TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT ZUR NORMALVERTEILUNG UNTER VORAUSSETZUNG EINSEITIGER MOMENTE (TEIL 2)

von

Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 06 - 76

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT ZUR NORMALVERTEILUNG UNTER VORAUSSETZUNG EINSEITIGER MOMENTE (TEIL 2)

von

Ludwig Paditz

Sektion Mathematik

07 - 06 - 76

6. GRENZWERTSÄTZE FÜR MITTLERE ABWEICHUNGEN FÜR VERSCHIEDEN VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN

Wir betrachten eine Serie unanhängiger Zufallsgrößen $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ $(n=1, 2, \ldots ; k_n \to \infty$ für $n \to \infty)$ mit den Verteilungsfunktionen $F_{n1}(x), F_{n2}(x), \ldots, F_{nk_n}(x)$, deren Erwartungswerte gleich Null sind und die endliche Streuungen besitzen:

$$EX_{ni}=0,\ D^2X_{ni}=\sigma_{ni}^2<\infty \text{ für } 1 \leq i \leq k_n;\ n=1, 2, \ldots \quad . \tag{6.1}$$

Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$$N=k_n,\ B_N^2=\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^2,\ a_N=\frac{cB_N}{N}\ (c>0) \text{ und } K_N(\varepsilon)=\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{3+\delta}{2}}},\ \varepsilon>0, \delta \geq 0.$$

Es sei $\beta_{ni}^q=\int_0^\infty z^q dF_{ni}(z)$ das q-te einseitige Moment der Verteilungsfunktion $F_{ni}(x)$ über der positiven x-Achse. Mit β_N^q bezeichnen wir das arithmetische Mittel $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\beta_{ni}^q$ und mit $F_n(x)$ die N-fache Faltung der Verteilungsfunktionen $F_{n1}, F_{n2}, \ldots, F_{nN}$ der n-ten Serie.
Es mögen folgende Bedingungen erfüllt sein:
Mit absoluten Konstanten α und A gelte für hinreichend große n

$$0<\alpha \leq \frac{B_N^2}{N} \leq A<\infty, \tag{6.2}$$

weiterhin gelte für $n \to \infty$, beliebiges $\varepsilon>0$ und $\delta \geq 0$

$$\frac{(\ln B_N^2)^{1+\frac{\delta}{2}}}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{|u|>K_N(\varepsilon)} u^2 dF_{ni}(u) \to 0 \quad . \tag{6.3}$$

Die Bedingung (6.3) bedeutet eine Verallgemeinerung der von N. AMOSOVA in [1] eingeführten Bedingung (die wir speziell für $\delta = 4$ erhalten) und stellt für $\delta = 0$ die Bedingung von H. RUBIN/ J. SETHURAMAN in [7] dar.
In dem folgenden Grenzwertsatz über sogenannte mittlere Abweichungen geben wir für das Restglied eine konkrete Größenordnung an.

<u>SATZ 14:</u> Wenn neben den Voraussetzungen (6.1) bis (6.3) noch die Bedingung

$$\sup_n \beta_N^q<\infty \text{ für } q>c^2+2,\ c>0, \tag{6.4}$$

erfüllt ist, dann gilt für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ im Gebiet $0 \leq x \leq c\sqrt{\ln N}$ folgende asymptotische Beziehung

$$\frac{1-F_n(xB_N)}{1-\Phi(x)} = 1 + o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\frac{\delta}{2}}}\right) .$$

SATZ 15: Wenn wir die Bedingung (6.4) durch die Bedingung

$$\sup_n \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{0} |z|^q dF_{ni}(z) < \infty$$

ersetzen, erhalten wir für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ für das in Satz 14 betrachtete Gebiet eine analoge asymptotische Beziehung

$$\frac{F_n(-xB_N)}{\Phi(-x)} = 1 + o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\frac{\delta}{2}}}\right) .$$

Zum Schluß betrachten wir $K_N(\varepsilon)$ und die Bedingung (6.3) mit $\delta > -2$.

SATZ 16: Es mögen die Bedingungen (6.1) bis (6.3) mit $\delta > -2$ erfüllt sein. Dann gelten für $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ und $c^2 < \delta + 2$, $c > 0$, im Gebiet $0 \leq x \leq c\sqrt{\ln \ln N}$ die Aussagen der Sätze 14 und 15 bezüglich der Konvergenz zur Normalverteilung mit dem Restglied

$$o\left(\frac{x^3}{(\ln N)^{\frac{2+\delta-c^2}{2}}}\right) .$$

7. BEWEISE ZUM ABSCHNITT 6

7.1. BEWEIS DES SATZES 14:

Mit $F_{ni}^y(z)$ und $F_N^y(z)$ bezeichnen wir folgende Verteilungsfunktionen:

$$F_{ni}^y(z) = \begin{cases} F_{ni}(z) & , \quad z \leq 0 \\ F_{ni}(z) + 1 - F_{ni}(y) & , \quad 0 < z \leq y \\ 1 & , \quad y < z \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$F_N^y(z) = (F_{n1}^y * F_{n2}^y * \ldots * F_{nN}^y)(z) \quad \text{mit } y = \frac{\sqrt{N}}{x} .$$

$F_N^y(z)$ ist also die N-fache Faltung der Verteilungsfunktionen der n-ten Serie.

Es sei $h = \frac{x}{B_N}$, das heißt, es gilt wegen der Voraussetzung (6.2)

$$hy = O(1).$$

Im weiteren werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\varphi_{ni}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hz} dF_{ni}^y(z), \quad \bar{\varphi}_{ni}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} z e^{hz} dF_{ni}^y(z) ,$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{hz} dF_{ni}{}^y(z) \ , \ F_{ni}(z,h) = \frac{1}{\varphi_{ni}(h)} \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dF_{ni}{}^y(u) \ ,$$

$$F_N(z,h) = (F_{n1}(\cdot,h) * F_{n2}(\cdot,h) * \ldots * F_{nN}(\cdot,h))(z) \ , \ m_{ni}(h) = \frac{\bar{\varphi}_{ni}(h)}{\varphi_{ni}(h)},$$

$$\sigma_{ni}{}^2(h) = \frac{\bar{\bar{\varphi}}_{ni}(h)}{\varphi_{ni}(h)} - m_{ni}{}^2(h) \ , \ m_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_{ni}(h) \ ,$$

$$\sigma_N{}^2(h) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}{}^2(h) \ , \ \gamma_{ni}(h) = \frac{1}{\varphi_{ni}(h)} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^3 e^{hz} dF_{ni}{}^y(z) \ ,$$

$$c_{ni}(h) = \frac{1}{\varphi_{ni}(h)} \int_{-\infty}^{\infty} |z-m_{ni}(h)|^3 e^{hz} dF_{ni}{}^y(z)$$

und

$$\delta_{ni}(h) = h \int_0^y z^3 e^{h\vartheta(z)} dF_{ni}{}^y(z) - 3 \int_{-\infty}^{0} z^2 \left|1-e^{h\vartheta(z)}\right| dF_{ni}{}^y(z)$$

$$\text{mit} \quad 0 \leqq \frac{\vartheta(z)}{z} \leqq 1 \ .$$

Wie sich leicht nachprüfen läßt, ist $\emptyset(z,h)=F_N(Nm_N(h)+\sigma_N(h)z, h)$ eine standardisierte Verteilungsfunktion (siehe auch Beweis von Satz 3).

Wir gehen von folgender grundlegenden Beziehung aus:

$$\left|1-F_N(xB_N) - (1-\emptyset(x))\right| = \left|F_N(xB_N - \emptyset(x)\right| \leqq$$
$$\leqq \left|F_N(xB_N) - F_N{}^y(xB_N)\right| + \left|F_N{}^y(xB_N) - \emptyset(x)\right| \ . \qquad (7.1)$$

Für verschieden verteilte Zufallsgrößen läßt sich durch die Methode der vollständigen Induktion eine der Abschätzung (4.2) entsprechende Ungleichung beweisen:

$$\left|F_N(xB_N)-F_N{}^y(xB_N)\right| \leqq \sum_{i=1}^{N} (1-F_{ni}(y)) \leqq Ny^{-q}\beta_N{}^q \leqq C_1 \frac{Nx^q}{N^{q/2}} \ .$$

Hierbei ist C_1 eine absolute Konstante.

Also erhalten wir wegen der asymptotischen Gleichung

$$1-\emptyset(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

die Beziehung:

$$F_N(xB_N)-F_N{}^y(xB_N) = (1-\emptyset(x)) \, O\Bigg(\frac{x^{q+1}}{N^{\frac{q-2-c^2}{2}}} \Bigg) \ . \qquad (7.2)$$

Indem wir wie bei der Herleitung der Abschätzungen (4.4) bis (4.6) vorgehen, erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\left|F_N^y(xB_N)-\emptyset(x)\right| = \left|\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\int_{xB_N}^{\infty} e^{-hu}dF_N(u,h) - \int_x^{\infty} d\emptyset(u)\right| \leqq$$

$$\leqq \prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\, e^{-hxB_N}\left(2B\frac{\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h)}{\sigma_N^3(h)} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{xB_N-Nm_N(h)}{\sigma_N(h)}\right|\right)+ \qquad (7.3)$$

$$+\exp(-\frac{x^2}{2})\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left|h\sigma_N(h)-x\right| + \frac{1}{h\sigma_N(h)}\left|\prod_{i=1}^{N}\varphi_{ni}(h)\exp(-hxB_N+\frac{x^2}{2})-1\right|\right)$$

Hierbei wird mit B die absolute Konstante aus der Ungleichung von BERRY-ESSEEN für verschieden verteilte Zufallsgrößen bezeichnet. Mit einer absoluten Konstanten C_2 gilt

$$\left|\varphi_{ni}(h)-1\right| \leqq C_2\,\sigma_{ni}^{\,2}h^2 \quad .$$

Auf Grund der Voraussetzung (6.3) erhalten wir für die Streuungen $\sigma_{ni}^{\,2}$ folgende maximale Wachstumsordnung:

$$\sigma_{ni}^{\,2} = o\left(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad .$$

Also gilt wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}} = 0$ folgende Beziehung:

$$\varphi_{ni}(h)-1 = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) = o(1) \quad . \qquad (7.4)$$

Somit können wir $\ln\varphi_{ni}(h) = \varphi_{ni}(h)-1 + O((\varphi_{ni}(h)-1)^2)$ betrachten.
Wie sich unschwer nachprüfen läßt, gilt

$$\sum_{i=1}^{N}\ln\varphi_{ni}(h)-hxB_N = -\frac{x^2}{2} + \frac{h^2}{6}\sum_{i=1}^{N}\delta_{ni}(h) + O(h^4)\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^{\,4} \quad . \qquad (7.5)$$

Da für $n\to\infty$ und $\delta\to 0$ folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{h^2}{6}\sum_{i=1}^{N}\delta_{ni}(h) = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right), \quad \sum_{i=1}^{N}\sigma_{ni}^{\,4}O(h^4) = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{1+\delta}}\right) \qquad (7.6)$$

erhalten wir für die Beziehung (7.5):

$$\sum_{i=1}^{N}\ln\varphi_{ni}(h) - x^2 = -\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad . \qquad (7.7)$$

Außerdem gilt:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\ln\varphi_{ni}(h) - \frac{x^2}{2}\right)-1 = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad . \qquad (7.8)$$

Weiterhin lassen sich leicht folgende Beziehungen nachprüfen:

$$m_N(h) = O(h) \tag{7.9}$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} m_{ni}^{\,2}(h) = O(h^2)\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ni}^{\,4} \quad . \tag{7.10}$$

Durch entsprechende Abschätzungen wie in der Ungleichung (5.10) erhalten wir für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$:

$$\sigma_N(h) = B_N\left(1 + o\left(\frac{1}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)\right) \quad . \tag{7.11}$$

Für die Differenz $xB_N - Nm_N(h)$ gilt für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ folgendes asymptotische Verhalten:

$$xB_N - Nm_N(h) = o\left(\frac{x\sqrt{N}}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad . \tag{7.12}$$

Aus der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) \leq 4\sum_{i=1}^{N} \gamma_{ni}(h) + 4\sum_{i=1}^{N} |m_{ni}(h)|^3$$

und der Beziehung

$$\sum_{i=1}^{N} |m_{ni}(h)|^3 = o\left(\frac{h^3N^3}{(\ln N)^{3+1,5\delta}}\right)$$

bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ni}(h) = o\left(\frac{N^{3/2}}{x(\ln N)^{1+0,5\delta}}\right) \quad . \tag{7.13}$$

Wir erhalten somit aus der Ungleichung (7.3) für $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

$$F_N^{\,y}(xB_N) - \Phi(x) = (1-\Phi(x))\; o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad . \tag{7.14}$$

Also folgt aus (7.2) und (7.14):

$$F_N(xB_N) - \Phi(x) = (1-\Phi(x))\; o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right) \quad .$$

7.2. ZUM BEWEIS DES SATZES 16:

Im Gegensatz zum Beweis des Satzes 14 werden hier die Ausgangsverteilungen zweiseitig abgeschnitten. Es sei

$$\overline{F}_{ni}^{\,y}(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq -y \\ F_{ni}(z) - F_{ni}(-y) & , \quad -y < z \leq 0 \\ F_{ni}(z) + 1 - F_{ni}(y) & , \quad 0 < z \leq y \\ 1 & , \quad y < z \end{cases}$$

und

$$F_N^{\,y}(z) = (\overline{F}_{n1}^{\,y} * \overline{F}_{n2}^{\,y} * \ldots * \overline{F}_{nN}^{\,y})(z) \qquad \text{mit} \quad y = \frac{\sqrt{N}}{x} \quad .$$

Wir benutzen alle im Bewies des Satzes 14 auftretenden Bezeichnungen. Dabei muß beachtet werden, daß in den dort angegebenen Definitionen die Verteilungsfunktionen $F_{ni}^{y}(z)$ durch $\overline{F}_{ni}^{y}(z)$ ersetzt werden. Wir gehen wieder von der Beziehung (7.1) aus und erhalten für die Differenz $F_N(xB_N)-F_N^y(xB_N)$ folgende Ungleichung:

$$|F_N(xB_N)-F_N^y(xB_N)| \leqq \sum_{i=1}^{N} \int_{|z|>y} dF_{ni}(z) \leqq \frac{1}{y^2} \sum_{i=1}^{N} \int_{|z|>\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{(\ln N)^{1,5+0,5\delta}}} z^2 \, dF_{ni}(z).$$

Damit ist $F_N(xB_N)-F_N^y(xB_N) = o\left(\frac{x^2}{(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)$, das heißt

$$F_N(xB_N)-F_N^y(xB_N) = (1-\phi(x))\; o\left(\frac{x^3}{(\ln N)^{\frac{2+\delta-c^2}{2}}}\right) . \tag{7.15}$$

Für die Differenz $|F_N^y(xB_N)-\phi(x)|$ gilt die Abschätzung (7.3) mit der oben gemachten Bemerkung bezüglich $\overline{F}_{ni}^{y}(z)$. Weiterhin gelten unter den Voraussetzungen von Satz 16 die Abschätzungen (7.4), (7.7) und (7.8) sowie (7.9) bis (7.13), da bei diesen Beziehungen nur die Bedingung (6.3) und nicht die Existenz einseitiger Momente eine Rolle spielt. Somit erhalten wir für den Quotienten

$$\frac{1-F_N^y(xB_N)}{1-\phi(x)}$$

die gleiche Abschätzung wie (7.14). Hieraus und aus der Beziehung (7.15) folgt die Behauptung des Satzes 16.

8. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Den Ausgangspunkt dieses Artikels bildeten zwei Problemstellungen:

die ungleichmäßigen Abschätzungen der Differenz $|F_n(x)-\phi(\frac{x}{\sqrt{n}})|$ und die sogenannten mittleren Abweichungen.

Zwischen diesen beiden Problemkreisen können wir einen qualitativen Zusammenhang aufzeigen.

Weiterhin wollen wir sowohl die gewöhnlichen als auch die großen Abweichungen den ungleichmäßigen Abschätzungen der Differenz $|F_n(x)-\phi(\frac{x}{\sqrt{n}})|$ gegenüberstellen.

Um ungleichmäßige Abschätzungen der Differenz $|F_n(x)-\phi(\frac{x}{\sqrt{n}})|$ zu erhalten, schätzten wir diese Differenz zuerst für hinreichend große n ab ($n > n_0$ bzw. $n > n_1$) und danach für kleine n ($n \leqq n_0$ bzw. $n \leqq n_1$).

Ebenfalls wurde bezüglich des Arguments z der Verteilungsfunktion F_n in mehreren Schritten vorgegangen. (Unabhängig von der speziellen Gestalt des Arguments des Verteilungsfunktion F_n bezeichnen wir es im weiteren allgemein mit z.)
Ausgehend vom Nullpunkt betrachteten wir den z-Bereich von F_n bis $O(\sqrt{n})$ (Satz 7 bzw. Satz 13), d.h., wir befanden uns in einer z-Zone für gewöhnliche Abweichungen. Im nächsten Schritt wurde der Variationsbereich für das Argument z von $F_n(z)$ auf $O(\sqrt{n \ln n})$ erweitert (Satz 3 bzw. Satz 9). Somit würden wir uns für $n \to \infty$ in einer z-Zone für sogenannte mittlere Abweichungen befinden, die wir speziell in den Sätzen 14 und 15 diskutierten. Die Sätze 4 und 10 bauten auf den Sätzen 3 und 9 auf und bewirkten lediglich eine quantitative Erweiterung des z-Bereiches. In den Sätzen 5 und 11 variierte das Argument z von $F_r(z)$ in einer Zone, die für $n \to \infty$ das z-Gebiet für große Abweichungen umfassen und weiterhin jedes beliebig große Argument z zulassen würde. In den Sätzen 6 und 12 wurden ungleichmäßige Abschätzungen für kleine n angegeben.
In der auf Seite 8 folgenden Tabelle 2 soll das eben Gesagte noch einmal zusammengefaßt werden.
Jetzt wollen wir die Sätze 3 und 9 aus der Sicht der mittleren Abweichungen diskutieren. In den Beweisen der Sätze 3, 9 und 14 erkennen wir eine einheitliche Struktur: Die abzuschätzende Differenz

$$F_n(z)-\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{bzw.} \quad F_N(z)-\Phi\left(\frac{z}{B_N}\right)$$

wird über die Dreiecksungleichung entsprechend (4.1), (5.7) bzw. (7.1) aufgespalten, was wir in der folgenden Tabelle 1 wiedergeben:

<u>TABELLE 1:</u>

	1. Summand	2. Summand	3. Summand
Satz 3	$F_n(z)-F_n^y(z)$	$\int_z^\infty e^{-hu} d(F_{nh}^y-\Phi_{nh})(u)$	$S_{3,3}=\int_z^\infty e^{-hu} d\Phi_{nh}(u)-\int_{\frac{z}{\sqrt{n}}}^\infty d\Phi(u)$
Satz 9	$F_n(z)-F_n^y(z)$	entfällt, da $y = \frac{1}{h}$	$S_{3,9} = F_n^y(z) - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)$
Satz 14	$F_N(z)-F_N^y(z)$	entfällt, da $y=O\left(\frac{1}{h}\right)$	$S_{3,14} = F_N^y(z) - \Phi\left(\frac{z}{B_N}\right)$

TABELLE 2:

Satz	n	Argumentbereich von $F_n(z)$ bzw. $F_N(z)$	Bemerkungen
Satz 7	$n \geqq 1$	$0 \leqq z < a_2\sqrt{n}$ bzw. $0 \leqq z < a_6\sqrt{n}$	gewöhnliche Abweichungen, gleichmäßige Abschätzungen für beliebige n und kleine z
Satz 13	$n > 1$	$0 \leqq z < a_3\sqrt{n}$ bzw. $0 \leqq z < a_7\sqrt{n}$	
Satz 3	$n > n_0$	$a_2\sqrt{n} \leqq z \leqq a_4\sqrt{n \ln \frac{n}{a_0}}$	mittlere Abweichungen, ungleichmäßige Abschätzungen für große n und z von "mittlerer" Größenordnung
Satz 9	$n > n_1$	$a_3\sqrt{n} \leqq z \leqq a_4\sqrt{n \ln \frac{n}{a_1}}$	
Satz 14 und Satz 15	$n \to \infty$ d.h. n hinreichend groß	$0 \leqq z \leqq a_N\sqrt{N \ln N}$	
Satz 4	$n > n_0$	$a_4\sqrt{n \ln \frac{n}{a_0}} < z \leqq a_5\sqrt{n \ln \frac{n}{a_0}}$	quantitative Erweiterung der Sätze 3 und 9
Satz 10	$n > n_1$	$a_4\sqrt{n \ln \frac{n}{a_1}} < z \leqq a_5\sqrt{n \ln \frac{n}{a_1}}$	
Satz 5	$n > n_0$	$a_5\sqrt{n \ln \frac{n}{a_0}} < z$	ungleichmäßige Abschätzungen für große n und große z
Satz 11	$n > n_1$	$a_5\sqrt{n \ln \frac{n}{a_1}} < z$	
Satz 6	$1 \leqq n \leqq n_0$	$a_6\sqrt{n} \leqq z$	ungleichmäßige Abschätzungen für kleine n und große z
Satz 12	$1 < n \leqq n_1$	$a_7\sqrt{n} \leqq z$	

Die Abschätzung des ersten Summanden (s. Tabelle 1) hat einen großen Einfluß auf die qualitative Größe der Konvergenzgeschwindigkeit, was wir besonders gut im Beweis des Satzes 14 erkennen.
Die Beziehung (7.2) zeigt deutlich, wie über die Parameter q (Bedingung über die Existenz höherer Momente) und c (Bedingung für die z-Zone) die Voraussetzungen des Satzes eingehen. Nur unter der Bedingung $q-2-c^2 > 0$ können wir aus dem ersten Summanden den Faktor

$1-\Phi(x)$ gewinnen. Mit $q=3$ und $c^2=\frac{3}{2}$ erkennen wir sofort, daß in den Sätzen 3 und 9 $q=2-c^2<0$ gilt. Damit sind die Voraussetzungen der Sätze 3 und 9 qualitativ zu schwach, um für den ersten Summanden eine Konvergenzgeschwindigkeit wie in Satz 14 zu erhalten.

Anders sieht es für den dritten Summanden aus. Im Satz 3 können wir aus der Beziehung (4.16) den Faktor $1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{n}})$ gewinnen. Für $n>n_0$ gilt offensichtlich:

$$|S_{3,3}| \leqq \frac{\sqrt{n}}{x}\exp(-\frac{x^2}{2n})\; C(c_3)\,\frac{x^3}{n^2} \quad ,$$

d.h., für $n\to\infty$ haben wir

$$S_{3,3} = (1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{n}}))\; O(\frac{x^3}{n^2}) \quad .$$

$C(c_3)$ ist eine positive Konstante, die nur von c_3 abhängt.

Wir bemerken, daß die Größenordnung des Faktors $O(n^{-2}x^3)$ nicht zufällig ist. Wir finden ihn z.B. als Koeffizient vor der Cramérschen Reihe in den Sätzen über große Abweichungen wieder.

Im Satz 9 können wir den dritten Summanden (s. Tabelle 1) entsprechend der Beziehung (4.16) mittels der Abschätzungen (5.10) und (5.12) bis (5.16) abschätzen und erhalten für $n>n_1$:

$$|S_{3,9}| \leqq \frac{\sqrt{n}}{x}\exp(-\frac{x^2}{2n})\; C(\beta_3,K)\,\frac{x^2}{n\ln n} \quad ,$$

d.h., für $n\to\infty$ haben wir

$$S_{3,9} = (1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{n}}))\; O(\frac{x^2}{n\ln n}) \quad .$$

$C(\beta_3,K)$ ist eine positive Konstante, die nur von β_3 und K abhängt.

Auch in Satz 14 haben wir genau diese asymptotische Beziehung erhalten, wenn wir $\delta=0$ setzen:

$$S_{3,14} = (1-\Phi(\frac{z}{B_N}))\; o(\frac{z^2}{N(\ln N)^{\frac{2+\delta}{2}}}) \quad .$$

Also spielen für die Abschätzung des dritten Summanden die Bedingungen (3.1) bzw. (6.3) eine wesentliche Rolle, falls nur einseitige Momente vorausgesetzt werden.

Nachdem diese grundlegenden Zusammenhänge zwischen den Sätzen 3, 9 und 14 diskutiert wurden, bietet sich jetzt eine Möglichkeit an, das Restglied im Satz 14 mittels der Erkenntnisse aus den Beweisen zu den Sätzen 3 und 9 exakt numerisch auszuwerten. Dabei müssen die Parameter c, q und auch n_1 günstig gewählt werden.

Solche einheitlichen Beweisstrukturen wie in den Sätzen 3, 9 und 14

finden wir zwischen den Sätzen 5 und 11 und den großen Abweichungen nicht. Das hat ganz natürliche Ursachen, auf die hier nur kurz eingegangen werden soll.
Während bei der Problematik der großen Abweichungen auf Grund einer genaueren Beweistechnik in der Abschätzung der Differenz

$$F_n^y(x\sqrt{n}) - \emptyset(x)$$

noch der Faktor

$$\exp(-\frac{x^2}{2})$$

erhalten wird, ist diese Genauigkeit in den Sätzen 5 und 11 nicht mehr möglich.
Die genauere Beweistechnik bei der Problematik der großen Abweichungen spiegelt sich nicht zuletzt in einer exakteren Diskussion der Sattelpunktsgleichung $m(h)-h = 0$ und anderen Voraussetzungen (z.B. Cramérsche Bedingung) wider.
Wir können hier in den Sätzen 5 und 11 auf Grund der Sätze 1 und 8 bezüglich x nur eine ungleichmäßige Abschätzung der Ordnung $O(x^{-3})$ erhalten.

LITERATUR:

[1] АМОСОВА, Н. Н.: О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений. Вестник Ленинград. унив. /1972/, No. 13, 5 - 14

[2] VAN BEEK, P.: Fourier-analytische Methoden zur Verschärfung der Berry-Esseen Schranke. Dissertation, Bonn 1971

[3] БИКЯЛИС, А.: Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. Литовский матем. сб. 6 /1966/, No. 3, 323 - 346

[4] FELLER, W.: On the Berry-Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10 (1968), No. 3, 261 - 268

[5] НАГАЕВ, С. В.: Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. Теория вероятн. и её примен. 10 /1965/, No. 2, 231 - 254

[6] PADITZ, L.: Eine ungleichmäßige Abschätzung der Differenz zweier Verteilungsfunktionen. Wiss. Z. der TU Dresden 24 (1975), Heft 2, 389 - 392

[7] RUBIN, H./ SETHURAMAN, J.: Probabilities of moderate deviations. Sankhya A27 (1965), No. 2-4, 325 - 346

III-9-276 JG02/76/1688 (12.3.76)