TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ

von

Ludwig Paditz
Sektion Mathematik

07 - 11 - 76

INFORMATIONEN

Als Manuskript gedruckt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

ABSCHÄTZUNGEN DER KONVERGENZGESCHWINDIG-
KEIT IM ZENTRALEN GRENZWERTSATZ

von
Ludwig Paditz
Sektion Mathematik
07 - 11 - 76

Im vorliegenden Artikel werden die in der Arbeit [4] dargelegten Abschätzungen des Restgliedes im zentralen Grenzwertsatz für identisch verteilte Zufallsgrößen auf den Fall verschieden verteilter Zufallsgrößen übertragen.

1. GRENZWERTSÄTZE FÜR VERSCHIEDEN VERTEILTE ZUFALLSGRÖSSEN

Wir betrachten eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit den Verteilungsfunktionen $V_1(x), V_2(x), \ldots$.

Es sei $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Mit β_{mi} bezeichnen wir das absolute Moment m-ter Ordnung der Zufallsgröße X_i: $\beta_{mi} = E|X_i|^m$, $m > 0$. Im Fall $m \geq 1$ sei a_i der Erwartungswert und im Fall $m \geq 2$ sei σ_i^2 die Streuung der Zufallsgröße X_i:

$$a_i = EX_i, \quad \sigma_i^2 = D^2X_i, \quad i=1,2,\ldots .$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad B_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{mi} .$$

SATZ 1: Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ endliche absolute Momente der Ordnung $0 < m < 1$ besitzen, so gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$:

$$1-F_n(x) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) + \exp\left(1+\left(1+\frac{e}{2}\right)B_{mn}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right|^m\right)\left(\frac{K_m B_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} . \tag{1.1}$$

Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ endliche absolute Momente der Ordnung $1 \leq m < \infty$ besitzen, so gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$:

$$1-F_n(x) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) + \tag{1.2}$$

$$+ \exp\left(1+|A_n|\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right| + \frac{e}{2} B_{\nu n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right|^{\nu}\right)\left(\frac{K_m B_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} ,$$

wobei $\nu = \min(m,2)$ und $K_m = 1+(m(m+1)^{m+1}+em^m)e^{-m}$ ist.

Die Beziehungen (1.1) und (1.2) stellen eine leichte Verschärfung der in [2] S. 324 erhaltenen Ungleichungen dar. Ein entsprechender Satz gilt für $F_n(-x)$. In diesem Fall muß man in den Ungleichungen (1.1) und (1.2) die Differenz $1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y)$ durch $\prod_{i=1}^{n} V_i(-y)$ ersetzen.

Im weiteren sei $\sigma_i^2 < \infty$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_i = 0$, $i=1,2,\ldots,n$. Mit L_{mn} bezeichnen wir den Ljapunovbruch der Ordnung m: $L_{mn} = B_{mn}/B_n^m$.

Aus der Beziehung (1.2) ergeben sich unmittelbar einige Folgerungen:

<u>FOLGERUNG 1:</u> Wenn $B_{mn} < \infty$, $m \geq 2$, ist, so gilt für alle

$x \geq kB_n \left(\frac{K_m B_{mn}}{B_n^2}\right)^{1/m} \ln B_n^2$, $B_n^2 \geq e$ und $k \geq 1$ die Ungleichung

$$1-F_n(x) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{x}{k}\right)+\exp\left(1+\frac{e}{2}\left(\frac{2+e}{2e}-\frac{1}{m}\right)^2 m^2 \left(\frac{B_n^2}{K_m B_{mn}}\right)^{\frac{2}{m}}\right)\left(\frac{k^m K_m B_{mn}}{x^m}\right)^k .$$

<u>FOLGERUNG 2:</u> Wenn $B_{mn} < \infty$, $m \geq 2$, ist, so gilt für alle

$x \geq 4B_n \max\left(\sqrt{\ln\frac{1}{K_m L_{mn}}}\ , 1\right)$ die Ungleichung

$$1-F_n(x) \leq \frac{D_m B_{mn}}{x^m} . \tag{1.3}$$

Dabei ist D_m eine Konstante, die nur von m abhängt. Es gilt

$$D_m \leq 2^m+\exp\left(\frac{e}{8}m^2 \ln^2\left(\frac{\vartheta m+4}{2}\right)\right)(\vartheta m)^m e K_m \quad \text{mit } \vartheta=\max\left(\frac{e^{1/m}}{2}, \frac{4}{8-e}\right) .$$

A. BIKELIS formulierte 1966 in [2] folgendes grundlegende Ergebnis:

<u>SATZ 2:</u> Wenn die Zufallsgrößen X_1, X_2, ..., X_n endliche absolute Momente dritter Ordnung besitzen, so gilt für alle reellen x und natürlichen Zahlen n die Abschätzung

$$\left|F_n(xB_n)-\phi(x)\right| \leq \frac{L\, L_{3n}}{1+|x|^3} . \tag{1.4}$$

Dabei ist L eine absolute Konstante.

$\phi(x)$ bedeutet hier und in den folgenden Sätzen die standardisierte Normalverteilung.

Die folgenden Aussagen stellen eine Verschärfung der Abschätzung (1.4) in dem Sinne dar, daß für die Konstante L jeweils konkrete Größenordnungen angegeben werden und die Abhängigkeit bezüglich x detaillierter untersucht wird.

Im weiteren verwenden wir folgende Abkürzungen:

$L_o=0{,}7975$, $M_3=27K_3$, $n_o=M_3\exp(\frac{1}{3}e^3)$, $a_1=\sqrt{3}$, $a_2=4$, $a_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $a_4=12{,}6581$

und es sei $\beta_{3i} < \infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

<u>SATZ 3:</u> Wenn $L_{3n} < \frac{1}{n_o}$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$a_1 \leq x \leq a_1\sqrt{\ln\frac{1}{M_3 L_{3n}}}$ genügen, folgende Ungleichung

$$\left|F_n(xB_n)-\phi(x)\right| \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{L_1 L_{3n}}{x^3}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right)$$

mit $L_1=3202{,}1831$.

Aus diesem Satz bzw. dessen Beweisführung erhält man unmittelbar zwei Folgerungen:

<u>FOLGERUNG 3:</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt

$$\left|F_n(xB_n)-\emptyset(x)\right| \leqq \frac{L_2 L_{3n}}{x^3}$$

mit $L_2=1958{,}3410$.

Der absolute Fehler beträgt im Satz 3 wie auch in der Folgerung 3 höchstens $4{,}026\cdot 10^{-4}$.

<u>FOLGERUNG 4:</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt

$$\left|F_n(xB_n)-\emptyset(x)\right| \leqq \frac{L_3 L_{3n}}{x^3}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right)$$

mit $L_3=4{,}1028$.

<u>SATZ 4:</u> Wenn $L_{3n}<1/n_o$ ist, dann gilt für alle x, die der Bedingung

$$\alpha\sqrt{\ln\frac{1}{M_3 L_{3n}}} < x \leqq \beta\sqrt{\ln\frac{1}{M_3 L_{3n}}} \quad \text{mit } a_1 \leqq \alpha < \beta \leqq a_2 \text{ und } \frac{\alpha a_3}{\beta} > 1{,}0721$$

genügen, die Ungleichung

$$\left|F_n(xB_n)-\emptyset(x)\right| \leqq \frac{L_4 L_{3n}}{x^3}\ .$$

Dabei ist L_4 eine Konstante, die nur von α und β abhängt. Es gilt

$$L_4=L_4(\alpha,\beta)=\frac{e^3\beta^3 M_3}{3\sqrt{6\pi}\,\exp\left(\left(\left(\frac{\alpha a_3}{\beta}\right)^2-1\right)\frac{1}{3}e^3\right)}+\left(\frac{\beta}{a_1}\right)^3 L_3\ .$$

Aus Satz 4 erhalten wir die Folgerung:

<u>FOLGERUNG 5:</u> Wenn wir im Satz 4 die Voraussetzung $\frac{\alpha a_3}{\beta}>1{,}0721$ abschwächen durch $\frac{\alpha a_3}{\beta}>1$, dann gilt die Aussage des Satzes 4 ebenfalls. Dabei müssen wir L_4 durch die Konstante

$$\frac{\beta^3 M_3}{\sqrt{6\pi}\left(\left(\frac{\alpha a_3}{\beta}\right)^2-1\right)e}+\left(\frac{\beta}{a_1}\right)^3 L_3$$

ersetzen.

Unabhängig von der speziellen Wahl von α und β kann man zeigen, daß der absolute Fehler der in Satz 4 angegebenen Abschätzung kleiner als $8{,}829\cdot 10^{-5}$ ist. In Folgerung 5 beträgt er höchstens $5{,}809\cdot 10^{-4}$.

<u>SATZ 5:</u> Wenn $L_{3n}<\frac{1}{n_o}$ ist, dann gilt für alle $x>a_2\sqrt{\ln\frac{1}{M_3 L_{3n}}}$:

$$\left|F_n(xB_n)-\emptyset(x)\right| \leqq \frac{L_5 L_{3n}}{x^3} \tag{1.5}$$

mit $L_5=32{,}9491$.

In diesem Satz ist der absolute Fehler kleiner als $3{,}172 \cdot 10^{-8}$.

SATZ 6: Wenn $L_{3n} \geqq \frac{1}{n_0}$ ist, dann gilt für alle $x \geqq a_4$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\phi(x)| \leqq \frac{L_6 L_{3n}}{x^3}$$

mit $L_6=1617{,}4542$.

Für kleine x, das heißt speziell für den bisher noch nicht betrachteten x-Bereich $0 \leqq x < a_1$ im Fall $L_{3n} < \frac{1}{n_0}$ bzw. $0 \leqq x < a_4$ im Fall $L_{3n} \geqq \frac{1}{n_0}$, geben wir die gleichmäßige Abschätzung von BERRY-ESSEEN mit der von P. VAN BEEK [1] berechneten absoluten Konstanten L_0 an, da in diesem Fall keine schärfere ungleichmäßige Abschätzung bekannt ist.

SATZ 7: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|F_n(xB_n)-\phi(x)| \leqq L_0 L_{3n} \quad .$$

Für negative x gelten die zu diesen Sätzen entsprechenden Aussagen. Eine Vorstellung über die im Satz 2 auftretende absolute Konstante L erhalten wir, wenn wir die Sätze 3 bis 7 zu einer Gesamtaussage zusammenfassen. Indem man im Satz 4 konkrete Zahlenpaare (α,β) wählt und die Konstante L_4 berechnet, kann man z.B. zeigen, daß für die absolute Konstante L gilt:

$$L \leqq 5{,}2255 \cdot 10^4.$$

2. GRENZWERTSÄTZE UNTER VORAUSSETZUNG EINSEITIGER MOMENTE

Es sei $\gamma_{mi}=\int_0^{\infty} x^m dV_i(x)$; $m>0$; das rechtsseitige Moment m-ter Ordnung der Zufallsgröße X_i. Im Fall $m \geqq 2$ sei $g_{mi}=\max(\sigma_i^m, \gamma_{mi})$; $i=1,2,\dots$. Weiterhin verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\Gamma_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{mi}, \quad G_{mn} = \sum_{i=1}^{n} g_{mi} \quad \text{und} \quad \Lambda_{mn} = G_{mn}/B_n^m \; .$$

SATZ 8: Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_n$ endliche rechtsseitige Momente der Ordnung $0<m<1$ besitzen, so gilt für alle $x>0$ und $y>0$: $1-F_n(x) \leqq$

$$\leqq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y)+\exp\left(1+\left(1+\frac{e}{2}\right)\Gamma_{mn}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m\Gamma_{mn}}\right|^m\right)\left(\frac{K_m\Gamma_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}. \quad (2.1)$$

Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_n$ endliche rechtsseitige Momente der Ordnung $1 \leqq m < \infty$ besitzen, so gilt für alle $x>0$ und $y>0$:

$$1-F_n(x) \leqq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) + \quad (2.2)$$

$$+ \exp\left(1+\Gamma_{1n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m\Gamma_{mn}}\right|+\frac{e}{2}\Gamma_{\nu n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m\Gamma_{mn}}\right|^{\nu}\right)\left(\frac{K_m\Gamma_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}$$

mit $\nu=\min(m,2)$.

Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ endliche rechtsseitige Momente der Ordnung $1 \leq m < \infty$ und absolute Momente der Ordnung $1 \leq \nu \leq 2$ besitzen, so gilt für alle $x>0$ und $y>0$:

$$1-F_n(x) \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) + \tag{2.3}$$

$$+ \exp\left(1+|A_n|\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m\Gamma_{mn}}\right|+\frac{e}{2}B_{\nu n}\left|\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m\Gamma_{mn}}\right|^{\nu}\right)\left(\frac{K_m\Gamma_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} .$$

Wie leicht ersichtlich ist, folgt aus den Ungleichungen (2.1) und (2.3) die Aussage des Satzes 1, wenn man die einseitigen Momente durch die absoluten Momente ersetzt.

Die Folgerungen 1 und 2 gelten ebenfalls, wenn wir dort B_{mn} durch Γ_{mn} ersetzen. Satz 8 bleibt gültig, wenn im Fall $m \geq 2$ Γ_{mn} durch G_{mn} ersetzt wird. Unter Verwendung des einseitigen Moments über der negativen x-Achse gilt eine entsprechende Aussage für $F_n(-x)$.

In den folgenden Sätzen benutzen wir die Abkürzungen

$$L_7 = 7{,}6397,\quad n_1 = \exp(\tfrac{1}{3}e^3),\quad a_0 = 1,\quad a_5 = 3{,}22$$

und fordern außerdem

$$a_i=0,\quad \sigma_i^2<\infty,\quad \gamma_{3i}<\infty,\quad i=1,2,\ldots,n .$$

<u>SATZ 9:</u> Es sei für

$$\Lambda_{3n}<\frac{1}{n_1} \tag{2.4}$$

folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|u|>H_n} u^2 dV_i(u) \leq \frac{1}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \quad \text{mit } H_n=B_n\left(\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{2.5}$$

Dann gilt für $\Lambda_{3n}<\frac{1}{n_1}$ und alle x aus dem Gebiet

$a_0 \leq x \leq a_1\sqrt{\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}}$ folgende Ungleichung:

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i\left(\frac{B_n}{x}\right) + \frac{L_8\, x}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

mit $L_8=44{,}5670$.

<u>FOLGERUNG 6:</u> Unter den Voraussetzungen vom Satz 9 gilt

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leq \min\left(\frac{L_9\, x}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right), \frac{L_7}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\right), L_9=41{,}3924.$$

SATZ 10: Es sei unter der Bedingung (2.4) die Beziehung (2.5) erfüllt. Dann gilt für $\Lambda_{3n} < \frac{1}{n_1}$ und alle x aus dem Gebiet

$$a_1\sqrt{\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}} < x \leq a_2\sqrt{\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}}$$ folgende Ungleichung:

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \min\left(\frac{L_{10}\, x}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\exp(-\frac{x^2}{32}),\ \frac{L_7}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\right)$$

mit $L_{10} = 18{,}0985$.

SATZ 11: Wenn die Beziehung (2.4) erfüllt ist, dann gilt für alle $x > a_2\sqrt{\ln\frac{1}{\Lambda_{3n}}}$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \frac{L_{11}\Lambda_{3n}}{x^3}$$

mit $L_{11} = 16{,}2634$.

In der Folgerung 6 und auch im Satz 10 ist der absolute Fehler kleiner als 0,57054, im Satz 11 ist er kleiner als $1{,}815\cdot 10^{-5}$.

SATZ 12: Wenn $\Lambda_{3n} \geq \frac{1}{n_1}$ ist, dann gilt für alle $x \geq a_5$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \frac{L_{12}\Lambda_{3n}}{x^3}$$

mit $L_{12} = 26991{,}0811$.

Für die bisher noch nicht betrachteten kleinen x-Werte

$0 \leq x < a_0$ im Fall $\Lambda_{3n} < \frac{1}{n_1}$ bzw. $0 \leq x < a_5$ im Fall $\Lambda_{3n} \geq \frac{1}{n_1}$

geben wir eine gleichmäßige Abschätzung an, die sich aus der Arbeit [3] von W. FELLER ergibt. In diesem Fall ist keine schärfere ungleichmäßige Abschätzung bekannt.

SATZ 13: Es sei für $\Lambda_{3n} < 1$ die Bedingung (2.5) erfüllt. Dann gilt

$$|F_n(xB_n)-\emptyset(x)| \leq \frac{L_{13}}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}$$

mit $L_{13} = 8{,}1073$.

Unter der Bedingung (2.4) kann im Satz 13 L_{13} durch L_7 ersetzt werden. In den Sätzen 11, 12 und 13 kann sowohl in den Voraussetzungen als auch in den Abschätzungen Λ_{3n} durch Γ_{3n}/B_n^3 ersetzt werden. Für negative x erhält man zu den Sätzen 9 bis 12 entsprechende Aussagen, wenn anstelle von γ_{mi} die Existenz des linksseitigen Moments $\int_{-\infty}^{0}|x|^m dV_i(x)$; $i=1,2,\ldots,n$; vorausgesetzt wird.

Zusammenfassend ergibt sich aus den Sätzen 9 bis 13 eine zu dem Satz 2 entsprechende Aussage unter Voraussetzung einseitiger Momente.

SATZ 14: Es sei für $\Lambda_{3n} < 1$ die Bedingung (2.5) erfüllt. Dann gilt für alle $x \geq 0$ und $\Lambda_{3n} < 1$ die Abschätzung

$$|F_n(xB_n) - \emptyset(x)| \leq \frac{L_{14}}{(1+x^3)\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}$$

mit $L_{14} = 1{,}9868 \cdot 10^4$.

Ausschlaggebend für die Größenordnung von L_{14} war hierbei die Größe der absoluten Konstanten L_{12}.

3. BEWEISE ZUM ABSCHNITT 1

3.1. BEWEIS DES SATZES 1:

Mit $V_i^y(z)$ bezeichnen wir folgende Verteilungsfunktion:

$$V_i^y(z) = \begin{cases} V_i(z) & , \quad z \leq 0 \\ V_i(z) + 1 - V_i(y), & 0 < z \leq y \\ 1 & , \quad y < z \end{cases} \quad \text{mit } y > 0, \; i = 1,2,\ldots,n .$$

$F_n^y(z) = (\overset{n}{\underset{i=1}{\circledast}} V_i^y)(z)$ sei die n-fache Faltung der Verteilungsfunktionen $V_1^y, V_2^y, \ldots, V_n^y$. Im weiteren werden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$V_{ih}^y(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dV_i^y(u), \quad F_{nh}^y(z) = (\overset{n}{\underset{i=1}{\circledast}} V_{ih}^y)(z), \quad h > 0,$$

$$H_{i1}(h) = \int_{-\infty}^{1/h} e^{hu} dV_i^y(u), \quad H_{i2}(y,h) = \int_{1/h}^{y} e^{hu} dV_i^y(u),$$

$$R_i(y,h) = H_{i1}(h) + H_{i2}(y,h) .$$

Es sei $y > (K_m B_{mn})^{1/m} > 0$. Andernfalls sind die Aussagen des Satzes offensichtlich. Die folgenden Überlegungen führen wir durch für

$$y \geq \frac{1}{h} . \tag{3.1}$$

Es gilt:

$$1 - F_n(x) = F_n^y(\infty) - F_n^y(x) + F_n^y(x) - F_n(x) \tag{3.2}$$

und

$$F_n^y(\infty) - F_n^y(x) = \int_x^{\infty} e^{-hu} dF_{nh}^y(u) = \prod_{i=1}^{n} R_i(y,h) \int_x^{\infty} e^{-hu} d\bar{F}_{nh}^y(u). \tag{3.3}$$

Dabei ist $\bar{F}_{nh}^y(u) = (\prod_{i=1}^{n} R_i(y,h))^{-1} F_{nh}^y(u)$ eine Verteilungsfunktion.

Der auf der rechten Seite von (3.3) stehende Ausdruck läßt sich nach oben abschätzen durch:

$$\exp\left(-hx + \sum_{i=1}^{n} (H_{i1}(h)-1) + \sum_{i=1}^{n} H_{i2}(y,h)\right) . \tag{3.4}$$

Im Fall $0<m<1$ gilt die Ungleichung

$$H_{i1}(h)-1 \leqq (1+\tfrac{e}{2})h^m \beta_{mi} , \tag{3.5}$$

währenddessen wir im Fall $1 \leqq m<\infty$ folgende entsprechende Ungleichung erhalten:

$$H_{i1}(h)-1 \leqq ha_i + \tfrac{e}{2} h^{\nu}\beta_{\nu i} \quad \text{mit } \nu = \min(m,2). \tag{3.6}$$

Durch partielle Integration bekommen wir für $H_{i2}(y,h)$:

$$H_{i2}(y,h) \leqq eh^m\beta_{mi} + h^m \int_{1}^{yh} \frac{e^t}{t^m}dt\, \beta_{mi} \leqq K_m \frac{e^{hy}}{y^m}\beta_{mi} . \tag{3.7}$$

Sei $h_m(y)$ die Lösung der Gleichung $K_m B_{mn} y^{-m} e^{hy}=1$, das heißt

$$h_m(y) = \frac{1}{y} \ln \frac{y^m}{K_m B_{mn}} > 0 .$$

Wir betrachten den Fall, daß $y \geqq \frac{1}{h_m(y)}$ ist, und setzen in (3.4) $h=h_m(y)$, das heißt, (3.1) ist erfüllt. Für dieses h erhalten wir mit den Beziehungen (3.4) bis (3.7) eine Abschätzung für die linke Seite von (3.3):

$$F_n^{\,y}(\infty)-F_n^{\,y}(x) \leqq \exp\left((1+\tfrac{e}{2})B_{mn}\left|\frac{1}{y} \ln \frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right|^m+1\right)\left(\frac{K_m B_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}} \tag{3.8}$$

für $0<m<1$

und

$$F_n^{\,y}(\infty)-F_n^{\,y}(x) \leqq \tag{3.9}$$

$$\leqq \exp\left(A_n \frac{1}{y} \ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}} + \tfrac{e}{2}B_{\nu n}\left|\frac{1}{y} \ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right|^{\nu}+1\right)\left(\frac{K_m B_{mn}}{y^m}\right)^{\frac{x}{y}}$$

für $1 \leqq m < \infty$.

Aus (3.2), (3.8), (3.9) und der Ungleichung

$$F_n^{\,y}(x)-F_n(x) \leqq 1-\prod_{i=1}^{n} V_i(y) \tag{3.10}$$

ergeben sich die Abschätzungen (1.1) und (1.2).

Falls $y<\frac{1}{h_m(y)}$ gilt, betrachten wir anstatt $V_i^{\,y}(x)$ die Verteilungsfunktionen $V_i^{\,1/h_m(y)}(x)$ und erhalten für $h=h_m(y)$:

$$R_i\left(\frac{1}{h_m(y)}, h_m(y)\right) = H_{i1}(h_m(y)) .$$

Entsprechend der Beziehung (3.4) gilt deshalb

$$F_n^{\,1/h_m(y)}(\infty)-F_n^{\,1/h_m(y)}(x) \leqq \exp\left\{-h_m(y)x + \sum_{i=1}^{n} (H_{i1}(h_m(y))-1)+1\right\}.$$

Damit bekommen wir auch in diesem Fall die Behauptung des Satzes.

3.2. ZUM BEWEIS DER FOLGERUNG 1:

Wir setzen in der Beziehung (1.2) $y=\frac{x}{k}$. Wegen $m \geq 2$ und $B_n^2 \geq e$ gilt $\frac{x}{k} > (B_{mn}K_m)^{1/m}$, das heißt $\left(\frac{K_m B_{mn}}{y^m}\right)^{x/y} < 1$. Wenden wir uns jetzt der Abschätzung des in der Ungleichung (1.2) auftretenden Faktors

$$\exp\left(1+\frac{e}{2}B_n^2\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y^m}{K_m B_{mn}}\right)^2\right)=\exp\left(1+\frac{e}{2}m^2\left(\frac{kB_n}{x}\ln\frac{x}{kB_n(K_m L_{mn})^{1/m}}\right)^2\right)$$

zu. Es gilt mit $u=\frac{x}{kB_n}$:

$$\frac{1}{u}\ln\frac{u}{(K_m L_{mn})^{1/m}}=\frac{1}{u}\ln\frac{u}{(K_m B_{mn}B_n^{-2})^{1/m}}+\frac{1}{u}\ln B_n^{1-2/m}\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{B_n^2}{K_m B_{mn}}\right)^{1/m}.$$

3.3. ZUM BEWEIS DER FOLGERUNG 2:

1. Es sei $\frac{1}{K_m L_{mn}} > e$. Wir setzen in der Beziehung (1.2) $y=\frac{x}{2}$.
   Die Abschätzung des Arguments des Exponentialfunktion ergibt dann mit $u=x/B_n$:
   $$\frac{e}{2}m^2\left(\frac{2}{u}\ln\frac{u}{2(K_m L_{mn})^{1/m}}\right)^2\leq\frac{e}{2}m^2\left(\frac{2}{u}\ln\frac{(8-e)u}{8e}\right)^2+\ln\left(\left(\frac{4m}{8-e}\right)^m\frac{1}{K_m L_{mn}}\right).$$
   Hieraus folgt die Abschätzung mit dem dort angeführten D_m.
2. Im Fall $\frac{1}{K_m L_{mn}}\leq e$ wenden wir die Beziehung (1.2) ebenfalls mit $y=\frac{x}{2}$ an und erhalten jetzt für das Argument der Exponentialfunktion, die in der Beziehung (1.2) auftritt, daß gilt:
   $$\frac{e}{2}m^2\left(\frac{2}{u}\ln\frac{u}{2(K_m L_{mn})^{1/m}}\right)^2\leq\frac{e}{2}m^2\left(\frac{2}{u}\ln\frac{u}{me^{1/m}}\right)^2+\ln\left(\left(\frac{m}{2}\right)^m\frac{1}{K_m L_{mn}}\right).$$
   Hieraus ergibt sich auch in diesem Fall die Abschätzung (1.3).

3.4. BEWEIS DES SATZES 3:

Mit $V_i^y(z)$, $F_n^y(z)$, $V_{ih}^y(z)$, $F_{nh}^y(z)$ sowie $R_i(y,h)$, $H_{i1}(h)$ und $H_{i2}(y,h)$ bezeichnen wir die gleichen Ausdrücke wie auch im Beweis des Satzes 1. Dabei sind y und h wieder freiwählbare positive Parameter. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\bar{H}_{i1}(h)=\int_{-\infty}^{1/h}ue^{hu}dV_i^y(u),\quad \bar{\bar{H}}_{i1}(h)=\int_{-\infty}^{1/h}u^2e^{hu}dV_i^y(u),\quad a_i(h)=\frac{\bar{H}_{i1}(h)}{H_{i1}(h)},$$

$$A_n(h)=\sum_{i=1}^{n}a_i(h),\quad \sigma_i^2(h)=\frac{\bar{\bar{H}}_{i1}(h)}{H_{i1}(h)}-a_i^2(h),\quad B_n^2(h)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(h),$$

$$\beta_i(h) = \frac{1}{H_{i1}(h)}\int_{-\infty}^{1/h} |u-a_i(h)|^3 e^{hu} dV_i^y(u),\quad B_{3n}(h) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i(h) .$$

Wir betrachten die Zerlegung $V_{ih}^y(z) = \phi_{ih}(z) + \psi_{ih}^y(z)$

mit $\phi_{ih}(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{z} e^{hu} dV_i^y(u), & z \leq \frac{1}{h} \\ \int_{-\infty}^{1/h} e^{hu} dV_i^y(u), & z > \frac{1}{h} \end{cases}$ und $\psi_{ih}^y(z) = \begin{cases} 0 & , z \leq \frac{1}{h} \\ \int_{1/h}^{z} e^{hu} dV_i^y(u), & z > \frac{1}{h}. \end{cases}$

Es sei $\tilde{\phi}_{nh}(z) = (\underset{i=1}{\overset{n}{*}} \phi_{ih})(z).$

Der Quotient $\frac{\phi_{ih}(z)}{H_{i1}(h)}$ ist die Verteilungsfunktion einer gewissen Zufallsgröße Y_i mit dem Erwartungswert $a_i(h)$ und der Streuung $\sigma_i^2(h)$, $i=1,2,\ldots,n$. Somit stellt

$$\overline{\phi}_{nh}(u) = \left(\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\right)^{-1} \left(\underset{i=1}{\overset{n}{*}} \phi_{ih}\right)(x+uB_n(h))$$

die normierte Verteilungsfunktion der Summe $\sum_{i=1}^{n} Y_i - x$ dar. $\overline{\phi}_{nh}(u)$ besitzt den Erwartungswert $(A_n(h)-x)/B_n(h)$, das heißt

$$\overline{\phi}_{nh}\left(u+\frac{A_n(h)-x}{B_n(h)}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\right)^{-1} \left(\underset{i=1}{\overset{n}{*}} \phi_{ih}\right)(A_n(h)+uB_n(h))$$

ist eine standardisierte Verteilungsfunktion, deren Annäherung zur Normalverteilung $\phi(u)$ wir weiter unten abschätzen.

Wir setzen $h=\frac{x}{B_n}$ und $y=\frac{x}{3}$. In der x-Zone des Satzes 3 gilt somit die Beziehung (3.1). Wir gehen von folgender Ungleichung aus:

$$\left|F_n(x)-\phi\left(\frac{x}{B_n}\right)\right| \leq \left|F_n(x)-F_n^y(x)\right| + \tag{3.11}$$

$$+\left|F_n^y(\infty)-F_n^y(x) - \int_x^{\infty} e^{-hu} d\tilde{\phi}_{nh}(u)\right| + \left|\int_x^{\infty} e^{-hu} d\phi_{nh}(u) - \int_{x/B_n}^{\infty} d\tilde{\phi}(u)\right|.$$

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite von (3.11) gilt die Ungleichung (3.10). Mit Hilfe der linken Gleichung der Beziehung (3.3) erhalten wir für den zweiten Ausdruck auf der rechten Seite von (3.11) die obere Schranke

$$e^{-hx}\prod_{i=1}^{n} R_i(y,h) \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{k2}(y,h)}{R_k(y,h)} ,$$

die wir nach oben abschätzen durch:

$$\exp\left\{-hx+\sum_{i=1}^{n}(H_{i1}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2)+\frac{h^2}{2}B_n^2+\sum_{i=1}^{n}H_{i2}(y,h)\right\}\sum_{i=1}^{n}\frac{H_{i2}(y,h)}{H_{i1}(h)}. \quad (3.12)$$

Im folgenden bezeichnen wir mit C_i und $\tilde{C}_i$, $i=1,2,\ldots$, positive Konstanten, die nicht von den betrachteten Parametern n und x abhängen. Wir setzen in der Beziehung (3.7) m=3 und erhalten wegen $h_3(y)\geq h$ die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n}H_{i2}(y,h) \leq K_3 y^{-3}e^{hy}B_{3n} \leq C_1 . \quad (3.13)$$

Weiterhin gelten die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n}(H_{i1}(h)-1-\frac{h^2}{2}\sigma_i^2) \leq \frac{e}{6}h^3B_{3n} \leq C_2 \quad (3.14)$$

und

$$\frac{1}{H_{i1}(h)} \leq \frac{1}{1-2h^3\beta_{3i}} \leq C_3 . \quad (3.15)$$

Mit (3.13) bis (3.15) können wir schließlich den Ausdruck (3.12) abschätzen durch:

$$\frac{C_4B_{3n}}{x^3}\exp(-\frac{x^2}{6B_n^2}) . \quad (3.16)$$

Der dritte Summand auf der rechten Seite von (3.11) läßt sich folgendermaßen auswerten:

$$\left|\int_x^{\infty}e^{-hu}d\emptyset_{nh}(u)-\int_{x/B_n}^{\infty}d\emptyset(u)\right| =$$

$$=\left|\prod_{i=1}^{n}H_{i1}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty}e^{-hB_n(h)u}d\bar{\emptyset}_{nh}(u)-\int_{x/B_n}^{\infty}d\emptyset(u)\right| \leq I_1+I_2+I_3 .$$

Dabei sind

$$I_1 = \prod_{i=1}^{n}H_{i1}(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty}e^{-hB_n(h)u}d(\bar{\emptyset}_{nh}(u)-\emptyset(u+\frac{x-A_n(h)}{B_n(h)}))\right| ,$$

$$I_2 = \prod_{i=1}^{n}H_{i1}(h)e^{-hx}\left|\int_0^{\infty}e^{-hB_n(h)u}d(\emptyset(u)-\emptyset(u+\frac{x-A_n(h)}{B_n(h)}))\right|$$

und

$$I_3 = \left|\prod_{i=1}^{n}H_{i1}(h)e^{-hx}\int_0^{\infty}e^{-hB_n(h)u}d\emptyset(u)-\int_{x/B_n}^{\infty}d\emptyset(u)\right| .$$

Das Integral I_1 wird mittels der Ungleichung von BERRY-ESSEEN abgeschätzt durch

$$\prod_{i=1}^{n}H_{i1}(h)e^{-hx}\frac{2L_oB_{3n}(h)}{B_n^3(h)} , \quad (3.17)$$

wobei L_o die von P. VAN BEEK in [1] errechnete absolute Konstante ist. Für das Integral I_2 erhalten wir als obere Schranke

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)e^{-hx} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{x-A_n(h)}{B_n(h)} \right| . \tag{3.18}$$

Schließlich können wir I_3 nach einigen Umformungen abschätzen durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2B_n^2}\right)\left(\left|\frac{x}{B_n} - hB_n(h)\right| + \frac{1}{hB_n(h)}\left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp\left(-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}\right)-1\right|\right). \tag{3.19}$$

Zur weiteren Auswertung der Ausdrücke (3.17) bis (3.19) benötigen wir folgende Ungleichungen:

Mit

$$\sum_{i=1}^{n} \ln H_{i1}(h) - \frac{h^2}{2}B_n^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \left(H_{i1}(h) - 1 - \frac{h^2}{2}\sigma_i^2\right)$$

und (3.14) folgt die Abschätzung

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)e^{-hx} \leqq C_5 \exp\left(-\frac{x^2}{2B_n^2}\right) . \tag{3.20}$$

Aus

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \ln H_{i1}(h) - \frac{h^2}{2}B_n^2\right| \leqq 2{,}5h^3B_{3n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-H_{i1}(h))^2}{1-|1-H_{i1}(n)|}$$

und

$$|1-H_{i1}(h)| \leqq 2h^2\sigma_i^2$$

erhalten wir

$$\left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp\left(-hx+\frac{x^2}{2B_n^2}\right)-1\right| \leqq C_6h^3B_{3n} . \tag{3.21}$$

Mit den Ungleichungen

$$|a_i(h)| \leqq \frac{1}{H_{i1}(h)} eh\sigma_i^2 , \tag{3.22}$$

(3.6) ($a_i=0, \nu=2$) und (3.15) ergibt sich die Beziehung

$$B_n^2(h) \geqq B_n^2 - \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{H_{i1}(h)-1}{H_{i1}(h)}\sigma_i^2 + \frac{h\beta_{3i}}{H_{i1}(h)} + a_i^2(h)\right\} \geqq C_7B_n^2 . \tag{3.23}$$

Nun schätzen wir die Differenzen $|B_n - B_n(h)|$ und $|x-A_n(h)|$ ab:

Es gilt

$$|B_n - B_n(h)| = \frac{|B_n^2 - B_n^2(h)|}{B_n + B_n(h)} .$$

Hieraus folgt mit (3.23) und

$$|B_n^2 - B_n^2(h)| \leqq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{H_{i1}(h)}(2h^3\beta_{3i}\sigma_i^2 + eh\beta_{3i}) + a_i^2(h)\right) \leqq C_8hB_{3n}$$

die Ungleichung

$$|B_n - B_n(h)| \leqq C_9h\frac{B_{3n}}{B_n} . \tag{3.24}$$

Weiter gilt

$$|x-A_n(h)| \leqq \left|\sum_{i=1}^{n}(h\sigma_i^2 - a_i(h))\right| \leqq C_{10}h^2B_{3n} . \tag{3.25}$$

Schließlich läßt sich unschwer mittels (3.22) noch folgende Abschätzung zeigen:

$$B_{3n}(h) \leqq \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{H_{i1}(h)}\int_{-\infty}^{1/h}|u|^3 e^{hu}dV_i(u)\right)^{1/3}+|a_i(h)|\right)^3 \leqq C_{11}B_{3n}. \quad (3.26)$$

Mit den eben erhaltenen Ungleichungen (3.20) bis (3.26) bekommen wir für die Summe der Integrale I_1, I_2, I_3 mittels der Ausdrücke (3.17) bis (3.19) die Beziehung

$$I_1+I_2+I_3 \leqq \left(C_{12}+C_{13}\frac{x^2}{B_n^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2B_n^2}\right)L_{3n}\,. \quad (3.27)$$

Für die rechte Seite von (3.27) ergibt sich mit der bekannten Ungleichung

$$e^{-a} \leqq \left(\frac{b}{e}\right)^b a^{-b}, \quad a>0 \text{ und } b>0, \quad (3.28)$$

als obere Schranke:

$$\exp\left(-\frac{x^2}{6B_n^2}\right)\frac{C_{14}B_{3n}}{x^3}\,. \quad (3.29)$$

Indem man die Ergebnisse (3.16) und (3.29) zusammenfaßt, erhält man die Aussage des Satzes.

3.5. ZUM BEWEIS DER FOLGERUNGEN 3 UND 4:

Es gilt:

$$1-\prod_{i=1}^{n}V_i(y) \leqq \sum_{i=1}^{n}(1-V_i(y)) \leqq \frac{C_{15}B_{3n}}{x^3}, \quad y=\frac{x}{3}\,. \quad (3.30)$$

Aus (3.16) und (3.27) erhalten wir durch Anwendung der Ungleichung (3.28), daß diese beiden Ausdrücke nach oben durch $C_{16}x^{-3}B_{3n}$ abschätzbar sind. Mit (3.30) ergibt sich unmittelbar die Folgerung 3.

In der x-Zone des Satzes 3 gilt:

$$\sqrt{L_{3n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{M_3}}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right)\,. \quad (3.31)$$

Hieraus folgt mit (3.29) aus Satz 3 die Folgerung 4.

3.6. BEWEIS DES SATZES 4:

Für den Fall, daß die Differenz $\emptyset(x)-F_n(xB_n)$ positiv ist, erhalten wir

$$\emptyset(x)-F_n(xB_n) \leqq \emptyset\left(\frac{a_1}{\beta}x\right)-F_n\left(\frac{a_1}{\beta}xB_n\right)+1-\emptyset\left(\frac{a_1}{\beta}x\right)\,.$$

$\frac{a_1}{\beta}x$ liegt im x-Gebiet des Satzes 3. Somit können wir die in der Folgerung 3 erhaltene Abschätzung auf die Differenz

$$\left|F_n\left(\frac{a_1}{\beta}xB_n\right)-\emptyset\left(\frac{a_1}{\beta}x\right)\right|$$

anwenden. Weiterhin gilt:

$$1-\emptyset\left(\frac{a_1}{\beta}x\right) \leqq \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}\,xa_1}\exp\left(-\frac{a_1^2x^2}{2\beta^2}\right) \leqq \frac{C_{17}L_{3n}}{x^3}\,,$$

wobei

$$C_{17} = C_{17}(\alpha,\beta) = \frac{e^3\beta^3 M_3}{3\sqrt{6\pi}\exp\left(\left(\left(\frac{\alpha a_3}{\beta}\right)^2-1\right)\frac{1}{3}e^3\right)}$$

ist.

Im Fall $0 \leqq F_n(xB_n)-\Phi(x) \leqq 1-\Phi(x)$ erhalten wir im Intervall

$$a_1\sqrt{\ln\frac{1}{M_3L_{3n}}} < x \leqq a_2\sqrt{\ln\frac{1}{M_3L_{3n}}}$$ folgende Abschätzungen:

$$1-\Phi(x) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{3} - \ln x^2\,\frac{x^2}{6\ln x^2}\right) .$$

Wegen $\frac{x^2}{6\ln x^2} \geqq \frac{e^3}{18}$ folgt hieraus

$$1-\Phi(x) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^3}\exp\left(-\ln\frac{1}{M_3L_{3n}} - \frac{e^3-18}{18}\right) \leqq \frac{0{,}71M_3}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{3n}}{x^3} .$$

3.7. ZUM BEWEIS DER SÄTZE 5 UND 6:

Offensichtlich gilt

$$|F_n(xB_n)-\Phi(x)| \leqq \max(1-\Phi(x),\ 1-F_n(xB_n)) . \qquad (3.32)$$

Ausgehend von der Ungleichung (1.2) des Satzes 1 mit $y=\frac{x}{2}$ und $m=3$ erhält man nach der Abschätzung des Arguments des dort auftretenden Exponentialfunktion die Aussage (1.5).

Die Aussage des Satzes 6 gilt offensichtlich im Fall $x^3 \leqq K_3L_{3n}$. Andernfalls erhält man die ungleichmäßige Abschätzung (1.6) aus Satz 1, Beziehung (1.2), indem man $y=x$ und $m=3$ setzt.

4. BEWEISE ZUM ABSCHNITT 2

4.1. ZUM BEWEIS DES SATZES 8:

Im wesentlichen verläuft dieser Beweis entsprechend der Beweisführung des Satzes 1.

Die Ungleichung (3.7) gilt ebenfalls, wenn wir β_{mi} durch γ_{mi} ersetzen. Die Abschätzung (3.5) läßt sich entsprechend mit γ_{mi} beweisen, woraus die Beziehung (2.1) folgt.

Schließlich gilt neben der Abschätzung (3.6) die Ungleichung

$$H_{i1}(h)-1 \leqq h\gamma_{1i} + \frac{e}{2}h^{\nu}\gamma_{\nu i} ,$$

aus der wir die Beziehung (2.2) erhalten.

4.2. BEWEIS DES SATZES 9:

Im Gegensatz zum Beweis des Satzes 3 setzen wir hier $y=\frac{1}{h}=\frac{B_n^2}{x}$. Damit ist $\Psi_{ih}^{y}(z)\equiv 0$ und in der Abschätzung (3.11) entfällt der zweite Summand auf der rechten Seite. Jetzt haben wir die Ausdrücke (3.17) bis (3.19) abzuschätzen. Die Ungleichung (3.14) gilt ebenfalls, wenn wir dort B_{3n} durch Γ_{3n} ersetzen. Entsprechend (3.20) folgt somit

$$\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)e^{-hx} \leqq \tilde{C}_5 \exp(-\frac{x^2}{2B_n^2}) \ . \qquad (4.1)$$

Aus der Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \ln H_{i1}(h) - \frac{h^2}{2}B_n^2\right| \leqq 1{,}5h^3\Gamma_{3n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-H_{i1}(h))^2}{1-|1-H_{i1}(h)|} +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|u|>H_n} u^2 dV_i(u) + \frac{h^3}{6}H_n B_n^2$$

und

$$|1-H_{i1}(h)| \leqq \frac{e}{2}h^2\sigma_i^2$$

erhalten wir entsprechend (3.21) die Abschätzung

$$\left|\prod_{i=1}^{n} H_{i1}(h)\exp(-hx+\frac{x^2}{2B_n^2})-1\right| \leqq \frac{\tilde{C}_6}{B_n^2 \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\, x^2 \ . \qquad (4.2)$$

Mit den Ungleichungen (3.22), (3.6) ($a_i=0$, $\nu=2$) und

$$\frac{1}{H_{i1}(h)} \leqq \frac{1}{1-h^3\gamma_{3i}} \leqq \tilde{C}_3$$

ergibt sich die Abschätzung $B_n^2(h) \geqq$ (4.3)

$$\geqq B_n^2 - \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{H_{i1}(h)-1}{H_{i1}(h)}\sigma_i^2 + \frac{1}{H_{i1}(h)}(h\gamma_{3i} + hH_n\sigma_i^2 + \int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u) + a_i^2(h)\right\} \geqq \tilde{C}_7 B_n^2 .$$

Entsprechend (3.24) bekommen wir: $|B_n - B_n(h)| \leqq \frac{\tilde{C}_9 B_n}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}$. (4.4)

Weiterhin haben wir die Ungleichung $|x-A_n(h)| \leqq$ (4.5)

$$\leqq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{H_{i1}(h)}\left\{\frac{e}{2}h^3\sigma_i^4 + 2h^2\gamma_{3i} + \frac{h^2}{2}H_n\sigma_i^2 + h\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)\right\} \leqq \frac{\tilde{C}_{10}\, x}{\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \ .$$

Schließlich läßt sich mittels (3.22) noch folgende Abschätzung zeigen:

$$B_{3n}(h) \leqq 4\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{1/n} |u|^3 e^{hu}\frac{dV_i(u)}{H_{i1}(u)} + |a_i(h)|^3\right) \leqq \qquad (4.6)$$

$$\leqq 4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{H_{i1}(h)}(e\gamma_{3i} + H_n\sigma_i^2 + \frac{1}{he}\int_{-\infty}^{-H_n} u^2 dV_i(u)) + |a_i(h)|^3\right) \leqq \frac{\tilde{C}_{11}\, B_n^4}{x\ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2} \ .$$

Mit den eben angeführten Ungleichungen (4.1) bis (4.6) erhalten wir entsprechend der Endabschätzung im Beweis des Satzes 3

$$\left|F_n^y(x) - \Phi(\frac{x}{B_n})\right| \leqq \frac{L_8\, x}{B_n \ln(\frac{1}{\Lambda_{3n}})^2}\exp(-\frac{x^2}{2B_n^2}) \ .$$

Mit der Beziehung (3.10) folgt die Behauptung des Satzes 9.

4.3 ZUM BEWEIS DER FOLGERUNG 6:

Entsprechend den Ungleichungen (3.10), (3.30) und (3.31) folgt

$$\left|F_n(x)-F_n^y(x)\right| \leqq \frac{x^3}{B_n^3}\Lambda_{3n} \leqq \frac{C_{18}\,x}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2}\exp\left(-\frac{x^2}{6}\right).$$

Mit Satz 9 erhalten wir die ungleichmäßige Abschätzung.
Für kleine x ist eine gleichmäßige Abschätzung schärfer, die wir mittels der Arbeit [3] von W. FELLER für $\Lambda_{3n}<\frac{1}{n_1}$ bekommen:

$$\left|F_n(xB_n)-\emptyset(x)\right| \leqq 6\left\{\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}\int_{|z|\leqq H_n}|z|^3 dV_i(z)+\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|z|>H_n}z^2 dV_i(z)\right\}.$$

4.4. ZUM BEWEIS DES SATZES 10:

Falls $F_n(xB_n)$ größer als $\emptyset(x)$ ist, erhalten wir

$$F_n(xB_n)-\emptyset(x) \leqq 1-\emptyset(x) \leqq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{3}{6{,}4}e^3\right)}\,\frac{x}{\ln\left(\frac{1}{\Lambda_{3n}}\right)^2}\exp\left(-\frac{x^2}{32}\right),$$

andernfalls gilt:

$$0 \leqq \emptyset(x)-F_n(xB_n) \leqq \left|F_n\left(\frac{a_1}{a_2}xB_n\right)-\emptyset\left(\frac{a_1}{a_2}x\right)\right| + 1-\emptyset\left(\frac{a_1}{a_1}x\right).$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, liegt das Argument a_1x/a_2 im x-Gebiet des Satzes 9, den wir somit anwenden können.

4.5. ZUM BEWEIS DER SÄTZE 11 UND 12:

Wieder ausgehend von der im Beweis zum Satz 5 angeführten Ungleichung (3.32) wenden wir jetzt die Beziehung (2.3) des Satzes 8 mit $y=\frac{x}{2}$ und $m=3$ an. Nach entsprechender Abschätzung der Differenz $1-F_n(xB_n)$ erhält man die Aussage des Satzes 11.
Entsprechend dem Beweis zum Satz 6 gehen wir auch beim Beweis des Satzes 12 von der Fallunterscheidung $x^3 \leqq L_{3n}K_3$ und $x^3 > L_{3n}K_3$ aus und wenden die Beziehung (2.3) mit $y=x$ und $m=3$ an.

LITERATUR:

[1] VAN BEEK, P.: An Application of Fourier Methods to the Problem of Sharpening the Berry-Esseen Inequality. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 23 (1972), No. 3, 187 - 196

[2] БИКЯЛИС, А.: Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. Литовский матем. сб. 6 (1966), No. 3, 323-346

[3] FELLER, W.: On the Berry-Esseen theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10 (1968), No. 3, 261 - 268

[4] PADITZ, L.: Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente. Math. Nachrichten, (im Druck)

III-9-276 JG02/76/1689