d.h. das gesuchte K ist die Lösung der Gleichung

$$\min_{A} \min_{\gamma} L_2(A,K,M_o,P_o,\gamma) = L_o K^3 \text{ .}$$

Die eben geschilderten Iterationen wurden mittels einer Version des Minimierungsverfahrens "LIMI" auf dem sowjetischen Rechenautomaten BESM6 durchgeführt. Dieses Verfahren "LIMI" wurde von der Sektion Mathematik, Bereich Numerische Mathematik, der TU Dresden erarbeitet und programmiert und stand dem Nutzer auf dem Magnetband 283 der BESM6-Programmbibliothek im Rechenzentrum der TU Dresden zur Verfügung. 997 am 16.1.80 Pa.

Der im Abschnitt 1.2 angegebene Wert von C_4 ergab sich für

$$K=5{,}22668 \text{ , } A=4{,}84337 \text{ und } \gamma=2{,}30345 \text{ .}$$

Für diese Werte gilt

$$L=L_2=L_o K^3=113{,}8698 \text{ .}$$

Zum Vergleich geben wir die Werte von U_1 und U_2 an:

$$U_1=1{,}49\cdot10^{-4} \text{ , } U_2=2{,}69\cdot10^{-3} \text{ .}$$

Für M_o und P_o wurden folgende Werte berechnet:

$$M_o=0{,}79573 \text{ , } P_o=11{,}71366 \text{ ,}$$

d.h.

$$\max(P_o,M_o\exp(\frac{K^2}{A}))=235{,}15101 \text{ .}$$

6) Berechnung der absoluten Konstanten C_3:

Ausgehend vom Unterpunkt 2) müssen wir L_2 durch L_2' ersetzen und dann entsprechend das unter 5) diskutierte Problem lösen.

Der im Abschnitt 1.2 angegebene Wert von C_3 ergab sich für

$$K=5{,}23968 \text{ , } A=4{,}83764 \text{ und } \gamma=2{,}61018 \text{ .}$$

Für diese Werte gilt

$$L=L_2'=L_o' K^3=113{,}3837 \text{ .}$$

Weiterhin haben wir in diesem Fall:

$$U_1=1{,}40\cdot10^{-4} \text{ , } U_2=2{,}59\cdot10^{-3} \text{ ,}$$

$$M_o=0{,}78702 \text{ , } P_o=11{,}66475$$

und

$$\max(P_o,M_o\exp(\frac{K^2}{A}))=240{,}78333 \text{ .}$$

7) Berechnung der absoluten Konstanten C_1 und C_2:

Wir gehen wie im Unterpunkt 5) vor, wobei aber folgende Änderungen zu beachten sind: Entsprechend der Folgerung 4.4.2 wird die Größe L_0K^3 durch L_0K^2 ersetzt, wobei aber die Bedingung $Z=L_0K^3$ erhalten bleibt (s. Folgerung 4.2.4). Weiterhin treten an die Stelle von U_1 und U_2 die Konstanten U_1' und U_2' aus der Folgerung 4.3.2. Und schließlich ist entsprechend Satz 4.4.5 die Konstante L_2 durch L_4 zu ersetzen.

Bei der numerischen Berechnung von C_1 und C_2 erhalten wir die gleichen Konstanten A, K, M_0, P_0 und γ, wie sie unter 5) bzw. 6) angegeben wurden. Weiterhin haben wir im Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen

$$L=L_4=L_0K^2=21{,}78625\ ,\ U_1'=2{,}86\cdot10^{-5}\ ,\ U_2'=5{,}12\cdot10^{-4}$$

und im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen

$$L=L_4'=L_0'K^2=21{,}63944\ ,\ U_1'=2{,}66\cdot10^{-5}\ ,\ U_2'=4{,}91\cdot10^{-4}\ .$$

Kapitel V

Zur Abschätzung der Annäherung der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente

1. Allgemeine Bemerkungen

Es sei $\gamma_{3i}=E(X_i^+)^3$ das rechtsseitige dritte Moment der Zufallsgröße X_i und $g_{3i}=\max(\delta_i^3,\gamma_{3i})$, $i=1,2,\ldots,n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß die Erwartungswerte der Zufallsgrößen X_i, die existieren sollen, gleich Null sind: $EX_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Weiterhin fordern wir, daß die Streuungen und die dritten einseitigen Momente endlich sind:

$$EX_i^2<\infty\ ,\ E(X_i^+)^3<\infty\ ,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Für jedes n sei $B_n^2>0$.

Unter diesen Voraussetzungen schätzen wir die Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ für $x \geq 0$ nach n und x ab.

Falls anstatt $E(X_i^+)^3<\infty$ die einseitige Momentenbedingung

$$E|X_i^-|^3 = \int_{-\infty}^{0}|u|^3dV_i(u)<\infty,\ i=1,2,\ldots,n,$$

vorausgesetzt wird, kann dann die entsprechende Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ für $x<0$ untersucht werden.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\Gamma_{3n}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{3i},\ G_{3n}=\sum_{i=1}^{n}g_{3i}\ \text{ und }\ \Lambda_{3n}=\frac{G_{3n}}{B_n^3}\ .$$

Folgendes Beispiel zeigt, daß Folgen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ von unabhängigen Zufallsgrößen existieren, die den Bedingungen

$$EX_i^2<\infty,\ E(X_i^+)^3<\infty\ ,\ i=1,2,\ldots,n,$$

genügen, aber das absolute dritte Moment nicht existiert. Aus diesem Grunde sind die Ungleichungen (1.3) und (1.4) aus Kapitel I nicht anwendbar. Trotzdem läßt sich eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ auf der positiven reellen Halbachse angeben.

X sei eine diskrete Zufallsgröße mit folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p_1=P(X=3)=\frac{1}{18}\ ,$$

$$p_0=P(X=0)=\frac{55}{63}\ ,$$

$$p_{-k}=P(X=-2^k)=\frac{1}{2^{3k+1}}\ ,\ k=1,2,\ldots\ .$$

Es gilt

$$EX=0,\ EX^2=1,\ E(X^+)^3=1,5$$

aber andererseits

$$E|X^-|^3=\infty\ .$$

Man kann sogar zeigen, daß diese Zufallsgröße keine höheren als zweite absolute Momente besitzt. Es läßt sich aber nachweisen, daß für alle $n\geq n_0$ mit $n_0=186164$ oder für alle n mit $1,5^2<n\leq n_1$ und $n_1=11$ die Beziehung (1.5) mit $\Lambda_{3n}<1$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{-H_n}u^2dP(X<u)\leq\frac{1}{H_n}\leq\frac{1}{\ln\frac{n}{1,5^2}}\ .$$

Dabei ist $H_n=\dfrac{\sqrt{n}}{(\ln\frac{n}{1,5^2})^{3/2}}$.

Es gilt folgende Aussage:

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen, die wie die oben eingeführte Zufallsgröße X verteilt sind. Dann gilt für alle reellen Zahlen $x\geq 0$

und alle natürlichen Zahlen n mit $3 \leq n \leq n_1$ oder $n \geq n_0$ die ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n}) - \Phi(x)| \leq \frac{C_6}{(1+x^3)\ln\frac{n}{1{,}5^2}} . \tag{5.1}$$

Dabei ist C_6 die absolute Konstante aus der Ungleichung (1.7), d.h. $C_6 = 115{,}754$.

In diesem Kapitel soll das eben demonstrierte Beispiel für die ungleichmäßige Abschätzung der Differenz $|F_n(x\sqrt{n}) - \Phi(x)|$ allgemein untersucht werden. Wir betrachten das Verhalten der Differenz $|F_n(xB_n) - \Phi(x)|$ in folgenden x-Zonen:

1) $0 \leq x \leq K$ und n derart, daß $\Lambda_{3n} < 1$ gilt,

2) $x > K$ und n derart, daß $1 < \frac{1}{\Lambda_{3n}} \leq P$ ist,

3) $K < x \leq \sqrt{A \ln \frac{1}{\Lambda_{3n}}}$ und n derart, daß $\frac{1}{\Lambda_{3n}} > \max(P, \exp(\frac{K^2}{A}))$ ist,

4) $x > \max(K, \sqrt{A \ln \frac{1}{\Lambda_{3n}}})$ und n derart, daß $\frac{1}{\Lambda_{3n}} > P$ ist.

Dabei sind A, K und $P > 1$ absolute positive Konstanten.
Die x-Zoneneinteilung unterscheidet sich hier von der im Abschnitt 4.1 dadurch, daß anstelle des LJAPUNOV-Bruches L_{3n} ein entsprechender Quotient Λ_{3n} steht und die Konstante M gleich 1 gesetzt wurde, um als Konvergenzgeschwindigkeit $\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2$ und nicht $\ln(\frac{1}{M\Lambda_{3n}})^2$ zu erhalten. Im Falle unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit den Eigenschaften $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ und $E(X_1^+)^3 \leq 1$ nimmt der Faktor $\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2$ aus der Ungleichung (1.6) folgende Form an:

$$\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 = \ln\frac{n}{\max(1, \gamma_{3,1}^2)} = \ln n .$$

Damit wird hier explizit eine logarithmische Konvergenzgeschwindigkeit erhalten, wie sie in der Ungleichung (1.7) auftritt.

2. Ungleichmäßige Abschätzungen der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

Wir gehen nun wie in Kapitel IV vor, d.h. wir schätzen unter den hier betrachteten Bedingungen entsprechend der Ungleichung (4.1) zuerst die

Differenzen $1-F_n(xB_n)$ und $1-\Phi(x)$ ab. Es gelten folgende zu den Sätzen 4.2.2 und 4.3.1 und zur Folgerung 4.2.3 analoge Aussagen:

Satz 5.2.1: Es sei $EX_i=0$, $EX_i^2<\infty$ und $E(X_i^+)^3<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$, und weiterhin $K_3=K_3(\varepsilon)=\frac{27e^{\varepsilon}}{e^3\varepsilon^3}$, $0<\varepsilon\leq 3$.

1) Unter der Voraussetzung $x>K$ und $\frac{1}{\Lambda_{3n}}\leq P\leq P_o$ gilt

$$1-F_n(xB_n)\leq 8(1+K_3e)\frac{\Lambda_{3n}}{x^3}.$$

2) Unter der Voraussetzung $x>\max(K,\sqrt{A\max(0,\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}})})$ und $\frac{1}{\Lambda_{3n}}>P$ mit $A\geq A_o$ gilt ebenfalls

$$1-F_n(xB_n)\leq 8(1+K_3e)\frac{\Lambda_{3n}}{x^3}.$$

Dabei sind A, K und P absolute positive Konstanten und die Größen A_o und P_o sind folgendermaßen definiert:

$$A_o=A_o(\varepsilon)=4\left\{\frac{1}{\min(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon})}-\frac{3}{2eK_3^{2/3}(\varepsilon)}\right\}^{-1}$$

und

$$P_o=P_o(\varepsilon)=\left\{\frac{2e}{3\min(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon})}\right\}^{3/2}K_3(\varepsilon).$$

Für A_o und P_o gelten folgende Bemerkungen:

1) Die Funktion $A_o(\varepsilon)$ besitzt im Intervall $0<\varepsilon\leq 3$ eine Polstelle und ist links der Polstelle positiv und rechts davon negativ.

2) Die Funktion $P_o(\varepsilon)$ ist für $0<\varepsilon\leq 3$ streng monoton fallend. Es gilt $\infty>P_o(\varepsilon)\geq(\frac{2}{e})^{1,5}$.

Folgerung 5.2.1: Es sei $EX_i=0$, $EX_i^2<\infty$ und $E(X_i^+)^3<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

1) Mit ε_o bezeichnen wir die kleinste Lösung der Gleichung $K_3(\varepsilon_o)=\frac{Ze-16}{16e}$, $0<\varepsilon_o<3$, $Z>Z_o$. Es sei Z so groß gewählt, daß $P_o(\varepsilon_o)>1$ gilt. Es sei K eine beliebige positive Konstante.

Dann gilt für alle $x > K$ und alle n, für die $1 < \frac{1}{\Lambda_{3n}} \leq P_o(\varepsilon_o)$ ist, die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n) \leq \frac{Z'\Lambda_{3n}}{x^3} \leq \frac{Z}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \text{ .}$$

Dabei sind Z_o und Z' absolute Konstanten, für die gilt:

$$Z_o = \frac{16}{e}(1+e) \quad \text{und} \quad Z' = \frac{e}{2} Z \text{ .}$$

2) Mit ε_o' bezeichnen wir die kleinste Lösung der Gleichung

$$K_3(\varepsilon_o') = \frac{Z}{16e\max(\frac{1}{e}\operatorname{sign}(e-P_o(\varepsilon_o)), \frac{\ln P_o(\varepsilon_o)}{P_o(\varepsilon_o)})} - \frac{1}{e}, \quad 0 < \varepsilon_o' < 3, \quad Z > Z_o' .$$

Dabei ist ε_o die in der ersten Aussage dieser Folgerung auftretende Größe. Weiterhin sei Z hinreichend groß gewählt, so daß $0 < A_o(\varepsilon_o') < \infty$ gilt.

Dann gilt für alle $x > \max(K, \sqrt{A_o(\varepsilon_o')\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}})$ und alle n, für die $\frac{1}{\Lambda_{3n}} > P_o(\varepsilon_o)$ ist, die Abschätzung

$$1-F_n(xB_n) \leq \frac{Z''\Lambda_{3n}}{x^3} \leq \frac{Z}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \text{ .}$$

Dabei sind Z_o' und Z'' absolute Konstanten, für die gilt:

$$Z_o' = 16(1+e)\max(\frac{1}{e}\operatorname{sign}(e-P_o(\varepsilon_o)), \frac{\ln P_o(\varepsilon_o)}{P_o(\varepsilon_o)})$$

und

$$Z'' = \frac{Z}{2\max(\frac{1}{e}\operatorname{sign}(e-P_o(\varepsilon_o)), \frac{\ln P_o(\varepsilon_o)}{P_o(\varepsilon_o)})} \text{ .}$$

Die Bedeutung der Folgerung 5.2.1 besteht darin, daß gewisse Gebiete der $\frac{1}{\Lambda_{3n}}$;x-Ebene angegeben werden, in denen die Abschätzung der Differenz $1-F_n(xB_n)$ bezüglich $\frac{1}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}$ mit einer vorgegebenen absoluten Konstanten Z gilt. Dabei werden in Abhängigkeit von Z die Konstanten A_o und P_o festgelegt.

<u>Satz 5.2.2:</u> Es seien A, K und $P > 1$ positive Konstanten.

Dann gilt für alle $x > K$ und alle n, für die $1 < \frac{1}{\Lambda_{3n}} \leq P$ ist, die Abschätzung

$$1-\Phi(x) \leq \frac{U_1''}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}$$

und für alle $x > \max(K, \sqrt{A \ln \frac{1}{\Lambda_{3n}}})$ und alle n, für die $\frac{1}{\Lambda_{3n}} > P$ ist, die Abschätzung

$$1-\Phi(x) \leq \frac{U_2''}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} .$$

Dabei sind U_1'' und U_2'' ebenfalls positive Konstanten und es gilt

$$U_1''=U_1''(K,P)= \frac{2\ln P}{\sqrt{2\pi}} \max(\frac{2}{e} \operatorname{sign}(2-K^2), K^2 \exp(\frac{-K^2}{2}))$$

und

$$U_2''=U_2''(A,K,P)= \frac{2}{\sqrt{2\pi}A} \max((\frac{4}{e})^2 \operatorname{sign}(2-K_o), K_o^4 \exp(\frac{-K_o^2}{2}))$$

mit $K_o=\max(K, \sqrt{A \ln P})$.

W.FELLER bewies 1968 folgende gleichmäßige Abschätzung [37]:

Satz 5.2.3: [37] Sei $EX_i=0$ und $EX_i^2 < \infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Dann gilt die gleichmäßige Abschätzung

Diese Ungl. wurde von Feller im Fall n=1 nicht bewiesen! 10.10.79 Pa.

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq$$

$$\leq 6 \left\{ \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \int_{-t_i}^{\tau_i} |u|^3 dV_i(u) + \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{-t_i} + \int_{\tau_i}^{\infty} \right) u^2 dV_i(u) \right\}$$

$L_o = 4,769$

für $0 < t_i, \tau_i \leq \infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die folgenden Aussagen beweisen.

Satz 5.2.4: Es sei $EX_i=0$, $EX_i^2 < \infty$ und $E(X_i^+)^3 < \infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Wenn zusätzlich für $\Lambda_{3n} < 1$ die Beziehung (1.5) erfüllt ist, so erhalten wir für alle n, für die $\Lambda_{3n} < 1$ ist, die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{D_o}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} .$$

Dabei ist D_o eine absolute Konstante und es gilt

$D_o=8,70576$. $D_o = 7,3962612917$ für $L_o = 4,769$ 7.1.80 Pa.

Folgerung 5.2.2: Es möge K eine beliebige positive Konstante sein. Wenn alle Voraussetzungen des Satzes 5.2.4 erfüllt sind, dann gilt für alle $0 \leq x \leq K$ und alle n, für die $\Lambda_{3n} < 1$ ist, die ungleichmäßige Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{L_5}{(1+|x|^3)\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \quad \text{mit } L_5=D_o(1+K^3) \text{ .}$$

Im folgenden Satz wird eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit angegeben, wenn keine einseitigen Momente von höherer als zweiter Ordnung vorausgesetzt werden.

Satz 5.2.5: Es sei $EX_i=0$ und $EX_i^2<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$, und es gelte zusätzlich folgende Bedingung

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|u|>H_n} u^2 dV_i(u) \leq \frac{1}{\ln n} \quad \text{mit } H_n=\frac{B_n}{(\ln n)^{3/2}} \quad (n>1).$$

Dann gilt für alle $n>1$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{D_1}{\ln n} \quad \text{mit } D_1=8,10724 \text{ .}$$

$D_1 = 6,6222145409$
für $c_0 = 4,769$

Wenden wir uns jetzt der Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ im Gebiet 3), wie es im Abschnitt 5.1 eingeführt wurde, zu.

Es seien α, β, γ und δ sowie A und N_o positive Zahlen. Wir definieren folgende Größen:

$$k_3'=k_3'(\alpha,\gamma)=\max\left\{\frac{\alpha^3}{\gamma^2},\min\left[\alpha^2\min\left(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}\right),\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^3\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]\right\}$$

und

$$k_4'=k_4'(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)=$$

$$=\left(1-\frac{\beta^3}{\gamma^2}\right)^{-2}\frac{1}{2N_o}\left\{\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)+\right.$$

$$+\frac{2}{A}\alpha^3\left\{\beta\left(\frac{3}{2}+\frac{\beta^2}{4}\right)+\max\left[\frac{1}{\gamma},\beta^2\min\left(e^{\gamma},\frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta^2(1+\beta^2)\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{2}{A}\alpha^3\beta^3\max\left[\frac{(1+\beta^2)(1+\gamma)}{\gamma^4}+\frac{2+\beta^2}{4\gamma^2},\frac{e^{\gamma}}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\right)+\frac{1}{2\gamma}\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\beta^2\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{36},\frac{4e^{2\gamma-4}}{\gamma^4}\right)+\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]+$$

$$+\beta^3\max\left[\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\left(2+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)+\left(\frac{\beta^2}{3\gamma^2}+\frac{1}{6\gamma}\max(0,\beta^2-1)\right)\left(3+\sqrt{\frac{A}{2}}\right),\right.$$

$$\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)+ \frac{e^{\gamma}}{6}\left(3+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)\Bigg] +$$

$$+\delta\frac{A}{2}\left[\frac{\beta^2}{36}\left(3+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^2\right]\Bigg\} .$$

Satz 5.2.6: Es seien A, K und P positive Konstanten und γ ein positiver Parameter. Mit

$$\alpha=\alpha(A,K,P)=\left\{\max\left(\frac{(AN_o)^{3/2}}{\exp(N_o)}, \left(\frac{3A}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\operatorname{sign}\left(\frac{3}{2}-N_o\right)\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

und

$$N_o=\max\left(\frac{K^2}{A}, \ln P\right)$$

mögen folgende Relationen erfüllt sein

$k_3'(\alpha,\gamma) < 1$ und $k_4'(\alpha,\alpha,\gamma,1,A,N_o) < 1$.

Es gelte $EX_i=0$, $EX_i^2<\infty$ und $E(X_i^+)^3<\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

Wenn zusätzlich für $\Lambda_{3n}<1$ die Bedingung (1.5) erfüllt ist, dann gilt für alle $K<x\leq\sqrt{A\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}}$ und alle n, für die $\frac{1}{\Lambda_{3n}}>\max\left(P, \exp\left(\frac{K^2}{A}\right)\right)$ ist, die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \frac{L_6}{x^3\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} .$$

Dabei ist L_6 eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, P und γ abhängt.

Satz 5.2.7: Es seien A, K und P positive Konstanten und γ ein positiver Parameter. Mit den in Satz 5.2.6 definierten Größen α und N_o sowie mit

$$\beta=\beta(A,K,P)=\sqrt{A}\max\left(\frac{\sqrt{N_o}}{\exp(N_o)}, \sqrt{\frac{1}{2e}}\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}-N_o\right)\right)$$

mögen folgende Relationen erfüllt sein

$k_3'(\beta,\gamma) < 1$ und $k_4'(\alpha,\beta,\gamma,\exp(-2N_o),A,N_o) < 1$.

Es seien die unabhängigen Zufallsgrößen identisch verteilt mit $EX_1=0$, $EX_1^2=1$ und $E(X_1^+)^3<\infty$. Wenn zusätzlich für $\Lambda_{3n}<1$ die Bedingung (1.5) erfüllt ist, dann gilt für alle x und n mit $K<x\leq\sqrt{A\ln\frac{\sqrt{n}}{\max(1,\gamma_{3,1})}}$ und $\frac{\sqrt{n}}{\max(1,\gamma_{3,1})}>\max\left(P, \exp\left(\frac{K^2}{A}\right)\right)$ die Abschätzung

$$|F_n(x\sqrt{n})-\phi(x)| \leq \frac{L_6'}{x^3\ln(\frac{n}{\max(1,\gamma_{3,1}^2)})} .$$

Dabei ist L_6' eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, P und γ abhängt. ($\gamma_{3,1}=E(X_i^+)^3$)

Eine weitere qualitative Aussage über die Abschätzung der Differenz $|F_n(xB_n)-\phi(x)|$ unter den in den Sätzen 5.2.6 und 5.2.7 gestellten Voraussetzungen und definierten Gebieten der $\frac{1}{\Lambda_{3n}}$;x-Ebene wird in dem folgenden Ergebnis gemacht.

Satz 5.2.8: Unter den Bedingungen des Satzes 5.2.6 im Falle verschieden verteilter Zufallsgrößen bzw. des Satzes 5.2.7 im Falle identisch verteilter Zufallsgrößen gilt in den dort festgelegten Gebieten der $\frac{1}{\Lambda_{3n}}$;x-Ebene die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\phi(x)| \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(\frac{\gamma B_n}{x})+\frac{L_7 x \exp(\frac{-x^2}{2})}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} .$$

Dabei ist L_7 eine positive Konstante, die nur von den Parametern A, K, P und γ abhängt.

3. Zur numerischen Bestimmung der absoluten Konstanten in den Ungleichungen zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

In diesem Abschnitt wird wie im Abschnitt 4.5 auf der Grundlage der im Kapitel X geführten Beweise die analytische Struktur der Konstanten L_6 und L_7 herausgearbeitet. Darauf aufbauend ist schließlich die numerische Bestimmung der in den Ungleichungen (1.6) und (1.7) des Kapitels I auftretenden absoluten Konstanten C_5 und C_6 realisiert worden.

1) Entsprechend dem Ergebnis in Satz 5.2.6 gilt

$$L_6=L_6(A,K,P,\gamma).$$

L_6 ist als Summe zweier Größen darstellbar:

$$L_6=k_5'(\gamma,A,N_o)+k_7'(K,k_8',k_9',k_{10}',k_{11}',k_{12}',k_{13}')$$

mit

$$k_5'(\gamma,A,N_o)=2(\frac{A}{\gamma})^3\max((\frac{4}{e})^4\operatorname{sign}(4-N_o),\frac{N_o^4}{\exp(N_o)})$$

und

$$k_7'(K,k_8',k_9',k_{10}',k_{11}',k_{12}',k_{13}')=$$

$$=\frac{2k_8'k_{10}'L_0}{(k_{11}')^{3/2}}\max\left(\frac{2}{e}\operatorname{sign}(2-K^2),K^2\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+2k_2k_8'k_{12}'\max\left(\left(\frac{3}{e}\right)^{1,5}\operatorname{sign}(3-K^2),K^3\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right)+$$

$$+(2k_1k_8'k_{13}'+k_1k_9')\max\left(\left(\frac{4}{e}\right)^2\operatorname{sign}(4-K^2),K^4\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right).$$

Dabei sind k_1, k_2 und L_0 die absoluten Konstanten aus den Lemmata 9.2 und 4.3.1 bzw. dem Satz 4.4.1. Die Konstanten k_8' bis k_{13}' hängen von α, γ, A und N_0 in folgender Weise ab

$$k_8'=k_8'(\alpha,\gamma)=k_8(\alpha,\gamma),$$

$$k_9'=k_9'(A,k_{14}')=k_{14}'\exp\left(\frac{A}{2}k_{14}'\right)$$

mit

$$k_{14}'=k_{14}'(\alpha,\alpha,\gamma,A)$$

und

$$k_{14}'(\alpha,\beta,\gamma,A)=$$

$$=\max\left\{\frac{2}{A}\alpha^3\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\frac{2}{A}\alpha^3\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\right)+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{A}{2}}+\frac{1}{2}+\right.$$

$$+\frac{0,5}{1-k_3'(\beta,\gamma)}\,\frac{2}{A}\alpha^3\beta\max\left[\frac{\beta^2}{\gamma^4},\min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{1}{2}+\beta\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right)^2\right]\right]\right\}.$$

Die Konstante $k_3'(\alpha,\gamma)$ wurde bereits im vorangehenden Abschnitt eingeführt.

$$k_{10}'=k_{10}'(\alpha,\alpha,\gamma,A)$$

mit

$$k_{10}'(\alpha,\beta,\gamma,A)=$$

$$=4k_{15}'(\beta,\gamma)\left\{\frac{1}{e}+\sqrt{\frac{A}{2}}+\frac{2\alpha^3e^\gamma}{A}+(k_{15}'(\beta,\gamma))^2\max\left[\frac{2\alpha^3\beta^6}{A\gamma^6},\frac{2}{A}\alpha^3\beta^3\left(1+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\beta\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}\right)\right)^3\right]\right\}$$

und

$$k_{15}'(\beta,\gamma)=\left(1-\frac{\beta^3}{\gamma^2}\right)^{-1}.$$

$$k_{11}'=k_{11}'(\alpha,\alpha,\gamma,1,A,N_0)$$

mit

$$k'_{11}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)=1-k'_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o),$$

wobei $k'_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)$ die im vorangehenden Abschnitt eingeführte Konstante ist.

$$k'_{12}=k'_{12}(\alpha,\alpha,\gamma,1,A,N_o)$$

mit

$$k'_{12}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)=\frac{\max(k'_{17}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A),k'_{18}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A))}{1+\sqrt{k'_{11}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)}},$$

$$k'_{17}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A)=2N_o k'_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A,N_o)$$

und

$$\begin{aligned}
&k'_{18}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,A)=\\
&=(k'_{15}(\beta,\gamma))^2\Bigg\{\frac{2}{A}\alpha^3\max\Big[e^{\gamma}(1+\frac{\beta^2}{2}),\frac{\beta^2}{\gamma^2}(3+\beta^2)+\frac{1}{\gamma}\max(0,-1+2\beta^2+\frac{\beta^4}{2})\Big]+\\
&\qquad+\beta^2(2+\sqrt{\frac{A}{2}})+\frac{\beta^2(1+\beta^2)}{6}(3+\sqrt{\frac{A}{2}})+\\
&\qquad+\beta^3\max\Big[(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma})(1+\sqrt{\frac{A}{2}})+\frac{1}{6\gamma}(3+\sqrt{\frac{A}{2}}),\\
&\qquad\qquad\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma})(2+\sqrt{\frac{A}{2}})+\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2})\frac{\beta^2}{3}(3+\sqrt{\frac{A}{2}})\Big]+\\
&\qquad+\frac{2}{A}\alpha^3\beta^3\max\Big[e^{\gamma}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}),(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma})\min(e^{\gamma},\frac{2e^{\gamma}-1}{\gamma})+\\
&\qquad\qquad+(\frac{\beta^2}{3\gamma^2}+\frac{1}{6\gamma}\max(0,\beta^2-1))\min(e^{\gamma},\frac{12e^{\gamma}-2}{\gamma^2})\Big]+\\
&\qquad+\delta\frac{A}{2}\,\frac{1}{6}(1+\sqrt{\frac{A}{2}})(3+\sqrt{\frac{A}{2}})\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$$k'_{13}=k'_{13}(\alpha,\alpha,\gamma,A)=\max(k'_{19}(\alpha,\alpha,\gamma,A),k'_{20}(\alpha,\alpha,\gamma,A))$$

mit

$$\begin{aligned}
k'_{19}(\alpha,\beta,\gamma,A)=k'_{15}(\beta,\gamma)\Big\{&1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}+\\
&+\frac{2}{A}\alpha^3(\frac{\beta}{2}+\max(\beta^2\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}),\frac{1+\gamma}{\gamma^2}))\Big\}.
\end{aligned}$$

und

$$k'_{20}(\alpha,\beta,\gamma,A)=k'_{15}(\beta,\gamma)\frac{2}{A}\alpha^3\max(\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}),\frac{\beta^2}{\gamma^2}).$$

Die Zahlen α, β und N_o sind die in den Sätzen 5.2.6 und 5.2.7 eingeführten Konstanten, die nur von A, K und P abhängen. Über die soeben definierten Konstanten k'_3 bis k'_{20} ist zu erkennen, daß L_6 tatsächlich eine

Konstante ist, die nur von den Parametern A, K, P und γ abhängt.
Die Voraussetzungen des Satzes 5.2.6 haben folgende Bedeutung:
Aus $k_3' < 1$ folgt, daß in k_{14}' keine Division durch Null auftritt und k_{15}' eine positive Konstante ist. Die Bedingung $k_4' < 1$ sichert schließlich, daß k_{11}' eine positive Konstante ist.

2) Wir kommen nun zur Beschreibung der Konstanten L_6':
Entsprechend dem Ergebnis in Satz 5.2.7 gilt

$$L_6' = L_6'(A, K, P, \gamma).$$

L_6' setzt sich wie folgt zusammen:

$$L_6' = k_5'(\gamma, A, N_o) + k_7'(K, k_8', k_9', k_{10}', k_{11}', k_{12}', k_{13}')$$

mit

$$k_8' = k_8'(\alpha, \gamma),\ k_9' = k_9'(A, k_{14}'),\ k_{14}' = k_{14}'(\alpha, \beta, \gamma, A),$$
$$k_{10}' = k_{10}'(\alpha, \beta, \gamma, A),\ k_{11}' = k_{11}'(\alpha, \beta, \gamma, \exp(-2N_o), A, N_o),$$
$$k_{12}' = k_{12}'(\alpha, \beta, \gamma, \exp(-2N_o), A, N_o)$$

und

$$k_{13}' = k_{13}'(\alpha, \beta, \gamma, A).$$

Im Unterschied zu L_6 wurden also hier an einigen Stellen α durch β und das Argument 1 durch $\exp(-2N_o)$ ersetzt. In k_7' wird jetzt anstatt L_o die absolute Konstante L_o' verwendet.
Anstelle k_{10}' kann im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen die günstigere Konstante k_{10}'' verwendet werden, die wie folgt definiert ist:

$$k_{10}'' = k_{10}''(\beta, \gamma, A) =$$
$$= \Big\{ (k_{15}'(\beta, \gamma))^{1/3} \big(\tfrac{2}{A}\beta^3 e^{\gamma} + \sqrt{\tfrac{A}{2}} + \tfrac{1}{e}\big)^{1/3} +$$
$$+ k_{15}'(\beta, \gamma) \big(\tfrac{2}{A}\big)^{1/3} \beta^2 \max\big(\tfrac{\beta}{\gamma^2}, 1 + \beta \min\big(\tfrac{e^{\gamma}}{2}, \tfrac{e^{\gamma} - 1}{\gamma}\big)\big) \Big\}^3.$$

3) Zur Beschreibung der Konstanten L_7:
Entsprechend dem Ergebnis in Satz 5.2.8 gilt

$$L_7 = L_7(A, K, P, \gamma)$$

mit

$$L_7 = k_{22}'(K, k_8', k_9', k_{10}', k_{11}', k_{12}', k_{13}')$$

und

$$k_{22}'(K, k_8', k_9', k_{10}', k_{11}', k_{12}', k_{13}') =$$
$$= \frac{2k_8' k_{10}' L_o}{K^2 (k_{11}')^{3/2}} + \frac{2k_2 k_8' k_{12}'}{K} + 2k_1 k_8' k_{13}' + k_1 k_9'.$$

Die Konstanten k_8' bis k_{13}' wurden bereits in den Unterpunkten 1) und 2) näher erläutert.

4) Berechnung der absoluten Konstanten C_5:

Die zu beweisende Ungleichung des Satzes 1.2.5 folgt offensichtlich aus der ungleichmäßigen Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\phi(x)| \leq \frac{L}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}, (x \neq 0)$$

und der gleichmäßigen Abschätzung des Satzes 5.2.4. Es gilt dann

$$C_5 = L+D_o .$$

Aus den Abschätzungen der vorangehenden Abschnitte erhalten wir für L folgende Bestimmungsgleichung:

$$L=\min_K \max(D_oK^3, U_1'', U_2'', \min_\gamma L_6)$$

mit

$$U_1''=U_1''(K,P_o(\varepsilon_o/Z=D_oK^3)),$$

$$U_2''=U_2''(A_o(\varepsilon_o'/Z=D_oK^3),K,P_o(\varepsilon_o/Z=D_oK^3))$$

und

$$L_6=L_6(A_o(\varepsilon_o'/Z=D_oK^3),K,P_o(\varepsilon_o/Z=D_oK^3),\gamma).$$

Die Konstanten A_o und P_o werden unter der Bedingung $Z=D_oK^3$ betrachtet und sind entsprechend der Folgerung 5.2.1 festgelegt. Weiterhin wird die Minimierung von L bezüglich der Parameter γ und K lokal betrachtet und zwar für folgende Intervalle:

$$0<\gamma\leq 3$$

und

$$K > \sqrt[3]{16(1+e)/e/D_o} .$$

Außer den hier angegebenen Intervallen für γ und K unterliegen diese Größen noch den Einschränkungen, die ihnen durch die Voraussetzungen der Folgerung 5.2.1 und des Satzes 5.2.6 auferlegt sind.

Eine Minimierung von L bezüglich des Parameters A, wie es im vorangehenden Kapitel der Fall war, tritt hier nicht auf. Diese unabhängige Konstante A wurde sofort gleich $A_o(\varepsilon_o')$ gesetzt, was entsprechend der Folgerung 5.2.1 der kleinste zulässige Wert für A ist. Im Kapitel IV mußte an dieser Stelle zusätzlich die Variable M betrachtet werden, die wir hier zu Anfang des Kapitels V gleich Eins gesetzt hatten.

Die Einschränkung $K > \sqrt[3]{16(1+e)/e/D_o}$ bedeutet $Z > \max(Z_o, Z_o')$, so daß für hinreichend große $Z=D_oK^3$ die Folgerung 5.2.1 zur Berechnung der absoluten Konstanten C_5 herangezogen werden kann. Den Wert D_oK^3 erhalten wir durch Anwendung der Folgerung 5.2.2. Die Konstanten U_1'' und U_2'' aus dem Satz 5.2.2 müssen entsprechend der Ungleichung (4.1) des Abschnittes 4.1 bei der Berechnung von L ebenfalls mit betrachtet werden. Es zeigt sich aber bei der numerischen Berechnung von L, daß für die in Frage kommenden Werte von K die Ungleichungen

$$U_1'' < D_oK^3 \quad \text{und} \quad U_2'' < D_oK^3$$

gelten, d.h. in den betrachteten Gebieten der $\frac{1}{\lambda_{3n}}$;x-Ebene erfolgt die Annäherung der Verteilungsfunktion $F_n(xB_n)$ gegen 1 im allgemeinen langsamer als die Annäherung der Verteilungsfunktion $\emptyset(x)$ der standardisierten Normalverteilung gegen 1. Damit reduziert sich das Problem der Bestimmung von L darauf, daß K derart bestimmt werden muß, daß unter Beachtung der Einschränkungen an K die Beziehung

$$\min_{0<\gamma\leq 3} L_6(A_o(\varepsilon_o'/Z=D_oK^3),K,P_o(\varepsilon_o/Z=D_oK^3),\gamma) = D_oK^3$$

gilt.

Die Festlegung des Intervalles für γ erfolgte empirisch. Bei der numerischen Realisierung der Minimierung von L_6 bezüglich γ zeigte sich, daß L_6 bezüglich γ innerhalb dieses Intervalles ein lokales Minimum besitzt.

Die Minimierung von L bezüglich K erfolgt über ein numerisches Iterationsverfahren, bei dem von einem hinreichend großen Startwert für K ausgegangen wird. Bei schrittweiser Verkleinerung von K erweist sich dabei $\min_{\gamma} L_6$ als monoton wachsend, während der Ausdruck D_oK^3 offenbar streng monoton fallend ist. Das Minimum von L ist dort erreicht, wo mit einem gewissen K die Gleichung

$$\min_{\gamma} L_6 = D_oK^3 .$$

gilt. Das im Abschnitt 4.5 näher erörterte Minimierungsverfahren "LIMI" wurde hier ebenfalls bei der praktischen Berechnung von L benutzt.

Der im Abschnitt 1.2 angegebene Wert für C_5 ergab sich für

3,59861 1,91609

$$K=3{,}54378 \quad \text{und} \quad \gamma=1{,}91173 .$$

Für diese Werte gilt

344,6810

$$L=L_6=D_oK^3=387{,}4433 .$$

Zum Vergleich geben wir die Werte von U_1'' und U_2'' an:

0,06826 0,08060

$$U_1''=0{,}08334 \quad \text{und} \quad U_2''=0{,}09415 \ .$$

Für A_o und P_o wurden folgende Werte berechnet:

$$A_o=2{,}50601 \quad \text{und} \quad P_o=84{,}45031 \ ,$$

2,55914 72,63169

d.h.

157,63850

$$\max(P_o, \exp(\frac{K^2}{A_o}))=150{,}10233 \ .$$

5) Berechnung der absoluten Konstanten C_6:

Ausgehend vom Unterpunkt 2) müssen wir L_6 durch L_6' ersetzen und dann entsprechend das unter 4) diskutierte Problem lösen.

Der im Abschnitt 1.2 angegebene Wert von C_6 ergab sich für

2,41826 2,54920

$$K=2{,}30812 \quad \text{und} \quad \gamma=2{,}52633 \ .$$

Für diese Werte gilt

104,5970

$$L=L_6'=D_oK^3=107{,}0486 \ .$$

Weiterhin haben wir in diesem Fall:

$$U_1''=0{,}79679 \ , \ U_2''=0{,}12456 \ ,$$

0,66899 0,12143

$$A_o=3{,}85581 \ , \ P_o=14{,}72855$$

3,90237 14,42491

und

14,42491 4,4753

$$\max(P_o, \exp(\frac{K^2}{A_o}))=14{,}72855 \quad (\exp(\frac{K^2}{A_o})=3{,}9814) \ .$$

16.1.80 Pa.

Kapitel VI

Integrale Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen

1. Allgemeine Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen mit Angabe der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit

a) Grenzwertsätze unter Voraussetzung der Existenz von Momenten auf der gesamten reellen Achse

Es sei (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) das in Kapitel II eingeführte Serienschema, d.h. eine Folge von Serien von in jeder Serie unabhängigen Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen $F_{nk}(x)$, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$. Dabei ist $(k_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \infty \ .$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$N=k_n,\quad \sigma^2_{nk}=D^2X_{nk},\quad \beta^q_{nk}=E|X_{nk}|^q,\quad B^2_N=\sum_{k=1}^{N}\sigma^2_{nk}$$

und

$$\beta^q_N=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^q_{nk}\ .$$

Es sei $F_n(x)$ die N-fache Faltung der Verteilungsfunktionen $F_{n1}, F_{n2}, \ldots, F_{nN}$ der n-ten Serie an der Stelle x, d.h.

$$F_n(x)=(\mathop{\ast}_{k=1}^{N}F_{nk})(x).$$

Wir kommen nun zur Formulierung eines Grenzwertsatzes für das Serienschema:

<u>Satz 6.1.1:</u> In jeder Serie, also für $n=1,2,\ldots$, gelte

$$EX_{nk}=0,\ EX^2_{nk}<\infty,\ k=1,2,\ldots,N, \tag{6.1}$$

und weiterhin

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{N}B^2_N>0, \tag{6.2}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\beta^q_N<\infty,\ \text{für ein } q=2+c^2_o,\ c_o>0. \tag{6.3}$$

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet $1\leq x\leq c\sqrt{\ln N}$, $c>0$, folgende asymptotische Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)}&=1+O\Big(\frac{x^{4-\min(1,c^2_o)}}{N^t}\Big),\\ \frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)}&=1+O\Big(\frac{x^{4-\min(1,c^2_o)}}{N^t}\Big)\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

für $c<c_o$ und mit $t=\min\big(\frac{c^2_o-c^2}{2},\frac{q-1}{2q}\min(1,c^2_o)\big)$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)}&=1+o\Big(\frac{1}{x^{q-1}\ln N}\Big),\\ \frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)}&=1+o\Big(\frac{1}{x^{q-1}\ln N}\Big)\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

für $c\leq c_o$.

Aus diesem Satz erhalten wir die folgende Aussage:

<u>Folgerung 6.1.1:</u> Für das Serienschema (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) seien die Voraussetzungen (6.1) bis (6.3) mit $q=2+c^2_o$, $c_o>0$,

erfüllt.

Dann gelten für $n \to \infty$ im Gebiet $0 \leq x \leq c_0\sqrt{\ln N}$ gleichmäßig bezüglich x folgende asymptotische Beziehungen:

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1+o(1) \tag{6.6}$$

und

$$\frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)} = 1+o(1). \tag{6.7}$$

Wenn wir anstatt des Serienschemas eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betrachten, ergibt sich der in der Einleitung angeführte Satz 1.2.7 sofort als Folgerung aus Satz 6.1.1.

Für Folgen unabhängiger Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß sie absolute Momente der Ordnung q, $q>2$ bzw. $q \geq 3$, besitzen, wurden bereits in der Literatur mehrere Betrachtungen zur Gültigkeit von asymptotischen Beziehungen der Form (6.6) und (6.7) angestellt, und zwar von J.V.LINNIK [50], W.WOLF [113,114], S.V.NAGAEV [77] und N.N.AMOSOVA [1].

Unter stärkeren Bedingungen als nur die Existenz der q-ten Momente der Zufallsgrößen, $q>2$, q beliebig, wurde die Gültigkeit von Beziehungen der Form (6.6) und (6.7), neben den eben genannten Arbeiten, von W.FELLER [36], V.V.PETROV [86,87,89,90,91], W.RICHTER [96], J.V.LINNIK [63-65], V.A.STATULEVIČIUS [106], L.V.OSIPOV [80], N.N.AMOSOVA [2], W.WOLF [112,115] und anderen untersucht.

W.WOLF [113] bewies 1974, indem er ein Ergebnis für identisch verteilte Zufallsgrößen von J.V.LINNIK [50] auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen verallgemeinerte, folgendes Resultat:

<u>Satz</u> [113]: Für eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien die Bedingungen (6.1) und (6.2) erfüllt. Die Momentenbedingung (6.3) wird in folgender Weise vorausgesetzt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\exp(h(|X_k|)) < \infty ,$$

wobei h(x) eine Funktion aus der von J.V.LINNIK in [50] betrachteten Funktionenklasse, der sogenannten LINNIKschen Klasse III, ist (h(x) ist stetig und nichtabnehmend und erfüllt die Bedingung $3\ln x \leq h(x) \leq K\ln x$, $K \geq 3$, K ist eine absolute Konstante).

Dann gelten die Beziehungen (6.6) und (6.7) für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich x im Gebiet $0 \leq x \leq \frac{1}{\varrho(n)}\sqrt{\ln n}$. Dabei ist $\varrho(n)$ eine beliebige positive Funktion mit $\lim_{n\to\infty} \varrho(n) = \infty$.

Die in diesem Satz und auch in der Folgerung 6.1.1 auftretenden x-Zonen werden in der Literatur [50] der Terminologie J.V.LINNIKs folgend allgemein als "sehr enge" Zonen des integralen normalen Anziehungsbereiches (INA-Zonen) bezeichnet. In der Folgerung 6.1.1 ist es bereits gelungen, die in der INA-Zone bei W.WOLF auftretende und von der Momentenbedingung (6.3) unabhängige Funktion $\varphi(n)$ durch eine Konstante zu ersetzen, die in unmittelbarem Zusammenhang mit der Größenordnung existierender Momente steht. Gleichzeitig konnte in dieser Folgerung 6.1.1 die oben angeführte LINNIKsche Klasse III erweitert werden, indem die untere Schranke $3\ln x$ durch $q\ln x$, $q > 2$, ersetzt wurde.

Der Frage der Abhängigkeit der INA-Zonen von der Existenz des q-ten Moments widmeten sich auch S.V.NAGAEV [77], N.N.AMOSOVA [1] und W.WOLF [114]. Ein Ergebnis von S.V.NAGAEV [77] auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen verallgemeinernd, konnte W.WOLF 1975 für $q \geq 3$ die Gültigkeit der asymptotischen Beziehungen (6.6) und (6.7) in der INA-Zone

$$0 \leq x \leq \sqrt{(\tfrac{q}{2}-1)\ln n}$$

zeigen. Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen bewies N.N.AMOSOVA [1] bereits diese asymptotischen Beziehungen innerhalb der INA-Zone

$$0 \leq x \leq c\sqrt{\ln n} \quad \text{für } q > 2+c^2,\ c > 0.$$

In dem folgenden Satz wird die Annäherung der Summenverteilungsfunktion einer Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung in Abhängigkeit von n und x zu charakterisieren versucht, indem das Konvergenzverhalten einer Reihe studiert wurde.

<u>Satz 6.1.2:</u> Es seien die Bedingungen

$$EX_1=0,\ EX_1^2=1 \text{ und } \beta_1^q < \infty,\ q=2+c_o^2,\ c_o > 0,$$

erfüllt.

Dann gilt für alle $0 \leq x_n \leq c_o\sqrt{\ln n}$ die folgende Konvergenzaussage:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x_n^{2+c_o^2} \exp\left(\frac{x_n^2}{2}\right) \left|1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\Phi(-x_n)\right| < \infty .$$

Der Satz 6.1.2 ist eine Erweiterung eines Satzes von R.MICHEL [71] auf eine INA-Zone. R.MICHEL bewies die Aussage des Satzes 6.1.2 für den rechten Randpunkt der INA-Zone, d.h. für $x_n=c_o\sqrt{\ln n}$.

Die Bedeutung des Satzes 6.1.2 besteht in folgenden Überlegungen:

Aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

folgt mit der Konvergenz der Reihe des Satzes 6.1.2 die asymptotische

Beziehung

$$1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\emptyset(-x_n) = o\left(\frac{\exp(-x_n^2/2)}{x_n^{2+c_o^2}\ln n}\right),\ n\to\infty .$$

Über die asymptotische Gleichheit

$$\emptyset(-x_n) = O\left(\frac{1}{x_n}\exp(-x_n^2/2)\right),\ x_n\to\infty ,$$

erhalten wir somit für $x_n\to\infty$, $n\to\infty$, die asymptotische Beziehung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-F_n(x_n\sqrt{n})}{1-\emptyset(x_n)}+\frac{F_n(-x_n\sqrt{n})}{\emptyset(-x_n)}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{x_n^{1+c_o^2}\ln n}\right),\ n\to\infty .$$

Da weiterhin die Aussage des Satzes 6.1.2 auch dann gilt, wenn die Differenz

$$1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\emptyset(-x_n)$$

sowohl durch

$$1-F_n(x_n\sqrt{n}) - (1-\emptyset(x_n))$$

als auch durch

$$F_n(-x_n\sqrt{n})-\emptyset(-x_n)$$

ersetzt wird, kann auf der Grundlage der eben durchgeführten Überlegungen die asymptotische Beziehung (6.5) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen abgeleitet werden.

b) Grenzwertsätze unter Voraussetzung der Existenz von Momenten auf einer reellen Halbachse

Wenn nur einseitige Momente von höherer als zweiter Ordnung existieren, können wir ähnliche Sätze wie unter Punkt a) formulieren. Dann lassen sich natürlich entsprechende asymptotische Beziehungen wie (6.4) und (6.5) mit Angabe der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit auf einer reellen Halbachse beweisen. Dabei spielt wieder eine Bedingung ähnlich der Beziehung (1.5) eine Rolle.

Satz 6.1.3: Für das Serienschema (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) seien die Bedingungen (6.1) und (6.2) erfüllt. Weiterhin gelte

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty} u^q dF_{nk}(u) < \infty ,\ q=2+c_o^2,\ c_o > 0, \tag{6.8}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln B_N^2)^{1+\frac{\delta}{2}}}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{-K_N(\varepsilon,\delta)} u^2 dF_{nk}(u)=0,\ \delta \geq 0,\ \varepsilon > 0, \tag{6.9}$$

mit $K_N(\varepsilon,\delta) = \frac{\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{3+\delta}{2}}}$.

Dann gelten für $n\to\infty$ folgende asymptotische Beziehungen im Gebiet $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$, $c > 0$,

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{x^{3+c_o^2}}{\ln N}\right), \text{ falls } c \leq c_o, \tag{6.10}$$

und, wenn in (6.9) $\varepsilon \to 0$ für $n\to\infty$ ist (mit $\varepsilon N^s \to \infty$ für ein $0<s<\frac{1}{2}$),

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\frac{\delta}{2}}}\right), \text{ falls } c < c_o. \tag{6.11}$$

<u>Folgerung 6.1.2:</u> Für das Serienschema (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$) mögen alle Voraussetzungen des Satzes 6.1.3 mit $\delta=0$ und $\varepsilon > 0$, ε fest, erfüllt sein. Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet $1 \leq x \leq c_o\sqrt{\ln N}$, $c_o > 0$, die asymptotische Beziehung

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{x^{3+c_o^2}}{\ln N}\right) \tag{6.12}$$

und im Falle $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon N^s\to\infty$ für ein $0<s<\frac{1}{2}$, im Gebiet $0\leq x<c_o\sqrt{\ln N}$, $c_o>0$, die asymptotische Beziehung

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1 + o(1). \tag{6.13}$$

Entsprechende Aussagen gelten für

$$\frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)},$$

wenn die einseitige Momentenbedingung (6.8) über der negativen Halbachse und die Bedingung (6.9) auf dem Integrationsintervall $(K_N(\varepsilon,\delta),\infty)$ erfüllt sind. Die Aussage (6.11) wurde bereits in ähnlicher Form in der Arbeit [85] veröffentlicht.

Zu den soeben formulierten Ergebnissen gibt es folgendes zu bemerken:

1) Wenn in der asymptotischen Beziehung (6.11) die Bedingung $\varepsilon \to 0$ vernachlässigt wird, d.h. ε ist eine feste positive Konstante, dann bleibt die Aussage (6.11) mit folgendem Restglied

$$O\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\frac{\delta}{2}}}\right)$$

erhalten.

2) Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$\frac{1}{N} B_N^2 \leq A$,

wobei A eine positive Konstante ist, und der Gültigkeit von (6.9) auf dem Integrationsgebiet

$(-\infty,-K_N(\varepsilon,\delta))\cup(K_N(\varepsilon,\delta),\infty)$

bewies N.N.AMOSOVA [1] die Beziehung (6.13) im Fall $\delta=4$ in dem Gebiet $0 \leqq x < c_0\sqrt{\ln N}$.

3) Erste Untersuchungen über die Gültigkeit der Beziehung (6.13) wurden für den Fall $\delta=0$ und $x=c\sqrt{\ln N}$, $c < c_0$, in der Arbeit [10] von H.RUBIN/J.SETHURAMAN angestellt.

In den folgenden Sätzen betrachten wir wieder Folgen von unabhängigen identisch verteilten Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Satz 6.1.4: Es seien die Bedingungen

$$EX_1=0 \quad \text{und} \quad EX_1^2=1 \tag{6.14}$$

erfüllt. Weiterhin gelte mit $V_1(u)=P(X_1<u)$

$$\int_0^{\infty} u^q dV_1(u) < \infty, \quad q=2+c_0^2, \quad c_0>0, \tag{6.15}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{1+\frac{\delta}{2}} \int_{-\infty}^{-K_n(\varepsilon,\delta)} u^2 dV_1(u) = 0, \quad \delta \geqq 0, \quad \varepsilon>0, \tag{6.16}$$

mit $K_n(\varepsilon,\delta)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{(\ln n)^{\frac{3+\delta}{2}}}$.

Dann gelten für $n\to\infty$ im Gebiet $1 \leqq x \leqq c_0\sqrt{\ln n}$ die asymptotischen Beziehungen

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} = 1 + O\left(\frac{x^{2-\min(3+c_0^2,\delta)}}{\ln n}\right)$$

und, wenn zusätzlich ε eine Nullfolge, also $\varepsilon\to 0$ für $n\to\infty$, ist,

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{x^{2-\min(3+c_0^2,\delta)}}{\ln n}\right). \tag{6.17}$$

Im Fall $\delta>3+c_0^2$ bleibt die Beziehung (6.17) ohne die Forderung $\varepsilon\to 0$ richtig.

Folgerung 6.1.3: Für eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen seien die Bedingungen (6.14) bis (6.16) erfüllt. Wenn weiterhin ε eine Nullfolge, also $\varepsilon\to 0$ für $n\to\infty$, ist, dann gilt für $n \to \infty$ im Gebiet $1 \leq x \leq c_o \sqrt{\ln n}$ die asymptotische Beziehung

$$\frac{1-F_n(x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{1}{x^{1+c_o^2}\ln n}\right), \text{ falls } \delta \geq 3+c_o^2 \text{ ist.} \qquad (6.18)$$

Die Restgliedabschätzungen (6.17) und (6.18) für den Fall unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen sind offensichtlich schärfer als die in den Beziehungen (6.10) und (6.12) für den allgemeinen Fall des Serienschemas erhaltenen.

Im folgenden Satz betrachten wir wieder die Annäherung der Summenverteilungsfunktion unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, indem das Konvergenzverhalten einer Reihe untersucht wird.

Satz 6.1.5: Für eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen seien die Bedingungen (6.14) bis (6.16) erfüllt.
Dann gilt für $1 \leq x_n \leq c_o\sqrt{\ln n}$ und beliebiges $\alpha < \delta$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x_n^{\min(3+c_o^2,\alpha)-1} \exp\left(\frac{x_n^2}{2}\right) |F_n(x_n\sqrt{n}) - \Phi(x_n)| < \infty \ .$$

Dieser Satz enthält die zu Satz 6.1.2 entsprechende Aussage. Im Falle $\delta > 3+c_o^2$ erhalten wir sogar das gleiche qualitative Verhalten der Differenz $|F_n(x_n\sqrt{n})-\Phi(x_n)|$ wie es auch im Satz 6.1.2 für die Differenz $|1-F_n(x_n\sqrt{n})+F_n(-x_n\sqrt{n})-2\Phi(-x_n)|$ der Fall ist.

2. Die Existenz von Momenten als notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit von Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen

a) Zur Existenz von Momenten auf der gesamten reellen Achse

Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, deren Summenverteilungsfunktion innerhalb einer gewissen INA-Zone einer Limesbeziehung genügt, wie wir sie innerhalb dieser Arbeit in den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen betrachtet haben. Es erhebt sich nun die Frage, ob aus dieser Tatsache heraus die Existenz gewisser absoluter Momente der individuellen Zufallsgrößen folgt.

W. WOLF [113] bewies 1974 zu dieser Problematik für unabhängige und verschieden verteilte Zufallsgrößen folgenden Satz:

Satz [113]: Es möge die Bedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} B_n^2 < \infty \qquad (6.19)$$

erfüllt sein.

Weiterhin mögen solche positive Konstanten ε und b existieren, daß innerhalb der x-Zone $0 \leq x \leq \varphi(n)\sqrt{\ln n}$ für hinreichend große n folgende Ungleichungen gelten:

$$1-F_n(\varepsilon x B_n) \leq b\exp(\frac{-x^2}{2}) \quad \text{und} \quad F_n(-\varepsilon x B_n) \leq b\exp(\frac{-x^2}{2}). \tag{6.20}$$

Dabei ist $\varphi(n)$ eine beliebige positive Funktion mit $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$.

Dann gilt für alle k die Beziehung

$$E\exp(h(|X_k|)) < \infty,$$

wobei h(x) eine beliebige Funktion aus der LINNIKschen Klasse III ist (siehe Abschnitt 6.1 S.64).

Die Bedingung (6.20) ist offensichtlich eine Abschwächung der Beziehungen (6.6) und (6.7), aber andererseits ist durch die Funktion $\varphi(n)$ die zu Grunde gelegte INA-Zone wesentlich breiter als in der Folgerung 6.1.1, so daß sogar die Existenz beliebiger Momente der Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$, erhalten wurde.

Unter Verzicht auf die Funktion $\varphi(n)$ gelang es W.WOLF [114] ein Jahr später einen Zusammenhang zwischen der oberen Schranke der zu Grunde gelegten INA-Zone und der Ordnung existierender Momente herzustellen. In Verallgemeinerung eines Resultates von S.V.NAGAEV [77] bewies er folgende Aussage:

Satz [114]: Wenn die Bedingung (6.19) und die Beziehungen (6.6) und (6.7) für $n\to\infty$ im Gebiet $0 \leq x \leq \sqrt{(q+1)\ln n}$, $q\geq 3$, erfüllt sind, dann gilt für alle k

$$E|X_k|^q < \infty. \tag{6.21}$$

Eine Verallgemeinerung dieses Resultats ist der in der Einleitung angeführte Satz 1.2.8. Dort wurde anstatt der Beziehungen (6.6) und (6.7) wieder die Gültigkeit der Bedingungen (6.20) vorausgesetzt, aber nicht mehr innerhalb einer gewissen INA-Zone, sondern nur noch für die obere Schranke

$$x=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$$

dieser x-Zone. Unter Verzicht auf die Bedingung (6.19) wurde in diesem Satz 1.2.8 ebenfalls die Aussage (6.21) erhalten mit

$$q=2+c_0^2,\ 0 \leq c_0 < c.$$

Damit wurde gleichzeitig die von W.WOLF zugrunde gelegte INA-Zone weiter eingeengt.

Unter Voraussetzung einer Reihenbedingung ähnlich dem Satz 6.1.2 gelang es V.K.ROHATGI [99] bereits 1970 die Zahl c in der oberen Schranke

$\sqrt{(2+c^2)\ln n}$ der INA-Zone durch den kleineren Wert c_o zu ersetzen. Er bewies folgenden Satz:

Satz [99]: Für die Summenverteilungsfunktion einer Folge unabhängiger verschieden verteilter Zufallsgrößen gelte die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n \ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} \left(1-F_n\left(\varepsilon\sqrt{(2+c_o^2)n \ln n}\right)+ +F_n\left(-\varepsilon\sqrt{(2+c_o^2)n \ln n}\right)\right) < \infty$$

für ein $\varepsilon > 0$ und $c_o \geqq 0$.

Dann gilt die Aussage (6.21) mit $q=2+c_o^2$.

Der Umkehrung dieses Satzes und damit der Verallgemeinerung des Satzes 6.1.2 auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen widmeten sich V.K.ROHATGI [98] und F.N.GALSTJAN [41,42]. Dabei wurden zusätzliche Voraussetzungen folgender Art benötigt:

V.K.ROHATGI [98]: Es existiert eine Zufallsgröße X mit $P(|X_k| > x) \leqq P(|X| > x)$, $k=1,2,\ldots$;

und X genügt den gleichen Momentenbedingungen wie die Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$.

Bei F.N.GALSTJAN [41,42] finden wir eine ähnliche Bedingung:

Es existiert eine Zufallsgröße X mit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geqq x) \leqq \gamma P(|X| \geqq x) \text{ für alle } n \text{ und } x \geqq N,$$

wobei γ und N positive Konstanten sind,

und X genügt den gleichen Momentenbedingungen wie die Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$.

Abschließend möchten wir aufbauend auf dem Satz 1.2.8 und der nach diesem Satz in der Einleitung geführten Diskussion (siehe Abschnitt 1.2 S.12) zwei Ergebnisse für den Fall unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen angeben.

Satz 6.2.1: Es mögen ε, b und c solche positiven Konstanten sein, daß die Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ einer beliebigen Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen den Ungleichungen (6.20) für $x=c\sqrt{\ln n}$, $B_n=\sqrt{n}$ und für $n \to \infty$ genügt. (Dabei wurde B_n in (6.20) formal gleich $\sqrt{n}$ gesetzt, da die Existenz der Streuung hier nicht vorausgesetzt ist.)

Dann gelten die Beziehung (1.14), d.h.

$$E|X_1|^{2+c_o^2} < \infty, \quad 0 \leqq c_o < c, \tag{6.22}$$

und

$$EX_1 = 0. \tag{6.23}$$

<u>Satz 6.2.2:</u> Die Gültigkeit der Beziehungen (6.22) und (6.23) ergibt sich auch im Fall $c=c_0$, wenn anstatt der Ungleichungen (6.20) mit geeigneten positiven Konstanten ε und c_0 die Konvergenz folgender Reihe vorausgesetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, n^{\frac{1}{2}c_0^2} (\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_0^2)} (1-F_n(\varepsilon c_0\sqrt{n \ln n})+F_n(-\varepsilon c_0\sqrt{n \ln n})).$$

Wir bemerken, daß im Fall $c_0=0$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(1-F_n(\varepsilon\sqrt{n \ln n})+F_n(-\varepsilon\sqrt{n \ln n})),\ \varepsilon > 0,$$

genau dann konvergiert, wenn die Beziehungen (6.22) und (6.23) erfüllt sind. Diese Bemerkung und der Satz 6.2.2 für den Fall $\varepsilon = \frac{c}{c_0} > 1$ wurden bereits 1968 von J.A.DAVIS [29] bewiesen.

b) Zur Existenz von einseitigen Momenten

Für den allgemeinen Fall des Serienschemas versuchten im Jahre 1965 H.RUBIN und J.SETHURAMAN [101] die Notwendigkeit der Momentenbedingung (6.8) zu beweisen, indem sie die Bedingungen (6.1), (6.2), (6.19), die Infinitesimalität der Zufallsgrößen ($\frac{X_{nk}}{B_N}$, $k=1,2,\ldots,N$, $n=1,2,\ldots$), die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes und die Ungleichung

$$1-F_n(\varepsilon x B_N) \leqq b\exp(\frac{-x^2}{2}) \tag{6.24}$$

für $x=c\sqrt{\ln N}$, gewisse $c>1, \varepsilon>0$, $b>0$ und für $n=1,2,\ldots$ voraussetzten. Jedoch erscheint der Beweis dieser Aussage etwas zweifelhaft. Mittels eines Beispieles wird diese Aussage widerlegt. Das folgende Beispiel wurde bereits von V.V.PETROV und W.WOLF [112] speziell für den Fall $q=4$ benutzt, um die Notwendigkeit der Bedingung (1.10) zu widerlegen. Wie wir weiter unten sehen werden (Satz 6.2.5), erweist sich erst im Fall unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen die Behauptung von H.RUBIN/ J.SETHURAMAN als richtig.

Es sei $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$ für jedes n eine Serie unabhängiger Zufallsgrößen mit der Eigenschaft, daß für alle n

$$X_{nk}=X_k,\ k=1,2,\ldots,n,$$

gilt. Weiterhin seien die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ normalverteilt mit

$$EX_k=0 \quad\text{und}\quad EX_k^2=\sigma_k^2,\ k=1,2,\ldots .$$

Dabei sollen die Streuungen folgende Bedingung erfüllen:

$$0 < c_1 \leq \sigma_k^2 \leq c_2 < \infty \quad \text{für } k \neq 10^m,\ m=1,2,\dots$$

und

$$\sigma_{k_m}^2 = k_m^\delta \qquad \text{für } k_m = 10^m,\ m=1,2,\dots,\ \frac{2}{q} < \delta \leq 1,$$

wobei $q=2+c_o^2$, c_o, c_1 und c_2 positive Konstanten sind.

Obwohl dieses Beispiel alle Voraussetzungen (6.1), (6.2), (6.19) und (6.24) für alle $c>0$, $\varepsilon \geq 1$ und $b \geq b_o$ (b_o ist eine gewisse positive Konstante) sowie den zentralen Grenzwertsatz und die von H. RUBIN/J. SETHURAMAN geforderte Infinitesimalitätsbedingung erfüllt, gilt in diesem Fall die Beziehung (6.8) nicht. Wir haben für $q>2$ und $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty u^q d\emptyset\left(\frac{u}{\sigma_k}\right) \to \infty \ .$$

Der folgende Satz ist eine entsprechende Version zum Satz 1.2.8.

<u>Satz 6.2.3:</u> Es sei $F_n(x)$ die Summenverteilungsfunktion einer Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_n$ mit $EX_k=0$ und $EX_k^2 < \infty$, $k=1,2,\dots,n$, und es möge die Bedingung (6.19) erfüllt sein. Weiterhin gelte mit geeigneten positiven Konstanten ε, b und c die Beziehung (6.24) für $n \to \infty$ mit $x=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$.
Dann gilt für alle k

$$E(X_k^+)^q < \infty \quad \text{für } q=2+c_o^2,\ 0 \leq c_o < c. \tag{6.25}$$

Im Gegensatz zum Satz 1.2.8 wird hier zusätzlich die Existenz endlicher Streuungen vorausgesetzt.

Der nächste Satz ist die entsprechende Version zu der im Abschnitt 6.2a) (S.71) zitierten Aussage von V.K. ROHATGI.

<u>Satz 6.2.4:</u> Es gelten $EX_k=0$, $EX_k^2 < \infty$, $k=1,2,\dots$, die Bedingung (6.19) und weiterhin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}\left(1-F_n\left(\varepsilon B_n\sqrt{(2+c_o^2)\ln n}\right)\right) < \infty\ ,\quad c_o > 0,\ \varepsilon > 0.$$

Dann gilt für alle k und $q=2+c_o^2$ die Momentenbedingung (6.25).

Für den Fall unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen können wir zu den Sätzen 6.2.1 und 6.2.2 entsprechende Aussagen angeben:

<u>Satz 6.2.5:</u> Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen erhalten wir unter sämtlichen Voraussetzungen des Satzes 6.2.3 die Aussage (6.25) bereits dann, wenn wir die Abschätzung (6.24) für
$1-F_n(\varepsilon\sigma_1 x\sqrt{n})$

für den kleineren Wert $x=c\sqrt{\ln n}$ voraussetzen.

Satz 6.2.6: Es seien die Zufallsgrößen X_k, $k=1,2,\ldots$, identisch verteilt mit $EX_1=0$ und $EX_1^2<\infty$.

Dann gilt bereits unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n^{\frac{1}{2}c_o^2} (\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} (1-F_n(\varepsilon c_o \sigma_1 \sqrt{n \ln n})), \quad c_o>0, \varepsilon>0,$$

die Aussage (6.25).

Abschließend bemerken wir, daß zu den formulierten Sätzen entsprechende Aussagen über die Notwendigkeit der Existenz linksseitiger Momente gelten.

3. Ein Grenzwertsatz für Doppelfolgen unabhängiger Zufallsgrößen unter der Voraussetzung endlicher Streuungen

Wie der folgende Satz zeigt, gelten die asymptotischen Beziehungen (6.6) und (6.7) sogar ohne die Voraussetzung höherer als zweiter endlicher Momente in einer gewissen INA-Zone.

Satz 6.3.1: Für das Serienschema (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,N$, $n=1,2,\ldots$) seien die Bedingungen (6.1) und (6.2) erfüllt. Weiterhin gelte die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln B_N^2)^{1+\frac{\delta}{2}}}{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{|u|>K_N(\varepsilon,\delta)} u^2 dF_{nk}(u) = 0 \tag{6.26}$$

für $\delta>-2$, $\varepsilon>0$ und $K_N(\varepsilon,\delta)=\dfrac{\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{3+\delta}{2}}}$.

Dann gelten im Gebiet $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln\ln N}$, $0<c<\sqrt{\delta+2}$, die asymptotischen Beziehungen (6.6) und (6.7) mit dem Restglied

$o\left(\dfrac{x^3}{(\ln N)^{\frac{1}{2}(\delta+2-c^2)}}\right)$, falls $\varepsilon=o\left(\dfrac{\sqrt{\ln N}}{x}\right)$ und $n\to\infty$ ist.

Für den Fall, daß ε für $n\to\infty$ eine Nullfolge ist, finden wir diese Aussage in der Arbeit [85].

Kapitel VII

Beweis der Ergebnisse zu den mittels Pseudomomente gewonnenen Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im Falle einer unbegrenzt teilbaren Grenzverteilungsfunktion

1. Beweis des Satzes 2.2.1

Zum Beweis der Sätze 2.2.1 und 2.2.3 benötigen wir die folgenden zwei bekannten Resultate von C.G.ESSEEN [34,45 §38,50 Sätze 1.5.2 und 1.5.3,91 Kapitel 5 Satz 2], wonach man mittels der Annäherung der charakteristischen Funktionen zweier Funktionen beschränkter Schwankung etwas über die Annäherung dieser Funktionen selbst aussagen kann.

Satz 7.1: Es seien $F(x)$ eine nichtabnehmende Funktion und $G(x)$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Variation auf der ganzen reellen Achse. $\varphi(t)$ und $g(t)$ seien die entsprechenden FOURIER-STIELTJES-Transformierten und es gelte

$F(-\infty)=G(-\infty)$ und $F(+\infty)=G(+\infty)$.

Mit einer positiven Konstanten C wird

$$\sup_x |G'(x)| \leq C < \infty$$

vorausgesetzt. Dann gilt für beliebige positive Zahlen $T>0$ und $b>\frac{1}{2\pi}$ die Abschätzung

$$\sup_x |F(x)-G(x)| \leq b \int_{-T}^{T} \left|\frac{\varphi(t)-g(t)}{t}\right| dt + r(b)\cdot\frac{C}{T},$$

wobei $r(b)$ eine positive Konstante ist, die nur von b abhängt. Man kann $r(b)=bc^2(b)$ setzen. Dabei ist $c(b)$ die Konstante aus der Beziehung (2.2)

Satz 7.2: Es seien $F(x)$ eine nichtabnehmende reine Treppenfunktion und $G(x)$ eine Funktion beschränkter Variation auf der ganzen reellen Achse. $\varphi(t)$ und $g(t)$ seien die entsprechenden FOURIER-STIELTJES-Transformierten und es gelte

$F(-\infty)=G(-\infty)$ und $F(+\infty)=G(+\infty)$.

Weiter wird vorausgesetzt, daß $F(x)$ und $G(x)$ nur Unstetigkeiten in den Punkten $x=x_i$, $x_i<x_{i+1}$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, aufweisen und ein $L>0$ existiert, so daß $L\leq\min_i(x_{i+1}-x_i)$ gilt, und überall mit Ausnahme der Punkte $x=x_i$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$, eine beschränkte Ableitung $G'(x)$ mit $|G'(x)| \leq C<\infty$ existiert, wobei C eine positive Konstante ist. Dann sind für eine beliebige Zahl $b>\frac{1}{2\pi}$ die nur von b abhängigen positiven Konstanten $r(b)$

und $s(b)$ derart erklärt, daß für alle $T \geq \frac{s(b)}{L}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\sup_x |F(x)-G(x)| \leq b \int_{-T}^{T} \left|\frac{\varphi(t)-g(t)}{t}\right| dt + r(b)\frac{C}{T} .$$

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes 2.2.1.

Zwischen den charakteristischen Funktionen von $F(x)$ und $F(x+a_{nk};\lambda_{nk})$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u+a_{nk};\lambda_{nk}) = \exp(-ia_{nk}t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u;\lambda_{nk}) =$$

$$= \exp(-ia_{nk}t)\varphi^{\lambda_{nk}}(t).$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \leq |\varphi_n(t)-\exp(-a_n\, it)\varphi^{\lambda_n}(t)| + \tag{7.1}$$
$$+ |\varphi(t)-\exp(-a_n\, it)\varphi^{\lambda_n}(t)|,$$

wobei

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF_n(u)$$

die charakteristische Funktion von $F_n(x)$ ist.

Zur Abschätzung des ersten Ausdruckes auf der rechten Seite von (7.1) benutzen wir folgende von V.M.ZOLOTAREV in [118] bewiesene Ungleichung: Für beliebige komplexe Zahlen w_j, z_j mit $|w_j| \leq 1$ und $|z_j| \leq 1$, $j=1,2,\ldots,n$ gilt

$$\left|\prod_{j=1}^{n} w_j - \prod_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |w_j - z_j| . \tag{7.2}$$

Damit erhalten wir

$$|\varphi_n(t)-\exp(-ia_n\, t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu}-1-itu-\frac{(itu)^2}{2}\right) d(F_{nk}(u)-F(u+a_{nk};\lambda_{nk})) \right| + \tag{7.3}$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \left| it\varkappa_{nk}(1) + \frac{(it)^2}{2}\varkappa_{nk}(2) \right| ,$$

weil auf der Grundlage von (7.2)

$$|\varphi_n(t)-\exp(-ia_n t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \sum_{k=1}^{k_n}|\varphi_{nk}(t)-\exp(-ia_{nk}t)\varphi^{\lambda_{nk}}(t)|$$

gilt. Mit $\varphi_{nk}(t)$ wird die charakteristische Funktion von $F_{nk}(x)$ bezeichnet.

Es gilt für reelle u und ganze nichtnegative m die bekannte Beziehung

$$\left|e^{iu}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(iu)^j}{j!}\right| \leq \frac{|u|^m}{m!}\min(2,\frac{|u|}{m+1}) \quad \text{(s. z.B. [117]) [12] S.57}$$

Offensichtlich erhalten wir für alle ε, $0\leq\varepsilon\leq 1$, für den Ausdruck

$$\min(1,\frac{|u|}{2(m+1)})$$

die Abschätzung

$$\min(1,\frac{|u|}{2(m+1)}) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & , |u|>2(m+1) \\ \frac{|u|}{2(m+1)} & , |u|\leq 2(m+1) \end{array}\right\} \leq \frac{|u|^{\varepsilon}}{(2(m+1))^{\varepsilon}} .$$

Somit ist für $m\leq r\leq m+1$ $(\varepsilon=r-m)$

$$\left|e^{iu}-\sum_{j=0}^{m}\frac{(iu)^j}{j!}\right| \leq \frac{2|u|^r}{m!(2(m+1))^{r-m}} . \tag{7.4}$$

Unter Beachtung von (7.4) erhalten wir für (7.3) mit m=2 die Beziehung

$$\begin{aligned} &|\varphi_n(t)-\exp(-ia_n t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \\ &\leq \frac{|t|^r}{6^{r-2}}\nu_n(r) + |t|\varkappa_n(1) + \frac{|t|^2}{2}\varkappa_n(2),\ 2\leq r\leq 3. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (7.1) läßt sich mit Hilfe der gleichen Überlegungen, die von (7.3) zu (7.5) führten, zeigen, daß

$$\begin{aligned} &|\varphi(t)-\exp(-ia_n t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \\ &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu-\frac{(itu)^2}{2})d(F(u)-F(u+a_n;\lambda_n))\right| + \\ &+ |t||\varkappa_F(1)| + \frac{|t|^2}{2}|\varkappa_F(2)| \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &|\varphi(t)-\exp(-ia_n t)\varphi^{\lambda_n}(t)| \leq \\ &\leq \frac{36}{6^r}|t|^r\nu_F(r) + |t||\varkappa_F(1)| + \frac{|t|^2}{2}|\varkappa_F(2)| \ ,\ 2\leq r\leq 3, \end{aligned} \tag{7.6}$$

ist.

Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes 2.2.1 können wir zur Abschätzung von $M_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ den oben zitierten Satz 7.1 benutzen und erhalten mit den Ungleichungen (7.1), (7.5) und (7.6)

$$M_n \leqq 2b \int_0^T \Big\{ \frac{36}{6^r} (\nu_F(r) + \nu_n(r)) t^{r-1} + (|\varkappa_F(2)| + \varkappa_n(2)) \frac{t}{2} + $$
$$+ (|\varkappa_F(1)| + \varkappa_n(1)) \Big\} dt + \frac{Cr(b)}{T} .$$

Nach Durchführung der Integration ist

$$M_n \leqq 2b \Big\{ \frac{36}{r6^r} (\nu_F(r) + \nu_n(r)) T^r + (|\varkappa_F(2)| + \varkappa_n(2)) \frac{T^2}{4} + \tag{7.7}$$
$$+ (|\varkappa_F(1)| + \varkappa_n(1)) T \Big\} + \frac{Cr(b)}{T} .$$

Wir setzen

$$T = T_{n,r} = \frac{1}{\tilde{g}(n,r)} .$$

Also

$$T_{n,r} = \Big\{ \Big[\frac{72}{r6^r} (\nu_F(r) + \nu_n(r)) \Big]^{1/(r+1)} + \Big[\tfrac{1}{2} (|\varkappa_F(2)| + \varkappa_n(2)) \Big]^{1/3} + $$
$$+ \Big[2 (|\varkappa_F(1)| + \varkappa_n(1)) \Big]^{1/2} \Big\}^{-1} .$$

Aus (7.7) erhalten wir mit diesem T

$$M_n \leqq \frac{1}{T_{n,r}} (b + Cr(b)) .$$

Damit ist Satz 2.2.1 bewiesen.

2. Beweis der Folgerungen 2.2.1 und 2.2.2 und der Sätze 2.2.2 bis 2.2.5

Um die Folgerungen 2.2.1 und 2.2.2 beweisen zu können, untersuchen wir die Pseudomomente $\varkappa_F(s)$ und $\varkappa_n(s)$, $s=1,2$, genauer.

Es seien a und λ reelle Zahlen mit $\lambda > 0$. Dann lassen sich bekanntlich Erwartungswert und Streuung der Verteilungsfunktion $F(x+a;\lambda)$ wie folgt über die entsprechende charakteristische Funktion berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dF(u+a;\lambda) = -i \frac{d}{dt} (\exp(-iat) \varphi^\lambda(t)) \Big|_{t=0} =$$
$$= -i(-ia\exp(-iat)\varphi^\lambda(t) + \exp(-iat)\lambda\varphi^{\lambda-1}(t)\varphi'(t)) \Big|_{t=0} =$$
$$= -i(-ia + i\lambda\mu) =$$
$$= \lambda\mu - a .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dF(u+a;\lambda) = -\frac{d^2}{dt^2}(\exp(-iat)\varphi^{\lambda}(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= -\frac{d}{dt}(-ia\exp(-iat)\varphi^{\lambda}(t)+\exp(-iat)\lambda\varphi^{\lambda-1}(t)\varphi'(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= -(-a^2\exp(-iat)\varphi(t)-2ia\exp(-iat)\lambda\varphi^{\lambda-1}(t)\varphi'(t)+$$
$$+\exp(-iat)\lambda(\lambda-1)\varphi^{\lambda-2}(t)(\varphi'(t))^2+\exp(-iat)\lambda\varphi^{\lambda-1}(t)\varphi''(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= -(-a^2+2a\lambda\mu-\lambda(\lambda-1)\mu^2-\lambda(\sigma^2+\mu^2)).$$

Hieraus erhalten wir sofort mit $a=a_n$ und $\lambda=\lambda_n$

$$|\varkappa_F(1)| = |\mu-\lambda_n\mu+a_n| \tag{7.8}$$

und

$$\begin{aligned}|\varkappa_F(2)| &= |\sigma^2+\mu^2-a_n^2+2a_n\lambda_n\mu-\lambda_n(\lambda_n-1)\mu^2-\lambda_n(\sigma^2+\mu^2)| = \\ &= |\sigma^2-\lambda_n\sigma^2+\mu^2-\lambda_n^2\mu^2+a_n(-a_n+2\lambda_n\mu)| \;.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Entsprechend gilt

$$\varkappa_n(1) = \sum_{k=1}^{k_n} |\mu_{nk}-\lambda_{nk}\mu+a_{nk}| \tag{7.10}$$

und

$$\varkappa_n(2) = \sum_{k=1}^{k_n} |\sigma_{nk}^2-\lambda_{nk}\sigma^2+\mu_{nk}^2-\lambda_{nk}^2\mu^2+a_{nk}(-a_{nk}+2\lambda_{nk}\mu)| \;. \tag{7.11}$$

Die Forderung $\varkappa_{nk}(s)=0$, $s=1,2$, in der Folgerung 2.2.1 bedeutet nun, die Gleichungen (7.10) und (7.11) gleich Null zu setzen und nach (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\ldots,k_n$, unter der Bedingung $\lambda_{nk}>0$, $k=1,2,\ldots,k_n$, aufzulösen. Aus (7.10) erhalten wir

$$a_{nk}=\lambda_{nk}\mu-\mu_{nk},\ k=1,2,\ldots,k_n.$$

Hieraus und aus (7.11) ergibt sich nach Substitution von a_{nk} eine Bestimmungsgleichung für λ_{nk}:

$$\sigma_{nk}^2-\lambda_{nk}\sigma^2+\mu_{nk}^2-\lambda_{nk}^2\mu^2+(\lambda_{nk}\mu-\mu_{nk})(\lambda_{nk}\mu+\mu_{nk})=0,\ k=1,2,\ldots,k_n.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\lambda_{nk} = \frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma^2}\ ,\ k=1,2,\ldots,k_n, \tag{7.12}$$

und damit haben wir

$$a_{nk} = \frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma^2}\mu - \mu_{nk}\ ,\ k=1,2,\ldots,k_n\ . \qquad (7.13)$$

Hieraus ergibt sich für jedes n

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad a_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\mu - \mu_n\ . \qquad (7.14)$$

Mit den in (7.12) und (7.13) erhaltenen Folgen (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\ldots,k_n$, ist für jedes n

$$\varkappa_n(1)=0 \quad \text{und} \quad \varkappa_n(2)=0\ .$$

Aus den Gleichungen (7.8) und (7.9) bekommen wir mit den Beziehungen (7.14)

$$|\varkappa_F(1)| = |\mu-\mu_n| \quad \text{sowie} \quad |\varkappa_F(2)| = |\sigma^2-\sigma_n^2+\mu^2-\mu_n^2|\ .$$

Damit ist die Folgerung 2.2.1 bewiesen.

Die Folgerung 2.2.2 erhalten wir aus Satz 2.2.1 und der Folgerung 2.2.1, indem wir die reellen Zahlenfolgen (a_{nk}) und (λ_{nk}), $k=1,2,\ldots,k_n$, speziell durch die Gleichungen (7.12) und (7.13) definieren. Wenn nun Erwartungswert und Streuung der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$ und der Verteilungsfunktion $F(x)$ zusammenfallen, d.h.

$$\mu_n=\mu \quad \text{und} \quad \sigma_n^2=\sigma^2\ ,$$

dann gilt

$$\lambda_n=1 \quad \text{und} \quad a_n=0 \quad (\text{s. } (7.14)).$$

Hieraus folgt, daß

$$\varkappa_n(s)=0,\ \varkappa_F(s)=0,\ s=1,2,$$

und daß

$$\nu_F(r)=0,\ r\geq 0,$$

ist. Die Aussage der Folgerung 2.2.2 ergibt sich jetzt unmittelbar aus der Ungleichung (2.4).

Der Beweis des Satzes 2.2.3 wird ganz analog zum Beweis des Satzes 2.2.1 durchgeführt. Dabei wird anstelle des Satzes 7.1 der Satz 7.2 benutzt.

Zum Beweis des Satzes 2.2.4 ist folgendes zu bemerken:

Der wichtigste Unterschied im Vergleich zur Aussage des Satzes 2.2.3 besteht darin, daß die Potenzen $\frac{1}{r+1}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ in den Ausdrücken von $\tilde{g}(n,r)$ in der Definitionsgleichung für $\tilde{g}_1(n,r)$ durch 1 ersetzt wurden. Der Grund hierfür ist, daß die im Satz 7.2 auftretende Konstante C gleich Null gesetzt werden kann. Unter dieser Bedingung setzen wir bei Anwendung des Satzes 7.2 $T=a(b)/L$ und erhalten aufbauend auf (7.7) damit die Aussage des Satzes 2.2.4.

Zum Beweis der Sätze 2.2.2 und 2.2.5:

Aus der Definition der Pseudomomente ergeben sich die folgenden Ungleichungen:

$$\varkappa_n(s) \leqq \nu_n(s) \quad \text{und} \quad |\varkappa_F(s)| \leqq \nu_F(s) \quad \text{für } s \leqq r.$$

Hieraus erhalten wir unmittelbar die Behauptungen der Sätze 2.2.2 und 2.2.5.

3. Beweis der Sätze 2.2.6 und 2.2.7 und der Folgerung 2.2.3

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|F_n(x)-F(x)| \leqq |F_n(x)-F_n^a(x)| + |F_n^a(x)-F(x)| \quad . \tag{7.15}$$

Die zu $F_{nk}^a(x)$ entsprechende charakteristische Funktion bezeichnen wir mit $\varphi_{nk}^a(t)$, d.h.

$$\varphi_{nk}^a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF_{nk}^a(u).$$

Dann hat $F_n^a(x)$ die charakteristische Funktion

$$\varphi_n^a(t) = \prod_{k=1}^{k_n} \varphi_{nk}^a(t) \quad .$$

Nach Lemma 1 von J.M.SHAPIRO in [104] gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |\overset{a}{\varphi}(t)-\varphi(t)| &\leqq |\ln \overset{a}{\varphi}(t) - \ln \varphi(t)| = \\ &= \left| -it\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)\frac{dG(u)}{u} - \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)\right| = \\ &= \left| \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)(e^{itu}-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)\right| \quad . \end{aligned} \tag{7.16}$$

Im Integrationsgebiet gilt

$$\frac{1+u^2}{u^2} \leqq 1 + \frac{1}{\min(\alpha^2, \beta^2)} \quad .$$

Aus der Ungleichung (7.4) erhalten wir mit m=0 und r=p

$$|e^{itu}-1| \leqq 2^{1-p}|tu|^p \quad \text{für } 0 < p \leqq 1.$$

Hieraus folgt mit (7.16) das Zwischenergebnis

$$|\overset{a}{\varphi}(t)-\varphi(t)| \leqq 2^{1-p}\left(1+\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)|t|^p\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p dG(u) \quad . \tag{7.17}$$

Nun schätzen wir die Differenz $|\varphi_n^a(t)-\overset{a}{\varphi}(t)|$ ab.

Beim Übergang von der kanonischen Darstellung der charakteristischen Funktion $\overset{a}{\varphi}(t)$ in der Form von LEVY-CHINČIN zur Darstellung in der Form von KOLMOGOROV erhält man unmittelbar, daß $\overset{a}{\varphi}(t)$ den Erwartungswert

$$\mu(a) = \overset{a}{\gamma} + \int_{-\infty}^{\infty} u\,d\overset{a}{G}(u) = \gamma - \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)\frac{dG(u)}{u} + \int_{-\alpha}^{\beta} u\,dG(u)$$

und die Streuung

$$\sigma^2(a) = \overset{a}{K}(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)\,d\overset{a}{G}(u) = \int_{-\alpha}^{\beta}(1+u^2)\,dG(u)$$

besitzt. Dabei sind $\overset{a}{G}(u)$ bzw. $\overset{a}{K}(u)$ die entsprechenden Spektralfunktionen in der Form von LEVY-CHINČIN bzw. KOLMOGOROV.

Für die charakteristischen Funktionen $\varphi_n^a(t)$ und $\overset{a}{\varphi}(t)$ von $F_n^a(x)$ und $\overset{a}{F}(x)$ können wir die Beziehungen (7.5) und (7.6) benutzen. Demnach gilt

$$|\varphi_n^a(t) - \overset{a}{\varphi}(t)| \leqq \frac{36}{6^r}|t|^r(\nu_{\overset{a}{F}}(r)+\nu_n^a(r)) + |t|\,(|\varkappa_{\overset{a}{F}}(1)| + \varkappa_n^a(1)) + \frac{|t|^2}{2}(|\varkappa_{\overset{a}{F}}(2)| + \varkappa_n^a(2)), \quad 2 \leqq r \leqq 3. \tag{7.18}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir aus (7.17) und (7.18)

$$|\varphi_n^a(t) - \varphi(t)| \leqq A_p'|t|^p + A_1|t| + A_2|t|^2 + A_r'|t|^r$$

mit

$$A_p' = 2^{1-p}\left(1+\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\right)\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\beta}^{\infty}\right)|u|^p\,dG(u), \quad 0 < p \leqq 1,$$

$$A_1 = |\varkappa_{\overset{a}{F}}(1)| + \varkappa_n^a(1),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(|\varkappa_{\overset{a}{F}}(2)| + \varkappa_n^a(2))$$

und

$$A_r' = \frac{36}{6^r}(\nu_{\overset{a}{F}}(r) + \nu_n^a(r)), \quad 2 \leqq r \leqq 3.$$

Jetzt wenden wir Satz 7.1 an und setzen dabei

$$T = (g^a(\alpha,\beta,r,p))^{-1}$$

mit

$$g^a(\alpha,\beta,r,p) = \left(\frac{2}{r}A_r'\right)^{1/(r+1)} + A_2^{1/3} + (2A_1)^{1/2} + \left(\frac{2}{p}A_p'\right)^{1/(p+1)}.$$

Indem wir nun für den ersten Summanden auf der rechten Seite von (7.15)

die Aussage des Satzes 2.2.8 anwenden, erhalten wir die Behauptung des Satzes 2.2.6.
Die Folgerung 2.2.3 wird entsprechend der Folgerung 2.2.1 bewiesen.
Aus den Voraussetzungen des Satzes 2.2.7 erhalten wir leicht

$$\lim_{n\to\infty} g^a(\alpha_n,\alpha_n,r,p) = 0,$$

wenn wir die beim Beweis des Satzes 2.2.2 benutzten Ungleichungen verwenden. (Ohne die Forderung $\alpha=\beta$, d.h. bei Betrachtung geeigneter Folgen (α_n) und (β_n), läßt sich Satz 2.2.7 ebenfalls zeigen.)
Wenn wir die Verteilungsfunktion $F(u+a_{nk};\lambda_{nk})$ durch die begleitende unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $\tilde{F}_{nk}(u)$ ersetzen, so bleibt die Aussage des Satzes 2.2.1 erhalten, weil in den Beziehungen (7.1), (7.3) und (7.5) bis (7.7) die spezielle Gestalt der charakteristischen Funktion $\tilde{\varphi}_{nk}(t)$ nicht benötigt wird. Andererseits ergibt sich aus der speziellen Gestalt der charakteristischen Funktion $\tilde{\varphi}_{nk}(t)$, daß alle Pseudomomente $\varkappa_{nk}(s)$ für $s=1,2$ gleich Null sind. Damit ist die Voraussetzung der Folgerung 2.2.1, daß die Pseudomomente $\varkappa_{nk}(s)$ für $s=1,2$ gleich Null sind, sofort erfüllt.
Die eben diskutierte Bemerkung bezüglich der begleitenden unbegrenzt teilbaren Verteilungsfunktion $\tilde{F}_{nk}(u)$ gilt auch für die Sätze 2.2.2 bis 2.2.7.

4. Beweis des Satzes 2.2.8

Der Beweis dieses Satzes wird durch vollständige Induktion bezüglich des Summationsindexes $k=1,2,\ldots$ geführt.
Den Induktionsanfang für $k=1$ erhalten wir aus der Definition der durch (2.7) eingeführten abgeschnittenen Verteilungsfunktion:

$$|F_n(x)-F_n^a(x)| = |F_{n1}(x)-F_{n1}^a(x)| \leqq 1-F_{n1}(\beta)+F_{n1}(-\alpha), \quad (k_n=1).$$

Um den Induktionsschritt durchzuführen, setzen wir jetzt die Aussage des Satzes 2.2.8 für $k_n=m$ voraus und beweisen sie für $k_n=m+1$. Es gelte also

$$\left|\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m} F_{nk}\Big)(x)-\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m} F_{nk}^a\Big)(x)\right| \leqq \sum_{k=1}^{m}\big(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta)\big) .$$

Wir haben

$$\left|\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m+1} F_{nk}\Big)(x)-\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m+1} F_{nk}^a\Big)(x)\right| =$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m} F_{nk}\Big)(x-u)\,dF_{n,m+1}(u)-\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathop{\boxed{*}}_{k=1}^{m} F_{nk}^a\Big)(x-u)\,dF_{n,m+1}^a(u)\right| =$$

$$
\begin{aligned}
&=\Bigg|\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(\mathop{*}_{k=1}^{m} F_{nk})(x-u)-(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x-u)\Big\}\, dF_{n,m+1}(u) \;+ \\
&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x-u)\, d\Big\{F_{n,m+1}(u)-F^{a}_{n,m+1}(u)\Big\}\Bigg| \leqq \\
&\leqq \sum_{k=1}^{m}(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta))+\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x-u)\, d(F_{n,m+1}-F^{a}_{n,m+1})(u)\right| = \\
&=\sum_{k=1}^{m}(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta))+ \\
&\quad+\Bigg|\Big(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\Big)(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x-u)\, dF_{n,m+1}(u)- \\
&\qquad\qquad-(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x)(F_{n,m+1}(-\alpha)+1-F_{n,m+1}(\beta))\Bigg| = \\
&=\sum_{k=1}^{m}(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta))+ \\
&\quad+\Bigg|\Big(\int_{-\infty}^{-\alpha}+\int_{\beta}^{\infty}\Big)\Big\{(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x-u)-(\mathop{*}_{k=1}^{m} F^{a}_{nk})(x)\Big\}\, dF_{n,m+1}(u)\Bigg| \leqq \\
&\leqq \sum_{k=1}^{m+1}(F_{nk}(-\alpha)+1-F_{nk}(\beta)) .
\end{aligned}
$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Die danachfolgende identische Umformung ergab sich aus dem im Nullpunkt vorhandenen negativen Sprung der hinter dem Differential stehenden Differenz

$$(F_{n,m+1}-F^{a}_{n,m+1})(u)$$

mit der Sprunghöhe

$$F_{n,m+1}(-\alpha)+1-F_{n,m+1}(\beta),$$

was leicht aus der Definition der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen folgt. Unter Beachtung, daß sich der Betrag der Differenz zweier Verteilungsfunktionen stets durch 1 abschätzen läßt, ergibt sich die zuletzt angeführte Ungleichung.

Damit ist Satz 2.2.8 bewiesen.

Beweis der ungleichmäßigen Abschätzungen der Differenz zweier Verteilungsfunktionen

1. Beweis der Sätze 3.1.1 und 3.1.2 und der Folgerungen 3.1.1 und 3.1.2

Die Integration über ein Integrationsintervall um den Nullpunkt von $-a$ bis b sei als Integration über das abgeschlossene Intervall $[-a,b]$, $0 \leq a,b < \infty$, zu verstehen, d.h. eventuelle sprunghafte Zuwächse des Integranden an den Integrationsgrenzen werden in das Integral einbezogen. Es gilt mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}|u|^{\nu}dF_i(u) &= \int_{-a}^{b}|u|^{\nu}d(F_i(u)-F_k(u)) + \int_{-a}^{b}|u|^{\nu}dF_k(u) = \\ &= b^{\nu}(F_i(b+0)-F_k(b+0)) - a^{\nu}(F_i(-a)-F_k(-a)) - \\ &\quad -\nu\int_{0}^{b}u^{\nu-1}(F_i(u)-F_k(u))du + \nu\int_{-a}^{0}|u|^{\nu-1}(F_i(u)-F_k(u))du + \\ &\quad + \int_{-a}^{b}|u|^{\nu}dF_k(u), \quad (i,k)=(1,2),(2,1).\end{aligned} \tag{8.1}$$

Die partielle Integration wurde konkret wie folgt durchgeführt:
z.B.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0}|u|^{\nu}d(F_i(u)-F_k(u)) &= \int_{-a}^{0}(-u)^{\nu}d(F_i(u)-F_k(u)) = \\ &= |u|^{\nu}(F_i(u)-F_k(u))\Big|_{-a}^{0} + \nu\int_{-a}^{0}|u|^{\nu-1}(F_i(u)-F_k(u))du.\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (8.1) erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{-a}^{b}|u|^{\nu}dF_i(u) \geq -(2a^{\nu}+2b^{\nu})\varrho + \int_{-a}^{b}|u|^{\nu}dF_k(u) \tag{8.2}$$

mit

$(i,k)=(1,2),(2,1)$.

Mit der Dreiecksungleichung und (8.2) folgt nun für $(i,k)=(1,2),(2,1)$

$$\int_{D}|u|^{\nu}dF_i(u) \leq \mu_{\nu}+2(a^{\nu}+b^{\nu})\varrho+\int_{D}|u|^{\nu}dF_k(u), \tag{8.3}$$

weil

$$\int_D |u|^\nu dF_i(u) \leqq \mu_\nu - \int_{-a}^{b} |u|^\nu dF_i(u) + B_{\nu,k}$$

ist.

Weiterhin gelten folgende Abschätzungen für $(i,k)=(1,2),(2,1)$:

$$\int_D |u|^\nu dF_i(u) \geqq x^\nu (F_k(x)-F_i(x)) \quad \text{für} \quad x>b, \tag{8.4}$$

da

$$\int_D |u|^\nu dF_i(u) \geqq \int_b^\infty u^\nu dF_i(u) \geqq x^\nu(1-F_i(x)) \text{ für } x>b \text{ ist,}$$

und

$$\int_D |u|^\nu dF_i(u) \geqq |x|^\nu (F_i(x)-F_k(x)) \quad \text{für} \quad x<-a, \tag{8.5}$$

da

$$\int_D |u|^\nu dF_i(u) \geqq \int_{-\infty}^{-a} |u|^\nu dF_i(u) \geqq |x|^\nu (F_i(x)-0) \quad \text{für} \quad x<-a \quad \text{ist.}$$

Aus den Ungleichungen (8.3) bis (8.5) erhalten wir für $x \in D$

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \max_{(i,k)} \left\{|x|^\nu (F_i(x)-F_k(x))\right\} \leqq$$

$$\leqq \max_{i=1,2} \left(\int_D |u|^\nu dF_i(u)\right),$$

d.h.

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \min_{i=1,2} B^{a,b}_{\nu,i} + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + \mu_\nu. \tag{8.6}$$

Diese Abschätzung gilt für $x \in [-a,b]$ wegen

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \varrho \max(a^\nu, b^\nu)$$

ebenfalls:

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \min_{i=1,2} B^{a,b}_{\nu,i} + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + \mu_\nu. \tag{8.7}$$

Aus (8.6) und (8.7) folgt schließlich für alle reellen x die Ungleichung

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq B^{a,b}_\nu + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + \mu_\nu, \quad 0 \leqq a,b < \infty. \tag{8.8}$$

Da die linke Seite von (8.8) nicht von den Parametern a und b abhängt, können wir die rechte Seite der Beziehung (8.8) bezüglich a und b minimieren, ohne daß die Ungleichung (8.8) verletzt wird.

Mit der elementaren Abschätzung

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leq \varrho, \quad -\infty<x<\infty,$$

folgt dann aus (8.8) die Behauptung des Satzes 3.1.1.

Die Existenz des Minimums

$$\min_{a\geq 0, b\geq 0} (\beta_\nu^{a,b}+2(a^\nu+b^\nu)\varrho)$$

ergibt sich wie folgt: Es sei für i=1,2

$$l_i(a) = \int_{(-\infty,-a)} |u|^\nu dF_i(u) + 2a^\nu\varrho$$

und

$$r_i(b) = \int_{(b,\infty)} u^\nu dF_i(u) + 2b^\nu\varrho.$$

Dann gilt

$$\beta_\nu^{a,b}+2(a^\nu+b^\nu)\varrho = \min_{i=1,2} (l_i(a)+r_i(b)).$$

Andererseits haben wir

$$\min_{a\geq 0} l_i(a) + \min_{b\geq 0} r_i(b) = \min_{a\geq 0, b\geq 0} (l_i(a)+r_i(b)).$$

Diese Minima in der zuletzt betrachteten Gleichung existieren wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Funktionen $l_i(a)$ und $r_i(b)$, die als Integrale über offenen Intervallen definiert sind, d.h. es gilt

$$\inf_{a\geq 0} l_i(a) = \min_{a\geq 0} l_i(a) \quad \text{und} \quad \inf_{b\geq 0} r_i(b) = \min_{b\geq 0} r_i(b).$$

Diese Tatsache läßt sich wie folgt zeigen: Es sei z.B.

$$\inf_{b\geq 0} r_i(b) = \liminf_{b\to b_o} \left\{ \int_{(b,\infty)} u^\nu dF_i(u)+2b^\nu\varrho \right\}$$

und b_o eine Sprungstelle von $F_i(u)$. Dann erhalten wir einerseits

$$\lim_{\varepsilon\to +0} r_i(b_o+\varepsilon) = r_i(b_o)$$

und andererseits

$$\lim_{\varepsilon\to +0} r_i(b_o-\varepsilon) = r_i(b_o) + b_o^\nu(F_i(b_o+0)-F_i(b_o)) > r_i(b_o),$$

d.h.

$$\inf_{b\geq 0} r_i(b) = \min_{b\geq 0} r_i(b) = r_i(b_o).$$

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes 3.1.2:

Unter Benutzung der Abschätzung (8.2) und mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\int_b^\infty u^\nu dF_i(u) \leqq \mu_\nu^a + \mu_{\nu,k}^a - \int_{-a}^b |u|^\nu dF_i(u)$$

und somit

$$\int_b^\infty u^\nu dF_i(u) \leqq \mu_\nu^a + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + \int_b^\infty u^\nu dF_k(u), (i,k)=(1,2),(2,1). \quad (8.9)$$

Nach Anwendung von (8.4) ist für $x > b$

$$\int_b^\infty u^\nu dF_i(u) \geqq x^\nu (F_k(x)-F_i(x)), \ (i,k)=(1,2),(2,1).$$

Hieraus folgt mit (8.9) für $x > b$ die Abschätzung

$$x^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \mu_\nu^a + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + \min_{i=1,2} B_{\nu,i}^b \ .$$

Entsprechend (8.7) bekommen wir für $-\max(a,b) \leqq x \leqq b$ ebenfalls

$$|x|^\nu |F_1(x)-F_2(x)| \leqq \mu_\nu^a + 2(a^\nu+b^\nu)\varrho + B_\nu^b \ , \ 0 \leqq a,b < \infty . \quad (8.10)$$

Damit ist Satz 3.1.2 bewiesen.
Die Folgerung 3.1.1 erhält man durch folgende Ungleichung

$$\min_{a \geqq 0, b \geqq 0} (B_\nu^{a,b} + (2a^\nu + 2b^\nu + 1)\varrho) + \mu_\nu \leqq B_\nu^{0,0} + \varrho + \mu_\nu = \varrho + B_\nu .$$

Hieraus erhält man für alle reellen x die Abschätzung

$$|F_1(x)-F_2(x)| \leqq \min(\varrho, \frac{\varrho + B_\nu}{1+|x|^\nu}), \quad (8.11)$$

die dann mit Lemma 3.1.1 zur Ungleichung (3.3) führt.
Mit einer ähnlichen Überlegung ergibt sich die Folgerung 3.1.2 aus der Ungleichung (8.8).

2. Beweis des Satzes 3.2.1

Für $a \to \infty$ gilt folgende asymptotische Gleichung

$$\int_a^\infty u^\nu \exp(\frac{-u^2}{2}) du \approx a^{\nu-1} \exp(\frac{-a^2}{2}).$$

Deshalb ist die Funktion

$$\tilde{P}_\nu(a) = a^{1-\nu} \exp(\frac{a^2}{2}) \int_a^\infty u^\nu \exp(\frac{-u^2}{2}) du$$

für hinreichend große a beschränkt und wegen der Stetigkeit von $\tilde{P}_\nu(a)$ im Intervall $(0,\infty)$ existiert die Zahl

$$K_\nu = \max_{a \geqq \sqrt{2N}} \tilde{P}_\nu(a), \ N > 0.$$

Somit gilt für $a \geqq \sqrt{2N}$

$$\min_{a\geqq 0,\, b\geqq 0}\left\{\beta_\nu^{a,b}+2(a^\nu+b^\nu)\varrho\right\}+\varrho+\mu_\nu \leqq \int\limits_{|u|\geqq a}|u|^\nu d\emptyset(u)+4a^\nu\varrho+\varrho+\mu_\nu \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}K_\nu\frac{1}{\sqrt{2N}}a^\nu\exp(\frac{-a^2}{2})+4a^\nu\varrho+\frac{1}{(2N)^{\nu/2}}a^\nu\varrho+\mu_\nu \leqq$$

$$\leqq C_\nu(N)\varrho(\ln\frac{1}{\varrho})^{\nu/2}+\mu_\nu,$$

falls $a=\sqrt{(2\ln\frac{1}{\varrho})}$ gesetzt wird. Es gilt dabei

$$C_\nu(N) = 2^{\nu/2}(\frac{K_\nu}{\sqrt{N\pi}}+4)+N^{-\nu/2}.$$

Mit der Festlegung $a=\sqrt{(2\ln\frac{1}{\varrho})}$ ist im Intervall $0<\varrho\leqq e^{-N}$, $N>0$, die Forderung $a\geqq\sqrt{2N}$ erfüllt.

Um K_ν zahlenmäßig abzuschätzen, gehen wir wie folgt vor:

Durch partielle Integration erhalten wir für $\tilde{P}_\nu(a)$ und $k_0=0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\nu(a)=1+&\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{a^{2k}}\prod_{i=1}^{k}(\nu-(2i-1))+\\&+a^{1-\nu}\exp(\frac{a^2}{2})\prod_{i=1}^{k_0+1}(\nu-(2i-1))\int_a^\infty u^{\nu-(2k_0+2)}\exp(\frac{-u^2}{2})du.\end{aligned}\tag{8.12}$$

Wir beweisen diese Identität durch vollständige Induktion:

$k_0=0$:

$$\tilde{P}_\nu(a)=1+a^{1-\nu}\exp(\frac{a^2}{2})(\nu-1)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp(\frac{-u^2}{2})du,$$

denn

$$\int_a^\infty u^{\nu-1}u\exp(\frac{-u^2}{2})du=-u^{\nu-1}\exp(\frac{-u^2}{2})\Big|_a^\infty+(\nu-1)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp(\frac{-u^2}{2})du.$$

Nun gelte (8.12) für $k_0=m$, d.h.

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\nu(a)=1+&\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a^{2k}}\prod_{i=1}^{k}(\nu-(2i-1))+\\&+a^{1-\nu}\exp(\frac{a^2}{2})\prod_{i=1}^{m+1}(\nu-(2i-1))\int_a^\infty u^{\nu-(2m+2)}\exp(\frac{-u^2}{2})du.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_a^\infty u^{\nu-(2m+3)}u\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du=-u^{\nu-(2m+3)}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)\Bigg|_a^\infty +$$

$$+(\nu-(2m+3))\int_a^\infty u^{\nu-(2m+4)}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du,$$

woraus mit der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung für $k_o=m+1$ folgt.

An Hand der Darstellung (8.12) untersuchen wir nun das Monotonieverhalten von $\tilde{P}_\nu(a)$. Es gilt

$$\frac{d\tilde{P}_\nu(a)}{da} = -\sum_{k=1}^{k_o}\frac{2k}{a^{2k+1}}\prod_{i=1}^{k}(\nu-(2i-1)) +$$
$$+\prod_{i=1}^{k_o+1}(\nu-(2i-1))\left\{a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{1-\nu}{a}+a\right)\int_a^\infty u^{\nu-(2k_o+2)}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du - \right. \tag{8.13}$$
$$\left. -\frac{1}{a^{2k_o+1}}\right\}.$$

Im Falle $0<\nu<1$ folgt aus (8.13) mit $k_o=0$:

$$\frac{d\tilde{P}_\nu(a)}{da} = -\frac{(\nu-1)^2}{a}a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du -$$

$$-(\nu-1)\left(\frac{1}{a}-a^{2-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du\right) =$$

$$= (1-\nu)\left\{\frac{1}{a}+a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\nu-1}{a}-a\right)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du\right\} =$$

$$= (1-\nu)\left\{\frac{a^{1-\nu}}{a}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left[\int_a^\infty u^{\nu}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du+(1-\nu)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du\right]+\right.$$

$$\left.+\ a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\nu-1}{a}-a\right)\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du\right\} =$$

$$= (1-\nu)a^{1-\nu}\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left\{\frac{1}{a}\int_a^\infty u^{\nu}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du - a\int_a^\infty u^{\nu-2}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)du\right\}>$$

$$>0,$$

d.h. $\tilde{P}_\nu(a)$ ist für $0<\nu<1$ bezüglich a streng monoton wachsend und es gilt in diesem Fall $\tilde{P}_\nu(a)<1$. Bei der vorletzten Umformung der soeben betrachteten identischen Beziehungen wurde die Gleichung (8.12) mit $k_o=0$ benutzt.

Im Falle $\nu=1$ folgt aus (8.12) sofort $\tilde{P}_\nu(a)=1$.

Für den Fall $1<\nu<\infty$ erhalten wir aus (8.13) mit $k_o=\left[\frac{\nu-1}{2}\right]$, d.h.

$$2k_o+1 \leqq \nu < 2k_o+3,$$

folgendes Monotonieverhalten für $\tilde{P}_\nu(a)$:

$$\frac{d\tilde{P}_\nu(a)}{da} = -\sum_{k=1}^{k_o} \frac{2k}{a^{2k+1}} \prod_{i=1}^{k} (\nu-(2i-1)) -$$

$$-\prod_{i=1}^{k_o+1} (\nu-(2i-1)) \left\{ \frac{\nu-1}{a} a^{1-\nu} \exp(\frac{a^2}{2}) \int_a^\infty u^{\nu-(2k_o+2)} \exp(\frac{-u^2}{2}) du - \right.$$

$$-a^{2-\nu} \exp(\frac{a^2}{2}) \int_a^\infty u^{\nu-(2k_o+2)} \exp(\frac{-u^2}{2}) du +$$

$$\left. + \frac{1}{a^{2k_o+1}} \right\} .$$

Nun gilt

$$a^{2-\nu} \exp(\frac{a^2}{2}) \int_a^\infty u^{\nu-(2k_o+2)} \exp(\frac{-u^2}{2}) du \leqq$$

$$\leqq a^{2-\nu} \exp(\frac{a^2}{2}) a^{\nu-(2k_o+3)} \int_a^\infty u \exp(\frac{-u^2}{2}) du = \frac{1}{a^{2k_o+1}} .$$

Mit dieser Abschätzung erhalten wir für $1<\nu<\infty$

$$\frac{d\tilde{P}_\nu(a)}{da} < 0,$$

d.h. $\tilde{P}_\nu(a)$ ist in diesem Fall streng monoton fallend.

Somit gilt für $\nu>1$:

$$K_\nu = \tilde{P}_\nu(\sqrt{2N}) = (2N)^{-\frac{\nu-1}{2}} e^N \int_{\sqrt{2N}}^\infty u^\nu \exp(\frac{-u^2}{2}) du \leqq$$

$$\leqq (2N)^{-\frac{\nu-1}{2}} e^N \int_0^\infty u^\nu \exp(\frac{-u^2}{2}) du = N^{-\frac{\nu-1}{2}} e^N \int_0^\infty t^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-t} dt =$$

$$= N^{-\frac{\nu-1}{2}} e^N \Gamma(\frac{\nu+1}{2}) .$$

Für $0<\nu\leqq 1$ gilt $K_\nu=1$.

Damit können wir $C_\nu(N)$ folgendermaßen abschätzen:

$$C_\nu(N) \le \begin{cases} 2^{\nu/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^N}{N^{\nu/2}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+4\right)+N^{-\nu/2} & \text{für } \nu>1 \\ 2^{\nu/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{N}}+4\right)+N^{-\nu/2} & \text{für } 0<\nu\le 1. \end{cases}$$

3. Zum Beweis des Satzes 3.3.1

Wir gehen von der Ungleichung (8.10) aus und erhalten für a=0 und b=m=0,1,2,... die Abschätzung

$$x^\nu\left|B(x;n,p)-\Pi(x;\lambda)\right| \le \sum_{i=m+1}^{\infty} i^\nu\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}+2m^\nu\varrho+\mu^{\varrho} \tag{8.14}$$

für $0 \le x < \infty$.

Wegen der linksseitigen Stetigkeit der betrachteten Verteilungsfunktionen gilt für $k-1 < x \le k$, $k=1,2,\dots$, die Beziehung

$$x^\nu\left|B(x;n,p)-\Pi(x;\lambda)\right| \le k^\nu\left|B(x;n,p)-\Pi(x;\lambda)\right| =$$
$$= k^\nu\left|B(k;n,p)-\Pi(k;\lambda)\right| .$$

Hieraus und aus (8.14) folgt die Behauptung des Satzes 3.3.1.

Kapitel IX

Beweis der Ungleichungen zur Abschätzung der Differenz der Verteilungsfunktion einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen zur Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

1. Beweis des Satzes 4.2.1

Für die nachfolgenden Beweise benötigen wir einen Hilfssatz über die Abschätzung des Restgliedes bei Anwendung der TAYLORschen Formel zur Reihenentwicklung der e-Funktion.

Lemma 9.1: Im Intervall $0\le u\le\gamma$, $\gamma>0$, gilt folgende Abschätzung

$$\left|e^u-\sum_{i=0}^{n}\frac{u^i}{i!}\right| \le \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\min\left\{e^\gamma, \left(\frac{n}{\gamma}\right)^n(n+1)e^{\gamma-n}\right\},$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

(Im Fall n=0 wird $n^n=1$ gesetzt.)

Lemma 9.2: [91] Für beliebige reelle Zahlen x und q gilt

$$\left|\Phi(x+q)-\Phi(x)\right| \le k_1|q|.$$

Dabei ist k_1 eine absolute Konstante und es gilt

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Beweis des Lemmas 9.1

Entsprechend der TAYLORschen Formel hat die Reihenentwicklung der Funktion

$$g(u)=e^u$$

bei Entwicklung um den Nullpunkt u=0 die Gestalt

$$e^u = \sum_{i=0}^{n} \frac{u^i}{i!} + R_{n+1} ,$$

wobei das Restglied R_{n+1} in der LAGRANGEschen Form die Darstellung

$$R_{n+1} = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta_1 u} , \quad 0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1,$$

und in der CAUCHYschen Form die Darstellung

$$R_{n+1} = \frac{u^{n+1}}{n!}(1-\vartheta_2)^n e^{\vartheta_2 u} , \quad 0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1,$$

hat (s. z.B. [38,S.237]).

Somit gilt im Intervall $0 \leqq u \leqq \gamma$ die Restgliedabschätzung

$$0 \leqq R_{n+1} \leqq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \min\left\{ e^{\vartheta_1 \gamma}, (n+1)(1-\vartheta_2)^n e^{\vartheta_2 \gamma} \right\}.$$

Wir bestimmen das Maximum der Funktion

$$f(\vartheta)=(1-\vartheta)^n e^{\vartheta \gamma}, \quad -\infty<\vartheta<1,$$

und erhalten

$$f'(\vartheta)=e^{\vartheta\gamma}(-n(1-\vartheta)^{n-1}+\gamma(1-\vartheta)^n)=(1-\vartheta)^{n-1} e^{\vartheta\gamma}(\gamma(1-\vartheta)-n)=0,$$

d.h.

$$\gamma(1-\vartheta)-n=0,$$

für

$$\vartheta_0 = -\frac{n}{\gamma}+1<1 \qquad (n>0)$$

und weiterhin

$$f''(\vartheta)=e^{\vartheta\gamma}\left\{-\gamma n(1-\vartheta)^{n-1}+\gamma^2(1-\vartheta)^n+n(n-1)(1-\vartheta)^{n-2}-\gamma n(1-\vartheta)^{n-1}\right\} =$$
$$=(1-\vartheta)^{n-2} e^{\vartheta\gamma}\left\{-2\gamma n(1-\vartheta)+\gamma^2(1-\vartheta)^2+n(n-1)\right\} ,$$

d.h. für n>0 ist

$$f''(\vartheta_0)=-n\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{n-2} e^{\gamma-n}<0.$$

Damit liegt bei ϑ_0 ein lokales Maximum vor und es gilt für $-\infty<\vartheta\leqq 1$

$$f(\vartheta) \leqq \left(\frac{n}{\gamma}\right)^n e^{\gamma-n} .$$

Hieraus und aus der obigen Abschätzung für R_{n+1} folgt die Aussage des Lemmas 9.1.

Beweis des Lemmas 9.2

Es sei $F(q)=\emptyset(x+q)$ eine Funktion von q. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$F(q)-F(0) = qF'(\xi),\ 0 \ldots \xi \ldots q,$$

d.h.

$$|F(q)-F(0)| \leqq |q| \sup_{\xi} |F'(\xi)| = |q| \sup_{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{2}\right) \leqq k_1 |q| \ .$$

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes 4.2.1:

Für $y^m \leqq \Gamma_{mn} K_m$ erhalten wir sofort die Aussage des Satzes. Deshalb sei im weiteren Verlauf des Beweises

$$y^m > \Gamma_{mn} K_m > 0.$$

Es gilt stets

$$1-F_n(x) = F_n^y(x)-F_n(x)+\int_x^{\infty} dF_n^y(u). \tag{9.1}$$

Wir wenden uns jetzt der Abschätzung des Integrals auf der rechten Seite von (9.1) zu und beweisen zuerst durch vollständige Induktion

$$\int_x^{\infty} dF_n^y(u) = \int_x^{\infty} e^{-hu} dF_{nh}^y(u) \tag{9.2}$$

mit

$$F_{nh}^y(z) = \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{n} V_{ih}^y\right)(z) \quad \text{und} \quad V_{ih}^y(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dV_i^y(u),\ h > 0.$$

Dabei ist h ein positiver Parameter.

Wir kommen nun zum Induktionsbeweis für (9.2):

Es sei n=1:

$$\int_x^{\infty} dF_1^y(u) = \int_x^{\infty} dV_1^y(u) = \int_x^{\infty} e^{-hu} e^{hu} dV_1^y(u) = \int_x^{\infty} e^{-hu} dV_{1h}^y(u) = \int_x^{\infty} e^{-hu} dF_{1h}^y(u).$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß entsprechend der Definition von V_{ih}^y

$$dV_{1h}^y(u) = e^{hu} dV_1^y(u)$$

gilt.

Nun setzen wir voraus, daß (9.2) für n=k richtig ist, und führen den Induktionsschritt durch.

$$\int_{x}^{\infty} dF_{k+1}^{y}(u)=\int_{u=x}^{\infty} d_u \int_{v=-\infty}^{\infty} V_{k+1}^{y}(u-v)dF_k^{y}(v)=$$

$$=\int_{u=x}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)h}e^{(u-v)h}d_u V_{k+1}^{y}(u-v)e^{-hv}dF_{kh}^{y}(v)=$$

$$=\int_{u=x}^{\infty} e^{-hu}\int_{v=-\infty}^{\infty} e^{(u-v)h}d_u V_{k+1}^{y}(u-v)dF_{kh}^{y}(v)=$$

$$=\int_{u=x}^{\infty} e^{-hu}\int_{v=-\infty}^{\infty} d_u V_{k+1,h}^{y}(u-v)dF_{kh}^{y}(v)=$$

$$=\int_{x}^{\infty} e^{-hu}dF_{k+1,h}^{y}(u).$$

Bei diesen identischen Umformungen wurde im ersten und letzten Schritt die mathematische Operation der Faltung ausgenutzt. Bei der zweiten identischen Umformung ging die Induktionsvoraussetzung und bei der vorletzten Umformung die Definition der Funktion $V_{k+1,h}^{y}$ ein. Weiterhin wurde ausgenutzt, daß im Fall der Existenz von STIELTJES-Integralen Differentialbildung (bezüglich u) und Integration (bezüglich v) vertauscht werden können (Es handelt sich hier um Funktionen beschränkter Variation).

Damit ist (9.2) bewiesen.

Mit

$$R_i(y,h)=V_{ih}^{y}(\infty)$$

gilt

$$F_{nh}^{y}(\infty)=\prod_{i=1}^{n} R_i(y,h)$$

und wir erhalten aus (9.2) die Abschätzung

$$\int_{x}^{\infty} dF_n^{y}(u) \leq e^{-hx}\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \ln R_i(y,h)\right). \qquad (9.3)$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl. Wir zerlegen $R_i(y,h)$ an der Stelle $\frac{\varepsilon}{h}$:

$$R_i(y,h)=H_{i1}(h)+H_{i2}(y,h)$$

mit

$$H_{i1}(h)=\int_{-\infty}^{\varepsilon/h} e^{hu}dV_i^{y}(u) \quad \text{und} \quad H_{i2}(y,h)=\int_{\varepsilon/h}^{y} e^{hu}dV_i^{y}(u).$$

Es gilt wegen der Ungleichung $\ln u \leq u-1$, $u>0$, die Abschätzung

$$\ln R_i(y,h) \leq H_{i1}(h)-1 + H_{i2}(y,h), \; i=1,2,\ldots,n. \qquad (9.4)$$

Die weiteren Betrachtungen führen wir für

$$y \geq \frac{\varepsilon}{h}$$

durch. Die Funktion $H_{i2}(y,h)$ läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
H_{i2}(y,h) &\leq \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} \max_{\varepsilon/h \leq u \leq y} \frac{e^{hu-hy}}{(hu)^m} (hy)^m = \\
&= \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} \max_{\varepsilon \leq v \leq t} \left(\frac{t}{v}\right)^m \exp\left(v\left(1-\frac{t}{v}\right)\right) \leq \qquad \text{mit } t=hy \\
&\leq \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} \max_{u \geq 1} u^m e^{\varepsilon(1-u)} \leq \qquad \text{mit } u=\frac{t}{v} \\
&\leq \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} \max_{u>0} u^m e^{\varepsilon(1-u)} .
\end{aligned}$$

Die Funktion $u^m e^{\varepsilon(1-u)}$, $u>0$, nimmt ihr Maximum bei $u=\frac{m}{\varepsilon}$ an, d.h. es gilt

$$H_{i2}(y,h) \leq \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} K_m(\varepsilon), \; i=1,2,\ldots,n. \qquad (9.5)$$

Im Falle $y<\frac{\varepsilon}{h}$ gilt die Ungleichung (9.5) ebenfalls:

$$H_{i2}(y,h)=0 \leq \gamma_{mi} \frac{e^{hy}}{y^m} K_m(\varepsilon).$$

Wir definieren jetzt eine Funktion $r_j=r_j(u)$ folgendermaßen:

$$r_j(u) = \begin{cases} e^{h\vartheta_1 u} , & 0<\vartheta_1<1, \\ j(1-\vartheta_2)^{j-1} e^{h\vartheta_2 u} , & 0<\vartheta_2<1, \; j=1,2,3. \end{cases} \qquad (9.6)$$

Offensichtlich läßt sich leicht zeigen, daß für jedes feste u mit passenden Parametern ϑ_1, ϑ_2 mit $0<\vartheta_1,\vartheta_2<1$ für $j=1,2,3$ die Gleichheit

$$e^{h\vartheta_1 u} = j(1-\vartheta_2)^{j-1} e^{h\vartheta_2 u}$$

gilt und damit die zwei verschiedenen Darstellungen für die Funktion r_j sinnvoll sind. Wir benötigen in den folgenden Abschätzungen die Funktion r_j für die Restglieddarstellung im Zusammenhang mit der TAYLOR-Entwicklung der e-Funktion.

Für $0<m<\infty$ gilt im Fall

$$y \geq \frac{\varepsilon}{h}$$

die Beziehung

$$H_{i1}(h)-1 \leq \int_{-\infty}^{0} dV_i(u)+1-V_i(y)+\int_{0}^{\varepsilon/h}\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}r_2(u)\right)dV_i(u)-1 \leq$$

$$\leq h\int_{0}^{\varepsilon/h} u\,dV_i(u)+\frac{h^2}{2}\min\left(e^{\varepsilon},\frac{2e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)\int_{0}^{\varepsilon/h} u^2\,dV_i(u).$$

Also ist wegen der vorangehenden Ungleichungskette

$$H_{i1}(h)-1 \leq h^m\gamma_{mi}\left(\varepsilon^{1-m}+\varepsilon^{2-m}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)\right),\quad 0<m<1, \tag{9.7}$$

$$H_{i1}(h)-1 \leq h\gamma_{1i}+h^{\nu}\gamma_{\nu i}\varepsilon^{2-\nu}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right),\quad 1\leq m<\infty, \tag{9.8}$$

bzw., falls $B_{2i}<\infty$ ist,

$$H_{i1}(h)-1 \leq h\mu_i+h^2B_{2i}\varepsilon^{2-2}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right),\quad \mu_i=EX_i, \tag{9.9}$$

wobei $1\leq\nu\leq\min(m,2)$ gilt.

Nun wählen wir

$$h=h_m(y)=\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{\Gamma_{mn}K_m}>0$$

und erhalten in (9.5) nach der Summation bezüglich i

$$\sum_{i=1}^{n} H_{i2}(y,h) \leq 1. \tag{9.10}$$

Für das speziell gewählte h gilt

$$e^{-hx}=\left(\frac{\Gamma_{mn}K_m}{y^m}\right)^{x/y},$$

womit wir im Fall $y\geq\varepsilon/h$ aus den soeben hergeleiteten Abschätzungen die Aussage des Satzes 4.2.1 erhalten.

Im Fall $y<\varepsilon/h$ betrachten wir anstatt V_i^y die abgeschnittenen Verteilungsfunktionen $V_i^{\varepsilon/h}$ und erhalten wegen

$$F_n^{\varepsilon/h}(x) \leq F_n^y(x)$$

in diesem Fall ebenfalls die Aussage des Satzes 4.2.1.

2. Zum Beweis der Folgerungen 4.2.1 und 4.2.2

Um die Folgerung 4.2.1 zu beweisen, setzen wir

$$y=\frac{x}{k}$$

und erhalten aus Punkt 3) des Satzes 4.2.1 die Ungleichung

$$1-F_n(x) \leq$$

$$\leq F_n^{x/k}(x)-F_n(x)+\exp\left\{1+B_n^2\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)h_m^2\left(\frac{x}{k}\right)\right\}\left(\frac{\Gamma_{mn}K_m k^m}{x^m}\right)^k .$$

Nun gilt mit

$$u=\frac{x}{kB_n} \quad \text{und} \quad v=u(K_m\Lambda_{mn})^{-1/m} \geq 1:$$

$$B_n^2h_m^2\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{k^2}{x^2}B_n^2 \ln^2\frac{x^m}{k^m\Gamma_{mn}K_m} = m^2\left(\frac{1}{u}\ln\frac{u}{(K_m\Lambda_{mn})^{1/m}}\right)^2 = \tag{9.11}$$

$$= m^2\left(\frac{1}{v}\ln v\right)^2(K_m\Lambda_{mn})^{-2/m}$$

und somit

$$B_n^2h_m^2\left(\frac{x}{k}\right) \leq \left(\frac{m}{e}\right)^2(K_m\Lambda_{mn})^{-2/m} .$$

Wir kommen nun zum Beweis der Folgerung 4.2.2:

Es sei

$$y = \frac{x}{2},\ u=\frac{x}{2B_n} \geq 2 \quad \text{und} \quad m\geq 2.$$

Wir gehen von der vorangehenden Identität (9.11) aus und formen sie weiter um:

$$m^2\left(\frac{1}{u}\ln\frac{u}{(K_m\Lambda_{mn})^{1/m}}\right)^2 = m^2\left\{\frac{1}{u}\ln\frac{(8-e)u}{4m} + \frac{1}{u}\ln\frac{4m}{(8-e)(K_m\Lambda_{mn})^{1/m}}\right\}^2,$$

d.h.

$$B_n^2h_m^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{u^2}\ln^2\left[\frac{(8-e)u}{4m}\right]^m + \frac{1}{u^2}\ln\frac{u^{2m}(8-e)^m}{(4m)^mK_m\Lambda_{mn}}\ln\frac{(4m)^m}{(8-e)^mK_m\Lambda_{mn}} . \tag{9.12}$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\left|\frac{1}{u}\ln\frac{(8-e)u}{4m}\right| = \frac{8-e}{4m}\left|\frac{1}{z}\ln z\right| \quad \text{mit } z=\frac{(8-e)u}{4m} \geq \frac{8-e}{2m}>0,\ (u\geq 2),$$

und

$$\left|\frac{1}{z}\ln z\right| = \begin{cases} \frac{1}{z}\ln z \leq \frac{1}{e} & \text{, falls} \quad z\geq 1 , \\ \frac{1}{z}\ln\frac{1}{z} \leq \frac{2m}{8-e}\ln\frac{2m}{8-e} & \text{, falls } 0<z<1 \text{ und } \frac{8-e}{2m}<1. \end{cases}$$

Für $m\geq 2$ gilt

$$2+\frac{2m}{8-e}>e \quad \text{und} \quad \frac{2m}{8-e}>\frac{1}{e}$$

und deshalb folgt für $z\geq\frac{8-e}{2m}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{z}\ln z\right| \leq \frac{2m}{8-e}\ln\left(2+\frac{2m}{8-e}\right).$$

Damit ergibt sich für den ersten Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (9.12) für $u \geq 2$ und $m \geq 2$ folgende Beziehung:

$$\frac{1}{u^2}\ln^2\left[\frac{(8-e)u}{4m}\right]^m \leq \frac{m^2}{4}\ln^2(2+\frac{2m}{8-e}). \tag{9.13}$$

Jetzt kommen wir zur Untersuchung des in (9.12) auftretenden Faktors

$$\frac{1}{u^2}\ln\frac{u^{2m}(8-e)^m}{(4m)^m K_m \Lambda_{mn}} :$$

Falls $u^2 \leq \frac{4m}{8-e}$ ist, gilt

$$\frac{1}{u^2}\ln\frac{u^{2m}(8-e)^m}{(4m)^m K_m \Lambda_{mn}} = \frac{1}{u^2}\left\{\ln\frac{1}{K_m\Lambda_{mn}} + \ln\frac{u^{2m}(8-e)^m}{(4m)^m}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{u^2}\,\frac{u^2}{4} + \frac{m}{u^2}\ln\frac{u^2(8-e)}{4m} \qquad \leq \frac{1}{4}.$$

Im Fall $u^2 > \frac{4m}{8-e}$ gilt mit $v = \frac{u^2(8-e)}{4m}$ die Abschätzung

$$\frac{m}{u^2}\ln\frac{u^2(8-e)}{4m} = \frac{8-e}{4}\,\frac{1}{v}\ln v \leq \frac{8-e}{4e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{4}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{u^2}\ln\frac{u^{2m}(8-e)^m}{(4m)^m K_m \Lambda_{mn}} \leq \frac{2}{e}. \tag{9.14}$$

Für $0 < \varepsilon \leq 2$ gilt $\min(\frac{e^\varepsilon}{2}, \frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}) \leq \frac{e}{2}$.

Damit erhalten wir aus (9.12) bis (9.14) die Abschätzung

$$\exp(1+B_n^2 h_m^2(\tfrac{x}{2})\min(\frac{e^\varepsilon}{2}, \frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon})) \leq$$

$$\leq (\frac{4m}{8-e})^m \frac{1}{K_m\Lambda_{mn}}\exp(1+\frac{e}{2}\,\frac{m^2}{4}\ln^2(2+\frac{2m}{8-e})).$$

Nun gilt

$$(\frac{2^m K_m \Gamma_{mn}}{x^m})^2 (\frac{4m}{8-e})^m \frac{1}{K_m \Lambda_{mn}} = \frac{\Gamma_{mn}^2}{x^{2m}}\,\frac{4^m K_m}{\Lambda_{mn}}(\frac{4m}{8-e})^m \leq K_m(\frac{4m}{8-e})^m \frac{\Gamma_{mn}}{x^m},$$

da

$$\frac{4^m \Gamma_{mn}}{x^m \Lambda_{mn}} = (\frac{4B_n}{x})^m \leq 1$$

ist.

Mit der dritten Bemerkung nach Satz 4.2.1 bekommen wir schließlich

$$F_n^{x/2}(x) - F_n(x) \leq \sum_{i=1}^{n}(1-V_i(\tfrac{x}{2})) \leq 2^m x^{-m}\Gamma_{mn}.$$

Die Konstante D_m ergibt sich, indem wir ε speziell gleich 2 setzen, d.h. insbesondere $K_m(2)=1$ für $m=2$.

3. Beweis des Satzes 4.2.2 und der Folgerungen 4.2.3 und 4.2.4

Wir gehen wie beim Beweis des Satzes 4.2.1 vor und erhalten aus den Beziehungen (9.1) bis (9.5) und (9.9) die Abschätzung ($\nu=2$)

$$1-F_n(xB_n) \leq F_n^y(xB_n)-F_n(xB_n) +$$
$$+\exp\left\{-hxB_n+h^{\nu}B_{\nu n}\varepsilon^{2-\nu}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)+hA_n+B_{mn}K_m\frac{e^{hy}}{y^m}\right\}.$$

Mit $A_n=0$, $\nu=2$ und $m=3$ folgt hieraus

$$1-F_n(xB_n) \leq F_n^y(xB_n)-F_n(xB_n) +$$
$$+\exp\left\{-hxB_n+h^2B_n^2\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)+C\right\}, \tag{9.15}$$

falls wir h derart wählen, daß mit einer absoluten Konstanten $C>0$ gilt:

$$B_{3n}K_3\frac{e^{hy}}{y^3} = C,$$

d.h.

$$h=h_3(y)=\frac{1}{y}\ln\frac{Cy^3}{B_{3n}K_3}.$$

Mit diesem speziellen h folgt aus (9.15) für

$$h_3(y)y-h_3(y)xB_n+h_3^2(y)B_n^2\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right) \leq 0 \tag{9.16}$$

die Ungleichung

$$1-F_n(xB_n) \leq F_n^y(xB_n)-F_n(xB_n) +$$
$$+\exp\left\{h_3(y)y-h_3(y)xB_n+C+h_3^2(y)B_n^2\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)\right\}\frac{B_{3n}K_3}{Cy^3},$$

also

$$1-F_n(xB_n) \leq \frac{B_{3n}}{y^3}\left(1+\frac{e^C}{C}K_3\right). \tag{9.17}$$

Wegen $\frac{e^C}{C} \geq e$ ergibt sich, daß (9.17) für $C=1$ die schärfste Abschätzung liefert. Es sei im weiteren $C=1$.

Um die Gültigkeit der Bedingung (9.16) zu untersuchen, setzen wir speziell

$$y=rxB_n,$$

wobei r eine positive Konstante ist.

Damit hat die Ungleichung (9.16) die Gestalt

$$-hy\left(-1+\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2x^2}\ln\frac{y^3}{B_{3n}K_3}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)\right)\leqq 0,\; h=h_3(y). \tag{9.18}$$

Wir bezeichnen mit $\tilde{K}_o$ folgende Konstante:

$$\tilde{K}_o = 2\sqrt[3]{L_{3n}K_3}\,.$$

Im Fall $x^3\leqq\tilde{K}_o^3=8K_3L_{3n}$ gilt

$$1-F_n(xB_n)\leqq 1\leqq\frac{8K_3L_{3n}}{x^3}\leqq 8(1+eK_3)\frac{L_{3n}}{x^3}\,,$$

womit wir sofort die Behauptung des Satzes 4.2.2 erhalten.

Unter der Voraussetzung

$$\frac{y^3}{B_{3n}K_3}=\frac{r^3x^3}{K_3L_{3n}}\geqq 1 \tag{9.19}$$

ist die Ungleichung (9.18) dann erfüllt, wenn

$$r(1-r)-\frac{1}{x^2}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)\ln\frac{y^3}{B_{3n}K_3}\geqq 0 \tag{9.20}$$

gilt. Aus

$$r(1-r)\leqq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

folgt, daß die Bedingung (9.20) für $r=\frac{1}{2}$ in gewisser Weise die schwächste Forderung für die Gültigkeit von (9.17) darstellt. Deshalb sei im weiteren

$$r=\frac{1}{2}\,.$$

Für dieses r bedeutet die Forderung (9.19) gerade

$$x\geqq\tilde{K}_o$$

und genau für diese x müssen wir noch die Behauptung des Satzes 4.2.2 zeigen. Für dieses r hat die Ungleichung (9.20) die Gestalt

$$\frac{1}{x^2}\min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2},\frac{e^{\varepsilon-1}}{\varepsilon}\right)\ln\frac{x^3}{8K_3L_{3n}}\leqq\frac{1}{4}\,. \tag{9.21}$$

Im Falle $\frac{1}{L_{3n}}\leqq P_o$ erhalten wir die Ungleichung (9.21) wie folgt:

$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{x^3}{8K_3L_{3n}}=\frac{3}{2x^2}\ln\frac{x^2}{4(K_3L_{3n})^{2/3}}=\frac{3}{2}\,\frac{1}{4(K_3L_{3n})^{2/3}}\,\frac{1}{z}\ln z$$

mit

$$z=\frac{x^2}{4(K_3L_{3n})^{2/3}}\,.$$

Unter Beachtung von $\frac{\ln z}{z}\leqq\frac{1}{e}$ und $\frac{1}{L_{3n}}\leqq P_o$ ergibt sich hieraus (9.21).

Wir kommen nun zur zweiten Abschätzung des Satzes 4.2.2.

Es sei wieder (9.19) mit $r = \frac{1}{2}$ erfüllt.

Im Falle $x \geq \max(K, \sqrt{A\max(0, \ln\frac{1}{ML_{3n}})})$ erhalten wir (9.21) folgendermaßen:

$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{x^3}{8K_3L_{3n}} = \frac{1}{x^2}\ln\frac{1}{ML_{3n}} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2}\ln\frac{x^2}{4}\left(\frac{M}{K_3}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{A} + \frac{3}{8e}\left(\frac{M_o}{K_3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{A_o} .$$

Damit ist Satz 4.2.2 bewiesen.

Zur Folgerung 4.2.3 ist zu bemerken, daß $K_m(\varepsilon)$ im Intervall $0 < \varepsilon \leq m$ streng monoton fallend ist und bei $\varepsilon = m$ sein Minimum erreicht (s. Bemerkung 1) nach Satz 4.2.1). Daher ist für $Z \geq Z_o$ die Gleichung

$$K_3(\varepsilon_o) = \frac{Z-8}{8e}$$

im Intervall $0 < \varepsilon_o \leq 3$ eindeutig nach ε_o lösbar.

Die Folgerung 4.2.4 ergibt sich sofort aus der Folgerung 4.2.3 und der Bedingung $x > K$.

4. Beweis des Satzes 4.3.1 und des Lemmas 4.3.1

Um den Satz 4.3.1 zu beweisen, gehen wir von der bekannten Ungleichung

$$1-\Phi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \tag{9.22}$$

aus und erhalten mit

$$\frac{1}{L_{3n}}x^2\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leq P\max\left(\frac{2}{e}\operatorname{sign}(2-K^2), K^2\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right), \quad x > K, \quad \frac{1}{L_{3n}} \leq P,$$

aus (9.22) die erste Aussage des Satzes 4.3.1.

Im zweiten Fall des Satzes läßt sich (9.22) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{3n}}{x^3}\frac{1}{L_{3n}}x^2\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) = \\ &= Mx^2\exp\left(\frac{-x^2}{2} + \ln\frac{1}{ML_{3n}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{3n}}{x^3} \leq \\ &\leq Mx^2\exp\left(-x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{A}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{3n}}{x^3} = \\ &= \frac{M}{\frac{1}{2} - \frac{1}{A}}ze^{-z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{3n}}{x^3}\end{aligned}$$

mit

$$z = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{A}\right).$$

Mit der im Satz 4.3.1 angegebenen Konstanten K_o gilt $z \geq K_o$. Indem man für diese z den Ausdruck ze^{-z} abschätzt, erhält man die Konstante U_2.

Zur Folgerung 4.3.1 ist zu bemerken, daß hier im Vergleich zur zweiten Aussage des Satzes 4.3.1 bei der Begrenzung des x-Intervalles die Beziehung

$$M_o \leq P_o$$

ausgenutzt wurde, wodurch die unter der Wurzel stehende Maximumbildung

$$\max(0, \ln\frac{1}{M_o L_{3n}})$$

durch

$$\ln\frac{1}{M_o L_{3n}}$$

ersetzt werden konnte.

Um die Folgerung 4.3.2 zu beweisen, wird entsprechend von (9.22) ausgegangen und der Ausdruck

$$\frac{1}{L_{3n}}\, x \exp(\frac{-x^2}{2})$$

weiter abgeschätzt.

Wir kommen nun zum Beweis des Lemmas 4.3.1:

Auf Grund der Symmetrie der Verteilungsfunktionen zentrierter Normalverteilungen gilt stets

$$|\phi(px)-\phi(x)| \leq \frac{1}{2} . \tag{9.23}$$

Hieraus folgt wegen $k_2 > \frac{1}{2}$ im Fall $p=0$ sofort die Behauptung des Lemmas 4.3.1. Es sei im weiteren $0 < p < \infty$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > 0$. Es gilt

$$|\phi(px)-\phi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{px}^{x}\exp(\frac{-u^2}{2})du\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{p}^{1}x\exp(\frac{-x^2v^2}{2})dv\right| .$$

Also ist wegen

$$|vx|\exp(\frac{-(vx)^2}{2}) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$|\phi(px)-\phi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\left|\int_{p}^{1}\frac{1}{v}dv\right| ,$$

d.h.

$$|\phi(px)-\phi(x)| \leq \frac{|\ln p|}{\sqrt{2\pi e}} . \tag{9.24}$$

Für $p \geq 1$ haben wir $|\ln p| = \ln p \leq p-1$, d.h.

$$|\phi(px)-\phi(x)| \leq \frac{|p-1|}{\sqrt{2\pi e}} \leq k_2\,|p-1| ,\quad p \geq 1 .$$

Für $0<p<1$ gilt wegen (9.23) und (9.24) die Abschätzung

$$|\emptyset(px)-\emptyset(x)| \leq \min\left(\frac{1}{2},\frac{|\ln p|}{\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Im Intervall $\exp\left(-\sqrt{\frac{e\pi}{2}}\right) \leq p<1$ ist $|\ln p|$ monoton fallend und gestattet deshalb folgende Beziehung

$$\frac{|\ln p|}{\sqrt{2\pi e}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\sqrt{\frac{e\pi}{2}} = \frac{1}{2},$$

d.h. die Abschätzung (9.24) ist in diesem Fall schärfer als (9.23). Weiterhin gilt in diesem p-Intervall

$$\frac{|\ln p|}{\sqrt{2\pi e}} \leq \frac{|p-1|}{2\left(1-\exp\left(-\sqrt{\frac{e\pi}{2}}\right)\right)},$$

d.h.

$$\frac{|\ln p|}{a} \leq \frac{|p-1|}{1-\exp(-a)} \quad \text{mit} \quad a=\sqrt{\frac{e\pi}{2}}.$$

Um diese letzte Ungleichung zu zeigen, betrachten wir die Funktion

$$f(p)=a(1-p)+(1-e^{-a})\ln p, \quad e^{-a}\leq p\leq 1.$$

Es gilt

$$f(e^{-a})=0 \quad \text{und} \quad f(1)=0$$

und weiterhin

$$f'(p) = -a+\frac{1-e^{-a}}{p} = 0 \quad \text{für} \quad p_0=\frac{1-e^{-a}}{a} = e^{-\vartheta a},\ 0<\vartheta<1,$$

und

$$f''(p) = -\frac{1-e^{-a}}{p^2}<0.$$

Damit ist $f(p)$ im betrachteten Intervall konvex (nach oben gewölbt) und es gilt

$$f(p) \geq 0.$$

Hieraus folgt für $e^{-a}\leq p\leq 1$:

$$a(1-p) \geq -(1-e^{-a})\ln p,$$

$$a|p-1| \geq (1-e^{-a})|\ln p|$$

und

$$\frac{|\ln p|}{a} \leq \frac{|p-1|}{1-e^{-a}}.$$

Für das noch zu betrachtende Intervall $0<p<e^{-a}$ gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{1-e^{-a}}{2(1-e^{-a})} \leq \frac{1-p}{2(1-e^{-a})} = \frac{|p-1|}{2(1-e^{-a})}.$$

Es gilt $k_2=\frac{1}{2(1-e^{-a})}$. Damit ist das Lemma 4.3.1 bewiesen.

5. Beweis des Satzes 4.4.2:

Im Beweis beschränken wir uns auf den Fall $x>0$, d.h.

$$K < x \leq \sqrt{\ln\frac{1}{ML_{3n}}}\ .$$

Im weiteren benutzen wir die im Beweis des Satzes 4.2.1 eingeführten Bezeichnungen

$$V_{ih}^{y}(z),\ F_{nh}^{y}(z),\ H_{i1}(h),\ H_{i2}(y,h)\quad\text{und}\quad R_i(y,h),$$

wobei wir allerdings in den Definitionen von $H_{i1}(h)$ und $H_{i2}(y,h)$ anstatt ε den Parameter γ verwenden.

Weiter sei

$$\emptyset_{ih}(z) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{hu}dV_i^y(u) & ,\ z \leq \frac{\gamma}{h},\\ \int\limits_{-\infty}^{\gamma/h} e^{hu}dV_i^y(u) = H_{i1}(h), & z > \frac{\gamma}{h}, \end{cases}$$

$$\tilde{\emptyset}_{nh}(z) = (\mathop{\boxed{*}}_{i=1}^{n} \emptyset_{ih})(z),$$

$$\bar{H}_{i1}(h) = \int\limits_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i^y(u),\quad \bar{\bar{H}}_{i1}(h) = \int\limits_{-\infty}^{\gamma/h} u^2e^{hu}dV_i^y(u),$$

$$a_i(h) = \frac{\bar{H}_{i1}(h)}{H_{i1}(h)},\quad A_n(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i(h),$$

$$\sigma_i^2(h) = \frac{\bar{\bar{H}}_{i1}(h)}{H_{i1}(h)} - \left(\frac{\bar{H}_{i1}(h)}{H_{i1}(h)}\right)^2,\quad B_n^2(h) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(h),$$

$$\beta_{3i}(h) = \frac{1}{H_{i1}(h)} \int\limits_{-\infty}^{\gamma/h} |u-a_i(h)|^3 e^{hu}dV_i^y(u),\ B_{3n}(h) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{3i}(h).$$

Dabei sind γ und h, genau wie y, gewisse positive Parameter.

Auf Grund der Dreiecksungleichung gilt für eine beliebige (wenn wir B_n als eine gewisse Konstante betrachten) Summenverteilungsfunktion F_n mit den soeben eingeführten Bezeichnungen folgende Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq |F_n(xB_n)-F_n^y(xB_n)| +$$

$$+\left|\int\limits_{xB_n}^{\infty} dF_n^y(u) - \int\limits_{xB_n}^{\infty} e^{-hu}d\tilde{\emptyset}_{nh}(u)\right| + \left|\int\limits_{xB_n}^{\infty} e^{-hu}d\tilde{\emptyset}_{nh}(u) - \int\limits_{x}^{\infty} d\emptyset(u)\right|. \tag{9.25}$$

Den ersten Summanden auf der rechten Seite von (9.25) können wir mittels Satz 2.2.8 abschätzen, indem wir dort $\alpha = \infty$ und $\beta = y$ setzen:

$$\left|F_n(xB_n) - F_n^y(xB_n)\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} (1 - V_i(y)) \leqq \frac{B_{3n}}{y^3} ,$$

d.h. mit

$$y = \frac{xB_n}{A}$$

bekommen wir

$$\left|F_n(xB_n) - F_n^y(xB_n)\right| \leqq k_5(A) \frac{L_{3n}}{x^3} . \tag{9.26}$$

Wir bemerken, daß die Konstanten k_i, $i=1,2,\ldots,25$, bereits im Abschnitt 4.5 eingeführt wurden.

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (9.25) gilt

$$\begin{aligned} &\left|\int_{xB_n}^{\infty} dF_n^y(u) - \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\emptyset}_{nh}(u)\right| \leqq \\ &\leqq e^{-hxB_n} \prod_{i=1}^{n} R_i(y,h) \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k2}(y,h)}{R_k(y,h)} . \end{aligned} \tag{9.27}$$

Diese Ungleichung beweisen wir wie folgt: Mit der Beziehung (9.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{xB_n}^{\infty} dF_n^y(u) - \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\emptyset}_{nh}(u) &= \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d(F_{nh}^y - \tilde{\emptyset}_{nh})(u) \leqq \\ &\leqq e^{-hxB_n} \int_{xB_n}^{\infty} d(F_{nh}^y - \tilde{\emptyset}_{nh})(u) . \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt daraus, daß die hinter dem Differential stehende Differenz

$$F_{nh}^y(u) - \tilde{\emptyset}_{nh}(u)$$

eine monoton wachsende Funktion bezüglich u ist, denn für die in die Definition von F_{nh}^y bzw. $\tilde{\emptyset}_{nh}$ eingehenden Faltungskomponenten gilt die Ungleichung

$$V_{ih}^y(z) \geqq \emptyset_{ih}(z).$$

Es sei

$$\Psi_{ih}(z) = V_{ih}^y(z) - \emptyset_{ih}(z)$$

und

$$\overline{F}^y_{nh}(z) = \frac{F^y_{nh}(z)}{\prod_{i=1}^{n} R_i(y,h)}, \quad \overline{\emptyset}_{nh}(z) = \frac{\tilde{\emptyset}_{nh}(z)}{\prod_{i=1}^{n} R_i(y,h)} .$$

Damit gilt für die nichtnegative Differenz $F^y_{nh}(u)-\tilde{\emptyset}_{nh}(u)$ die Ungleichung

$$\int_{xB_n}^{\infty} d(F^y_{nh}-\tilde{\emptyset}_{nh})(u) = \prod_{i=1}^{n} R_i(y,h) \int_{xB_n}^{\infty} d(\overline{F}^y_{nh}-\overline{\emptyset}_{nh})(u) \leqq$$

$$\leqq \prod_{i=1}^{n} R_i(y,h) \left.(\overline{F}^y_{nh}-\overline{\emptyset}_{nh})(u)\right|_{u=\infty} .$$

Für die Differenz $\overline{F}^y_{nh}(u)-\overline{\emptyset}_{nh}(u)$ erhalten wir durch vollständige Induktion die Abschätzung

$$\left|\overline{F}^y_{nh}(u)-\overline{\emptyset}_{nh}(u)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\Psi_{kh}(\infty)}{R_k(y,h)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k2}(y,h)}{R_k(y,h)} .$$

(n=1:

$$\frac{F^y_{1h}}{R_1} - \frac{\tilde{\emptyset}_{1h}}{R_1} = \frac{V^y_{1h} - \emptyset_{1h}}{R_1} = \frac{\Psi_{1h}}{R_1}$$

$n=m \Longrightarrow n=m+1$:

$$\overline{F}^y_{m+1,h}(u) - \overline{\emptyset}_{m+1,h}(u) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{m+1} R_k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F^y_{mh}(u-v)\, dV^y_{m+1,h}(v) - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\emptyset}_{mh}(u-v)\, d\emptyset_{m+1,h}(v) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F^y_{mh}-\tilde{\emptyset}_{mh})(u-v)}{\prod_{k=1}^{m} R_k} \frac{dV^y_{m+1,h}(v)}{R_{m+1}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\emptyset}_{mh}(u-v)}{\prod_{k=1}^{m} R_k} \frac{d(V^y_{m+1,h}-\emptyset_{m+1,h})(v)}{R_{m+1}} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{m} \frac{\Psi_{kh}(\infty)}{R_k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV^y_{m+1,h}(v)}{R_{m+1}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi_{m+1,h}(v)}{R_{m+1}} \leqq \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\Psi_{kh}(\infty)}{R_k} \qquad)$$

Damit ist die Beziehung (9.27) gezeigt.
Wenn wir den positiven Parameter h

$$h = \frac{x}{B_n}$$

wählen, so gilt für den dritten Summanden auf der rechten Seite von (9.25) die Abschätzung

$$\left|\int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\emptyset}_{nh}(u) - \int_{x}^{\infty} d\emptyset(u)\right| \leq \sum_{i=1}^{4} I_i \qquad (9.28)$$

mit

$$I_1 = 2L_o \prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h) e^{-x^2} \frac{B_{3n}(h)}{B_n^3(h)} ,$$

$$I_2 = 2k_1 \prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h) e^{-x^2} \frac{1}{B_n} \left|A_n(h) - xB_n\right| ,$$

$$I_3 = 2k_2 \prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h) e^{-x^2} \frac{1}{B_n} \left|B_n(h) - B_n\right|$$

und

$$I_4 = \left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h) e^{-x^2/2} - 1\right| \emptyset(-x) .$$

Die Konstanten L_o, k_1 und k_2 sind dabei in dem Satz 4.4.1 und den Lemmata 9.2 und 4.3.1 definiert.

Die Ungleichung (9.28) erhält man folgendermaßen: Es gilt die elementare Abschätzung

$$|ab - cd| \leq |a| \, |b - d| + |cd| \left|\frac{a}{c} - 1\right| .$$

Wir identifizieren die linke Seite von (9.28) mit ab–cd, indem wir

$$a = \prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h), \quad b = \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(u), \quad c = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

und

$$d = \int_{u=xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\emptyset\left(\frac{u}{B_n} - x\right)$$

setzen, Dabei ist

$$\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(u) = \frac{\tilde{\emptyset}_{nh}(u)}{\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)} .$$

Die Funktion $\emptyset(-x)$ wurde hierbei über die Beziehung

$$\emptyset(-x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \int_{u=xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\emptyset\left(\frac{u}{B_n} - x\right), \quad h = \frac{x}{B_n} ,$$

dargestellt (s. [73S.341]).

Es gilt

$$I_4 = |cd| \left|\frac{a}{c} - 1\right| .$$

Offensichtlich ist $\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(u)$ eine Summenverteilungsfunktion von n unabhängigen Zufallsgrößen

$$Y_i, \; i=1,2,\ldots,n,$$

mit den Verteilungsfunktionen

$$\frac{\emptyset_{ih}(u)}{H_{i1}(h)}, \; i=1,2,\ldots,n.$$

Diese Verteilungsfunktionen sind in der Literatur unter der Bezeichnung "konjugierte Verteilungsfunktionen" eingegangen.

Es gilt

$$EY_i=a_i(h), \; D^2Y_i=\sigma_i^2(h) \quad \text{und} \quad E|Y_i-EY_i|^3=\beta_{3i}(h), \; i=1,2,\ldots,n.$$

Durch partielle Integration erhalten wir, daß

$$|b-d| \leq e^{-hxB_n} \, 2\sup_u \left|\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(u)-\emptyset\left(\frac{u}{B_n}-x\right)\right|$$

ist. Weiterhin gilt

$$\sup_u \left|\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(u)-\emptyset\left(\frac{u}{B_n}-x\right)\right| =$$

$$= \sup_u \left|\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(A_n(h)-B_n(h)u) - \emptyset\left(\frac{A_n(h)-B_n(h)u}{B_n}-x\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_u \left|\bar{\bar{\emptyset}}_{nh}(A_n(h)-B_n(h)u) - \emptyset(-u)\right| + \sup_u \left|\emptyset\left(\frac{-uB_n(h)}{B_n}\right) - \emptyset(-u)\right| +$$

$$+\sup_u \left|\emptyset\left(\frac{-uB_n(h)}{B_n}\right) - \emptyset\left(\frac{-uB_n(h)}{B_n} + \frac{A_n(h)-xB_n}{B_n}\right)\right| .$$

Also erhalten wir auf Grund des Satzes 4.4.1 und der Lemmata 9.2 und 4.3.1 die Ungleichung

$$|a||b-d| \leq I_1+I_2+I_3 \; .$$

Für die weitere Abschätzung der Ausdrücke I_1 bis I_4 benötigen wir die folgenden Ungleichungen:

Wenn wir den positiven Parameter h

$$h=\frac{x}{B_n}$$

wählen, so gilt

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leq k_8, \tag{9.29}$$

falls $y \geq \frac{\delta}{h}$ ist,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)-1\right| \leq k_9 h^3 B_{3n}, \tag{9.30}$$

falls $y \geq \frac{\gamma}{h}$ und $k_3 < 1$ ist,

$$B_{3n}(h) \leq k_{10} B_{3n}, \tag{9.31}$$

falls $k_3 < 1$ ist,

$$B_n^2(h) \geq k_{11} B_n^2, \tag{9.32}$$

falls $y \geq \frac{\gamma}{h}$ und $k_3 < 1$ ist,

$$|B_n(h) - B_n| \leq k_{12} \frac{hB_{3n}}{B_n}, \tag{9.33}$$

falls $y \geq \frac{\gamma}{h}$, $k_3 < 1$ und $k_4 < 1$ ist,

$$|A_n(h) - xB_n| \leq k_{13} h^2 B_{3n}, \tag{9.34}$$

falls $y \geq \frac{\gamma}{h}$ und $k_3 < 1$ ist.

Auf Grund der Voraussetzungen (4.2) des Satzes 4.4.2 sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Ungleichungen (9.29) bis (9.34) gelten. Insbesondere folgt aus der Relation

$$K^2 > \gamma A$$

die Gültigkeit der Bedingung

$$y \geq \frac{\gamma}{h}.$$

Wir kommen nun zum Beweis der Beziehungen (9.29) bis (9.34).

Beweis der Beziehung (9.29):

Unter Anwendung der allgemeinen Ungleichung

$$\ln u \leq u - 1, \quad u > 0,$$

erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \left(H_{i1}(h) - 1 - \frac{h^2}{2} \sigma_i^2\right)\right),$$

da entsprechend der Definition von $H_{i1}(h)$ stets

$$H_{i1}(h) > 0$$

gilt. Wir kommen nun zur Abschätzung des Ausdrucks

$$H_{i1}(h) - 1 - \frac{1}{2} h^2 \sigma_i^2 :$$

Mit Lemma 9.1 erhalten wir wegen $EX_i = 0$ die Gleichungen

$$H_{i1}(h) = \int_{-\infty}^{\gamma/h} \left(1 + hu + \frac{h^2u^2}{2} + \frac{h^3u^3}{6} r_3(u)\right) dV_i^y(u),$$

d.h.

$$H_{i1}(h)-1-\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2 =$$

$$= -\int_{\gamma/h}^{y} dV_i(u) - h\int_{\gamma/h}^{\infty} u\,dV_i(u) - \frac{h^2}{2}\int_{\gamma/h}^{\infty} u^2 dV_i(u) + \frac{h^3}{6}\int_{-\infty}^{\gamma/h} u^3 r_3(u)\,dV_i(u), \tag{9.35}$$

und die Ungleichungen

$$H_{i1}(h)-1-\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2 \leq h^3 B_{3i}\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}\right), \tag{9.36}$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(H_{i1}(h)-1-\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2\right) \leq h^3 B_{3n}\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}\right).$$

Dabei ist $r_3(u)$ die in der Beziehung (9.6) definierte Funktion.

Der Ausdruck h^3B_{3n} wird wie folgt abgeschätzt:

$$h^3B_{3n}=x^3L_{3n} \leq L_{3n}\left(A\ln\frac{1}{ML_{3n}}\right)^{3/2} = \frac{1}{M}\left(\frac{3A}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{\ln z}{z}\right)^{3/2}$$

mit

$$z=\left(\frac{1}{ML_{3n}}\right)^{2/3} \geq \exp\left(\frac{2N_o}{3}\right).$$

Nun gilt für

$$\ln z \geq \frac{2N_o}{3}$$

$$\frac{\ln z}{z} \leq \max\left(\frac{1}{e}\operatorname{sign}\left(\frac{3}{2}-N_o\right),\frac{2}{3}N_o\exp\left(\frac{-2N_o}{3}\right)\right).$$

Hieraus folgt

$$h^3B_{3n} \leq \max\left(\frac{1}{M}\left(\frac{3A}{2e}\right)^{3/2}\operatorname{sign}\left(\frac{3}{2}-N_o\right),\frac{1}{M}(AN_o)^{3/2}e^{-N_o}\right) = \alpha^3. \tag{9.37}$$

Damit ist die Beziehung (9.29) bewiesen.

<u>Beweis der Beziehung (9.30):</u>

Wegen (9.35) gilt

$$H_{i1}(h) \leq 1+\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2+h^3\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}\right)\int_0^{\infty}u^3dV_i(u). \tag{9.38}$$

Andererseits haben wir

$$H_{i1}(h) = \int_{-\infty}^{\gamma/h}\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}r_2(u)\right)dV_i^y(u). \tag{9.39}$$

Dabei ist $r_2(u)$ wieder durch die Beziehung (9.6) definiert.

Hieraus folgt wegen $EX_i=0$ und Lemma 9.1 die Ungleichung

$$H_{i1}(h) \leqq 1+h^2\sigma_i^2\min\left(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right). \tag{9.40}$$

Weiterhin haben wir mit (9.39) die Abschätzung

$$H_{i1}(h) \geqq 1-\int_{\gamma/h}^{y} dV_i(u)-h\int_{\gamma/h}^{\infty} u\,dV_i(u),$$

d.h.

$$H_{i1}(h) \geqq 1-\frac{1+\gamma}{\gamma^3}h^3\int_0^{\infty}u^3dV_i(u). \tag{9.41}$$

Aus (9.38), (9.40) und (9.41) erhalten wir

$$|H_{i1}(h)-1| \leqq$$

$$\leqq \max\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^3}h^3\beta_{3i},\min\left[h^2\sigma_i^2\min\left(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right),\frac{h^2}{2}\sigma_i^2+h^3\beta_{3i}\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}\right)\right]\right\},$$

d.h. mit (9.37) gilt

$$|H_{i1}(h)-1| \leqq k_3\ . \tag{9.42}$$

Zum Erhalt von (9.42) wurde die LJAPUNOV-Ungleichung ausgenutzt:

$$\sigma_i^2 \leqq \beta_{3i}^{2/3} \leqq \beta_{3n}^{2/3}\ .$$

Da die Abschätzung (9.42) laut Voraussetzung kleiner als 1 ausfällt, können wir $\ln H_{i1}(h)$ folgendermaßen in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}\ln H_{i1}(h) &= \ln\{(H_{i1}(h)-1)+1\} = \\ &= H_{i1}(h)-1 - \tfrac{1}{2}(H_{i1}(h)-1)^2 + \tfrac{1}{3}(H_{i1}(h)-1)^3 - + \ldots \geqq \\ &\geqq H_{i1}(h)-1 - \tfrac{1}{2}(H_{i1}(h)-1)^2\sum_{k=0}^{\infty}|H_{i1}(h)-1|^k = \\ &= H_{i1}(h)-1 - \frac{1}{2}\,\frac{(H_{i1}(h)-1)^2}{1-|H_{i1}(h)-1|}\ ,\end{aligned}$$

d.h.

$$\ln H_{i1}(h) \geqq H_{i1}(h)-1 - \frac{0.5}{1-k_3}(H_{i1}(h)-1)^2. \tag{9.43}$$

Entsprechend der Ungleichung vor (9.42) erhalten wir

$$(H_{i1}(h)-1)^2 \leqq$$

$$\leqq h^4\beta_{3i}^{4/3}\max\left\{h^2\beta_{3i}^{2/3}\,\frac{(1+\gamma)^2}{\gamma^6},\min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma}-2}{\gamma^2}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\left[\frac{1}{2}+h\beta_{3i}^{1/3}\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2}\right)\right]^2\right]\right\},$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}(H_{i1}(h)-1)^2 \leqq$$
$$\leqq h^3 B_{3n} \alpha \max\left\{\frac{(1+\gamma)^2}{\gamma^6}\alpha^2, \min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\left[\frac{1}{2}+\alpha\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]^2\right]\right\}. \tag{9.44}$$

Es folgt weiter aus (9.35):
$$H_{i1}(h)-1-\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2 \geqq -h^3 B_{3i}\max\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\right),\frac{1}{6}\right). \tag{9.45}$$

Damit bekommen wir aus den Ungleichungen (9.36), (9.44) und (9.45)
$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\ln H_{i1}(h)-\frac{1}{2}h^2\sigma_i^2)\right| \leqq$$
$$\leqq h^3 B_{3n}\max\left\{\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\max\left(\frac{1}{6},\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\right)\right)+\right.$$
$$+\frac{0{,}5\alpha}{1-k_3}\max\left[\frac{(1+\gamma)^2\alpha^2}{\gamma^6},\min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\right.\right. \tag{9.46}$$
$$\left.\left.\left.\left(\frac{1}{2}+\alpha\min\left(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right)^2\right]\right]\right\}.$$

Die rechte Seite von (9.46) ist gleich dem Ausdruck $h^3B_{3n}k_{14}$.

Unter Anwendung der Ungleichung
$$|e^u-1| \leqq |u|e^{|u|}$$
erhalten wir die Beziehung (9.30), wenn wir die linke Seite von (9.46) gleich u und k_9 gleich $k_{14}\exp(\alpha^3 k_{14})$ setzen.

<u>Beweis der Beziehung (9.31):</u>

Über die MINKOVSKIsche Ungleichung schätzen wir das dritte absolute Moment der eingeführten konjugierten Verteilungsfunktionen wie folgt ab:
$$B_{3i}(h)\leqq\left\{\left[\int_{-\infty}^{\gamma/h}|u|^3 e^{hu}\frac{dV_i^{y}(u)}{H_{i1}(h)}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\int_{-\infty}^{\gamma/h}|a_i(h)|^3 e^{hu}\frac{dV_i^{y}(u)}{H_{i1}(h)}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^3,$$
d.h.
$$B_{3i}(h) \leqq \left\{\left(\frac{e^{\gamma}}{H_{i1}(h)}B_{3i}\right)^{1/3}+|a_i(h)|\right\}^3. \tag{9.47}$$

Aus (9.41) erhalten wir
$$\frac{1}{H_{i1}(h)} \leqq k_{15}. \tag{9.48}$$

Weiter gilt
$$a_i(h) = \frac{1}{H_{i1}(h)}\int_{-\infty}^{\gamma/h} u\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}r_2(u)\right)dV_i(u), \tag{9.49}$$

wobei $r_2(u)$ durch (9.6) definiert ist. Hieraus folgt mit Lemma 9.1

$$a_i(h) \leqq k_{15}(h\sigma_i^2+h^2\beta_{3i}\min(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma})).$$

Andererseits gilt wegen $EX_i=0$ die Abschätzung

$$a_i(h)=\frac{1}{H_{i1}(h)}\int_{-\infty}^{\gamma/h} u(1+hur_1(u))dV_i(u)\geqq -k_{15}\int_{\gamma/h}^{\infty} udV_i(u)\geqq -k_{15}\frac{h^2}{\gamma^2}\beta_{3i} \;.$$

Damit ergibt sich für $a_i(h)$ die Abschätzung

$$|a_i(h)| \leqq k_{15}\beta_{3i}^{1/3}\max(\frac{\alpha^2}{\gamma^2},\alpha+\alpha^2\min(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma})),$$

d.h.

$$|a_i(h)| \leqq k_{16}\beta_{3i}^{1/3} \;. \tag{9.50}$$

Aus den Ungleichungen (9.47) und (9.50) erhalten wir

$$\beta_{3i}(h) \leqq \beta_{3i}\left\{(e^\gamma k_{15})^{1/3}+k_{16}\right\}^3 = k_{10}\beta_{3i}.$$

Hieraus ergibt sich (9.31)

Beweis der Beziehung (9.32):

Es gilt

$$\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2 =$$

$$= \frac{1}{H_{i1}^2(h)}\left\{H_{i1}(h)\int_{-\infty}^{\gamma/h} u^2e^{hu}dV_i(u)-(\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u))^2-H_{i1}^2(h)\sigma_i^2\right\} \;. \tag{9.51}$$

Wir untersuchen die Differenz

$$H_{i1}(h)\int_{-\infty}^{\gamma/h} u^2e^{hu}dV_i(u)-(\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u))^2-H_{i1}^2(h)\sigma_i^2$$

und verwenden dabei folgende Bezeichnungen

$$\bar{T}_0=\int_{\gamma/h}^{y} dV_i(u),\; T_j=\int_{\gamma/h}^{\infty} u^j dV_i(u),\; j=1,2,3,$$

$$\bar{R}_3=\int_{-\infty}^{0}|u|^3dV_i(u),\; \bar{S}_3=\int_{0}^{\gamma/h} u^3dV_i(u),$$

$$R_{3k}=\int_{-\infty}^{0}|u|^3e^{h\vartheta_k u}dV_i(u),\; 0<\vartheta_k<1,\; k=1,2,3,$$

und

$$S_{3k}=\int_0^{\gamma/h} u^3 r_k(u)\,dV_i(u),\quad k=1,2,3,$$

wobei $r_k(u)$ durch (9.6) definiert ist.

Wegen (9.35) und (9.49) gilt

$$H_{i1}(h)\int_{-\infty}^{\gamma/h} u^2 e^{hu}dV_i(u)-\Big(\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u)\Big)^2-H_{i1}^2(h)\sigma_i^2 =$$

$$=(1-\overline{T}_o-hT_1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2-\frac{h^2}{2}T_2-\frac{h^3}{6}R_{33}+\frac{h^3}{6}S_{33})(\sigma_i^2-T_2-hR_{31}+hS_{31})-$$

$$-(-T_1+h\sigma_i^2-hT_2-\frac{h^2}{2}R_{32}+\frac{h^2}{2}S_{32})^2-$$

$$-(1-\overline{T}_o-hT_1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2-\frac{h^2}{2}T_2-\frac{h^3}{6}R_{33}+\frac{h^3}{6}S_{33})^2\sigma_i^2=$$

$$=\sigma_i^2\quad-\overline{T}_o\sigma_i^2\quad-h\sigma_i^2T_1\quad+\frac{h^2}{2}\sigma_i^4\quad-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2T_2\quad-\frac{h^3}{6}\sigma_i^2R_{33}+$$

$$+\frac{h^3}{6}\sigma_i^2S_{33}-$$

$$-T_2\quad+\overline{T}_oT_2\quad+hT_1T_2\quad-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2T_2\quad+\frac{h^2}{2}T_2^2\quad+\frac{h^3}{6}R_{33}T_2-$$

$$-\frac{h^3}{6}S_{33}T_2-$$

$$-hR_{31}\quad+hR_{31}\overline{T}_o\quad+h^2R_{31}T_1\quad-\frac{h^3}{2}\sigma_i^2R_{31}\quad+\frac{h^3}{2}R_{31}T_2\quad+\frac{h^4}{6}R_{31}R_{33}-$$

$$-\frac{h^4}{6}R_{31}S_{33}+$$

$$+hS_{31}\quad-hS_{31}\overline{T}_o\quad-h^2S_{31}T_1\quad+\frac{h^3}{2}\sigma_i^2S_{31}\quad-\frac{h^3}{2}S_{31}T_2\quad-\frac{h^4}{6}R_{33}S_{31}+$$

$$+\frac{h^4}{6}S_{31}S_{33}-$$

$$-T_1^2\quad-h^2\sigma_i^4\quad-h^2T_2^2\quad-\frac{h^4}{4}R_{32}^2\quad-\frac{h^4}{4}S_{32}^2\quad+$$

$$+2h\sigma_i^2T_1\quad-2hT_1T_2\quad-h^2T_1R_{32}\quad+h^2T_1S_{32}\quad+2h^2\sigma_i^2T_2\quad+h^3\sigma_i^2R_{32}-$$

$$-h^3\sigma_i^2S_{32}\quad-h^3R_{32}T_2\quad+h^3S_{32}T_2\quad+\frac{h^4}{2}R_{32}S_{32}-$$

$$-\sigma_i^2\quad-\sigma_i^2\overline{T}_o^2\quad-h^2\sigma_i^2T_1^2\quad-\frac{h^4}{4}\sigma_i^6\quad-\frac{h^4}{4}\sigma_i^2T_2^2\quad-\frac{h^6}{36}\sigma_i^2R_{33}^2-$$

$$-\frac{h^6}{36}\sigma_i^2S_{33}^2+$$

$$+ 2\sigma_i^2\bar{T}_o + 2h\sigma_i^2T_1 - h^2\sigma_i^4 + h^2\sigma_i^2T_2 + \frac{h^3}{3}\sigma_i^2R_{33} - \frac{h^3}{3}\sigma_i^2S_{33} -$$

$$-2h\sigma_i^2\bar{T}_oT_1 + h^2\sigma_i^4\bar{T}_o - h^2\bar{T}_oT_2\sigma_i^2 - \frac{h^3}{3}\sigma_i^2R_{33}\bar{T}_o + \frac{h^3}{3}\sigma_i^2S_{33}\bar{T}_o +$$

$$+ h^3\sigma_i^4T_1 - h^3\sigma_i^2T_1T_2 - \frac{h^4}{3}\sigma_i^2R_{33}T_1 + \frac{h^4}{3}\sigma_i^2S_{33}T_1 + \frac{h^4}{2}\sigma_i^4T_2 +$$

$$+ \frac{h^5}{6}\sigma_i^4R_{33} - \frac{h^5}{6}\sigma_i^4S_{33} - \frac{h^5}{6}\sigma_i^2R_{33}T_2 + \frac{h^5}{6}\sigma_i^2S_{33}T_2 + \frac{h^6}{18}\sigma_i^2R_{33}S_{33} ,$$

d.h., indem wir die durch Ausmultiplizieren erhaltenen Ausdrücke ordnen, gilt

$$H_{i1}(h) \int_{-\infty}^{\gamma/h} u^2e^{hu}dV_i(u) - \left(\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u)\right)^2 - H_{i1}^2(h)\sigma_i^2 =$$

$$\tag{9.52}$$

$$= -\frac{3}{2}h^2\sigma_i^4 - \frac{1}{4}h^4\sigma_i^6 +$$

$$+\bar{T}_o\sigma_i^2(1+h^2\sigma_i^2) + T_1h\sigma_i^2(3+h^2\sigma_i^2) + T_2(-1+2h^2\sigma_i^2 + \frac{h^4}{2}\sigma_i^4) -$$

$$-hR_{31}(1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2) + h^3\sigma_i^2R_{32} + h^3\sigma_i^2R_{33}(\frac{1}{6} + \frac{h^2}{6}\sigma_i^2) +$$

$$+hS_{31}(1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2) - h^3\sigma_i^2S_{32} - h^3\sigma_i^2S_{33}(\frac{1}{6} + \frac{h^2}{6}\sigma_i^2) -$$

$$- \sigma_i^2\bar{T}_o^2 - T_1^2(1+h^2\sigma_i^2) - \frac{h^2}{2}T_2^2(1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2) -$$

$$- \frac{h^4}{4}R_{32}^2 - \frac{h^6}{36}\sigma_i^2R_{33}^2 - \frac{h^4}{4}S_{32}^2 - \frac{h^6}{36}\sigma_i^2S_{33}^2 -$$

$$-2h\sigma_i^2\bar{T}_oT_1 + \bar{T}_oT_2(1-h^2\sigma_i^2) + \bar{T}_oR_{31}h - \frac{h^3}{3}\sigma_i^2R_{33}\bar{T}_o - hS_{31}\bar{T}_o + \frac{h^3}{3}\sigma_i^2S_{33}\bar{T}_o -$$

$$-hT_1T_2(1+h^2\sigma_i^2) + h^2R_{31}T_1 - h^2R_{32}T_1 - \frac{h^4}{3}\sigma_i^2R_{33}T_1 + h^2S_{31}T_1 + h^2S_{32}T_1 +$$

$$+ \frac{h^4}{3}\sigma_i^2S_{33}T_1 +$$

$$+ \frac{h^3}{2}R_{31}T_2 - h^3R_{32}T_2 + \frac{h^3}{6}R_{33}T_2(1-h^2\sigma_i^2) - \frac{h^3}{2}S_{31}T_2 + h^3S_{32}T_2 -$$

$$- \frac{h^3}{6}S_{33}T_2(1-h^2\sigma_i^2) +$$

$$+ \frac{h^4}{6}R_{31}R_{33} - \frac{h^4}{6}R_{31}S_{33} + \frac{h^4}{2}R_{32}S_{32} - \frac{h^4}{6}R_{33}S_{31} + \frac{h^6}{18}\sigma_i^2R_{33}S_{33} +$$

$$+ \frac{h^4}{6}S_{31}S_{33} .$$

Nun schätzen wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (9.52) nach unten ab und benutzen dabei Lemma 9.1.

$$H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2) \geq$$

$$\geq -\frac{3}{2}h^2\sigma_i^4 - \frac{1}{4}h^4\sigma_i^6 - T_2 - hR_{31}(1+\frac{\alpha^2}{2}) - hS_{32}\alpha^2 - \frac{h}{6}S_{33}\alpha^2(1+\alpha^2) -$$

$$-\sigma_i^2\bar{T}_o^2 - T_1^2(1+\alpha^2) - \frac{h^2}{2}T_2^2(1+\frac{\alpha^2}{2}) - \frac{h^4}{4}R_{32}^2 - \frac{h^4}{36}\alpha^2R_{33}^2 - \frac{h^4}{4}S_{32}^2 -$$

$$-\frac{h^4}{36}\alpha^2S_{33}^2 - 2h\sigma_i^2\bar{T}_oT_1 - \bar{T}_oT_2\max(0,\alpha^2-1) - \frac{h}{3}\alpha^2R_{33}\bar{T}_o - hS_{31}\bar{T}_o -$$

$$-hT_1T_2(1+\alpha^2) - h^2R_{32}T_1 - \frac{h^2}{3}\alpha^2R_{33}T_1 - h^2S_{31}T_1 - h^3R_{32}T_2 -$$

$$-\frac{h^3}{6}R_{33}T_2\max(0,\alpha^2-1) - \frac{h^3}{2}S_{31}T_2 - \frac{h^3}{6}S_{33}T_2 - \frac{h^4}{6}R_{31}S_{33} -$$

$$-\frac{h^4}{6}R_{33}S_{31} \geq$$

$$\geq -h\sigma_i^3(1{,}5\alpha+0{,}25\alpha^3) - \frac{h}{\gamma}T_3 - h\bar{R}_3(1+\frac{\alpha^2}{2}) -$$

$$-h\bar{S}_3\left\{\alpha^2\min(e^\gamma, \frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma}) + \alpha^2(1+\alpha^2)\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})\right\} -$$

$$-T_3^2\left\{\frac{h^6}{\gamma^6}\sigma_i^2 + \frac{h^4}{\gamma^4}(1+\alpha^2) + \frac{h^4}{2\gamma^2}(1+\frac{\alpha^2}{2}) + \frac{2h^6}{\gamma^5}\sigma_i^2 + \frac{h^4}{\gamma^4}\max(0,\alpha^2-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{h^4}{\gamma^3}(1+\alpha^2)\right\} -$$

$$-\frac{h^4}{4}\bar{R}_3^2(1+\frac{\alpha^2}{9}) - h^4\bar{S}_3^2\left\{(\min(\frac{e^\gamma}{2}, \frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}))^2 + \alpha^2(\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}))^2\right\} -$$

$$-2\bar{R}_3T_3\,\frac{1}{2}\left\{\frac{h^4}{3\gamma^3}\alpha^2 + \frac{h^4}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2h^4}{3\gamma^2} + \frac{h^4}{\gamma} + \frac{h^4}{6\gamma}\max(0,\alpha^2-1)\right\} -$$

$$-2\bar{S}_3T_3\,\frac{1}{2}\left\{e^\gamma\frac{h^4}{\gamma^3} + e^\gamma\frac{h^4}{\gamma^2} + e^\gamma\frac{h^4}{2\gamma} + \frac{h^4}{\gamma}\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})\right\} -$$

$$-2\bar{R}_3\bar{S}_3\,\frac{1}{2}\left\{h^4\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}) + e^\gamma\frac{h^4}{6}\right\},$$

d.h.

$$H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2) \geq -h\beta_{3i}k_{17}\,. \tag{9.53}$$

Wir gingen bei der Herleitung der Beziehung (9.53) folgendermaßen vor: Zuerst wurden die Integrale

$\bar{T}_o$, T_j, $j=1,2$, und R_{3k}, S_{3k}, $k=1,2,3$,

durch die Integrale

T_3, $\bar{R}_3$ und $\bar{S}_3$

abgeschätzt, dann wurde die Ungleichung (9.37) ausgenutzt und schließlich wurde k_{17} durch Anwendung der allgemeinen Abschätzung

$$aA^2+bB^2+cC^2+2dAB+2eAC+2fBC \leq (A+B+C)^2 \max(a,b,c,d,e,f)$$

erhalten, wobei A, B und C die entsprechenden Integrale T_3, $\overline{R}_3$ und $\overline{S}_3$ und a, b, c, d, e und f die entsprechenden Koeffizienten bedeuten.
Aus (9.53) folgt mit (9.48) die Abschätzung

$$B_n^2(h)-B_n^2 \geq -k_{15}^2 k_{17} h B_{3n} = -k_{15}^2 k_{17} x L_{3n} B_n^2 \;.$$

Die Größe xL_{3n} wird folgendermaßen abgeschätzt: Es gilt

$$xL_{3n} \leq L_{3n}\sqrt{A \ln \frac{1}{ML_{3n}}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{\frac{\ln z}{z}}$$

mit

$$z=\left(\frac{1}{ML_{3n}}\right)^2 \geq e^{2N_o} \;.$$

Für $\ln z \geq 2N_o$ erhalten wir

$$\frac{\ln z}{z} \leq \max\left(\frac{1}{e}\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}-N_o\right), 2N_o e^{-2N_o}\right) \;.$$

Hieraus folgt

$$xL_{3n} \leq \max\left(\frac{1}{M}\sqrt{\frac{A}{2e}}\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}-N_o\right), \frac{\sqrt{AN_o}}{Me^{N_o}}\right) = \beta \;. \tag{9.54}$$

Damit bekommen wir

$$B_n^2(h)-B_n^2 \geq -k_{15}^2 k_{17} \beta B_n^2 \,,$$

d.h.

$$B_n^2(h) \geq (1-k_{15}^2 k_{17}\beta)B_n^2 = (1-k_4)B_n^2 = k_{11}B_n^2 \;.$$

<u>Beweis der Beziehung (9.33):</u>

Wir schätzen den auf der rechten Seite von (9.52) stehenden Ausdruck nach oben ab. Dabei gehen wir wie bei der Herleitung der Abschätzung (9.53) vor.

$$H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2) \leq$$

$$\leq \sigma_i^2 \overline{T}_o(1+\alpha^2)+h\sigma_i^2 T_1(3+\alpha^2)+T_2\max(0,-1+2\alpha^2+\frac{\alpha^4}{2})+h\alpha^2 R_{32}+$$
$$+\frac{h}{6}R_{33}\alpha^2(1+\alpha^2)+hS_{31}(1+\frac{\alpha^2}{2})+\overline{T}_o T_2+hR_{31}\overline{T}_o+\frac{h}{3}\alpha^2 S_{33}\overline{T}_o+h^2R_{31}T_1+$$
$$+h^2S_{32}T_1+\frac{h^2}{3}\alpha^2 S_{33}T_1+\frac{h^3}{2}R_{31}T_2+\frac{h^3}{6}R_{33}T_2+h^3S_{32}T_2+\frac{h^4}{6}S_{31}S_{33}+$$
$$+\frac{h^3}{6}S_{33}T_2\max(0,\alpha^2-1)+\frac{h^4}{6}R_{31}R_{33}+\frac{h^4}{2}R_{32}S_{32}+\frac{h^4}{18}\alpha^2 R_{33}S_{33} \leq$$

$$\leq T_3\left\{\frac{h^3}{\gamma^3}\sigma_i^2(1+\alpha^2)+\frac{h^3}{\gamma^2}\sigma_i^2(3+\alpha^2)+\frac{h}{\gamma}\max(0,-1+2\alpha^2+\frac{\alpha^4}{2})\right\}+$$

$$+\bar{R}_3(h\alpha^2+\frac{h}{6}\alpha^2(1+\alpha^2))+\bar{S}_3he^{\gamma}(1+\frac{\alpha^2}{2})+T_3^2\frac{h^4}{\gamma^4}+\bar{R}_3^2\frac{h^4}{6}+$$

$$+\bar{S}_3^2h^4e^{\gamma}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})+2T_3\bar{R}_3\frac{1}{2}\left\{\frac{h^4}{\gamma^3}+\frac{h^4}{\gamma^2}+\frac{h^4}{2\gamma}+\frac{h^4}{6\gamma}\right\}+$$

$$+2T_3\bar{S}_3\frac{1}{2}\Bigl\{(\frac{h^4}{3\gamma^3}\alpha^2+\frac{\alpha^2h^4}{3\gamma^2}+\frac{h^4}{6\gamma}\max(0,\alpha^2-1))\min(e^{\gamma},\frac{12e^{\gamma-2}}{\gamma^2})+$$

$$+(\frac{h^4}{\gamma^2}+\frac{h^4}{\gamma})\min(e^{\gamma},\frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma})\Bigr\}+$$

$$+2\bar{R}_3\bar{S}_3\frac{1}{2}\left\{h^4\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma})+\frac{h^4}{3}\alpha^2\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})\right\},$$

d.h. es gilt

$$H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2)\leq k_{18}hB_{3i}\,. \tag{9.55}$$

Aus (9.53) und (9.55) erhalten wir

$$|B_n^2(h)-B_n^2|\leq k_{15}^2\max(k_{17},k_{18})hB_{3n}\,.$$

Die Beziehung (9.33) ergibt sich nun aus der folgenden Umformung:

$$|B_n(h)-B_n|=\frac{|B_n^2(h)-B_n^2|}{B_n(h)+B_n}\leq\frac{hB_{3n}}{B_n}\,\frac{k_{15}^2\max(k_{17},k_{18})}{1+\sqrt{k_{11}}}=k_{12}\frac{hB_{3n}}{B_n}\,.$$

<u>Beweis der Beziehung (9.34):</u>

Es gilt

$$h\sigma_i^2-a_i(h)=\frac{1}{H_{i1}(h)}(h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u))\,.$$

Wir untersuchen die in dieser Gleichung auftretende Differenz:

$$h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u)=$$

$$=h\sigma_i^2(1-\bar{T}_0-hT_1+\frac{h^2}{2}\sigma_i^2-\frac{h^2}{2}T_2-\frac{h^3}{6}R_{33}+\frac{h^3}{6}S_{33})-$$

$$-(-T_1+h\sigma_i^2-hT_2-\frac{h^2}{2}R_{32}+\frac{h^2}{2}S_{32}),$$

d.h. es gilt

$$h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u)=-h\sigma_i^2\bar{T}_0+T_1(1-h^2\sigma_i^2)+hT_2(1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2)+ \tag{9.56}$$

$$+\frac{h^3}{2}\sigma_i^4 - \frac{h^4}{6}\sigma_i^2 R_{33} + \frac{h^4}{6}\sigma_i^2 S_{33} + \frac{h^2}{2}R_{32} - \frac{h^2}{2}S_{32} \,.$$

Wir schätzen den auf der rechten Seite von (9.56) stehenden Ausdruck nach unten ab. Dabei benutzen wir wieder Lemma 9.1.

$$h\sigma_i^2 H_{i1}(h) - \int_{-\infty}^{\gamma/h} u e^{hu}\, dV_i(u) \geqq$$

$$\geqq -h\sigma_i^2\overline{T}_0 - T_1\max(0,\alpha^2-1) - hT_2\max\left(0,\frac{\alpha^2}{2}-1\right) - \frac{h^4}{6}\sigma_i^2 R_{33} - \frac{h^2}{2}S_{32} \geqq$$

$$\geqq -\frac{h^4}{\gamma^3}\sigma_i^2 T_3 - \frac{h^2}{\gamma^2}T_3\max(0,\alpha^2-1) - \frac{h^2}{\gamma}T_3\max\left(0,\frac{\alpha^2}{2}-1\right) - \frac{h^4}{6}\sigma_i^2\overline{R}_3 -$$

$$-h^2\overline{S}_3\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right) \geqq$$

$$\geqq -h^2 B_{3i}\max\left\{\frac{\alpha^2}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^2}\max(0,\alpha^2-1)+\frac{1}{\gamma}\max\left(0,\frac{\alpha^2}{2}-1\right),\frac{\alpha^2}{6},\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt

$$h\sigma_i^2 H_{i1}(h) - \int_{-\infty}^{\gamma/h} u e^{hu}\, dV_i(u) \geqq -h^2 B_{3i} k_{19} \,. \tag{9.57}$$

Entsprechend gilt eine Abschätzung nach oben:

$$h\sigma_i^2 H_{i1}(h) - \int_{-\infty}^{\gamma/h} u e^{hu}\, dV_i(u) \leqq T_1 + hT_2 + \frac{h^3}{2}\sigma_i^4 + \frac{h^4}{6}\sigma_i^2 S_{33} + \frac{h^2}{2}R_{32} \leqq$$

$$\leqq h^2 B_{3i}\left\{\frac{\alpha}{2} + \max\left[\frac{1+\gamma}{\gamma^2},\frac{1}{2},\alpha^2\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\right)\right]\right\},$$

d.h.

$$h\sigma_i^2 H_{i1}(h) - \int_{-\infty}^{\gamma/h} u e^{hu}\, dV_i(u) \leqq h^2 B_{3i} k_{20} \,. \tag{9.58}$$

Aus (9.57) und (9.58) erhalten wir die Abschätzung (9.34):

$$|A_n(h) - hB_n^2| \leqq k_{15}\max(k_{19},k_{20})h^2 B_{3n} = k_{13}h^2 B_{3n} \,.$$

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Beziehungen (9.29) bis (9.34) können wir jetzt die Ungleichung (9.28) weiter abschätzen:

$$\sum_{i=1}^{4} I_i \leqq \frac{2L_0 k_8 k_{10}}{k_{11}^{3/2}}\,\frac{B_{3n}}{B_n^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + 2k_1k_8k_{13}h^2\,\frac{B_{3n}}{B_n}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) +$$

$$+2k_2k_8k_{12}h\,\frac{B_{3n}}{B_n^2}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + k_1k_9h^3B_{3n}\,\frac{1}{x}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq \left\{\frac{2L_0k_8k_{10}}{k_{11}^{3/2}}\max\left[\left(\frac{3}{e}\right)^{1,5}\operatorname{sign}(3-K^2),K^3\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right] +\right.$$

$$+ 2k_2k_8k_{12}\max\left[\left(\frac{4}{e}\right)^2 \operatorname{sign}(4-K^2), K^4\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right] +$$

$$+ (2k_1k_8k_{13}+k_1k_9)\max\left[\left(\frac{5}{e}\right)^{2,5} \operatorname{sign}(5-K^2), K^5\exp\left(\frac{-K^2}{2}\right)\right]\Bigg\} \frac{L_{3n}}{x^3} ,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{4} I_i \leqq k_7 \frac{L_{3n}}{x^3} . \tag{9.59}$$

Zum Erhalt der Beziehung (9.59) wurde in der letzten Abschätzung die allgemeine Ungleichung

$$e^{-a} \leqq \left(\frac{b}{e}\right)^b a^{-b} , \quad a>0, \ b>0,$$

benutzt, wobei wieder $h=\frac{x}{B_n}$ gesetzt wurde.

Jetzt kommen wir zur weiteren Auswertung der Abschätzung (9.27). Wir schätzen den Nenner der dort auftretenden Summe ab:

$$R_k(y,h) = \int_{-\infty}^{y} e^{hu}dV_k(u)+1-V_k(y) =$$

$$= 1-h\int_{y}^{\infty} u\,dV_k(u)+ \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{y} u^2 r_2(u)\,dV_k(u) \geqq$$

$$\geqq 1- \frac{h}{y^2}\beta_{3i} = 1- \frac{A^2\beta_{3i}}{xB_n^3} \geqq 1- \frac{A^2}{K^4}\, h^3B_{3n} ,$$

also ist wegen (9.37)

$$R_k(y,h) \geqq 1-\alpha^3 \frac{A^2}{K^4} . \tag{9.60}$$

Die Größe r_2 ist durch die Beziehung (9.6) definiert. Weiterhin wurde wieder

$$h=\frac{x}{B_n} \quad \text{und} \quad y=\frac{xB_n}{A}$$

gesetzt. Wir wenden uns der Abschätzung des Ausdrucks

$$\exp\left(-hxB_n+\sum_{i=1}^{n} \ln R_i(y,h)\right) \sum_{k=1}^{n} H_{k2}(y,h)$$

zu. Entsprechend der Ungleichung (9.5) erhalten wir

$$H_{k2}(y,h) \leqq \beta_{3i} \frac{e^{hy}}{y^3}K_3(\gamma) . \tag{9.61}$$

Um die Summe $\sum_{i=1}^{n} \ln R_i(y,h)$ abzuschätzen, zerlegen wir $R_i(y,h)$ wieder in zwei Summanden:

$$R_i(y,h) = \int_{-\infty}^{\delta/h} e^{hu} dV_i^y(u) + \int_{\delta/h}^{y} e^{hu} dV_i^y(u) = \tilde{H}_{i1}(h) + \tilde{H}_{i2}(y,h) .$$

Bei dieser Zerlegung tritt jetzt anstatt γ ein anderer Parameter δ auf. Wie in (9.5) und (9.61) gilt auch hier

$$\tilde{H}_{i2}(y,h) \leqq B_{3i} \frac{e^{hy}}{y^3} K_3(\delta) . \tag{9.62}$$

Entsprechend der nach (9.15) durchgeführten Überlegungen wählen wir den Parameter h derart, daß nach Durchführung der Summation in (9.62) für

$$h \geqq \frac{x}{B_n}$$

die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{H}_{i2}(y,h) \leqq B_{3n} \frac{e^{hy}}{y^3} K_3(\delta) = 1 \tag{9.63}$$

gilt. Offensichtlich wurde zum Erhalt der Beziehung

$$B_{3n} \frac{e^{hy}}{y^3} K_3(\delta) = 1$$

der Parameter h gleich

$$h_3(y) = \frac{1}{y} \ln \frac{y^3}{B_{3n} K_3(\delta)} \geqq \frac{x}{B_n} \tag{9.64}$$

gewählt. Indem wir δ_o als kleinste positive Lösung der Gleichung

$$K_3(\delta_o) = M \left(\frac{K}{A}\right)^3 , \quad 0 < \delta_o \leqq 3, \tag{9.65}$$

bezeichnen, die unter der Voraussetzung

$$M > \left(\frac{A}{K}\right)^3$$

existiert, ergibt sich für $\delta = \delta_o$ die Gültigkeit der Ungleichung (9.64):

Aus (9.65) folgt also

$$\frac{1}{ML_{3n}} = \frac{K^3}{A^3 K_3(\delta_o) L_{3n}} \leqq \frac{x^3}{A^3 K_3(\delta_o) L_{3n}} .$$

Andererseits gilt unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.2

$$\frac{1}{ML_{3n}} \geqq e^{N_o} > 1$$

und

$$\frac{x}{B_n} \leqq \frac{x}{B_n} \frac{\ln \frac{x^3}{A^3 K_3(\delta_o) L_{3n}}}{\ln \frac{1}{ML_{3n}}} \leqq \frac{x}{B_n} \frac{A}{x^2} \ln \frac{x^3}{A^3 K_3(\delta_o) L_{3n}} = h_3(y).$$

Damit ist also (9.64) erfüllt. Entsprechend (9.36) gilt für $h = \frac{x}{B_n}$

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{H}_{i1}(h) - 1 - \frac{h^2}{2} \sigma_i^2) \leqq \alpha^3 \min(\frac{e^{\delta_o}}{6}, \frac{2e^{\delta_o - 2}}{\delta_o^2})$$

und wegen (9.64) ist in (9.63)

$$\tilde{H}_{i2}(y,h) \leqq \tilde{H}_{i2}(y, h_3(y)).$$

Somit erhalten wir für $h = \frac{x}{B_n}$ mit Hilfe der Beziehungen (9.61) und (9.63)

$$\exp(-hxB_n + \sum_{i=1}^{n} \ln R_i(y,h)) \sum_{k=1}^{n} H_{k2}(y,h) \leqq$$

$$\leqq \exp\left\{-hxB_n + \frac{h^2}{2} B_n^2 + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{H}_{i1}(h) - 1 - \frac{h^2}{2} \sigma_i^2) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{H}_{i2}(y, h_3(y))\right\} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n} H_{k2}(y,h) \leqq$$

$$\leqq \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \alpha^3 \min(\frac{e^{\delta_o}}{6}, \frac{2e^{\delta_o - 2}}{\delta_o^2}) + 1 + hy\right\} A^3 K_3(\gamma) \frac{L_{3n}}{x^3} \leqq$$

$$\leqq \exp\left\{-K^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{A}) + 1 + \gamma + \alpha^3 \min(\frac{e^{\delta_o}}{6}, \frac{2e^{\delta_o - 2}}{\delta_o^2})\right\} (\frac{3A}{e\gamma})^3 \frac{L_{3n}}{x^3},$$

falls $A > 2$ ist.

Mit der Ungleichung (9.60) ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$\left| \int_{xB_n}^{\infty} dF_n^y(u) - \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\Phi}_{nh}(u) \right| \leqq k_6 \frac{L_{3n}}{x^3}. \tag{9.66}$$

Die Konstante L_2 des Satzes 4.4.2 bekommen wir, indem wir die Abschätzungen (9.26), (9.59) und (9.66) entsprechend der Ungleichung (9.25) zusammenfassen. Damit ist Satz 4.4.2 bewiesen.

6. Zum Beweis der Sätze 4.4.3 bis 4.4.5

Im Vergleich zum Beweis des Satzes 4.4.2 treten nur dort Änderungen ein, wo im Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen im Beweis des Satzes 4.4.2 das individuelle Moment β_{3i} durch B_{3m} abgeschätzt wurde. Mit

$$EX_1^2 = 1$$

gilt im Satz 4.4.3 wegen der LJAPUNOVschen Ungleichung die Beziehung

$$ß_{3,1} \geqq 1,$$

d.h. entsprechend (9.54) ist

$$h^3 ß_{3,1} \leqq h^3 ß_{3,1}^3 = x^3 L_{3n}^3 \leqq ß^3 .$$

Damit können wir in gewissen Abschätzungen den Parameter α durch ß ersetzen, wobei sich genau die im Unterpunkt 2) des Abschnittes 4.5 angegebenen Änderungen im Vergleich zum Beweis des Satzes 4.4.2 ergeben.

Zum Beweis des Satzes 4.4.4:
Wir gehen von der Abschätzung (9.25) aus. Entsprechend der Bemerkung 3) nach Satz 4.2.1 erhalten wir für den ersten Summanden auf der rechten Seite der Beziehung (9.25) die Abschätzung

$$\left| F_n^y(xB_n) - F_n(xB_n) \right| \leqq 1 - \prod_{i=1}^{n} v_i(y), \quad y = \frac{xB_n}{A} .$$

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (9.25) ergibt sich aus der vor der Ungleichung (9.66) durchgeführten Abschätzung die Beziehung

$$\left| \int_{xB_n}^{\infty} dF_n^y(u) - \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\emptyset}_{nh}(u) \right| \leqq \frac{L_{3n}}{x^3} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{2}{A}\right)\right\} k_{21} .$$

Schließlich erhalten wir entsprechend der vor (9.59) betrachteten Ungleichung

$$\left| \int_{xB_n}^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\emptyset}_{nh}(u) - \int_{x}^{\infty} d\emptyset(u) \right| \leqq \frac{L_{3n}}{x^3} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{2}{A}\right)\right\} k_{22} .$$

Zum Beweis des Satzes 4.4.5:
Wir gehen wie im Beweis des Satzes 4.4.2 vor und müssen dabei folgende Ergänzungen machen:
Unter der Beachtung der vorausgesetzten x-Zone erhalten wir aus (9.26)

$$k_5 \frac{L_{3n}}{x^3} \leqq \frac{k_5}{K} \frac{L_{3n}}{x^2} = k_{23} \frac{L_{3n}}{x^2} .$$

Entsprechend ergibt sich aus (9.66)

$$k_6 \frac{L_{3n}}{x^3} \leqq \frac{k_6}{K} \frac{L_{3n}}{x^2} = k_{24} \frac{L_{3n}}{x^2} .$$

Indem wir schließlich die zu (9.59) führende Ungleichung nicht nach x^{-3} sondern nur nach x^{-2} abschätzen, ergibt sich, daß

$$\sum_{i=1}^{4} I_i \leq k_{25} \frac{L_{3n}}{x^2}$$

ist. Dabei sind die Konstanten k_{23} bis k_{25} die im Unterpunkt 4) des Abschnittes 4.5 definierten Konstanten.

Kapitel X

Beweis der Abschätzungen der Abweichung der Summenverteilungsfunktion von der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung unter Voraussetzung der Existenz einseitiger Momente

1. Zum Beweis der Sätze 5.2.1 und 5.2.2 und der Folgerung 5.2.1

Zum Beweis des Satzes 5.2.1:

Der Beweis verläuft entsprechend dem Beweis des Satzes 4.2.2, wobei wir B_{3n} durch G_{3n} ersetzen müssen. Die Definition von P_o ist hier die gleiche wie im Satz 4.2.2, so daß der Beweis der ersten Abschätzung des Satzes 5.2.1 genau wie der Beweis der entsprechenden Aussage des Satzes 4.2.2 geführt werden kann.

Die zweite Abschätzung des Satzes 5.2.1 gilt ebenfalls unter der Bedingung (9.21), die wie folgt nachgewiesen wird: (mit Λ_{3n} anstelle von L_{3n})

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^3}{8K_3 \Lambda_{3n}} \min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2}, \frac{e^{\varepsilon - 1}}{\varepsilon}\right) &\leq \left\{\frac{1}{A} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{M_o}{K_3}\right)^{2/3} \frac{1}{e}\right\} \min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2}, \frac{e^{\varepsilon - 1}}{\varepsilon}\right) \leq \\ &\leq \left\{\frac{1}{A_o} + \frac{3}{8e} K_3^{-2/3}\right\} \min\left(\frac{e^{\varepsilon}}{2}, \frac{e^{\varepsilon - 1}}{\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

wobei $M_o = 1$ gesetzt wurde.

Zum Beweis der Folgerung 5.2.1:

Es gilt

$$\frac{Z' \Lambda_{3n}}{x^3} = \frac{Z'}{x^3 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} \frac{2 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}} \leq \frac{\frac{2}{e} Z'}{x^3 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} = \frac{Z}{x^3 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} .$$

Ausgehend von der Folgerung 4.2.3 haben wir entsprechend

$$Z' > 8(1+e),$$

d.h.

$$Z > \frac{16}{e}(1+e) .$$

Im Falle $x > \max\left(K, \sqrt{A_o(\varepsilon_o') \ln \frac{1}{\Lambda_{3n}}}\right)$ und $\frac{1}{\Lambda_{3n}} > P_o(\varepsilon_o)$ bekommen wir

$$\frac{Z''\Lambda_{3n}}{x^3} = \frac{Z''}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, 2\Lambda_{3n}\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}} \leqq$$

$$\leqq \frac{Z''}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, 2\max(\tfrac{1}{e}\operatorname{sign}(e-P_o), \frac{\ln P_o}{P_o}) =$$

$$= \frac{Z}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \;.$$

Auf Grund der Folgerung 4.2.3 muß

$$Z'' > 8(1+e)$$

gewählt werden, d.h. in diesem Falle ist

$$Z > 16(1+e)\max(\tfrac{1}{e}\operatorname{sign}(e-P_o), \frac{\ln P_o}{P_o}) .$$

Zum Beweis des Satzes 5.2.2:
Ausgehend von (9.22) haben wir

$$1-\phi(x) \leqq \frac{1}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, \frac{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 x^2\exp(\frac{-x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \leqq$$

$$\leqq \frac{2\ln P}{\sqrt{2\pi}x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, x^2\exp(\frac{-x^2}{2}) \leqq$$

$$\leqq \frac{U_1''}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \;.$$

Entsprechend ergibt sich die zweite Abschätzung des Satzes 5.2.2:

$$1-\phi(x) \leqq \frac{1}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, \frac{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 x^2\exp(\frac{-x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, \frac{2}{\sqrt{2\pi}A}\, x^4\exp(\frac{-x^2}{2}) \leqq$$

$$\leqq \frac{U_2''}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \;.$$

2. Beweis der Sätze 5.2.4 und 5.2.5

Wir gehen von der Ungleichung des Satzes 5.2.3 aus und erhalten für

$$\tau_i = \infty \quad \text{und} \quad t_i = H_n$$

die Beziehungen

$$\frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} u^3 dV_i(u) \leq \Lambda_{3n} \, ,$$

$$\frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^{n} \int_{-H_n}^{0} |u|^3 dV_i(u) \leq \frac{H_n}{B_n} = \frac{1}{\left(\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2\right)^{3/2}}$$

und

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u) \leq \frac{1}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \, .$$

Hieraus folgt

$$\left| F_n(xB_n) - \Phi(x) \right| \leq \frac{\overset{L_0}{(6)}}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \left\{ \frac{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}} + \frac{1}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}} + 1 \right\} \, . \qquad (10.1)$$

Im Falle

$$0 < \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 \leq D_0$$

ist die Aussage des Satzes 5.2.4 offensichtlich, deshalb untersuchen wir (10.1) für den Fall

$$\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 > D_0 \, .$$

Es sei

$$z = \ln\frac{1}{\Lambda_{3n}} \quad \text{und} \quad z > \frac{D_0}{2} \, .$$

Um (10.1) weiter abzuschätzen, bestimmen wir das Maximum der Funktion

$$f(z) = \overset{L_0}{6}\left(2ze^{-z} + \frac{1}{\sqrt{2z}} + 1\right) \text{ für } z > \frac{D_0}{2} \, .$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(u) = \exp(\frac{-u^2}{2}) u^3 (-u^2 + 2) \, .$$

Es gilt

$$h(0) = h(\sqrt{2}) = 0, \text{ d.h. } h(u) > 0 \text{ für } 0 < u < \sqrt{2} \, .$$

Wir suchen das Maximum von $h(u)$ im Intervall $0 < u < \sqrt{2}$:

Für $u^2 = 1$ oder $u^2 = 6$ oder $u = 0$ gilt

$$h'(u) = \exp(\frac{-u^2}{2})(u^6 - 7u^4 + 6u^2) = \exp(\frac{-u^2}{2}) u^2 (u^4 - 7u + 6) = 0 \, .$$

Für u=1 ist

$$h''(u)=\exp(\frac{-u^2}{2})(-u^7+13u^5-34u^3+12u)<0 .$$

Damit gilt im Intervall $0<u<\sqrt{2}$, daß

$$h(u) \leqq h(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}<1$$

ist. Hieraus erhalten wir

$$\exp(\frac{-u^2}{2})(-u^3+2u)<\frac{1}{u^2} \text{, d.h. } \exp(\frac{-u^2}{2})(-u^3+2u)-\frac{1}{u^2}<0.$$

Die letzte Ungleichung bedeutet, daß die erste Ableitung der Funktion

$$g(u)=u^2\exp(\frac{-u^2}{2}) + \frac{1}{u}$$

im Intervall $0<u<\sqrt{2}$ negativ ist, d.h. g(u) ist hier streng monoton fallend. Mit

$$u=\sqrt{2z} \text{ , } 0<z<1,$$

folgt hieraus, daß f(z) für $0<z<1$ streng monoton fallend ist. Weiterhin sind für $z \geqq 1$ sowohl

$$ze^{-z} \quad \text{als auch} \quad \frac{1}{\sqrt{2z}}$$

streng monoton fallend. Damit ist f(z) für alle $z>0$ streng monoton fallend und es gilt

$$f(z) \leqq f(\frac{D_o}{2}) \quad \text{für} \quad z \geqq \frac{D_o}{2} .$$

Da (10.1) durch

$$\frac{D_o}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}$$

abgeschätzt werden soll, wählen wir D_o als Lösung der Gleichung

$$f(\frac{D_o}{2}) = D_o$$

und erhalten

$$D_o = 8,70576 .$$

für $L_o = 4,769$ folgt
$D = 7,39626$

7.1.80 Ra.

Zum Beweis des Satzes 5.2.5:
Wir setzen jetzt im Satz 5.2.3

$$t_i = \tau_i = H_n$$

und erhalten mit entsprechenden Überlegungen wie im Beweis des Satzes 5.2.4 die absolute Konstante D_1 als Lösung der Gleichung

$$D_1 = 6(\frac{1}{\sqrt{D_1}}+1), \; D_1> 0.$$

3. Beweis des Satzes 5.2.6

Wir verwenden die im Beweis des Satzes 4.4.2 eingeführten Bezeichnungen und setzen

$$h = \frac{x}{B_n} \quad \text{und} \quad y = \frac{\gamma}{h}.$$

Es gilt die Abschätzung (9.25), wobei der dort auftretende zweite Summand auf Grund der Wahl von y identisch Null ist.

Unter Benutzung des Satzes 2.2.8 erhalten wir ganz analog zur Beziehung (9.26) die Ungleichungen

$$\left|F_n(xB_n)-F_n^y(xB_n)\right| \leqq \frac{\Gamma_{3n}}{y^3} \leqq \frac{x^3}{\gamma^3}\Lambda_{3n} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{x^3 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\,\frac{2}{A\gamma^3}\,\frac{(A\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}})^4}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}},$$

d.h.

$$\left|F_n(xB_n)-F_n^y(xB_n)\right| \leqq \frac{k_5'}{x^3\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}. \tag{10.2}$$

Dabei ist die Konstante k_5' im Abschnitt 5.3 definiert.

Weiterhin gilt auch in diesem Fall die Beziehung (9.28). Zur näheren Untersuchung dieser Beziehung benutzen wir die folgenden Ungleichungen: Wenn wir den positiven Parameter h

$$h = \frac{x}{B_n}$$

wählen, so gilt

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp(\frac{-x^2}{2}) \leqq k_8', \tag{10.3}$$

falls $y = \frac{\gamma}{h}$ ist,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp(\frac{-x^2}{2})-1\right| \leqq k_9'\,\frac{x^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}, \tag{10.4}$$

falls $y = \frac{\gamma}{h}$ und $k_3' < 1$ ist, k_3' s. (10.12)

$$B_{3n}(h) \leqq k_{10}'\,\frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}, \tag{10.5}$$

falls $k_3' < 1$ ist,

$$B_n^2(h) \geqq k_{11}'\, B_n^2, \tag{10.6}$$

falls $y=\frac{\gamma}{h}$ und $k_3'<1$ ist,

$$|B_n(h)-B_n| \leq k_{12}' \frac{B_n}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}, \tag{10.7}$$

falls $y=\frac{\gamma}{h}$, $k_3'<1$ und $k_4'<1$ ist,

$$|A_n(h)-xB_n| \leq k_{13}' \frac{xB_n}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}, \tag{10.8}$$

falls $y=\frac{\gamma}{h}$ und $k_3'<1$ ist.

Die Beziehungen (10.3) bis (10.8) werden wir an dieser Stelle in starker Anlehnung an die Beweise der entsprechenden Abschätzungen (9.29) bis (9.34) herleiten.

Beweis der Beziehung (10.3):

Entsprechend (9.35) und (9.36) gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(H_{i1}(h)-1-\tfrac{1}{2}h^2\sigma_i^2) \leq h^3\Gamma_{3n}\min(\tfrac{e^{\gamma}}{6},\tfrac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}). \tag{10.9}$$

Wir kommen zur Abschätzung von $h^3\Gamma_{3n}$:

Es gilt

$$h^3\Gamma_{3n} \leq x^3\Lambda_{3n} \leq \Lambda_{3n}(A\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}})^{3/2} = (\tfrac{3A}{2})^{3/2}(\tfrac{\ln z}{z})^{3/2}$$

mit

$$z=(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^{2/3} \geq \exp(\tfrac{2}{3}N_0) .$$

Genauso wie (9.37) erhalten wir auch hier

$$h^3G_{3n} \leq \alpha^3. \tag{10.10}$$

Beweis der Beziehung (10.4):

Es gelten die Abschätzungen (9.38) und (9.40). Wegen $y=\frac{\gamma}{h}$ gilt entsprechend (9.41) die Ungleichung

$$H_{i1}(h)-1 \geq -\frac{h^3}{\gamma^2}\int_0^{\infty}u^3dV_i(u). \tag{10.11}$$

Damit erhalten wir mit (10.10) und

$$\sigma_i^2 \leq g_{3i}^{2/3} \leq G_{3n}^{2/3}$$

die Beziehung

$$\left|H_{i1}(h)-1\right| \leqq \max\left\{\frac{h^3}{\gamma^2}G_{3n}, \min\left[h^2G_{3n}^{2/3}\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{h^2}{2}G_{3n}^{2/3}+h^3G_{3n}\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right]\right\},$$

d.h.

$$\left|H_{i1}(h)-1\right| \leqq k_3' \ . \tag{10.12}$$

Wegen $k_3'<1$ können wir die Abschätzung (9.43) verwenden.

Es gilt weiterhin

$$(H_{i1}(h)-1)^2 \leqq h^4 g_{3i}^{4/3}\max\left\{\frac{h^2}{\gamma^4}g_{3i}^{2/3}, \min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{1}{2}+hg_{3i}^{1/3}\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right)^2\right]\right\},$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}(H_{i1}(h)-1)^2 \leqq$$
$$\leqq h^3G_{3n}\alpha\max\left\{\frac{\alpha^2}{\gamma^4}, \min\left[\min\left(\frac{e^{2\gamma}}{4},\frac{e^{2\gamma-2}}{\gamma^2}\right),\left(\frac{1}{2}+\alpha\min\left(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}\right)\right)^2\right]\right\} . \tag{10.13}$$

Es folgt weiter aus (9.35)

$$H_{i1}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2 \geqq -\left(\frac{h^3}{\gamma^2}+\frac{h^3}{2\gamma}\right)\int_{\gamma/h}^{\infty}u^3dV_i(u)-$$
$$-\int_{-\infty}^{0}\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}-e^{hu}\right)dV_i(u) \geqq$$
$$\geqq -h^3g_{3i}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\right)-\frac{h^3}{6}H_n\int_{-H_n}^{0}u^2dV_i(u)-\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{-H_n}u^2dV_i(u) \ .$$

Damit haben wir

$$\sum_{i=1}^{n}\left(H_{i1}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2\right) \geqq -h^3G_{3n}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\right)-\frac{h^3}{6}H_nB_n^2-\frac{h^2}{2}\frac{B_n^2}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2},$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(H_{i1}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2\right) \geqq$$
$$\geqq -\frac{x^2}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2}\left\{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\right)x\Lambda_{3n}\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2+\frac{1}{6}\frac{x}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2}}+\frac{1}{2}\right\} . \tag{10.14}$$

Es gilt

$$\frac{x}{\sqrt{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}} \leq \sqrt{\frac{A}{2}}$$

und

$$x\Lambda_{3n}\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 \leq \sqrt{\frac{A}{2}}\,\frac{(\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2)^{3/2}}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}} = 2\sqrt{A}\,(\frac{3}{2})^{3/2}(\frac{\ln z}{z})^{3/2}$$

mit

$$z=(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^{2/3} \geq \exp(\frac{2}{3}N_o) \ .$$

Entsprechend (10.10) folgt hieraus

$$x\Lambda_{3n}\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2 \leq \frac{2}{A}\alpha^3 \ .$$

Somit erhalten wir aus (10.9), (10.13) und (10.14) die Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\ln H_{i1}(h)-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2)\right| \leq k_{14}'\,\frac{x^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \ . \tag{10.15}$$

Mit

$$k_9' = k_{14}'\exp(\frac{A}{2}k_{14}')$$

ergibt sich (10.4).

$$\left(\int_{-\infty}^{\gamma/h}|u|\,e^{hu}\,\frac{dV_i(u)}{H_{i1}(h)}\right)^3$$

19.5.80

<u>Beweis der Beziehung (10.5):</u>

Es gilt

2

$$B_{3n}(h) \leq 4\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\gamma/h}|u|^3e^{hu}\,\frac{dV_i(u)}{H_{i1}(h)}+|a_i(h)|^3\right\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\gamma/h}|u|^3e^{hu}dV_i(u) \leq e^{\gamma}G_{3n}+H_nB_n^2+\frac{1}{he}\,\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \ ,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\gamma/h}|u|^3e^{hu}dV_i(u) \leq \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\left(\frac{2}{A}e^{\gamma}\alpha^3+\sqrt{\frac{A}{2}}+\frac{1}{e}\right) \ . \tag{10.16}$$

Aus (9.41) folgt mit $y=\frac{\gamma}{h}$:

$$\frac{1}{H_{i1}(h)} \leq \frac{1}{1-\frac{\alpha^3}{\gamma^2}} \ ,$$

d.h.

$$\frac{1}{H_{i1}(h)} \leqq k'_{15} \,. \tag{10.17}$$

Wir kommen zur Abschätzung von $a_i(h)$:

$$\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u) = \int_{-\infty}^{\gamma/h} u(1+hur_1(u))dV_i(u) \geqq -\int_{\gamma/h}^{\infty} udV_i(u) \geqq -\frac{h^2}{\gamma^2}\gamma_{3i},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h^2}{\gamma^2}\gamma_{3i}\right)^3 \leqq \frac{h^6}{\gamma^6}G_{3n}^3 = \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{1}{\gamma^6}\frac{2x^7\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}}{(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^3} \leqq$$

$$\leqq \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{1}{\gamma^6}\frac{2}{A}\left\{\frac{(A\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}})^{1,5}}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}}\right\}^3,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h^2}{\gamma^2}\gamma_{3i}\right)^3 \leqq \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{2}{A\gamma^6}\alpha^9 \,. \tag{10.18}$$

Andererseits haben wir

$$\int_{-\infty}^{\gamma/h} ue^{hu}dV_i(u) = \int_{-\infty}^{\gamma/h} u\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}r_2(u)\right)dV_i(u) \leqq$$

$$\leqq h\sigma_i^2+h^2\gamma_{3i}\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right) \leqq$$

$$\leqq hg_{3i}^{2/3}\left(1+\alpha\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right)\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} h^3g_{3i}^2 \leqq h^3G_{3n}^2 \leqq \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{2}{A}\left\{\frac{(A\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}})^{1,5}}{\frac{1}{\Lambda_{3n}}}\right\}^2 \leqq \frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{2}{A}\alpha^6.$$

Hieraus und aus (10.16) bis (10.18) erhalten wir somit

$$B_{3n}(h) \leqq 4\Big\{k'_{15}\left(\frac{2}{A}e^\gamma\alpha^3+\sqrt{\frac{A}{2}}+\frac{1}{e}\right)+ \tag{10.19}$$

$$+k'^3_{15}\max\left\{\frac{2}{A\gamma^6}\alpha^9,\frac{2}{A}\alpha^6\left[1+\alpha\min\left(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}\right)\right]^3\right\}\Big\}\frac{B_n^3}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2},$$

d.h. es gilt die Beziehung (10.5).

<u>Beweis der Beziehung (10.6):</u>

Wir gehen von der Beziehung (9.51) aus und setzen in (9.52)

$$R_{3k} = R'_{3k} + \frac{k}{h}R''_{3k}\ ,\ \bar{R}_3 = \bar{R}'_3 + \frac{k}{h}\bar{R}''_3\ ,$$

mit

$$R'_{3k} = \int_{-H_n}^{0} |u|^3 e^{h\vartheta_k u} dV_i(u),\ R''_{3k} = \int_{-\infty}^{-H_n} u^2(1-e^{h\vartheta'_k u})dV_i(u),$$

und

$$0 < \vartheta_k, \vartheta'_k < 1,\ k=1,2,3\ ,$$

sowie

$$\bar{R}'_3 = \int_{-H_n}^{0} |u|^3 dV_i(u),\ \bar{R}''_3 = \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\ .$$

Wir erhalten entsprechend der vor (9.53) durchgeführten Abschätzung mit

$$\bar{T}_0 = 0$$

die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
& H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h)-\sigma_i^2) \geq \\
& \geq - h\sigma_i^3(1{,}5\alpha+0{,}25\alpha^3) - \frac{h}{\gamma}T_3 - (h\bar{R}'_3+\bar{R}''_3)(1+\frac{\alpha^2}{2}) - \\
& - h\bar{S}_3\left\{\alpha^2\min(e^\gamma, \frac{2e^\gamma-1}{\gamma}) + \alpha^2(1+\alpha^2)\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2})\right\} - \\
& - T_3^2\left\{\frac{h^4}{\gamma^4}(1+\alpha^2) + \frac{h^4}{2\gamma^2}(1+\frac{\alpha^2}{2}) + \frac{h^4}{\gamma^3}(1+\alpha^2)\right\} - \frac{h^2}{4}(h\bar{R}'_3+2\bar{R}''_3)^2 - \\
& - \frac{h^2}{36}\alpha^2(h\bar{R}'_3+3\bar{R}''_3)^2 - h^4\bar{S}_3^2\left\{(\min(\frac{e^\gamma}{2}, \frac{e^\gamma-1}{\gamma}))^2 + \alpha^2(\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}))^2\right\} - \\
& - T_3(h\bar{R}'_3+2\bar{R}''_3)(\frac{h^3}{\gamma^2} + \frac{h^3}{\gamma}) - T_3(h\bar{R}'_3+3\bar{R}''_3)\left\{\frac{h^3}{3\gamma^2}\alpha^2 + \frac{h^3}{6\gamma}\max(0,\alpha^2-1)\right\} - \\
& - 2\bar{S}_3T_3\ \frac{1}{2}\left\{e^\gamma\frac{h^4}{\gamma^2} + e^\gamma\frac{h^4}{2\gamma} + \frac{h^4}{\gamma}\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2})\right\} - \\
& - h^3\bar{S}_3\left\{(h\bar{R}'_3+\bar{R}''_3)\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}) + (h\bar{R}'_3+3\bar{R}''_3)\frac{e^\gamma}{6}\right\} \geq \\
& \geq - hg_{3i}\Big\{\alpha(1{,}5+0{,}25\alpha^2) + \\
& \qquad + \max\left[\frac{1}{\gamma}, \alpha^2\min(e^\gamma, \frac{2e^\gamma-1}{\gamma}) + \alpha^2(1+\alpha^2)\min(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2})\right]\Big\} - \\
& - \left[hH_n\sigma_i^2 + \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\right](1+\frac{\alpha^2}{2}) -
\end{aligned}
$$

$$- h^4 g_{3i}^2 \max\Big\{ \frac{1+\alpha^2}{\gamma^4} + \frac{1+\alpha^2}{\gamma^3} + \frac{2+\alpha^2}{4\gamma^2}, \frac{e^\gamma}{2}\Big(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma}\Big) + \frac{1}{2\gamma}\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma - 2}{\gamma^2}\Big),$$

$$\Big(\min\Big(\frac{e^\gamma}{2}, \frac{e^\gamma-1}{\gamma}\Big)\Big)^2 + \alpha^2\Big(\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big)\Big)^2 \Big\} -$$

$$- h^3 g_{3i} \max\Big\{ \Big(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\Big)\Big[hH_n \sigma_i^2 + 2\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big] +$$

$$+ \Big(\frac{\alpha^2}{3\gamma^2} + \frac{1}{6\gamma}\max(0, \alpha^2 - 1)\Big)\Big[hH_n \sigma_i^2 + 3\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big],$$

$$\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big)\Big[hH_n\sigma_i^2 + \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big] +$$

$$+ \frac{e^\gamma}{6}\Big[hH_n \sigma_i^2 + 3\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{h^2}{36}\alpha^2\Big[hH_n\sigma_i^2 + 3\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big]^2 - \frac{h^2}{4}\Big[hH_n\sigma_i^2 + 2\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\Big]^2 .$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h) - \sigma_i^2) \geqq$$

$$\geqq -hG_{3n}\Big\{\alpha(1{,}5 + 0{,}25\alpha^2) + \tag{10.20}$$

$$+ \max\Big[\frac{1}{\gamma}, \alpha^2 \min\Big(e^\gamma, \frac{2e^\gamma - 1}{\gamma}\Big) + \alpha^2(1+\alpha^2)\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big)\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{B_n^2}{\ln\big(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\big)^2}\Big(1 + \sqrt{\frac{A}{2}}\Big)\Big(1 + \frac{\alpha^2}{2}\Big) -$$

$$- hG_{3n} h^3 G_{3n} \max\Big\{ \frac{(1+\alpha^2)(1+\gamma)}{\gamma^4} + \frac{2+\alpha^2}{4\gamma^2}, \frac{e^\gamma}{2}\,\frac{2+\gamma}{2\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma}\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big),$$

$$\Big(\min\Big(\frac{e^\gamma}{2}, \frac{e^\gamma-1}{\gamma}\Big)\Big)^2 + \alpha^2\Big(\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big)\Big)^2\Big\} -$$

$$- h^3 G_{3n} \frac{B_n^2}{\ln\big(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\big)^2} \max\Big\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\Big(2 + \sqrt{\frac{A}{2}}\Big) + \Big(\frac{\alpha^2}{3\gamma^2} + \frac{1}{6\gamma}\max(0, \alpha^2-1)\Big(3 + \sqrt{\frac{A}{2}}\Big),$$

$$\min\Big(\frac{e^\gamma}{6}, \frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}\Big)\Big(1 + \sqrt{\frac{A}{2}}\Big) + \frac{e^\gamma}{6}\Big(3 + \sqrt{\frac{A}{2}}\Big)\Big\} -$$

$$- \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}\, h^2 \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2} \left\{ \frac{\alpha^2}{36}(3+\sqrt{\frac{A}{2}}\,)^2 + \frac{1}{4}(2+\sqrt{\frac{A}{2}}\,)^2 \right\} .$$

Mit den Abschätzungen (10.10), (10.17) sowie den Ungleichungen

$$hG_{3n} = \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2} \frac{x\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}{\frac{1}{\lambda_{3n}}} \leqq \frac{2}{A}\alpha^3 \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}$$

und

$$h^2 \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2} \leqq \frac{A}{2}$$

erhalten wir schließlich

$$B_n^2(h) - B_n^2 \geqq -k_{17}' \frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}, \tag{10.21}$$

d.h.

$$B_n^2(h) \geqq B_n^2(1 - \frac{k_{17}'}{2N_o}) .$$

<u>Beweis der Beziehung (10.7):</u>

Wir führen eine entsprechende Abschätzung der Gleichung (9.52) nach oben durch und erhalten mit Hilfe von (9.55) die Ungleichung

$$H_{i1}^2(h)(\sigma_i^2(h) - \sigma_i^2) \leqq$$

$$\leqq T_3\left\{\frac{h^3}{\gamma^2}\sigma_i^2(3+\alpha^2) + \frac{h}{\gamma}\max(0,-1+2\alpha^2+\frac{\alpha^4}{2})\right\} + (h\bar{R}_3' + 2\bar{R}_3'')\alpha^2 +$$

$$+ (h\bar{R}_3' + 3\bar{R}_3'')\frac{1}{6}(1+\alpha^2)\alpha^2 + \bar{S}_3 h e^{\gamma}(1+\frac{\alpha^2}{2}) + T_3(h\bar{R}_3' + \bar{R}_3'')(\frac{h^3}{\gamma^2} + \frac{h^3}{2\gamma}) +$$

$$+ T_3(h\bar{R}_3' + 3\bar{R}_3'')\frac{h^3}{6\gamma} + h^4\bar{S}_3 T_3\left\{(\frac{\alpha^2}{3\gamma^2} + \frac{1}{6\gamma}\max(0,\alpha^2-1))\min(e^{\gamma}, \frac{12e^{\gamma-2}}{\gamma^2}) +\right.$$

$$\left. + \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\min(e^{\gamma}, \frac{2e^{\gamma-1}}{\gamma})\right\} +$$

$$+ \bar{S}_3 h^3 \left\{(h\bar{R}_3' + 2\bar{R}_3'')\min(\frac{e^{\gamma}}{2}, \frac{e^{\gamma-1}}{\gamma}) + \frac{\alpha^2}{3}(h\bar{R}_3' + 3\bar{R}_3'')\min(\frac{e^{\gamma}}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2})\right\} +$$

$$+ \bar{S}_3^2 h^4 e^{\gamma}\min(\frac{e^{\gamma}}{6}, \frac{2e^{\gamma-2}}{\gamma^2}) + \frac{h^2}{6}(h\bar{R}_3' + \bar{R}_3'')(h\bar{R}_3' + 3\bar{R}_3'') .$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} H_{i1}(h)(\sigma_i^2(h) - \sigma_i^2) \leqq$$

$$\leq hG_{3n}\max\left\{e^{\gamma}(1+\frac{\alpha^2}{2}),\frac{\alpha^2}{\gamma^2}(3+\alpha^2)+\frac{1}{\gamma}\max(0,-1+2\alpha^2+\frac{\alpha^4}{2})\right\}+$$

$$+\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\left\{\alpha^2(2+\sqrt{\frac{A}{2}})+\frac{1}{6}(1+\alpha^2)\alpha^2(3+\sqrt{\frac{A}{2}})\right\}+ \tag{10.22}$$

$$+hG_{3n}h^3G_{3n}\max\left\{(\frac{\alpha^2}{3\gamma^2}+\frac{1}{6\gamma}\max(0,\alpha^2-1))\min(e^{\gamma},\frac{12e^{\gamma}-2}{\gamma^2})+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\min(e^{\gamma},\frac{2e^{\gamma}-1}{\gamma}),e^{\gamma}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2})\right\}+$$

$$+h^3G_{3n}\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\max\left\{\frac{2+\gamma}{2\gamma^2}(1+\sqrt{\frac{A}{2}})+\frac{1}{6\gamma}(3+\sqrt{\frac{A}{2}}),(2+\sqrt{\frac{A}{2}})\min(\frac{e^{\gamma}}{2},\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma})+\right.$$

$$\left.+(3+\sqrt{\frac{A}{2}})\frac{\alpha^2}{3}\min(\frac{e^{\gamma}}{6},\frac{2e^{\gamma}-2}{\gamma^2})\right\}+$$

$$+\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}h^2\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\frac{1}{6}(1+\sqrt{\frac{A}{2}})(3+\sqrt{\frac{A}{2}}).$$

Mit den vor (10.21) angeführten Abschätzungen erhalten wir aus (10.22)

$$B_n^2(h)-B_n^2\leq k'_{18}\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}. \tag{10.23}$$

Aus (10.21) und (10.23) bekommen wir die Ungleichung

$$\left|B_n^2(h)-B_n^2\right|\leq\max(k'_{17},k'_{18})\frac{B_n^2}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}.$$

Hieraus folgt die Beziehung (10.7).

<u>Beweis der Beziehung (10.8):</u>

Entsprechend (9.56) haben wir die Identität

$$h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u)=h\sigma_i^2\int_{-\infty}^{\gamma/h}(e^{hu}-1)dV_i(u)+$$

$$+\int_{\gamma/h}^{\infty}udV_i(u)+h\int_{\gamma/h}^{\infty}u^2dV_i(u)+\int_{-\infty}^{\gamma/h}u(1+hu-e^{hu})dV_i(u). \tag{10.24}$$

Hieraus folgt

$$h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u)\leq$$

$$\leqq h\sigma_i^2\left\{\int_{-\infty}^{\gamma/h}(hu+\frac{h^2u^2}{2})dV_i(u)+h^3\min(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2})\int_0^{\gamma/h}u^3dV_i(u)\right\}+$$

$$+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}h^2\int_{\gamma/h}^{\infty}u^3dV_i(u)+\int_{-\infty}^{-H_n}uhu(1-e^{h\vartheta' u})dV_i(u)-\int_{-H_n}^{0}u\frac{h^2u^2}{2}e^{h\vartheta u}dV_i(u)\leqq$$

$$\leqq h\sigma_i^2\left\{\frac{h^2}{2}\sigma_i^2+h^3\min(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2})\int_0^{\gamma/h}u^3dV_i(u)\right\}+\frac{1+\gamma}{\gamma^2}h^2\int_{\gamma/h}^{\infty}u^3dV_i(u)+$$

$$+h\int_{-\infty}^{-H_n}u^2dV_i(u)+\frac{h^2}{2}H_n\sigma_i^2\,,\quad 0<\vartheta',\vartheta<1\;.$$

Aus dieser Abschätzung erhalten wir die Ungleichungen

$$xB_n-A_n(h)\leqq$$

$$\leqq k'_{15}\left\{\frac{hB_n^2}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}})+h^2G_{3n}\left[\max(\alpha^2\min(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}),\frac{1+\gamma}{\gamma^2})+\frac{\alpha}{2}\right]\right\}\leqq$$

$$\leqq k'_{15}\,\frac{xB_n}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}\left\{1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{2}}+\frac{2}{A}\alpha^3\left[\max(\alpha^2\min(\frac{e^\gamma}{6},\frac{2e^\gamma-2}{\gamma^2}),\frac{1+\gamma}{\gamma^2})+\frac{\alpha}{2}\right]\right\},$$

d.h.

$$xB_n-A_n(h)\leqq k'_{19}\,\frac{xB_n}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}\;. \tag{10.25}$$

Andererseits gilt

$$h\sigma_i^2H_{i1}(h)-\int_{-\infty}^{\gamma/h}ue^{hu}dV_i(u)\geqq -h\sigma_i^2\int_{\gamma/h}^{\infty}hudV_i(u)-h^2\int_0 u^3dV_i(u)\min(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma})\geqq$$

$$\geqq -\max\left\{\min(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}),\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right\}h^2\gamma_{3i}\;,$$

$$xB_n-A_n(h)\geqq -\frac{xB_n}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}\,\frac{2}{A}\alpha^3k'_{15}\max(\min(\frac{e^\gamma}{2},\frac{e^\gamma-1}{\gamma}),\frac{\alpha^2}{\gamma^2})$$

und somit

$$xB_n-A_n(h)\geqq -k'_{20}\,\frac{xB_n}{\ln(\frac{1}{\lambda_{3n}})^2}\;. \tag{10.26}$$

Aus (10.25) und (10.26) ergibt sich die Beziehung (10.8).

Mit den Abschätzungen (10.3) bis (10.8) erhalten wir nun aus der Ungleichung (9.28)

$$\sum_{i=1}^{4} I_i \leqq \frac{2L_o k_8' k_{10}'}{k_{11}'^{3/2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} + 2k_1 k_8' k_{13}' \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{x}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} +$$

$$+ 2k_2 k_8' k_{12}' \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} + k_1 k_9' \frac{1}{x} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{x^2}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^3 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} \left\{ \frac{2L_o k_8' k_{10}'}{k_{11}'^{3/2}} x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + 2k_2 k_8' k_{12}' x^3 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + (2k_1 k_8' k_{13}' + k_1 k_9') x^4 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \right\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{4} I_i \leqq k_7' \frac{1}{x^3 \ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2} . \tag{10.27}$$

Die Abschätzung (10.27) wurde entsprechend wie in der Beziehung (9.59) durchgeführt. Aus (10.2) und (10.27) folgt schließlich die Ungleichung des Satzes 5.2.6. Damit ist dieser Satz bewiesen.

4. Beweis der Sätze 5.2.7 und 5.2.8 und Bemerkungen zu dem im Abschnitt 5.1 angeführten Beispiel

Im Vergleich zum Beweis des Satzes 5.2.6 treten nur dort Änderungen ein, wo im Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen im Satz 5.2.6 die folgenden Abschätzungen gemacht wurden:

$$g_{3i} \leqq G_{3n}\,, \quad \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u) \leqq \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u), \quad \int_{-H_n}^{0} u^2 dV_i(u) \leqq B_n^2 \,.$$

Entsprechend der Voraussetzung des Satzes 5.2.7 ist

$$\sigma_i^2 = 1\,,$$

d.h.

$$g_{3i} \geqq 1$$

und es gilt

$$h^3 g_{3i} \leqq h^3 g_{3i}^3 = x^3 \Lambda_{3n}^3 \leqq A^{3/2} \frac{\left(\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^{3/2}}{\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^3} \leqq B^3$$

und

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{g_{3,1}^2}{n} = \Lambda_{3n}^2 \leqq \exp(-2N_o)\,.$$

Aus diesen Bemerkungen ergeben sich die im Unterpunkt 2) des Abschnittes 5.3 angegebenen Änderungen.
Die im Abschnitt 5.3 angeführte Konstante k''_{10} erhält man folgendermaßen:

Von der Definition des dritten absoluten Moments der konjugierten Verteilungsfunktion ausgehend erhalten wir mit Hilfe der MINKOVSKIschen Ungleichung und der Abschätzungen, die zum Erhalt der Beziehung (10.19) benutzt wurden, die Ungleichungskette (s. Ungleichung vor (9.47))

$$\beta_{3,1}(h) \leqq \left\{\left[\int_{-\infty}^{\gamma/h} |u|^3 e^{hu} \frac{dV_1(u)}{H_{11}(h)}\right]^{\frac{1}{3}} + |a_1(h)|\right\}^3 \leqq$$

$$\leqq k''_{10} \frac{\sqrt{n}}{x \ln(g_{3,1}^{-2} n)} .$$

Zum Beweis des Satzes 5.2.8:
Wir gehen von der Beziehung (9.25) aus und erhalten entsprechend dem Beweis des Satzes 4.4.4 die Abschätzung

$$\left|F_n^y(xB_n) - F_n(xB_n)\right| \leqq 1 - \prod_{i=1}^{n} V_i(y),\ y = \frac{\gamma}{h} = \frac{\gamma B_n}{x} .$$

Aus der vor der Beziehung (10.27) angeführten Ungleichung bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \leqq \frac{x\exp(\frac{-x^2}{2})}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\left\{\frac{2L_0 k'_8 k'_{10}}{k_{11}'^{3/2} K^2} + 2k_1 k'_8 k'_{13} + \frac{2k_2 k'_8 k'_{12}}{K} + k_1 k'_9\right\} =$$

$$= L_7 \frac{x\exp(\frac{-x^2}{2})}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} .$$

Am Schluß dieses Kapitels möchten wir noch einige Bemerkungen zu dem im Abschnitt 5.1 angeführten Beispiel machen:
Es gilt

$$p_{-k} > 0 \ , \ k = -1, 0, 1, \ldots$$

und

$$P(X < \infty) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_{-k} = \frac{1}{18} + \frac{55}{63} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = 1.$$

Damit liegt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vor. Weiterhin ist

$$EX = \frac{3}{18} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = 0,\ EX^2 = \frac{9}{18} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1,$$

$$E(X^+)^3 = \frac{27}{18} = 1{,}5 \ , E|X^-|^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{3k}}{2^{3k+1}} = \infty .$$

Um für dieses Beispiel den Satz 1.2.6 anwenden zu können, müssen wir nun die Bedingung (1.8) überprüfen. Da hier die Voraussetzung des Satzes 1.2.6, daß $\gamma_{3i} \leq 1$ ist, nicht erfüllt ist, müssen wir sowohl in der Ungleichung (1.7) als auch in der Bedingung (1.8) anstatt $\ln n$ die allgemeinere Konvergenzordnung

$$\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2 = \ln\left(\frac{\sqrt{n}\,\sigma_i^3}{\max(\sigma_i^3,\gamma_{3i})}\right)^2 = \ln\frac{n}{1,5^2}$$

betrachten. Es gilt (mit $[x]$=entier(x))

$$\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dP(X<u) = \sum_{2^k>H_n} \frac{2^{2k}}{2^{3k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{2^k \geq 2^{[\log_2 H_n]+1}} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+[\log_2 H_n]}} \leq \frac{1}{H_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{H_n} =$$

$$= \frac{\left(\ln\frac{n}{1,5^2}\right)^{3/2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\ln\frac{n}{1,5^2}}\;\frac{\left(\ln\frac{n}{1,5^2}\right)^{5/2}}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\ln\frac{n}{1,5^2}}\text{, falls } 1,5^2 < n \leq n_1 \text{ oder } n \geq n_0 \text{ ist.}$$

Bei der soeben betrachteten Abschätzung wurden die Ungleichung

$$[\log_2 H_n]+1 > \log_2 H_n \quad (H_n > 0),$$

ausgenutzt und weiterhin der Quotient

$$\frac{\left(\ln\frac{n}{1,5^2}\right)^{5/2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1,5}\, z^{5/2} e^{-z/2} \quad \text{mit} \quad z = \ln\frac{n}{1,5^2}$$

betrachtet. Dabei interessieren uns solche n, für die

$$z^5 e^{-z} \leq 1,5^2 \text{ , } z = \ln\frac{n}{1,5^2} \text{ , } z > 0,$$

gilt. Wir erhalten hierbei die Lösung

$$1,5^2 < n \leq 11 \quad \text{oder} \quad n \geq 186164$$

folgendermaßen: Die Funktion

$$f(z) = z^5 e^{-z} \text{ , } z > 0,$$

ist im Intervall $(0,5)$ streng monoton wachsend und im Intervall $(5,\infty)$ streng monoton fallend und es gilt

$$f(0)=0 \text{ , } \lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad \text{und} \quad f(5) > 1,5^2 \text{ .}$$

Damit besitzt die Gleichung $f(z)=2,25$ genau zwei Lösungen

$z_1 = 1,629$ und $z_0 = 11,323$, d.h. $n_1 = [2,25\exp(z_1)]$ und $n_0 = [2,25e^{z_0}]+1$

Kapitel XI

Beweis der Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen

1. Beweis des Satzes 6.1.1

Hier und in den folgenden Beweisen bezeichnen wir mit $C_i > 0$ und $C_i' > 0$, $i=7,8,\ldots$, absolute positive Konstanten, die nicht von den betrachteten Parametern n und x abhängen.

Wir betrachten auf der Grundlage der durch (2.7) definierten sogenannten abgeschnittenen Verteilungsfunktionen für $\alpha=\infty$ und $\beta=y$ die zu $F_{nk}(x)$ gehörende abgeschnittene Verteilungsfunktion, die wir hier mit $F^y_{nk}(x)$ bezeichnen. Die durch Faltung der F^y_{nk}, $k=1,2,\ldots,N$, erhaltene Summenverteilungsfunktion bezeichnen wir mit F^y_n. $F^y_n(z)$ ist also die N-fache Faltung der abgeschnittenen Verteilungsfunktionen der n-ten Serie des zugrunde gelegten Serienschemas.

In Anlehnung an die bei H. RUBIN/J. SETHURAMAN [101] und N. N. AMOSOVA [1] benutzten Bezeichnungen führen wir mit einem positiven Parameter h folgende Größen ein:

$$\varphi_{ni}(h)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu}dF^y_{ni}(u),\quad \bar{\varphi}_{ni}(h)=\int_{-\infty}^{\infty} ue^{hu}dF^y_{ni}(u),$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)=\int_{-\infty}^{\infty} u^2e^{hu}dF^y_{ni}(u),$$

$$a_{ni}(h)=\frac{\bar{\varphi}_{ni}(h)}{\varphi_{ni}(h)},\quad A_N(h)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ni}(h),$$

$$\sigma^2_{ni}(h)=\frac{\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)}{\varphi_{ni}(h)}-\left(\frac{\bar{\varphi}_{ni}(h)}{\varphi_{ni}(h)}\right)^2,\quad \sigma^2_N(h)=\sum_{i=1}^{N}\sigma^2_{ni}(h),$$

$$\gamma_{ni}(h)=\frac{1}{\varphi_{ni}(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^3e^{hu}dF^y_{ni}(u),$$

$$c_{ni}(h)=\frac{1}{\varphi_{ni}(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|u-a_{ni}(h)|^3e^{hu}dF^y_{ni}(u),$$

keine eind. Bezeichnung

$$F_N(z,h)=\left(\mathop{\ast}_{i=1}^{N} F_{ni}(\cdot,h)\right)(z)\quad\text{mit}\quad F_{ni}(z,h)=\frac{1}{\varphi_{ni}(h)}\int_{-\infty}^{z} e^{hu}dF^y_{ni}(u).$$

$F_{ni}(z,h)$ ist die aus $F^y_{ni}(z)$ hervorgegangene sogenannte konjugierte Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert $a_{ni}(h)$, der Streuung $\sigma^2_{ni}(h)$, sowie den absoluten Momenten $c_{ni}(h)$ und $\gamma_{ni}(h)$. $F_N(z,h)$ ist eine Summenverteilungsfunktion.

Aus den Voraussetzungen (6.2) und (6.3) folgt, daß ein $n_o > 0$ existiert, so daß für alle $n \geqq n_o$ mit positiven Konstanten α und A

$$\frac{1}{N} B_N^2 \geqq \alpha > 0 \quad \text{und} \quad B_N^q \leqq A < \infty \tag{11.1}$$

gilt. Alle weiteren Betrachtungen werden für $n \geqq n_o$ durchgeführt.

Es sei

$$y = rx\sqrt{N} \quad \text{mit} \quad r = \frac{\sqrt{\alpha}}{2qc^2}\min(1, c_o^2) \quad \text{und} \quad h = \frac{x}{B_N} . \tag{11.2}$$

Wegen (6.2) gilt für $n \to \infty$

$$hy = O(x^2) . \tag{11.3}$$

Wir gehen von folgender grundlegenden Beziehung aus:

$$\left|1-F_n(xB_N)-(1-\Phi(x))\right| \leqq \left|F_n(xB_N)-F_n^y(xB_N)\right| + \left|F_n^y(xB_N)-\Phi(x)\right| . \tag{11.4}$$

Durch Anwendung des Satzes 2.2.8 erhalten wir

$$\left|F_n(xB_N)-F_n^y(xB_N)\right| \leqq \sum_{i=1}^{N}(1-F_{ni}(y)). \tag{11.5}$$

Auf Grund der Voraussetzung (6.3) existieren die q-ten absoluten Momente der individuellen Verteilungsfunktionen $F_{ni}(z)$. Es gilt folgende Abschätzung:

$$\infty > \int_0^\infty u^{2+c_o^2} dF_{ni}(u) = -\int_0^\infty u^{2+c_o^2} d(1-F_{ni}(u)) =$$

$$= -u^{2+c_o^2}(1-F_{ni}(u))\Big|_0^\infty + (2+c_o^2)\int_0^\infty u^{1+c_o^2}(1-F_{ni}(u))du =$$

$$= (2+c_o^2)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{rx\sqrt{k-1}}^{rx\sqrt{k}} u^{1+c_o^2}(1-F_{ni}(u))du \geqq$$

$$\geqq C_7 \sum_{k=1}^{\infty}(1-F_{ni}(rx\sqrt{k}))rx\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}}(rxv)^{1+c_o^2}dv \geqq$$

$$\geqq C_8 \sum_{k=1}^{\infty}(1-F_{ni}(rx\sqrt{k}))x^{2+c_o^2}(k-1)^{\frac{1}{2}c_o^2}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}} vdv \geqq$$

$$\geqq C_9 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ \ln k}(x\sqrt{k})^{2+c_o^2}\ln k \cdot (1-F_{ni}(rx\sqrt{k})) .$$

Die identische Umformung der eben betrachteten Abschätzung wurde durch partielle Integration erhalten, wobei der sich ergebende erste Summand

$$u^{2+c_o^2}(1-F_{ni}(u))\Big|_0^{\infty}$$

gleich Null ist. Durch Aufspaltung des Integrationsgebietes des verbleibenden Integrals entstand die in der weiteren identischen Umformung auftretende unendliche Reihe, die schließlich nach unten abgeschätzt wurde. Damit ist folgende Reihe konvergent:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ \ln k}(x\sqrt{k})^{2+c_o^2}\ln k\cdot(1-F_{ni}(rx\sqrt{k}))<\infty \quad . \tag{11.6}$$

Aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ \ln k}$$

folgt notwendigerweise für $k\to\infty$

s. Z.f. Wthtk.

$$1-F_{ni}(rx\sqrt{k}) = o\Big(\frac{1}{(\sqrt{k}x)^{2+c_o^2}\ln k}\Big) \ .$$ unwesentlich. „On moderate deviations"

Indem wir k=N setzen, erhalten wir somit für $N\to\infty$ auf Grund von (6.3)

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1-F_{ni}(y)) = o\Big(\frac{1}{(\sqrt{N}x)^{2+c_o^2}\ln N}\Big) \ . \tag{11.7}$$

Schlußweise falsch
lt. Mitteilung von L. Heinrich
8.6.83

Aus (11.7) folgt für $N\to\infty$

$$\sum_{i=1}^{N}(1-F_{ni}(y)) = o\Big(\frac{1}{x^q N^{\frac{1}{2}c_o^2}\ln N}\Big) \ . \tag{11.8}$$

Wegen der asymptotischen Beziehung

$$(1-\Phi(x))\sqrt{2\pi}\,x\exp(\tfrac{x^2}{2}) = 1+o(1),\ x\to\infty \ , \tag{11.9}$$

erhalten wir aus (11.5) und (11.8) für $1\leqq x\leqq c\sqrt{\ln N}$ und $N\to\infty$

$$F_n(xB_N)-F_n^y(xB_N) = (1-\Phi(x))\cdot o\Big(\frac{1}{x^{q-1}N^{\frac{1}{2}(c_o^2-c^2)}\ln N}\Big). \tag{11.10}$$

Wir kommen nun zur Untersuchung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (11.4) und betrachten entsprechend der Abschätzung (9.28) und der Identität (9.2) folgende Ungleichung

$$\Big|\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\int_{xB_N}^{\infty}e^{-hu}dF_N(u,h)-\Phi(-x)\Big| \leqq \sum_{i=1}^{4}J_i \tag{11.11}$$

mit

$$J_1 = 2L_o \prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\sigma_N^{-3}(h)\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h),$$

$$J_2 = 2k_1 \prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{1}{B_N}\left|NA_N(h)-xB_N\right|,$$

$$J_3 = 2k_2 \prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{1}{B_N}\left|\sigma_N(h)-B_N\right|,$$

$$J_4 = \left|\prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)-1\right|\varnothing(-x) .$$

Um J_1 bis J_4 weiter abzuschätzen, führen wir die folgenden Betrachtungen durch. Auf Grund dessen, daß nach der Voraussetzung (6.1) der Erwartungswert $EX_{ni}=0$ ist, gilt

$$\varphi_{ni}(h)-1=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{hu}-1)dF^y_{ni}(u)=h\int_{-\infty}^{\infty}udF^y_{ni}(u)+\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{h\vartheta u}dF^y_{ni}(u)=$$

$$= -h\int_{y}^{\infty}udF_{ni}(u)+\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{y}u^2e^{h\vartheta u}dF_{ni}(u) \quad \text{mit} \quad 0<\vartheta<1.$$

Hieraus folgt, daß

$$\varphi_{ni}(h)-1 \leq \frac{h^2}{2}e^{hy}\sigma^2_{ni}$$

und

$$\varphi_{ni}(h)-1 \geq -\frac{h}{y}\sigma^2_{ni}$$

gilt. Wegen der LJAPUNOVschen Ungleichung und der Voraussetzung (6.3) ist

$$\sigma^2_{ni} \leq (\beta^q_{ni})^{2/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{N}\beta^q_{ni}\right)^{2/q} \leq C_{10}N^{2/q} .$$

Weiterhin haben wir für $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$ auf Grund von (11.2)

$$h^2e^{hy} = \frac{x^2}{B_N^2}\exp\left(rx^2\frac{\sqrt{N}}{B_N}\right) \leq \frac{x^2}{\alpha N}\exp\left(rx^2\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \leq \frac{x^2}{\alpha N^{1-\frac{1}{2q}\min(1,c_o^2)}}$$

und

$$\frac{h}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}rN} .$$

Aus diesen Abschätzungen ergibt sich für $N \to \infty$

$$\varphi_{ni}(h)-1 = O\left(\frac{x^2}{N^{1-\frac{2}{q}-\frac{1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right) . \qquad (11.12)$$

Also gilt

$\frac{2c_o^2-\min(1,c_o^2)}{2q} \geq \frac{c_o^2}{2q}$

$$\varphi_{ni}(h)-1 = O\left(\frac{x^2}{N^{\frac{1}{2q}c_o^2}}\right) = o(1)$$

und wir erhalten somit für $N \to \infty$

$$\ln\varphi_{ni}(h) = \varphi_{ni}(h)-1 + O((\varphi_{ni}(h)-1)^2). \qquad (11.13)$$

Jetzt untersuchen wir das Restglied in (11.13) näher: Es gilt

$$\varphi_{ni}(h)-1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(hu+\frac{h^2u^2}{2}\right)dF_{ni}^y(u)+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{hu}-1-hu-\frac{h^2u^2}{2}\right)dF_{ni}^y(u) =$$

$$= \begin{cases} \leq \dfrac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2 + \dfrac{h^3}{6}e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}(\beta_{ni}^q+1), \\ \geq -\dfrac{h}{y^{1+c_o^2}}\beta_{ni}^q . \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\left(h^4\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4+h^6e^{2hy}y^{2-2\min(1,c_o^2)}\sum_{i=1}^{N}(\beta_{ni}^q)^2\right).$$

Im Falle $c_o=1$ $(q=3)$ erhalten wir mit

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4 \leq \sum_{i=1}^{N}\beta_{ni}^q(\beta_{ni}^q)^{\frac{1}{q}(4-q)} \leq C_{10}'N^{\frac{4}{q}} \quad (\text{für } q\leq 4)$$

die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\left(\frac{x^4}{N^2}N^{4/3}+\frac{x^6}{N^3}N^{1/3}N^2\right) = O\left(\frac{x^6}{N^{2/3}}\right) = O\left(\frac{x^3}{N^{1/3}}\right),$$

d.h. für $q=3$ gilt

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right),\ N\to\infty . \qquad (11.14)$$

Die Beziehung (11.14) läßt sich im Falle $c_o\neq 1$ folgendermaßen zeigen: Mit

$$2c_o^2 > (1+c_o^2)\min(1,c_o^2)=(q-1)\min(1,c_o^2) \quad (\text{für } c_o\neq 1)$$

erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\left(\frac{x^4}{B_N^4}B_N^2N^{\frac{2}{q}}+\frac{x^{8-2\min(1,c_o^2)}}{B_N^6}N^{3-\frac{q-1}{q}\min(1,c_o^2)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{x^4}{N^{\frac{1}{2q}2c_o^2}}+\frac{x^{8-2\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{q}\min(1,c_o^2)}}\right) = O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right).$$

Bei der Behandlung des Faktors e^{2hy} wurde jeweils entsprechend die vor der Beziehung (11.12) für h^2e^{hy} stehende Abschätzung benutzt und mit

Hilfe der LJAPUNOV-Ungleichung ergab sich, daß

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^{4} \leqq \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^{2} (\beta_{ni}^{q})^{2/q} \leqq C_{11} B_N^2 N^{\frac{2}{q}}$$

ist. Wir betrachten jetzt folgende Abschätzungen

$$\left|\prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) - 1\right| \leqq$$
$$\leqq \left|\sum_{i=1}^{N} \left(\ln \varphi_{ni}(h) - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right)\right| \exp\left(\left|\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\varphi_{ni}(h) - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right)\right|\right) \tag{11.15}$$

und

$$\prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \leqq \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right)\right). \tag{11.16}$$

Auf Grund der Beziehung (11.13) gilt

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\varphi_{ni}(h) - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) + O\left(\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2\right).$$

Wir untersuchen die Summe

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right).$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{y}(e^{hu}-1)\,dF_{ni}(u) - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left\{\int_{-\infty}^{y}\left(hu + \frac{h^2u^2}{2}\right)dF_{ni}(u) - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2 + \int_{-\infty}^{y}\left(e^{hu} - 1 - hu - \frac{h^2u^2}{2}\right)dF_{ni}(u)\right\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{6} e^{hy} \int_{0}^{y} u^3\,dF_{ni}(u) \leqq \frac{h^3}{6} e^{hy}\, y^{1-\min(1,c_o^2)} N(\beta_N^q + 1) \leqq$$

$$\leqq C_{12}\, \frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}.$$

Wegen der bekannten Beziehungen

$$\left|e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right| \leqq \frac{u^2}{2}\left|e^u - 1\right| \text{ für } u \leqq 0$$

und

$$\left|e^u - 1\right| \leqq |u|^{\delta} \text{ für } u \leqq 0 \text{ und } 0 \leqq \delta \leqq 1$$

läßt sich die obige Summe folgendermaßen nach unten abschätzen:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) \geqq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N}\Big\{-h\int_{y}^{\infty} u\,dF_{ni}(u) - \frac{h^2}{2}\int_{y}^{\infty} u^2\,dF_{ni}(u) - \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}(hu)^{2+\min(1,c_o^2)}\,dF_{ni}(u)\Big\} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N}\Big(-\frac{h}{y^{1+c_o^2}} - \frac{h^2}{2y^{c_o^2}} - \frac{h^{2+\min(1,c_o^2)}}{2}\Big)B_{ni}^{q}+0 \geq -C_{13}\,\frac{x^{2+\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{1}{2}\min(1,c_o^2)}} \,.$$

Aus den soeben betrachteten Ungleichungen bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\Big) = o\Big(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\Big),\ N\to\infty \,. \tag{11.17}$$

Für die Beziehung (11.16) erhalten wir mit (11.17) die asymptotische Darstellung

$$\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big) = 1+o(1),\ N\to\infty \,. \tag{11.18}$$

Entsprechend ergibt sich für (11.15) aus (11.14) und (11.17) die asymptotische Beziehung

$$\Big|\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)-1\Big| = o\Big(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\Big),\ N\to\infty \,. \tag{11.19}$$

Nun kommen wir zur Abschätzung der dritten Momente $c_{ni}(h)$ und $\gamma_{ni}(h)$.

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) \leq 4\sum_{i=1}^{N}\big\{\gamma_{ni}(h)+|a_{ni}(h)|^3\big\} \leq 8\sum_{i=1}^{N}\gamma_{ni}(h).$$

Aus (11.12) folgt

$$\frac{1}{\varphi_{ni}(h)} = 1+o(1) \,.$$

Damit erhalten wir folgende asymptotische Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_{ni}(h) = O\Big(\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{y}|u|^3 e^{hu}\,dF_{ni}(u)\Big) =$$

$$= O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big\{\int_{0}^{y}u^3 e^{hu}\,dF_{ni}(u)+\int_{-\infty}^{0}|u|^3 e^{hu}\,dF_{ni}(u)\Big\}\Big) =$$

$$= O\Big(\sum_{i=1}^{N}\big(e^{hy}\,y^{1-\min(1,c_o^2)}+h^{-1+\min(1,c_o^2)}\big)B_{ni}^{q}\Big) =$$

$$= O\Big(N^{1+\frac{1}{2q}\min(1,c_o^2)}(xB_N)^{1-\min(1,c_o^2)}\Big).$$

Für die Auswertung des zweiten Integrales wurde die Ungleichung

$$e^{-a} \leq \left(\frac{b}{e}\right)^{b} a^{-b}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

verwendet. Hieraus erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = O\left(NB_N \frac{x^{1-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right), \quad N \to \infty \ . \tag{11.20}$$

Jetzt schätzen wir die Streuung $\sigma_N^2(h)$ ab:

$$\sigma_N^2(h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varphi_{ni}^2(h)} (\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) - \bar{\varphi}_{ni}^{\,2}(h)). \tag{11.21}$$

Es gilt

$$\bar{\varphi}_{ni}(h) = \int_{-\infty}^{y} ue^{hu} dF_{ni}(h) = \int_{-\infty}^{y} u(1 + hue^{h\vartheta u}) dF_{ni}(u), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

d.h.

$$\bar{\varphi}_{ni}(h) \begin{cases} \geq -\int_{y}^{\infty} udF_{ni}(u) \geq -\dfrac{1}{y^{1+c_o^2}} \beta_{ni}^q \ , \\[2ex] \leq h\sigma_{ni}^2 + \dfrac{h^2}{2} e^{hy} y^{1-\min(1,c_o^2)} (\beta_{ni}^q + 1), \end{cases}$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\varphi}_{ni}^{\,2}(h) = O\left(h^2 \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^4 + h^4 e^{2hy} y^{2-2\min(1,c_o^2)} \sum_{i=1}^{N} (\beta_{ni}^q)^2\right).$$

Weiterhin haben wir entsprechend den Abschätzungen vor (11.12)

$$\sum_{i=1}^{N} (\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) - \bar{\varphi}_{ni}^{\,2}(h)) \leq \sum_{i=1}^{N} \bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{y} u^2(1 + hue^{h\vartheta u}) dF_{ni}(u)(1 + (\varphi_{ni}(h) - 1)), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{y} u^2(1 + hue^{h\vartheta u}) dF_{ni}(u) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma_{ni}^2 + he^{hy} y^{1-\min(1,c_o^2)} \left(1 + \int_{0}^{y} u^q dF_{ni}(u)\right)\right) \leq$$

$$\leq B_N^2 + C_{14} \frac{x}{\sqrt{N}} N^{\frac{1}{2q}\min(1,c_o^2)} (x\sqrt{N})^{1-\min(1,c_o^2)} N,$$

d.h. wegen

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^2(\varphi_{ni}(h)-1) = O(h^2\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4 + h^3 e^{hy} y^{1-\min(1,c_o^2)} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ni}^q \sigma_{ni}^2) =$$

$$= O(\frac{x^2}{B_N^2} B_N^2 N^{\frac{2}{q}} + \frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{B_N^3} N^{-\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)+\frac{1}{2}} N^{1+\frac{2}{q}}) =$$

$$= B_N^2\, O(\frac{x^2}{N^{\frac{1}{2q}2c_o^2}} + \frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-2}{q}+\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}) = B_N^2\, O(\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}})$$

bekommen wir die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{\varphi}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h)-\varphi_{ni}^2(h)) \lessgtr B_N^2(1+C_{15}\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}). \qquad (11.22)$$

Weiterhin ist

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{N}(\sigma_{ni}^2 - \int_{y}^{\infty} u^2 dF_{ni}(u) - \int_{-\infty}^{0} u^2(1-e^{hu})dF_{ni}(u))(1+(\varphi_{ni}(h)-1)) \geqq$$

$$\geqq B_N^2(1-C_{16}\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}).$$

Zusammen mit (11.21) und (11.22) folgt aus den eben erhaltenen Abschätzungen eine asymptotische Darstellung für $\sigma_N^2(h)$:

$$\sigma_N^2(h) = B_N^2(1+O(\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}})),\ N\to\infty\ . \qquad (11.23)$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^2\frac{1}{\varphi_{ni}^2(h)} = B_N^2 + O(\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^2(\varphi_{ni}(h)-1)),$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^2\frac{1}{\varphi_{ni}^2(h)} = B_N^2(1+O(\frac{x^2}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}})),\ N\to\infty\ , \qquad (11.24)$$

hat der in (11.21) auftretende Faktor $\frac{1}{\varphi_{ni}^2(h)}$ keinen Einfluß auf die

Größenordnung des in (11.23) auftretenden Restgliedes.
Nun schätzen wir die Differenz $NA_N(h)-xB_N$ ab: Es gilt

$$a_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2 = \frac{1}{\varphi_{ni}(h)}(\bar{\varphi}_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2-h\sigma_{ni}^2(\varphi_{ni}(h)-1))$$

und

$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{\varphi}_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2)=\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_{-\infty}^{y}u\Big(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}e^{h\vartheta u}\Big)dF_{ni}(u)-h\sigma_{ni}^2\Big) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{N}\frac{h^2}{2}e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}(\beta_{ni}^q+1)\leqq C_{17}B_N\frac{x^{3-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}, \quad 0<\vartheta<1.$$

Weiter haben wir im Falle $c_o\neq 1$ entsprechend der Abschätzung vor (11.22)

$$\sum_{i=1}^{N}h\sigma_{ni}^2(\varphi_{ni}(h)-1) = B_N\, O\Big(\frac{x^{3-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\Big)$$

und im Falle $c_o=1$ $(q=3)$ entsprechend dem Abschätzungen vor (11.14)

$$\sum_{i=1}^{N}h\sigma_{ni}^2(\varphi_{ni}(h)-1)=O\Big(h^3\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4+h^4e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}\sum_{i=1}^{N}\beta_{ni}^q\sigma_{ni}^2\Big) =$$

$$= O\Big(\frac{x^3}{B_N^3}N^{4/3}+\frac{x^4}{B_N^4}N^{1/6}\,N\,N^{2/3}\Big) = B_N\, O\Big(\frac{x^4}{N^{2/3}}\Big) = B_N\, O\Big(\frac{x^2}{N^{1/3}}\Big)\,.$$

Mit den bekannten Ungleichungen

$$|e^{hu}-1-hu| \leqq |hu||e^{hu}-1| \quad \text{für } u\leqq 0$$

und

$$1-e^{hu} \leqq |hu|^{\delta} \quad \text{für } u\leqq 0 \text{ und } 0\leqq\delta\leqq 1$$

läßt sich zeigen, daß

$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{\varphi}_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{N}\Big(-\int_{y}^{\infty}u\,dF_{ni}(u)-h\int_{y}^{\infty}u^2dF_{ni}(u)+\int_{-\infty}^{0}u(e^{hu}-1-hu)\,dF_{ni}(u)\Big) \geqq$$

$$\geqq -\sum_{i=1}^{N}\big(y^{-1-c_o^2}+hy^{-c_o^2}+h^{1+\min(1,c_o^2)}\big)(\beta_{ni}^q+1)\geqq -C_{18}B_N\sqrt{N}\Big(\frac{x}{\sqrt{N}}\Big)^{1+\min(1,c_o^2)} =$$

$$= -C_{18}B_N\frac{x^{1+\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{1}{2}\min(1,c_o^2)}}$$

ist.

Damit erhalten wir die asymptotische Beziehung

$$NA_N(h)-xB_N = B_N\, O\left(\frac{x^{3-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right),\ N\to\infty\ . \tag{11.25}$$

Jetzt gehen wir zur Auswertung der Ausdrücke J_1 bis J_4 über:

Aus den Beziehungen (11.9), (11.18), (11.20) und (11,23) erhalten wir

$$J_1 = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) O\left(\frac{x^{1-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right) = (1-\emptyset(x))\, O\left(\frac{x^{2-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right).$$

Aus (11.9), (11.18) und (11.25) bekommen wir

$$J_2 = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) O\left(\frac{x^{3-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right) = (1-\emptyset(x))\, O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right).$$

Entsprechend ergibt sich aus (11.9), (11.18) und (11.23) die Beziehung

$$J_3 = (1-\emptyset(x))\, O\left(\frac{x^3}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right)$$

und schließlich erhalten wir aus (11.19)

$$J_4 = (1-\emptyset(x))\, O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right).$$

Diese asymptotischen Darstellungen für die Ausdrücke J_1 bis J_4 gelten jeweils für $N\to\infty$.

Mit (11.11) erhalten wir hieraus in der betrachteten x-Zone $1\leq x\leq c\sqrt{\ln N}$

$$F_n^y(xB_N)-\emptyset(x) = (1-\emptyset(x))\, O\left(\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{q-1}{2q}\min(1,c_o^2)}}\right),\ N\to\infty\ . \tag{11.26}$$

Aus (11.4), (11.10) und (11.26) folgt schließlich die Behauptung des Satzes 6.1.1.

Die Folgerung 6.1.1 und der Satz 1.2.7 sind unmittelbare Folgerungen des Satzes 6.1.1.

<u>2. Zum Beweis des Satzes 6.1.2</u>

Wir gehen wieder von der Abschätzung (11.4) aus und schätzen die rechte Seite der Ungleichung (11.5) im vorliegenden Fall identisch verteilter Zufallsgrößen etwas genauer ab.

Es sei

$$V(x)=P(X_1<x).$$

Für $F^y_{ni}(z)$ schreiben wir kurz $V^y(z)$. Entsprechend (11.6) erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^q n^{\frac{1}{2}c_o^2}\, n(1-V(y)) < \infty \quad \text{für } y=rx\sqrt{n} . \tag{11.27}$$

Da die individuelle Verteilungsfunktion $V(x)$ im Gegensatz zu $F_{ni}(x)$ nicht mehr vom Folgenindex n abhängt, konnte in (11.6) sofort der Summationsindex k durch n ersetzt werden.

Die Ungleichung (11.5) hat jetzt die einfachere Gestalt

$$\left|F_n(x\sqrt{n})-F_n^y(x\sqrt{n})\right| \leq n(1-V(y)).$$

Indem wir diese Ungleichung in (11.27) einsetzen, erhalten wir folgende konvergente Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^q n^{\frac{1}{2}c_o^2} \left|F_n(x\sqrt{n})-F_n^y(x\sqrt{n})\right| < \infty . \tag{11.28}$$

Aus (11.26) bekommen wir andererseits

$$x^q \exp\left(\frac{+x^2}{2}\right)\left(F_n^y(x\sqrt{n})-\phi(x)\right) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{q-1}{4q}\min(1,c_o^2)}}\right),\ n\to\infty ,$$

d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left|F_n^y(x\sqrt{n})-\phi(x)\right| < \infty . \tag{11.29}$$

Mit der Abschätzung

$$n^{\frac{1}{2}c_o^2} = \exp\left(\tfrac{1}{2}c_o^2 \ln n\right) \geq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

ergibt sich aus (11.4), (11.28) und (11.29) schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left|1-F_n(x\sqrt{n})-\phi(-x)\right| < \infty .$$

Durch entsprechende Überlegungen läßt sich auch unschwer die Konvergenz der entsprechenden Reihe nachweisen, wenn wir $1-F_n(x\sqrt{n})$ durch $F_n(-x\sqrt{n})$ ersetzen.

3. Beweis des Satzes 6.1.3

Wir gehen wie im Beweis des Satzes 6.1.1 vor und verwenden die dort eingeführten Bezeichnungen. Es sei jetzt

$$h = \frac{x}{B_N} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{N}}{x} .$$

Wir gehen von der Zerlegung (11.4) aus und erhalten entsprechend (11.6) die folgende Abschätzung

$$\infty > \int_0^\infty u^{2+c_o^2} dF_{ni}(u) = (2+c_o^2)\int_0^\infty u^{1+c_o^2}(1-F_{ni}(u))du =$$

$$= (2+c_o^2)\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{k-1}/x}^{\sqrt{k}/x} u^{1+c_o^2}(1-F_{ni}(u))du \geqq$$

$$\geqq C_7' \sum_{k=1}^{\infty}(1-F_{ni}(\frac{\sqrt{k}}{x}))\,\frac{1}{x}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}} (\frac{v}{x})^{1+c_o^2} dv \geqq$$

$$\geqq C_9' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,(\frac{\sqrt{k}}{x})^{2+c_o^2}\,(1-F_{ni}(\frac{\sqrt{k}}{x})),$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln k}\,(\frac{\sqrt{k}}{x})^{2+c_o^2}\,\ln k\cdot(1-F_{ni}(\frac{\sqrt{k}}{x})) < \infty \quad . \tag{11.30}$$

Entsprechend wie in (11.7) erhalten wir hieraus für $N \to \infty$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1-F_{ni}(y)) = o(\frac{x^q}{N^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}\ln N}). \tag{11.31}$$

Mit den Beziehungen (11.5) und (11.9) bekommen wir aus (11.31) für $N \to \infty$

$$F_n(xB_N)-F_n^v(xB_N) = (1-\varnothing(x))\ o(\frac{x^{q+1}}{N^{\frac{1}{2}(c_o^2-c^2)}\ln N}), \tag{11.32}$$

wobei x wieder aus der Zone $1 \leqq x \leqq c\sqrt{\ln N}$ ist.

Es gilt die Ungleichung (11.11):

$$|F_n^v(xB_N)-\varnothing(x)| \leqq \sum_{i=1}^{4} J_i \ .$$

Die folgenden Einzeluntersuchungen dienen der weiteren Abschätzung der rechten Seite der Beziehung (11.11). Auf Grund der Voraussetzungen (6.2) und (6.8) führen wir den Beweis unter der entsprechenden Annahme wie (11.1) durch. Von der Herleitung der Beziehung (11.12) ausgehend ist

$$\varphi_{ni}(h)-1 = O(\frac{x^2}{B_N\sqrt{N}}\sigma_{ni}^2),\ N \to \infty \quad . \tag{11.33}$$

Auf Grund der Voraussetzungen (6.8) und (6.9) erhalten wir für die Streuungen σ_{ni}^2 folgende maximale Wachstumsordnung:

$$\sigma_{ni}^2 \leqq \sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u) + \int_{|u|\leqq K_N} u^2 dF_{ni}(u) + \sum_{i=1}^{N} K_N^{-c_o^2}\int_{K_N}^{\infty} u^{2+c_o^2} dF_{ni}(u).$$

$\to \varepsilon N^{\delta} \to \infty$

Hieraus folgt für $N \to \infty$ ($\varepsilon N^s \to \infty$ für ein $0<s<1/2$)

$$\sigma_{ni}^2 = o\Big(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.34}$$

Aus (11.33) und (11.34) bekommen wir für $N \to \infty$

$$\varphi_{ni}(h)-1 = o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big) = o(1),$$

d.h. es gilt die Beziehung (11.13).

Wir wenden uns jetzt der weiteren Untersuchung der Ungleichungen (11.15) und (11.16) zu. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\Big) \leqq \sum_{i=1}^{N}\frac{h^3}{6}e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}\Big(\int_0^\infty u^q dF_{ni}(u)\Big) \leqq$$

$$\leqq C'_{12}\,\frac{x^{2+\min(1,c_o^2)}}{N^{\frac{1}{2}\min(1,c_o^2)}}$$

und

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\Big) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{N}\Big(-h\int_y^\infty u\,dF_{ni}(u) - \frac{h^2}{2}\int_y^\infty u^2 dF_{ni}(u) - \int_{-\infty}^{0}\frac{h^2u^2}{2}(1-e^{hu})\,dF_{ni}(u)\Big) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{N}\Big(\Big(\frac{-h}{y^{1+c_o^2}} - \frac{h^2}{2y^{c_o^2}}\Big)\int_0^\infty u^q dF_{ni}(u) - \frac{h^3}{2}K_N\sigma_{ni}^2 - \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u)\Big) \geqq$$

$$\geqq -C'_{13}\Big(\frac{x^{2+c_o^2}}{N^{\frac{1}{2}c_o^2}} + \frac{\varepsilon x^3}{(\ln N)^{\frac{3+\delta}{2}}} + \frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\,\frac{1}{\varrho_n}\Big).$$

Dabei ist hier und weiterhin ϱ_n eine monoton wachsende Funktion mit

$$\varrho_n > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\varrho_n = \infty .$$

Aus diesen beiden Abschätzungen folgt für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\Big) = o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.35}$$

Aus (11.33) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\Big(\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4\,\frac{x^4}{NB_N^2}\Big).$$

Hieraus folgt mit *)

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^4 =$$

$$= O\Big(\sum_{i=1}^{N} \Big\{ \Big(\int_{-\infty}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u)\Big)^2 + \Big(\int_{|u| \le K_N} u^2 dF_{ni}(u)\Big)^2 + \Big(\int_{K_N}^{\infty} u^2 dF_{ni}(u)\Big)^2 \Big\} \Big) =$$

$$= O\Big(\frac{N^2}{(\ln N)^{2+\delta}} \frac{1}{\varrho_n} + \frac{NB_N^2 \varepsilon^2}{(\ln N)^{3+\delta}} + B_N^2 N K_N^{-c_o^2}\Big) = o\Big(\frac{NB_N^2}{(\ln N)^{2+\delta}}\Big), \quad N \to \infty, \ \varepsilon \to 0,$$

für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ die Beziehung

$\Rightarrow \varepsilon N^s \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{N} (\varphi_{ni}(h)-1)^2 = o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\delta}}\Big). \tag{11.36}$$

Aus (11.35) und (11.36) erhalten wir somit für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h) \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big) = 1 + o(1) \tag{11.37}$$

und

$$\Big| \prod_{i=1}^{N} \varphi_{ni}(h) \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big) - 1 \Big| = o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.38}$$

Für die dritten Momente $c_{ni}(h)$ bekommen wir folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = O\Big(\sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{y} |u|^3 e^{hu} dF_{ni}(u)\Big) =$$

$$= O\Big(\sum_{i=1}^{N} \Big\{ \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u) + K_N \sigma_{ni}^2 + e^{hy} y^{1-\min(1, c_o^2)} \int_{0}^{\infty} u^q dF_{ni}(u) \Big\} \Big) =$$

$$= O\Big(\frac{NB_N}{x(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}} \frac{1}{\varrho_n} + \frac{\varepsilon \sqrt{N} B_N^2}{(\ln N)^{\frac{3+\delta}{2}}} + \frac{\sqrt{N}\, N}{x^{1-\min(1, c_o^2)} N^{\frac{1}{2}\min(1, c_o^2)}} \Big),$$

d.h. für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ ist

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = o\Big(\frac{\sqrt{N} B_N^2}{x(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}} \Big). \tag{11.39}$$

Wir schätzen jetzt die Streuung $\sigma_N^2(h)$ ab, wobei wir wieder von der Beziehung (11.21) ausgehen. Es gilt mit (11.33) für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^2 \frac{1}{\varphi_{ni}^2(h)} = B_N^2 \Big(1 + o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{2+\delta}}\Big)\Big). \tag{11.40}$$

*) $\varepsilon \to 0$ ist innerhalb dieses Beweises immer im Zusammenhang mit $\varepsilon N^s \to \infty$ für ein $0 < s < 1/2$ zu sehen.

Weiterhin haben wir für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}^2(h) = O\Big(\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^4 \frac{x^2}{N}\Big) = o\Big(\frac{x^2 B_N^2}{(\ln N)^{2+\delta}}\Big).$$

Mit den Abschätzungen

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \int_{-\infty}^{-K_N} u^2 e^{hu} dF_{ni}(u) + \int_{-K_N}^{y} u^2 (1+hue^{h\vartheta u}) dF_{ni}(u) \Big\} \varphi_{ni}(h) \leqq$$

$$\leqq B_N^2 + C'_{14} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^4 \frac{x^2}{\sqrt{N}\, B_N} + C'_{15} \frac{Nx^{\min(1,c_0^2)}}{N^{\frac{1}{2}\min(1,c_0^2)}}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \sigma_{ni}^2 - \int_{y}^{\infty} u^2 dF_{ni}(u) - \int_{-\infty}^{0} u^2 (1-e^{hu}) dF_{ni}(u) \Big\} \varphi_{ni}(h) \geqq$$

$$\geqq B_N^2 - \sum_{i=1}^{N} \Big\{ y^{-c_0^2} \int_{0}^{\infty} u^q dF_{ni}(u) + hK_N \int_{-K_N}^{0} u^2 dF_{ni}(u) + \int_{-\infty}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u) \Big\} \varphi_{ni}(h) -$$

$$- C'_{14} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^4 \frac{x^2}{\sqrt{N}\, B_N}$$

erhalten wir für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) = B_N^2 \Big(1 + o\Big(\frac{1}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big)\Big).$$

Mit (11.21) und (11.40) folgt hieraus schließlich für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sigma_N^2(h) = B_N^2 \Big(1 + o\Big(\frac{1}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big)\Big). \tag{11.41}$$

Nun schätzen wir die Differenz $NA_N(h) - xB_N$ ab: Es gilt für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big\{ \bar{\varphi}_{ni}(h) - h\sigma_{ni}^2 \Big[1 + O\Big(\frac{x^2 \sigma_{ni}^2}{\sqrt{N}\, B_N}\Big)\Big) \Big\} = \sum_{i=1}^{N} (\bar{\varphi}_{ni}(h) - h\sigma_{ni}^2) + o\Big(\frac{x^3 \sqrt{N}}{(\ln N)^{2+\delta}}\Big).$$

Weiterhin haben wir die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2) =$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_{-\infty}^{-K_N} u(1+hue^{h\vartheta u})dF_{ni}(u)+\int_{-K_N}^{y} u(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}e^{h\vartheta' u})dF_{ni}(u)-h\sigma_{ni}^2\Big)\leqq$$

$$\leqq \frac{h^2}{2}e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_{0}^{\infty} u^q dF_{ni}(u)\Big)\leqq C'_{17}\,\frac{x^{1+\min(1,c_o^2)}\sqrt{N}}{N^{\frac{1}{2}\min(1,c_o^2)}},\ 0<\vartheta,\vartheta'<1$$

und

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi'_{ni}(h)-h\sigma_{ni}^2) \geqq$$

$$\geqq -\sum_{i=1}^{N}\Big(\int_{y}^{\infty}udF_{ni}(u)+h\int_{y}^{\infty}u^2dF_{ni}(u)+h\int_{-\infty}^{-K_N}u^2dF_{ni}(u)+\frac{h^2}{2}K_N\sigma_{ni}^2\Big)\geqq$$

$$\geqq -C'_{18}\Big(Ny^{-1+c_o^2}+Nhy^{-c_o^2}+\frac{hN}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\frac{1}{\varphi_n}+h^2B_N^2K_N\Big).$$

Hieraus erhalten wir für $N\to\infty$ und $\varepsilon\to 0$

$$NA_N(h)-xB_N = o\Big(\frac{x\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.42}$$

Es gilt

$$\frac{1}{\varphi_{ni}(h)} = 1+o(1),$$

deshalb konnten in den Abschätzungen (11.39) und (11.42) diese Normierungsfaktoren $\frac{1}{\varphi_{ni}(h)}$ vernachlässigt werden.

Nun kommen wir zur Auswertung der Ausdrücke J_1 bis J_4:

Mit (11.37), (11.39) und (11.41) erhalten wir

$$J_1 = \frac{1}{x}\exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\ o\Big(\frac{1}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big).$$

Aus (11.37) und (11.42) folgt

$$J_2 = \frac{1}{x}\exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\ o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big).$$

Die Beziehungen (11.37) und (11.41) ergeben

$$J_3 = \frac{1}{x}\exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\ o\Big(\frac{x}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big).$$

Schließlich bekommen wir mit (11.38)

$$J_4 = (1-\phi(x))\ o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Die asymptotischen Darstellungen für J_1 bis J_4 gelten jeweils für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$. Mit den Ungleichungen (11.9) und (11.11) erhalten wir hieraus für $N \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ im Gebiet $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$ die Beziehung

$$F_n^y(xB_N)-\phi(x) = (1-\phi(x))\ o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right). \tag{11.43}$$

An Hand der einzelnen Beweisschritte läßt sich nachprüfen, daß bei Vernachlässigung der Forderung $\varepsilon \to 0$ folgende asymptotische Darstellung gilt:

$$F_n^y(xB_N)-\phi(x) = (1-\phi(x))\ O\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right),$$

falls $N \to \infty$ strebt und $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$ ist.

Im Vergleich zu (11.43) wurde hier das Symbol "o" durch "O" ersetzt.
Aus (11.4), (11.32), (11.43) und der eben gemachten Bemerkung erhalten wir die Aussagen (6.10) und (6.11) des Satzes 6.1.3.

4. Zum Beweis der Sätze 6.1.4 und 6.1.5

Im Fall identisch verteilter Zufallsgrößen gehen wir ähnlich wie beim Beweis des Satzes 6.1.3 vor. Deshalb diskutieren wir hier vor allem die Unterschiede, die sich im Vergleich zum Beweis des Satzes 6.1.3 ergeben.
Die Parameter h und y werden wie folgt festgelegt:

$$h = \frac{x}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad y = rx\sqrt{n} \quad \text{mit } r = \frac{1}{4c_o^2}\min(1,c_o^2).$$

Damit gilt die Beziehung (11.28), aus der wir die Abschätzung

$$F_n(x\sqrt{n})-F_n^y(x\sqrt{n}) = (1-\phi(x))\ o\left(\frac{1}{x^{q-1}\ln n}\right),\ n \to \infty\ , \tag{11.44}$$

erhalten. Wir untersuchen jetzt den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (11.4), für den die Ungleichung (11.11) gilt. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$$\varphi(h)=\varphi_{ni}(h),\ \bar{\varphi}(h)=\bar{\varphi}_{ni}(h),\ \bar{\bar{\varphi}}(h)=\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h),\ a(h)=A_N(h)=a_{ni}(h),\ n=N,$$

$$\sigma^2(h)=\sigma_{ni}^2(h)=\frac{1}{n}\sigma_N^2(h),\ c(h)=c_{ni}(h),\ \gamma(h)=\gamma_{ni}(h),\ V^y(z)=F_{ni}^y(z).$$

Im Falle identisch verteilter Zufallsgrößen wird also auf eine unnötige Indizierung der einzelnen Größen verzichtet.
Entsprechend (11.12) gilt für $n \to \infty$

$$\varphi(h)-1 = O\left(\frac{x^2}{n^{1-\frac{1}{4}\min(1,c_o^2)}}\right). \tag{11.45}$$

Hieraus folgt die Gültigkeit der Beziehung (11.13).
Die weiteren Einzelabschätzungen dienen der genaueren Untersuchung der rechten Seite von (11.11). Es gilt mit $0<\vartheta,\vartheta'<1$

$$\varphi(h)-1-\frac{h^2}{2} = \int_{-\infty}^{y}(e^{hu}-1)dV(u)-\frac{h^2}{2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{y}(hu+\frac{h^2u^2}{2})dV(u)-\frac{h^2}{2}+\int_{-\infty}^{y}(e^{hu}-1-hu-\frac{h^2u^2}{2})dV(u) =$$

$$= -h\int_{y}^{\infty}u\,dV(u)-\frac{h^2}{2}\int_{y}^{\infty}u^2dV(u)+\frac{h^3}{6}\int_{-K_n}^{y}u^3e^{h\vartheta u}dV(u)+\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{-K_n}u^2(e^{h\vartheta' u}-1)dV(u)$$

Hieraus folgen die Ungleichungen ($C''_{12}>0$, $C''_{13}>0$ sind absolute Konstanten)

$$\varphi(h)-1-\frac{h^2}{2} \leq \frac{h^3}{6}e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}\int_{0}^{\infty}u^{\min(3,q)}dV(u) \leq$$

$$\leq C''_{12}\,\frac{x^{4-\min(1,c_o^2)}}{n^{1+\frac{1}{4}\min(1,c_o^2)}}$$

und

$$\varphi(h)-1-\frac{h^2}{2} \geq -(\frac{h}{y}+\frac{h^2}{2})y^{-c_o^2}\int_{0}^{\infty}u^q dV(u)-\frac{h^3}{6}K_n-\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{-K_n}u^2dV(u) \geq$$

$$\geq -C''_{13}(\varepsilon+\frac{1}{g_n})\frac{x^2}{n(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}.$$

Somit haben wir die Beziehung (11.35), d.h. für $n\to\infty$ und $\varepsilon\to 0$ gilt

$$n(\varphi(h)-1-\frac{h^2}{2}) = o(\frac{x^2}{(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}). \qquad (11.46)$$

Weiterhin ist wegen (11.45) für $n\to\infty$

$$(\varphi(h)-1)^2 = O(\frac{x^4}{n^{2-\frac{1}{2}\min(1,c_o^2)}}) = o(\frac{x^2}{n(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}) \qquad (11.47)$$

Aus (11.13), (11.15), (11.16), sowie (11.46) und (11.47) erhalten wir die Beziehungen (11.37) und (11.38).
Nun zeigen wir (11.39) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen:

$$\int_{-\infty}^{y}|u|^3e^{hu}dV(u) = (\int_{-\infty}^{-K_n}+\int_{-K_n}^{y})|u|^3e^{hu}dV(u) =$$

$$= O(\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{-K_n}u^2dV(u)+K_n+e^{hy}y^{1-\min(1,c_o^2)}) = o(\frac{\sqrt{n}}{x(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}),\ n\to\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

Die folgenden Betrachtungen dienen der Untersuchung von $\sigma^2(h)$. Indem wir für unser neu gewähltes y die nach (11.21) gemachten Umformungen benutzen, erhalten wir für $n \to \infty$

$$\bar{\varphi}^2(h) = O\left(\frac{x^2}{n^{1-\frac{1}{2}\min(1,c_0^2)}}\right) = o\left(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Weiterhin gilt mit (11.45) für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$\bar{\bar{\varphi}}(h)\varphi(h) = \int_{-\infty}^{y} u^2 e^{hu} dV(u)\left(1+O\left(\frac{x^2}{n^{1-\frac{1}{4}\min(1,c_0^2)}}\right)\right) =$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{-K_n} u^2 e^{hu} dV(u) + \int_{-K_n}^{y} u^2(1+hue^{h\vartheta u})dV(u)\right)\left(1+O\left(\frac{x^2}{n^{1-\frac{1}{4}\min(1,c_0^2)}}\right)\right) =$$

$$= 1+O\left(\left(\int_{-\infty}^{-K_n} + \int_{y}^{\infty}\right)u^2 dV(u) + he^{hy}y^{1-\min(1,c_0^2)} + hK_n\right)\left(1+o\left(\frac{1}{(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)\right),$$

$0<\vartheta<1.$

Hieraus folgt die Gültigkeit von (11.41).

Schließlich untersuchen wir noch die Differenz $\bar{\varphi}(h)-h$:

$$\bar{\varphi}(h)-h = \int_{-\infty}^{y} ue^{hu}dV(u)-h =$$

$$=\int_{-K_n}^{y} u\left(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}e^{h\vartheta u}\right)dV(u) + \int_{-\infty}^{-K_n} u(1+hue^{h\vartheta' u})dV(u) - h\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dV(u) =$$

$$=-\int_{y}^{\infty} udV(u) - h\left(\int_{-\infty}^{-K_n} + \int_{y}^{\infty}\right)u^2 dV(u) + O\left(\int_{-\infty}^{-K_n} hu^2 dV(u) + h^2K_n + h^2e^{hy}y^{1-\min(1,c_0^2)}\right) =$$

$$= o\left(\frac{x}{\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right),\quad 0<\vartheta,\vartheta'<1,\quad n\to\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

Mit (11.45) folgt hieraus die Beziehung (11.42) für den Fall identisch verteilter Zufallsgrößen. Damit gilt auch unter den Voraussetzungen dieses Satzes die asymptotische Darstellung (11.43).

Zusammen mit (11.44) ergibt sich somit die Behauptung (6.17) des Satzes 6.1.4.

Um den Satz 6.1.5 zu zeigen, gehen wir vom Beweis des Satzes 6.1.4 ~~ams~~ und erhalten aus (11.43) für $n \to \infty$

$$\frac{1}{x}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\ln n\cdot\left(F_n^y(x\sqrt{n})-\Phi(x)\right) = O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\delta/2}}\right).$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\ln n)^{\alpha/2} \frac{1}{x}\exp(\frac{x^2}{2}) \left| F_n^y(x\sqrt{n}) - \emptyset(x) \right| < \infty \quad \text{für } \alpha < \delta \; ,$$

weil das Konvergenzverhalten dieser Reihe der Vergleichsreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(\ln n)^{1+(\delta-\alpha)/2}} < \infty \quad , \text{ falls } \alpha < \delta \text{ ist,}$$

entspricht.

Hieraus und aus (11.28) folgt die Behauptung des Satzes 6.1.5.

Ehe wir zum Beweis der Sätze über die Notwendigkeit der Existenz von Momenten kommen, beweisen wir den Satz 6.3.1.

5. Beweis des Satzes 6.3.1

Im Gegensatz zum Beweis des Satzes 6.1.1 werden hier die Ausgangsverteilungsfunktionen zweiseitig abgeschnitten. Auf der Grundlage der durch (2.7) definierten abgeschnittenen Verteilungsfunktionen betrachten wir für $\alpha=\beta=y$ die zu $F_{nk}(x)$ gehörende abgeschnittene Verteilungsfunktion, die wir mit $\overline{F}^y_{nk}(x)$ bezeichnen. Der Parameter y sei wie im Beweis des Satzes 6.1.3 definiert, d.h. $y=\frac{\sqrt{N}}{x}$.

Wir benutzen die im Beweis des Satzes 6.1.1 eingeführten Bezeichnungen. Dabei ist zu beachten, daß in den dort angegebenen Definitionen prinzipiell die Verteilungsfunktion $F^y_{ni}(z)$ durch $\overline{F}^y_{ni}(z)$ ersetzt werden muß.

Wir gehen wieder von der Beziehung (11.4) aus und erhalten mit Hilfe des Satzes 2.2.8 folgende Ungleichung:

$$\left| F_n(xB_N) - \overline{F}^y_n(xB_N) \right| \leq \sum_{i=1}^{N}(1-F_{ni}(y)+F_{ni}(-y)) \leq \frac{1}{y^2} \sum_{i=1}^{N} \int_{|u|\geq y} u^2 dF_{ni}(u).$$

Für hinreichend große N gilt

$$y \geq K_N(\varepsilon,\delta).$$

Damit bekommen wir aus der Voraussetzung (6.26) die Beziehung

$$F_n(xB_N) - \overline{F}^y_n(xB_N) = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right), \; N \to \infty \; ,$$

d.h. mit (11.9) gilt in der vorgegebenen x-Zone des Satzes 6.3.1 die asymptotische Darstellung

$$F_n(xB_N) - \overline{F}^y_n(xB_N) = (1-\emptyset(x)) \; o\left(\frac{x^3}{(\ln N)^{\frac{1}{2}(2+\delta-c^2)}}\right), \; N \to \infty \; . \quad (11.48)$$

Für die Differenz $\left| \overline{F}^y_n(xB_N) - \emptyset(x) \right|$ gilt die Abschätzung (11.11) mit der oben gemachten Bemerkung bezüglich $\overline{F}^y_{ni}(z)$.

Die weiteren Beweisschritte werden für $h=\frac{x}{B_N}$ durchgeführt.

Entsprechend den Überlegungen vor (11.12) gilt

$$\varphi_{ni}(h)-1 = -h\int\limits_{|u|>y} u\,dF_{ni}(u)+\frac{h^2}{2}\int\limits_{|u|\leq y} u^2 e^{h\vartheta u}dF_{ni}(u),\quad 0<\vartheta<1.$$

Hieraus erhalten wir

$$\varphi_{ni}(h)-1 \leq \frac{h^2}{2}e^{hy}\sigma_{ni}^2 \quad \text{und} \quad \varphi_{ni}(h)-1 \geq -\frac{h}{y}\int\limits_{|u|>y} u^2 dF_{ni}(u),$$

d.h. für $N\to\infty$ gilt

$$\varphi_{ni}(h)-1 = O\left(\frac{x^2\sigma_{ni}^2}{\sqrt{N}\,B_N}\right). \tag{11.49}$$

Mit der Voraussetzung (6.26) bekommen wir für die Streuungen σ_{ni}^2 folgende maximale Wachstumsordnung:

$$\sigma_{ni}^2 = \left(\int\limits_{|u|\leq K_N} + \int\limits_{|u|>K_N}\right)u^2 dF_{ni}(u) \leq K_N^2+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{|u|>K_N} u^2 dF_{ni}(u),$$

d.h. für $N\to\infty$ und $\varepsilon=o\left(\frac{\sqrt{\ln N}}{x}\right)$ ist

$$\sigma_{ni}^2 = O\left(\frac{\varepsilon^2 N}{(\ln N)^{3+\delta}}\right)+o\left(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) = o\left(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Also gilt somit wegen $\varphi_{ni}(h)-1=o(1)$ die Beziehung (11.13).

Für das Restglied in (11.13) erhalten wir aus (11.49) für $N\to\infty$

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = O\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^4\frac{x^4}{NB_N^2}\right) = o\left(\frac{x^4}{NB_N^2}B_N^2\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right),$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1)^2 = o\left(\frac{x^4}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right). \tag{11.50}$$

Weiterhin haben wir mit $0<\vartheta<1$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{-y}^{y}\left(hu+\frac{h^2u^2}{2}\right)dF_{ni}(u)-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2+\int_{-y}^{y}\frac{h^3u^3}{6}e^{h\vartheta u}dF_{ni}(u)\right).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2\right) =$$

$$=O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big\{(\frac{h}{y}+\frac{h^2}{2})\int\limits_{|u|>y} u^2 dF_{ni}(u)+\frac{h^3}{6}e^{hy}K_N\int\limits_0^{K_N} u^2 dF_{ni}(u)+$$

$$+\frac{h^3}{6}ye^{hy}\int\limits_{K_N}^{y} u^2 dF_{ni}(u)+\frac{h^3}{6}K_N\int\limits_{-K_N}^{0} u^2 dF_{ni}(u)+\frac{h^3}{6}y\int\limits_{-y}^{-K_N} u^2 dF_{ni}(u)\Big\}\Big)=$$

$$= o\Big(\frac{x^2}{\sqrt{N}B_N}\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big)+O\Big(\frac{x^3}{B_N^3}\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}B_N^2\Big),$$

d.h. für $N\to\infty$ gilt

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_{ni}^2) = o\Big(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.51}$$

Aus (11.50) und (11.51) erhalten wir mit (11.15) und (11.16) für $N\to\infty$

$$\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\exp(\frac{-x^2}{2}) = 1+o(1) \tag{11.52}$$

und

$$\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\exp(\frac{-x^2}{2})-1 = o\Big(\frac{x^4}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.53}$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = O\Big(\sum_{i=1}^{N} e^{hy}\Big(K_N\int\limits_{|u|\leq K_N} u^2 dF_{ni}(u)+y\int\limits_{|u|>K_N} u^2 dF_{ni}(u)\Big)\Big) =$$

$$= O\Big(\frac{\varepsilon\sqrt{N}B_N^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big)+o\Big(\frac{\sqrt{N}N}{x(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big),$$

d.h. für $N\to\infty$ ist

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = o\Big(\frac{\sqrt{N}B_N^2}{x(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big). \tag{11.54}$$

Aus

$$\bar{\varphi}_{ni}(h) = \int\limits_{-y}^{y} u(1+hue^{h\vartheta u})dF_{ni}(u), \quad 0<\vartheta<1,$$

folgt mit der oben bestimmten Wachstumsordnung von σ_{ni}^2 für $N\to\infty$

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{\varphi}_{ni}^{2}(h) = O\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{1}{y}\int\limits_{|u|>y} u^2 dF_{ni}(u)+he^{hy}\int\limits_{-y}^{y} u^2 dF_{ni}(u)\Big)^2\Big) =$$

$$=o\Big(\frac{x^2}{N}B_N^2\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big)+o\Big(\frac{x^2}{B_N^2}B_N^2\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big) = o\Big(B_N^2\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\Big).$$

Weiterhin haben wir mit $0<\vartheta<1$ für $N \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\varphi}_{ni}(h)\varphi_{ni}(h) = \sum_{i=1}^{N} \int_{-y}^{y} u^2(1+hue^{h\vartheta u})dF_{ni}(u)(1+O(\frac{x^2\sigma_{ni}^2}{\sqrt{N}\,B_N})) =$$

$$= B_N^2 + o(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\,\frac{x^2B_N^2}{\sqrt{N}B_N}) + O(he^{hy}K_NB_N^2 + hye^{hy}\sum_{i=1}^{N}\int_{|u|>K_N} u^2dF_{ni}(u)) =$$

$$= B_N^2(1+o(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}})).$$

Somit erhalten wir entsprechend der Beziehung (11.21) für $N \to \infty$

$$\sigma_N^2(h) = B_N^2(1+o(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}})) \tag{11.55}$$

Für $N \to \infty$ haben wir nun die folgenden Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{N}(\varphi_{ni}(h) - h\sigma_{ni}^2(1+O(\frac{x^2\sigma_{ni}^2}{\sqrt{N}\,B_N}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(\int_{-y}^{y} u(1+hu+\frac{h^2u^2}{2}e^{h\vartheta u})dF_{ni}(u) - h\sigma_{ni}^2 + O(\frac{x^3\sigma_{ni}^4}{\sqrt{N}\,B_N^2})) =$$

$$= O(\sum_{i=1}^{N}(\int_{|u|>y} u^2dF_{ni}(u)(\frac{1}{y}+h) + \frac{h^2}{2}K_N\sigma_{ni}^2 + \frac{h^2}{2}y\int_{|u|>K_N} u^2dF_{ni}(u) + \frac{x^3\sigma_{ni}^4}{\sqrt{N}\,B_N^2})) =$$

$$= o(\frac{x\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}) + O(\frac{x^2\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}) + o(\frac{x^3\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}) = o(\frac{x^3\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}), \quad 0<\vartheta<1.$$

Hieraus ergibt sich für $N \to \infty$

$$NA_N(h) - xB_N = o(\frac{x^3\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}). \tag{11.56}$$

Wir kommen jetzt zur Abschätzung der Ausdrücke J_1 bis J_4:

Aus (11.52), (11.54) und (11.55) folgt für $N \to \infty$

$$J_1 = \frac{1}{x}\exp(\frac{-x^2}{2})\ o(\frac{1}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}).$$

Mit (11.52) und (11.56) erhalten wir für $N \to \infty$

$$J_2 = \frac{1}{x}\exp(\frac{-x^2}{2})\ o(\frac{x^4}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}).$$

Die Beziehungen (11.52) und (11.55) ergeben für $N \to \infty$

$$J_3 = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\, o\left(\frac{x^3}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Schließlich haben wir mit (11.53) für $N \to \infty$

$$J_4 = (1-\varnothing(x))\, o\left(\frac{x^4}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right).$$

Hieraus erhalten wir wegen (11.9) und (11.11) die asymptotische Darstellung

$$F_n^y(xB_N) - \varnothing(x) = (1-\varnothing(x))\, o\left(\frac{x^4}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right),$$

d.h. für $N \to \infty$ gilt im Gebiet $1 \leq x \leq c\sqrt{\ln\ln N}$ die Beziehung

$$F_n^y(xB_N) - \varnothing(x) = (1-\varnothing(x))\, o\left(\frac{x^3}{(\ln N)^{\frac{1}{2}(2+\delta-c^2)}}\right). \tag{11.57}$$

Aus den Beziehungen (11.48) und (11.57) folgt die Aussage des Satzes 6.3.1.

6. Beweis der Sätze über die Existenz von Momenten

Wir beweisen zuerst zwei Abschätzungen der individuellen Verteilungsfunktionen durch die Summenverteilungsfunktion.

Lemma 11.1: Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit den Verteilungsfunktionen $V_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, und der Summenverteilungsfunktion $F_n(x)$.

Dann gilt mit einer positiven Konstanten γ die Abschätzung
$1-V_i(4z)+V_i(-4z) \leq \gamma(1-F_n(z)+F_n(-z))$, $i=1,2,\ldots,n$, $(\gamma > 2)$,
falls $z \geq z_i$ ist. Dabei ist z_i eine positive Konstante, die nur von der individuellen Verteilungsfunktion $V_i(x)$ abhängt.

Lemma 11.2: Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_i=0$ und $EX_i^2 < \infty$, $i=1,2,\ldots,n$. Wir setzen $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2$.

Dann gilt mit einer positiven Konstanten γ für $i=1,2,\ldots,n$, falls $z \geq z_0 = \sqrt{\frac{5\gamma}{4(\gamma-1)}}$, $(\gamma > 1)$, ist, die Abschätzung

$$1-V_i(2zB_n) \leq \sum_{i=1}^{n}(1-V_i(2zB_n)) \leq \gamma(1-F_n(zB_n)).$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt auch für $V_i(-2zB_n)$.

Beweis des Lemmas 11.1: Der Beweis beruht auf der Methode von L.E.BAUM/M.KATZ/R.R.READ [3]. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$A_i^e = (X_i \geqq 4z),\quad B_i^e = \Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k \geqq -2z\Big),\quad C_i^e = (X_i < z),$$

$$D_1^e = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \geqq 2z\Big),\quad D_2^e = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k < -z\Big)$$

und die Verteilungsfunktion

$$H_i(-2z) = 1 - P(B_i^e).$$

Das Komplementärereignis eines Ereignisses E bezeichnen wir mit $\overline{E}$. Es gilt

$$P(A_i^e B_i^e) = P(A_i^e) - P(A_i^e \overline{B}_i^e) \geqq P(A_i^e) - P(\overline{B}_i^e).$$

Andererseits gilt für die unabhängigen Ereignisse A_i^e und B_i^e

$$P(A_i^e B_i^e) = P(A_i^e)P(B_i^e) = (1 - V_i(4z))(1 - H_i(-2z)) \leqq$$

$$\leqq \int_{u=4z}^{\infty} (1 - H_i(2z-u))\,dV_i(u) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} (1 - H_i(2z-u))\,dV_i(u) =$$

$$= 1 - F_n(2z) = P(D_1^e).$$

Aus den soeben betrachteten zwei Abschätzungen folgt

$$P(A_i^e) \leqq P(\overline{B}_i^e) + P(D_1^e).$$

Durch entsprechende Überlegungen, wie wir sie eben durchgeführt haben, erhalten wir für die unabhängigen Ereignisse $\overline{B}_i^e$ und C_i^e

$$P(\overline{B}_i^e)P(C_i^e) \leqq P(D_2^e).$$

Es sei $0 < \delta < 1$. Für jedes beliebige aber feste i, $i = 1, 2, \ldots, n$, existiert eine hinreichend große Zahl $z_i > 0$ derart, so daß für alle $z \geqq z_i$ die Abschätzung

$$P(C_i^e) \geqq \delta$$

gilt. Hieraus folgt mit den vorangehenden Ungleichungen für $z \geqq z_i$

$$P(A_i^e) \leqq \frac{1}{\delta} P(D_2^e) + P(D_1^e).$$

Mit den Ereignissen

$$a_i^e = (X_i < -4z),\quad b_i^e = \Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k < 2z\Big),\quad c_i^e = (X_i \geqq -z),$$

$$d_1^e = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k < -2z\Big),\quad d_2^e = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \geqq z\Big)$$

gilt entsprechend für $0 < \delta' < 1$ die Ungleichung

$$P(c_i^e) \geqq \delta',\quad z \geqq z_i,$$

und damit

$$P(a_i^e) \leqq \frac{1}{\delta'} P(d_2^e) + P(d_1^e),\quad z \geqq z_i.$$

Somit erhalten wir für die disjunkten Ereignisse A_i^e und a_i^e für $z \geq z_i$

$$P(A_i^e \cup a_i^e) = P(A_i^e) + P(a_i^e) \leq \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right)(P(d_2^e)+P(D_2^e)).$$

Mit $\gamma=\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right)$ folgt hieraus die Behauptung des Lemmas 11.1.

<u>Beweis des Lemmas 11.2:</u> Der Beweis dieses Lemmas beruht auf der Methode von P.ERDÖS [33]. Wir definieren die Ereignisse

$$A_i^e = (X_i \geq 2zB_n),\quad C_i^e = \Big(\Big|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k\Big| < zB_n\Big),\quad D^e = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq zB_n\Big).$$

Es gilt

$$D^e \supset \bigcup_{i=1}^{n}(A_i^e C_i^e),$$

d.h.

$$P(D^e) \geq P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^e C_i^e\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^e C_i^e) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i^e C_i^e A_j^e C_j^e) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^e C_i^e) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i^e A_j^e) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^e)\Big\{P(C_i^e) - \sum_{j=i+1}^{n} P(A_j^e)\Big\}.$$

Mit der ČEBYŠEVschen Ungleichung erhalten wir

$$P(C_i^e) = 1 - P\Big(\Big|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} X_k\Big| \geq zB_n\Big) \geq 1 - \frac{1}{z^2}.$$

Andererseits haben wir

$$\sum_{j=i+1}^{n} P(A_j^e) \leq \frac{1}{4z^2},$$

also gilt für alle $z \geq z_0 > \sqrt{\frac{5}{4}}$ mit einer positiven Konstanten γ die Abschätzung

$$P(C_i^e) - \sum_{j=i+1}^{n} P(A_j^e) \geq 1 - \frac{5}{4z^2} \geq \frac{1}{\gamma},\ \text{falls}\ z_0 = \sqrt{\frac{5\gamma}{4(\gamma-1)}}\ \text{ist.}$$

Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas 11.2.

<u>Beweis des Satzes 1.2.8:</u>

Mit $\overline{V}_i$ und $\overline{F}_n$ bezeichnen wir folgende aus den Verteilungsfunktionen V_i und F_n gebildete Differenzen:

$$\overline{V}_i(4z)=1-V_i(4z)+V_i(-4z),\quad \overline{F}_n(z)=1-F_n(z)+F_n(-z).$$

Es sei $\overline{z}=\varepsilon x\sqrt{n}$ und $x=\sqrt{(2+c^2)\ln n}$. Dann folgt aus der Voraussetzung (1.13) des Satzes 1.2.8 unter Verwendung des soeben bewiesenen Lemmas 11.1 die

Abschätzung

$$\overline{V}_i(4\overline{z}) \leq \gamma \overline{F}_n(\overline{z}) \leq \frac{2\cdot\gamma\cdot b}{n^{\frac{1}{2}(2+c^2)}} \leq \frac{b_1}{\overline{z}^{2+c_1^2}}, \quad \overline{z} \geq z_i.$$

Dabei sind b_1 und c_1 positive Konstanten mit $c_o < c_1 < c$.

Aus dieser Beziehung läßt sich für alle $z \geq z_i$ die Ungleichung

$$\overline{V}_i(z) \leq \frac{b_2}{z^{2+c_1^2}}, \quad b_2 > 0, \; c_o < c_1 < c, \tag{11.58}$$

herleiten: Es sei z' derart gewählt, daß $n \leq z' < n+1$ und $z=z(z')=4\varepsilon\sqrt{(2+c^2)z'\ln z'}$ gilt. Dann folgt wegen $4\overline{z}=z(n)$ im Intervall $n \leq z' < n+1$

$$\overline{V}_i(z(z')) \leq \overline{V}_i(4\overline{z}) \leq \frac{b_1}{\overline{z}^{2+c_1^2}} \leq \frac{b_2}{\left\{\overline{z}\sqrt{\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}}\right\}^{2+c_1^2}} \leq$$

$$\leq \frac{b_2}{z(z')^{2+c_1^2}},$$

da für alle n der Ausdruck $\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Jetzt erhalten wir mit $z_i > 0$

$$E|X_i|^{2+c_o^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |z|^{2+c_o^2} dV_i(z) = -\int_0^{\infty} z^{2+c_o^2} d\overline{V}_i(z) =$$

$$= (2+c_o^2)\int_0^{\infty} z^{1+c_o^2}\overline{V}_i(z)dz \leq$$

$$\leq \overline{V}_i(0)\, z_i^{2+c_o^2} + (2+c_o^2)\int_{z_i}^{\infty} \frac{b_2}{z^{1+c_1^2-c_o^2}}dz < \infty,$$

da $c_1 > c_o$ ist. Hieraus ergibt sich die Behauptung (1.14) des Satzes 1.2.8.

Die Voraussetzung (6.19), die W. WOLF [113,114] zum Beweis ähnlicher Aussagen benutzte, erweist sich also als nicht notwendig.

Zum Beweis des Satzes von V.K. ROHATGI (s. S.71): Aus Lemma 11.1 und der Voraussetzung bei V.K. ROHATGI folgt, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}\, \overline{V}_i\left(4\varepsilon\sqrt{(2+c_o^2)n\ln n}\right) < \infty \tag{11.59}$$

ist. Hieraus ergibt sich die Beziehung (6.21) mit $q=2+c_o^2$ wie folgt:

Es seien c_3 und c_4 positive Konstanten und $K=4\varepsilon\sqrt{2+c_o^2}$, dann erhalten wir aus (11.59)

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} \sum_{k=n}^{\infty}(\overline{V}_i(K\sqrt{k\ln k})-\overline{V}_i(K\sqrt{(k+1)\ln(k+1)})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(\overline{V}_i(K\sqrt{k\ln k})-\overline{V}_i(K\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}))\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)} \geqq$$

$$\geqq c_3 \sum_{k=1}^{\infty}(k\ln k)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}(\overline{V}_i(K\sqrt{k\ln k})-\overline{V}_i(K\sqrt{(k+1)\ln(k+1)})) \geqq$$

$$\geqq c_4 \sum_{k=1}^{\infty}(-\int_{K\sqrt{k\ln k}}^{K\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}} z^{2+c_o^2} d\overline{V}_i(z)) =$$

$$= -c_4 \int_0^{\infty} z^{2+c_o^2} d\overline{V}_i(z) = c_4 E|X_i|^{2+c_o^2} .$$

Zum Beweis der Aussagen von W. WOLF (s. S.69-70):
Aus der Bedingung (6.19) folgt für hinreichend große n mit einer Konstanten A die Abschätzung

$$\frac{1}{n} B_n^2 \leqq A < \infty \quad , \quad \text{d.h.} \quad B_n \leqq \sqrt{An} .$$

Aus den Voraussetzungen (6.6) und (6.7) bzw. (6.20) ergeben sich hieraus die Ungleichungen

$$\overline{F}_n(\sqrt{A}x\sqrt{n}) \leqq \overline{F}_n(xB_n) \leqq 2b\exp(\frac{-x^2}{2}),$$

d.h. die Voraussetzungen des Satzes 1.2.8 sind erfüllt.

<u>Beweis der Sätze 6.2.1 und 6.2.2:</u>
Aus den Voraussetzungen des Satzes 6.2.1 folgt für hinreichend große n

$$\overline{F}_n(\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) \leqq \frac{b}{n^{\frac{1}{2}c^2}} .$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln n\, \overline{F}_n(\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) < \infty \quad . \tag{11.60}$$

Mit dem Satz 1 von J.A.DAVIS [29] ergibt sich hieraus

$$EX_1=0 \quad \text{und} \quad EX_1^2 < \infty . \tag{11.61}$$

(Dieser Satz 1 von J.A.DAVIS [29] beinhaltet u.a., daß die Bedingungen (11.60) und (11.61) äquivalent sind.)
Aus Lemma 11.2 folgt nun mit $z=\frac{\varepsilon}{\sigma}c\sqrt{\ln n}$ und $B_n=\sigma\sqrt{n}$, $\sigma^2=EX_1^2$, für $z \geqq z_o$

$$nP(X_1 \geqq 2\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) \leqq \gamma P(\sum_{k=1}^{n} X_k \geqq \varepsilon c\sqrt{n\ln n})$$

und entsprechend

$$nP(X_1<-2\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) \leq \gamma\, P(\sum_{k=1}^{n} X_k<-\varepsilon c\sqrt{n\ln n}).$$

Damit erhalten wir, daß für $c>c_o$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}c_o^2}(\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}\overline{V}_1(2\varepsilon c\sqrt{n\ln n}) < \infty$$

ist. Durch entsprechende Überlegungen, die nach (11.59) geführt wurden, ergibt sich hieraus die Behauptung (6.22) des Satzes 6.2.1.

Beim Beweis des Satzes 6.2.2 gehen wir folgendermaßen vor: Auf der Grundlage des oben angeführten Satzes von J.A.DAVIS bekommen wir wie im vorangehenden Beweis auch hier die Aussage (11.61). Mit der im Beweis des Satzes 6.2.1 erhaltenen Beziehung

$$n\overline{V}_1(2\varepsilon c_o\sqrt{n\ln n}) \leq \gamma\overline{F}_n(\varepsilon c_o\sqrt{n\ln n}),\ (c=c_o),$$

ergibt sich ganz analog zum vorangehenden Beweis die Behauptung (6.22).

<u>Zum Beweis der Sätze 6.2.3 bis 6.2.6:</u>

Mit Hilfe des Lemmas 11.2 erhalten wir für $\bar{z}=\varepsilon\sqrt{(2+c^2)\ln n}$ aus der Voraussetzung des Satzes 6.2.3 die Abschätzung

$$1-V_i(2\bar{z}B_n) \leq \frac{\gamma b}{n^{\frac{1}{2}(2+c^2)}} \leq \frac{b_1}{(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_1^2)}},\ b_1>0,\ c_o<c_1<c.$$

Wegen der Bedingung (6.19) gilt für alle hinreichend großen n und mit einer positiven Konstanten $A<\infty$, daß $B_n\leq\sqrt{An}$ ist. Hieraus erhalten wir ganz analog zum Beweis der Beziehung (11.58), daß für alle $z>0$ mit einer Konstanten $b_2>0$

$$1-V_i(z) \leq \frac{b_2}{z^{2+c_1^2}}$$

gilt. Nun läßt sich wie im Beweis des Satzes 1.2.8 unschwer die Beziehung (6.25) zeigen.

Wir bemerken, daß die Voraussetzung (6.19) vernachlässigt werden kann, wenn statt dessen nur $\lim_{n\to\infty} B_n=\infty$ gefordert und die Abschätzung der Differenz $1-F_n(\varepsilon xB_n)$ für $x=\sqrt{(2+c^2)\ln B_n}$ vorausgesetzt wird.

Mit Lemma 11.2 und (6.19) erhalten wir aus der Voraussetzung des Satzes 6.2.4 die Konvergenz folgender Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(n\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_o^2)}(1-V_i(\varepsilon'\sqrt{n\ln n}))<\infty,\ \varepsilon'>0.$$

Entsprechend den nach (11.59) durchgeführten Überlegungen folgt hieraus die Behauptung (6.25).

Aus der Voraussetzung des Satzes 6.2.5 folgt mit Hilfe des Lemmas 11.2 für $z=\frac{\varepsilon}{\sigma}c\sqrt{\ln n}$, $B_n=\sigma\sqrt{n}$. und $\sigma^2=EX_1^2$, daß

$$n(1-V_1(2zB_n)) \leqq \gamma(1-F_n(zB_n)) \leqq \frac{\gamma b}{n^{c^2/2}}$$

ist. Daraus läßt sich nun ganz analog zu (11.58) herleiten, daß für $z>0$

$$1-V_1(z) \leqq \frac{b_2}{z^{2+c_1^2}}, \; b_2>0, \; c_0<c_1<c,$$

ist. Der weitere Beweis verläuft wie der des Satzes 6.2.3.
Entsprechend den bisherigen Argumentationen folgt die Behauptung des Satzes 6.2.6 aus der Ungleichung

$$n(1-V_1(2\varepsilon\sqrt{n\ln n})) \leqq \gamma(1-F_n(\varepsilon'\sqrt{n\ln n})), \quad \varepsilon'>0,$$

und der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}c_0^2}(\ln n)^{\frac{1}{2}(2+c_0^2)}(1-V_1(2\varepsilon\sqrt{n\ln n}))<\infty .$$

Abschließend möchten wir noch einige Bemerkungen zu dem im Abschnitt 6.2b angeführten Beispiel machen:
Es gilt mit einer Konstanten $C>0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\infty} z^q d\emptyset\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^q\int_0^{\infty} u^q d\emptyset(u) = C\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^q .$$

Die arithmetisierte Summe hat folgendes Konvergenzverhalten:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^q \geqq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{[\lg n]}(10^{\delta m})^{q/2} \geqq \frac{1}{n}\int_0^{\lg n-1} 10^{\delta qx/2}dx =$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{2}{\delta q}\,\frac{1}{\ln 10}\,10^{\delta qx/2}\Big|_0^{\lg n-1} =$$

$$= \frac{2}{\delta q\ln 10}\,\frac{1}{n}\left(\frac{n^{\delta q/2}}{10^{\delta q/2}}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ für } \delta>\frac{2}{q} .$$

Hieraus folgt, daß die Bedingung (6.8) nicht erfüllt ist.
Andererseits erhält man aus dieser Abschätzung, daß die Bedingung (6.19) wegen $\delta\leqq 1$ gilt. Die Gültigkeit von (6.2) ist auf Grund der Festlegung der Streuungen σ_k^2 offensichtlich erfüllt.

Weiterhin gilt für dieses Beispiel mit einer positiven Konstanten b_0 für alle $c>0$, $\varepsilon\geqq 1$ und $b\geqq b_0$ die Beziehung (6.24):

$$1-F_n(\varepsilon xB_N)\leqq 1-F_n(xB_N)=1-\emptyset(x)\leqq b\exp(-x^2/2), \quad x=c\sqrt{\ln N} .$$

Kapitel XII

Anhang (Rechnerprogramme)

In diesem Kapitel werden die Rechnerprogramme angeführt, die speziell für die Berechnung der absoluten Konstanten C_4 und C_5 aus den Sätzen 1.2.4 und 1.2.5 verwendet wurden. Bereits in den Abschnitten 4.5 und 5.3 wurden die mathematischen Zusammenhänge näher erläutert, die dabei eine Rolle spielen.

Es wurde weitgehendst versucht, die im theoretischen Teil der Arbeit auftretenden Bezeichnungen auch innerhalb der Rechnerprogramme zu verwenden, um das Verständnis dieser Programme zu erleichtern.

In der folgenden Tabelle sind auftretende unterschiedliche Bezeichnungen für ein und dieselbe Größe gegenübergestellt:

Bezeichnung im theoretischen Teil der Arbeit	γ	γ^2	e	e^γ	α^3	α^2	α	β	δ_o	L_o	U_1	U_2	N_o	M_o	P_o
Bezeichnung im Rechnerprogramm	G	GG	E	EG	H	HH	HHH	B	D	Q	F	FF	I	M	P

Die Lochkarten des Rechnerprogramms zur Berechnung von C_4 tragen die Bezeichnung

"VZZM" ("Verschieden verteilte Zufallsgrößen -
Zweiseitige Momente")

und sind weiterhin in 10-er Schritten

von 0000 bis 1800

durchnumeriert.

Entsprechend befindet sich auf den Lochkarten des Rechnerprogramms zur Berechnung von C_5 die Bezeichnung

"VZEM" ("Verschieden verteilte Zufallsgrößen -
Einseitige Momente").

Die Programmiersprache ist BESM6-ALGOL.

Die Lochkarten sind dabei im $^{7}_{9}$R300-Code gelocht.

Auf den folgenden Seiten werden die zwei Rechnerprogramme "VZZM" und "VZEM" vollständig wiedergegeben.

Die Rechnerprogramme zur Berechnung der absoluten Konstanten C_1 bis C_3 und C_6 aus den Sätzen 1.2.1 bis 1.2.3 und 1.2.6 können aus den zwei Grundprogrammen "VZZM" und "VZEM" gewonnen werden, wenn in diesen Programmen gewisse Lochkarten durch andere ersetzt bzw. einige neue Lochkarten eingefügt werden. Diese Veränderungen werden im Anschluß an die beiden Grundprogramme angeführt.

```
*LIMIT,TIME,720.12MIN
*LIMIT,LINE,660.10SEITEN
*XPACK,TAPE,I30,LNUMB=283,LNAME=GROSSMANN - SCHOENIGER.
*PERSONAL LIBRARY,30.
*RELEASE,30.
*ALGOL

'ALGOL':LIMI;
'BEGIN''INTEGER'N,NN;
'REAL'A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M,P,Q,U,V,W,X,Y,Z,
K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7,K8,K9,K10,K11,K12,K13,K15,K16,
AA,EG,FF,GG,GI,GJ,GK,HH,HHH,KK,PI,VV,ZA,ZB,ZE,ZW,ZX,ZY;
Q:=0.7975;
G:=2.3;
K:=7.6;
Z:=1000;NN:=0;
E:=EXP(1);PI:=4*ARCTAN(1);K1:=1/SQRT(2*PI);
K2:=1/2/(1-EXP(-SQRT(E*PI/2)));
PRINT(Q,G,K,Z,NN,E,PI,K1,K2,NEWLINE);
KK:=K;
'BEGIN''PRØCEDURE'LUD(N7,X7,R7,B7,E7,EZ);
'VALUE'B7;'INTEGER'N7,X7,R7;'REAL'B7,E7;'LABEL'EZ;
'BEGIN'K:=KK+B7;L:=K**3*Q;
PRINT(L,K,B7);
'IF'NN'GE'1'AND'L>ZE'THEN''GØTØ'EZ;
N:=0;X:=0;Y:=3;V:=216*EXP(-2)/(L-8);
ZX:=X**3*EXP(-X)-V;
ZY:=Y**3*EXP(-Y)-V;
'IF'ZY'LE'0'THEN''GØTØ'EZ;
MM2:N:=N+1;W:=(X+Y)/2;
ZW:=W**3*EXP(-W)-V;
'IF'ZW=0'THEN''GØTØ'RR2;
'IF'SIGN(ZY)=SIGN(ZW)'THEN''BEGIN'Y:=W;ZY:=ZW'END'
'ELSE''BEGIN'X:=W;ZX:=ZW'END';
'IF'N>50'THEN''GØTØ'RR2;F:=Y-X;
'IF'F>10**(-10)'THEN''GØTØ'MM2;
RR2:
V:=W;
U:=EXP(V);W:=2*U/E/V;'IF'U>W'THEN'U:=W;
P:=(L-8)*EXP(0.5)/(3*U)**1.5;
F:=P*K*K*EXP(-K*K/2)*K1;
'IF'K*K<2'THEN'F:=P*2/E*K1;PI:=F;
C:=8+8*E*27*EXP(V-3)/V**3;
PRINT(P,F,C);
'IF'F>L'THEN''GØTØ'EZ;
A:=L**(1/3);PRINT(A,NEWLINE);
VV:=U;
AA:=A;
'BEGIN''PRØCEDURE'PAD(N8,X8,R8,B8,E8,EY);
'VALUE'B8;'INTEGER'N8,X8,R8;'REAL'B8,E8;'LABEL'EY;
'BEGIN'A:=AA+B8;
M:=(A/VV/2-1)*8*E/3/A;
'IF'M'LE'0'THEN''GØTØ'EY;
M:=M**1.5*(L-8)/8/E;I:=LN(P/M);
'IF'A'LE'2'THEN''GØTØ'EY;
F:=A*I;
'IF'F<K*K'THEN'F:=K*K;F:=(A-2)/2/A*F;
'IF'F>1'THEN'F:=F*EXP(-F)'ELSE'F:=1/E;F:=2*A/(A-2)*F;
FF:=M*F*K1;
'IF'FF>L'THEN''GØTØ'EY;
'IF'K*K/A>I'THEN'I:=K*K/A;P:=M*EXP(I);
```

```
'IF'I'GE'1.5'THEN'H:=(A*I)**1.5/P'ELSE'H:=(3*A/2/E)**1.5/M;
HH:=H**(2/3);HHH:=H**(1/3);
'IF'I'GE'0.5'THEN'B:=SQRT(A*I)/P'ELSE'B:=SQRT(A/2/E)/M;
N:=0;X:=0;Y:=3;V:=(3*A/K/E)**3/M;
ZX:=X**3*EXP(-X)-V;
ZY:=Y**3*EXP(-Y)-V;
'IF'ZY'LE'0'THEN''GØTØ'EY;
MM3:N:=N+1;W:=(X+Y)/2;
ZW:=W**3*EXP(-W)-V;
'IF'ZW=0'THEN''GØTØ'RR3;
'IF'SIGN(ZY)=SIGN(ZW)'THEN''BEGIN'Y:=W;ZY:=ZW'END'
'ELSE''BEGIN'X:=W;ZX:=ZW'END';
'IF'N>50'THEN''GØTØ'RR3;F:=Y-X;
'IF'F>10**(-10)'THEN''GØTØ'MM3;
RR3:
D:=W;
ZY:=G;
'BEGIN''PRØCEDURE'FKT(N9,X9,R9,B9,E9,EX);
'VALUE'B9;'INTEGER'N9,X9,R9;'REAL'B9,E9;'LABEL'EX;
'BEGIN'G:=ZY+B9;
GG:=G*G;EG:=EXP(G);
K5:=A**3;
V:=12/D/D/E/E;'IF'V>1'THEN'V:=1;V:=EXP(D)/6*V;
K6:=K5*27/G**3/(1-H*A*A/K**4)*EXP(-(1/2-1/A)*K*K+H*V+G-2);
V:=1-H*(1+G)/G**3;      Test, ob diese Größe positiv ist! sonst GOTO EX
'IF'V'LE'0'THEN''GØTØ'EX;
K15:=1/V;
V:=EG/G/E;W:=EG/2;'IF'V>W'THEN'V:=W;V:=V*HH;
V:=V+HHH;W:=HH/GG;'IF'V<W'THEN'V:=W;
K16:=K15*V;
K10:=((EG*K15)**(1/3)+K16)**3;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
K8:=EXP(H*V);
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=HH*V;W:=(1+G)/GG;'IF'V<W'THEN'V:=W;
W:=1/2;'IF'V<W'THEN'V:=W;W:=V+HHH/2;
U:=EG/2;V:=EG/G/E;'IF'U>V'THEN'U:=V;'IF'W<U'THEN'W:=U;
V:=HH/6;'IF'W<V'THEN'W:=V;'IF'H>1'THEN'V:=(HH-1)/GG'ELSE'V:=0;
'IF'HH>2'THEN'U:=(HH/2-1)/G'ELSE'U:=0;V:=HH/G**3+U+V;
'IF'W<V'THEN'W:=V;K13:=K15*W;
X:=1.5*HHH+0.25*H;W:=1+HH/2;U:=1/G;
'IF'U<W'THEN'U:=W;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=(HH+HHH*HH)*V;W:=2*EG/G/E;'IF'W>EG'THEN'W:=EG;
W:=HH*W;V:=V+W;'IF'U<V'THEN'U:=V;
X:=X+U;
V:=12/GG/E/E;'IF'V>1'THEN'V:=1;
V:=(1+V)*EG/12;
W:=12/GG/E/E;'IF'W>1'THEN'W:=1;
W:=(1/G**3+1/GG+1/2/G+1/6/G*W)*EG/2;
'IF'V<W'THEN'V:=W;'IF'H>1'THEN'W:=HH-1'ELSE'W:=0;W:=W/G/6;
W:=(HH/3/G**3+HH/3/GG+1/GG+1/G+W)/2;
'IF'V<W'THEN'V:=W;
U:=4*EXP(-4)/GG/GG;'IF'U>1/36'THEN'U:=1/36;
U:=HH*EXP(2*G)*U;
W:=1/GG/E/E;'IF'W>1/4'THEN'W:=1/4;
W:=EXP(2*G)*W;W:=U+W;
'IF'V<W'THEN'V:=W;W:=HH/36+1/4;
'IF'V<W'THEN'V:=W;'IF'H>1'THEN'W:=HH-1'ELSE'W:=0;W:=W/G**4;
W:=HH/G**6+(1+HH)/GG/GG+(1/2+HH/4)/GG+2*HH/G**5+(1+HH)/GG/G+W;
'IF'V<W'THEN'V:=W;
```

```
X:=K15**2*(X+H*V);K4:=B*X;
'IF'K4'GE'1'THEN''GØTØ'EX;
K11:=1-K4;
V:=EG*(1+HH/2);W:=2*HH+HH*HH/2-1;'IF'W<0'THEN'W:=0;
W:=HH*((3+HH)/GG+(1+HH)/G**3)+W/G;
'IF'V<W'THEN'V:=W;W:=HH*(7+HH)/6;
'IF'V<W'THEN'V:=W;
Y:=V;
V:=1/GG/GG;'IF'V<1/6'THEN'V:=1/6;
W:=12/GG/E/E;'IF'W>1'THEN'W:=1;
W:=EXP(2*G)*W/6;'IF'V<W'THEN'V:=W;
W:=(1/G**3+1/GG+2/3/G)/2;'IF'V<W'THEN'V:=W;W:=12/GG/E/E;
'IF'W>1'THEN'W:=1;'IF'H>1'THEN'U:=HH-1'ELSE'U:=0;U:=1/G/2*U;
W:=EG/6*W*(HH*(1+1/G)/GG+U);
U:=2/G/E;'IF'U>1'THEN'U:=1;
U:=EG/2*U*(1+1/G)/G;
W:=W+U;'IF'V<W'THEN'V:=W;
W:=12/GG/E/E;'IF'W>1'THEN'W:=1;
U:=HH*EG*W/18;W:=2/E/G;'IF'W>1'THEN'W:=1;W:=W*EG/2;
W:=(U+W)/2;'IF'V<W'THEN'V:=W;
Y:=(V*H+Y)*K15**2;
'IF'X<Y'THEN'X:=Y;
K12:=X/(1+SQRT(K11));
U:=EG/2;V:=EG/G/E;'IF'U>V'THEN'U:=V;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=HHH*V+1/2;'IF'U>V'THEN'U:=V;
W:=HHH*(1+G)/G**3;'IF'U<W'THEN'U:=W;
K3:=HHH*U;
'IF'K3'GE'1'THEN''GØTØ'EX;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
W:=(1+G)/G**3+1/2/G;'IF'W<1/6'THEN'W:=1/6;
W:=W+HHH/2*U*U/(1-K3);'IF'V<W'THEN'V:=W;
K9:=V*EXP(H*V);
V:=K*K;
'IF'V'GE'3'THEN'U:=K**3*EXP(-V/2)'ELSE'U:=(3/E)**1.5;
U:=2*Q*K8*K10/K11**1.5*U;
'IF'V'GE'4'THEN'W:=V*V*EXP(-V/2)'ELSE'W:=16*EXP(-2);
W:=2*K2*K8*K12*W;
'IF'V'GE'5'THEN'Y:=K**5*EXP(-V/2)'ELSE'Y:=(5/E)**2.5;
Y:=(2*K8*K13+K9)*K1*Y;
K7:=U+W+Y;
E9:=K5+K6+K7;ZA:=E9;
'END'FKT;
FKT(1,1,1,0,C,EY);
LIMI(1,1,1,GI,FKT,0.00000000001);
C:=ZA;
'END';
ZB:=C;E8:=C;
'IF'E8<L'THEN'E8:=1000;
'END'PAD;
PAD(1,1,1,0,C,EZ);
LIMI(1,1,1,GJ,PAD,0.00000000001);
C:=ZB;
'END';
PRINT(A,M,P,FF,G,NEWLINE);
PRINT(K5,K6,K7,H,K3,K4,K11,K15,C,NEWLINE);
'IF'NN=0'THEN'E7:=Z'ELSE'E7:=ZE;Z:=C;
'IF'C'LE'E7'THEN''BEGIN''IF'C<L'THEN'E7:=L'ELSE'E7:=C'END''ELSE'
E7:=1000;ZE:=E7;
NN:=NN+1;PRINT(E7,K,NN);
'END'LUD;
```

```
LIMI(1,1,1,GK,LUD,0.0000000001);
PRINT(NEWLINE,''VZZM:'',NEWLINE);
'END';F:=PI;
PRINT(''  Q='',Q,''  L='',L,''  C='',C,''  Z='',Z,NEWLINE,
''  A='',A,''  K='',K,''  M='',M,''  P='',P,''  I='',I,NEWLINE);
PRINT(''  F='',F,''  FF='',FF,''  G='',G,''  H='',H,''  B='',B,
NEWLINE,
'' K3='',K3,'' K4='',K4,'' K5='',K5,'' K6='',K6,'' K7='',K7,
NEWLINE,
''K11='',K11,''K15='',K15,NEWLINE);
'END''EOP'



*LIMIT,TIME,300.5MIN
*LIMIT,LINE,660.10SEITEN
*EXPACK,TAPE,I30,LNUMB=283,LNAME=GROSSMANN - SCHOENIGER. —> 997
*PERSONAL LIBRARY,30.
*RELEASE,30.
*ALGOL

'ALGOL':LIMI;
'BEGIN''INTEGER'N,NN;
'REAL'A,C,D,E,F,G,H,I,K,L,P,Q,U,V,W,X,Y,Z,
K1,K2,K3,K4,K5,K7,K8,K9,K10,K11,K12,K13,K15,K16,
EG,FF,GG,GI,GK,HH,HHH,KK,PI,PP,ZA,ZE,ZW,ZX,ZY;
Q:=0.7975;
G:=2.1;
K:=3.6;                    7,3962612917
Z:=1000;NN:=0;D:=8.70576020647;
E:=EXP(1);PI:=4*ARCTAN(1);K1:=1/SQRT(2*PI);
K2:=1/2/(1-EXP(-SQRT(E*PI/2)));
PRINT(Q,D,G,K,Z,NN,E,PI,K1,K2,NEWLINE);
KK:=K;
'BEGIN''PRØCEDURE'LUD(N7,X7,R7,B7,E7,EZ);
'VALUE'B7;'INTEGER'N7,X7,R7;'REAL'B7,E7;'LABEL'EZ;
'BEGIN'K:=KK+B7;L:=K**3*D;
PRINT(L,K,B7);
'IF'NN'GE'1'AND'L>ZE'THEN''GØTØ'EZ;
N:=0;X:=0;Y:=3;V:=432/E/E(L*E-16);
ZX:=X**3*EXP(-X)-V;
ZY:=Y**3*EXP(-Y)-V;
'IF'ZY'LE'0'THEN''GØTØ'EZ;
MM2:N:=N+1;W:=(X+Y)/2;
ZW:=W**3*EXP(-W)-V;
'IF'ZW=0'THEN''GØTØ'EZ;
'IF'SIGN(ZY)=SIGN(ZW)'THEN''BEGIN'Y:=W;ZY:=ZW'END'
'ELSE''BEGIN'X:=W;ZX:=ZW'END';
'IF'N>50'THEN''GØTØ'RR2;F:=Y-X;
'IF'F>10**(-10)'THEN''GØTØ'MM2;
RR2:
V:=W;
U:=EXP(V);W:=2*U/E/V;'IF'U>W'THEN'U:=W;
P:=(L*E-16)*SQRT(E)*0.5/(3*U)**1.5;
F:=2*LN(P)*K*K*EXP(-K*K/2)*K1;
'IF'K*K<2'THEN'F:=LN(P)*4/E*K1;PI:=F;
C:=8+216*EXP(V-2)/V**3;C:=2*C/E;
PRINT(P,F,C);
'IF'F>L'THEN''GØTØ'EZ;
N:=0;X:=0;Y:=3;V:=432/E/E(L*P/LN(P)-16);
'IF'P<E'THEN'V:=432/E/E/(L*E-16);
```

```
ZX:=X**3*EXP(-X)-V;
ZY:=Y**3*EXP(-Y)-V;
'IF'ZY'LE'0'THEN'
'GØTØ'EZ;
MM3:N:=N+1;W:=(X+Y)/2;
ZW:=W**3*EXP(-W)-V;
'IF'ZW=0'THEN''GØTØ'RR3;
'IF'SIGN(ZY)=SIGN(ZW)'THEN''BEGIN'Y:=W;ZY:=ZW'END'
'ELSE''BEGIN'X:=W;ZX:=ZW'END';
'IF'N>50'THEN''GØTØ'RR3;F:=Y-X;
'IF'F>10**(-10)'THEN''GØTØ'MM3;
RR3:
X:=W;
V:=V*EXP(3)/27;
U:=EXP(X);W:=2*U/E/X;'IF'U>W'THEN'U:=W;
A:=4*E-3*U*V**(2/3);
'IF'A'LE'0'THEN''GØTØ'EZ;
A:=8*E*U/A;
F:=A*LN(P);
'IF'F<K*K'THEN'F:=K*K;
'IF'F>4'THEN'F:=F*F*EXP(-F/2)'ELSE'F:=16/E/E;
FF:=2*F/A*K1;
C:=8+216*EXP(X-2)/X**3;
C:=2*C/E;'IF'P>E'THEN'C:=2*LN(P)*C/P;
PRINT(A,FF,C,NEWLINE);
'IF'FF>L'THEN''GØTØ'EZ;
I:=LN(P);'IF'K*K/A>I'THEN'I:=K*K/A;
P:=EXP(I);
'IF'I'GE'1.5'THEN'H:=(A*I)**1.5/P'ELSE'H:=(3*A/2/E)**1.5;
HH:=H**(2/3);HHH:=H**(1/3);PP:=1;
ZY:=G;
'BEGIN''PRØCEDURE'FKT(N9,X9,R9,B9,E9,EX);
'VALUE'B9;'INTEGER'N9,X9,R9;'REAL'B9,E9;'LABEL'EX;
'BEGIN'G:=ZY+B9;
GG:=G*G;EG:=EXP(G);ZW:=SQRT(A/2);
K5:=2*(A/G)**3*I**4/P;
'IF'I<4'THEN'
K5:=(A/G)**3*512/EXP(4);
V:=1-H/GG;
'IF'V'LE'0'THEN''GØTØ'EX;
K15:=1/V;
V:=EG/2;W:=EG/G/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;V:=H*(1+HHH*V)**3;
W:=(H/G**3)**2;'IF'V<W'THEN'V:=W;
K16:=2/A*HH*K15**3*V;
K10:=4*(K15*(2/A*HH*EG+ZW+1/E)+K16);
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
K8:=EXP(H*V);
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=HH*V;W:=(1+G)/GG;'IF'V<W'THEN'V:=W;
W:=(V+HHH/2)*2*H/A+1+ZW/2;
U:=EG/2;V:=EG/G/E;'IF'U>V'THEN'U:=V;
V:=HH/GG;'IF'U<V'THEN'U:=V;
U:=U*2*H/A;'IF'U>W'THEN'W:=U;
K13:=K15*W;
X:=1.5*HHH+0.25*H;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=(HH+HH*HH)*V;W:=2*EG/G/E;
'IF'W>EG'THEN'W:=EG;
V:=V+HH*W;U:=1/G;'IF'U<V'THEN'U:=V;
X:=(X+U)*H*2/A;
U:=EG/6;V:=2*EG/GG/E/E;'IF'U>V'THEN'U:=V;
```

```
V:=EXP(2*G)/4;W:=EXP(2*G)/GG/E/E;
'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=HH*U*U+V;U:=EG/2*(1/GG+1/2/G)+U/2/G;
'IF'U<V'THEN'U:=V;
V:=(1+HH)*(1+G)/GG/GG+(1/2+HH/4)/GG;
'IF'U<V'THEN'U:=V;
X:=X+U*HH*HH*2/A;
U:=EG/6;V:=2*EG/GG/E/E;'IF'U>V'THEN'U:=V;
V:=U*(1+ZW)+EG/2+EG/6*ZW;
'IF'HH>1'THEN'W:=HH-1'ELSE'W:=0;W:=W/6/G;
W:=(1+G)/GG*(2+ZW)+(HH/3/GG+W)*(3+ZW);
'IF'V<W'THEN'V:=W;
X:=X+HH*V;
X:=X+(1+HH/2)*(1+ZW)+((3+ZW)**2*HH*A/72+(2+ZW)**2*A/8)/PP;
X:=K15**2*X;K4:=X/2/I;
'IF'K4'GE'1'THEN''GØTØ'EX;
K11:=1-K4;
V:=EG*(1+HH/2);W:=2*HH+HH*HH/2-1;'IF'W<0'THEN'W:=0;
W:=HH*(3+HH)/GG+W/G;
'IF'V<W'THEN'V:=W;
Y:=V*2*HH/A;
V:=12/GG/E/E;'IF'V>1'THEN'V:=1;V:=V*EXP(2*G)/6;
'IF'HH>1'THEN'U:=HH-1'ELSE'U:=0;
W:=12/GG/E/E;'IF'W>1'THEN'W:=1;W:=(HH/GG/3+U/6/G)*EG*W;
U:=2/E/G;'IF'U>1'THEN'U:=1;U:=(1+G)/GG*EG*U;
W:=W+U;'IF'V<W'THEN'V:=W;
Y:=Y+2/A*HH*HH*V;
V:=(1+G)/GG+(1/GG+2/3/G)*ZW;
W:=12/GG/E/E;'IF'W>1'THEN'W:=1;
W:=HH*EG*(1/6+ZW/18)*W;
U:=2/G/E;'IF'U>1'THEN'U:=1;
U:=EG*(1+ZW/2)*U;
W:=W+U;'IF'V<W'THEN'V:=W;Y:=Y+HH*V;
V:=2.5*HH+HH*HH/2+ZW*(7+HH)*HH/6+(3+ZW)*(1+ZW)*A/12/PP;
Y:=(Y+V)*K15**2;
'IF'X<Y'THEN'X:=Y;
K12:=X/(1+SQRT(K11));
U:=EG/2;V:=EG/E/G;'IF'U>V'THEN'U:=V;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;
V:=HHH*V+1/2;'IF'U>V'THEN'U:=V;
W:=HHH/GG;'IF'U<W'THEN'U:=W;
K3:=HH*U;
'IF'K3'GE'1'THEN''GØTØ'EX;
V:=EG/6;W:=2*EG/GG/E/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;V:=2*HH*V/A;
W:=1/2+ZW/6+HH*2/A*(1/GG+1/2/G+HHH/2*U*U/(1-K3));
'IF'V<W'THEN'V:=W;
K9:=V*EXP(A*V/2);
V:=K*K;
'IF'V'GE'2'THEN'U:=V*EXP(-V/2)'ELSE'U:=2/E;
U:=2*K*K8*K10/K11**1.5*U;
'IF'V'GE'3'THEN'W:=K**3*EXP(-V/2)'ELSE'W:=(3/E)**1.5;
W:=2*K2*K8*K12*W;
'IF'V'GE'4'THEN'Y:=V*V*EXP(-V/2)'ELSE'Y:=16*EXP(-2);
Y:=(2*K8*K13+K9)*K1*Y;
K7:=U+W+Y;
E9:=K5+K7;ZA:=E9;
'END'FKT;
FKT(1,1,1,0,C,EZ);
LIMI(1,1,1,GI,FKT,0.0000000001);
C:=ZA;
'END';
```

```
PRINT(G,K5,K7,H,K3,K4,K11,K15,C,NEWLINE);                          VZEM1620
'IF'NN=0'THEN'E7:=Z'ELSE'E7:=ZE;Z:=C;                              VZEM1630
'IF'C'LE'E7'THEN''BEGIN''IF'C<L'THEN'E7:=L'ELSE'E7:=C'END''ELSE'   VZEM1640
E7:=1000;ZE:=E7;                                                   VZEM1650
NN:=NN+1;PRINT(E7,K,NN);                                           VZEM1660
'END'LUD;                                                          VZEM1670
LIMI(1,1,1,GK,LUD,0.0000000001);                                   VZEM1680
PRINT(NEWLINE,''VZEM:'',NEWLINE);                                  VZEM1690
'END'F:=PI;                                                        VZEM1700
PRINT(''  Q='',Q,''  L='',L,''  C='',C,''  Z='',Z,NEWLINE,         VZEM1710
''  A='',A,''  K='',K,''  P='',P,''  I='',I,''  G='',G,NEWLINE);   VZEM1711
PRINT(''  F='',F,''  FF='',FF,''  H='',H,''  K3='',K3,NEWLINE,     VZEM1712
'' K4='',K4,'' K5='',K5,'' K7='',K7,''K11='',K11,''K15='',K15,
NEWLINE);                                                          VZEM1713
'END''EOP'                                                         VZEM1720
```

Veränderungen beim Übergang von "VZZM" zu "IZZM":

Die folgenden Lochkarten, die speziell zur Berechnung von C_3 dienen, tragen die Bezeichnung

"IZZM" ("Identisch verteilte Zufallsgrößen -
Zweiseitige Momente").

An der Numerierung ist zu erkennen, an welcher Stelle im Programmpaket "VZZM" diese Lochkarten einzufügen bzw. auszutauschen sind.

```
Q:=0.7882;                                                         IZZM0050
K6:=K5*27/G**3/(1-B**3*A*A/K**4)*EXP(-(1/2-1/A)*K*K+H*V+G-2);      IZZM0770
ZX:=H;H:=B**3;HH:=B*B;HHH:=B;                                      IZZM0771
H:=ZX;                                                             IZZM0851
H:=B**3;                                                           IZZM0861
H:=ZX;                                                             IZZM1461
PRINT(NEWLINE,''IZZM:'',NEWLINE);                                  IZZM1770
```

Veränderungen beim Übergang von "VZZM" zu "VZZA":

Die folgenden Lochkarten, die speziell zur Berechnung von C_2 dienen, tragen die Bezeichnung

"VZZA" ("Verschieden verteilte Zufallsgrößen -
Zweiseitige Momente - Abgeänderte Variante").

```
L:=L/K;                                                            VZZA0151
N:=0;X:=0;Y:=3;V:=216*EXP(-2)/(K*L-8);                             VZZA0180
P:=(K*L-8)*EXP(0.5)/(3*U)**1.5;                                    VZZA0320
F:=F/K;                                                            VZZA0331
'IF'K<1'THEN'F:=P*EXP(-0.5)*K1;PI:=F;                              VZZA0340
C:=C/K;                                                            VZZA0351
A:=(K*L)**(1/3);PRINT(A,NEWLINE);                                  VZZA0380
M:=M**1.5*(K*L-8)/8/E;I:=LN(P/M);                                  VZZA0460
'IF'F>0.5'THEN'F:=SQRT(F)*EXP(-F)'ELSE'F:=1/SQRT(2*E);             VZZA0500
F:=SQRT(2*A/(A-2))*F;                                              VZZA0501
K5:=K5/K;K6:=K6/K;                                                 VZZA0772
'IF'V'GE'2'THEN'U:=V*EXP(-V/2)'ELSE'U:=2/E;                        VZZA1490
'IF'V'GE'3'THEN'W:=K**3*EXP(-V/2)'ELSE'W:=(3/E)**1.5;              VZZA1510
'IF'V'GE'4'THEN'Y:=V*V*EXP(-V/2)'ELSE'Y:=16*EXP(-2);               VZZA1530
PRINT(NEWLINE,''VZZA:'',NEWLINE);                                  VZZA1770
```

Um die absolute Konstante C_1 zu berechnen, sind neben diesen Lochkarten auch die oben angeführten Lochkarten mit der Bezeichnung "IZZM" im Programmpaket "VZZM" einzufügen bzw. auszutauschen. Dabei ist jetzt anstelle der Lochkarte 1770 die Lochkarte

```
PRINT(NEWLINE,''IZZA:'',NEWLINE);                                  IZZA1770
```

zu verwenden.

Veränderungen beim Übergang von "VZEM" zu "IZEM":
Die folgenden Lochkarten, die speziell zur Berechnung von C_6 dienen, tragen die Bezeichnung

"IZEM" ("Identisch verteilte Zufallsgrößen - Einseitige Momente").

An der Numerierung ist zu erkennen, an welcher Stelle im Programmpaket "VZEM" diese Lochkarten einzufügen bzw. auszutauschen sind.

```
'REAL'B;                                                           IZEM0041
Q:=0.7882;                                                         IZEM0050
G:=1.7;                                                            IZEM0060
K:=3.0;                                                            IZEM0070
'IF'I'GE'0.5'THEN'B:=(A*I/P/P)**1.5'ELSE'B:=(A/2/E)**1.5;          IZEM0690
HH:=B**(2/3);HHH:=B**(1/3);PP:=P*P;                                IZEM0691
V:=1-B/GG;                                                         IZEM0780
V:=EG/2;W:=EG/G/E;'IF'V>W'THEN'V:=W;V:=1+HHH*V;                    IZEM0810
W:=HHH/GG;'IF'V<W'THEN'V:=W;                                       IZEM0820
K16:=(2/A)**(1/3)*HH*K15*V;                                        IZEM0830
K10:=((K15*(2/A*B*EG+ZW+1/E))**(1/3)+K16)**3;                      IZEM0840
X:=1.5*HHH+0.25*B;                                                 IZEM0940
X:=X+U*B*HH*2/A;                                                   IZEM1070
X:=X+B*V;                                                          IZEM1130
Y:=Y+2/A*B*HH*V;                                                   IZEM1270
W:=W+U;'IF'V<W'THEN'V:=W;Y:=Y+B*V;                                 IZEM1330
PRINT(NEWLINE,''IZEM:'',NEWLINE);                                  IZEM1690
PRINT(''  F='',F,'' FF='',FF,''  H='',H,''  B='',B,'' K3='',K3,
NEWLINE,                                                           IZEM1712
```

Wir betrachten jetzt das Rechnerprogramm "VZZM":
Innerhalb dieses Programms werden die Prozeduren
LUD(N7,X7,R7,B7,E7,EZ), PAD(N8,X8,R8,B8,E8,EY) und FKT(N9,X9,R9,B9,E9,EX) definiert, die entsprechend dem späteren Aufruf durch LIMI sechsparametrig sein müssen. Dabei sind E7, E8 bzw. E9 eine von B7, B8 bzw. B9 abhängige Funktion. Mittels der Prozedur LIMI können diese Größen E7, E8 bzw. E9 bezüglich des Arguments B7, B8 bzw. B9 minimiert werden.
Die ersten drei Parameter sowohl von LUD, PAD, FKT als auch von LIMI sind in unserem Fall von untergeordneter Bedeutung, da wir es nicht mit vektoriellen Größen zu tun haben.
Die jeweils letzten Parameter EZ, EY, EX in LUD, PAD bzw. FKT sind interne Marken, die angesprungen werden, falls bei der Aktivierung dieser Prozeduren durch LIMI gewisse Störungen (nicht zulässige Werte gewisser Variablen) auftreten.
Der letzte Parameter in LIMI stellt die Genauigkeitsschranke dar, mit der

bei der Minimierung von E7 (E8, E9) das entsprechende Argument B7 (B8, B9) bestimmt wird. Nach Aktivierung von LIMI sind über die Parameter GK, GJ, GI die entsprechenden Werte von B7, B8 bzw. B9 greifbar. In unserem Fall wurden die Genauigkeitsschranken 10^{-10}, 10^{-11} bzw. 10^{-12} gewählt, um auch in den Funktionswerten E7, E8 bzw. E9 eine hohe Genauigkeit zu erreichen.

Über die Beziehungen K:=KK+B7; A:=AA+B8; und G:=ZY+B9; werden die entsprechenden Startwerte in den Nullpunkt transformiert, da LIMI stets vom Nullpunkt ausgehend eine Minimierung vornimmt.

In der folgenden Tabelle geben wir eine Übersicht über einzelne Teile des Programms "VZZM":

Lochkartennummer	inhaltliche Bedeutung
0150	$L:=K^3Q$; Berechnung der absoluten Konstanten L entsprechend der Folgerung 4.4.1.
0180 bis 0300	Berechnung von ε_o entsprechend der Folgerung 4.2.3 durch iterative Lösung der Gleichung $K_3(\varepsilon_o)=\frac{L-8}{8e}$.
0310 bis 0320	Berechnung von $P_o(\varepsilon_o)$ (s. Satz 4.2.2).
0330 bis 0340	Berechnung von U_1 entsprechend dem Satz 4.3.1.
0380	Berechnung eines Startwertes für A
0440 bis 0460	Berechnung von $M_o(A,\varepsilon_o)$ (s. Satz 4.2.2).
0480 bis 0510	Berechnung von U_2 entsprechend dem Satz 4.3.1.
0530 bis 0560	Berechnung von α, α^2, α^3 und ß entsprechend dem Satz 4.4.2.
0570 bis 0690	Berechnung von δ_o durch Iteration
0710 bis 1570	Vereinbarung der Prozedur FKT zur Berechnung der Konstanten L_2 (E9 = L_2) des Satzes 4.4.2.
1590	Minimierung von L_2 bezüglich des Arguments γ für feste Werte von A, K, M_o, P_o unter den Voraussetzungen des Satzes 4.4.2.
1660	Ausgehend vom intern vorgegebenen Startwert für A wird A mittels LIMI so verkleinert, bis für feste Werte von K und P_o die Gleichung $\min\limits_{\gamma} L_2(A,K,M_o(A,\varepsilon_o),P_o(\varepsilon_o),\gamma)=L_oK^3$ gilt.
1760	Ausgehend vom Startwert für K wird mit Hilfe von LIMI diese Variable K so verkleinert, daß sich schließlich die Gleichung $\min\limits_{A}\min\limits_{\gamma} L_2(A,K,M_o,P_o,\gamma) = L_oK^3$ einstellt.

Um über eine Minimierungsaufgabe mit Hilfe von LIMI die entsprechende Größe A zu bestimmen, wurde der Parameter E8 folgendermaßen definiert:

$$E8 := \begin{cases} \min\limits_{\gamma} L_2(A,K,M_0(A,\varepsilon_0),P_0(\varepsilon_0),\gamma), & \text{falls } \min\limits_{\gamma} L_2 \geqq L_0K^3 \\ 1000 & \text{, falls } \min\limits_{\gamma} L_2 < L_0K^3 \text{ .} \end{cases}$$

Entsprechend gilt für NN=1,2,...

$$E7_{NN+1} := \begin{cases} \max(L_0K^3, \min\limits_{A} \min\limits_{\gamma} L_2), & \text{falls } \min\limits_{A} \min\limits_{\gamma} L_2 \leqq E7_{NN} \\ 1000 & \text{, falls } \min\limits_{A} \min\limits_{\gamma} L_2 > E7_{NN} \end{cases}$$

mit

$$E7_1 := 1000 \text{ .}$$

Der Index NN gibt die Anzahl der Iterationsschritte an.

Die soeben gegebenen Erläuterungen zum Programm "VZZM" gelten sinngemäß auch für das Programm "VZEM", deshalb wird dieses zweite Grundprogramm nicht näher beschrieben.

Schließlich geben wir noch die Programme zur Berechnung der Konstanten D_o, D_1, D_m und n_o, n_1 aus den Sätzen 5.2.4 und 5.2.5, der Folgerung 4.2.2 und des Beispiels aus dem Abschnitt 5.1 an.

Zur Berechnung von D_o und D_1: (s. S.128)

Aus $D_o - f(\frac{D_o}{2}) = 0$ folgt mit $x = \sqrt{D_o}$ die Nullstellengleichung

$$x^3 - 6(1 + x + x^3 \exp(-x^2/2)) = 0 \text{ ,} \tag{12.1}$$

und aus $D_1 - 6(\frac{1}{\sqrt{D_1}} + 1) = 0$ folgt mit $x = \sqrt{D_1}$ die Nullstellengleichung

$$x^3 - 6(1+x) = 0 \text{ ,} \tag{12.2}$$

deren Nullstellen jeweils zwischen $x_o = 2{,}5$ und $x_1 = 3{,}0$ liegen.

Zur Berechnung von n_o und n_1: (s. S.141)

Aus $f(z) = 2{,}25$ folgt mit $z = x$ die Nullstellengleichung

$$x^5 \exp(-x) - 2{,}25 = 0 \text{ ,} \tag{12.3}$$

die zwischen $x_o = 1$ und $x_1 = 2$ sowie zwischen $x_o' = 10$ und $x_1' = 15$ jeweils eine Lösung besitzt.

Zur Berechnung von D_m: (s. S.34)

Es gilt mit $v = \frac{4m}{8-e}$ für D_m die Beziehung

$$D_m = 2^m + \exp(3 - m + \frac{e}{8} m^2 \ln^2(\frac{v+4}{2}))(\frac{vm}{2})^m \text{ , } m = 2,3,\ldots \text{ .} \tag{12.4}$$

Rechnerprogramm zur Lösung der Gleichung (12.1):

```
'BEGIN''INTEGER'N;'REAL'D,F,W,X,Y,ZW,ZX,ZY;                     DØØØ0010
N:=0;X:=2.5;Y:=3.0;                                              DØØØ0020
ZX:=X**3-6*(1+X+X**3*EXP(-X*X/2));                               DØØØ0030
ZY:=Y**3-6*(1+Y+Y**3*EXP(-Y*Y/2));                               DØØØ0040
MM1:N:=N+1;W:=(X+Y)/2;                                           DØØØ0050
ZW:=W**3-6*(1+W+W**3*EXP(-W*W/2));                               DØØØ0060
'IF'ZW=0'THEN''GØTØ'RR1;                                         DØØØ0070
'IF'SIGN(ZY)=SIGN(ZW)'THEN''BEGIN'Y:=W;ZY:=W'END'                DØØØ0080
'ELSE''BEGIN'X:=W;ZX:=ZW'END';                                   DØØØ0090
'IF'N>50'THEN''GØTØ'RR1;F:=Y-X;                                  DØØØ0100
'IF'F>10**(-10)'THEN''GØTØ'MM1;                                  DØØØ0110
RR1:D:=W*W;                                                      DØØØ0120
PRINT(''D='',D,NEWLINE);                                         DØØØ0130
'END''EOP'                                                       DØØØ0140
```

Das Rechnerprogramm zur Lösung der Gleichung (12.2) erhalten wir aus diesem Programm, wenn wir folgende Lochkarten austauschen:

```
ZX:=X**3-6*(1+X);                                                D1110030
ZY:=Y**3-6*(1+Y);                                                D1110040
ZW:=W**3-6*(1+W);                                                D1110060
```

Rechnerprogramm zur Lösung der Gleichung (12.3):

Durch Austauschen bzw. Hinzufügen einiger Lochkarten erhalten wir dieses Programm aus dem oben angeführten Programm "DØØØ":

```
'CODE':EXIT;                                                     NØØØ0000
READ(X,Y,N);PRINT(''X='',X,''Y='',Y,''N='',N,NEWLINE);           NØØØ0020
ZX:=X**5*EXP(-X)-2.25;                                           NØØØ0030
ZY:=Y**5*EXP(-Y)-2.25;                                           NØØØ0040
ZW:=W**5*EXP(-W)-2.25;                                           NØØØ0060
F:=ABS(F);                                                       NØØØ0101
RR1:D:=2.25*EXP(W);                                              NØØØ0120
PRINT(''W='',W);                                                 NØØØ0121
EXIT                                                             NØØØ0131
```

Jeweils nach einer *EXECUTE-Karte sind dem Programm folgende Daten anzufügen:

zufügen:	1	2	0
und	10	15	0 .

Rechnerprogramm für die Beziehung (12.4):

```
'BEGIN''INTEGER'M;'REAL'D,V;                                     DMMM0010
M:=2;                                                            DMMM0020
MM1:V:=4*M/(8-EXP(1));                                           DMMM0030
D:=2**M+EXP(3-M+EXP(1)/8**M*LN((V+4)/2)**2)*(V**M/2)**M;         DMMM0040
PRINT(''M='',M,''D='',D,NEWLINE);M:=M+1;                         DMMM0050
'IF'M<6'THEN''GØTØ'MM1;                                          DMMM0060
'END''EOP'                                                       DMMM0070
```

Literaturverzeichnis

1. AMOSOVA, N. N.: O predel'nych teoremach dlja verojatnostej umerennych uklonenij. Vestnik Leningrad. univ. 27 (1972) No. 13, S. 5-14

2. AMOSOVA, N. N.: Nekotorye predel'nye teoremy dlja verojatnostej bol'šich uklonenij. Teorija verojatn. i matem. statistika (1974) No. 10, S. 12-28

3. BAUM, L. E./ KATZ, M./ READ, R. R.: Exponential convergence rates for the law of large numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) No. 2, S. 187-199

4. BAVLI, G. M.: Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathem. Sammelbd. 1(43) (1936), S. 917-930

5. BEEK, P. VAN: Fourier-analytische Methoden zur Verschärfung der Berry-Esseen Schranke. Dissertation, Bonn 1971

6. BEEK, P. VAN: An Application of Fourier Methods to the Problem of Sharpening the Berry-Esseen Inequality. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 23 (1972) H. 3, S. 187-196

7. BERGSTRÖM, H.: On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. Skand. Aktuarietidskrift 32 (1949) No. 1, S. 37-62

8. BERGSTRÖM, H.: On asymptotic expansions of probability functions. Skand. Aktuarietidskrift 34 (1951) No. 1, S. 1-33

9. BERGSTRÖM, H.: On distribution functions with a limiting stable distribution function. Arkiv Mat. 2 (1953) No. 5, S. 463-474

10. BERNŠTEJN, S. N.: Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. Mathem. Ann. 97 (1926), S. 1-59
    Rasprostranenie predel'noj teoremy teorii verojatnostej na summy zavisimych veličin. Uspechi matem. nauk 10 (1944), S. 65-114

11. BERRY, A. C.: The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941) No. 1, S. 122-136

12. BHATTACHARYA, R. N./
RAO, R. R.: Normal Approximation and Asymptotic Expansions (Wiley series in probability and mathematical statistics) New York 1976

13. BIKELIS, A.: Ob ocenke ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Litovskij matem. sb. 4 (1964) No.3, S.303-308

14. BIKELIS, A.: Ocenki ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Litovskij matem. sb. 6 (1966) No.3, S.323-346

15. BOOK, S. A.: Large deviation probabilities for weighted sums. Ann. Math. Statist. 43 (1972) No.4, S.1221-1234

16. BOONYASOMBUT, V./The accuracy of infinitely divisible approximations
SHAPIRO, J. M.: to sums of independent variables with application to stable laws. Ann. Math. Statist. 41 (1970) No.1, S.237-250

17. CAREGRADSKIJ, I. P.:
O ravnomernom priblizenii binomial'nogo raspredelenija neograničeno delimym zakonami. Teorija verojatn. i ee primen. 3 (1958) No.4, S.470-474

18. CHERNOFF, H.: Large sample theory: parametric case. Ann. Math. Statist. 27 (1956), S.1-22

19. CHINČIN, A. J.: Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungs-
(KHINTCHINE, A.) gesetze. Matem. sb. 2(44) (1937) No.1, S.79-119

20. CHINČIN, A. J.: Predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. GONTI, M.-L. 1938

21. CHINČIN, A. J.: Matematičeskie osnovanija statističeskoj mechaniki. Gostechizdat, M. 1943

22. CHINČIN, A. J.: Matematičeskie osnovanija kvantovoj statistiki. Gostechizdat, M.-L. 1951
(Akademie-Verlag Berlin 1956)

23. CHRISTOPH, G.: Über die Konvergenzgeschwindigkeit im Falle einer stabilen Grenzverteilung. Math. Nachr. (~~im Druck~~) 90(1979) 21-30
(Preprint TU Dresden No.07-23-76)

24. CRAMÉR, H.: Random Variables and Probability Distributions. Cambridge 1937 (third ed. 1970)

25. CRAMÉR,H.: Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. Actual. sci. et ind. (1938), Paris, No.736 III, S.5-23
Ob odnoj novoj predel'noj teoreme teorii verojatnostej. Uspechi matem. nauk 10 (1944), S.166-178

26. CRAMÉR,H.: On the approximation to a stable probability distribution. Studies in math. analysis and related topics. Stanford Univ. Press, Stanford 1962, S.70-76

27. CRAMÉR,H.: On asymptotic expansions for sums of independent random variables with a limiting stable distribution. Sankhya A25 (1963) No.1, S.13-24

28. DANIELS,H.E.: Saddlepoint approximations in statistics. Ann. Math. Statist. 25 (1954) No.4, S.631-650

29. DAVIS,J.A.: Convergence rates for probabilities of moderate deviations. Ann. Math. Statist. 39 (1968) No.6, S.2016-2028

30. DOBRUŠIN,P.L.: Asimptotičeskie ocenki verojatnosti ošibki pri peredače soobščenija. Teorija verojatn. i ee primen. 7 (1962) No.3, S.283-311

31. DOEBLIN,W.: Sur les sommes d'un grand nombres des variables aléatoires indépendantes. Bull. sci. math. France 63 (1939) No.1, S.23-32, No.2, S. 35-64

32. DŽAMIRZAEV,A.A./SATUBALDYEV,D.: Ob absoljutnoj postojannoj v teoreme Mešalkina-Rogozina. Sb."Slučajnye processy i statist. vyvody", Izd-vo "Fan" Taškent 1975, No. 5, S.36-41

33. ERDÖS,P.: On a theorem of Hsu and Robbins. Ann. Math. Statist. 20 (1949) No.2, S.286-291

34. ESSEEN,C.G.: Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta Math. 77 (1945), S.1-125

35. FELLER,W.: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. I, II, Math. Z. 40 (1935), S.521-559, 42 (1937), S.301-312

36. FELLER,W.: Generalisation of a probability limit theorem of Cramér. Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943) No.3, S.361-372

37. FELLER, W.: On the Berry-Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10 (1968) No.3, S.261-268

38. FICHTENHOLZ, G.M.: Differential- und Integralrechnung, Teil 1. DVW Berlin 1971 (6. Auflage)

39. FRANKEN, P.: Approximation der Verteilungen von Summen unabhängiger nichtnegativer ganzzahliger Zufallsgrößen durch Poissonsche Verteilungen. Math. Nachr. 27 (1964), S.303-340

40. FRIEDMAN, N./ KATZ, M./ KOOPMANS, L.H.: Convergence rates for the central limit theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 56 (1966) No.4, S.1062-1065

41. GALSTJAN, F.N.: O skorosti schodimosti v predel'nych teoremach dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Dissertation, Leningrad 1971 (Autoreferat)

42. GALSTJAN, F.N.: O skorosti schodimosti v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. i matem. statistika (1971) No.5, S.14-26

43. GNEDENKO, B.V.: K teorii predel'nych teorem dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Izv. AN SSSR, ser. matem. (1939), S.181-232, S.643-647

44. GNEDENKO, B.V.: Predel'nye zakony dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. Uspechi matem. nauk 10 (1944), S.115-165

45. GNEDENKO, B.V./ KOLMOGOROV, A.N.: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Akademie-Verlag Berlin 1960 (2. Auflage)

46. GRIGELIONIS, B.: Ob asimptotičeskom razloženii ostatočnogo člena v slučae schodimosti k zakonu Puassona. Litovskij matem. sb. 2 (1962) No.1, S.35-48

47. HEYDE, C.C.: On the influence of moments on the rate of convergence to the normal distribution. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8 (1967) No.1, S.12-18

48. HEYDE, C.C.: On the Uniform Metric in the Context of Convergence to Normality. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 25 (1973) No.2, S.83-95

49. HEYDE, C.C.: A nonuniform bound on convergence to normality. Ann. Prob. 3 (1975) No.5, S.903-907

50. IBRAGIMOV, I.A./ LINNIK, J.V.: Independent and stationary sequences of random variables. Groningen 1971

51. KAGAN, F.M.: Ob odnoj predel'noj teoreme J.V.Prochorova. sb. "Predel'nye teoremy teorii verojatnostej", Izd-vo AN UzSSR, Taškent 1963, S.38-42

52. KATZ, M.L.: Verojatnost' i smežnye voprosy v fizike. M. 1965

53. KOLMOGOROV, A.N.: Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (Uno problema di Bruno di Finetti). Rend. Accad. Lincei 15 (1932), S.805-808, S.866-869

54. KOLMOGOROV, A.N.: Nekotorye raboty poslednich let v oblasti predel'nych teorem teorii verojatnostej. Vestnik Moskov. univ. (1953) No.10, S.29-38

55. KOLMOGOROV, A.N.: O približenii raspredelenij summ nezavisimych slagaemych neograničenno delimymi raspredelenijami. Trudy Moskov. matem. obščestva 12 (1963), S.437-451
On the approximation of distributions of sums of independent summands by infinitely divisible distributions. Sankhya A25 (1963) No.2, S.159-174
und in "Contributions to statistics presented to professor P.C.Mahalanobis (70th birthday)" ed. by C.R.Rao, Calcutta 1963, S.159-174

56. KOLODJAŽNIJ, S.F.: Obobščenie odnoj teoremy Esseena. Vestnik Leningrad. univ. 23 (1968) No.13, S.28-33

57. KUBILJUS, I.P.: Verojatnostnye metody v teorii čisel. Uspechi matem. nauk 11 (1956) No.2, S.31-66

58. KUBILJUS, I.P.: Verojatnostnye metody v teorii čisel. Vil'njus 1962 (1. Auflage 1959)

59. LEVY, P.: Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gautier-Villars, Paris 1937 (2. ed. 1954)

60. LINDEBERG, J.W.: Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. 15 (1922), S.211-225

61. LINNIK, J.V.: O točnosti približenija k gaussovu raspredeleniju summ nezavisimych slučajnych veličin. Izv. AN SSSR ser. matem. 11 (1947) No.2, S.111-138

62. LINNIK, J.V.: Cepi Markova v analitičeskoj arifmetike kvaterionov i matric. Vestnik Leningrad. univ. 11 (1956) No.13, S.63-68

63. LINNIK, J. V.: Novye predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin. DAN SSSR 133 (1960) No. 6, S. 1291-1293

64. LINNIK, J. V.: Predel'nye teoremy dlja summ nezavisimych slučajnych veličin pri učete bol'šich uklonenij. I, II, III, Teorija verojatn. i ee primen. 6 (1961) No. 2, S. 145-163, No. 4, S. 377-391, 7 (1962) No. 2, S. 121-134

65. LINNIK, J. V.: On the probability of large deviations for the sums of independent variables. Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab., 2, Univ. Calif. Press, Berkeley and Los Angeles 1961, S. 289-306

66. LIPSCHUTZ, M.: On the magnitude of the error in the approach to stable distributions. I, II, Indag. Math. 18 (1956) No. 3, S. 281-294

67. LIPSCHUTZ, M.: On strong bounds for sums of independent random variables which tend to a stable distribution. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), S. 135-154

68. LOÈVE, M.: Teorija verojatnostej. M. 1962

69. MEŠALKIN, L. D.: O približenii raspredelenij summ neograničenno delimymi zakonami. Teorija verojatn. i ee primen. 6 (1961) No. 3, S. 257-275

70. MEŠALKIN, L. D./ ROGOZIN, B. A.: Ocenka rasstojanija meždu funkcijami raspredelenija po blizosti ich charakterističeskich funkcij i ee primenenie k central'noj predel'noj teoreme. sb. "Predel'nye teoremy teorii verojatnostej", Izd-vo AN UzSSR, Taškent 1963, S. 49-55

71. MICHEL, R.: Results on probabilities of moderate deviations. Ann. Prob. 2 (1974) No. 2, S. 349-353

72. MICHEL, R.: Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. Ann. Prob. 4 (1976) No. 1, S. 102-106

73. MICHEL, R.: On the Accuracy of Nonuniform Gaussian Approximation to the Distribution Functions of Sums of Independent and Identically Distributed Random Variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 35 (1976) No. 4, S. 337-347

74. MITALAUSKAS,A.A.: Asimptotičeskoe razloženie dlja nezavisimych slučajnych veličin v slučae ustojčivogo predel'nogo raspredelenija. Litovskij matem. sb. 3 (1963) No.1, S.189-193

75. MITALAUSKAS,A.A.: Ob ocenke bystroty schodimosti v integral'noj predel'noj teoreme v slučae ustojčivogo predel'nogo raspredelenija. Litovskij matem. sb. 6 (1966) No.1, S.85-90

76. NAGAEV,A.V.: Integral'nye predel'nye teoremy s učetom bol'šich uklonenij, kogda ne vypolneno uslovie Kramera. I, II. Teorija verojatn. i ee primen. 14 (1969) No.1, S.51-63, No.2, S.203-216

77. NAGAEV,S.V.: Nekotorye predel'nye teoremy dlja bol'šich uklonenij. Teorija verojatn. i ee primen. 10 (1965) No.2, S. 231-254

78. NAGAEV,S.V./ SAKOJAN,S.K.: Ob odnoj ocenke dlja verojatnosti bol'šich uklonenij. sb. "Predel'nye teoremy i matem. statistika", Izd-vo "Fan", Taškent 1976, S.132-140

79. OSIPOV,L.V.: Asimptotičeskie razloženija v central'noj predel'noj teoreme. Vestnik Leningrad. univ. 22 (1967) No.19, S.45-62

80. OSIPOV,L.V.: O verojatnostjach bol'šich uklonenij summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. i ee primen. 17 (1972) No.2, S.320-341

81. OSIPOV,L.V./ PETROV,V.V.: Ob ocenke ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. i ee primen. 12 (1967) No.2, S.322-329

82. OSWALD,H.: Über eine Abschätzung des Restgliedes im zentralen Grenzverteilungssatz. Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Naturwiss. Reihe 14 (1965) No.5, S.261-268

83. PADITZ,L.: Eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 24 (1975) No.2, S.389-392

84. PADITZ,L.: Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 25 (1976) No.5/6, S.1169-1177
(Preprint TU Dresden 1976 No.07-11-76)

85. PADITZ, L.: Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente. Math. Nachr. (im Druck) 82 (1978), S. 131-156
(Preprint TU Dresden 1976 No.07-05-76, No.07-06-76)

86. PETROV, V.V.: Rasprostranenie predel'noj teoremy Kramera na neodinakogo raspredelennye nezavisimye veličiny. Vestnik Leningrad. univ. 8 (1953) No.13, S.13-25

87. PETROV, V.V.: Obobščenie predel'noj teoremy Kramera. Uspechi matem. nauk 9 (1954) No.4, S.195-202

88. PETROV, V.V.: O točnych ocenkach v predel'nych teoremach. DAN SSSR 104 (1955) No.2, S.180-182

89. PETROV, V.V.: Predel'nye teoremy dlja bol'šich uklonenij pri narušenii uslovija Kramera. I, II, Vestnik Leningrad. univ. 18 (1963) No.19, S.49-68, 19 (1964) No.1, S.58-75

90. PETROV, V.V.: Asimptotičeskoe povedenie verojatnostej bol'šich uklonenij. Teorija verojatn. i ee primen. 13 (1968) No.3, S.432-444

91. PETROV, V.V.: Summy nezavisimych slučajnych veličin. Moskva 1972
Sums of independent random variables. Akademie-Verlag Berlin 1975

92. PIPIRAS, V.: Ob ostatočnych členach asimptotičeskogo razloženija funkcii raspredelenija summy nezavisimych slučajnych veličin. Litovskij matem. sb. 10 (1970) No.1, S.135-159

93. PROCHOROV, J.V.: Asimptotičeskoe povedenie binomial'nogo raspredelenija. Uspechi matem. nauk 8 (1953) No.3, S.135-142

94. PROCHOROV, J.V.: O ravnomernoj predel'noj teoreme A.N.Kolmogorova. Teorija verojatn. i ee primen. 5 (1960) No.1, S.103-113

95. RICHTER, W.: Mnogomernye lokal'nye teoremy dlja bol'šich uklonenij i ich primenenie k raspredeleniju χ^2. Teorija verojatn. i ee primen. 3 (1958) No.1, S.107-114

96. RICHTER, W.: Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im Nicht-Cramérschen Fall. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 9 (1959/60) No.4, S.881-896

97. ROGOZIN, B.A.: Nekotorye ekstremal'nye zadači v oblasti predel'nych teorem. Dissertation, Moskva 1961

98. ROHATGI,V.K.: Convergence rates in the law of large numbers II. Proc. Cambr. Phil. Soc. 64 (1968) No.2, S.485-488

99. ROHATGI,V.K.: On the rate of convergence of probabilities of moderate deviations. J. Australian Math. Soc. 11 (1970) No.1, S.91-94

100. ROZOVZKIJ,L.V.: O skorosti schodimosti v teoreme Lindeberga-Fellera. Vestnik Leningrad. univ. 29 (1974) No.1, S.70-75

101. RUBIN,H./ SETHURAMAN,J.: Probabilities of moderate deviations. Sankhya A27 (1965) No.2-4, S.325-346

102. SAKOJAN,S.K.: Nekotorye ocenki funkcij raspredelenija summ slučajnych veličin. sb. "Slučajnye processy i statist. vyvody", Izd-vo "Fan", Taškent 1974, No.4, S.136-151

103. SATYBALDINA,K.I.: Ob ocenke skorosti schodimosti k ustojčivym zakonam Vestnik AN Kaz.SSR (1973) No.4, S.57-65 (fehlerhaftes Ergebnis)

104. SHAPIRO,J.M.: Error estimates for certain probability limit theorems. Ann. Math. Statist. 26 (1955) No.4, S.617-630

105. SHAPIRO,J.M.: Sums of independent truncated random variables. Ann. Math. Statist. 28 (1957), S.754-761

106. STATULEVIČIUS,V.A.: On large deviations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6 (1966) No.2, S.133-144

107. SURVILA,P.: K voprosu ob ostatočnom člene v central'noj predel'noj teoreme. Litovskij matem. sb. 2 (1962) No.1, S.179-194

108. TAKANO,K.: A remark to a result of A.C.Berry (in Japanese). Kakyuraku of Inst. Statist. Math. 6 (1950) No.9, S.408-415

109. TRELOAR,L.: Physics of rubber elasticity. Oxford Univ. Press 1949

110. VOL'KENŠTEJN,M.V.: Konfiguracionnaja statistika polimernych cepej. Izd-vo AN SSSR, Moskva 1959

111. WOLD,H.: A study in the analysis of stationary time series. Uppsala 1938

112. WOLF,W.: Einige Grenzwertsätze für große Abweichungen I, II. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 20 (1971) No.4, S.975-984, 21 (1972) No.4, S.771-779

113. WOLF, W.: Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Math. Nachr. 62 (1974), S.261-288

114. WOLF, W.: Große Abweichungen im zentralen Grenzwertsatz. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 24 (1975) No.2, S.393-398

115. WOLF, W.: O verojatnostjach bol'šich uklonenij v slučae narušenija uslovija Kramera. Math. Nachr. 70 (1975), S.197-215

116. ZOLOTAREV, V.M.: Analog asimptotičeskogo razloženija Edžvorta-Kramera dlja slučaja sbliženija s ustojčivymi zakonami raspredelenija. Trudy VI Vsesojuz. soveščanija po teorii verojatn. i matem. statistike. Vil'njus 1962, S.49-50

117. ZOLOTAREV, V.M.: Odnostoronnaja traktovka i utočnenija nekotorych neravenstv Čebyševskogo tipa. Litovskij matem. sb. 5 (1965) No.2, S.233-250

118. ZOLOTAREV, V.M.: O blizosti raspredelenij dvuch summ nezavisimych slučajnych veličin. Teorija verojatn. i ee primen. 10 (1965) No.3, S.519-526

119. ZOLOTAREV, V.M.: O neravnomernych asimptotičeski pravil'nych ocenkach ostatočnogo člena v central'noj predel'noj teoreme. Teorija verojatn. i ee primen. 11 (1966) No.1, S.193-195

120. ZOLOTAREV, V.M.: Nekotorye neravenstva teorii verojatnostej i ich primenenie k utočneniju teoremy A.M.Ljapunova. DAN SSSR 177 (1967) No.3, S.501-504

121. ZOLOTAREV, V.M.: A sharpening of the inequality of Berry-Esseen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8 (1967) No.4, S.332-342

Thesen zur Dissertation(A)

(Über die Annäherung der Verteilungsfunktionen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen gegen unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen unter besonderer Beachtung der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung)

vorgelegt

der Fakultät für Naturwissenschaften und Mathematik des Wissenschaftlichen Rates der Technischen Universität Dresden

von Ludwig P a d i t z

Dresden, am 30. April 1977

1. Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Zufallsgrößen nehmen unter den verschiedenartigsten Forschungsrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie einen bedeutenden Platz ein. Sie sind in unserer heutigen Zeit nicht mehr allein von theoretischem Interesse. Besonders in der Statistik haben die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie für die praktischen Anwendungen mehr und mehr an Bedeutung gewonnen.
In der vorgelegten Dissertationsschrift werden Beiträge zu neueren Problemstellungen aus der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen geliefert, die erstmalig in den fünfziger bzw. sechziger Jahren in der Literatur auftauchten und in den letzten zehn Jahren mit großem Interesse untersucht wurden. In den Thesen 3 bis 7 werden die zu verschiedenen Problemkreisen erzielten Resultate kurz dargestellt.

2. International haben sich in der Theorie der Grenzwertsätze zwei Hauptrichtungen herauskristallisiert.
Einerseits entstand aufbauend auf den klassischen Grenzwertsätzen, in denen Bedingungen für die Konvergenz von Folgen $(F_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ von Verteilungsfunktionen gegen eine vorgegebene Grenzverteilungsfunktion $F(x)$ untersucht wurden, die Frage, mit welcher Geschwindigkeit die Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ für $n\to\infty$ gegen Null konvergiert. Dabei kann die Abschätzung der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ gleichmäßig bezüglich x oder nach n und x erfolgen, wobei x selbst eine Funktion von n sein kann.
Andererseits erhebt sich die Frage, welcher Fehler begangen wird, wenn die Verteilungsfunktion $F_n(x)$, die in praktischen Aufgaben eine oft recht komplizierte Struktur haben kann, durch eine andere Verteilungsfunktion approximiert wird. Hierbei wird primär eine Fehlerabschätzung der Differenz $|F_n(x)-F(x)|$ und nicht unbedingt mehr das Konvergenzverhalten von $(F_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ ins Auge gefaßt, d.h. n ist beliebig aber fest.

3. Es sei $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion einer Summe $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}$ von unabhängigen Zufallsgrößen (X_{nk}, $k=1,2,\ldots,k_n$, $n=1,2,\ldots$). Dabei ist $(k_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$.
Die Arbeiten von A.J.CHINČIN, A.N.KOLMOGOROV und P.LEVY aus den dreißiger Jahren enthalten bereits Bedingungen für die Konvergenz von $(F_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ gegen eine unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $F(x)$. Eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit zu dieser allgemeinen Problemstellung wurde 1955 und 1970 durch J.M.SHAPIRO und

V.BOONYASOMBUT angegeben, wobei stets die sogenannte Infinitesimalitätsbedingung eine wesentliche Rolle spielte, damit im Falle $n \to \infty$ die gefundenen Abschätzungen auch gegen Null konvergieren.
Auf einem Gedanken eines Artikels von V.M.ZOLOTAREV aus dem Jahre 1965 aufbauend werden andere Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit unter Benutzung gewisser Pseudomomente angegeben. Während sich $F_n(x)$ bereits aus k_n Komponenten zusammensetzt, wird entsprechend auch die unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion $F(x)$ in k_n Komponenten zerlegt. Die Annäherung von $F_n(x)$ gegen $F(x)$ wird nun über die Annäherung der entsprechenden Komponenten von $F_n(x)$ bzw. $F(x)$ untersucht. Als natürliches Maß für den Abstand dieser Komponenten erweisen sich die Pseudomomente.
Über die Methode der charakteristischen Funktionen werden die erhaltenen Aussagen bewiesen.

4. Im Jahre 1968 untersuchte S.F.KOLODJAŽNIJ die Abschätzung der Differenz einer beliebigen Verteilungsfunktion zur Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung. Eine Verallgemeinerung dieses Problems ist die ungleichmäßige Abschätzung der Differenz zweier beliebiger Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nach ihrem Argument x.
Dabei spielen Momente und Pseudomomente eine gewisse Rolle. Unter Voraussetzung sogenannter einseitiger Momente werden entsprechende Abschätzungen nach x auf der reellen Halbachse zu der aufgeworfenen allgemeinen Fragestellung angegeben.
Aus den aufgestellten allgemeinen Sätzen werden Folgerungen und bekannte Resultate, insbesondere ein zentraler Grenzwertsatz von C.G.ESSEEN und eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz der Binomialverteilungsfunktion zur POISSONschen Verteilungsfunktion abgeleitet.
Die Beweise werden mit direkten Methoden, d.h. durch direkte Untersuchung der vorgegebenen Verteilungsfunktionen, geführt.

5. Bekanntlich konvergiert die Verteilungsfunktion der standardisierten Summe unabhängiger Zufallsgrößen gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung, wenn die einzelnen Zufallsgrößen endliche absolute Momente dritter Ordnung besitzen. In den vierziger Jahren bewiesen A.C.BERRY und C.G.ESSEEN die nach ihnen benannten Ungleichungen, die eine gleichmäßige Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit im zentralen Grenzwertsatz angeben. Mehrere Autoren widmeten sich in den vergangenen Jahrzehnten der Bestimmung der dabei auftretenden absoluten Konstanten.

Durch eine direkte Beweistechnik, die Faltungsmethode, gelang es Mitte der sechziger Jahre den sowjetischen Mathematikern S.V.NAGAEV und A.BIKELIS eine ungleichmäßige Abschätzung des Fehlers im zentralen Grenzwertsatz anzugeben:
Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit endlichen absoluten dritten Momenten $\beta_{3i}=E|X_i|^3$, $i=1,2,\ldots,n$. Weiterhin sei $EX_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$, $B_n^2=\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$ und $F_n(x)=P(\sum_{i=1}^{n} X_i<x)$.
A.BIKELIS bewies für alle natürlichen Zahlen n und reellen Zahlen x die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq C \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{3i}}{B_n^3(1+|x|^3)} .$$

Für die hier auftretende absolute Konstante C waren bisher keinerlei Aussagen über ihre zulässige Größe möglich, deren Kenntnis aber besonders für Anwendungsprobleme von großer Wichtigkeit ist.
Durch genaues Studium des Verhaltens der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ in vom Nullpunkt verschieden weit entfernten x-Zonen, die zum Teil von n abhängen, und die numerische Auswertung der erzielten Abschätzungen wurde bewiesen, daß die Ungleichung mit

$$C = 114{,}667$$

gilt.
In diesem Zusammenhang wurden für verschiedene Bereiche des Arguments x verschiedene Abschätzungen der Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ erhalten, die von eigenständiger Bedeutung sind.

6. Die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit zur Verteilungsfunktion der Normalverteilung unter Voraussetzung sogenannter einseitiger Momente ist ein neuer Problemkreis, der hier aufgeworfen und untersucht wird. An Hand eines Beispiels wird gezeigt, daß es Folgen unabhängiger Zufallsgrößen gibt, die keine höheren endlichen als zweite Momente besitzen, aber durchaus die Existenz einseitiger dritter Momente gesichert ist. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich entsprechend der Ungleichung von A.BIKELIS in diesem Fall nicht zumindest auf einer reellen Halbachse die Differenz $|F_n(xB_n)-\Phi(x)|$ ungleichmäßig durch x^{-3} abschätzen läßt, wie es im Fall der Existenz dritter absoluter Momente auf der gesamten reellen Achse möglich war. Diese Frage wird positiv beantwortet und gleichzeitig wird die in der qualitativen Abschätzung auftretende absolute Konstante numerisch ausgewertet.
7. Eine wichtige Aufgabe der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen

für große Abweichungen des Arguments x vom Nullpunkt ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $1-F_n(x)$ bzw. $F_n(-x)$, wenn x von n abhängt und für $n \to \infty$ unbeschränkt wächst. Insbesondere werden bei den großen Abweichungen im zentralen Grenzwertsatz die Quotienten

$$\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)} \quad \text{und} \quad \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)}$$

betrachtet.

Entsprechend der Klassifikation durch H. RUBIN und J. SETHURAMAN Mitte der sechziger Jahre unterscheidet man zwischen den gewöhnlichen, den mittleren, den großen und den übergroßen Abweichungen.

Unter Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen wird verstanden, daß für $n \to \infty$ die Limesbeziehungen

$$\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)} \longrightarrow 1 \quad \text{oder} \quad \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)} \longrightarrow 1$$

in einem Gebiet der Form $1 \leqq x \leqq A\sqrt{\ln n}$ gelten. Dabei ist A eine endliche positive Konstante.

Es werden die Zusammenhänge zwischen diesen Limesbeziehungen, also den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen, und der Existenz gewisser absoluter Momente der Zufallsgrößen X_i, $i=1,2,\ldots$ studiert.

Insbesondere wird im Falle unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen gezeigt, daß die Voraussetzung

$$E|X_1|^{2+c_o^2} < \infty, \quad c_o > 0,$$

notwendig für die Gültigkeit der oben betrachteten asymptotischen Beziehungen in der Zone

$$1 \leqq x \leqq (c_o+\delta)\sqrt{\ln n}, \quad c_o > 0, \quad \delta > 0,$$

und hinreichend für die Gültigkeit der Limesbeziehungen

$$\frac{1-F_n(xB_n)}{1-\Phi(x)} = 1+o\left(\frac{1}{x^{1+c_o^2}\ln n}\right), \quad \frac{F_n(-xB_n)}{\Phi(-x)} = 1+o\left(\frac{1}{x^{1+c_o^2}\ln n}\right)$$

in der Zone

$$1 \leqq x \leqq c_o\sqrt{\ln n}, \quad c_o > 0,$$

ist. Gleichzeitig wird die einseitige Fragestellung betrachtet, d.h. unter Voraussetzung sogenannter einseitiger Momente wird das asymptotische Verhalten der Summenverteilungsfunktionen $F_n(xB_n)$ auf einer reellen Halbachse studiert. Es gelingt, bekannte Grenzwertsätze u.a. von H. RUBIN, J. SETHURAMAN, N.N. AMOSOVA und W. WOLF zu verallgemeinern, indem die bisherigen Voraussetzungen abgeschwächt und das Verhalten von $F_n(xB_n)$ in bestimmten von n und x abhängigen Gebieten genaustens stu-

diert wird. Gleichzeitig wird in den Grenzwertsätzen für mittlere Abweichungen das auftretende Restglied genauer angegeben. Derartige Restgliedbetrachtungen speziell für mittlere Abweichungen wurden bisher in der Literatur noch nicht durchgeführt.
Die Faltungsmethode ist auch hier das Hauptinstrument zum Beweis der Grenzwertsätze für mittlere Abweichungen.

8. Der in den letzten Jahren zum Beweis von Grenzwertsätzen eingeschlagene Weg über die Faltung von Verteilungsfunktionen erwies sich als bahnbrechend und bestimmte die Entwicklung sowohl der Theorie der Grenzwertsätze für mittlere und große Abweichungen als auch der Untersuchungen zu den ungleichmäßigen Abschätzungen im zentralen Grenzwertsatz bedeutend.
Die Faltungsmethode stellt in der vorliegenden Dissertationsschrift das hauptsächliche Beweisinstrument dar. Mit ihrer Hilfe gelang es, eine Reihe neuer Ergebnisse zu erhalten und insbesondere die in These 5 angegebene absolute Konstante C aus der Ungleichung von A. BIKELIS mittels der elektronischen Datenverarbeitung numerisch zu bestimmen.