

Technische Universität Dresden

Beiträge zur Steuerung und Regelung von mehrvariablen linearen zeitinvarianten Systemen in polynomialer Darstellung

Sven-Olaf Lindert

von der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der
Technischen Universität Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktoringenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. Finger

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dr.rer.nat. Reinschke

Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfert

Prof. Dr.-Ing. Raisch

Tag der Einreichung: 18.12.2008

Tag der Verteidigung: 09.10.2009

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Arbeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Dresden. Das Promotionsverfahren wurde am 5. Januar 2009 eröffnet. Die Verteidigung fand am 9. Oktober 2009 statt. Ohne die guten Bedingungen, die ich im Institut vorfand, hätte ich das Promotionsvorhaben nicht zu Ende bringen können.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.rer.nat. K. Reinschke, an dessen Überlegungen diese Arbeit wesentlich anknüpft und dessen freundliche, aufmerksame und kritische Begleitung mir immer eine große Hilfe war.

Den Gutachtern Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H.-H. Wilfert und Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Raisch danke ich für die Übernahme der Gutachten.

Meinen Kollegen am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie danke ich für die gute Arbeitsatmosphäre, insbesondere meinem Bürokollegen, Carsten Collon.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden, deren beharrliches Interesse und Anteilnahme an meinem Vorhaben ein stetiger Ansporn war, bedanken. Besonders hervorheben möchte ich meine Tante Annemarie Jung, die die Arbeit auf sprachliche Richtigkeit gründlich durchgesehen hat, und meine Freundin Antje Latuske, die mein fester Rückhalt in allen Dingen, die nicht fachlicher Natur sind, ist.

Dresden, im Oktober 2009

Sven-Olaf E. dt

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Problemstellung und Zielsetzung	1
1.2	Einordnung der Arbeit und eigene Beiträge	4
1.3	Gliederung	6
2	Streckenbeschreibung und Definition von Basisgrößen	8
2.1	Streckenbeschreibungen	8
2.2	Definition von Basisgrößen	10
2.2.1	Algebraische Grundlagen	10
2.2.2	Einführung der Basisgrößen	14
2.2.3	Anfangsbedingungen der Basisgrößen	15
2.2.4	Gesamtheit der Basisgrößen	18
2.3	Gezielte Konstruktion von Basisgrößen	20
3	Planung von Trajektorien	23
3.1	Planung mithilfe von Polynomen	23
3.1.1	Übergänge zwischen Ruhelagen	24
3.1.2	Übergänge zwischen Ruhelagen unter Berücksichtigung weiterer Bedingungen	26
3.1.3	Übergänge von beliebigen Anfangswerten zu beliebigen Endwerten	30
3.2	Planung optimaler Trajektorien	37
3.2.1	Formulierung eines quadratischen Kostenfunktionals	38
3.2.2	Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung der Basisgrößen	39
3.3	Planung bei einem nicht unimodularen Linksteiler	42
4	Folgeregelung	51
4.1	Struktur der Folgeregelung	51
4.2	Problem der Nullstellenzuweisung	54
4.2.1	Entkoppelungsnullstellen oder fixe Nullstellen	54
4.2.2	Reduktion der Dimension des Problems	55
4.3	Parametrierung sämtlicher Zeilen (N_K, Z_K) zu einem vorgegebenen CLCP	57
4.4	Nullstellenzuweisung durch Ergänzung von Zeilen vorgegebener Struktur	59
4.4.1	Nullstellenzuweisung bei einer skalaren Stellgröße	59
4.4.2	Nullstellenzuweisung bei mehreren Stellgrößen	62
4.4.3	Drei weitere Beispiele	66
4.5	Simulationsbeispiele mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen	74
5	Trajektorienplanung und Folgeregelung für Abtastsysteme	83
5.1	Parametrische Übertragungsfunktion	83
5.2	Basisgrößen für abgetastete Systeme	86

5.2.1	Definition der Basisgrößen	87
5.2.2	Auffinden einer rechten teilerfremden Darstellung der PÜF-Matrix mithilfe der Hauptnenner	88
5.2.3	Auffinden einer rechten teilerfremden Darstellung der PÜF-Matrix mithilfe einer Darstellung durch Dgl. erster Ordnung in expliziter Form	91
5.3	Trajektorienplanung	97
5.3.1	Trajektorienplanung zwischen Ruhelagen	97
5.3.2	Trajektorienplanung unter Berücksichtigung weiterer Bedingungen	98
5.4	Folgeregelung	105
6	Beobachter auf Basis polynomialer Matrizendarstellung	110
6.1	Allgemeines Konzept	110
6.1.1	Beobachtbarkeit	111
6.1.2	Konstruktion eines Beobachters	112
6.1.3	Differentialgleichung des Beobachterfehlers	113
6.1.4	Über die Unvermeidbarkeit improperer Beobachter	115
6.1.5	Beziehung zu Berechnung durch Differenziation	117
6.2	Vollständiger Beobachter	117
6.3	Reduzierter Beobachter	120
6.4	Eingangsbeobachter oder Störgrößenbeobachter	123
6.5	Elimination von Größen	126
	Ausblick auf offene Fragen	129
A	Mathematische Grundlagen	132
A.1	Zeilen- und spaltenreduzierte Matrizen	132
A.2	Überführung der polynomialen Matrizendarstellung in eine Darstellung durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form	138
B	Modellbildung für das verschiebliche N-fach Pendel	144
B.1	Modellierung als ebenes System von Starrkörpern	144
B.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen	147
B.2.1	Formulierung der kinetischen Energie	147
B.2.2	Verallgemeinerte Kräfte	149
B.2.3	Abschließende Formulierung der Bewegungsgleichungen	150
B.3	Gleichgewichtslagen und Linearisierung	151
C	Kondition der Matrix M aus Abschnitt 3.1.3	154
	Literaturverzeichnis	155

Symbolverzeichnis

Allgemeines

Die Wahl der Bezeichnungen gehorcht folgenden Prinzipien:

Schreibweise	Bedeutung
kleine Buchstaben	Skalare
kleine fettgedruckte Buchstaben	Spaltenvektoren
Großbuchstaben	Matrizen
angehängtes (t)	Zeitsignal (wird aus Platzgründen oft weggelassen)
angehängtes $[k]$	Folge von Abtastwerten (oft weggelassen)
fettgedruckte Großbuchstaben	Vektor im Bildbereich einer Transformation
P im Index	polynomiale Matrix oder deren Einträge (fällt zugunsten wichtigerer Indizes auch weg)
hochgestelltes ss	Ruhelage (steady state)
hochgestelltes d	angestrebte Signalverläufe (desiderata)
$\langle \ \rangle$	Diagonalmatrix

Lateinische Symbole

Symbol	Bedeutung
A_P, B_P	polynomiale Matrizen der Systemgleichung
C_P, D_P	polynomiale Matrizen der Ausgangsgleichung
CLCP	charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises (closed loop characteristic polynomial)
CP_B	charakteristisches Polynom des Beobachters
G	Übertragungsfunktionsmatrix oder kurz: Übertragungsmatrix
I	Einheitsmatrix
K	Übertragungsmatrix des Folgereglers
L	Linksteiler zweier Matrizen (ohne Index)
\mathcal{L}	Laplace-Transformation
N_K	quadratische polynomiale Matrix des Folgereglers
P	eine Übertragungsmatrix der Regelstrecke
S_P	polynomiale Matrix eines gesamten Systems (im Gegensatz zu A_P, B_P, C_P und D_P)

Fortsetzung nächste Seite

Symbol	Bedeutung
T	Übergangszeit oder Planungshorizont (keine Matrix)
U^R	unimodulare Matrix, von rechts zu multiplizieren, um die Hermitesche Normalform zu erhalten
V^R	Inverse einer unimodularen Matrix U^R
U^L	unimodulare Matrix, von links zu multiplizieren, um die Hermitesche Normalform zu erhalten
V^L	Inverse einer unimodularen Matrix U^L
$W_1(\frac{d}{dt}), W_2$	Wichtungsmatrizen eines Kostenfunktional
Z_K	polynomiale Matrix des Folgereglers
\mathcal{Z}	z -Transformation
\mathcal{Z}_m	modifizierte z -Transformation
grad	Grad eines Polynoms
$(\frac{d}{dt})$	Ableitungsoperator nach der Zeit
$(\frac{\leftarrow}{dt})$	Ableitungsoperator, der <i>links</i> davon stehende Größen nach der Zeit ableitet
$\mathbf{a}(s)$	Vektor der Anfangswerte der Systemgleichung
$\mathbf{b}(s)$	Vektor der Anfangswerte der Ausgabegleichung
\mathbf{d}	Vektor der Störungen
j	imaginäre Einheit
m	Anzahl der Stellgrößen
p	Anzahl der Ausgangsgrößen
r	Anzahl sonstiger Systemgrößen (nicht Ausgang oder Eingang)
sgrad	Spaltengrad einer polynomialen Matrix
\mathbf{u}	Vektor der Eingangsgrößen
\mathbf{x}	Vektor sonstiger Systemgrößen (nicht Ausgang oder Eingang)
\mathbf{y}	Vektor der Ausgangsgrößen
\mathbf{z}	Vektor sämtlicher Systemgrößen
\mathbf{z}_k	Vektor bekannter Größen
\mathbf{z}_b	Vektor zu beobachtender Größen
zgrad	Zeilengrad einer polynomialen Matrix

Griechische Symbole

Symbol	Bedeutung
Γ^z	Matrix der führenden Koeffizienten einer Zeile
Γ^s	Matrix der führenden Koeffizienten einer Spalte
ξ_a	Autonome Größen

Fortsetzung nächste Seite

Symbol	Bedeutung
ξ_b	Basisgrößen
ξ_m	Größen eines Kostenfunktionals

Physikalische Größen des N-fach Pendels

An dieser Stelle seien nur die durchgängig verwendeten Parameter und Größen des Punkt-massenmodells aufgelistet. Ein Skizze findet sich in Bild [B.1](#).

Symbol	Bedeutung
a_ν	Abstand der ν -ten Drehachse von der $(\nu - 1)$ -ten Drehachse
c_0^r	Koeffizient der viskosen Reibung des Wagens entlang der Bahn
c_ν^r	Koeffizient der viskosen Reibung zwischen dem ν -ten Pendelkörper und dem $(\nu - 1)$ -ten
d_ν	Drehkraft zwischen dem ν -ten Pendelkörper und dem $(\nu - 1)$ -ten
f	Kraft auf den Wagen entlang der Bahn des Wagens
g	Erdbeschleunigung
l_ν	Abstand des Schwerpunkts des ν -ten Pendelkörpers von der $(\nu - 1)$ -ten Drehachse
m_0	Masse des Wagens
m_ν	Masse des ν -ten Pendelkörpers
N	Anzahl der Pendelkörper
$s_0(w_0)$	Bahn des Wagens
w_0	Bahnparameter des Wagens
φ_ν	Winkel der Referenzachse des ν -ten Pendelkörpers zum Lot
ψ_ν	Winkel, um den der ν -te Schwerpunkt von der ν -ten Referenzachse abweicht

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden lineare zeitinvariante endlichdimensionale Systeme (LTI-Systeme) mit $m > 1$ Eingängen und $p > 1$ Ausgängen untersucht (MIMO-Systeme). Diese lassen sich darstellen durch lineare Gleichungen mit Matrizen, deren Einträge Polynome im Ableitungsoperator $(\frac{d}{dt})$ sind. Bei Nutzung der Laplace-Transformation handelt es sich um Polynome in s . Algebraisch bilden diese einen Euklidischen Ring. Durch Überführung der Matrizen in die Hermitesche Normalform werden m Basisgrößen definiert. Die Verläufe oder Trajektorien der Basisgrößen lassen sich frei vorgegeben. Damit werden die Trajektorien sämtlicher übrigen Signale, insbesondere die der erforderlichen Eingangssignale, festgelegt und können ohne Integration berechnet werden. Ein linksteilerfremdes (auch steuerbar genanntes) Modell ist dabei nicht zwingend erforderlich.

Damit eignen sich die Basisgrößen besonders zur Planung von Trajektorien. Genauer untersucht wird die Planung mit Polynomen in der Zeit als Ansatzfunktionen und die Planung von Trajektorien, die ein quadratisches Kostenfunktional minimieren. In der technischen Praxis werden die Systeme stets von den geplanten Trajektorien abweichen. Insbesondere bei instabilen Regelstrecken ist deshalb ein stabilisierender Folgeregler unentbehrlich. Die Struktur der Folgeregelung wird eingeführt und es wird deutlich gemacht, dass jede Methode zum Entwurf linearer Regler angewendet werden kann. Die Nullstellenzuweisung durch dynamische Ausgangsrückführung mit Reglern vorgegebener möglichst geringer dynamischer Ordnung wird detailliert untersucht und eine neue Lösungsmöglichkeit aufgezeigt.

Durch Nutzung der modifizierten z -Transformation lässt sich die Theorie auf ein hybrides System, bestehend aus einer zeitkontinuierlichen Regelstrecke und einer zeitdiskreten digitalen Steuerung und Regelung, ausdehnen. Dabei werden die Verläufe der Signale zwischen den Abtastzeitpunkten in die Planung einbezogen.

Zum Schluss werden die linearen Beobachter im Licht der polynomialen Matrizendarstellung neu untersucht. Es wird gezeigt, dass die polynomialen Matrizendarstellung einen theoretischen Rahmen bietet, in dem sich sämtliche linearen Beobachter mit einer Methode entwerfen lassen.

Abstract

In this thesis linear time invariant lumped systems (LTI-systems) with $m > 1$ inputs and $p > 1$ outputs (MIMO-systems) are investigated. These systems can be represented by linear equations with matrices, whose entries are polynomials in the differential operator $\left(\frac{d}{dt}\right)$. If Laplace-transform is employed, the polynomials are in s . Algebraically polynomials form a Euclidean ring. The conversion of the matrices to the Hermite form leads to defining m basic variables. The trajectories of the basis variables may be chosen arbitrarily. With that choice the trajectories of all remaining variables and especially the input variables are determined and can be calculated without integration. A left coprime (also called controllable) model is not required.

Hence basis variables are particularly useful for planning trajectories. Special attention is paid to planning trajectories with polynomials in time as basic functions and planning trajectories which minimise a quadratic functional of costs. In engineering practice the systems will always differ from the planned trajectories. Especially with unstable plants a stabilising tracking controller is compulsory. The structure of the tracking control is introduced. It becomes apparent that every linear theory for the design of closed loop controllers is suitable. Pole assignment by dynamic output feedback with low order controllers of a fixed structure is looked at in more detail. A new approach to this problem is presented.

Using the modified z -transform the theory is extended to hybrid systems consisting of a digital or discrete time controller and a plant in continuous time. Thereby the course of the signals between the sampling moments is taken into account.

Finally linear observers are reinvestigated using the polynomial matrix representation. It is shown that the polynomial matrix representation provides a theoretical framework in which all linear observers can be designed.

1 Einführung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Die Aufgabe, ein System technischer Geräte so anzusteuern, dass es einer vorher festgelegten Vorgabe selbstständig folgt, zählt seit den Anfängen der Regelungstechnik zu deren Kernaufgaben (siehe z. B. [Sch41]). Beispielhaft seien die Steuerung eines Schiffes oder eines Flugzeugs entlang eines bestimmten Kurses oder das Einhalten bestimmter Temperaturverläufe während einer chemischen Reaktion genannt. Zu deren systematischer Beschreibung erarbeitet man zunächst ein System von Gleichungen, genannt „mathematisches Modell“, das das Verhalten des technischen Systems ausreichend genau widerspiegelt. Meist wird es sich dabei um Differentialgleichungen handeln, es können aber auch rein algebraische Gleichungen auftreten. In dieser Arbeit sollen Systeme untersucht werden, deren Verhalten sich durch zeitinvariante lineare algebraische Gleichungen und zeitinvariante lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, sogenannte Algebrodifferentialgleichungen, beschreiben lässt. Solche Systeme heißen lineare zeitinvariante Systeme, abgekürzt *LTI-Systeme* (linear time invariant systems). Dabei sollen von Anfang an Mehrgrößensysteme, sogenannte MIMO-Systeme, betrachtet werden, also Systeme mit mehreren Steuergrößen und mehreren gemessenen Größen, wobei die Anzahl der Steuergrößen und die der Messgrößen nicht übereinstimmen müssen. SISO- oder Eingrößensysteme sind ein darin enthaltener Spezialfall, der nur vereinzelt gesondert diskutiert wird.

Die bei der Modellierung entstehenden Algebrodifferentialgleichungen lassen sich ohne zusätzlichen Aufwand als Matrixgleichungen mit Matrizen, deren Einträge Polynome im Ableitungsoperator ($\frac{d}{dt}$) sind, darstellen. Durch Laplace-Transformation erhält man Gleichungssysteme mit Matrizen, deren Einträge Polynome in der Laplace-Variablen s sind. Wenn das System sinnvoll modelliert ist, was in der vorliegenden Arbeit vorausgesetzt wird und nicht genauer untersucht werden soll, so kann man bei gegebenen Zeitverläufen der Stellsignale und bekannter Ausgangssituation die zu erwartenden Zeitverläufe aller übrigen Signale berechnen, insbesondere die der gemessenen Signale. Ein Weg dazu ist, die Differentialgleichungen im Laplacebereich zu lösen und das Ergebnis in den Zeitbereich zu transformieren. Im Allgemeinen stellt sich die Aufgabe in der Praxis jedoch umgekehrt. Es gibt Forderungen an den Verlauf bestimmter technisch relevanter Signale. Eine naheliegende Idee wäre, die Differentialgleichung „rückwärts“ zu lösen, indem man beispielsweise die Übertragungsfunktion invertiert und mit den gewünschten Ausgangssignalen beaufschlagt. Doch dabei treten folgende Probleme auf. Zum Einen können die Übertragungsfunktionen nicht minimalphasig sein, wodurch deren Inverse instabil ist. Man würde also ohne besondere Vorkehrungen unbegrenzt wachsende Stellsignale erhalten. Zum Zweiten kann die Anzahl der relevanten Signale die der Stellgrößen deutlich übersteigen. Dann sind Forderungen nicht uneingeschränkt umsetzbar. Wie können dann Forderungen gestellt werden, die erfüllbar sind? Wenn zwischen einander widersprechenden Forderungen vermittelt werden muss, wäre es gut, viele Lösungen zu betrachten,

um eine geeignete zu finden. Zum Dritten sind umfangreiche lineare Differentialgleichungen praktisch nur numerisch zu lösen. Dabei geht jedoch die Transparenz bezüglich der verschiedenen Parameter verloren. Man müsste eine Vielzahl an numerischen Varianten berechnen, ehe man eine akzeptable Lösung findet.

Aus den genannten Gründen wäre es gut, man könnte die Möglichkeiten der Planung exakt benennen und man könnte die Aufgabe lösen, ohne Differentialgleichungen durch Integration lösen zu müssen. Anhand eines einfachen passiven elektrischen Netzwerks soll ein kurzes Schlaglicht auf das Problem und die in der vorliegenden Arbeit verfolgte Lösungsstrategie geworfen werden:

Beispiel 1.1 Man betrachte das in Bild 1.1 dargestellte Netzwerk. Die Ausgangsspannung u^a

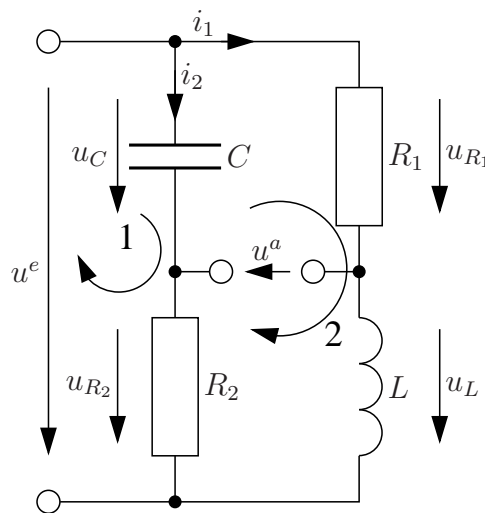


Bild 1.1: elektrisches Beispielnetzwerk

soll rampenförmig ansteigen $u^a(t) = t$. Zu Anfang seien alle Spannungen und Ströme null. Wie muss nun die Eingangsspannung gewählt werden, und wie verhalten sich die übrigen elektrischen Größen? Die Netzwerkgleichungen sind schnell aufgestellt; zunächst kommen die vier Netzwerkelementerelationen und darauf die Maschengleichungen der zwei eingezeichneten Maschen:

$$\begin{aligned}
 R_1 i_1 &= u_{R_1} & u_{R_2} + u_C &= u^e \\
 R_2 i_2 &= u_{R_2} & u_{R_1} + u_L &= u_{R_2} + u_C \\
 C \frac{d}{dt} u_C &= i_2 \\
 L \frac{d}{dt} i_1 &= u_L & u_L - u_{R_2} &= u^a,
 \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix}
 R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & R_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & C \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 \\
 L \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 i_1 \\
 i_2 \\
 u_{R_1} \\
 u_{R_2} \\
 u_C \\
 u_L
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0
 \end{pmatrix}
 u^e = \mathbf{0}$$

$$(0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_{R_1} \\ u_{R_2} \\ u_C \\ u_L \end{pmatrix} = u^a .$$

Dies sind bereits die benötigten Algebrodifferentialgleichungen in Matrizendarstellung. Eine weitere Zusammenfassung ist zwar möglich, aber nicht notwendig. Weil das System stabil und minimalphasig ist, ließe sich die Beispielaufgabe auch durch geschlossene Integration der Differentialgleichungen bewältigen. Jedoch soll gezeigt werden, dass es auch ohne dies geht, nämlich durch Einführen einer neuen Größe, die später systematisch als *Basisgröße* eingeführt wird:

$$\Phi = Li_1 - R_2Cu_C .$$

Aus dieser Größe Φ gehen sämtliche anderen Größen allein durch Differentiation hervor. Es ist keine Differentialgleichung durch Integration zu lösen. Man kann nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} i_1 &= R_2C\dot{\Phi} + \Phi, & u_{R_2} &= R_2C \left(R_1\dot{\Phi} + L\ddot{\Phi} \right), \\ i_2 &= CL\ddot{\Phi} + CR_1\dot{\Phi}, & u_C &= R_1\dot{\Phi} + L\ddot{\Phi}, \\ u_{R_1} &= R_1 \left(R_2\dot{\Phi}C + \Phi \right), & u_L &= L \left(R_2C\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} \right) \end{aligned}$$

und insbesondere

$$u^e = R_2CL\ddot{\Phi} + (L + R_2CR_1)\dot{\Phi} + R_1\Phi, \quad u^a = (L - R_2CR_1)\dot{\Phi}$$

gilt. Wählt man beispielsweise

$$\Phi(t) = \frac{1}{2(L - R_2CR_1)}t^2,$$

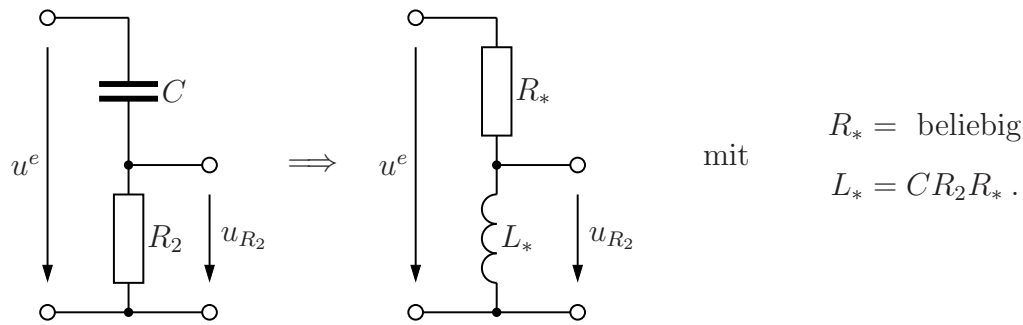
so erhält man alle gesuchten Signale

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{R_2Ct + \frac{1}{2}t^2}{L - R_2CR_1}, & u_{R_2}(t) &= \frac{R_2C(L + R_1t)}{L - R_2CR_1}, \\ i_2(t) &= \frac{C(L + R_1t)}{L - R_2CR_1}, & u_C(t) &= \frac{Lt + \frac{1}{2}R_1t^2}{L - R_2CR_1}, \\ u_{R_1}(t) &= \frac{R_1 \left(R_2Ct + \frac{1}{2}t^2 \right)}{L - R_2CR_1}, & u_L(t) &= \frac{L(R_2C + t)}{L - R_2CR_1} \end{aligned}$$

und das gewünschte Ausgangssignal

$$u^a(t) = t, \quad \text{sowie die Steuerung} \quad u^e(t) = \frac{R_2CL + (L + R_2CR_1)t + \frac{1}{2}R_1t^2}{L - R_2CR_1} .$$

Die physikalische Bedeutung der Größe Φ ist zunächst nicht offensichtlich. Jedoch kann man den i_2 -Zweig in ein Ersatzschaltbild (Bild 1.2) umwandeln, welches das selbe Klemmenverhalten aufweist. Mit diesem Ersatzschaltbild (1.2) kann man sagen, dass die Basisgröße Φ die Differenz der beiden magnetischen Flüssen durch die Spule mit der Induktivität L und durch die Ersatzspule mit der Induktivität L_* ist, denn $\Phi = Li_1 - L_*\frac{u_C}{R_*}$. Es sei aber darauf hingewiesen, dass der fiktive Strom $\frac{u_C}{R_*}$ mit dem tatsächlichen Strom i_2 in dem Zweig in keiner Weise übereinstimmt. Das zeigt, wie fragwürdig eine solche Ersatzanordnung ist. Eine Interpretation durch direkt erkennbare physikalische Größen gibt es nicht. ■

Bild 1.2: Ersatzschaltbild für den i_2 -Zweig

Wie schon das Beispiel zeigt, sind Basisgrößen nicht unmittelbar offensichtlich und ihre physikalische Deutung ist oft schwierig und bisweilen unmöglich. Das erste Ziel der Arbeit ist daher, für Algebra-Differentialgleichungen in Matrixdarstellung geeignete Basisgrößen *systematisch* zu finden und Stellensignale für die Steuergeräte zu berechnen, so dass sowohl die gemessenen Größen als auch andere Größen im System gewünschte Zeitverläufe zeigen.

Allerdings kann ein mathematisches Modell das tatsächliche Verhalten eines Systems niemals exakt widerspiegeln. Die Gründe dafür sind vielfältig. Einmal rührt es daher, dass aufgrund von Fertigungstoleranzen nicht alle Parameter exakt bekannt sind. Ferner können die Umgebungsbedingungen sich unvorhersehbar ändern, z. B. die Umgebungstemperatur oder Wind und Wetter, wenn man an die Kurssteuerung eines Schiffes oder Flugzeugs denkt. Nicht zuletzt sind bei einer Festlegung auf lineare Differentialgleichungen auch nichtlineare Effekte eine Fehlerquelle. Das System wird daher auch bei sorgfältigster Berechnung der Stellensignale nicht exakt das gewünschte Verhalten zeigen. Bei instabilen Systemen werden die Abweichungen sogar aufklingen und mit der Zeit über alle Grenzen anwachsen. Es ist also im Allgemeinen notwendig, die sich einstellenden Signalverläufe zu messen, sie mit den geforderten zu vergleichen und die berechneten Stellensignale im laufenden Prozess zu korrigieren. Eine solche Vorrichtung heißt Folgeregler. Sie soll ebenfalls ein LTI-System sein und durch polynomiale Matrizen in $\left(\frac{d}{dt}\right)$ dargestellt werden. Das zweite Ziel der Arbeit ist, einen Folgeregler so zu entwerfen, dass die Abweichungen abklingen und das System auf die gewünschten Signalverläufe zurück gezwungen wird.

1.2 Einordnung der Arbeit und eigene Beiträge

Es gibt zwei Hauptstränge der Regelungstheorie, die in dieser Arbeit fortgeführt werden. Einmal ist da die alte Erkenntnis, dass eine Kombination aus einer Trajektoriensteuerung und Folgeregelung bei schnell veränderlichen Führungsgrößen die besten Ergebnisse bringt. Sehr früh wurde das von [Tsi54] im Abschnitt 4.8 – multiple-loop Servomechanics – formuliert, wobei auch [Tsi54] auf eine ältere Quelle¹ verweist. Bei [Tsi54] werden in Bild 4.10 zur Kombination von „open-cycle control“ und „closed-cycle control“ drei Steuereinheiten eingeführt: open cycle controller, series loop controller und parallel controller.

In [Hor63] taucht dann im sechsten Kapitel, Bild 6.1-1. d), die Struktur aus Trajektoriensteuerung und Folgeregelung, die in dieser Arbeit verwendet werden soll, erst-

¹J. R. Moore, Proc. IRE, 39, 1421-1432 (1951)

malig auf. Dort wird eine Vielzahl an möglichen Regelungsstrukturen zusammengetragen und anschließend festgestellt, dass sie alle im Grunde zwei zu gestaltende Übertragungsfunktionen enthalten, die [Hor63] die „zwei Freiheitsgrade“ nennt. Dieses Konzept wurde in jüngerer Zeit von [Kre99] wieder ins Gespräch gebracht. Im Lichte der vorliegenden Arbeit handelt es sich bei den beiden Freiheitsgraden um die Trajektorienplanung und die Folgeregelung. Für den SISO-Fall wurde dieses Konzept, beispielsweise in den genannten Quellen, erschöpfend diskutiert. Für nichtlineare Systeme wird unter dem Namen „flachheitsbasierte Folgeregelung“ ein ähnlicher zweigeteilter Ansatz verfolgt, wobei aufgrund der nichtlinearen Probleme natürlich ein ganz anderes mathematisches Werkzeug, die Differentialalgebra, zum Einsatz kommt (siehe [Rud03] und dortige Quellen).

Der andere Strang ist die Beschreibung von MIMO-LTI-Systemen durch polynomiale Matrizen. Lange stand diese Beschreibungsform im Schatten der Zustandsdarstellung. Doch wird sie bereits bei [Wol74] und [Ros70] verwendet, wobei Letzterer sein Hauptaugenmerk auf Übertragungsmatrizen richtet. In [Kai80] liegen bereits sämtliche algebraischen Werkzeuge bereit, von denen diese Arbeit Gebrauch macht. Unter der Bezeichnung „partial state“ findet sich dort auch die Basisgröße, die in dieser Arbeit eine fundamentale Rolle spielt. Allerdings sind die algebraischen Werkzeuge selber wesentlich älter und stammen aus dem 19. Jahrhundert. In [Mac33] ist die Theorie der Matrizen mit Einträgen aus Euklidischen Ringen bereits abschließend zusammengefasst.

In [Deu04] werden flachheitsbasierte Methoden auf lineare Systeme angewendet, dabei kommt auch bereits die Darstellung durch polynomiale Matrizen zur Anwendung. Der in [Deu04] gefundene „flache Ausgang“ weist bereits einige Parallelen zur Basisgröße dieser Arbeit auf.

In [Rei06] wird die Theorie der Matrizen mit Einträgen aus Euklidischen Ringen auf das Problem der Trajektorienplanung angewendet. Hier werden mithilfe der Hermiteischen Normalform Basisgrößen definiert, die beliebig vorgegeben werden können. Aus der Überführung in die Hermiteische Normalform werden auch die Matrizen gewonnen, mit deren Hilfe man aus den Basisgrößen sämtliche übrigen Größen, ohne zu integrieren, berechnen kann. Diese Matrizen bilden die Trajektoriensteuerung. An dieses Buch [Rei06] knüpft die vorliegende Arbeit im Wesentlichen an.

Auch wenn die Basisgrößen etwas anders eingeführt werden, um die Diskussion eines nicht unimodularen Linksteilers zu erleichtern, so sind es doch dieselben Basisgrößen wie in [Rei06]. Es wird gezeigt, wie man Basisgrößen gezielt konstruieren kann und welchen Zwängen man dabei unterliegt. Es wird festgestellt, dass zwar der Verlauf der Basissignale frei vorgebar ist, die Anfangswerte allerdings festliegen. Dieser Zusammenhang wird dort untersucht. Die allgemeinen Berechnungsvorschriften der Trajektorienplanung werden mit Polynomen in der Zeit t als Ansatzfunktion detailliert ausgearbeitet. Ferner werden optimale Trajektorien mit Hilfe der Basisgrößen bestimmt. Da die Basisgrößen keinen Zwangsbedingungen unterliegen, kommt dabei die klassische Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen zum Einsatz. Ferner wird demonstriert, dass auch bei der Existenz eines nicht unimodularen Linksteilers ebenfalls Basisgrößen existieren und eine Trajektorienplanung möglich ist.

Die bereits bekannte Tatsache, dass das Problem der Folgeregelung von dem der Trajektorienplanung unabhängig gelöst werden kann, wird noch einmal untermauert, und die genauen Zusammenhänge zwischen den Basissignalen und den Störungen einerseits und den sich daraus ergebenden inneren Signalen andererseits werden ausgerechnet. Der Reglerauslegung durch Nullstellenzuweisung wird besondere Aufmerksamkeit zuteil. Es

wird ein neues Vorgehen erarbeitet, um Nullstellen mit Reglern vorgegebener, möglichst geringer dynamischer Ordnung zu platzieren.

Basierend auf dem Konzept der parametrischen Übertragungsfunktionen [RL97] und der modifizierten z -Transformation [Jur64] wird das Konzept der Trajektorienplanung auf eine digitale Steuerung erweitert, unter Beachtung der Signalverläufe zwischen den Abtastzeitpunkten. Alle Aspekte aus dem rein zeitkontinuierlichen Fall werden auch für das hybride System aus zeitdiskreter Steuerung und zeitkontinuierlicher Regelstrecke diskutiert.

Von dem übrigen Teil der Arbeit relativ unabhängig werden außerdem, anknüpfend an [Rei06], die linearen Beobachter für Systeme in polynomialer Matrizendarstellung erneut betrachtet. Es wird ein allgemeines Konzept vorgestellt, in dem sämtliche linearen Beobachter aufgehoben sind, z. B. Zustandsbeobachter, Eingangs- oder Störgrößenbeobachter, reduzierte Beobachter, etc. .

Auf die Untersuchung linearer zeitvarianter Systeme wird bewusst verzichtet, auch wenn die algebraischen Methoden dies zuließen, siehe [Rud03]. Der Grund ist, dass in dieser Arbeit die Trajektorienplanung eine wesentliche Rolle spielt. Nach Eindruck des Autors entstehen jedoch lineare zeitvariante Systeme vor allen Dingen durch Linearisierung eines Systems entlang einer bereits bekannten Trajektorie, was eine Trajektorienplanung erübrigt.

1.3 Gliederung

Die folgenden drei Kapitel 2 bis 4 beschäftigen sich mit dem Kernproblem dieser Arbeit, dem Entwurf einer Steuerung für ein LTI-System. Das Wort „Steuerung“ meint in diesem Zusammenhang die Gesamtheit an Vorrichtungen, die das gewünschte Verhalten eines technischen Systems erzeugen und sicherstellen. Dabei sind die Kapitel in der Reihenfolge angelegt, in der man die Aufgabe typischerweise abarbeiten wird. Sämtliche Schritte werden am Beispiel des verschieblichen N -fach Pendels vorgeführt. Um den Fluss der Arbeit nicht zu stören, ist die detaillierte Modellbildung und Linearisierung in den Anhang B gestellt.

In Kapitel 2 wird im ersten Abschnitt zunächst kurz vorgeführt, wie man von allgemeinen physikalischen Systemgleichungen zu den dieser Arbeit zugrunde liegenden linearen Systemgleichungen in polynomialer Matrizendarstellung gelangt. Dabei handelt es sich um das übliche Verfahren der Linearisierung um eine Ruhelage, das sich jedoch dadurch vereinfacht, dass keine spezielle Form von Gleichungen benötigt wird. Danach werden die Basisgrößen definiert, wobei die wichtigsten mathematischen Grundlagen direkt im Text erläutert werden. Die grundlegenden Eigenschaften der Basisgrößen werden diskutiert und verschiedene Vorgehensweisen zur Konstruktion erarbeitet.

In Kapitel 3 werden die Basisgrößen verwendet, um eine Trajektoriensteuerung zu planen. Prinzipiell können die Basissignale beliebige, hinreichend glatte Funktionen sein. Für die Klasse der Polynome in der Zeit t wird detailliert vorgeführt, wie man einerseits Übergänge zwischen Ruhelagen effizient gestaltet. Andererseits wird aber auch der Übergang zwischen beliebigen „Zuständen“ diskutiert. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die praktische Berechenbarkeit bei hohen Glattheitsforderungen gelegt. Dem zweiten Abschnitt liegt keine spezielle Klasse von Funktionen zugrunde. Stattdessen werden hier Kriterien als Kostenfunktionale eingeführt und mittels der Variationsrechnung minimiert.

Abschließend wird auf die Besonderheiten der Planung bei einem nicht unimodularen Linksteiler eingegangen bzw. bei der Existenz von Eingangsentkoppelungsnullstellen.

Abschließend wird in Kapitel 4 gezeigt, wie man durch einen Folgeregler das System entlang der zuvor geplanten Trajektorien stabilisieren kann. Dabei wird im ersten Abschnitt die Struktur der Folgeregelung geklärt und deutlich gemacht, dass grundsätzlich jede Methode zum Entwurf einer stabilisierenden Rückführung genutzt werden kann. Das Problem der Nullstellenzuweisung für das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises wird ausführlich diskutiert, wobei der Frage, wie man die Nullstellen bei vorgegebener, möglichst einfacher Struktur des Reglers beliebig zuweisen kann, besonderes Interesse zuteil wird. Im letzten Abschnitt werden einige Simulationsergebnisse gezeigt, wobei die Systeme verschiedenen Störungen ausgesetzt wurden, um die Robustheit der entworfenen Regler exemplarisch zu prüfen.

In Kapitel 5 wird der Tatsache Rechnung getragen, dass die meisten Steuerungen auf digitalen Steuergeräten realisiert werden, was bedeutet, dass die Steuerung zeitdiskreter Natur ist. Daher werden in Kapitel 5 die Konzepte aus den Kapiteln 2 bis 4 noch einmal für ein hybrides System, bestehend aus einer zeitkontinuierlich wirkenden Regelstrecke und einer zeitdiskret arbeitenden Steuerung und Regelung, diskutiert. Mithilfe der parametrischen Übertragungsfunktion werden dabei nicht nur die Werte zu den Abtastzeitpunkten, sondern auch die Signalverläufe dazwischen geplant. Auf die zeitdiskrete Regelung und Stabilisierung wird nur kurz eingegangen.

Für den Entwurf einer Steuerung und Folgeregelung wird in der vorliegenden Arbeit eigentlich kein Beobachter benötigt. Trotzdem kann es sinnvoll sein, etwa zu Überwachungszwecken, einen Beobachter einzusetzen, um nicht gemessene Größen in Echtzeit zu bestimmen. Daher wird in Kapitel 6 ein Konzept der linearen Beobachter für LTI-Systeme in polynomialer Matrizendarstellung entwickelt. Auf einige in diesem Konzept enthaltene Spezialfälle wird näher eingegangen.

Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf offene Fragen.

Im Anhang A finden sich einige mathematische Grundlagen, von denen keine vollständig neu ist. Jedoch scheint es dem Autor jeweils sinnvoll, sie in neuer Form zu präsentieren, um sie in der für dieses Werk nützlichen und (subjektiv) verständlichen Form vorliegen zu haben.

Diese Arbeit ist auf zwei verschiedene Weisen veröffentlicht worden. Zum Einen erschien sie als Fortschritt-Bericht VDI in der Reihe „Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik“ [Lin09], zum Anderen im Internet auf Qucosa, dem sächsischen Dokumenten- und Publikationsserver, unter <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-24944> als PDF-Datei. Dort sind einige Bilder farbig gefasst, um deren Lesbarkeit zu erhöhen. Die Querverweise sind als Hyperlinks ausgeführt. Auch finden sich dort kurze Animationsfilme des Zweifachpendels, die einige Simulationsergebnisse veranschaulichen sollen. In der gedruckten Fassung sind an den entsprechenden Stellen lediglich Momentaufnahmen zu sehen.

2 Streckenbeschreibung und Definition von Basisgrößen

2.1 Streckenbeschreibungen

Bei der mathematischen Modellierung von physikalischen Systemen stößt man im Allgemeinen zunächst auf ein nichtlineares System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(k_A)}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k_B)}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(k_C)}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k_D)}) &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Darin sind die m Stellgrößen im Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, im Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die p Ausgangsgrößen, und im Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ alle übrigen (inneren) Systemgrößen zusammengefasst. In der Funktion \mathbf{f} sind r Differentialgleichungen, in der Funktion \mathbf{g} sind m zusammengefasst. Bei dem verschieblichen N -fach Pendel handelt es sich um die Gleichung: (B.14) mit $\mathbf{y} = \mathbf{q}$. Gegenstand dieser Arbeit sind LTI-Systeme. Daher werden die Gleichungen um eine Ruhelage $(\mathbf{x}^{ss}, \mathbf{u}^{ss})$, die durch

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{ss}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{u}^{ss}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^{ss}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{u}^{ss}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots) &= \mathbf{y}^{ss} \end{aligned}$$

gegeben ist, linearisiert. Dabei entstehen lineare Differentialgleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^{k_A} A_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{x} + \sum_{\kappa=0}^{k_B} B_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \sum_{\kappa=0}^{k_C} C_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{x} + \sum_{\kappa=0}^{k_D} D_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{u} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{\kappa} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\dots)}{\partial x^{(\kappa)}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{ss} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{ss}}} & B_{\kappa} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\dots)}{\partial u^{(\kappa)}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{ss} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{ss}}} \\ C_{\kappa} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\dots)}{\partial x^{(\kappa)}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{ss} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{ss}}} & D_{\kappa} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\dots)}{\partial u^{(\kappa)}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{ss} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{ss}}} \end{aligned}$$

Dieser Vorgang ist in Abschnitt B.3 am Beispiel des verschieblichen N -fach Pendels durchgeführt worden. Fasst man die Summen in einer Matrix zusammen, so erhält man

$$A_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + B_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.1a)$$

$$C_P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + D_P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \quad (2.1b)$$

mit Matrizen, deren Einträge Polynome in dem Operator $\left(\frac{d}{dt}\right)$ sind:

$$\begin{aligned} A_P\left(\frac{d}{dt}\right) &= \sum_{\kappa=0}^{k_A} A_\kappa \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{r \times r} & B_P\left(\frac{d}{dt}\right) &= \sum_{\kappa=0}^{k_B} B_\kappa \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{r \times m} \\ C_P\left(\frac{d}{dt}\right) &= \sum_{\kappa=0}^{k_C} C_\kappa \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{p \times r} & D_P\left(\frac{d}{dt}\right) &= \sum_{\kappa=0}^{k_D} D_\kappa \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{p \times m}. \end{aligned}$$

Dies ist im Kontext dieser Arbeit nur eine andere Schreibweise, bei der der Operator für die Ableitung von der abzuleitenden Größe gelöst, und in die Matrix hinein genommen wird. Auch im Fortgang dieser Arbeit wird im Produkt rechts von dem Operator, zumindest gedanklich, immer eine differenzierbare Größe stehen, so dass der Operator an dieser Stelle nicht präziser eingeführt werden muss. Eine mathematisch präzise Einführung von Operatoren und die zugehörigen Operatorenrechnung findet man in [Mik57], Teil I.

Das Gleichungssystem (2.1) ist die zentrale Streckenbeschreibung der vorliegenden Arbeit. Man sieht, dass sie sich durch einen einfachen und klaren Algorithmus ohne Zuhilfenahme spezieller Methoden der mathematischen Modellbildung ergibt. Die partiellen Ableitungen können bei größeren Systemen zwar umfangreich werden, bleiben aber immer, nötigenfalls mit Rechnerunterstützung, durchführbares mathematisches Handwerk.

Die klassische Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ist in der Streckenbeschreibung (2.1) mit

$$A_P = \left(\frac{d}{dt}\right)I - A, \quad B_P = -B, \quad C_P = C \quad \text{und} \quad D_P = D$$

enthalten, aber nicht vorausgesetzt. Beispielsweise können auch impropere Strecken mit den Gleichungen. (2.1) behandelt werden.

Wird die Lösung einer linearen Differentialgleichung gesucht, so wird in dieser Arbeit die Laplace-Transformation verwendet, weil sie das unter Ingenieuren am weitesten verbreitete mathematische Werkzeug ist. Mit der Laplace-Transformation wird aus dem Gleichungssystem (2.1) im Bildbereich

$$A_P(s) \cdot \mathbf{X} + B_P(s) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{a}(s) \quad (2.3a)$$

$$C_P(s) \cdot \mathbf{X} + D_P(s) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Y} + \mathbf{b}(s) \quad (2.3b)$$

mit den selben Polynommatrizen A_P , B_P , C_P und D_P , nur das deren Einträge Polynome in s statt in $\left(\frac{d}{dt}\right)$ sind. Die Anfangswerte von \mathbf{x} und \mathbf{u} resultieren in den Vektoren

$$\mathbf{a}(s) = \sum_{\kappa=1}^{k_A} A_\kappa \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \mathbf{x}^{(\lambda)}(-0) \right) + \sum_{\kappa=1}^{k_B} B_\kappa \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \mathbf{u}^{(\lambda)}(-0) \right) \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{b}(s) = \sum_{\kappa=1}^{k_C} C_\kappa \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \mathbf{x}^{(\lambda)}(-0) \right) + \sum_{\kappa=1}^{k_D} D_\kappa \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \mathbf{u}^{(\lambda)}(-0) \right), \quad (2.4b)$$

deren Einträge ebenfalls Polynome in s sind.

2.2 Definition von Basisgrößen

Die Basisgrößen ξ_b sollen zwei Eigenschaften haben:

1. Sie unterliegen keiner Art von Zwangsbedingung und können daher frei vorgegeben werden. Das bedeutet, dass es keine Differentialgleichung der Art $M_P \left(\frac{d}{dt}\right) \xi_b = 0$ gibt. Dies gilt im Allgemeinen auch schon für die Eingangsgrößen \mathbf{u} .
2. Zusätzlich sollen sich aus den Basisgrößen alle weiteren Systemgrößen allein durch Differentiation ergeben, d. h. ohne eine Differentialgleichung durch Integration lösen zu müssen.

Wenn man die inneren Systemgrößen \mathbf{x} und die Eingangsgrößen \mathbf{u} mithilfe der Basisgrößen bestimmt hat, so ist die zweite Bedingung für Ausgangsgrößen \mathbf{y} in der Ausgangsgleichung (2.1b) offensichtlich immer erfüllt. Man wendet sich daher zunächst Gleichung (2.1a) zu. Diese kann man als

$$\left(A_P \left(\frac{d}{dt}\right), B_P \left(\frac{d}{dt}\right)\right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

schreiben.

2.2.1 Algebraische Grundlagen

Zur Definition der Basisgrößen werden einige algebraische Grundlagen benötigt, die im Folgenden kurz und ohne Beweis genannt werden sollen. Genauer lässt sich unter anderem in [Rei06], [Rai94], [Kai80] oder [Wol74] nachlesen. Eine Darstellung aus Sicht der Mathematik findet sich in [Mac33].

Algebraisch gesehen, bilden die Polynome, ganz gleich, ob in s oder in $\left(\frac{d}{dt}\right)$, einen Euklidischen Ring. Quadratische Matrizen, deren Einträge Polynome sind, bilden einen nicht kommutativen Ring. Die Einheiten in diesem Ring heißen unimodulare Matrizen. Die Determinante einer unimodularen Matrix U ist eine konstante Zahl (ungleich Null), denn andernfalls enthielte die Inverse gebrochen rationale Funktionen. Die Inverse einer unimodularen Matrix ist wiederum unimodular.

Wenn drei polynomiale Matrizen die Gleichung $M_{P_1} = M_{P_3} M_{P_4}$ erfüllen, so nennt man M_{P_3} einen Linksteiler von M_{P_1} . Umgekehrt nennt man M_{P_1} ein rechtes Vielfaches von M_{P_3} . Ein größter gemeinsamer Linksteiler M_{P_3} von zwei Matrizen M_{P_1} und M_{P_2} ist ein gemeinsamer Linksteiler, der das rechte Vielfache sämtlicher gemeinsamen Linksteiler von M_{P_1} und M_{P_2} ist. Ist der größte gemeinsame Linksteiler unimodular, so heißen die Matrizen M_{P_1} und M_{P_2} linksteilerfremd.

Zwei Matrizen M_{P_1} und M_{P_2} heißen rechtsassoziert, wenn sie sich nur durch eine Einheit unterscheiden, also wenn $M_{P_1} = M_{P_2} U$ gilt¹. Rechtsassozierte Matrizen bilden eine Äquivalenzklasse, gleichen einander also.

Man kann nun fragen, ob die Matrizen A_P und B_P linksteilerfremd sind. Um dies zu klären, sucht man für das Paar (A_P, B_P) innerhalb der Äquivalenzklasse der rechtsassozierten Matrizen nach einer Normalform, die den gemeinsamen Linksteiler offenbar werden

¹mit einer unimodularen Matrix U

lässt, nämlich nach der Hermitesche Normalform. Diese Form ist dadurch gekennzeichnet, dass die Einträge rechts der Hauptdiagonalen null sind und sich von den übrigen Einträgen einer Zeile das Polynom mit dem höchsten Grad auf der Hauptdiagonalen befindet. Um das Paar (A_P, B_P) in die Hermitesche Normalform zu überführen, wird es durch „elementare Spaltenoperationen“ umgeformt. Elementare Spaltenoperationen sind solche, bei denen die Matrix ihre Äquivalenzklasse nicht verlässt, also nicht wesentlich verändert wird. Im Einzelnen sind das

- das Vertauschen von Spalten,
- die Multiplikation einer Spalte mit einer reellen Zahl $\neq 0$
- und das Addieren einer mit einem beliebigen Polynom multiplizierten Spalte zu einer anderen.

Solche elementaren Spaltenoperationen lassen sich in der Multiplikation mit einer unimodularen Matrix U^R zusammenfassen.

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{elementare Spaltenoperationen}} & \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c|c} U_{11}^R & U_{12}^R \\ \hline U_{21}^R & U_{22}^R \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \end{array} \right]
 \end{array} \tag{2.6}$$

Dabei wurde die Matrix U^R passend zu A_P und B_P partitioniert. Ihre Inverse $V^R = (U^R)^{-1}$ ist ebenfalls eine unimodulare (polynomiale) Matrix. Damit folgt aus Gl. (2.6)

$$\left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} V_{11}^R & V_{12}^R \\ \hline V_{21}^R & V_{22}^R \end{array} \right] \tag{2.7}$$

Aus dieser Gleichung wird klar, dass L ein gemeinsamer Linksteiler von A_P und B_P ist, denn Gl. (2.7) lautet ausgerechnet

$$(A_P, B_P) = L (V_{11}^R, V_{12}^R) \tag{2.8}$$

In der Hermiteschen Normalform hat der Linksteiler L eine untere Dreiecksform, wobei die jeweils höchsten s -Potenzen einer Zeile sich auf der Hauptdiagonalen befinden (siehe oben). Falls L unimodular ist, befinden sich dort nur reelle Zahlen, die ungleich Null sind, und L kann auf eine Einheitsmatrix gebracht werden.

Eine schneller Weg, die Linksteilerfremdheit von zwei Matrizen zu prüfen, ist das Rangkriterium:

Satz 2.1 *Zwei Matrizen $A_P \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ und $B_P \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}$ sind genau dann linksteilerfremd, wenn*

$$\text{Rang}(A_P, B_P) = r \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

gilt.

Aus diesem Satz wird auch offensichtlich, dass V_{11}^R und V_{12}^R linksteilerfremd sind, denn sie stammen aus einer unimodularen Matrix. Unimodularität bedeutet, dass sämtliche Zeilen oder Spalten der Matrix für alle $s \in \mathbb{C}$ linear unabhängig sind, mithin auch alle Zeilen oder Spalten, die aus einer unimodularen Matrix entnommen wurden.

Beispiel 2.1 Als Beispiel sollen die Gleichungen des aufrecht stehenden verschieblichen Zweifachkettenpendels dienen (siehe Bild: B.1). Um den Schreibaufwand bei der symbolischen Berechnung überschaubar zu halten, werden die Winkel ψ aus Gl. (B.1) zu $\psi_1 = \psi_2 = 0$ gesetzt. Des Weiteren wird eine horizontale gerade Bahn angenommen, was $x'_0 = 1$ und $y'_0 = 0$ zur Folge hat. Die Kraft f auf den Wagen und das Drehmoment d_1 am ersten Pendelkörper sollen die Stellgrößen sein. Ihre Gleichgewichtswerte seien Null. Aus Gl. (B.15) folgt dann für die Gleichgewichtslage $\varphi_1^{ss} = \pi$, $\varphi_2^{ss} = \pi$ und w_0^{ss} bleibt frei. Aus den Gleichungen (B.10) und (B.17) ergeben sich

$$A_2 = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & -(l_1 m_1 + a_1 m_2) & -l_2 m_2 \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2) & l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2 & a_1 l_2 m_2 \\ -l_2 m_2 & a_1 l_2 m_2 & l_2^2 m_2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & 0 \\ 0 & 0 & -g m_2 l_2 \end{pmatrix},$$

sowie aus Gl. (B.18)

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (2.3a) erscheint damit als

$$\begin{pmatrix} (m_0 + m_1 + m_2)s^2 & -(l_1 m_1 + a_1 m_2)s^2 & -l_2 m_2 s^2 & -1 & 0 \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2)s^2 & (l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2)s^2 - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & a_1 l_2 m_2 s^2 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & l_2 s^2 - g & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ F \\ D_1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s). \quad (2.9)$$

Bei der Überführung in die Hermitesche Normalform macht man sich zunächst die beiden Einheitsvektoren in der 4. und 5. Spalte zunutze, um die polynomialen Einträge in den oberen Zeilen zu tilgen. Mit der unimodularen Matrix

$$U_1^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (m_0 + m_1 + m_2)s^2 & -(l_1 m_1 + a_1 m_2)s^2 & -l_2 m_2 s^2 & 1 & 0 \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2)s^2 & (l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2)s^2 - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & a_1 l_2 m_2 s^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$(A_P \ B_P) U_1^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & l_2 s^2 - g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & l_2 s^2 - g & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_2^R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & -g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & -g & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -\frac{1}{g} & -s^2 & a_1 s^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3^R} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Die unimodulare Matrix U^R lautet damit

$$U^R = U_1^R \cdot U_2^R \cdot U_3^R = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -\frac{l_2}{g} & -l_2 s^2 + g & & l_2 a_1 s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & g \\ 0 & 0 & -\frac{1}{g} & -s^2 & & a_1 s^2 \\ \hline -1 & 0 & -\frac{(m_0+m_1)l_2}{g} s^2 & -(m_0+m_1)l_2 s^4 + g(m_0+m_1+m_2)s^2 & l_2 a_1 (m_0+m_1) s^4 - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & \\ 0 & -1 & \frac{l_2 l_1 m_1}{g} s^2 & l_2 l_1 m_1 s^4 - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & -a_1 l_2 l_1 m_1 s^4 + g(l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2) s^2 - (l_1 m_1 + a_1 m_2) g^2 & \end{array} \right) \quad (2.10)$$

und die Matrix V^R ergibt sich zu

$$V^R = \left(\begin{array}{ccc|cc} (m_0+m_1+m_2)s^2 & -(l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & -l_2 m_2 s^2 & -1 & 0 \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & (l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2) s^2 - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & a_1 l_2 m_2 s^2 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1 s^2 & l_2 s^2 - g & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{g} & 0 & -\frac{l_2}{g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Interessant ist dabei, dass in den ersten drei Zeilen wieder die Systemgleichungen auftauchen. Das ist immer dann der Fall, wenn die Matrix L auf eine Einheitsmatrix gebracht wurde, denn dann steht in Gl. (2.7) gerade $(A_P \ B_P) = (V_{11}^R \ V_{12}^R)$. ■

In diesem Beispiel wird die Überführung durch Hinsehen und „geschicktes“ Rechnen bewerkstelligt. Eine systematische Methode findet sich am Ende des Abschnitts A.1 und ist im Beispiel A.3 demonstriert.

2.2.2 Einführung der Basisgrößen

Es können jederzeit neue Systemgrößen ξ durch Linearkombination der bestehenden Systemgrößen und deren Ableitungen definiert werden. Das entspricht einer Multiplikation mit einer Polynommatrix $M_P\left(\frac{d}{dt}\right)$:

$$\xi = M_P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Wenn M_P unimodular ist, so ist auch deren Inverse eine Polynommatrix in $\left(\frac{d}{dt}\right)$. Damit sind die neuen und die alten Größen umkehrbar eindeutig ineinander umrechenbar. Nur solche Definitionen sind für diesen Zweck sinnvoll. Man nutzt also die in Gleichung (2.6) und (2.7) erhaltenen Matrizen, um neue Systemgrößen zu definieren:

$$\begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} := V^R\left(\frac{d}{dt}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U^R\left(\frac{d}{dt}\right) \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Dies hat auf die Gleichung (2.5) der Regelstrecke eine bemerkenswerte Konsequenz. Sie erscheint nun als

$$\left(A_P\left(\frac{d}{dt}\right), \quad B_P\left(\frac{d}{dt}\right) \right) \overbrace{U^R\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot V^R\left(\frac{d}{dt}\right)}^I \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\left(L\left(\frac{d}{dt}\right), \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13b)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \xi_a = 0. \quad (2.13c)$$

Offensichtlich gehen die Größen ξ_b nicht in die Systemgleichung ein. Diese Größen können also frei gewählt werden, und sind durch die Systemdynamik keinerlei Beschränkungen unterworfen. Wenn die Polynommatrix L unimodular ist, nicht notwendigerweise eine Einheitsmatrix, so kann sie auf die andere Seite gebracht werden. Man erhält $\xi_a = 0$. Falls L nicht unimodular ist, so ergeben sich die Größen ξ_a als Lösung einer autonomen Differentialgleichung. Auf diesen Fall wird in Abschnitt 3.3 näher eingegangen.

Gemäß Gleichung (2.12) können aus ξ_b mit $\xi_a = \mathbf{0}$ die ursprünglichen Größen allein durch Differentiation berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \\ U_{22}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \end{pmatrix} \xi_b. \quad (2.14)$$

Die Verläufe der Größen ξ_b sind frei vorgebar und aus ihnen können alle ursprünglichen Systemgrößen durch Differentiation berechnet werden. Sie erfüllen die oben genannten zwei Bedingungen. Daher sind ξ_b die **Basisgrößen**.

Beispiel 2.2 Für das in Beispiel 2.1 eingeführte verschiebliche Zweifachpendel definiert man die Basisgrößen mithilfe von V^R aus Gl. (2.11) zu:

$$\xi_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 & -\frac{l_2}{g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \xi_{b1} &= \frac{1}{g}w_0 - \frac{l_2}{g}\varphi_2 \\ \xi_{b2} &= \frac{1}{g}\varphi_1 \end{aligned}$$

Zufällig entpuppt sich die Basisgröße ξ_{b2} als der skalierte Winkel des ersten Pendelkörpers. Die Basisgrößen sind aber keinesfalls immer physikalisch einsehbare Größen, wie schon in Beispiel 1.1 deutlich wurde. Aus diesen Basisgrößen folgen dann mit U^R (Gl. 2.10) alle Systemgrößen

$$w_0 = -l_2\ddot{\xi}_{b1} + g\xi_{b1} + l_2a_1\ddot{\xi}_{b2}$$

$$\varphi_1 = g\xi_{b2}$$

$$\varphi_2 = -\ddot{\xi}_{b1} + a_1\ddot{\xi}_{b2}$$

$$f = -(m_0+m_1)l_2\ddot{\xi}_{b1} + g(m_0+m_1+m_2)\ddot{\xi}_{b1} + l_2a_1(m_0+m_1)\ddot{\xi}_{b2} - g(l_1m_1+a_1m_2)\ddot{\xi}_{b2}$$

$$d_1 = l_2l_1m_1\ddot{\xi}_{b1} - g(l_1m_1+a_1m_2)\ddot{\xi}_{b1} - a_1l_2l_1m_1\ddot{\xi}_{b2} + g(l_1^2m_1+a_1^2m_2)\ddot{\xi}_{b2} - g^2(l_1m_1+a_1m_2)\xi_{b2} \blacksquare$$

Basisgrößen bei nur einer Stellgröße ($m = 1$)

Wenn es nur eine Stellgröße u gibt, so wird die Matrix B_P zu einem Vektor \mathbf{b}_P . Wenn außerdem A_P und \mathbf{b}_P linksteilerfremd sind, was in der Praxis oft der Fall ist, so kann man die Überführung (2.6) in die Hermitesche Normalform umgehen. Für die Anwendung werden aus der Matrix U^R lediglich die Matrizen U_{12}^R und U_{22}^R benötigt. Die lassen sich jedoch leicht angeben, denn

$$(A_P, \mathbf{b}_P) \begin{pmatrix} -A_{P\text{adj}}\mathbf{b}_P \\ \det(A_P) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Die weiteren Teile von Gl. (2.6) werden nicht benötigt. Mithin ist

$$U_{12}^R = -A_{P\text{adj}}\mathbf{b}_P \quad \text{und} \quad U_{22}^R = \det(A_P). \quad (2.15)$$

Sollte die Matrix V^R benötigt werden, so kann man diese durch Lösen der Gleichung

$$\det V^R = \det \begin{pmatrix} A_P & \mathbf{b}_P \\ \mathbf{v}_{21}^{R\text{T}} & v_{22}^R \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \text{const} \quad (2.16)$$

gewinnen, denn diese erfüllt Gl. (2.7). Die Gleichung (2.16) ist in den Elementen von $\mathbf{v}_{21}^{R\text{T}}$ und v_{22}^R linear und lässt sich daher durch Koeffizientenvergleich lösen.

2.2.3 Anfangsbedingungen der Basisgrößen

Zwar sind die Verläufe der Basisgrößen frei vorgebar, ihre Anfangsbedingungen müssen jedoch konsistent mit den Anfangsbedingungen der Systemgrößen \mathbf{x} und \mathbf{u} sein. Bei der Trajektorienplanung sollten also die Anfangsbedingungen der Systemgrößen, gewissermaßen die Ausgangslage, bekannt sein. Transformiert man die Gleichung (2.14), so ist ihr Bild im Laplacebereich:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} \Xi_b - \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\bullet 2\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \xi_b^{(\lambda)}(-0). \quad (2.17)$$

Darin wurden $U_{12}^R(s)$ und $U_{22}^R(s)$ analog zu den Polynommatrizen $A_P(s)$ und $B_P(s)$ dargestellt als

$$\begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} = \sum_{\kappa=0}^{k_U} U_{\bullet 2\kappa}^R s^\kappa \quad \text{mit} \quad U_{\bullet 2\kappa}^R \in \mathbb{R}^{(r+m) \times m}$$

und k_U als die höchste in den Polynommatrizen U_{12}^R und U_{22}^R auftretende Potenz. Ersetzt man in Gleichung (2.3a) \mathbf{X} und \mathbf{U} mithilfe von Gl. (2.17), so erhält man

$$\begin{aligned} (A_P(s), B_P(s)) \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} &= \mathbf{a}(s) \\ (A_P(s), B_P(s)) \left[\begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} \Xi_b - \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\bullet 2\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \xi_b^{(\lambda)}(-0) \right] &= \mathbf{a}(s) \end{aligned}$$

und mit Gleichung (2.6)

$$- (A_P(s), B_P(s)) \left[\sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\bullet 2\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \xi_b^{(\lambda)}(-0) \right] = \mathbf{a}(s). \quad (2.18)$$

Der Polynomvektor $\mathbf{a}(s)$ ist jedoch durch Gleichung (2.4a) festgelegt. So sind die Verläufe der Basisgrößen zwar frei vorgebbar, deren Anfangswerte unterliegen jedoch Zwangsbedingungen.

Beispiel 2.3 Bei dem in Beispiel 2.1 verwendeten Zweifachpendel ergeben sich die Anfangsbedingungen nach Gl. (2.4a) zu

$$\mathbf{a}(s) = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & -(l_1 m_1 + a_1 m_2) & -l_2 m_2 \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2) & l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2 & a_1 l_2 m_2 \\ -l_2 m_2 & a_1 l_2 m_2 & l_2^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s w_0(-0) + \dot{w}_0(-0) \\ s \varphi_1(-0) + \dot{\varphi}_1(-0) \\ s \varphi_2(-0) + \dot{\varphi}_2(-0) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Mit den einzelnen aus Gl. (2.10) entnommenen Zahlenmatrizen $U_{\bullet 2\kappa}^R$

$$U_{\bullet 20}^R = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & (l_1 m_1 + a_1 m_2) g^2 \end{pmatrix}$$

$$U_{\bullet 22}^R = \begin{pmatrix} -l_2 & l_2 a_1 \\ 0 & 0 \\ -1 & a_1 \\ \hline g(m_0 + m_1 + m_2) & -g(l_1 m_1 + a_1 m_2) \\ -(l_1 m_1 + a_1 m_2) & g(l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2) \end{pmatrix}$$

$$U_{\bullet 24}^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -(m_0+m_1)l_2 & l_2a_1(m_0+m_1) \\ l_2l_1m_1 & -a_1l_2l_1m_1 \end{pmatrix}$$

und der aus Gl. (2.9) entnommenen Matrix $(A_P \ B_P)$ erhält man die linke Seite von Gl. (2.18) zu

$$\begin{pmatrix} [g((m_1l_1+a_1m_2)\xi_{b2}(-0) - (m_0+m_1+m_2)\xi_{b1}(-0)) + l_2((m_0+m_1)\ddot{\xi}_{b1}(-0) - a_1(m_0+m_1)\ddot{\xi}_{b2}(-0))]s \\ +g((m_1l_1+a_1m_2)\dot{\xi}_{b2}(-0) - (m_0+m_1+m_2)\dot{\xi}_{b1}(-0)) + l_2((m_0+m_1)\ddot{\xi}_{b1}(-0) - a_1(m_0+m_1)\ddot{\xi}_{b2}(-0)) \\ [g((l_1m_1+a_1m_2)\xi_{b1}(-0) - (l_1^2m_1+a_1^2m_2)\xi_{b2}(-0)) + l_1l_2(a_1m_1\ddot{\xi}_{2b}(-0) - m_1\ddot{\xi}_{b1}(-0))]s \\ +g((l_1m_1+a_1m_2)\dot{\xi}_{b1}(-0) - (l_1^2m_1+a_1^2m_2)\dot{\xi}_{b2}(-0)) + l_1l_2(a_1m_1\ddot{\xi}_{2b}(-0) - m_1\ddot{\xi}_{b1}(-0)) \\ g(\xi_{b1}(-0) - a_1\xi_{b2}(-0))s + g(\dot{\xi}_{b1}(-0) - a_1\dot{\xi}_{b2}(-0)) \end{pmatrix}.$$

Der element- und potenzweise Vergleich mit $\mathbf{a}(s)$ aus Gl. (2.19) liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -(m_0+m_2+m_1)g & g(l_1m_1+a_1m_2) & \cdots \\ -(m_0+m_2+m_1)g & g(l_1m_1+a_1m_2) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g(l_1m_1+a_1m_2) & -(l_1^2m_1+a_1^2m_2)g & \cdots \\ g(l_1m_1+a_1m_2) & -(l_1^2m_1+a_1^2m_2)g & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g & -a_1g & \cdots \\ g & -a_1g & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & l_2(m_0+m_1) & -a_1(m_0+m_1)l_2 \\ \cdots & l_2(m_0+m_1) & -a_1(m_0+m_1)l_2 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -l_2l_1m_1 & a_1l_2l_1m_1 \\ \cdots & -l_2l_1m_1 & a_1l_2l_1m_1 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{b1}(-0) \\ \xi_{b2}(-0) \\ \dot{\xi}_{b1}(-0) \\ \dot{\xi}_{b2}(-0) \\ \ddot{\xi}_{b1}(-0) \\ \ddot{\xi}_{b2}(-0) \\ \ddot{\xi}_{b1}(-0) \\ \ddot{\xi}_{b2}(-0) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -l_1m_1\dot{\varphi}_1(-0) + (m_0+m_1+m_2)\dot{w}_0(-0) - a_1m_2\dot{\varphi}_1(-0) - l_2m_2\dot{\varphi}_2(-0) \\ -l_1m_1\varphi_1(-0) + (m_0+m_1+m_2)w_0(-0) - a_1m_2\varphi_1(-0) - l_2m_2\varphi_2(-0) \\ l_1^2m_1\dot{\varphi}_1(-0) - m_1l_1\dot{w}_0(-0) - a_1m_2\dot{w}_0(-0) + a_1^2m_2\dot{\varphi}_1(-0) + a_1l_2m_2\dot{\varphi}_2(-0) \\ l_1^2m_1\varphi_1(-0) - m_1l_1w_0(-0) - a_1m_2w_0(-0) + a_1^2m_2\varphi_1(-0) + a_1l_2m_2\varphi_2(-0) \\ l_2\dot{\varphi}_2(-0) - \dot{w}_0(-0) + a_1\dot{\varphi}_1(-0) \\ a_1\varphi_1(-0) - w_0(-0) + l_2\varphi_2(-0) \end{pmatrix}.$$

Da die obige (6×8) -Matrix den Rang 6 hat, ist das Gleichungssystem lösbar. Eine genauere Untersuchung des Ranges zeigt, dass die Spalten 5 und 6, sowie die Spalten 7 und 8 linear abhängig

sind. Man kann also jeweils ein Element der Paare $(\ddot{\xi}_{b1(-0)} \quad \ddot{\xi}_{b2(-0)})^T$ und $(\ddot{\xi}_{b1(-0)} \quad \ddot{\xi}_{b2(-0)})^T$ frei vorgeben, die übrigen Anfangswerte liegen dann fest. Dass nur sechs Anfangswerte $\xi^{(\lambda)}(-0)$ vorgegeben sind, liegt nahe, da der Grad der Determinante von $A_P(s)$ sechs beträgt. ■

Die vorstehende Rechnung ist vergleichsweise aufwendig. Wenn man sich im Klaren darüber ist, welche Anfangsbedingungen der einzelnen Größen gebraucht werden, so kann man die gesuchten Zusammenhänge auch aus Gleichung (2.12) herauslesen. Eine Methode dazu findet sich in Abschnitt 3.1.3 in den Gleichungen (3.8) und (3.9) und dem anschließenden Beispiel 3.3.

2.2.4 Gesamtheit der Basisgrößen

In Abschnitt 2.2.2 wurden Basisgrößen systematisch definiert. Trotz der Systematik gehen die Basisgrößen keinesfalls eindeutig aus den Systemgleichungen hervor. Vielmehr gibt es zu jedem System eine Fülle möglicher Basisgrößen, die sich wie folgt ergibt. Bei der Einführung der Basisgrößen in den Gleichungen (2.13) ist es nicht wesentlich, dass L in der Hermiteschen Normalform vorliegt. Wichtig ist nur, dass die Polynommatrix L unimodular ist und neben ihr eine $(r \times m)$ -Nullmatrix steht. Hat man also in Gl. (2.6) eine Hermitesche Normalform vorliegen, so kann man diese Gleichung mit jeder Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} U_1^M & 0 \\ M & U_2^M \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_1^M \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, \quad U_2^M \in \mathbb{R}[s]^{m \times m} \quad \text{und} \quad M \in \mathbb{R}[s]^{m \times r} \quad (2.20)$$

multiplizieren, wobei U_1^M und U_2^M unimodular sein müssen, denn

$$(A_P \quad B_P) \underbrace{\begin{pmatrix} U_{11}^R & U_{12}^R \\ U_{21}^R & U_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^M & 0 \\ M & U_2^M \end{pmatrix}}_{:=\tilde{U}^R} = (L \quad 0) \begin{pmatrix} U_1^M & 0 \\ M & U_2^M \end{pmatrix} = (LU_1^M \quad 0) .$$

Dadurch erhält man eine alternative unimodulare Matrix \tilde{U}^R , mit ihrer ebenfalls unimodularen Inversen

$$\tilde{V}^R = (\tilde{U}^R)^{-1} = \begin{pmatrix} (U_1^M)^{-1} & 0 \\ -(U_2^M)^{-1}M(U_1^M)^{-1} & (U_2^M)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^R & V_{12}^R \\ V_{21}^R & V_{22}^R \end{pmatrix} .$$

Verwendet man diese beiden Matrizen, um nach Gl. (2.12) alternative Basisgrößen $\tilde{\xi}$ zu definieren, so erscheint Gl. (2.14) als

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R(\frac{d}{dt}) \\ U_{22}^R(\frac{d}{dt}) \end{pmatrix} U_2^M(\frac{d}{dt}) \cdot \tilde{\xi}_b ,$$

und die Umrechnung von den Systemgrößen in die Basisgrößen ist gegeben durch (siehe Gl. 2.12)

$$\tilde{\xi}_b = \begin{pmatrix} -(U_2^M)^{-1}M(U_1^M)^{-1} & (U_2^M)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^R & V_{12}^R \\ V_{21}^R & V_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} .$$

Die wesentlichen Zusammenhänge zwischen den Systemgrößen und den Basisgrößen können also durch die Matrizen U_1^M , U_2^M und M gezielt gestaltet werden, was bei der Trajektorienplanung sehr nützlich sein kann.

In dem hier diskutierten Fall der Linksteilerfremdheit von A_P und B_P kann man U_1^M ohne Beschränkung der Gestaltungsmöglichkeiten als Einheitsmatrix wählen. Darüber hinaus kann man natürlich auch gewissermaßen von hinten beginnen und

$$\tilde{V}^R = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \tilde{M} & \tilde{U}_2^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^R & V_{12}^R \\ V_{21}^R & V_{22}^R \end{pmatrix}$$

definieren, um die Beziehung

$$\tilde{\xi}_b = \begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{U}_2^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^R & V_{12}^R \\ V_{21}^R & V_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

leichter manipulieren zu können. Dazu gehört

$$\tilde{U}^R = (\tilde{V}^R)^{-1} = \begin{pmatrix} U_{11}^R & U_{12}^R \\ U_{21}^R & U_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -(\tilde{U}_2^M)^{-1}\tilde{M} & (\tilde{U}_2^M)^{-1} \end{pmatrix},$$

welches der Form (2.20) genügt.

Beispiel 2.4 Wählt man für die in Beispiel 2.2 eingeführten Basisgrößen

$$M = \tilde{M} = 0^{2 \times 3}, \quad U_1^M = I_3 \quad \text{und} \quad \tilde{U}_2^M = \begin{pmatrix} g & -l_1 g \\ 0 & g \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad U_2^M = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & \frac{l_1}{g} \\ 0 & \frac{1}{g} \end{pmatrix},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{b1} &= w_0 - a_1 \varphi_1 - l_2 \varphi_2 \\ \tilde{\xi}_{b2} &= \varphi_1. \end{aligned}$$

Damit sind beide Basisgrößen physikalisch interpretierbar. Die zweite ist der Winkel des ersten Pendelkörpers, die erste Basisgröße ist die x -Position der zweiten Punktmasse des Punktmaschenmodells. Aus diesen Basisgrößen ergeben sich die Systemgrößen wie folgt:

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{l_2}{g} \ddot{\xi}_{b1} + \ddot{\xi}_{b1} + a_1 \ddot{\xi}_{b2} \\ \varphi_1 &= \ddot{\xi}_{b2} \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{g} \ddot{\xi}_{b1} \\ f &= -\frac{(m_0+m_1)l_2}{g} \ddot{\xi}_{b1} + (m_0+m_1+m_2) \ddot{\xi}_{b1} + ((m_0+m_1)a_1 - l_1 m_1) \ddot{\xi}_{b2} \\ d_1 &= \frac{l_2 l_1 m_1}{g} \ddot{\xi}_{b1} - (l_1 m_1 + a_1 m_2) \ddot{\xi}_{b1} + l_1 m_1 (l_1 - a_1) \ddot{\xi}_{b2} - g(l_1 m_1 + a_1 m_2) \ddot{\xi}_{b2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind gegenüber Beispiel 2.2 kürzer. ■

2.3 Gezielte Konstruktion von Basisgrößen

Im Abschnitt 2.2.2 ergaben sich die Basisgrößen eher zufällig, je nachdem wie die Überführung in die Hermitesche Normalform berechnet wurde. Oft besteht jedoch der Wunsch, bestimmte Größen, beispielsweise Ausgangsgrößen, als Basisgrößen zu erhalten. Im vorangegangenen Abschnitt 2.2.4 wurde die Gesamtheit der möglichen Basisgrößen charakterisiert. Jedoch gestaltet sich die praktische Nutzung von Gleichung (2.21) unter Umständen schwierig. Beispielsweise entstehen durch Ansetzen von \widetilde{M} unerwünscht hohe Grade, die dann durch Koeffizientenvergleich wieder reduziert werden müssen. Auch ist die Unimodularität von \widetilde{U}_2^M mitunter schwer zu gewährleisten.

Wenn das Paar (A_P, B_P) linksteilerfremd ist, so ist der Linksteiler L die Einheitsmatrix. Damit folgt aus den Gleichungen (2.7) bzw. (2.8), dass $V_{11}^R = A_P$ und $V_{12}^R = B_P$ ist. Die Matrix V^R lautet damit

$$V^R = \begin{pmatrix} A_P & B_P \\ V_{21}^R & V_{22}^R \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Wenn man diese Matrix konstruiert hat, so kann man den Weg in Abschnitt 2.2.1 „rückwärts“ gehen. Man erhält dann durch Inversion $U^R = V^{R-1}$ und mithin alle benötigten Matrizen zur Definition von Basisgrößen. Die Aufgabe lautet also nun: Finde zu dem gegebenen Paar $(A_P, B_P) \in \mathbb{R}[s]^{r \times (r+m)}$ ein Paar $(V_{21}^R, V_{22}^R) \in \mathbb{R}[s]^{m \times (r+m)}$, so dass die Matrix V^R laut Gl. (2.22) unimodular ist. In [RL07] findet sich ein Weg, die Matrix zu konstruieren. Ein ähnlicher Weg wird auch in [RL06], Abschnitt 4.3, beschrieben. Beide Methoden nutzen folgenden Satz aus [Mac33], Seite 31:

Satz 2.2 *Gegeben sei eine $r \times (r+m)$ -Matrix mit Elementen aus einem Hauptidealring, und ggT sei der größte gemeinsame Teiler ihrer $r \times r$ -Minoren. Dann kann man der gegebenen Matrix m Zeilen derart hinzufügen, dass die resultierende quadratische Matrix die Determinante ggT hat.*

Für diesen Fall ist der Hauptidealring $\mathbb{R}[s]$ und ggT = 1. Haben die r -Minoren von (A_P, B_P) keinen gemeinsamen Teiler, so bedeutet das, dass der Rang für alle $s \in \mathbb{C}$ voll ist, das Paar (A_P, B_P) also linksteilerfremd. Hat eine quadratische Matrix die Determinante 1, so ist sie unimodular. Der Satz besagt also, dass man ein linksteilerfremdes Paar (A_P, B_P) immer zu einer unimodularen Matrix ergänzen kann. Daraus folgt sofort, dass man zu einem linksteilerfremden Paar $(A_P, B_P) \in \mathbb{R}[s]^{r \times (r+m)}$ immer eine weitere Zeile $\mathbf{z}^T \in \mathbb{R}[s]^{1 \times (r+m)}$ hinzufügen kann, so dass gilt

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) \\ \mathbf{z}^T(s) \end{pmatrix} = r + 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (2.23)$$

Auf diese Weise können sukzessive Zeilen ergänzt werden, bis man die unimodulare Matrix V^R erhalten hat.

Möchte man also eine bestimmte Größe $y = \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$ zur Basisgröße erklären, so prüfe man, ob Gleichung (2.23) gilt. Ist das der Fall, kann man fortsetzen und die nächste Basisgröße formulieren. Spätestens bei der letzten Zeile werden die Wahlmöglichkeiten allerdings erheblich eingeschränkt sein. Hier wird man in aller Regel die Unimodularität durch einen Koeffizientenvergleich sicherstellen müssen, der die verbleibende Zeile und damit die Basisgröße bis auf einen skalaren Faktor eindeutig hervorbringt.

Beispiel 2.5 In Beispiel 2.4 bzw. Beispiel 2.2 sei die Position des Wagens $w_0(t)$ von besonderer Bedeutung, desgleichen ein Punkt $y(t) = w_0(t) - a_1\varphi_1(t) - l_y\varphi_2(t)$ in der Verlängerung der Gradn vom Gelenk zum Schwerpunkt des zweiten Körpers, vielleicht weil dort ein Greifer montiert ist. Um die Frage zu klären, ob w_0 Basisgröße sein kann, muss man prüfen ob

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2)s^2 & -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & -l_2m_2s^2 & -1 & 0 \\ -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2)s^2-g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1l_2m_2s^2 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1s^2 & l_2s^2-g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

gilt. Der Minor der Spalten 1, 2, 4 und 5 ist $-a_1s^2$, die Matrix hat mithin für alle $s \neq 0$ vollen Rang. Setzt man $s = 0$ ein, so erhält man

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -g(l_1m_1+a_1m_2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Man kann also $\xi_{b1} = w_0$ wählen.

Als zweites soll geklärt werden, ob

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -l_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Basisgröße sein kann. Die 5 Hauptminoren der Matrix

$$M(s) = \begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2)s^2 & -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & -l_2m_2s^2 & -1 & 0 \\ -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2)s^2-g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1l_2m_2s^2 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1s^2 & l_2s^2-g & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & -l_y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind

$$M_{1\dots 4}^{1,2,3,4} = ((l_2 - l_y)s^2 - g) (l_1m_1(l_1 - a_1)s^2 - g(m_1l_1 + a_1m_2))$$

$$M_{1\dots 4}^{1,2,3,5} = ((l_2 - l_y)s^2 - g) (m_1l_1 - a_1(m_0 + m_1))s^2$$

$$M_{1\dots 4}^{1,2,4,5} = 0$$

$$M_{1\dots 4}^{1,3,4,5} = (l_y - l_2)s^2 + g$$

$$M_{1\dots 4}^{2,3,4,5} = a_1 ((l_2 - l_y)s^2 - g) .$$

Diese Minoren sind offensichtlich für $s = \pm \sqrt{\frac{g}{l_2 - l_y}}$ sämtlich gleich Null. Daher kann y nicht als Basisgröße gewählt werden. Lediglich für $l_y = l_2$ wird der gemeinsame Faktor eine Konstante. Weil in diesem Fall die Matrizen $M_{1\dots 4}^{1,3,4,5}$ und $M_{1\dots 4}^{2,3,4,5}$ unimodular sind, kann (unter anderem) irgendeine Kombination

$$\xi_{b2} = k_0w_0 + k_1\varphi_1 \quad \text{mit} \quad k_0, k_1 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad k_1 + k_0a_1 \neq 0$$

als zweite Basisgröße gewählt werden, z. B.:

$$\xi_b = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -l_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

was

$$V^R(s) = \begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2)s^2 & -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & -l_2m_2s^2 & -1 & 0 \\ -(l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2)s^2-g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1l_2m_2s^2 & 0 & -1 \\ -s^2 & a_1s^2 & l_2s^2-g & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & -l_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$U_{12}^R(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{l_2}{a_1g}s^2 - \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ -\frac{1}{g}s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{22}^R(s) = \begin{pmatrix} -\frac{m_1l_1l_2}{a_1g}s^4 + \left(m_2 + \frac{m_1l_1}{a_1}\right)s^2 & \left(m_1+m_0 - \frac{m_1l_1}{a_1}\right)s^2 \\ \frac{m_1l_2l_1^2}{ga_1}s^4 - \left(m_2(a_1+l_2) + \frac{l_1m_1(l_1+l_2)}{a_1}\right)s^2 + g\left(m_2 + \frac{m_1l_1}{a_1}\right) & l_1m_1\left(\frac{l_1}{a_1} - 1\right)s^2 - g\left(m_2 + \frac{m_1l_1}{a_1}\right) \end{pmatrix}$$

zur Folge hat. ■

3 Planung von Trajektorien

Da die Basisgrößen frei vorgebar sind und aus ihnen die übrigen Systemgrößen allein durch Differenziation folgen, lassen sie sich ausgezeichnet zur Planung von Trajektorien verwenden.

3.1 Planung mithilfe von Polynomen

Eine Möglichkeit ist, geeignete hinreichend oft stetig differenzierbare Ansatzfunktionen für die Basisgrößen zu wählen. Aus denen berechnet man die interessierenden Systemgrößen und kann danach durch freies Manipulieren der Basisgrößen Forderungen an die interessierenden Größen erfüllen.

Grundsätzlich sind viele Ansatzfunktionen möglich. Aus folgenden Gründen sind Polynome in t eine naheliegende Klasse von Ansatzfunktionen.

- Beim Differenzieren und anschließenden Addieren bleiben Polynome in den Koeffizienten linear.
- Nach dem Approximationssatz von *Weierstrass* kann jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall beliebig genau durch Polynome angenähert werden [BSMM00], Abschnitt 12.2.1.4. Es lässt sich also prinzipiell jeder gewünschte Kurvenverlauf erzeugen.
- Polynome sind mit dem Horner Schema numerisch äußerst schnell auszuwerten. Auch die Ableitungen ergeben sich mit geringem Zusatzaufwand.

Dem steht entgegen, dass Polynome immer nur endlich oft differenzierbar sind. Bei LTI-Systemen mit konzentrierten Parametern stellt das im Allgemeinen kein Problem dar. Eine Alternative, unendlich oft stetig differenzierbare Ansatzfunktionen zu gewinnen, findet man in [RWW03].

Das Problem, Polynome zu finden, die an vorgegebenen Stützstellen vorgegebene Funktionswerte annehmen und deren Ableitungen darüber hinaus ebenfalls vorgegebene Werte annehmen, ist in der Mathematik seit Langem als *Hermite*-Interpolation bekannt [Wer92]. Die Trajektorienplanung stellt darin einen Sonderfall dar, nämlich wenige – in der Regel lediglich zwei – Stützstellen, dafür aber zahlreiche Ableitungen. Üblicherweise sind an beiden Stützstellen gleich viele zu berücksichtigen. Da hier keine Ausgangsfunktion approximiert wird, erübrigt sich eine Diskussion des Interpolationsfehlers.

Aus Satz 1.5 in [Wer92] geht hervor, dass bei, grob gesprochen, $(n + 1)$ Bedingungen (Funktions- oder Ableitungswerte an unterschiedlichen Stützstellen) genau ein Polynom vom Grad n alle Bedingungen erfüllt. Jedoch können die bei der Berechnung entstehenden linearen Gleichungssysteme mit $(n + 1)$ Gleichungen, insbesondere bei hohen Ordnungen n der Ansatzpolynome und langen Planungszeiträumen, schlecht konditioniert sein (siehe

Anhang C). Deshalb werden in den folgenden Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 Möglichkeiten diskutiert, wie man im Fall des Überganges zwischen Ruhelagen große Gleichungssysteme vermeiden kann. In Abschnitt 3.1.3 wird die symbolische Lösung des Gleichungssystems angegeben, um die numerische Matrizeninversion zu vermeiden.

3.1.1 Übergänge zwischen Ruhelagen

Die Ruhelagen sind dadurch gekennzeichnet, dass sämtliche Ableitungen der Systemgrößen verschwinden. Das ist genau dann der Fall, wenn sämtliche Ableitungen der Basisgrößen verschwinden, denn gäbe es ein $\xi_b \neq \text{const}$, das zu $\mathbf{x} = \text{const}$ und $\mathbf{u} = \text{const}$ führt, so wären $U_{12}^R \left(\frac{d}{dt}\right)$ und $U_{22}^R \left(\frac{d}{dt}\right)$ in Gl. (2.14) nicht rechtsteilerfremd. Dabei gilt zwischen den Werten in Ruhelagen mit Gl. (2.14) und Gl. (2.1b) folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\text{ss}} \\ \mathbf{u}^{\text{ss}} \\ \mathbf{y}^{\text{ss}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R(0) \\ U_{22}^R(0) \\ C_P(0)U_{12}^R(0) + D_P(0)U_{22}^R(0) \end{pmatrix} \xi_b^{\text{ss}}. \quad (3.1)$$

Diese Matrixgleichung (3.1) ist überbestimmt, denn ξ und \mathbf{u} haben per definitionem die selbe Anzahl an Komponenten. Man kann also niemals beliebige Forderungen an $(\mathbf{x}^{\text{ss}} \ \mathbf{u}^{\text{ss}} \ \mathbf{y}^{\text{ss}})^T$ stellen. Es muss sichergestellt werden, dass

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} U_{12}^R(0) \\ U_{22}^R(0) \\ C_P(0)U_{12}^R(0) + D_P(0)U_{22}^R(0) \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} U_{12}^R(0) & \mathbf{x}^{\text{ss}} \\ U_{22}^R(0) & \mathbf{u}^{\text{ss}} \\ C_P(0)U_{12}^R(0) + D_P(0)U_{22}^R(0) & \mathbf{y}^{\text{ss}} \end{pmatrix}$$

gilt.

Der Anfangswert $\xi_b(0)$ und der Endwert $\xi_b(T)$ sind also bekannt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt und zum Zeitpunkt $t = T$ endet. Die Übergangszeit T sei ebenfalls a priori festgelegt. Da die Basisgrößen ξ_b unabhängig festgelegt werden, kann man elementweise vorgehen.

Zur Festlegung des Verlaufs der i -ten Basisgröße ξ_b^i sucht man zunächst in der i -ten Spalte der Matrix in Gl. (3.1) nach der höchsten Potenz k_U^i . Da im Allgemeinen die Systemgrößen stetig sein sollen, müssen am Anfangs- und Endpunkt k_U^i Ableitungen¹ Null sein. Man setzt für die erste Ableitung der Basisgröße $\xi_b^i(t)$ ein Polynom

$$\left(\frac{d}{dt}\right) P_b^i(t) = c_0^i t^{k_U^i} (t - T)^{k_U^i} = c_0^i \sum_{\kappa=0}^{k_U^i} \binom{k_U^i}{\kappa} (-T)^\kappa t^{(2k_U^i - \kappa)} \quad (3.2)$$

an. Damit sind die Forderungen an die Ableitungen erfüllt. Die Konstante c_0^i bleibt zunächst offen. Die Basisgröße ergibt sich durch Integration

$$P_b^i(t) = c_1^i + c_0^i \cdot \sum_{\kappa=0}^{k_U^i} \binom{k_U^i}{\kappa} \frac{(-T)^\kappa}{2k_U^i - \kappa + 1} t^{(2k_U^i - \kappa + 1)}. \quad (3.3)$$

¹Falls die entsprechenden Größen sich sprunghaft ändern können, genügen auch $(k_U^i - 1)$ Ableitungen.

Mit den beiden Konstanten c_0^i und c_1^i wird das Polynom an die zwei verbleibenden Randbedingungen $\xi_b^i(0)$ und $\xi_b^i(T)$ angepasst:

$$c_1^i = \xi_b^i(0) \quad \text{und} \quad c_0^i = \frac{\xi_b^i(T) - \xi_b^i(0)}{T^{(2k_U^i+1)} \sum_{\kappa=0}^{k_U^i} \binom{k_U^i}{\kappa} \frac{(-1)^\kappa}{2^{k_U^i-\kappa+1}}} . \quad (3.4)$$

Beispiel 3.1 Es soll das aufrecht stehende verschiebliche Zweifachpendel aus Beispiel 2.1 verwendet werden, mit dem Unterschied, dass die Stellgröße d_1 weggelassen wird. Damit lauten die Systemgleichungen

$$\begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -(l_1m_1+a_1m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -l_2m_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 \\ -(l_1m_1+a_1m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1l_2m_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \\ -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & l_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ F \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

und die Matrizen U_{12}^R und U_{22}^R erhält man aus Gl. (2.15)

$$U_{12}^R = -A_{P \text{ adj}} \mathbf{b}_P = \begin{pmatrix} l_1^2m_1l_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - g(l_1m_1(l_1+l_2)+a_1m_2(a_1+l_2)) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + g^2(a_1m_2+l_1m_1) \\ l_1m_1l_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - g(l_1m_1+a_1m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ l_1m_1(l_1-a_1) \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - g(l_1m_1+a_1m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$U_{22}^R = \det(A_P) = l_1^2l_2m_0m_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^6 - g \left[a_1(a_1+a_2)(m_0+m_1)m_2 + l_1^2m_1(m_0+m_2) + l_1m_1(l_2(m_0+m_2) - 2a_1m_2) \right] \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + g^2(m_0+m_1+m_2)(l_1m_1+a_1m_2) \left(\frac{d}{dt}\right)^2$$

Die Aufgabe sei, das aufrecht stehende Pendel um einen Betrag Δw_0 in der Zeit T zu verrücken. Sucht man die höchste Potenz, so stößt man in U_{22}^R auf $k_U^i = 6$. Aus Gl. (3.1)

$$\begin{pmatrix} w_0^{\text{ss}} \\ \varphi_1^{\text{ss}} \\ \varphi_2^{\text{ss}} \\ F^{\text{ss}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^2(a_1m_2+l_1m_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_b^{\text{ss}}$$

schließt man auf

$$\xi_b(0) = 0 \quad \text{und} \quad \xi_b(T) = \frac{\Delta w_0}{g^2(a_1m_2+l_1m_1)}$$

$$\text{und damit auf} \quad c_1^i = 0 \quad \text{und} \quad c_0^i = \frac{12012 \Delta w_0}{g^2(a_1m_2+l_1m_1)T^{13}} .$$

Der Verlauf der Basisgröße ist damit gegeben durch:

$$\xi_b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{12012 \Delta w_0}{g^2(a_1m_2+l_1m_1)T^{13}} \left(\frac{1}{13}t^6 - \frac{T}{2}t^5 + \frac{15T^2}{11}t^4 - 2T^3t^3 + \frac{5T^4}{3}t^2 - \frac{3T^5}{4}t + \frac{T^6}{7} \right) t^7 & \text{für } 0 < t < T \\ \frac{\Delta w_0}{g^2(a_1m_2+l_1m_1)} & t \geq T . \end{cases}$$

Aus diesem Verlauf lassen sich mit Gl. (2.14) sämtliche Systemgrößen, insbesondere die erforderliche Stellgröße $f(t)$, berechnen. Das Ergebnis ist für die Werte

g	a_1	l_1	l_2	m_0	m_1	m_2	Δw_0	T
10	0.25	0.2	0.4	0.25	0.1	0.2	1	2

in Bild 3.1 graphisch dargestellt. Zur Veranschaulichung der Bewegung findet sich ein kurzer

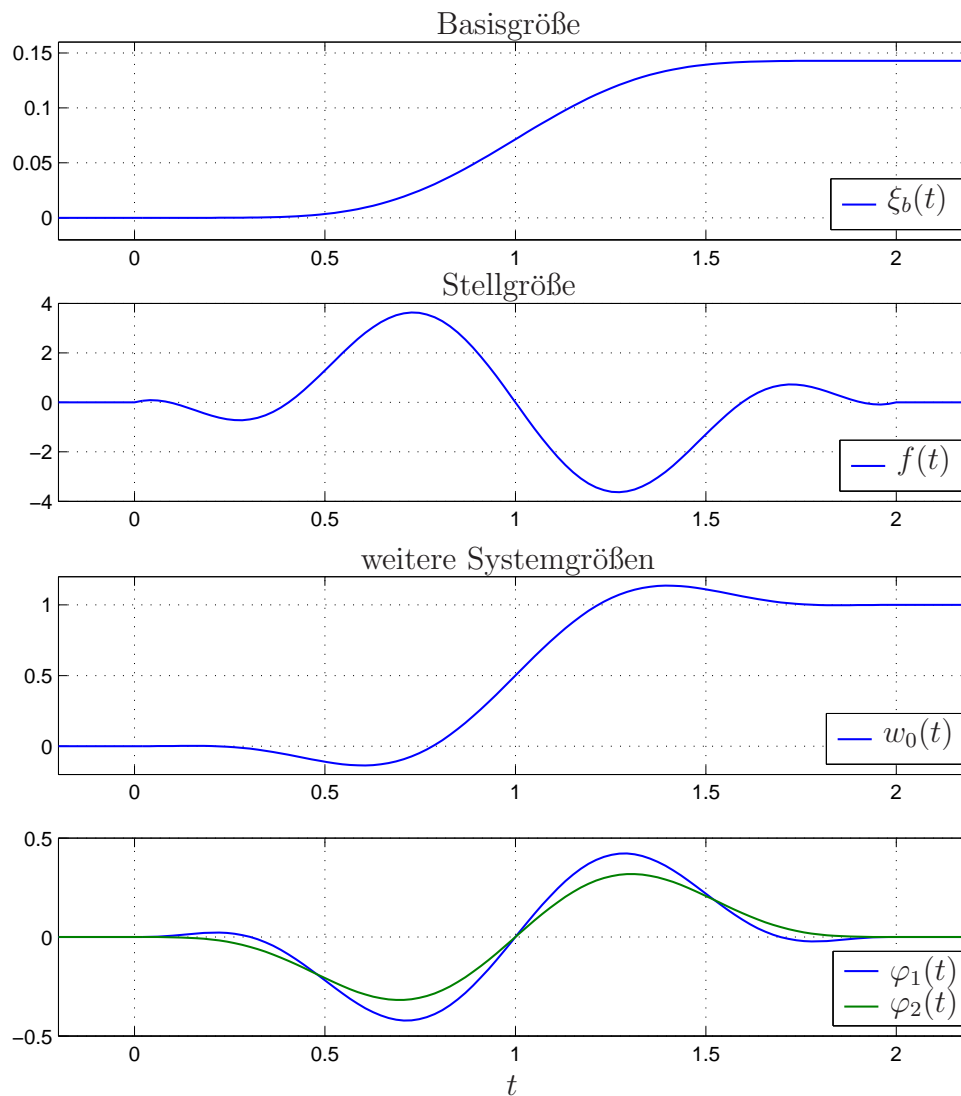


Bild 3.1: Darstellung des Ergebnisses von Beispiel 3.1

Animationsfilm in Bild 3.2. ■

3.1.2 Übergänge zwischen Ruhelagen unter Berücksichtigung weiterer Bedingungen

Sollen zusätzlich zu den Anfangs- und Endwerten n_F weitere Bedingungen der Art

$$\xi_b(t_\nu) \stackrel{!}{=} \gamma_\nu, \quad x(t_\nu) \stackrel{!}{=} \gamma_\nu, \quad y(t_\nu) \stackrel{!}{=} \gamma_\nu \quad \text{oder} \quad u(t_\nu) \stackrel{!}{=} \gamma_\nu \quad \text{mit} \quad \nu = 1 \dots n_F$$

Bild 3.2: Animationsfilm der Planung von Beispiel 3.1

erfüllt werden, so kann das Vorgehen aus Abschnitt 3.1.1 wie folgt ergänzt werden. Da sämtliche Systemgrößen durch die Basisgrößen ξ_b ausgedrückt werden können, kann man sämtliche Forderungen als Forderungen an die Basisgrößen formulieren:

$$\gamma \stackrel{!}{=} C_U \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_b(t) \Big|_{t=t_\bullet} \quad \text{mit} \quad C_U \in \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_F \times m} . \quad (3.5)$$

Darin wird die Matrix $C_U \left(\frac{d}{dt} \right)$ zusammengesetzt aus Zeilen von U_{22}^R bzw. U_{12}^R für Forderungen an \mathbf{x} oder \mathbf{u} , aus Zeilen von $C_P \cdot U_{12}^R + D_P \cdot U_{22}^R$ für Forderungen an die Ausgangsgrößen \mathbf{y} oder aus Einheitsvektoren \mathbf{e}^T für Forderungen an die Basisgrößen. Das Symbol $|_{t=t_\bullet}$ bedeutet, dass zunächst die Ableitung durchzuführen, und danach in der ν -ten Zeile $t = t_\nu$ zu setzen ist.

Man verschafft sich nun n_F weitere freie Parameter, indem man zu den in Abschnitt 3.1.1 geplanten Trajektorien die Polynome

$$P^i = \left(\sum_{\lambda=1}^{\ell_i} c_\lambda^i t^\lambda \right) t^{k_U^i} (t - T)^{(k_U^i+1)} \quad \text{mit} \quad i = 1 \dots m \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^m \ell_\mu = n_F$$

addiert. Die Koeffizienten c_λ^i können dann beliebig festgelegt werden, ohne die im vorigen Abschnitt 3.1.1 festgelegten Anfangs- und Endwerte zu verändern. Wie die Koeffizienten auf die einzelnen Ansatzpolynome $P^i(t)$ zu verteilen sind, bleibt offen. In Beispielrechnungen hat es sich als günstig erwiesen, die Koeffizienten etwa gleichmäßig zu verteilen, wobei die Basisgrößen, die wesentlich auf die geforderten Größe γ Einfluss haben, mehr Koeffizienten bekommen sollten. Damit lautet das Ansatzpolynom für die i -te Basisgröße ξ_b^i jetzt

$$P_\xi^i(t) = \sum_{\lambda=1}^{\ell_i} c_\lambda^i \sum_{\kappa=0}^{k_U^i+1} \binom{k_U^i+1}{\kappa} (-T)^\kappa t^{(2k_U^i+1-\kappa+\lambda)} + P_b^i(t)$$

mit $P_b^i(t)$ aus Gl. (3.3). Die Polynome werden in die Forderung (3.5) eingesetzt, wobei die Matrix $C_U \left(\frac{d}{dt} \right)$ in der Form $C_U \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu} \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu$ dargestellt wird. Ferner soll ein

hochgestelltes (\bullet, i) die i -te Spalte einer Matrix anzeigen. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu} \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu \left(\begin{array}{c} P_\xi^1(t) \\ \vdots \\ P_\xi^m(t) \end{array} \right) \Big|_{t=t_\bullet} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu}^{(\bullet, i)} \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu P_\xi^i(t) \Big|_{t=t_\bullet} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu}^{(\bullet, i)} \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu \left(\sum_{\lambda=1}^{\ell_i} c_\lambda^i \sum_{\kappa=0}^{k_U^i+1} \binom{k_U^i+1}{\kappa} (-T)^\kappa t^{(2k_U^i+1-\kappa+\lambda)} + P_b^i(t) \right) \Big|_{t=t_\bullet} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu}^{(\bullet, i)} \left(\sum_{\lambda=1}^{\ell_i} c_\lambda^i \sum_{\kappa=0}^{k_U^i+1} \binom{k_U^i+1}{\kappa} (-T)^\kappa \prod_{\iota=0}^{\mu-1} (2k_U^i+1-\kappa+\lambda-\iota) t^{(2k_U^i+1-\kappa+\lambda-\mu)} + \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu P_b^i \right) \Big|_{t=t_\bullet}.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist das Gleichungssystem in den Koeffizienten c_λ^i linear. Deshalb kann man es in Matrizenform schreiben:

$$\gamma - \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu}^{(\bullet, i)} \left(\frac{d}{dt} \right)^\mu P_b^i(t) \Big|_{t=t_\bullet} = \gamma - C_U \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\begin{array}{c} P_b^1(t) \\ \vdots \\ P_b^m(t) \end{array} \right) \Big|_{t=t_\bullet} = \underbrace{(M_c^1, \dots, M_c^m)}_{M_c} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ \vdots \\ c_{\ell_m}^m \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

mit dem Element der ν -ten Zeile und λ -ten Spalte der i -ten Matrix $M_c^i \in \mathbb{R}^{n_F \times \ell_i}$

$$M_c^i(\nu, \lambda) = \sum_{\mu=0}^{k_{C_U}} C_{U\mu}^{(\nu, i)} \sum_{\kappa=0}^{k_U^i+1} \binom{k_U^i+1}{\kappa} (-T)^\kappa \prod_{\iota=0}^{\mu-1} (2k_U^i+1-\kappa+\lambda-\iota) t_\nu^{(2k_U^i+1-\kappa+\lambda-\mu)}.$$

Falls keine widersprüchlichen Forderungen gestellt wurden, ist die quadratische Matrix $M_c \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$ invertierbar, und man kann die Koeffizienten c_λ^i berechnen. Sollte die Matrix M_c schlecht konditioniert sein, so kann man das durch andere Wahl der Koeffizienten ℓ_i unter Umständen beheben. Auch kann eine Normierung der Zeit t auf die Übergangszeit T Abhilfe schaffen, siehe Gleichung (3.10). Es sei noch einmal betont, dass, obgleich die Forderungen im Prinzip beliebig sind, die Systemgleichungen der Dynamik nicht außer Kraft gesetzt werden. Stellt man daher Forderungen, die dem Systemverhalten deutlich zuwider laufen, so wird das Verfahren eine zwar mathematisch korrekte, aber technisch unbrauchbare Lösung liefern.

Beispiel 3.2 Als Beispiel diene das herabhängende verschiebliche Dreifachpendel auf einer waagerechten geraden Bahn. Das Pendel werde durch die Kraft f auf den Wagen und ein Drehmoment d_1 zwischen dem Wagen und dem ersten Pendelkörper gesteuert. An dem dritten Pendelkörper sei ein Punkt y auf der Verlängerung der Linie vom Gelenk zum Schwerpunkt, im Abstand l_y , von besonderem technischem Interesse². Zur besseren Übersicht soll von Anfang an mit numerischen Werten gerechnet werden. Die Modellierung der Pendelkörper habe folgende (normierte) Werte ergeben:

²Man könnte sich einen Greifer vorstellen, der an der Spitze des symmetrischen Körpers befestigt ist.

g	a_1	l_1	ψ_1	a_2	l_2	ψ_2	l_3	l_y	m_0	m_1	m_2	m_3	f^{ss}	d_1^{ss}
10	0.25	0.2	0.125π	0.375	0.4	0	0.6	0.8	0.25	0.25	0.1	0.5	0	0

Die Ruhelagen ergeben sich damit aus Gl. (B.15) zu

$$w_0^{\text{ss}} = \text{const}, \quad \varphi_1^{\text{ss}} = -0.030946 \pi, \quad \varphi_2^{\text{ss}} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_3^{\text{ss}} = 0.$$

Die linearisierte Bewegungsgleichung $H(\mathbf{q}^{\text{ss}})\ddot{\mathbf{q}} + A_0\mathbf{q} + B_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ lautet mit Gl. (B.10) und Gl. (B.17)

$$\begin{pmatrix} 1.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.1971 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.2275 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.3 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ 0.1971 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.0475 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.971 & 0.05661 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.07465 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 \\ 0.2275 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.05661 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.08631 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2.275 & 0.1125 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0.3 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.07465 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.1125 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.18 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ F \\ D_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(1 \quad 0.25 \quad 0.375 \quad 0.8) \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = Y.$$

Die Überführung in die Hermitesche Normalform liefert die Matrizen

$$U_{12}^R \left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0.000422 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.09794 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1 & -0.2488 \\ 0 & 1 \\ -0.001055 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \\ -4.396 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

und

$$U_{22}^R \left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0.000211 \left(\frac{d}{dt}\right)^6 + 0.05498 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 1.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.07658 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 2.018 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^6 + 0.006181 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.1971 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.001548 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.971 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass die Matrix U_{22}^R in der ersten Spalte den Grad 6, in der zweiten Spalte Grad 2 hat. Es wird angenommen, dass die Stellgrößen sich nahezu sprungförmig ändern können, daher wird $k_V^1 = 5$ und $k_V^2 = 1$ festgelegt. Ähnlich wie in Beispiel 3.1 soll im Zeitintervall $0 < t < 3$ das Pendel um $\Delta w_0 = 0.75$ verschoben werden und am Ende wieder zur Ruhe kommen. Dabei soll jedoch der Punkt y zum Zeitpunkt $t_1 = 1.3$ an der Stelle $y(t_1) = 0.2$ innehalten, also $y(t_1) = 0.2$, $\dot{y}(t_1) = 0$ und $\ddot{y}(t_1) = 0$. Darüber hinaus soll sich der Wagen dann bei $w_0(t_1) = 0.2$ befinden. Die Matrix C_U folgt daraus:

$$C_U = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.375 & 0.8 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.25 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.375 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.8 \left(\frac{d}{dt}\right) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.25 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.375 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.8 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_{12}^R =$$

$$\begin{pmatrix} -8.791 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.01956 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1 & 0.001181 \\ -8.791 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^5 - 0.01956 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.001181s \\ -8.791 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^6 - 0.01956 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.001181 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 0.000422 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.09794 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1 & -0.2488 \end{pmatrix}.$$

Aus Gl. (3.1)

$$\begin{pmatrix} w_0^{ss} \\ \varphi_1^{ss} \\ \varphi_2^{ss} \\ \varphi_3^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2488 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_b^{ss}$$

folgen $\boldsymbol{\xi}_b(0) = (0 \ 0)^T$ und $\boldsymbol{\xi}_b(3) = (0.75 \ 0)^T$ und damit $\boldsymbol{\gamma} = (0.2 \ 0 \ 0 \ 0.2)^T$. Weiter werden $\ell_1 = 3$ und $\ell_2 = 1$ festgelegt. Gleichung (3.6) stellt man damit wie folgt auf:

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2327 \\ 0.6653 \\ 0.6739 \\ 0.2959 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126.6 & 159.7 & 196.7 & 0.005766 \\ 158.2 & 352.4 & 634.1 & 0.002087 \\ -637.4 & -449.2 & 262.3 & -0.01006 \\ 68.36 & 110.9 & 193 & -1.215 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \\ c_1^2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung: $c_1^1 = 0.007774$, $c_2^1 = -0.008515$, $c_3^1 = 0.001742$ und $c_1^2 = 0.01592$.

Die weiteren Ergebnisse werden in Bild 3.3 graphisch dargestellt. Mit den Koeffizienten liegen die Verläufe der Basisgrößen fest. Aus ihnen werden dann die übrigen Systemgrößen berechnet. Man sieht, dass alle Forderungen erfüllt werden. ■

3.1.3 Übergänge von beliebigen Anfangswerten zu beliebigen Endwerten

Übergänge des Systems können nicht nur zwischen Ruhelagen stattfinden. Beispielsweise können sie in stationären Schwingungen enden oder von beliebigen Anfangswerten in die Ruhelage hineinführen. Auch wenn man Übergänge zwischen Ruhelagen stückweise plant, muss man Zwischenwerte ansteuern können.

Über die Gleichungen (2.14) und (2.1b) kann man (sinnvolle) Forderungen an beliebige Größen $\boldsymbol{\gamma}$ in Forderungen an Basisgrößen und ihre Ableitungen umrechnen. Dafür muss man aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R(\frac{d}{dt}) \\ U_{22}^R(\frac{d}{dt}) \\ C_P(\frac{d}{dt}) U_{12}^R(\frac{d}{dt}) + D_P(\frac{d}{dt}) U_{22}^R(\frac{d}{dt}) \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_b$$

die zu den interessierenden Größen $\boldsymbol{\gamma}$ gehörigen Zeilen herauslösen und wie im vorigen Abschnitt 3.1.2 in einer Matrix $C_U(\frac{d}{dt})$ versammeln³, so dass die Gleichung der Forderungen

$$\boldsymbol{\gamma}(t) \stackrel{!}{=} C_U(\frac{d}{dt}) \boldsymbol{\xi}(t) \tag{3.8}$$

entsteht. Aus dieser Gleichung gewinnt man eine algebraische, indem man die Matrix $C_U(\frac{d}{dt})$ in eine Zahlenmatrix R_{C_U} und ein Matrix $S_{C_U}(\frac{d}{dt})$ aufspaltet, die ausschließlich $(\frac{d}{dt})$ Potenzen enthält (vgl. Anhang A.2)

$$C_U(\frac{d}{dt}) = R_{C_U} \cdot S_{C_U}(\frac{d}{dt})$$

³Sollen Forderungen an Ableitungen formuliert werden, können die Zeilen auch mit $(\frac{d}{dt})$ multipliziert werden.

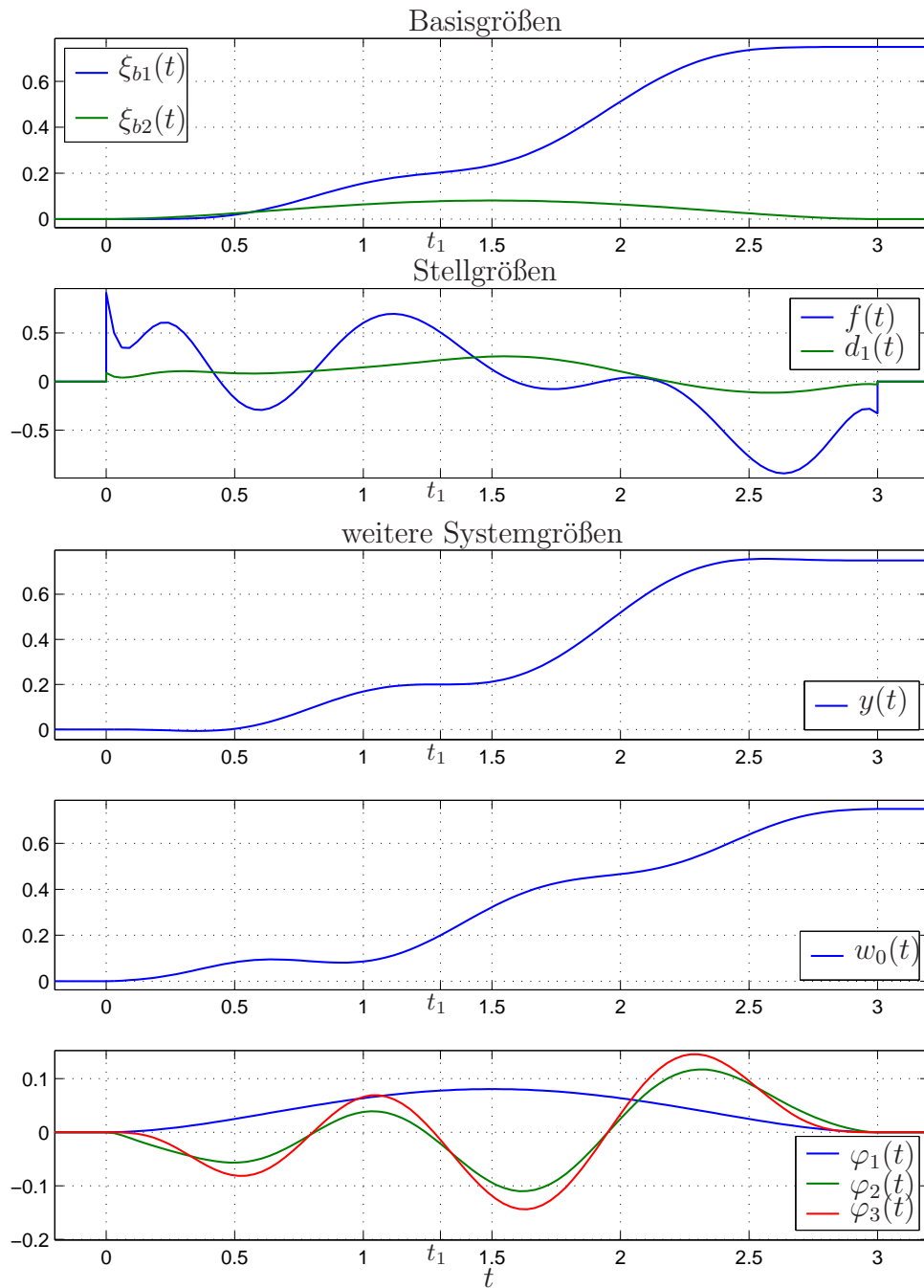


Bild 3.3: Darstellung des Ergebnisses von Beispiel 3.2

zerlegt und damit Gl. (3.8) neu schreibt

$$\gamma(t) \stackrel{!}{=} R_{C_V} \cdot S_{C_V} \left(\frac{d}{dt} \right) \xi(t) = R_{C_V} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

wobei man Nullspalten in R_{C_V} mit den zugehörigen ξ -Elementen natürlich streichen kann. Ein kurzes Beispiel soll die Vorgehensweise verdeutlichen.

Beispiel 3.3 Betrachtet wird noch einmal das System aus Beispiel 3.2. Die anzusteuern den Werte seien der Punkt y und \dot{y} und die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 sowie deren Ableitungen. Aus der Matrix U_{12}^R , Gl. (3.7), entnimmt man die Gleichung (3.8) zu

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.791 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.01956 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1 & 0.001181 \\ -8.791 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^5 - 0.01956 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.001181 \left(\frac{d}{dt}\right) \\ 0 & 1 \\ -0.001055 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \\ -4.396 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt}\right) \\ -0.001055 \left(\frac{d}{dt}\right)^5 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & 0 \\ -4.396 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^5 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

und daraus die Umrechnungsvorschrift (3.9)

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.01956 & 0 & -8.7912 \cdot 10^{-6} & 0 & 0.0011805 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.01956 & 0 & -8.7912 \cdot 10^{-6} & 0 & 0.0011805 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.0010549 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & -4.3956 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.0010549 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & -4.3956 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_1 \\ \dots \\ \xi_1 \\ \dots \\ \xi_1^{(5)} \\ \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix}.$$

■

In diesem Fall ist die Matrix R_{C_U} quadratisch und hat vollen Rang. Die anzusteuern den Werte lassen sich also ohne Einschränkungen festlegen und in Basisgrößen umrechnen. Das muss jedoch nicht immer der Fall sein. In jedem Fall ist bei der Festlegung der anzusteuern den Werte darauf zu achten, dass das Gleichungssystem (3.9) lösbar ist, mithin dass

$$\text{Rang } R_{C_U} = \text{Rang} (R_{C_U}, \gamma)$$

gilt. Mit anderen Worten: Zwangsbedingungen unter den Systemgrößen dürfen nicht außer Acht gelassen werden.

Es wird also ab jetzt gefordert, dass die Anfangs- und Endwerte der Basisgrößen und deren n Ableitungen festgelegte Werte annehmen:

$$\begin{pmatrix} \xi_b^{(n)T}(0) \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_b^{(n)T}(0) \\ \dot{\xi}_b^{(n)T}(0) \\ \xi_b^{(n)T}(0) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \Gamma_0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \xi_b^{(n)T}(T) \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_b^{(n)T}(T) \\ \dot{\xi}_b^{(n)T}(T) \\ \xi_b^{(n)T}(T) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \Gamma_T.$$

Da die Basisgrößen voneinander unabhängig sind, kann man elementweise, in diesem Fall spaltenweise, vorgehen und o. B. d. A.

$$\begin{pmatrix} \xi_b(0) \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_b(0) \\ \dot{\xi}_b(0) \\ \xi_b(0) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\gamma}_0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \xi_b(T) \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_b(T) \\ \dot{\xi}_b(T) \\ \xi_b(T) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\gamma}_T$$

fordern. Zur Vereinfachung der folgenden Schritte soll mit einer auf die Planungszeit T normierten Zeit τ gearbeitet werden:

$$T\tau = t, \quad dt = T d\tau \quad \Rightarrow \quad \xi_b(t) = \tilde{\xi}_b(\tau), \quad \frac{d^n}{dt^n} \xi(t) = \frac{1}{T^n} \frac{d^n}{d\tau^n} \tilde{\xi}_b(\tau). \quad (3.10)$$

Mit dieser Formel (3.10) werden auch die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\gamma}_0$ in $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0$ und die Endbedingungen $\boldsymbol{\gamma}_T$ in $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(1) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1$ umgerechnet. Wie in den vorangegangenen Abschnitten wählt man für die Basisgröße einen polynomialen Ansatz mit ausreichend freien Koeffizienten

$$\tilde{\xi}_b(\tau) = \sum_{\kappa=0}^{2n+1} c_\kappa \tau^\kappa$$

mit der ν -ten Ableitung

$$\frac{d^\nu}{d\tau^\nu} \tilde{\xi}_b(\tau) = \sum_{\kappa=\nu}^{2n+1} c_\kappa \left(\prod_{\lambda=0}^{\nu-1} (\kappa - \lambda) \right) \tau^{\kappa-\nu} \quad \text{für } \nu > 0.$$

Wertet man die Gleichung an dem Anfangswert $\tau = 0$ und dem Endwert $\tau = 1$ aus und löst nach den Koeffizienten \mathbf{c} auf, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & n! & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 2! & & \\ & & & & & & 1! & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline \prod_{\lambda=0}^{n-1} (2n+1-\lambda) & \prod_{\lambda=0}^{n-1} (2n-\lambda) & \cdots & \prod_{\lambda=0}^{n-1} (n+1-\lambda) & n! & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 2n(2n+1) & (2n-1)2n & \cdots & n(n+1) & n(n-1) \cdots 2! & & & \\ 2n+1 & 2n & \cdots & n+1 & n & \cdots & 2 & 1! \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_{2n+1} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{n+1} \\ c_n \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Unterteilt man den Koeffizientenvektor \mathbf{c} in zwei Teile

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= (c_{2n+1} \ c_{2n} \ \cdots \ c_{n+1})^T \\ \mathbf{c}_1 &= (c_n \ \cdots \ c_2 \ c_1 \ c_0)^T, \end{aligned}$$

so erkennt man folgende Struktur

$$\begin{pmatrix} 0 & M_f \\ M & M_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_0 \\ \tilde{\gamma}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

deren Lösung sich leicht errechnen lässt:

$$\mathbf{c}_1 = M_f^{-1} \tilde{\gamma}_0 \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{c}_0 = M^{-1} (\tilde{\gamma}_1 - M_D \mathbf{c}_1). \quad (3.13b)$$

Der erste Teil der Lösung (3.13a) lässt sich damit leicht angeben:

$$\begin{pmatrix} c_n \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = M_f^{-1} \tilde{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n!} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2!} & \\ & & & \frac{1}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \frac{T^n}{n!} \dot{\xi}_b(0) \\ \vdots \\ \frac{T^2}{2!} \ddot{\xi}_b(0) \\ \frac{T}{1!} \dot{\xi}_b(0) \\ \xi_b(0) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Für den zweiten Teil (3.13b) wird die Inverse M^{-1} benötigt. Die Matrix M lässt sich wie folgt zerlegen:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} n! & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2! & \\ & & & 1! \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{M_f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \binom{2n+1}{n} & \binom{2n}{n} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{2n+1}{2} & \binom{2n}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \binom{2n+1}{1} & \binom{2n}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{M_{b1}}.$$

Die Matrix M_{b1} lässt sich weiter zerlegen in

$$M_{b1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+1}{n} \\ & 1 & \cdots & \binom{n+1}{n-3} & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} \\ & & & & 1 & \binom{n+1}{1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{M_{b2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \binom{n}{n} \\ \binom{n}{n-1} & \binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \binom{n}{2} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{2}{2} \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{2}{1} & 1 \\ \binom{n}{0} & \binom{n-1}{0} & \cdots & \binom{2}{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_p}.$$

Beweis: Wendet man das Bildungsgesetz für Binomialkoeffizienten

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \quad (3.15)$$

Ein Beweis findet sich in [CV93], eine allgemeinere Einführung in [AT07] und den dort angegebenen Quellen. Die Inverse von M_{b2} ist

$$M_{b2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\binom{n+1}{1} & (-1)^2 \binom{n+2}{2} & \cdots & (-1)^n \binom{2n}{n} \\ & 1 & -\binom{n+1}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \\ & & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{2n-2}{n-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Betrachtet wird das Element in der j -ten Spalte und i -ten Zeile der Matrix $M_{b2} \cdot M_{b2}^{-1}$. Ist $i > j$ so ist dies Element offensichtlich null, da es keine Summanden verschieden von Null gibt. Ist $i = j$, so ist das Ergebnis $1 \cdot 1 = 1$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass das Ergebnis für $j > i$ ebenfalls Null ist. Es sei $k = j - i > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} M_{b2}(i, j) &= \sum_{\kappa=0}^k \binom{n+1}{k-\kappa} \binom{n+\kappa}{\kappa} (-1)^\kappa \\ &= \sum_{\kappa=0}^k \frac{(n+1)!}{(k-\kappa)! (n+1-k+\kappa)!} \frac{(n+\kappa)!}{\kappa! n!} (-1)^\kappa \\ &= \frac{n+1}{k!} \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \frac{(n+\kappa)!}{(n+1-k+\kappa)!} (-1)^\kappa \\ &= \frac{n+1}{k!} \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \binom{n+\kappa}{k-1} (k-1)! (-1)^\kappa \\ &= \frac{n+1}{k} \sum_{\kappa=0}^k \binom{k}{\kappa} \binom{n+\kappa}{k-1} (-1)^\kappa, \end{aligned} \tag{3.17}$$

mit dem Bildungsgesetz (3.15)

$$\begin{aligned} &= \frac{n+1}{k} \sum_{\kappa=0}^k \left[\binom{k-1}{\kappa} + \binom{k-1}{\kappa-1} \right] \binom{n+\kappa}{k-1} (-1)^\kappa \\ &= \frac{n+1}{k} \left[\sum_{\kappa=0}^{k-1} \binom{k-1}{\kappa} \binom{n+\kappa}{k-1} (-1)^\kappa + \sum_{\kappa=0}^{k-1} \binom{k-1}{\kappa} \binom{n+\kappa+1}{k-1} (-1)^{(\kappa+1)} \right] \\ &= \frac{n+1}{k} \sum_{\kappa=0}^{k-1} \binom{k-1}{\kappa} \left[\binom{n+\kappa}{k-1} - \binom{n+\kappa+1}{k-1} \right] (-1)^\kappa \end{aligned}$$

und wiederum mit dem Bildungsgesetz (3.15)

$$= \frac{n+1}{k} \sum_{\kappa=0}^{k-1} \binom{k-1}{\kappa} \binom{n+\kappa}{k-2} (-1)^\kappa.$$

Wie man sieht, lassen sich ab dem Zwischenergebnis (3.17) die folgenden vier Schritte beliebig oft wiederholen, wobei sich jedesmal die Zahl der Summanden um Eins erniedrigt, bis am Ende

$$M_{b2}(i, j) = \frac{n+1}{k} \sum_{\kappa=0}^1 \binom{1}{\kappa} \binom{n+\kappa}{0} (-1)^\kappa = \frac{n+1}{k} (1-1) = 0$$

da steht.

q. e. d.

Damit sind alle Teile von Gleichung (3.13) bekannt, und man kann mithilfe von Gl. (3.14) die Koeffizienten $c_{2n+1} \dots c_0$ angeben

$$\begin{pmatrix} c_n \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T^n}{n!} \xi_b(0) \\ \vdots \\ \xi_b(0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c_{2n+1} \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{M_p^{-1} M_{b2}^{-1}}_{M_{pb}^{-1}} \left[\begin{pmatrix} \frac{T^n}{n!} \xi_b(T) \\ \vdots \\ \xi_b(T) \end{pmatrix} - M_D \begin{pmatrix} c_n \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} \right].$$

Darin ist das Element in der $(i+1)$ -ten Zeile und $(j+1)$ -ten Spalte der Matrix M_{pb}^{-1} gegeben durch

$$M_{pb}^{-1}(i+1, j+1) = (-1)^{(j+i)} \sum_{\kappa=0}^{\min(i,j)} \binom{n+j-\kappa}{j-\kappa} \binom{n-\kappa}{n-i}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Matrix M_{pb}^{-1} weder von der Planungszeit T noch von den konkreten Randwerten abhängt und darüber hinaus nur ganze Zahlen enthält. Sie ist also im Voraus ohne Rundungsfehler berechenbar.

3.2 Planung optimaler Trajektorien

Im vorangegangenen Abschnitt 3.1 wurden a priori bestimmte Funktionen, in diesem Fall Polynome, für die Basisgrößen angesetzt und anschließend geeignet parametrisiert. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass der Raum der möglichen Funktionen von vornherein eingeschränkt wird. Deshalb soll im Folgenden ein Kostenfunktional als Integral über die Übergangszeit T formuliert werden. Aus der Forderung, dass dieses Kostenfunktional minimal sein soll, folgen Ansatzfunktionen für die Basisgrößen, die durch Parametrisierung an die Anfangs- und Endbedingungen angepasst werden. Da die Basisgrößen unabhängig variiert werden können, kommen die klassischen Methoden der Variationsrechnung ohne Nebenbedingungen zum Einsatz. Es wird ein quadratisches Kostenfunktional verwendet, weil das ein positives Funktional garantiert und die entstehende Eulersche Differentialgleichung linear ist.

Dieses Problem ist seit Längerem als „zeitkontinuierliches LQR-Problem mit endlichem Zeithorizont“ bekannt. Da diesem Problem die Zustandsdarstellung (2.2) zugrunde liegt, muss dort eine Variationsrechnung unter Nebenbedingungen, nämlich $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, angewandt werden, was letztlich die Lösung von Riccati-Gleichungen erfordert [Pap96]. Der Vorteil des hier verfolgten Ansatzes ist, dass durch die Formulierung mit den Basisgrößen keine gesonderten Nebenbedingungen einzuhalten sind. Allerdings erhält man dafür Kostenfunktionale mit hohen Ableitungen.

3.2.1 Formulierung eines quadratischen Kostenfunktional

In dem Kostenfunktional sollen Stellgrößen, Ausgangsgrößen und ggf. auch innere Systemgrößen enthalten sein. Dabei muss es sich nicht nur um die bei der Streckenbeschreibung verwendeten Größen handeln. Es kann beispielsweise auch die Ableitung einer Systemgröße aufgenommen werden, um das Verhalten „ruhig“ zu gestalten. Die im Kostenfunktional enthaltenen q Größen ξ_m seien also

$$\xi_m = W_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad W_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathbb{R} \left(\frac{d}{dt} \right)^{q \times (m+r)}. \quad (3.18)$$

Dabei kann auf explizite Aufnahme der Ausgangsgrößen y verzichtet werden, denn diese können in ξ_m aufgenommen werden, indem die Matrizen C_P und D_P , siehe Gl. (2.1b), in W_1 aufgenommen werden. Die Größen ξ_m sollen vorgegebenen Funktionsverläufen ξ_m^d im Intervall $0 \leq t \leq T$ möglichst genau folgen⁴. Daher wird folgendes quadratisches Kostenfunktional verwendet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \int_0^T [\xi_m(t) - \xi_m^d(t)]^T W_2 [\xi_m(t) - \xi_m^d(t)] dt \\ &= \int_0^T \left[\xi_m^T(t) W_2 \xi_m(t) + 2 \xi_m^T(t) W_2 \xi_m^d(t) + \xi_m^{dT}(t) W_2 \xi_m^d(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dieses Kostenfunktional soll minimiert werden. Dabei muss die Wichtungsmatrix $W_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ positiv definit sein. Häufig wird es sich um eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen handeln. Die Anfangs- und Endwerte $\xi_m(0)$ und $\xi_m(T)$ sollen gegeben sein und nicht variiert werden.

Um eine Variationsaufgabe ohne Nebenbedingungen zu erhalten, müssen die enthaltenen Funktionen unabhängig variiert werden können. Das ist bei den Größen ξ_m nicht der Fall, sondern nur bei den Basisgrößen. Das Kostenfunktional \mathfrak{G} muss also mit den Basisgrößen formuliert werden. Setzt man Gleichung (2.14) in Gleichung (3.18) ein, so erhält man

$$\xi_m = \underbrace{W_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \begin{pmatrix} U_{12}^R \left(\frac{d}{dt} \right) \\ U_{22}^R \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix}}_{W_U} \xi_b.$$

Setzt man das in Gl. (3.19) ein, so erscheint das Kostenfunktional in seiner abschließenden Form:

$$\mathfrak{G} = \int_0^T \left[\xi_b(t)^T W_U^T \left(\frac{\overleftarrow{}}{dt} \right) W_2 W_U \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_b(t) + 2 \xi_b(t)^T W_U^T \left(\frac{\overleftarrow{}}{dt} \right) W_2 \xi_m^d(t) + \xi_m^{dT}(t) W_2 \xi_m^d(t) \right] dt. \quad (3.20)$$

Das Symbol $\left(\frac{\overleftarrow{}}{dt} \right)$ soll deutlich machen, dass die Ableitungsoperatoren $\left(\frac{d}{dt} \right)$ in dieser Matrix nach links wirken. Dabei werden die Anfangs- und Endwerte $\xi_b(0)$ und $\xi_b(T)$ wie auch die der Größen ξ_m nicht variiert, sondern gehen fest aus der Aufgabenstellung hervor.

⁴Das hochgestellte d steht für angestrebten Signalverläufe (desiderata).

Genau genommen ist der Funktionenraum immer noch etwas eingeschränkt, nämlich auf Funktionen, die ausreichend glatt sind. Jedoch ist das keine wesentliche Einschränkung, da Glattheit zumeist auch aus physikalischen Gründen erforderlich ist.

3.2.2 Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung der Basisgrößen

Das Kostenfunktional (3.20) lässt sich als

$$\mathfrak{G}(\xi_b(t)) = \int_0^T L\left(\xi_b, \dot{\xi}_b, \dots, \overset{(k_W)}{\xi}_b\right) dt$$

darstellen mit

$$L = \xi_b(t)^T W_U^T\left(\frac{\tau}{dt}\right) W_2 W_U\left(\frac{d}{dt}\right) \xi_b(t) + 2 \xi_b(t)^T W_U^T\left(\frac{\tau}{dt}\right) W_2 \xi_m^d(t) + \xi_m^d(t)^T W_2 \xi_m^d(t). \quad (3.21)$$

Um festzustellen, welche Trajektorie $\xi_b(t)$ das Kostenfunktional minimiert, denkt man sich eine um Weniges verschiedene Vergleichstrajektorie $\xi'_b(t) = \xi_b(t) + \delta_b(t)$, wobei $\delta_b(t)$ frei wählbar ist. Wenn $\mathfrak{G}(\xi_b(t))$ minimal ist, so muss sich beim Vergleich mit $\mathfrak{G}(\xi'_b(t))$ für sämtliche benachbarten Trajektorien $\xi'_b(t)$ ein stationärer Wert einstellen. Man untersucht darum die Differenz des Funktionals von der optimalen Trajektorie und der benachbarten Vergleichstrajektorie:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}(\xi'_b(t)) - \mathfrak{G}(\xi_b(t)) \\ &= \int_0^T L\left(\xi_b + \delta_b(t), \dot{\xi}_b + \dot{\delta}_b(t), \dots, \overset{(k_W)}{\xi}_b + \overset{(k_W)}{\delta}_b(t)\right) - L\left(\xi_b, \dot{\xi}_b, \dots, \overset{(k_W)}{\xi}_b\right) dt \\ &= \int_0^T \left[\sum_{\kappa=0}^{k_W} \frac{\partial L}{\partial \overset{(\kappa)}{\xi}_b} \overset{(\kappa)}{\delta}_b + \text{T.h.O.} \right] dt \end{aligned}$$

und mit partieller Integration

$$= \int_0^T \left[\sum_{\kappa=0}^{k_W-1} \frac{\partial L}{\partial \overset{(\kappa)}{\xi}_b} \overset{(\kappa)}{\delta}_b - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \overset{(k_W)}{\xi}_b} \overset{(k_W-1)}{\delta}_b \right] dt + \frac{\partial L}{\partial \overset{(k_W)}{\xi}_b} \overset{(k_W-1)}{\delta}_b \Bigg|_0^T + \text{T.h.O.}$$

Da die Anfangs- und Endpunkte nicht variiert werden, gilt $\overset{(k_W-1)}{\delta}_b(0) = \overset{(k_W-1)}{\delta}_b(T) = 0$ und damit

$$\mathfrak{G}(\xi'_b(t)) - \mathfrak{G}(\xi_b(t)) = \int_0^T \left[\sum_{\kappa=0}^{k_W-2} \frac{\partial L}{\partial \overset{(\kappa)}{\xi}_b} \overset{(\kappa)}{\delta}_b + \left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(k_W-1)}{\xi}_b} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \overset{(k_W)}{\xi}_b} \right) \overset{(k_W-1)}{\delta}_b \right] dt + \text{T.h.O.}$$

Setzt man mit partieller Integration fort, so erhält man schließlich

$$\mathfrak{G}(\xi'_b(t)) - \mathfrak{G}(\xi_b(t)) = \int_0^T \left[\sum_{\kappa=0}^{k_W} \left(-\frac{d}{dt} \right)^\kappa \frac{\partial L}{\partial \overset{(\kappa)}{\xi}_b} \right] \delta_b dt + \text{T.h.O.}$$

Die Terme höherer Ordnung können weggelassen werden, weil nur kleine Variationen δ_b um die optimale Trajektorie untersucht werden, und die Stationaritätsbedingung lautet:

$$\int_0^T \left[\sum_{\kappa=0}^{k_W} \left(-\frac{d}{dt} \right)^\kappa \frac{\partial L}{\partial \xi_b^{(\kappa)}} \right] \delta_b(t) dt \stackrel{!}{=} \mathbf{0}.$$

Da die Funktion $\delta_b(t)$ beliebig variiert werden kann, lässt sich die Bedingung nur erfüllen, wenn die Summe in den eckigen Klammern für alle t verschwindet:

$$\sum_{\kappa=0}^{k_W} \left(-\frac{d}{dt} \right)^\kappa \frac{\partial L}{\partial \xi_b^{(\kappa)}} = \mathbf{0}.$$

Leitet man L aus Gl. (3.21) partiell ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_b^{(\kappa)}} \left[\xi_b(t)^T W_U^T \left(-\frac{d}{dt} \right) W_2 W_U \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_b(t) + 2 \xi_b(t)^T W_U^T \left(-\frac{d}{dt} \right) W_2 \xi_m^d(t) + \xi_m^d(t)^T W_2 \xi_m^d(t) \right] \\ = 2 W_{U\kappa}^T W_2 W_U \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_b(t) + 2 W_{U\kappa}^T W_2 \xi_m^d(t). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Matrix $W_U \left(\frac{d}{dt} \right)$ als

$$W_U \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{\kappa=0}^{k_W} W_{U\kappa} \left(\frac{d}{dt} \right)^\kappa$$

mit k_W , dem Grad der Polynommatrix $W_U \left(\frac{d}{dt} \right)$, dargestellt. Schließlich erhält man die Eulersche Differentialgleichung der Basisgrößen:

$$\underbrace{\sum_{\kappa=0}^{k_W} \left(-\frac{d}{dt} \right)^\kappa W_{U\kappa}^T W_2 W_U \left(\frac{d}{dt} \right)}_{W_E} \xi_b(t) = - \sum_{\kappa=0}^{k_W} W_{U\kappa}^T W_2 \cdot \left(-\frac{d}{dt} \right)^\kappa \xi_m^d(t),$$

bzw. noch kompakter geschrieben:

$$\underbrace{\left(W_U \left(-\frac{d}{dt} \right) \right)^T W_2 W_U \left(\frac{d}{dt} \right)}_{W_E} \xi_b(t) = - \left(W_U \left(-\frac{d}{dt} \right) \right)^T W_2 \xi_m^d(t). \quad (3.22)$$

Links von ξ_b steht eine quadratische polynomiale Matrix $W_E \in \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{m \times m}$, die höchste auftretende $\left(\frac{d}{dt} \right)$ Potenz ist $2k_W$. Auf der rechten Seite erscheinen die vorgegebenen Verläufe als Erregung. Mithin handelt es sich um m lineare inhomogene Differentialgleichungen, die mit den üblichen Methoden gelöst werden können.

Es empfiehlt sich, die Matrix $W_U \left(\frac{d}{dt} \right)$ in eine spaltenreduzierte Form zu bringen, um die dynamische Ordnung des Problems nicht künstlich zu erhöhen. Das verändert die Gleichungen nicht wesentlich, da bei der Überführung lediglich Zeilen elementar kombiniert werden (siehe Abschnitt A.1). Trotzdem wird die Matrix $W_E \left(\frac{d}{dt} \right)$ in aller Regel nicht spaltenreduziert vorliegen, denn $W_{U\kappa}^T$ enthält eine Nullzeile, wenn der Index κ größer als der

kleinste Spaltengrad ist, so dass die entstehende Matrix $\Gamma_{W_E}^s$ der führenden Spaltenkoeffizienten singularär sein muss. Die Matrix $W_E(\frac{d}{dt})$ in Gleichung (3.22) sollte daher ebenfalls in spaltenreduzierte Form gebracht werden. Am Ende haben sich die Spaltengrade in $W_E(\frac{d}{dt})$ gegenüber $W_U(\frac{d}{dt})$ verdoppelt. Damit hat man dann auch ausreichend viele Freiheitsgrade, um die nötige Glattheit am Beginn und Ende des Planungszeitraums herzustellen. Daher sollte man sämtliche Größen, die einen glatten Verlauf haben müssen, in die Größen ξ_m aufnehmen. Anderenfalls könnte das Optimierungsproblem eine Lösung liefern, die technisch nicht umsetzbar ist.

Beispiel 3.4 Als Beispiel soll erneut das herabhängende verschiebliche Dreifachpendel aus Beispiel 3.2 dienen. Wiederum soll die Versetzung aus einer Ruhelage in eine Ruhelage um $\Delta w_0 = 0.75$ in der Zeit $T = 3$ erfolgen. Um den Energieaufwand in Grenzen zu halten, sollen $f(t)$ und $d_1(t)$ möglichst gering sein. Daher soll $f^d(t) = 0$ und $d_1^d(t) = 0$ gelten. Außerdem sei daran erinnert, dass das Modell durch Linearisierung um einen Arbeitspunkt entstanden ist. Um möglichst nahe bei diesem zu bleiben, sollen auch $\varphi_1^d(t)$, $\varphi_2^d(t)$ und $\varphi_3^d(t)$ gleich Null sein. Ein besonderes Augenmerk soll auf das Drehmoment d_1 gelegt werden. Das zu minimierende Kostenfunktional sei daher

$$\mathfrak{G} = \int_0^3 (\varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2 + \varphi_3(t)^2 + f(t)^2 + 10d_1(t)^2) dt.$$

Die Wichtungsmatrizen sind damit

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

daraus folgt mit den in Beispiel 3.2 angegebenen Matrizen U_{12}^R und U_{22}^R die Matrix $W_U(\frac{d}{dt})$

$$W_U(\frac{d}{dt}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.001055 (\frac{d}{dt})^4 - 0.1 (\frac{d}{dt})^2 & 0 \\ -4.396 \cdot 10^{-5} (\frac{d}{dt})^4 - 0.1 (\frac{d}{dt})^2 & 0 \\ 0.000211 (\frac{d}{dt})^6 + 0.05498 (\frac{d}{dt})^4 + 1.1 (\frac{d}{dt})^2 & -0.07658 (\frac{d}{dt})^2 \\ 2.018 \cdot 10^{-5} (\frac{d}{dt})^6 + 0.006181 (\frac{d}{dt})^4 + 0.1971 (\frac{d}{dt})^2 & -0.001548 (\frac{d}{dt})^2 + 1.971 \end{pmatrix}.$$

Mit $k_W = 6$ erscheint die Eulersche Differentialgleichung (3.22) als

$$\begin{pmatrix} 4.859 \cdot 10^{-8} (\frac{d}{dt})^{12} + 2.57 \cdot 10^{-5} (\frac{d}{dt})^{10} + 0.00395 (\frac{d}{dt})^8 + 0.1456 (\frac{d}{dt})^6 + 1.619 (\frac{d}{dt})^4 \\ -1.647 \cdot 10^{-5} (\frac{d}{dt})^8 - 0.003908 (\frac{d}{dt})^6 + 0.03456 (\frac{d}{dt})^4 + 3.886 (\frac{d}{dt})^2 \end{pmatrix} \xi_{b1} \\ + \begin{pmatrix} -1.647 \cdot 10^{-5} (\frac{d}{dt})^8 - 0.003908 (\frac{d}{dt})^6 + 0.03456 (\frac{d}{dt})^4 + 3.886 (\frac{d}{dt})^2 \\ 0.005888 (\frac{d}{dt})^4 - 0.06105 (\frac{d}{dt})^2 + 39.86 \end{pmatrix} \xi_{b2} = \mathbf{0}.$$

Der maximale Grad der zweiten Spalte von U_{22}^R ist zwei. Da Sprünge in den Stellsignalen akzeptiert werden sollen, sind bezüglich ξ_{b2} lediglich 4 Randbedingungen zu erfüllen. Der Grad

der zweiten Spalte der Matrix $W_E \left(\frac{d}{dt}\right)$ ist allerdings 8. Um ihn auf 4 zu reduzieren, wird die Eulersche Differentialgleichung von links mit der unimodularen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.002797 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.6928 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multipliziert und man erhält die Eulersche Differentialgleichung (3.22) in der Form

$$\begin{pmatrix} 2.524 \cdot 10^{-9} \left(\frac{d}{dt}\right)^{12} + 3.356 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^{10} + 0.001339 \left(\frac{d}{dt}\right)^8 + 0.1804 \left(\frac{d}{dt}\right)^6 + 4.311 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 \\ -1.647 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^8 - 0.003908 \left(\frac{d}{dt}\right)^6 + 0.03456 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 3.886 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \xi_{b1} \\ + \begin{pmatrix} 0.1038 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 31.5 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 0.005888 \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.06105 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 39.86 \end{pmatrix} \xi_{b2} = \mathbf{0}.$$

Aufgrund der Tatsache, dass sämtliche vorgegebenen Funktionsverläufe ξ_m^d identisch null sind, ist die Differentialgleichung hier homogen. Die Determinante der Matrix $W_E \left(\frac{d}{dt}\right)$ ist

$$\det W_E = 1.486 \cdot 10^{-11} \left(\frac{d}{dt}\right)^{16} + 1.96 \cdot 10^{-8} \left(\frac{d}{dt}\right)^{14} + 9.4897 \cdot 10^{-6} \left(\frac{d}{dt}\right)^{12} \\ + 0.002038 \left(\frac{d}{dt}\right)^{10} + 0.1873 \left(\frac{d}{dt}\right)^8 + 5.434 \left(\frac{d}{dt}\right)^6 + 49.41 \left(\frac{d}{dt}\right)^4.$$

Die Ansatzfunktionen für die Basisgrößen sind daher von folgender Gestalt

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 \sin(21.09t + c_5) e^{-1.345t} + c_6 \sin(21.09t + c_7) e^{1.345t} \\ + c_8 \sin(14.08t + c_9) e^{-0.6077t} + c_{10} \sin(14.08t + c_{11}) e^{0.6077t} \\ + c_{12} \sin(4.542t + c_{13}) e^{-0.3313t} + c_{14} \sin(4.542t + c_{15}) e^{0.3313t}.$$

Mithilfe der Konstanten c werden die Funktionen an die gegebenen Anfangs- und Endwerte angepasst. Auf das exakte Hinschreiben der Lösung soll hier verzichtet werden. Stattdessen werden die weiteren Ergebnisse in Bild 3.4 graphisch dargestellt. ■

3.3 Planung bei einem nicht unimodularen Linksteiler

Bei der Einführung der Basisgrößen im Abschnitt 2.2.2 wurde davon ausgegangen, dass der Linksteiler $L \left(\frac{d}{dt}\right)$ in Gleichung (2.13c) unimodular sei. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Auswirkungen es hat, wenn das nicht der Fall ist.

Wenn das Paar (A_P, B_P) nicht linksteilerfremd ist, so offenbart sich das gemäß Satz 2.1 zuerst darin, dass es einzelne komplexe Zahlen s_0 gibt, für die

$$\text{Rang}(A_P(s_0), B_P(s_0)) < r$$

gilt. Diese Zahlen s_0 sind die Nullstellen der Determinante des Linksteilers, denn mit Gleichung (2.8) gilt

$$\text{Rang}(A_P(s), B_P(s)) = \text{Rang}\left(L(s) \cdot \begin{pmatrix} V_{11}^R(s) \\ V_{12}^R(s) \end{pmatrix}\right).$$

Das Paar (U_{11}^L, U_{12}^L) hat stets vollen Rang. Mithin kann ein Rangabfall nur auftreten, wenn $L(s)$ für einzelne s_0 nicht vollen Rang hat, also wenn $\det L(s_0) = 0$ ist. Die Effekte dieser Nullstellen werden seit Längerem untersucht, beispielsweise bei [Ros70] unter

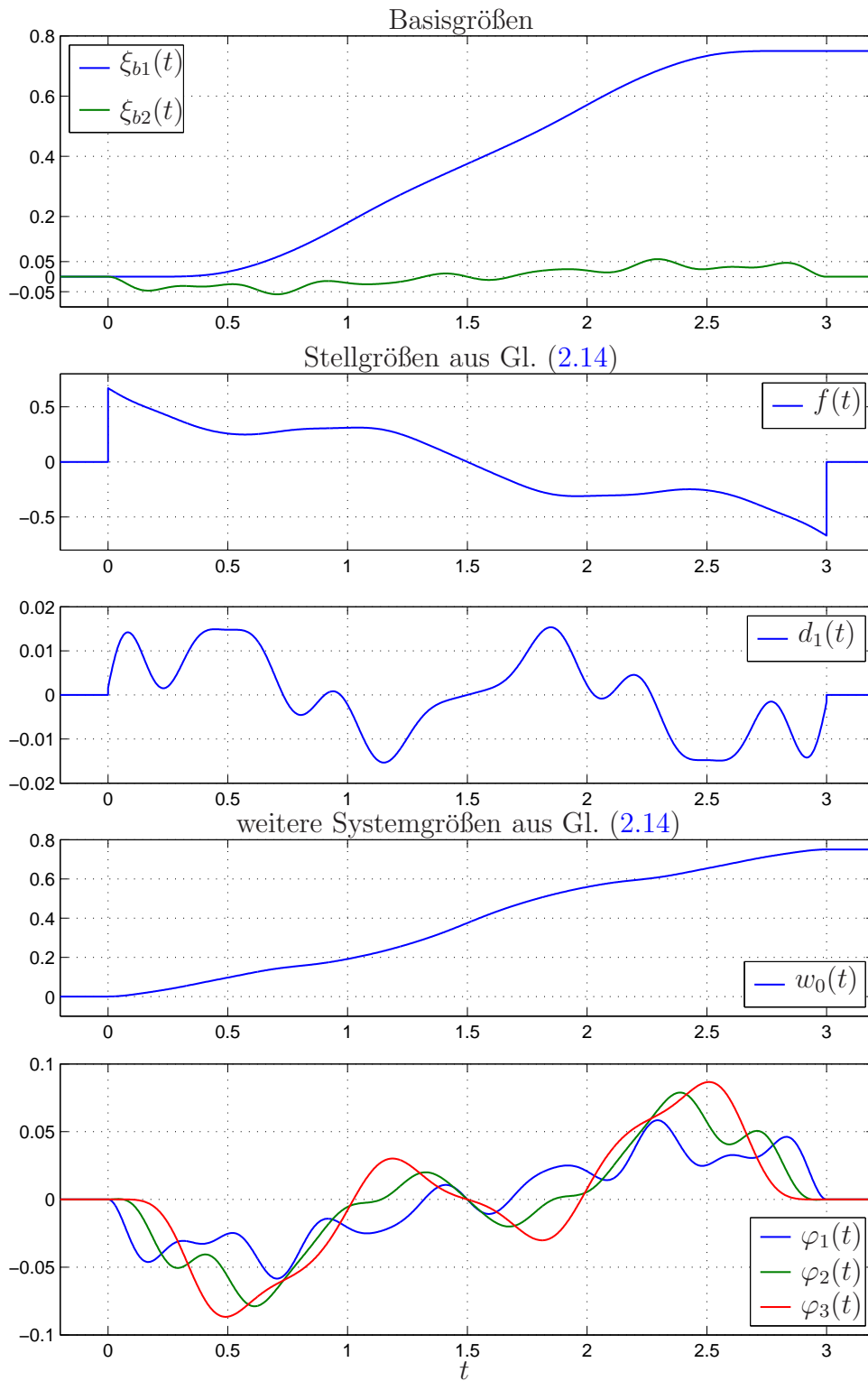


Bild 3.4: Darstellung des Ergebnisses von Beispiel 3.4

dem Namen „Eingangsentkoppelungsnullstellen“ (input decoupling zeros). Bei [RL06] heißen sie „latente Zahlen“ (latent numbers). Definiert man nun neue Systemgrößen gemäß Gleichung (2.12), und untersucht die Gleichungen (2.13) erneut, so stößt man in Gleichung

chung (2.13c) auf die Differentialgleichung

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}_a = 0$$

mit der Lösung im Bildbereich

$$\boldsymbol{\Xi}_a = \left(L(s) \right)^{-1} \sum_{\kappa=1}^{k_L} L_{\kappa} \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \boldsymbol{\xi}_a^{(\lambda)}(-0) \right), \quad (3.23)$$

mit der Zahl k_L als der höchsten in $L(s)$ auftretenden s -Potenz. Hier wird deutlich, dass die Größen $\boldsymbol{\Xi}_a$ einer autonomen Differentialgleichung genügen, die allein von Anfangswerten abhängt. Das motiviert den Index a . Sie sollen im Folgenden „autonome Größen“ heißen. Insbesondere hängen die autonomen Größen nicht vom Eingang ab. Wie in Gleichung (2.13) sind die Basisgrößen $\boldsymbol{\Xi}_b$ frei vorgebar, da sie durch die Systemgleichungen keinerlei Beschränkungen unterworfen sind. Allerdings kann man nicht mehr aus ihnen allein die ursprünglichen Systemgrößen berechnen. Statt Gleichung (2.14) gilt

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \\ U_{21}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_a + \begin{pmatrix} U_{12}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \\ U_{22}^R\left(\frac{d}{dt}\right) \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_b. \quad (3.24)$$

Für die Berechnung der ursprünglichen Systemgrößen wird der Verlauf der autonomen Signale $\boldsymbol{\xi}_a$ gebraucht, der sich aus den Anfangswerten $\boldsymbol{\xi}_a(-0)$ ergibt, die wiederum von den Anfangswerten der ursprünglichen Systemgrößen abhängen. Diese sollten, wie auch schon in Abschnitt 2.2.3 festgehalten wurde, bekannt sein. Jedoch tritt gegenüber Abschnitt 2.2.3 neu hinzu, das die Anfangswerte nicht nur bei Festlegung des Beginns der Trajektorienplanung, sondern über deren gesamten Verlauf berücksichtigt werden müssen.

Solange die Nullstellen s_0 der Determinante $\det L(s)$ in der abgeschlossenen linken Halbebene liegen, bleiben die autonomen Signale beschränkt, und man kann sie ohne Schwierigkeiten einplanen. Falls die Nullstellen von $\det L(s)$ in der rechten offenen Halbebene liegen, klingen selbst bei kleinsten Anfangswerten die Signale $\boldsymbol{\xi}_a$ unbeschränkt auf, und das System ist unbrauchbar. Dies durch ein entsprechend unbeschränkt aufklingendes Basissignal $\boldsymbol{\xi}_b$ zu kompensieren, ist kein Ausweg, da ein solches System außerdem nicht stabilisierbar ist, wie Abschnitt 4.2.1 zeigen wird.

Als Letztes bleibt noch zu untersuchen, wie sich die in Abschnitt 2.2.3 erörterten Zusammenhänge zwischen den Anfangswerten der übrigen Systemgrößen und denen der Basisgrößen – und nun auch denen der autonomen Größen – darstellen. Transformiert man Gleichung (3.24) in den Laplace-Bereich, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}^R(s) \\ U_{21}^R(s) \end{pmatrix} \boldsymbol{\Xi}_a + \begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} \boldsymbol{\Xi}_b - \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_a^{(\lambda)}(-0) \\ \boldsymbol{\xi}_b^{(\lambda)}(-0) \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Gleichung in die Systemgleichung (2.3a) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (A_P(s) \quad B_P(s)) \left[\begin{pmatrix} U_{11}^R(s) \\ U_{21}^R(s) \end{pmatrix} \boldsymbol{\Xi}_a + \begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} \boldsymbol{\Xi}_b - \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_a^{(\lambda)}(-0) \\ \boldsymbol{\xi}_b^{(\lambda)}(-0) \end{pmatrix} \right] &= \boldsymbol{a}(s) \\ L(s)\boldsymbol{\Xi}_a - (A_P(s) \quad B_P(s)) \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_a^{(\lambda)}(-0) \\ \boldsymbol{\xi}_b^{(\lambda)}(-0) \end{pmatrix} &= \boldsymbol{a}(s) \end{aligned}$$

und mit Gleichung (3.23)

$$\sum_{\kappa=1}^{k_L} L_{\kappa} \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \xi_a^{(\lambda)}(-0) \right) - (A_P(s) \quad B_P(s)) \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \begin{pmatrix} \xi_a^{(\lambda)}(-0) \\ \xi_b^{(\lambda)}(-0) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s). \quad (3.25)$$

Darin ist $\mathbf{a}(s)$ eine lineare Funktion der Anfangsbedingungen der Systemgrößen und gegeben durch Gleichung (2.4a). Auf der linken Seite steht eine ebenfalls lineare Funktion der Anfangsbedingungen der definierten Größen ξ_a und ξ_b . Diese Gleichung muss bei der Festlegung der Anfangswerte berücksichtigt werden.

Beispiel 3.5 Als Beispiel diene eine weitere Abwandlung des Zweifachpendels aus Beispiel 3.1 bzw. 2.1. Es gelte:

- Die beiden Pendelkörper hängen herab
- Einzig die Stellgröße $f(t)$ wird verwendet (SISO-System). Es gibt daher auch nur eine Basisgröße.
- Es gelte das folgende Längenverhältnis:

$$l_2 = l_1 - a_1 > 0.$$

Damit lauten die Laplace-transformierten Systemgleichungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2)s^2 & (l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1-a_1)m_2s^2 & -1 \\ (l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2)s^2+g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1(l_1-a_1)m_2s^2 & 0 \\ s^2 & a_1s^2 & (l_1-a_1)s^2+g & 0 \end{pmatrix}}_{(A_P(s), B_P(s))} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ F \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s).$$

Setzt man

$$s_0 = \pm j \sqrt{\frac{g(l_1m_1 + a_1m_2)}{l_1m_1(l_1 - a_1)}}$$

in die obige Matrix ein, so erhält man

$$\text{Rang}(A_P(s_0), B_P(s_0)) = \text{Rang} \begin{pmatrix} -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)(m_0+m_1+m_2)}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)^2}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)m_2}{l_1m_1} & -1 \\ -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)^2}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{ga_1(l_1m_1+a_1m_2)^2}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)a_1m_2}{l_1m_1} & 0 \\ -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{g(l_1m_1+a_1m_2)a_1}{l_1m_1(l_1-a_1)} & -\frac{ga_1m_2}{l_1m_1} & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

denn die letzten beiden Zeilen sind offensichtlich linear abhängig. Damit ist das Matrizenpaar (A_P, B_P) nicht linksteilerfremd. Es steht also fest, dass die Determinante des gemeinsamen Linksteilers ihre Nullstellen bei $s = s_0$ haben muss. Da diese Nullstellen auf der imaginären

Achse liegen, also nicht in der offenen rechten Halbebene, lohnt es sich, mit dem Auffinden von Basisgrößen fortzufahren. Mit der unimodularen Matrix

$$U^R = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{l_1}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} & -\frac{a_1 m_2}{l_1 m_1} & s^2 l_1 + g \\ 0 & \frac{1}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} & 0 & -s^2 \\ 0 & \frac{1}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} & \frac{l_1 m_1 + a_1 m_2}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)} & -s^2 \\ \hline -1 & -\frac{m_0 l_1}{(l_1 m_1 + a_1 m_2) g} s^2 & \frac{m_2 ((l_1 - a_1) m_1 - a_1 m_0)}{l_1 m_1} s^2 & g(m_1 + m_0 + m_2) s^2 + l_1 m_0 s^4 \end{array} \right)$$

lässt sich das Paar (A_P, B_P) in seine Hermitesche Normalform überführen:

$$(A_P(s), B_P(s)) \cdot U^R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_1 m_1 + a_1 m_2} & s^2 + \frac{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)} & 0 \end{array} \right) = (L(s) \mid 0).$$

Damit erhält man die Differentialgleichung (2.13c) der autonomen Größen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_1 m_1 + a_1 m_2} & \frac{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{a1} \\ \xi_{a2} \\ \xi_{a3} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

und man erkennt, dass nur die dritte Zeile eine echte Differentialgleichung darstellt. Aus den ersten beiden Zeilen erhält man

$$\xi_{a1} = 0 \quad \text{und} \quad \xi_{a2} = 0.$$

Die dritte Zeile ist die Differentialgleichung eines ungedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{\xi}_{a3} + \omega_a^2 \xi_{a3} = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)}}.$$

Doch – gibt es eine physikalische Bedeutung zu dieser zunächst abstrakt eingeführten autonomen Größe? Die Inverse der Matrix $U^R(s)$ lautet

$$(U^R(s))^{-1} = U^L(s) = \begin{pmatrix} (m_0 + m_1 + m_2) s^2 & (l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & (l_1 - a_1) m_2 s^2 & -1 \\ (l_1 m_1 + a_1 m_2) s^2 & (l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2) s^2 + g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & a_1 (l_1 - a_1) m_2 s^2 & 0 \\ 0 & -\frac{l_1 m_1 (l_1 - a_1)}{l_1 m_1 + a_1 m_2} & \frac{l_1 m_1 (l_1 - a_1)}{l_1 m_1 + a_1 m_2} & 0 \\ \frac{1}{g} & \frac{l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} & \frac{(l_1 - a_1) a_1 m_2}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.12) liest man aus der dritten Zeile der Matrix U^L

$$\xi_{a3}(t) = \frac{l_1 m_1 (l_1 - a_1)}{l_1 m_1 + a_1 m_2} (\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$$

ab. Die Winkeldifferenz $(\varphi_2 - \varphi_1)$ gehorcht mithin einer autonomen Differentialgleichung und ist durch die Steuergröße f nicht beeinflussbar. Außerdem ist durch die vierte Zeile der Zusammenhang zwischen der Basisgröße ξ_b und den Systemgrößen gegeben:

$$\xi_b(t) = \frac{1}{g} \left(w_0(t) + \frac{l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2}{l_1 m_1 + a_1 m_2} \varphi_1(t) + \frac{(l_1 - a_1) a_1 m_2}{l_1 m_1 + a_1 m_2} \varphi_2(t) \right).$$

Diese Gleichung ist nicht ohne Weiteres physikalisch deutbar. Aus diesen beiden Größen ξ_b und ξ_{a3} ergeben sich alle übrigen Systemgrößen. Aus den letzten beiden Spalten der Matrix U^R liest man die Zusammenhänge (3.24) ab:

$$\begin{aligned} w_0(t) &= -\frac{a_1 m_2}{l_1 m_1} \xi_{a3}(t) + l_1 \ddot{\xi}_b(t) + g \xi_b(t) \\ \varphi_1(t) &= -\ddot{\xi}_b(t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{l_1 m_1 + a_1 m_2}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)} \xi_{a3}(t) - \ddot{\xi}_b(t) \\ f(t) &= \frac{m_2((l_1 - a_1)m_1 - a_1 m_0)}{l_1 m_1} \ddot{\xi}_{a3}(t) + g(m_1 + m_0 + m_2) \ddot{\xi}_b(t) + l_1 m_0 \ddot{\xi}_b(t). \end{aligned}$$

Damit liegen alle Zusammenhänge bereit, um Trajektorien zu planen. Der Wunsch an den Trajektorienverlauf sei folgender: Das Zweifachpendel soll aus der Anfangslage

$$w_0(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{und sämtlichen Ableitungen gleich Null}$$

in dem Zeitintervall T in die durch

$$w_0(t) = w_0^e \quad \text{für } t \geq T$$

gekennzeichnete Endlage überführt werden, wobei das Verhalten der beiden Winkel offen bleiben muss.

Zunächst sollen die Anfangswerte von ξ_b und ξ_{a3} bestimmt werden. Die Anfangswerte $\mathbf{a}(s)$ ergeben sich aus Gl. (2.4a) zu

$$\mathbf{a}(s) = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & l_1 m_1 + a_1 m_2 & (l_1 - a_1) m_2 \\ l_1 m_1 + a_1 m_2 & l_1^2 m_1 + a_1^2 m_2 & a_1 (l_1 - a_1) m_2 \\ 1 & a_1 & l_1 - a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s w_0(0) \\ s \varphi_1(0) \\ s \varphi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(l_1 - a_1) m_2 \frac{\pi}{4} s \\ -a_1 (l_1 - a_1) m_2 \frac{\pi}{4} s \\ -(l_1 - a_1) \frac{\pi}{4} s \end{pmatrix}$$

Die linke Seite von Gleichung (3.25) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^{k_L} L_{\kappa} \left(\sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \xi_a^{(\lambda)}(-0) \right) - (A_P(s) \quad B_P(s)) \sum_{\kappa=1}^{k_U} U_{\kappa}^R \sum_{\lambda=0}^{\kappa-1} s^{\kappa-1-\lambda} \begin{pmatrix} \xi_a^{(\lambda)}(-0) \\ \xi_b^{(\lambda)}(-0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0) \end{pmatrix} - (A_P(s) \quad B_P(s)) \cdot \begin{pmatrix} (s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) l_1 \\ -s \xi_b(-0) - \dot{\xi}_b(-0) \\ -s \xi_b(-0) - \dot{\xi}_b(-0) \\ -\frac{m_2(a_1 m_0 + a_1 m_1 - l_1 m_1)}{l_1 m_1} (s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0)) \dots \\ \dots + g(m_1 + m_0 + m_2) (s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) \dots \\ \dots + m_0 l_1 (s^3 \xi_b(-0) + s^2 \dot{\xi}_b(-0) + s \ddot{\xi}_b(-0) + \ddot{\xi}_b(-0)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{m_2 a_1 (m_0 + m_1)}{l_1 m_1}\right) (s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0)) + \dots \\ \dots g(m_0 + m_1 + m_2) (s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) + m_0 l_1 (s \ddot{\xi}_b(-0) + \ddot{\xi}_b(-0)) \\ g(l_1 m_1 + a_1 m_2) (s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) \\ g(s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{m_2 a_1 (m_0 + m_1)}{l_1 m_1} - 1 \right) (s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0)) - \dots \\ \dots g(m_0 + m_1 + m_2)(s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) - m_0 l_1 (s \ddot{\xi}_b(-0) + \ddot{\xi}_b(-0)) \\ -g(l_1 m_1 + a_1 m_2)(s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) \\ s \xi_{a3}(-0) + \dot{\xi}_{a3}(-0) - g(s \xi_b(-0) + \dot{\xi}_b(-0)) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s).$$

Wenn man in dieser Gleichung die s -Potenzen vergleicht, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & (m_0 + m_1 + m_2)g & 0 & m_0 l_1 & 0 & 1 - \frac{m_2 a_1 (m_0 + m_1)}{l_1 m_1} \\ 0 & g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (m_0 + m_1 + m_2)g & 0 & m_0 l_1 & 0 & 1 - \frac{m_2 a_1 (m_0 + m_1)}{l_1 m_1} & 0 \\ g(l_1 m_1 + a_1 m_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_b(-0) \\ \dot{\xi}_b(-0) \\ \ddot{\xi}_b(-0) \\ \ddot{\xi}_b(-0) \\ \xi_{a3}(-0) \\ \dot{\xi}_{a3}(-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(l_1 - a_1)m_2 \frac{\pi}{4} \\ -a_1(l_1 - a_1)m_2 \frac{\pi}{4} \\ -(l_1 - a_1) \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \xi_b(-0) \\ \dot{\xi}_b(-0) \\ \ddot{\xi}_b(-0) \\ \ddot{\xi}_b(-0) \\ \xi_{a3}(-0) \\ \dot{\xi}_{a3}(-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1(l_1 - a_1)m_2}{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{m_1 l_1 (l_1 - a_1)}{l_1 m_1 + a_1 m_2} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\pi}{4}.$$

Damit sind die Anfangswerte für die Planung bekannt. Aus diesen ergibt sich zunächst der Verlauf des autonomen Signals ξ_{a3}

$$\xi_{a3}(t) = -\frac{m_1 l_1 (l_1 - a_1)}{l_1 m_1 + a_1 m_2} \frac{\pi}{4} \cos\left(t \sqrt{\frac{g(l_1 m_1 + a_1 m_2)}{l_1 m_1 (l_1 - a_1)}}\right) =: A_a \cos(\omega_a t).$$

Dieser Verlauf muss bei der Planung von ξ_b berücksichtigt werden. Zunächst wird der Verlauf für $t \geq T$ geplant. Hier soll $w_0(t) = w_0^e$ sein. Setzt man das in die erste Zeile von Gleichung (3.24), so erhält man mit

$$\begin{aligned} w_0^e &= -\frac{a_1 m_2}{l_1 m_1} \xi_{a3}(t) + l_1 \ddot{\xi}_b(t) + g \xi_b(t) \\ w_0^e + \frac{a_1 m_2}{l_1 m_1} A_a \cos(\omega_a t) &= l_1 \ddot{\xi}_b(t) + g \xi_b(t) \\ \xi_b(t) &= \frac{a_1 m_2}{l_1 m_1 (g - l_1 \omega_a^2)} A_a \cos(\omega_a t) + \frac{w_0^e}{g} \quad \text{für } t \geq T. \end{aligned}$$

Der Verlauf für $0 < t < T$ wird, nachdem dessen Randwerte festliegen, nach der in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Methode bestimmt.

Die weiteren Ergebnisse sollen für die (normierten) Werte

Systemparameter								Trajektorienplanung			
g	a_1	l_1	l_2	m_0	m_1	m_2	ω_a	T	w_0^e	$\varphi_2(0)$	A_a
10	0.25	0.65	0.4	0.25	0.1	0.2	6.6506	3	2	$-\frac{\pi}{4}$	-0.1776

angegeben werden. Damit ergeben sich

$$\xi_{a3}(t) = -0.1776 \cos(6.6506 t)$$

$$\xi_b(t) = \begin{cases} 0.0026 t^7 - 0.0202 t^6 + 0.0481 t^5 - 0.0289 t^4 - 0.0137 & 0 \leq t < 3 \\ 0.00728 \cos(6.6506 t) + 0.2 & 3 \leq t \end{cases} \text{ für } .$$

Aus diesem Ergebnis erhält man mit Gleichung (3.24) die Planung der ursprünglichen Systemgrößen. Die Ergebnisse sind in Bild 3.5 dargestellt. Man beachte, wie die beiden Pendelkörper ungedämpft schwingen, der Wagen aber trotzdem der gewünschten Trajektorie folgt. Zur Veranschaulichung der Bewegung findet sich ein kurzer Animationsfilm in Bild 3.6. ■

Wie auch das Beispiel zeigt, ist mit der Existenz eines gemeinsamen, nicht unimodularen Linksteilers⁵ in (A_P, B_P) die Trajektorienplanung keineswegs unmöglich geworden. Auch wurde das System im zurückliegenden Beispiel nicht „gekürzt“; seine dynamische Ordnung blieb voll erhalten. Es sind lediglich bei der Trajektorienplanung einige Besonderheiten zu berücksichtigen. Die Basisgrößen sind nach wie vor frei und unabhängig voneinander wählbar, allerdings muss bedacht werden, dass sie nicht mehr allein das Systemverhalten parametrisieren. Das Beispiel zeigt, dass sich trotzdem steuerungstechnische Ziele verwirklichen lassen, wenn auch in gewissen Grenzen. Jedoch sind die Möglichkeiten, auf Ebene der Systemgrößen zu steuern immer begrenzt, abgesehen von vollständig direkt gesteuerten Systemen.

⁵Bisweilen wird so ein System als nicht steuerbar bezeichnet.

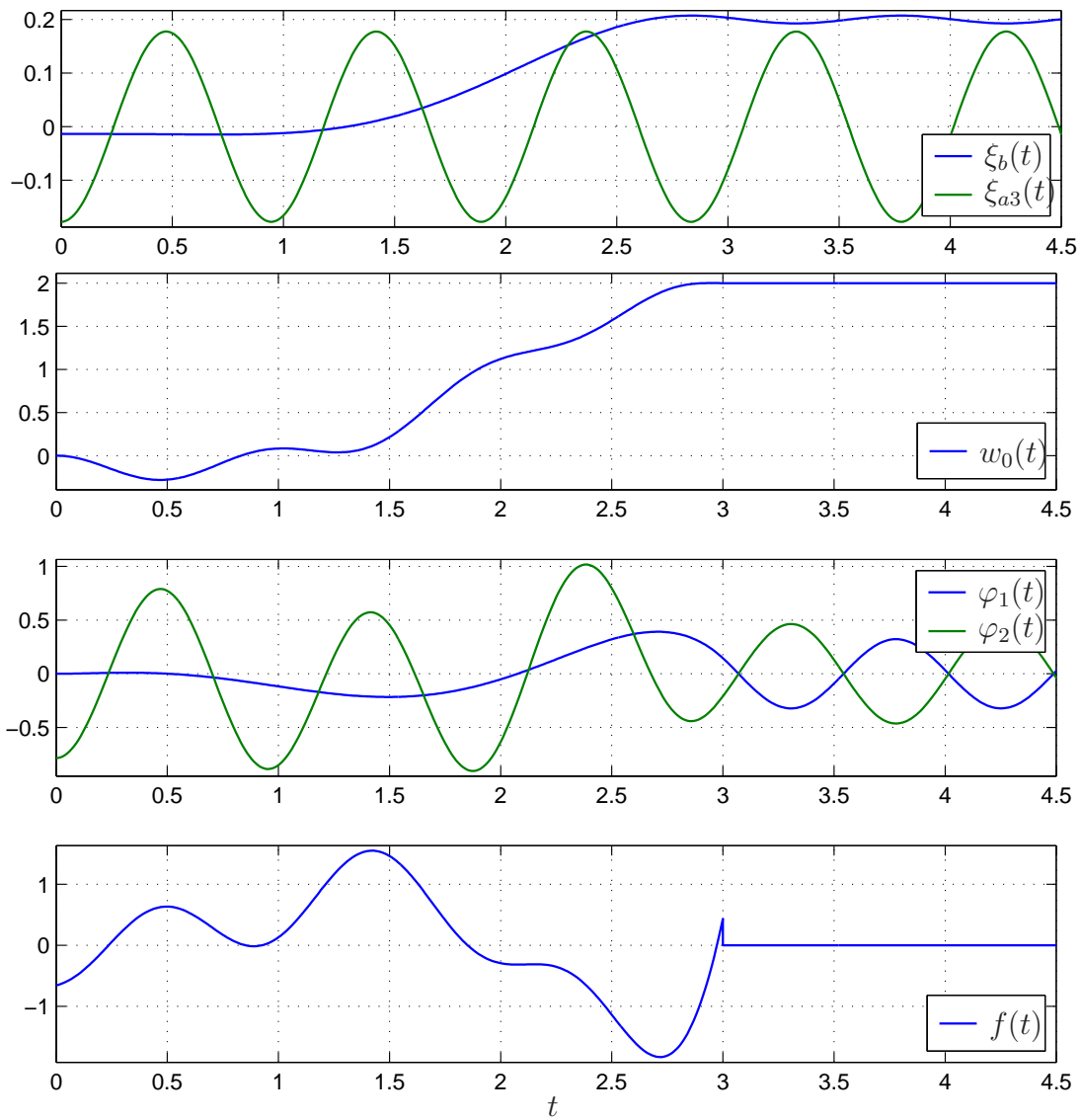


Bild 3.5: Trajektorienplanung für Beispiel 3.5

Bild 3.6: Animationsfilm der Planung von Beispiel 3.5

4 Folgeregelung

Bisher wurde der Tatsache, dass ein mathematisches Modell das Verhalten eines technischen Systems niemals exakt widerspiegelt, keine Beachtung geschenkt. Im Allgemeinen wird die Regelstrecke trotz sorgfältiger Planung der Steuerung nicht die geplanten Signalverläufe hervorbringen. Sind die Abweichungen gering, kann man sie tolerieren und sich mit einer Steuerung begnügen. Andernfalls, insbesondere wenn die Regelstrecke instabil ist, muss durch einen zusätzlichen *Folgeregler* das System entlang der Solltrajektorien stabilisiert werden.

4.1 Struktur der Folgeregelung

Im folgenden Abschnitt soll angenommen werden, dass das System durch ein unbekanntes äußeres Störsignal $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^d$ beeinflusst werde. Die Systemgleichungen (2.1) lauten mit diesem

$$A_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + B_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} + B_P^s \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.1a)$$

$$C_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + D_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} + D_P^s \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{y}. \quad (4.1b)$$

Ein solches Störsignal könnte beispielsweise durch zufällige Messungenauigkeiten oder auch durch ungenaue Modellierung entstehen. Wenn man die Gleichungen (4.1) mit verschwindenden Anfangsbedingungen Laplace-transformiert und nach den inneren Größen \mathbf{x} und den Ausgangsgrößen \mathbf{y} auflöst, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -A_P^{-1} B_P & -A_P^{-1} B_P^s \\ D_P - C_P A_P^{-1} B_P & D_P^s - C_P A_P^{-1} B_P^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^X(s) & P_s^X(s) \\ P(s) & P_s(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit den darin enthaltenen Übertragungsmatrizen P der Regelstrecke. Bislang wurden Störungen nicht beachtet, wie es der in Bild 4.1 gezeigte Signalflussplan darstellt. Das Basissignal ξ_b wurde geplant, und das daraus berechnete Stellsignal \mathbf{u} wurde auf die Strecke gegeben. Störungen wurden ignoriert. Auch wurde davon ausgegangen, dass die Anfangswerte $\mathbf{a}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$ bekannt sind.

Die einzige Überwachungsmöglichkeit, die die Regelstrecke bietet, ist das Ausgangssignal \mathbf{y} . Dieses kann mit dem geplanten Ausgangssignal verglichen werden. Daher wird parallel das geplante Ausgangssignal $\mathbf{y}_d(t)$ aus dem Basissignal $\xi_b(t)$ nach Gl. (2.14) und Gl. (2.1b) berechnet

$$\mathbf{y}^d(t) = \left(C_P \left(\frac{d}{dt}\right) U_{12}^R \left(\frac{d}{dt}\right) + D_P \left(\frac{d}{dt}\right) U_{22}^R \left(\frac{d}{dt}\right) \right) \xi(t).$$

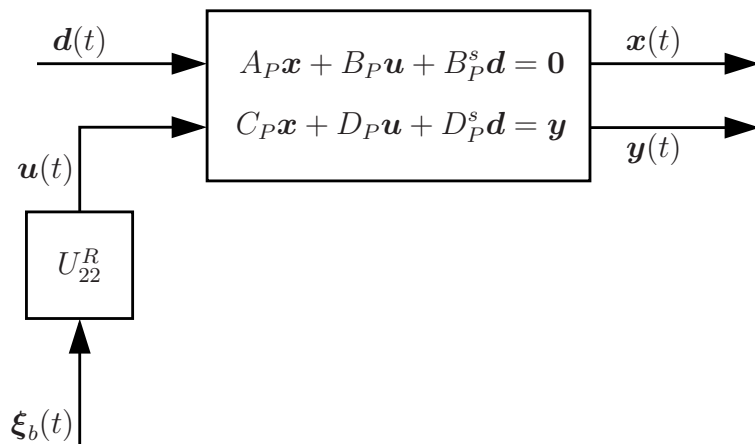


Bild 4.1: Signalflussplan der Steuerung

Die Differenz zum gemessenen Ausgangssignal wird von einem Regler mit der Differentialgleichung

$$N_K \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{u}_K(t) + Z_K \left(\frac{d}{dt} \right) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t)) = 0$$

zur Korrekturstellgröße $\mathbf{u}_K(t) \in \mathbb{R}^m$ verarbeitet und zu der geplanten Stellgröße hinzu addiert, um das System entlang der geplanten Trajektorie zu stabilisieren. In Bild 4.2

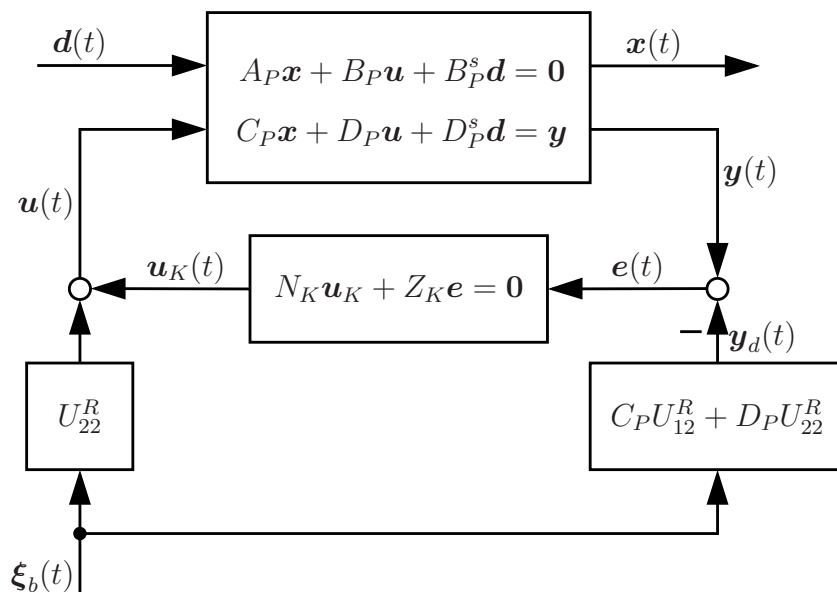


Bild 4.2: Signalflussplan der Steuerung mit Folgeregelung

ist der Signalflussplan dargestellt. Die Gleichungen des gesamten Übertragungssystems

lauten somit, sortiert nach inneren Größen $(\mathbf{x} \ \mathbf{u} \ \mathbf{y})^T$ und Eingangsgrößen $(\mathbf{d} \ \boldsymbol{\xi}_b)^T$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_P & B_P & 0 \\ C_P & D_P & -I_p \\ 0 & N_K & Z_K \end{pmatrix}}_{A_{CL}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_P^s & 0 \\ D_P^s & 0 \\ 0 & -N_K U_{22}^R - Z_K (C_P U_{12}^R + D_P U_{22}^R) \end{pmatrix}}_{B_{CL}} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\xi}_b \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Löst man das Gleichungssystem mittels der Laplace-Transformation, so erhält man die Übertragungsmatrix $G_{CL}(s) = -A_{CL}^{-1}(s) \cdot B_{CL}(s)$ von den Eingangsgrößen zu den inneren Größen. Ist das Matrizenpaar (A_{CL}, B_{CL}) linksteilerfremd, so ist der Hauptnenner sämtlicher Übertragungsfunktionen $\det A_{CL}(s)$. Daher gilt:

Satz 4.1 *Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn sämtliche Nullstellen von*

$$\det A_{CL}(s) = \det \begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) & 0 \\ C_P(s) & D_P(s) & -I_p \\ 0 & N_K(s) & Z_K(s) \end{pmatrix} =: \text{CLCP}(s)$$

in der linken offenen Halbebene liegen. Daher heißt die Determinante $\det A_{CL}(s)$ „charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises“, kurz CLCP (closed loop characteristic polynomial).

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktionsmatrix $G_{CL}(s)$ wird Gl. (4.3) in den Bildbereich¹ der Laplace-Transformation transformiert und anschließend gelöst. Man erhält zunächst

$$\begin{pmatrix} I_r & A_P^{-1} B_P & 0 \\ 0 & C_P A_P^{-1} B_P - D_P & I_p \\ 0 & N_K - Z_K (C_P A_P^{-1} B_P - D_P) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_P^{-1} B_P^s & 0 \\ D_P^s - C_P A_P^{-1} B_P^s & 0 \\ Z_K (C_P A_P^{-1} B_P^s - D_P^s) & N_K U_{22}^R + Z_K (C_P U_{12}^R + D_P U_{22}^R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\Xi}_b \end{pmatrix}.$$

Wegen Gleichung (2.6) gilt

$$A_P U_{12}^R + B_P U_{22}^R = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -A_P^{-1} B_P = U_{12}^R (U_{22}^R)^{-1}.$$

Damit kann man den Eintrag $N_K - Z_K (C_P A_P^{-1} B_P - D_P)$ umformen zu

$$N_K - Z_K (C_P A_P^{-1} B_P - D_P) = [N_K U_{22}^R + Z_K (C_P U_{12}^R + D_P U_{22}^R)] (U_{22}^R)^{-1},$$

was zur Dreiecksform² führt

¹Bei der Bestimmung der Übertragungsfunktionen werden Anfangswerte zunächst nicht beachtet.

²Auf das noch fehlende Vertauschen der letzten beiden Zeilen und Spalten wird verzichtet, weil dieses Zwischenergebnis nützlicher ist.

$$\begin{pmatrix} I_r & A_P^{-1}B_P & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & C_P A_P^{-1}B_P - D_P & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_P^{-1}B_P^s & 0 \\ \left[N_K + Z_K \left(C_P U_{12}^R (U_{22}^R)^{-1} + D_P \right) \right]^{-1} Z_K (C_P A_P^{-1}B_P^s - D_P^s) & U_{22}^R \\ D_P^s - C_P A_P^{-1}B_P^s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \Xi_b \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man die gesuchte Lösung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_s^X + P^X (I_m - G_o)^{-1} K P_s & U_{12} \\ (I_m - G_o)^{-1} K P_s & U_{22} \\ \left(I_p + P (I_m - G_o)^{-1} K \right) P_s & C_P U_{12}^R + D_P U_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \Xi_b \end{pmatrix}$$

mit den in Gl. (4.2) erhaltenen Übertragungsmatrizen P der Regelstrecke und den Übertragungsmatrizen

$$\begin{aligned} \text{des Reglers} & \quad K(s) = -N_K^{-1} Z_K \\ \text{und des offenen Kreises} & \quad G_o(s) = K(s) \cdot P(s). \end{aligned}$$

Wie zu erwarten war, stellen sich für $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ die in der Trajektorienplanung berechneten Verläufe ein. Die übrigen Übertragungsfunktionen können durch Wahl von $K(s)$ gestaltet werden, um die Auswirkungen von Störungen klein zu halten. Dabei geht die Steuerung in die linke Hyperspalte offensichtlich nicht ein. Es wird auch keine besondere Matrizenbruchdarstellung vorausgesetzt. Das Problem der Regelung kann völlig unabhängig von dem der Steuerung bearbeitet werden.

4.2 Problem der Nullstellenzuweisung

Aufgrund von Satz 4.1 spielt die Determinante $\det A_{CL}$, Gl. (4.3), für das Verhalten des geschlossenen Systems eine entscheidende Rolle. Die Frage, ob ein System stabilisierbar ist, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob zu den konstruktiv vorgegebenen oberen $(p + r)$ Zeilen der Matrix $A_{CL}(\frac{d}{dt})$ weitere m Zeilen geeignet ergänzt werden können, so dass die Nullstellen des CLCP($\frac{d}{dt}$) an gewünschten Stellen in der offenen linken Halbebene liegen. Dem CLCP($\frac{d}{dt}$) sollen durch geschickte Wahl von $(0, N_K, Z_K)$ Nullstellen *zugewiesen* werden (vgl. z. B. [LR03]).

4.2.1 Entkoppelungsnulstellen oder fixe Nullstellen

Eine notwendige Bedingung für die beliebige Nullstellenzuweisbarkeit findet sich bereits in [Kai80], fußend auf dem Konzept der „Entkoppelungsnulstellen“ (decoupling zeros) von [Ros70]. Wenn das Paar (A_P, B_P) nicht linksteilerfremd ist, so gibt es nach Satz 2.1

mindestens eine Zahl $s_0 \in \mathbb{C}$, für die der Rang von $(A_P(s_0), B_P(s_0), 0)$ nicht voll ist und daher linear abhängige Zeilen vorhanden sind. Das bedeutet aber, dass

$$\det \begin{pmatrix} A_P(s_0) & B_P(s_0) & 0 \\ C_P(s_0) & D_P(s_0) & -I_p \\ 0 & N_K(s_0) & Z_K(s_0) \end{pmatrix} = \text{CLCP}(s_0) = 0 \quad (4.4)$$

ist, und zwar unabhängig von (Z_K, N_K) . Diese Nullstelle kann durch Wahl eines Reglers nicht verschoben werden, sie ist eine Entkoppelungsnullstelle bzw. *fixe* Nullstelle.

Dasselbe gilt für ein nicht rechtsteilerfremdes Paar $\begin{pmatrix} A_P \\ C_P \end{pmatrix}$. Dann gibt es mindestens eine Zahl s_0 , für die der Rang von $\begin{pmatrix} A_P(s_0) \\ C_P(s_0) \end{pmatrix}$ nicht voll ist, was gleichbedeutend mit linear abhängigen Spalten ist und ebenfalls Gl. (4.4) zur Folge hat.

4.2.2 Reduktion der Dimension des Problems

Die zu ergänzenden m Zeilen $(0, N_K, Z_K)$ haben $r + p + m$ Spalten, von denen die ersten r Spalten Null sein müssen, um eine Ausgangsrückführung zu erhalten. Das ist unter Umständen hinderlich, da diese Bedingung immer wieder durch zusätzlichen Aufwand sicherzustellen ist. Daher ist es ratsam, die ersten r Spalten herauszunehmen. Ausgangspunkt ist dafür wiederum die Überführung des Paares $\begin{pmatrix} A_P \\ C_P \end{pmatrix}$ in die Hermitesche Normalform³

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L \\ U_{21}^L & U_{22}^L \end{pmatrix}}_{U^L} \begin{pmatrix} A_P \\ C_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei man o. B. d. A. $\det U^L = 1$ annehmen kann, denn U^L ist unimodular. Wendet man die Matrix U^L auf A_{CL} an, so erhält man

$$\begin{aligned} \det A_{\text{CL}} &= \det \left[\begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L & 0 \\ U_{21}^L & U_{22}^L & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_P & B_P & 0 \\ C_P & D_P & -I_p \\ 0 & N_K & Z_K \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \left(\begin{array}{c|cc} R & U_{11}^L B_P + U_{12}^L D_P & -U_{12}^L \\ 0 & U_{21}^L B_P + U_{22}^L D_P & -U_{22}^L \\ 0 & N_K & Z_K \end{array} \right) = \det R \cdot \det \begin{pmatrix} U_{21}^L B_P + U_{22}^L D_P & -U_{22}^L \\ N_K & Z_K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man kann nun

$$\tilde{A}_P := -U_{22}^L \quad \text{und} \quad \tilde{B}_P := U_{21}^L B_P + U_{22}^L D_P$$

definieren und das Problem auf die Ergänzung bzw. Gestaltung von

$$\frac{1}{\det R} \cdot \text{CLCP}(s) = \det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ N_K & Z_K \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

³siehe [Rei06], Abschnitt 6.2.4

reduzieren. Falls der Rechtsteiler R unimodular ist, so legt man durch Wahl von (N_K, Z_K) sämtliche Nullstellen des CLCP fest. Ist er nicht unimodular, so sind die Nullstellen von $\det R$ fixe Nullstellen und ohnehin nicht verschieblich (siehe voriger Abschnitt 4.2.1).

Die Matrizen $(\tilde{A}_P, \tilde{B}_P)$ können als Matrizen der Eingangs-, Ausgangsdarstellung der Regelstrecke interpretiert werden, denn wendet man U^L auf die Gleichungen 2.1 der Regelstrecke an, so erhält man

$$\begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L \\ U_{21}^L & U_{22}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_P & B_P & 0 \\ C_P & D_P & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} R & U_{11}^L B_P + U_{12}^L D_P & -U_{12}^L \\ 0 & U_{21}^L B_P + U_{22}^L D_P & -U_{22}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

In der zweiten Hyperzeile steht dann

$$\tilde{B}_P \mathbf{u} + \tilde{A}_P \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Beispiel 4.1 Als Beispiel diene das aufrechtstehende verschiebliche Zweifachpendel auf einer waagerechten geraden Bahn. Das Pendel werde durch die Kraft f auf den Wagen und ein Drehmoment d_1 zwischen dem Wagen und dem ersten Pendelkörper gesteuert. Reibeffekte sollen nicht berücksichtigt werden. Zur besseren Übersicht soll von Anfang an mit numerischen Werten gerechnet werden. Die Modellierung der Pendelkörper habe folgende (normierten) Werte ergeben:

g	a_1	l_1	ψ_1	l_2	m_0	m_1	m_2	f^{ss}	d_1^{ss}
10	0.25	0.2	0	0.4	0.25	0.25	0.1	0	0

Die Ruhelagen ergeben sich damit aus Gl. (B.15) zu

$$w_0^{\text{ss}} = \text{const}, \quad \varphi_1^{\text{ss}} = \pi \quad \text{und} \quad \varphi_2^{\text{ss}} = \pi.$$

Die linearisierte Bewegungsgleichung $H(\mathbf{q}^{\text{ss}})\ddot{\mathbf{q}} + A_0\mathbf{q} + B_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ lautet mit Gl. (B.10) und Gl. (B.17)

$$\begin{pmatrix} 0.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.75 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 \\ -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.016 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Durch die aufrecht stehenden Pendelkörper ist die Regelstrecke instabil und eine Regelung ist unabdingbar. Als Messgrößen stehen der Weg w_0 und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$ des ersten

Pendelkörpers zur Verfügung. Die Matrix A_{CL} in Gleichung (4.3) lautet also

$$A_{CL} = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 0.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.75 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.016 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & & 0 & N_K\left(\frac{d}{dt}\right) & & Z_K\left(\frac{d}{dt}\right) & \end{array} \right).$$

Eine Matrix, die das Paar $\begin{pmatrix} A_P \\ C_P \end{pmatrix}$ in die Hermitesche Normalform überführt, ist

$$U^L = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 \\ -\frac{1}{75} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{30} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & \frac{1}{150} \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -\frac{1}{1500} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \frac{13}{600} \left(\frac{d}{dt}\right) \\ -1 & 0 & -2.5 & 0.5 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.05 \left(\frac{d}{dt}\right) \\ \hline -0.4 \left(\frac{d}{dt}\right) & -1.6 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0.12 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & -0.004 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 1.2 \\ -0.16 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 6 & -1.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 3.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.008 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 - 1.65 \left(\frac{d}{dt}\right) \end{array} \right).$$

Mit ihr reduziert sich das Problem der Nullstellenzuweisung auf

$$\det \left(\begin{array}{cc|cc} 0.4 \left(\frac{d}{dt}\right) & 1.6 \left(\frac{d}{dt}\right) & -0.12 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & 0.004 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.2 \\ 0.16 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 6 & 1.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -3.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.008 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 1.65 \left(\frac{d}{dt}\right) \\ \hline N_K\left(\frac{d}{dt}\right) & & Z_K\left(\frac{d}{dt}\right) & \end{array} \right) \stackrel{!}{=} 24 \text{ CLCP} \left(\frac{d}{dt}\right). \quad \blacksquare$$

4.3 Parametrierung sämtlicher Zeilen (N_K, Z_K) zu einem vorgegebenen CLCP

In Abschnitt 4.2.1 wurden Entkoppelungsnulstellen diskutiert. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Abwesenheit von Entkoppelungsnulstellen für die beliebige Zuweisbarkeit von Nullstellen notwendig und hinreichend ist. Dann kann man nicht nur eine, sondern sämtliche Zeilen (N_K, Z_K) , die ein vorgegebenes CLCP erzeugen, angeben (vgl. [LR07]). Die Frage, ob diese Zeilen einen sinnvollen Regler $K(s) = -N_P^{-1}Z_P$ ergeben, soll an dieser Stelle offen gelassen werden.

Satz 4.2 Zu einem Paar $(\tilde{B}_P, \tilde{A}_P)$ existiert ein weiteres Paar (F_P^N, F_P^Z) , so dass

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix} = 1 \quad (4.6)$$

gilt. Dann sind sämtliche mögliche Paare (N_K, Z_K) , die ein vorgegebenes charakteristisches Polynom (CLCP) erzeugen, durch

$$N_K\left(\frac{d}{dt}\right) = M_{CP}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot F_P^N\left(\frac{d}{dt}\right) + M_P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \tilde{B}_P\left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$Z_K\left(\frac{d}{dt}\right) = M_{CP}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot F_P^Z\left(\frac{d}{dt}\right) + M_P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \tilde{A}_P\left(\frac{d}{dt}\right)$$

mit

$$\det M_{CP}\left(\frac{d}{dt}\right) = \text{CLCP}\left(\frac{d}{dt}\right) \quad \text{und} \quad M_P\left(\frac{d}{dt}\right) \text{ beliebig}$$

parametrisiert.

Beweis: Die Existenz des Paares (F_P^N, F_P^Z) folgt aus Satz 2.2, denn ist eine Matrix unimodular, so kann deren Determinante o. B. d. A. auch eins sein. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ M_{CP}F_P^N + M_P\tilde{B}_P & M_{CP}F_P^Z + M_P\tilde{A}_P \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ M_P & M_{CP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix} \right] = \det M_{CP} \cdot 1 = \text{CLCP} .$$

Ist die Matrix $\begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix}$ unimodular, so hat sie eine ebenfalls unimodulare Inverse

$$\begin{pmatrix} U_{11}^R & U_{12}^R \\ U_{21}^R & U_{22}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix}^{-1} .$$

Mit dieser folgt umgekehrt aus einer geglückten Nullstellenzuweisung

$$\begin{aligned} \text{CLCP} &= \det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ N_K & N_P \end{pmatrix} \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ N_K & Z_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^R & U_{12}^R \\ U_{21}^R & U_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ N_K U_{11}^R + Z_K U_{21}^R & N_K U_{12}^R + Z_K U_{22}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P & \tilde{A}_P \\ F_P^N & F_P^Z \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_P & M_{CP} \end{pmatrix} \cdot 1 = \det M_{CP} . \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

Es sei noch einmal betont, dass hier lediglich polynomiale Zeilen parametrisiert werden. Damit sich aus diesen ein sinnvoller Regler $K(s) = -N_K^{-1}Z_K$ ergibt, muss N_K invertierbar sein. Ferner sollte der Regler proper sein, weshalb das Paar (N_K, Z_K) die Bedingungen von Satz A.2 erfüllen sollte. Oft ist F_P^N jedoch singularär, denn falls $\det \tilde{A}_P$ den Minor höchsten Grades liefert, folgt aus der Unimodularität (4.6), dass $\det F_P^N = 0$ gelten muss. Man ist also gezwungen, M_P verschieden von Null zu wählen, wodurch man sich in Z_K die üblicherweise hohen $\left(\frac{d}{dt}\right)$ Potenzen von \tilde{A}_P einhandelt. Die $\left(\frac{d}{dt}\right)$ Potenzen in Z_K kleiner als in N_K zu halten und dabei eine bestimmte Reglerstruktur zu erzielen, erweist sich in Beispielrechnungen als außerordentlich schwierig, zumal man M_{CL} nur mit wenigen linearen freien Parametern ansetzen kann, ohne die Forderung nach $\det M_{CL} = \text{CLCP}$ aufzugeben.

4.4 Nullstellenzuweisung durch Ergänzung von Zeilen vorgegebener Struktur

Wegen der oben genannten Schwierigkeiten favorisiert der Autor für die praktische Berechnung⁴ eines Reglers mit vorgegebener Struktur einen anderen Zugang.

4.4.1 Nullstellenzuweisung bei einer skalaren Stellgröße

Ist die Anzahl m der Stellgrößen eins, so lässt sich die eine fehlende Zeile über einen Koeffizientenvergleich finden. Die Methode folgt im Wesentlichen der Vorgehensweise in [Rei06], Abschnitt 6.3.1.1. Man fasst (N_K, Z_K) zu einem polynomialen Zeilenvektor $\mathbf{f}_P^T(s)$ mit dem Grad k_f zusammen,

$$(N_K \quad Z_K) =: \mathbf{f}_P^T(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_f} \mathbf{f}_\kappa^T s^\kappa. \quad (4.7)$$

Das CLCP soll k_C Nullstellen haben, mit den Werten s_κ für $\kappa = 1, \dots, k_C$. Die Forderung lautet also

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ \mathbf{f}_P^T(s) & \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=1}^{k_C} (s - s_\kappa). \quad (4.8)$$

Meistens ist es angezeigt, die Matrix A_{CL} zeilenreduziert⁵ zu entwerfen, um keine improperen Übertragungsfunktionen zu erhalten. Damit ergäbe sich k_C zu

$$k_C = \text{grad} \det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ \mathbf{f}_P^T(s) & \end{pmatrix}.$$

Genau genommen, kann das Sollpolynom $\prod (s - s_\kappa)$ noch mit jedem reellen Faktor multipliziert werden, ohne die Nullstellen zu verändern. Jedoch kann darauf o. B. d. A. verzichtet werden, wie man am Ende dieses Abschnitts sehen wird. Die Determinante der linken Seite der Forderung (4.8) wird mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der Zeile $\mathbf{f}_P^T(s)$ entwickelt:

$$\sum_{\kappa=1}^{p+m} \left(\sum_{\ell=0}^{k_f} f_\ell^\kappa s^\ell \right) p_\kappa(s) = s^{k_C} + \sum_{\kappa=0}^{k_C-1} c_\kappa s^\kappa,$$

mit den nach dem Wurzelsatz von Vieta berechneten Koeffizienten c_κ und den komplementären $(p \times p)$ Minoren

$$p_\kappa = \det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ \mathbf{e}_\kappa^T & \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Darin ist \mathbf{e}_κ ein Einheitsvektor, der an der κ -ten Stelle eins und sonst null ist. Die Koeffizienten c_κ werden in einem Vektor

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{k_C-2}, c_{k_C-1}, 1)^T \quad (4.10)$$

⁴bei einer zeitkontinuierlichen Systembeschreibung

⁵siehe Abschnitt A.1

zusammengefasst. In gleicher Weise fasst man auch die Koeffizienten $c_\mu^{p_\kappa}$ der Polynome $p_\kappa(s)$ in einer Matrix M zusammen:

$$M = \begin{pmatrix} c_0^{p_1} & c_0^{p_2} & \cdots & c_0^{p_p} & c_0^{p_{p+1}} \\ c_1^{p_1} & c_1^{p_2} & \cdots & c_1^{p_p} & c_1^{p_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k_p}^{p_1} & c_{k_p}^{p_2} & \cdots & c_{k_p}^{p_p} & c_{k_p}^{p_{p+1}} \end{pmatrix},$$

mit k_p als dem maximalen Grad aller Minoren $p_\kappa(s)$. Wenn man mit dem Vergleich der nullten Potenz beginnt, erhält man aus dem Koeffizientenvergleich von Gl. (4.8) das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} \text{---} & \mathbf{0}^T & \cdots \\ \hline M & M & \\ \hline 0 & 0 & \cdots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \hline M \end{array} \end{pmatrix}}_{\widetilde{M}} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{k_f} \end{pmatrix} = \mathbf{c}. \quad (4.11)$$

Dieses Gleichungssystem muss nach den Regeln der linearen Algebra lösbar sein, das bedeutet, dass

$$\text{Rang } \widetilde{M} = \text{Rang} \left(\widetilde{M}, \mathbf{c} \right) \quad (4.12)$$

gelten muss. Wenn beliebige Polplatzierbarkeit gefordert ist, muss die Matrix \widetilde{M} vollen Zeilenrang haben. Daraus folgen zwei notwendige Bedingungen:

1. Die Matrix \widetilde{M} muss mindestens ebenso viele Spalten wie Zeilen haben, woraus

$$k_p + 1 + k_f \leq (p + 1)(k_f + 1) \quad \Rightarrow \quad k_f \geq \frac{k_p - p}{p}$$

folgt. Bei properen Systemen ist $k_p = \text{grad det } \widetilde{A}_P$.

2. Das Paar $(\widetilde{A}_P, \widetilde{B}_P)$ und mithin auch das Paar (A_P, B_P) müssen linksteilerfremd sein.

Beweis: Bei einem nichttrivialen Linksteiler gibt es mindestens ein s_0 , für das der $\text{Rang}(\widetilde{A}_P(s_0), \widetilde{B}_P(s_0))$ abfällt. Daraus folgt, dass s_0 eine gemeinsame Nullstelle aller Minoren $p_\kappa(s)$ aus Gl. (4.9) ist, also $p_\kappa(s_0) = 0$ für alle $\kappa = 1, \dots, p + 1$. Daraus jedoch folgt

$$\left(1 \quad s_0 \quad s_0^2 \quad \cdots \quad s_0^{k_p+k_f} \right) \widetilde{M} = \mathbf{0}^T,$$

womit die Nullzeile erzeugt ist.

q. e. d.

Dies wurde bereits in Abschnitt 4.2.1 festgestellt. Sollte das Paar $(\widetilde{B}_P, \widetilde{A}_P)$ nicht linksteilerfremd sein, so empfiehlt es sich, falls dieser Linksteiler akzeptabel ist, den gemeinsamen Faktor bereits bei der Aufstellung der Polynome p_κ zu kürzen. Dann wird die Matrix M wieder vollen Rang besitzen.

Doch auch wenn beide Bedingungen erfüllt sind, ist der volle Zeilenrang nicht garantiert, wie Beispiel 4.6 zeigen wird. Wenn das System jedoch steuerbar ist, so wird für ein genügend großes k_f die Matrix \widetilde{M} vollen Zeilenrang haben.

Abschließend wird die Behauptung belegt, dass das Multiplizieren des Sollpolynoms $\prod(s - s_\kappa)$ mit einem reellen Faktor k keine Auswirkungen auf den Regler hat und damit o. B. d. A. $k = 1$ gewählt werden kann.

Beweis: Ein Faktor $k \neq 1$ stünde in Gleichung (4.11) als Linearfaktor vor \mathbf{c}

$$\widetilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{k_f} \end{pmatrix} = k\mathbf{c},$$

woraus eine um den Faktor k gestreckte Lösung

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_0 & \cdots & \tilde{\mathbf{f}}_{k_f} \end{pmatrix}^T = k \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \cdots & \mathbf{f}_{k_f} \end{pmatrix}^T$$

folgt. Man erhält damit aus Gl. (4.7) ein anderes Matrizenpaar

$$\begin{pmatrix} \widetilde{N}(s) & \widetilde{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kN(s) & kZ(s) \end{pmatrix},$$

aber der daraus resultierende Regler bleibt für alle k derselbe, denn

$$K(s) = \left(\widetilde{N}(s)\right)^{-1} \widetilde{Z}(s) = \left(kN(s)\right)^{-1} kZ(s) = \left(N(s)\right)^{-1} Z(s). \quad \mathbf{q. e. d.}$$

Das Verfahren soll an einem Beispiel vorgeführt werden.

Beispiel 4.2 Es wird das aufrecht stehende Zweifachpendel aus Beispiel 4.1 verwendet, mit dem Unterschied, dass die Stellgröße d_1 weggelassen wird. Als Messgrößen stehen dieses Mal sämtliche inneren Größen w_0 , φ_1 und φ_2 zur Verfügung. Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$\begin{pmatrix} 0.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 \\ -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.75 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 \\ -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.016 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Um die Rechnung einfach zu halten, sollen die Nullstellen des CLCP alle bei -1 liegen. Die Forderung (4.8) lautet damit

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0.6s^2 & -0.075s^2 & -0.04s^2 \\ 0 & -0.075s^2 & 0.01625s^2 - 0.75 & 0.01s^2 \\ 0 & -0.04s^2 & 0.01s^2 & 0.016s^2 - 0.4 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (s+1)^{k_C}.$$

$\mathbf{f}_P^T(s)$

Der Grad k_C des CLCP soll einstweilen offen bleiben. Aus den Polynom p_κ nach Formel (4.9)

$$p_1 = \frac{1}{500} \left(\frac{1}{50} s^6 - \frac{153}{40} s^4 + 90s^2 \right) = \det A_P(s)$$

$$p_2 = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{625} s^4 - \frac{37}{200} s^2 + 3 \right)$$

$$p_3 = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{21}s^4 - 3s^2 \right)$$

$$p_4 = -\frac{1}{100} \left(\frac{1}{100}s^4 + 3s^2 \right)$$

ergibt sich die Matrix M zu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.18 & 0.0185 & 0.03 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00765 & -0.00016 & -0.0008 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00004 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spätestens an dieser Stelle ist klar, dass eine konstante Ausgangsrückführung das System nicht stabilisieren kann, denn die Bedingung (4.12) ist mit $\tilde{M} = M$ gewiss nicht erfüllbar. Mit dem Grad $k_P = 6$ und $p = 3$ Messgrößen muss der Grad k_F mindestens Eins betragen. Setzt man also $k_F = 1$, so erhält man aus der Lösung von Gleichung (4.11)

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 \\ -0.18 & 0.0185 & 0.03 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.18 & 0.0185 & 0.03 & 0.03 \\ 0.00765 & -0.00016 & -0.0008 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00765 & -0.00016 & -0.0008 & 0.0001 \\ -0.00004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00004 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \\ f_0^3 \\ f_0^4 \\ f_1^1 \\ f_1^2 \\ f_1^3 \\ f_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 21 \\ 35 \\ 35 \\ 21 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

zunächst den polynomialen Zeilenvektor

$$\mathbf{f}_P^T(s) = 100 \begin{pmatrix} -1750 - 250s & -0.03333 - 0.2333s & -16430 - 2524s & 5937 + 1035s \end{pmatrix}$$

und damit den Übertragungsfunktionsvektor des gesuchten Reglers

$$K(s) = \begin{pmatrix} -\frac{7s + 1}{7500(s + 7)} & -\frac{10.09s + 65.72}{s + 7} & \frac{4.142s + 23.75}{s + 7} \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der Matrix in Gleichung (4.13) ungleich Null ist, ist die Gleichung mit jedem Vektor \mathbf{c} lösbar. Die Pole des Regelkreis sind daher mit einem Regler erster Ordnung beliebig platzierbar. Ein auf einem Zustandsbeobachter basierender Regler hätte mindestens Ordnung drei. ■

4.4.2 Nullstellenzuweisung bei mehreren Stellgrößen

Bei $m > 1$ wird aus dem zu ergänzenden Zeilenvektor $\mathbf{f}_P^T(s)$, Gl. (4.7), eine polynomiale Matrix $F_P(s)$. Mit ihr kann das Problem analog zu Gleichung (4.8) formuliert werden

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ F_P(s) & \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=0}^{k_C} (s - s_\kappa).$$

Doch kann diese Forderung nicht einfach über einen Koeffizientenvergleich gelöst werden, da die Koeffizienten f nicht mehr linear auftreten. Vielmehr handelt es sich dann um ein multilineares Problem. Untersuchungen dazu finden sich in [RF04], [LK95] oder [LK07] bzw. dort angegebener Literatur. Hier soll ein anderer Weg beschritten werden, der mit den Mitteln der linearen Algebra auskommt. Die Kernidee dieses Verfahrens ist, nicht alle Zeilen von $F_P(s)$ auf einmal anzusetzen, sondern, ähnlich wie in Abschnitt 2.3, Zeile um Zeile zu ergänzen. Doch wird hier nicht auf eine unimodulare Matrix hingearbeitet. Stattdessen werden mit jedem Schritt Zahlen s_κ festgelegt, für die die ergänzte Matrix einen Rangabfall hat. Wenn am Ende nur noch eine Zeile fehlt, kann man wie in Abschnitt 4.4.1 verfahren. Hat man dabei sämtliche gewünschten Nullstellen des CLCP „eingebracht“, so ist das Problem gelöst.

Die zu bestimmende Matrix $F_P(s)$ wird in ihre m Zeilen zerlegt:

$$F_P(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_P^{1,T}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_P^{m,T}(s) \end{pmatrix}.$$

Jede Zeile wiederum analog zu Gl. (4.7) wird als Summe ihrer s Potenzen dargestellt:

$$\mathbf{f}_P^{\mu,T}(s) = \sum_{\ell=0}^{k_{F\mu}} \mathbf{f}_\ell^{\mu,T} s^\ell \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m,$$

wobei jede Zeile einen eigenen Grad $k_{F\mu}$ haben kann. Man wählt im ersten Schritt aus den k_C gewünschten Nullstellen k_{C1} einfache Nullstellen aus und fordert

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s_\kappa) & \tilde{A}_P(s_\kappa) \\ \mathbf{f}_P^{1,T}(s_\kappa) \end{pmatrix} \stackrel{!}{<} p+1 \quad \text{für } \kappa = 1, \dots, k_{C1}.$$

Aus dieser Forderung folgt, dass es für jede Nullstelle s_κ mindestens einen reellen Zeilenvektor $\mathbf{r}^T \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ geben muss, für den

$$\mathbf{r}_\kappa^T \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s_\kappa) & \tilde{A}_P(s_\kappa) \end{pmatrix} + \sum_{\ell=0}^{k_{F1}} \mathbf{f}_\ell^{1,T} s_\kappa^\ell \stackrel{!}{=} \mathbf{0}^T \quad \text{für } \kappa = 1, \dots, k_{C1}$$

gilt. Diese k_{C1} Forderungen lassen sich in einer matrixwertigen Forderung zusammenschreiben:

$$\left(\mathbf{r}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{r}_{k_{C1}}^T, \quad f_0^{1,T} \quad \dots \quad f_{k_{F1}}^T \right) \underbrace{\begin{pmatrix} (\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\tilde{B}_P(s_{k_{C1}}), \tilde{A}_P(s_{k_{C1}})) & \\ I_{p+m} & \dots & I_{p+m} & \\ s_1 I_{p+m} & \dots & s_{k_{C1}} I_{p+m} & \\ \vdots & & \vdots & \\ s_1^{k_{F1}} I_{p+m} & \dots & s_{k_{C1}}^{k_{F1}} I_{p+m} & \end{pmatrix}}_R = \mathbf{0}^T.$$

Das ist genau dann erfüllbar, wenn die transponierte Matrix R^T einen Kern hat. Dazu muss R mehr Zeilen als Spalten haben, d. h.

$$k_{C1}p + (k_{F1} + 1)(p + m) > k_{C1}(p + m) \quad \Leftrightarrow \quad k_{C1} < (k_{F1} + 1)\frac{p+m}{m}.$$

Andernfalls hat die Matrix R immer vollen Zeilenrang, denn der Rang $(\tilde{B}_P, \tilde{A}_P)$ ist für alle $s \in \mathbb{C}$ voll und auch die übrigen Zeilen können nur für identische s_κ linear abhängig sein, was der Forderung nach einfachen Nullstellen widerspricht.

Die letzten $(k_{F1} + 1)$ Zeilen vom $\ker R^T$ liefern dann die gesuchten $\mathbf{f}_\ell^{\mu,T}$ für die erste Zeile $\mathbf{f}_P^{\mu,T}(s)$. Dieses Verfahren lässt sich offensichtlich von Zeile zu Zeile mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ \mathbf{f}_P^{1,T}(s) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{B}_P^1(s_\kappa) & \tilde{A}_P^1(s_\kappa) \end{pmatrix}$$

wiederholen. Bei der letzten Zeile wechselt man zweckmäßigerweise auf das Verfahren aus Abschnitt 4.4.1, das einfacher zu rechnen ist und außerdem auch mehrfache Nullstellen zulässt. Zwei Hinweise seien noch gegeben:

Bei der Bestimmung des Kerns von R^T sind die ersten Schritte abstrakt ausführbar. Man verwendet die Einheitsmatrizen um in den ersten $(k_{F1} + 1)p$ eine Dreiecksform zu erzeugen. Damit ist die Matrix, deren Kern aufwendiger zu bestimmen ist, höchstens vom Format $k_{C1}p + (k_{F1} + 1)m \times (k_{C1} - k_{F1} - 1)p + k_{C1}m$. Zum Beispiel ist bei $k_{F1} = 0$ nur der Kern der gerahmten Matrix aufwendiger zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} -(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & \cdots & -(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) \\ (\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) & & \\ & \ddots & \\ & & (\tilde{B}_P(s_{k_{C1}}, \tilde{A}_P(s_{k_{C1}})) \end{matrix}} & \cdots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ I_{p+m} & I_{p+m} & \cdots & I_{p+m} \end{pmatrix}.$$

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass genaugenommen nicht das Ausgangsproblem (4.5) gelöst wird, sondern lediglich sichergestellt wird, dass

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s_\kappa) & \tilde{A}_P(s_\kappa) \\ F_P(s_\kappa) \end{pmatrix} < m + p \quad \text{für ausgewählte } s_\kappa$$

gilt. Es ist aber nicht sichergestellt, dass sich das gefundene $F_P(s)$ auch in ein sinnvolles Matrizenpaar (N_K, Z_K) , das eine Reglerübertragungsmatrix $K(s) = -N_K^{-1}Z_K$ ergibt, aufspalten lässt. Folgende Probleme treten auf:

1. Dieses Verfahren lässt auch Lösungen zu, bei denen

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \tilde{B}_P(s) & \tilde{A}_P(s) \\ \mathbf{f}_P^{1,T}(s) \end{pmatrix} < p + 1 \quad \text{für sämtliche } s \in \mathbb{C}$$

gilt. Solche Lösungen sind nicht zulässig, denn sie hätten $\text{CLCP}(s) \equiv 0$ zur Folge. Sollte das auftreten, so muss man durch geeignete Wahl von k_{F1} und k_{C1} sicherstellen, dass der $\ker R^T$ mehrdimensional ist, und eine geeignete Lösung herausuchen.

2. Es ist jederzeit möglich, zu einer neu gefundenen Zeile eine bereits bestehende Zeile zu addieren, ohne die Determinante zu verändern. Wenn also eine Zeile $f_P^{k,T}$ die gleiche polynomiale Struktur wie eine vorhergehende Zeile $f_P^{(k-\kappa),T}$ ($k > 1$ und $\kappa > 0$) aufweist, so wird der Algorithmus eine scheinbare Vielfalt an Lösungen $f_P^{k,T} + af_P^{(k-\kappa),T}$, $a \in \mathbb{R}$, anbieten, die allerdings alle auf dieselbe Reglerübertragungsmatrizen $K(s) = -N_K^{-1}Z_K$ führen. In diesen Fällen kann der Parameter a o. B. d. A. gleich Null gesetzt werden.
3. Es kann vorkommen, dass ein $N_K(s)$ entsteht, welches nicht invertierbar ist. Auch hier muss man durch geeignete Wahl von k_{F1} und k_{C1} sicherstellen, dass der $\ker R^T$ mehrdimensional ist, und eine geeignete Lösung herausuchen.

Ferner sei darauf hingewiesen, dass die Reihenfolge, in der die Nullstellen s_κ für die Festlegung von Zeilen herangezogen werden, in keiner Weise festliegt. Im Gegenteil ergeben sich in Beispielrechnungen des Autors für jede Reihenfolge in der Übertragungsfunktion unterschiedliche Regler, die sämtlich die Nullstellen in gewünschter Weise platzieren. Derzeit bleibt dem Anwender nur übrig, alle (abzählbar vielen) Möglichkeiten mit Rechnerunterstützung durchzuspielen und nach geeigneten Kriterien den günstigsten Regler auszusuchen.

Beispiel 4.3 Das vorgestellte Verfahren soll an der Fortsetzung des Beispiels 4.1 anschaulich gemacht werden. Das gewünschte CLCP habe neben anderen die Nullstellen $s_1 = -\frac{5}{4}$, $s_2 = -\frac{5}{2}$ und $s_3 = -5$, die durch Anfügen der ersten Zeile fixiert werden sollen. Damit liegt die Anzahl der Spalten von R fest, nämlich $k_{C1}(p+m) = 3 \cdot 4 = 12$. Da R mehr Zeilen als Spalten haben muss, geht daraus hervor, dass der Grad k_{F1} mindestens Eins betragen muss, denn für $k_{F1} = 0$ hätte R erst zehn Zeilen. Daher wird $k_{F1} = 1$ gewählt. Die Matrix R lautet damit:

$$R = \begin{pmatrix} (\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & & & \\ & (\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) & & \\ & & (\tilde{B}_P(s_3), \tilde{A}_P(s_3)) & \\ & I_4 & & I_4 \\ & s_1 I_4 & & s_2 I_4 \\ & & I_4 & \\ & & & I_4 \\ & & & s_3 I_4 \end{pmatrix}.$$

Um nicht von der relativ großen Matrix R^T den Kern bestimmen zu müssen, multipliziert man die Matrix R zuvor von links mit

$$H_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_4 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_1 I_4 & & I_4 \\ I_2 & 0 & 0 & \frac{s_2}{s_1-s_2}(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & \frac{1}{s_2-s_1}(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & \\ 0 & I_2 & 0 & \frac{s_1}{s_2-s_1}(\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) & \frac{1}{s_1-s_2}(\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) & \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} I_4 & & & & & \\ & I_4 & & & & \\ & & I_4 & & & \\ & (s_2-s_1)I_4 & & & (s_3-s_1)I_4 & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \frac{s_2-s_3}{s_1-s_2}(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) \\ \frac{s_1-s_3}{s_2-s_1}(\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) \\ (\tilde{B}_P(s_3), \tilde{A}_P(s_3)) \end{matrix}} & & \end{pmatrix}.$$

Nun ist nur noch von dem gerahmten Teil der Kern zu bestimmen, dieser lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 146 & 137 & 0 & 164.4 & 1040.25 & 246.45 \\ 0 & -451 & 584 & -541.2 & -1660.75 & -544.35 \end{pmatrix}}_{\tilde{n}} \begin{pmatrix} 3 & 12 & -5.625 & -3.675 \\ -21 & -30 & 67.5 & 12 \\ -1 & -4 & 0.46875 & 2.4125 \\ 12.5 & 5 & -11.25 & -4.09375 \\ -2 & -8 & 15 & 1.3 \\ 10 & 40 & -90 & -7.25 \end{pmatrix} = 0.$$

Der Kern der Matrix R ist dann der Kern \tilde{n} , multipliziert mit den letzten drei Hyperzeilen von H_R . Von diesem Kern wiederum werden nur die letzten acht Spalten benötigt, um daraus den polynomialen Zeilenvektor $f_P^{1,T}(s)$ zu gewinnen. Da der Kern von R zweidimensional ist, bleibt beim Aufstellen von $f_P^{1,T}(s)$ ein Freiheitsgrad a übrig⁶, und man erhält aus

$$\tilde{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{s_2}{s_1-s_2}(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) & \frac{1}{s_2-s_1}(\tilde{B}_P(s_1), \tilde{A}_P(s_1)) \\ \frac{s_1}{s_2-s_1}(\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) & \frac{1}{s_1-s_2}(\tilde{B}_P(s_2), \tilde{A}_P(s_2)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den gesuchten Zeilenvektor (aus Platzgründen transponiert geschrieben)

$$f_P^1(s) = \begin{pmatrix} (414a - 171.6)s - 1242 + 4192a \\ (300 - 1591.2a)s - 36 + 532a \\ (5573.1a - 1507.2)s - 959.25 + 3785.25a \\ -(26.115 + 6.575a)s + 303.8625 - 1820.4375a \end{pmatrix}.$$

Der verbleibende Faktor a kann im weiteren Verlauf noch nutzbringend festgelegt werden, ohne das sich an der Tatsache, dass

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0.4s & 1.6s & -0.12s^3 & 0.004s^2 + 1.2 \\ 0.16s^2 + 6 & 1.6s^2 & -3.6s^2 & -0.008s^3 + 1.65s \\ & & f_P^{1,T}(s) & \end{pmatrix} = 2 \quad \text{nur für } s = -\frac{5}{4}, s = -\frac{5}{2}, s = -5$$

gilt, etwas ändert. ■

4.4.3 Drei weitere Beispiele

Bei dem in den Abschnitten 4.4.1 und insbesondere 4.4.2 vorgestellten Verfahren handelt es sich nicht um ein klares, rechnerisch abzuarbeitendes Verfahren. Vielmehr ist es eine Diskussion über die Nutzbarkeit der linearen Algebra für die Nullstellenzuweisung. Darum sollen im folgenden Abschnitt die Möglichkeiten, die die Vorgehensweise bietet, an drei Beispielen vorgeführt werden. In den ersten beiden Beispielen 4.4 und 4.5 wird die in Beispiel 4.3 begonnene Nullstellenzuweisung auf zwei unterschiedliche Weisen zu Ende geführt. In dem dritten Beispiel 4.6 wird die Stabilisierbarkeit des aufrechten Zweifachpendels durch konstante Rückführung der mechanischen Größen w_0 , φ_1 und φ_2 diskutiert.

Im folgenden Beispiel wird versucht, das aufrechte Zweifachpendel durch einen Regler von möglichst geringer dynamischer Ordnung zu stabilisieren.

⁶Der Vektor $f_P^{1,T}(s)$ kann immer mit einem (weiteren) Faktor multipliziert werden, ohne die Lage der Nullstellen vom CLCP zu verändern.

Beispiel 4.4 In Beispiel 4.3 muss noch eine Zeile zum fertigen Regler ergänzt werden. Um eine möglichst geringe dynamische Ordnung des Reglers zu erhalten, wird die zweite Zeile $\mathbf{f}_P^{2,T}$ konstant angesetzt. Daher wird das CLCP den Grad $\text{grad det } A_P + k_{F1} = 7$ haben, denn in dem Paar (A_P, B_P) ist der Minor größter Ordnung gerade $\text{det } A_P$ (A_P ist zeilenreduziert). Die verbleibenden vier Nullstellen sollen sämtlich bei -10 liegen, damit sie „weit“ in der linken Halbebene liegen. Es soll das Verfahren aus Abschnitt 4.4.1 verwendet werden. Die Forderung (4.8) lautet hier

$$\det \begin{pmatrix} 0.4s & 1.6s & -0.12s^3 & 0.004s^2+1.2 \\ 0.16s^2+6 & 1.6s^2 & -3.6s^2 & -0.008s^3+1.65s \\ & \mathbf{f}_P^{1,T}(s) & & \\ f_1^{2,T} & f_2^{2,T} & f_3^{2,T} & f_4^{2,T} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (s + \frac{5}{4})(s + \frac{5}{2})(s + 5)(s + 10)^4.$$

Die vier Hauptminoren (4.9) von $\begin{pmatrix} B_P & A_P \\ \mathbf{f}_P^{1,T} \end{pmatrix}$ enthalten alle die bereits platzierten Nullstellen $-\frac{5}{4}$, $-\frac{5}{2}$ und 5. Daher werden diese beim Berechnen sofort gekürzt, und man erhält

$$\begin{aligned} p_1 &= (1.528a - 0.2880)s^4 + (7.569 - 12.61a)s^3 + (27.34a - 34.25)s^2 \\ p_2 &= (0.3974a - 0.1647)s^4 + (0.4205a - 0.2523)s^3 + (37.36 - 101.9a)s^2 \\ &\quad + (126.1a - 75.69)s - 442.0 + 1744a \\ p_3 &= (14.06a - 4.447)s^2 + (25.23 - 42.05a)s + 16.59 - 245.1a \\ p_4 &= (110.0a - 38.71)s^3 + (100.9 - 168.2a)s^2 + (589.4 - 2326a)s. \end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Ergebnisse ab jetzt auf vier Stellen gerundet angegeben. Daraus erhält man die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -442.0+1744a & 16.59-245.1a & 0 \\ 0 & -75.69+126.1a & 25.23-42.05a & 589.4-2326a \\ 27.34a-34.25 & 37.36-101.9a & -4.447+14.06a & 100.9-168.2a \\ -12.61a+7.569 & -0.2523+0.4205a & 0 & -38.71+110.0a \\ 1.528a-0.2880 & -0.1647+0.3974a & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Die Matrix M hat fünf Zeilen und nur vier Spalten. Das Gleichungssystem (4.11) ist daher überbestimmt und wird im Allgemeinen keine Lösung haben. Man kann jedoch mit dem in $\mathbf{f}_P^{1,T}(s)$ noch offenen Faktor a nutzen. Wenn es gelingt, diesen so festzulegen, dass Gleichung (4.12)

$$\text{Rang } M = \text{Rang}(M, \mathbf{c})$$

erfüllt ist, so ist das Gleichungssystem trotz der Überbestimmtheit lösbar. Der Forderung

$$\text{Rang}(M, \mathbf{c}) = 4$$

entspricht

$$\det(M, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -442.0+1744a & 16.59-245.1a & 0 & 10000 \\ 0 & -75.69+126.1a & 25.23-42.05a & 589.4-2326a & 4000 \\ 27.34a-34.25 & 37.36-101.9a & -4.447+14.06a & 100.9-168.2a & 600 \\ -12.61a+7.569 & -0.2523+0.4205a & 0 & -38.71+110.0a & 40 \\ 1.528a-0.2880 & -0.1647+0.3974a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(0.1862 - 1.950a + 6.923a^2 - 9.764a^3 + 4.344a^4) 10^9 = 0. \quad (4.15)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind

$$a_1 = 0.3888, \quad a_2 = 1.218, \quad a_3 = 0.2103 \quad \text{und} \quad a_4 = 0.4305.$$

Es zeigt sich, dass für $a = a_1$ die Matrix M nur noch den Rang 3 hat, womit das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Für die übrigen Nullstellen ergeben sich die Zeilenvektoren bei $a = a_2$

$$\mathbf{f}^{2,T} = (25.56 \quad -122.7 \quad -767.7 \quad 2.845),$$

bei $a = a_3$

$$\mathbf{f}^{2,T} = (-2349 \quad -975.1 \quad 1811 \quad -734.2)$$

und bei $a = a_4$

$$\mathbf{f}^{2,T} = (65.07 \quad -3633 \quad -12727 \quad -41.36).$$

Damit erhält man die gesuchten Paare (N_K, Z_K) bei $a = a_2$

$$(N_K(s), Z_K(s)) = \left(\begin{array}{cc|cc} 332.6s+3864 & -1638s+611.96 & 5281s+3651 & -34.12s-1913 \\ 25.56 & -122.7 & -767.7 & 2.845 \end{array} \right),$$

bei $a = a_3$

$$(N_K(s), Z_K(s)) = \left(\begin{array}{cc|cc} -84.53s-360.4 & -34.65s+75.89 & -335.1s-163.2 & -27.498s-78.99 \\ -2349 & -975.1 & 1811 & -734.2 \end{array} \right)$$

und bei $a = a_4$

$$(N_K(s), Z_K(s)) = \left(\begin{array}{cc|cc} 6.607s+562.5 & -384.9s+193.0 & 891.8s+670.1 & -28.95s-479.7 \\ 65.07 & -3633 & -12727 & -41.36 \end{array} \right).$$

Aus denen folgen die drei möglichen Übertragungsmatrizen des Reglers

$$a = a_2 \quad \rightarrow \quad K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1829s - 20.83}{s - 470.2} & -\frac{8.494s + 223.8}{s - 470.2} \\ \frac{374.7s + 2937}{s - 470.2} & -\frac{1.746s + 57.50}{s - 470.2} \end{pmatrix},$$

$$a = a_3 \quad \rightarrow \quad K(s) = \begin{pmatrix} -\frac{373.9s + 20.83}{s + 508.5} & -\frac{1.322s + 127.4}{s + 508.5} \\ \frac{902.8s + 994.4}{s + 508.5} & \frac{2.431s - 75.86}{s + 508.5} \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad a = a_4 \quad \rightarrow \quad K(s) = \begin{pmatrix} \frac{7813s - 20.83}{s - 1974} & -\frac{85.67s + 1681}{s - 1974} \\ \frac{136.4s + 6914}{s - 1974} & -\frac{1546s + 7.6334}{s - 1974} \end{pmatrix},$$

die die Nullstellen des CLCP wie gewünscht platzieren. Aus diesen kann man nach weiteren Gesichtspunkten einen Regler aussuchen. Ist man beispielsweise an einem stabilen Regler interessiert, so wird man den Regler auswählen, der sich bei $a = a_3$ ergeben hat. ■

Es sei noch angemerkt, dass über die Zuweisbarkeit der Nullstellen für die gegebene Reglerstruktur keine generelle Aussage getroffen werden kann, denn es ist nicht garantiert, dass das Polynom (4.15) reelle Nullstellen hat. Tatsächlich kann man bei der vorliegenden Methode erst im Nachhinein feststellen, ob es für eine bestimmte Konstellation funktioniert. Jedoch hält der Autor das bei heutiger Rechnerunterstützung für keinen erheblichen Nachteil. Wenn die in den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.2 genannten notwendigen Bedingungen nicht verletzt sind, so bestehen nach Erfahrung des Autors gute Chancen, dass die Rechnung zu einem Ergebnis führt.

In Beispiel 4.4 wurde versucht, mit einem Regler möglichst geringer dynamischer Ordnung zum Ziel zu kommen, ohne jedoch eine Aussage über die allgemeine Nullstellenzuweisbarkeit zu machen. Im folgenden Beispiel wird die Ordnung des Reglers um Eins erhöht. Dadurch können die Nullstellen beliebig zugewiesen werden und darüber hinaus können weitere Forderungen erfüllt werden. In der regelungstechnischen Praxis sind PID- T_1 -Regler sehr beliebt. Daher soll im folgenden Beispiel solch eine Struktur erzielt werden.

Beispiel 4.5 Ausgangspunkt ist wiederum die in Beispiel 4.3 begonnene Nullstellenzuweisung. Jedoch wird hier die zweite Zeile $f_P^{2,T}$ vom Grad eins angesetzt. Daher wird das CLCP hier $\text{grad det } A_P + k_{F1} + k_{F2} = 8$ haben. Die verbleibenden fünf Nullstellen sollen wiederum bei -10 liegen. Die Möglichkeiten des Parameters a sollen an dieser Stelle nicht genutzt werden; stattdessen wird der Parameter zur besseren Übersicht $a = 0$ gesetzt. Die Matrix M wird aus Gl. (4.14) übernommen. Die Gleichung (4.11) lautet hier

$$\begin{pmatrix} 0 & -442.0224 & 16.5888 & 0 & \dots \\ 0 & -75.6864 & 25.2288 & 589.3632 & \dots \\ -34.24896 & 37.363392 & -4.44672 & 100.9152 & \dots \\ 7.56864 & -0.252288 & 0 & -38.7072 & \dots \\ -0.288 & -0.164736 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -442.0224 & 16.5888 & 0 \\ \dots & 0 & -75.6864 & 25.2288 & 589.3632 \\ \dots & -34.24896 & 37.363392 & -4.44672 & 100.9152 \\ \dots & 7.56864 & -0.252288 & 0 & -38.7072 \\ \dots & -0.288 & -0.164736 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^2 \\ f_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 50 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Da die Matrix \widetilde{M} Rang sechs hat, ist die Gleichung für jede beliebige linke Seite c lösbar. Mit diesem Regleransatz ist das System also beliebig polzuweisbar. Da die Matrix \widetilde{M} das Format (6×8) hat, enthält die Lösung zwei Freiheitsgrade. Einer ist die Folge der gleichen Ansätze für $f_P^{1,T}$ und $f_P^{2,T}$ (siehe Punkt 2., Seite 65), so dass in der Reglerübertragungsmatrix nur ein Freiheitsgrad wirksam wird. Dieser soll verwendet werden, um dem Regler integrierendes Verhalten zu geben. Das bedeutet, dass die Determinante $\det N_K$ eine Nullstelle bei $s = 0$ enthalten soll, bzw. dass die s^0 Koeffizient von $\det N_K$ verschwindet:

$$\det \begin{pmatrix} f_{0,1}^{1,T} & f_{0,2}^{1,T} \\ f_{0,1}^{2,T} & f_{0,2}^{2,T} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1242 & -36 \\ f_{0,1}^{2,T} & f_{0,2}^{2,T} \end{pmatrix} = -1242 f_{0,2}^{2,T} + 36 f_{0,1}^{2,T} = 0.$$

Diese Forderung wird der Gl. (4.16) hinzugefügt, man löst

$$\begin{pmatrix} 0 & -442.0224 & 16.5888 & 0 & \dots \\ 0 & -75.6864 & 25.2288 & 589.3632 & \dots \\ -34.24896 & 37.363392 & -4.44672 & 100.9152 & \dots \\ 7.56864 & -0.252288 & 0 & -38.7072 & \dots \\ -0.288 & -0.164736 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 36 & -1242 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -442.0224 & 16.5888 & 0 \\ \dots & 0 & -75.6864 & 25.2288 & 589.3632 \\ \dots & -34.24896 & 37.363392 & -4.44672 & 100.9152 \\ \dots & 7.56864 & -0.252288 & 0 & -38.7072 \\ \dots & -0.288 & -0.164736 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0^2 \\ \mathbf{f}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 50000 \\ 10000 \\ 1000 \\ 50 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_P^{2,T}(s) &= \mathbf{f}_0^{2,T} + \mathbf{f}_1^{2,T}s \\ &= (2837.96 + 109.79s \quad 82.2596 - 198.003s \quad 8220.04 + 7439.49s \quad -614.375) . \end{aligned}$$

Darin wurde der „falsche“ Freiheitsgrad nicht berücksichtigt. Damit ist die Zuweisung der Nullstellen abgeschlossen, und man hat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_P^{1,T} \\ \mathbf{f}_P^{2,T} \end{pmatrix} &= (N_K(s), \quad Z_K(s)) = \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} -1242 - 171.6s & -36 + 300s & -959.25 - 1507.2s & 303.8625 - 26.115s \\ 2837.96 + 109.79s & 82.2596 - 198.003s & 8220.04 + 7439.49s & -614.375 \end{array} \right) \end{aligned}$$

gewonnen und damit

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1856.1s^2 + 2046.9s - 208.33}{s^2 - 591.01s} & -\frac{4.9640s^2 + 117.12s + 2.76299}{s^2 - 591.01s} \\ \frac{1066.7s^2 + 6017.02s + 7187.5}{s^2 - 591.01s} & \frac{-2.7524s^2 - 140.33s + 95.323}{s^2 - 591.01s} \end{pmatrix} .$$

Möglicherweise wird ein Regler ohne Pole in der offenen rechten Halbebene angestrebt, gewissermaßen mit positiven T_1 . Wiederholt man die Rechnung mit einem unbestimmtem a (siehe Anfang des Beispiels), erkennt man in numerischen Untersuchungen, dass der Pol, der nicht bei Null liegt, sich für

$$\begin{aligned} 0.038231 < a < 0.067669 , & & 0.18079 < a < 0.23935 , \\ 0.35132 < a < 0.38883 & \text{ und } & 0.6 < a < 0.69808 \end{aligned}$$

in der linken offenen Halbebene befindet. Wählt man zum Beispiel $a = 0.055867$, so erhält man einen Regler, dessen Proportionalanteil $K(\infty)$ gering ist:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.6248s^2 + 5918.3s - 208.33}{s^2 + 1403.7s} & \frac{8.2155s^2 - 277.75s + 16.5597}{s^2 + 1403.7s} \\ \frac{3.8187s^2 + 12105.3s + 33439.7}{s^2 + 1403.7s} & \frac{5.9034s^2 + 19.192s - 2658.01}{s^2 + 1403.7s} \end{pmatrix} . \quad \blacksquare$$

Im Allgemeinen bleiben während der Zuweisung Freiheitsgrade offen, mit deren Hilfe man neben den Polen des geschlossenen Kreises weitere Forderungen erfüllen kann.

Im letzten Beispiel soll gezeigt werden, wie sich das aufrecht stehende Zweifachpendel durch konstante Rückführung der mechanischen Größen w_0 , φ_1 und φ_2 stabilisieren lässt. Zunächst ist zu bemerken, dass das in Beispiel 4.1 entwickelte Modell eines Zweifachpendels ausschließlich gerade $\left(\frac{d}{dt}\right)$ Potenzen enthält. Bei einer konstanten Rückführung würde also auch das CLCP lediglich gerade $\left(\frac{d}{dt}\right)$ Potenzen enthalten, womit mit jeder Nullstelle s_0 auch $-s_0$ eine Nullstelle ist. Daher ist das in Beispiel 4.1 vorgestellte Modell durch konstante Rückführung prinzipiell nicht stabilisierbar. Dies kann behoben werden, indem man der Reibung Beachtung schenkt, beispielsweise indem man sie in Art von Gl. (B.9) und Gl. (B.16) viskos modelliert.

Beispiel 4.6 Die Modellierung der Pendelkörper mit viskoser Reibung entlang der Bahn und in den Gelenken habe folgende (normierten) Werte ergeben:

g	a_1	l_1	ψ_1	l_2	m_0	m_1	m_2	m_3	c_0^r	c_1^r	c_2^r	f^{ss}	d_1^{ss}
10	0.25	0.2	0	0.4	0.25	0.25	0.1	0.5	0.1	0.01	0.01	0	0

Die Ruhelagen ergeben sich damit aus Gl. (B.15) weiterhin zu

$$w_0^{ss} = \text{const}, \quad \varphi_1^{ss} = \pi \quad \text{und} \quad \varphi_2^{ss} = \pi.$$

Die linearisierte Bewegungsgleichung $H(\mathbf{q}^{ss})\ddot{\mathbf{q}} + A_1\dot{\mathbf{q}} + A_0\mathbf{q} + B_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ lautet mit Gl. (B.10), Gl. (B.17) und Gl. (B.16)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.6 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.1 \left(\frac{d}{dt}\right) & -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ -0.075 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.02 \left(\frac{d}{dt}\right) - 0.75 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & -1 \\ -0.04 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.016 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) - 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(A_P \ B_P)} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Als Messgrößen stehen in diesem Fall w_0 , φ_1 und φ_2 zur Verfügung. Damit sind sämtliche inneren Größen Messgrößen, und die Reduktion der Dimension entfällt, bzw. C_P ist die Einheitsmatrix. Zunächst werden nach dem Verfahren aus Abschnitt 4.4.2 die ersten Nullstellen fixiert. Mit $k_{F1} = 0$ muss

$$k_{C1} < (k_{F1} + 1) \frac{p+m}{m} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

sein. Es werden daher zunächst zwei Nullstellen fixiert. Dies seien

$$s_1 = -0.8 \quad \text{und} \quad s_2 = -1.$$

Aus der Bestimmung des Nullraums von

$$\begin{pmatrix} A_P(s_1) & B_P \\ -A_P(s_2) & -B_P \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0.304 & -0.048 & -0.0256 & -1 & 0 \\ -0.048 & -0.7556 & 0.0144 & 0 & -1 \\ -0.0256 & 0.0144 & -0.39776 & 0 & 0 \\ \hline -0.5 & 0.075 & 0.04 & 1 & 0 \\ 0.075 & 0.75375 & -0.02 & 0 & 1 \\ 0.04 & -0.02 & 0.394 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

erhält man die erste Zeile zu

$$\mathbf{f}_P^{1,T} = (38.876 \quad 4274.662 \quad 994.0336 \quad 985.75 \quad 5645).$$

Die zweite und letzte Zeile $\mathbf{f}_P^{2,T}$ soll mit dem Verfahren aus Abschnitt 4.4.1 festgelegt werden. Die Minoren p_κ lauten

$$\begin{aligned} p_1 &= (s + 0.8)(s + 1) (-0.1146s^2 - 2.51282s + 20.456) \\ p_2 &= (s + 0.8)(s + 1) (3.37s^2 - 5.06605s - 19.438) \\ p_3 &= (s + 0.8)(s + 1) (-2.39275s^2 + 0.48595s) \\ p_4 &= (s + 0.8)(s + 1) (-0.2258s^4 - 1.15863625s^3 + 13.480168s^2 + 2.0456s) \\ p_5 &= (s + 0.8)(s + 1) (0.03943s^4 + 0.2023251875s^3 - 4.483748s^2 + 3.4107775s + 14.5785) , \end{aligned}$$

womit sich die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 20.456 & -19.438 & 0 & 0 & 14.5785 \\ -2.51282 & -5.06605 & 0.48595 & 2.0456 & 3.4107775 \\ -0.1146 & 3.37 & -2.39275 & 13.480168 & -4.483748 \\ 0 & 0 & 0 & -1.15863625 & 0.2023251875 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2258 & 0.03943 \end{pmatrix}$$

ergibt. Es zeigt sich, dass der Rang von M lediglich vier ist. Das Gleichungssystem (4.11) hat nicht für sämtliche Vektoren \mathbf{c} eine Lösung. Mithin ist das System *nicht* beliebig nullstellenplatzierbar. Daher soll untersucht werden, welcher Art die Einschränkung ist und ob sie akzeptabel ist. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass die letzten beiden Zeilen von M linear abhängig sind. Man multipliziert daher die Gleichung $M\mathbf{f}_0 = \mathbf{c}$ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{160}{821} & 1 \end{pmatrix}$$

und erhält mit \mathbf{c} aus Gl. (4.10)

$$\begin{pmatrix} 20.456 & -19.438 & 0 & 0 & 14.5785 \\ -2.51282 & -5.06605 & 0.48595 & 2.0456 & 3.4107775 \\ -0.1146 & 3.37 & -2.39275 & 13.480168 & -4.483748 \\ 0 & 0 & 0 & -1.15863625 & 0.2023251875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{f}_P^2 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 - \frac{160}{821}c_3 \end{pmatrix} . \quad (4.17)$$

Also liegt der s^3 Koeffizient fest, nämlich

$$c_3 \stackrel{!}{=} \frac{821}{160} = 5.13125 ;$$

die übrigen können frei gewählt werden. Dieser Koeffizient ist jedoch die negative Summe sämtlicher Wurzeln. Es muss also

$$\sum_{\kappa=3}^6 s_\kappa \stackrel{!}{=} -5.13125$$

sein. Führt man die vorstehenden Rechnungen statt für $s_1 = -0.8$ und $s_2 = -1$ für allgemeine s_1 und s_2 aus, so erhält man

$$\sum_{\kappa=1}^6 s_\kappa \stackrel{!}{=} -6.93125 . \quad (4.18)$$

Es lässt sich also festhalten, dass das vorliegende System stabilisierbar ist, die Pole allerdings nicht beliebig platziert werden können. Die Frage, ob unter der gegebenen Einschränkung eine „günstige“ Platzierung der Pole möglich ist, kann erst an der technischen Anlage abschließend entschieden werden. Doch kann man feststellen, dass die Pole nicht weit in die linke Halbebene geschoben werden können, weshalb ein solcher Regler mit konstanter Rückführung nur vergleichsweise kleine Abweichungen von einer Solltrajektorie kompensieren kann.

Um das Beispiel zu vollenden, werden die Wunschpole zu

$$s_1 = -0.8, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = -1.2, \quad s_4 = -1.4, \quad s_5 = -1.6 \quad \text{und} \quad s_6 = -0.93125$$

festgesetzt, woraus sich

$$\mathbf{c}^T = (2.5032 \quad 8.1265 \quad 9.75125 \quad 5.13125 \quad 1)$$

ergibt. Damit ist die Gleichung (4.17) lösbar, und die Lösung lautet (auf fünf Stellen gerundet):

$$\mathbf{f}_P^{2,T} = (0 \quad 468.06 \quad 74.552 \quad 104.58 \quad 624.25) + p(1 \quad 109.96 \quad 25.569 \quad 25.356 \quad 145.21).$$

Scheinbar bleibt noch ein Freiheitsgrad festzulegen. Doch bei näherem Hinsehen zeigt sich, dass der mit dem Parameter p stehende Vektor linear abhängig von $\mathbf{f}_P^{1,T}$ ist. Natürlich ändert es die Determinante (4.8) nicht, wenn man Zeilen der Matrix linear kombiniert. Es ergibt sich allerdings bei Kombination der letzten beiden Zeilen (Z_K, N_K) auch kein neuer Regler, siehe Punkt 2) auf Seite 65. Daher kann man den Parameter zu null wählen und erhält den Regler mit den Matrizen

$$Z_K = \begin{pmatrix} 38.876 & 4274.662 & 994.0336 \\ 0 & 468.06 & 74.552 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N_K = \begin{pmatrix} 985.75 & 5645 \\ 104.58 & 624.25 \end{pmatrix}$$

und der konstanten Übertragungsfunktionsmatrix (auf fünf Stellen gerundet)

$$K(s) = \begin{pmatrix} -0.97074 & -1.0507 & -7.9872 \\ 0.16263 & -0.57379 & 1.2187 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Zur besseren Übersicht wurde obiges Beispiel mit Zahlenwerten vorgeführt. Es bleibt also die Frage bestehen, inwieweit die Ergebnisse von der Wahl der Zahlenwerte abhängen. Insbesondere ist zu fragen, ob eine Bedingung der Art (4.18) grundsätzlich besteht. Um diese Frage zu klären, folgt man den Überlegungen aus [RF04], Abschnitt 2. Stellt man das dortige Tupel \mathbf{z} auf, so erkennt man, dass einzig der Minor $z_{45} = \det A_P$ den Grad sechs hat, während sämtliche übrigen den Grad vier oder weniger haben. Die dortige Matrix M kann daher keinen Vollrang haben, und die dortige Gleichung (10) ist nur lösbar, wenn die Koeffizienten a_1 und a_0 des CLCP und von $\det A_P$ bis auf einen linearen Faktor übereinstimmen. Daraus folgt an das (monische) CLCP die Forderung, dass der s^5 Koeffizient

$$c_5 \stackrel{!}{=} \frac{c_0^r}{m_0} + \frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) c_1^r + \frac{1}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{(a_1 - l_1 + l_2)^2}{l_1^2 m_0} + \frac{(a_1 + l_2)^2}{l_1^2 m_1} \right) c_2^r$$

sein muss, oder, anders formuliert,

$$\sum_{\kappa=1}^6 s_\kappa \stackrel{!}{=} -\frac{c_0^r}{m_0} - \frac{1}{l_1^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0} \right) c_1^r - \frac{1}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{(a_1 - l_1 + l_2)^2}{l_1^2 m_0} + \frac{(a_1 + l_2)^2}{l_1^2 m_1} \right) c_2^r. \quad (4.19)$$

Man sieht, dass, solange einer der drei Reibkoeffizienten vorhanden ist, der Wurzelschwerpunkt $\sum s_\kappa$ immer negativ ist⁷. Mithin ist das System aus Beispiel 4.6 immer stabilisierbar und im Rahmen der genannten Einschränkung polplatzierbar. Eine große Dämpfung hilft dabei, die Pole „weit links“ zu platzieren.

⁷Aus physikalischen Gründen müssen sämtliche Parameter positiv sein.

4.5 Simulationsbeispiele mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen

Im folgenden Abschnitt soll die Robustheit der entwickelten Trajektorienplanungen und Folgeregler durch numerische Simulation untersucht werden. Eine prinzipielle Modellunbestimmtheit besteht darin, dass die vorliegenden Methoden für lineare Systeme entwickelt wurden, wohingegen die meisten Modelle zunächst einmal nichtlinear anfallen. Durch Linearisierung (Abschnitt 2.1) um eine Ruhelage entstehen lineare Modelle. Streng genommen gelten die Methoden dann nur in einer beliebig kleinen Umgebung der Ruhelage. Daher werden der Simulation die ursprünglichen nichtlinearen Streckenbeschreibungen zugrunde gelegt, und man wird sehen, dass der Gültigkeitsbereich der Methoden ausreichend groß ist, um sinnvolle Trajektorien zu planen und zu stabilisieren.

Im folgenden Beispiel soll der in Beispiel 4.5 entworfene Regler hinsichtlich seiner Robustheit getestet werden.

Beispiel 4.7 Bei der Strecke handelt es sich um ein Zweifachpendel, das im Gegensatz zu Beispiel 4.5 nach unten hängt. Die Bahn soll bei der Modellbildung als eben angenommen werden. In der Simulation soll die Bahn jedoch durchhängen, um eine weitere Störung zu erzeugen. Die (normierten) Parameterwerte seien

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} g & a_1 & l_1 & \psi_1 & l_2 & m_0 & m_1 & m_2 & f^{ss} & d_1^{ss} \\ \hline 9.81 & 0.25 & 0.2 & 0.1\pi & 0.15 & 0.25 & 0.25 & 0.4 & 0 & 0 \end{array} .$$

Auf das Niederschreiben der nichtlinearen Bewegungsgleichungen (B.14) soll aus Platzgründen verzichtet werden. Da der Winkel ψ_1 ungleich null ist, ergibt sich die Ruhelage aus Gl. (B.15) zu

$$w_0^{ss} = \text{const}, \quad \varphi_1^{ss} = -0.10433 \quad \text{und} \quad \varphi_2^{ss} = 0.$$

Die Messgrößen seien der Weg $w_0(t) =: y_1(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1(t) =: y_2(t)$. Die linearisierten Gleichungen lauten damit (siehe Abschnitt B.3)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0.9 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.1484 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.06 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ 0.1484 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.035 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.455 & 0.01492 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 \\ 0.06 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01492 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.009 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.5886 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \right) = \mathbf{0}.$$

Ein nach der Art von Beispiel 4.5 entworfener Regler

$$\begin{pmatrix} -17.12 \left(\frac{d}{dt}\right) - 349 & 121 \left(\frac{d}{dt}\right) + 864.2 \\ -0.3491 \left(\frac{d}{dt}\right) - 2.581 & 2.856 \left(\frac{d}{dt}\right) + 6.391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_K \\ d_{1K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2646 \left(\frac{d}{dt}\right) - 12171 & 26.31 \left(\frac{d}{dt}\right) - 22.23 \\ -56.28 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.5467 \left(\frac{d}{dt}\right) + 6.449 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_1^d \\ y_2 - y_2^d \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

platziert die Pole bei⁸ $s_1 = -14$, $s_2 = -16$, $s_3 = -18$, $s_4 = -6$, $s_5 = -7$, $s_6 = -10$, $s_7 = -12$

⁸Die Reihenfolge spielt hier eine Rolle (siehe S. 65).

und $s_8 = -20$. Seine Übertragungsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} F_K \\ D_{1K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{112.1s^2 + 456.4s + 11717}{s^2 + 74.13s} & \frac{1.351s^2 - 173s - 861}{s^2 + 74.13s} \\ \frac{6.004s^2 + 1290s - 4732}{s^2 + 74.13s} & -\frac{0.0263s^2 + 36.32s + 347.7}{s^2 + 74.13s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 - Y_1^d \\ Y_2 - Y_2^d \end{pmatrix}.$$

Der Struktur nach handelt es sich also um einen PID- T_1 -Regler.

Die für die Trajektorienplanung erforderliche Überführung in die Hermitesche Normalform wird durch die Matrix

$$U^R\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -1.025 & -4.022 & & 0.0615\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 4.022 \\ 0 & 0 & 1.699 & 0 & & -0.1019\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ \hline -1 & 0 & -0.05012\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.3033\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & & 0.003007\left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.5967\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 0 & -1 & -0.01053\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 1.492 & 0.007594\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 5.853 & & 0.0006316\left(\frac{d}{dt}\right)^4 + 0.2303\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 5.853 \end{array} \right)$$

geleistet. Ziel der Planung soll sein, in der Zeit $T = 2$ von der Ruhelage bei $w_0(0) = 0$ in die Ruhelage bei $w_0(T) = 1$ überzugehen. Daraus folgt mit Gl. (3.1), dass die Basisgrößen bei $\xi_{b1}(0) = 0$ und $\xi_{b2}(0) = 0$ beginnen - und bei $\xi_{b1}(T) = 1$ und $\xi_{b2}(T) = 1$ enden müssen. Die Trajektorien sollen optimal, im Sinne von Abschnitt 3.2, sein. Das Kostenfunktional wird nach Art von Beispiel 3.4 aufgestellt, wobei auch hier der Wunsch besteht, dass sich die Winkel $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ möglichst wenig aus der Ruhelage entfernen, ohne dass die Stellsignale zu groß werden. Die Optimierungsaufgabe lautet

$$\int_0^2 \left[(\varphi_1(t))^2 + 3(\varphi_2(t))^2 + 0.1(f(t))^2 + 0.1(d_1(t))^2 \right] dt \rightarrow \min, \quad (4.20)$$

die Wichtungsmatrizen sind mithin

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis der Planung ist in Bild 4.3 zu sehen.

Abschließend werden alle vorliegenden Teile wie im Signalfussplan 4.2 zusammengefügt und numerisch simuliert. Um die Robustheit gegenüber Störungen zu prüfen, werden folgende zwei Störungen eingebaut:

- Statt der linearisierten Modellgleichungen werden in der Simulation die *nichtlinearen* verwendet.
- Die Bahnkurve $s_0(w_0)$ ist entgegen der Planung nicht horizontal eben, sondern biegt sich gemäß der Funktion

$$s_0(w_0) = \begin{pmatrix} x(w_0) \\ y(w_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ -\cosh\left(\frac{1}{2}(w_0 - 0.5)\right) \end{pmatrix}$$

durch (siehe Skizze B.1).

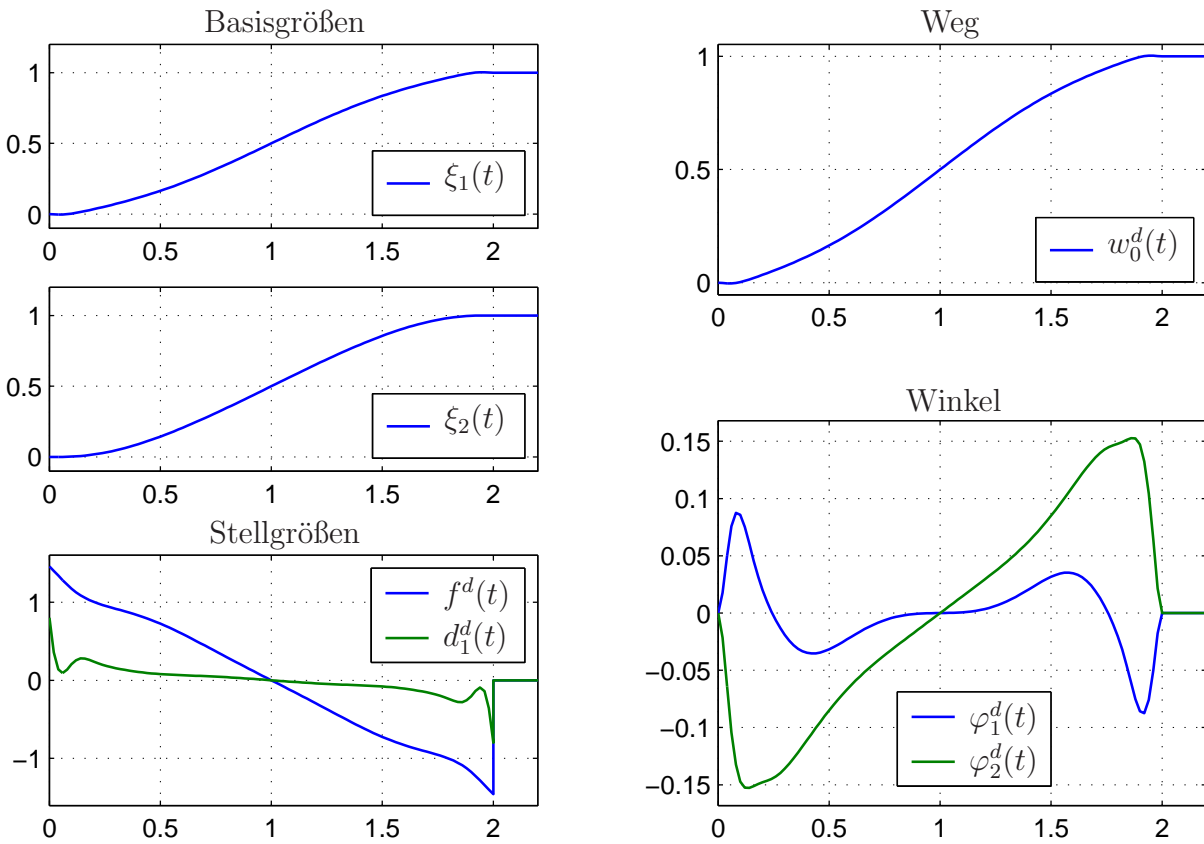


Bild 4.3: Trajektorienplanung für Beispiel 4.7

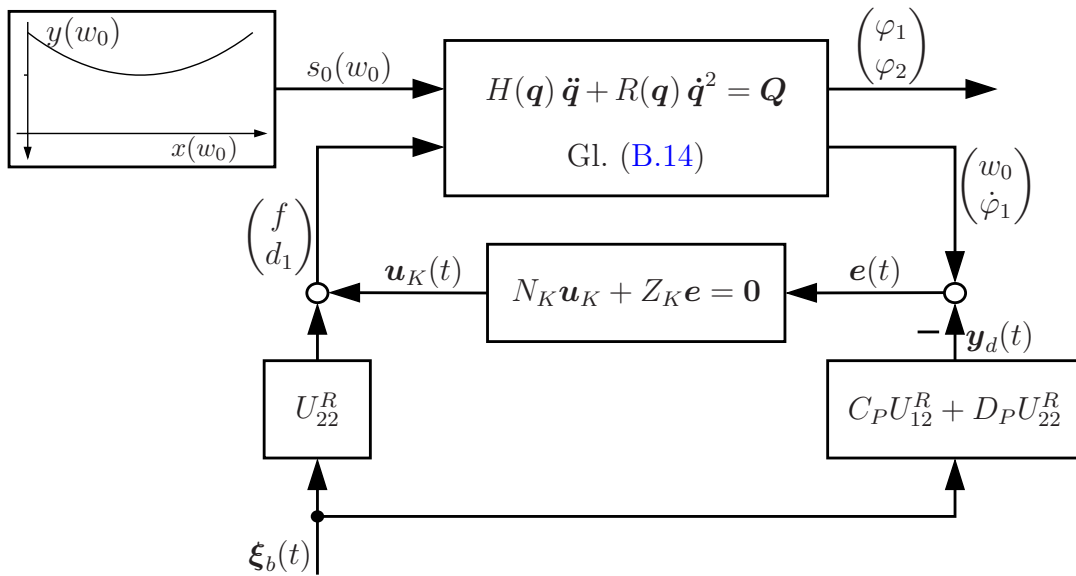


Bild 4.4: Signalflussplan der numerischen Simulation mit Störung (Beispiel 4.7)

Das simulierte System ist im Signalflussplan 4.4 dargestellt. Die Ergebnisse der Simulation sind in Bild 4.5 zu finden. Man sieht, dass der Regler mit den Störungen gut zurechtkommt. Der Wunschtrajektorie für den Weg $w_0(t)$ wird gut gefolgt. Aufgrund des I-Anteils des Reglers ver-

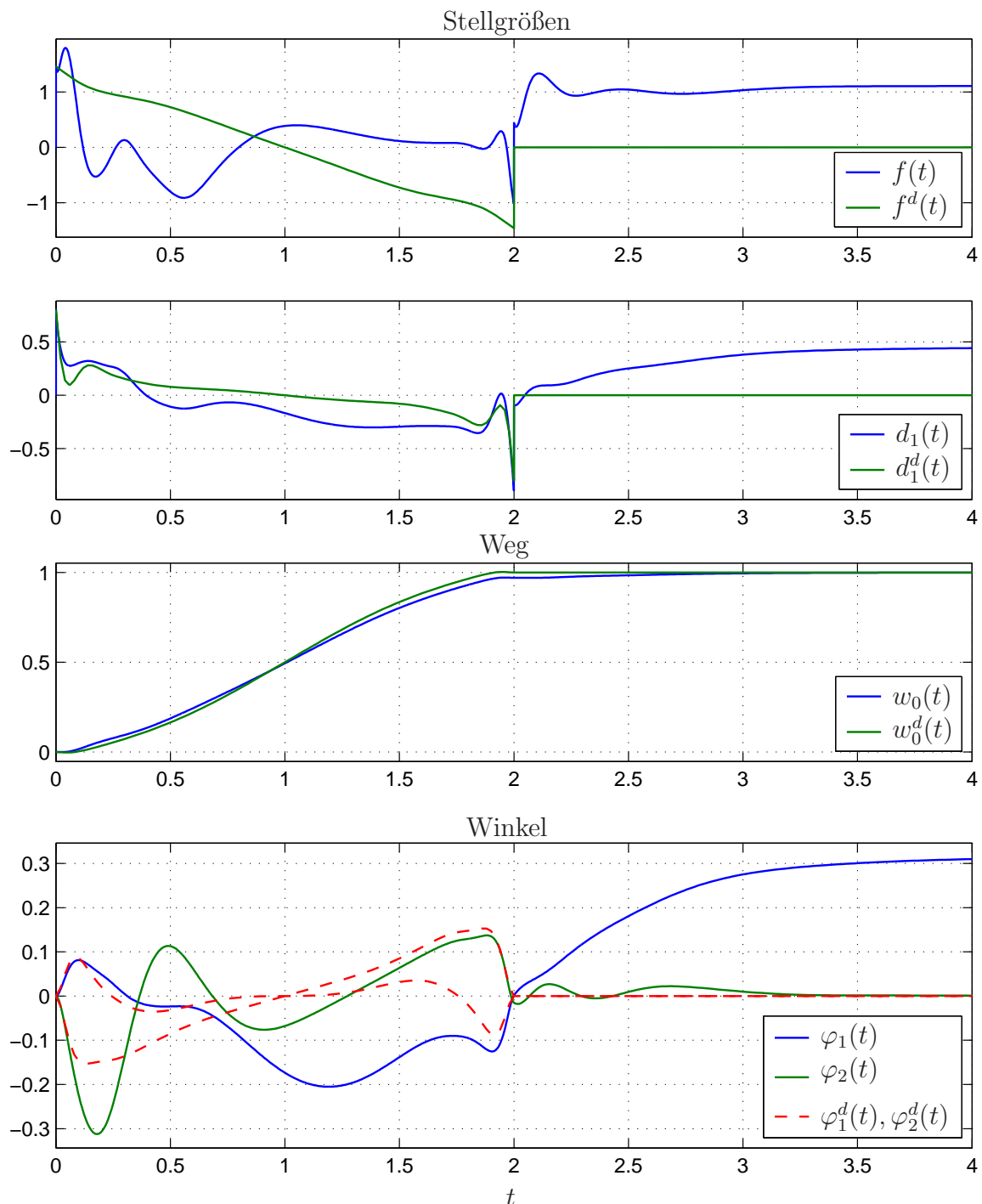


Bild 4.5: Ergebnis der numerischen Simulation von Beispiel 4.7

harrt trotz der fortdauernden Störung durch die gebogene Bahn die bleibende Regelabweichung nahe Null. Zunächst ist die Kraft f niedriger als geplant, da die Bahn abfällt, und danach größer, da die Bahn ab $w_0 = 0.5$ ansteigt. Wegen der gebogenen Bahn kann die Kraft f am Ende auch nicht Null werden, denn der Abtrieb durch die Schwerkraft ist auszugleichen. Die Wunschtrajektorien für die Winkel werden weit schlechter realisiert. Das liegt daran, dass die Winkel nicht gemessen werden und sich nur aus dem Modell ergeben. Wenn aber das Modell nicht korrekt ist, so können sich die Winkel nicht exakt einstellen. Zumindest der Winkel φ_2 stimmt doch noch

relativ gut mit der Planung überein. In Bild 4.6 sieht man einen kurzen Animationsfilm, um die Bewegung zu veranschaulichen. Ferner bedenke man, dass das Pendel ohne einen Folgeregler

Bild 4.6: Ergebnis der numerischen Simulation als Animationsfilm

nicht einmal in die Nähe der gewünschten Endlage käme, da das kraftfreie Pendel (bei $t > 2$) immer auf den tiefsten Punkt bei $w_0 = 0.5$ zurutschen würde. ■

In dem letzten Beispiel 4.7 wurde gezeigt, wie ein Folgeregler sowohl Modellungenauigkeiten als auch äußere Störungen kompensieren kann. Dem gegenüber soll im folgenden Beispiel demonstriert werden, wie auch ein sehr einfacher Regler ein System stabilisieren kann, wenn die Trajektorien genau geplant sind. Das liegt, grob gesprochen, daran, dass bei einer guten Trajektorienplanung das erforderliche Stellsignal „fast“ richtig vorliegt und der Regler nur vergleichsweise kleine Korrekturen vornehmen muss.

Beispiel 4.8 Als Beispiel diene das aufrecht stehende gedämpfte Zweifachpendel aus Beispiel 4.6, allerdings mit den Parameterwerten aus Beispiel 4.7 und Dämpfungen c^r wie in Gl. (B.9):

g	a_1	l_1	ψ_1	l_2	m_0	m_1	m_2	c_0^r	c_1^r	c_2^r	f^{ss}	d_1^{ss}
9.81	0.25	0.2	0.1π	0.15	0.25	0.25	0.4	0.05	0.015	0.01	0	0

Auch hier soll auf das Niederschreiben der nichtlinearen Bewegungsgleichungen (B.14) verzichtet werden. Da die Pendelkörper aufrecht stehen sollen, ergibt sich die Ruhelage aus Gl. (B.15) zu

$$w_0^{ss} = \text{const}, \quad \varphi_1^{ss} = 3.0373 \quad \text{und} \quad \varphi_2^{ss} = \pi.$$

Die drei Messgrößen seien der Weg $w_0(t)$ und die beiden Winkel $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Die linearisierten Gleichungen lauten damit (siehe Abschnitt B.3)

$$\begin{pmatrix} 0.9 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.05 \left(\frac{d}{dt}\right) & -0.1484 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.06 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ -0.1484 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.035 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.025 \left(\frac{d}{dt}\right) - 1.455 & 0.01492 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & -1 \\ -0.06 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.01492 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) & 0.009 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.01 \left(\frac{d}{dt}\right) - 0.5886 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Da ein möglichst einfacher Regler angestrebt wird, soll ein P-Regler zum Einsatz kommen, wie er in Beispiel 4.6 entworfen wurde. Wie dort festgestellt wurde, können die Pole für dieses geregelte System nicht beliebig platziert werden, sondern müssen der Bedingung (4.19) genügen, in diesem Fall:

$$\sum_{\kappa=1}^6 s_{\kappa} \stackrel{!}{=} -12.2495. \quad (4.21)$$

Daher sollen die Pole des geschlossenen Regelkreises bei

$$s_1 = -2.192, \quad s_2 = -2.2895, \quad s_3 = -1.792, \quad s_4 = -1.892, \quad s_5 = -1.992 \quad \text{und} \quad s_6 = -2.092$$

liegen⁹. Dies leistet der Proportionalregler

$$\begin{pmatrix} f_K \\ d_{1K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1769 & -0.6307 & -10.84 \\ -0.01498 & -1.419 & 1.784 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 - w_0^d \\ \varphi_1 - \varphi_1^d \\ \varphi_2 - \varphi_2^d \end{pmatrix}.$$

Die Überführung in die Hermitesche Normalform wird mittels der Matrix

$$U^R\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & & -0.6773 & & \dots \\ 0 & 0 & & -1.699 & & \dots \\ 0 & 0 & & -1.699 & & \dots \\ \hline -1 & 0 & & -0.2556\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.03386\left(\frac{d}{dt}\right) & & \dots \\ 0 & -1 & & 0.01567\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.02548\left(\frac{d}{dt}\right) + 2.473 & & \dots \\ & & & 0.04515\left(\frac{d}{dt}\right) - 1.658 & & -0.04064\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.04515\left(\frac{d}{dt}\right) + 2.658 \\ & & & 0.1133\left(\frac{d}{dt}\right) - 6.667 & & -0.1019\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.1133\left(\frac{d}{dt}\right) + 6.667 \\ & & & 0.1133\left(\frac{d}{dt}\right) & & -0.1019\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.1133\left(\frac{d}{dt}\right) \\ \hline & & & 0.01704\left(\frac{d}{dt}\right)^3 - 0.5005\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.08288\left(\frac{d}{dt}\right) & & -0.01533\left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.01907\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 1.401\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.1329\left(\frac{d}{dt}\right) \\ & & & -0.00105\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 0.0143\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.332\left(\frac{d}{dt}\right) + 9.70 & & 0.000940\left(\frac{d}{dt}\right)^4 - 0.000484\left(\frac{d}{dt}\right)^3 - 0.0143\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.332\left(\frac{d}{dt}\right) - 9.70 \end{array} \right)$$

vorgenommen. Ziel der Trajektorienplanung ist, das Pendel wie in Beispiel 4.7 aus der Ruhelage bei $w_0(0) = 0$ in die Ruhelage bei $w_0(T) = 1$ zu versetzen, allerdings in der Zeit $T = 4$. Bei der Trajektorienplanung wird dasselbe Kostenfunktional minimiert, siehe Gl. (4.20). Das Ergebnis ist in Bild 4.7 zu sehen.

In Bild 4.8 ist noch einmal der Signalfussplan für die Situation dieses Beispiels dargestellt. Bei dieser Simulation besteht die einzige Störung darin, dass statt der linearisierten Modellgleichungen die nichtlinearen gelten. Aufgrund der Instabilität der offenen Regelstrecke genügt diese Ungenauigkeit bereits, um das System vollkommen zusammenbrechen zu lassen, wie man in dem Animationsfilm 4.10 sehen kann. Dort wurden die geplanten Stellsignale (siehe Bild 4.7) ohne Korrektur auf das Zweifachpendel geleitet. Man sieht, wie das Pendel schon nach einer Zeiteinheit nach unten fällt und dort allmählich auspendelt. Demgegenüber genügt bereits der P-Regler, um das System zu stabilisieren. Das Ergebnis der Simulation mit Folgeregler ist in Bild 4.9 zu sehen. Das System folgt den geplanten Trajektorien gut. Die Abweichungen im Weg w_0 sind gering, aber auch die Abweichungen in den Winkeln sind, absolut betrachtet, nicht groß. Jedoch sieht man, dass der Fehler nach dem Ende des geplanten Zeitraumes nur vergleichsweise langsam

⁹Die Reihenfolge spielt hier eine Rolle (siehe S. 65).

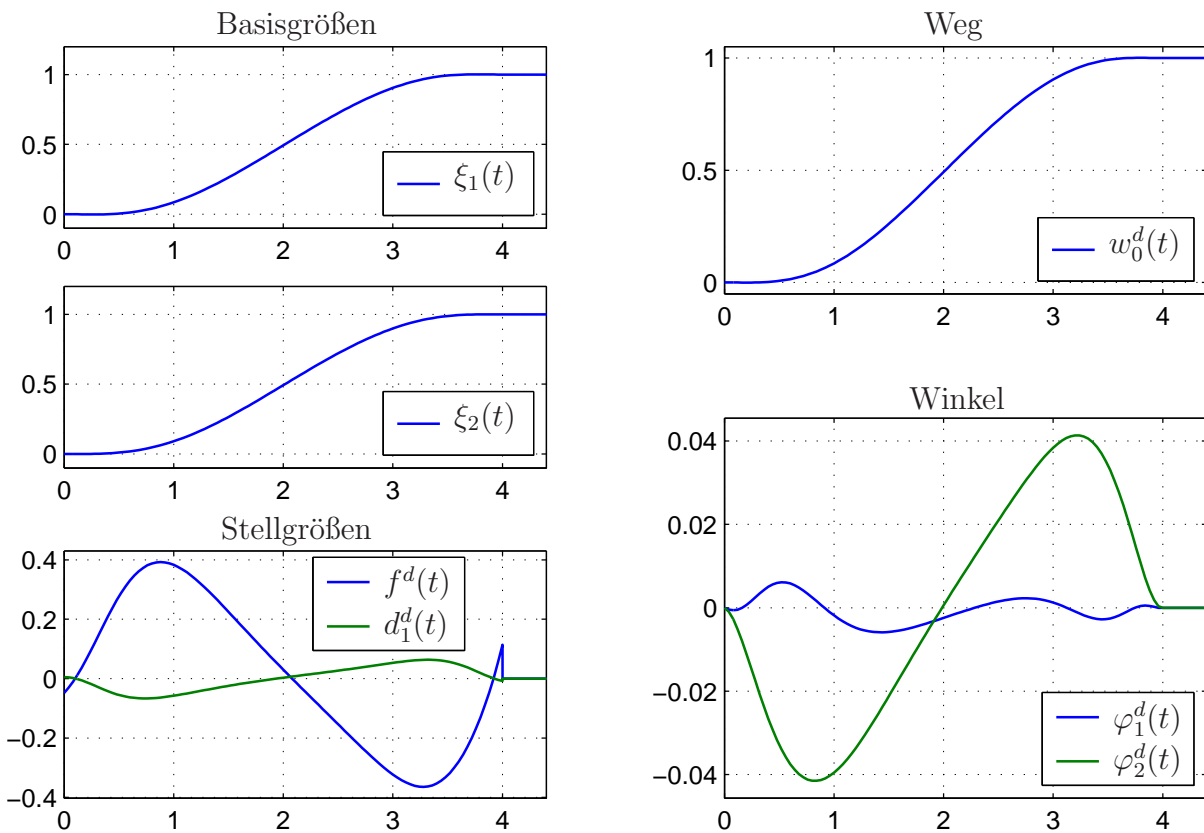


Bild 4.7: Ergebnis der Trajektorienplanung für Beispiel 4.8

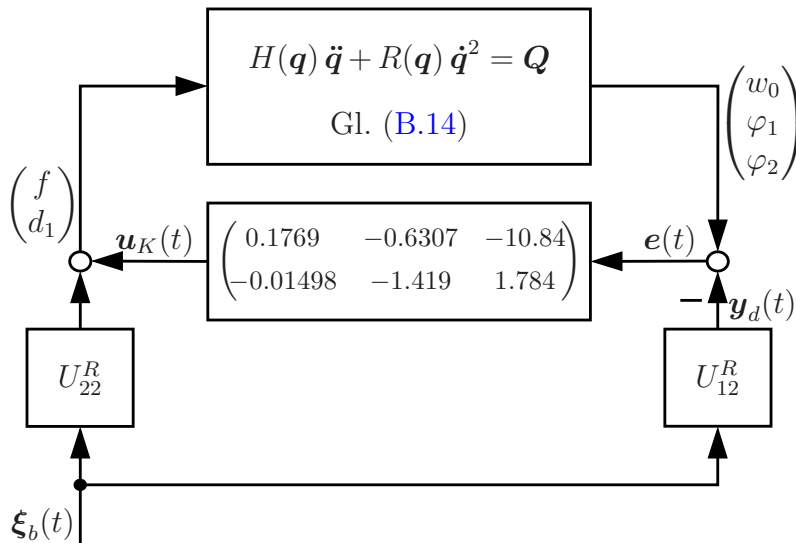


Bild 4.8: Signalflussplan der numerischen Simulation mit Störung (Beispiel 4.8)

abklingt. Das liegt daran, dass die Pole aufgrund der Zwangsbedingung (4.21) nicht weiter in die linke Halbebene geschoben werden können. Diese Beschränkung ist eine Folge der strukturellen Beschränkung auf einen P-Regler. Mit einem Regler höherer Ordnung ließe sich ein schnelleres Abklingen des Fehlers erzielen (siehe vorhergehendes Beispiel 4.7). Zur Veranschaulichung ist in Bild 4.11 ein Animationsfilm der Bewegung zu sehen. ■

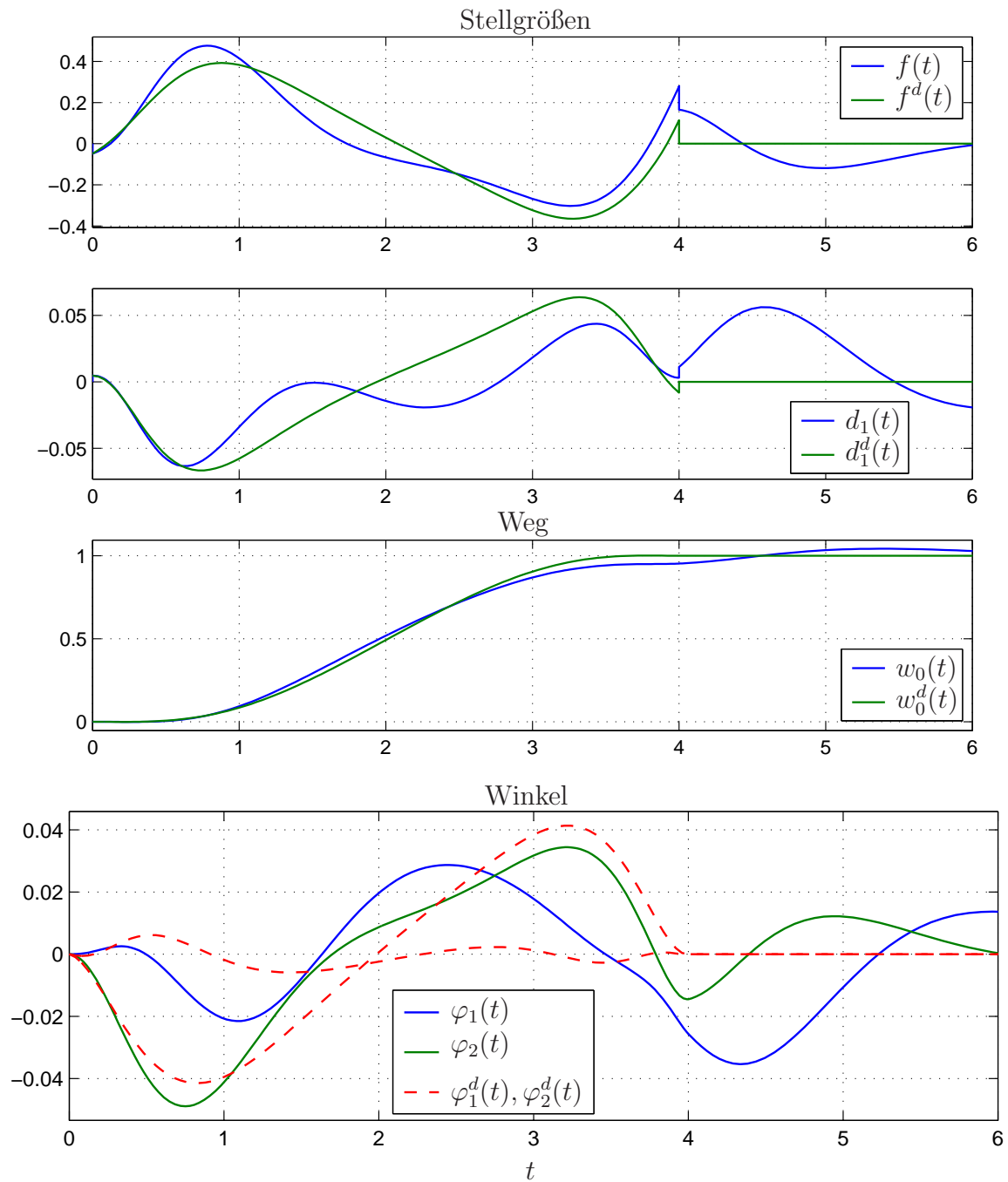


Bild 4.9: Ergebnis der numerischen Simulation von Beispiel 4.8

Bild 4.10: Ergebnis der numerischen Simulation ohne Folgeregung als Animationsfilm

Bild 4.11: Ergebnis der numerischen Simulation als Animationsfilm

5 Trajektorienplanung und Folgeregelung für Abtastsysteme

In der heutigen industriellen Praxis werden nur noch ausnahmsweise zeitkontinuierlich arbeitende Steuer- und Regeleinrichtungen eingesetzt. Überwiegend kommen digitale Steuereinrichtungen zum Einsatz. Bei diesen liegen die Stellsignale zu bestimmten Zeitpunkten in Form einer Tabelle vor, also zeitdiskret. Abhängig von diesem Wert wird das eigentliche, kontinuierlich wirkende Stellglied betätigt. Die Regelstrecke ist normalerweise ein zeitkontinuierlich arbeitendes System. Bild 5.1 verdeutlicht das Schema. Üblicherweise



Bild 5.1: Schema des digital angesteuerten Systems

sind die Abtastzeitpunkte äquidistant mit der Abtastzeit T verteilt. Wenn die Abtastzeit im Vergleich mit den wesentlichen Zeitkonstanten der Regelstrecke erheblich kürzer ist, so kann man das zeitdiskrete Verhalten der Steuerung vernachlässigen und die Steuerung durch ein zeitkontinuierliches System approximieren. Ist jedoch die Abtastzeit länger, so muss man den zeitdiskreten Charakter der Steuereinrichtung berücksichtigen. Hier bietet sich das Konzept der parametrischen Übertragungsfunktion (kurz: PÜF) an, da hierbei auch das Verhalten der Strecke zwischen den Abtastzeitpunkten offenbar wird.

5.1 Parametrische Übertragungsfunktion

Das Wesen der parametrischen Übertragungsfunktion (PÜF) besteht darin, dass sie gegenüber gewöhnlichen zeitdiskreten Übertragungsfunktionen einen weiteren Parameter τ besitzt, der zwischen Null und der Abtastzeit T variiert und mit dessen Hilfe das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten beschrieben wird. Das Konzept wird unter anderem in [RL97] und [Rei06], Kapitel 7, verwendet. An dieser Stelle soll ein anderer Weg besprochen werden, der für die vorliegende Aufgabe ausreicht und auf der modifizierten z -Transformation, wie sie beispielsweise bei [Jur64] vorgestellt wird, basiert.

Die Entwicklung der parametrischen Übertragungsfunktion soll anhand des SISO-Falls geschehen. Eine Verallgemeinerung auf MIMO-Systeme ist danach leicht möglich. Man beginnt gedanklich beim Eingang $u(t)$, der jetzt eine spezielle Gestalt hat:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] m(t-kT). \quad (5.1)$$

Darin ist $m(t)$ eine Formierungsfunktion, die festlegt, wie die Zahlenfolge $u[k]$ in ein zeitlich ausgedehntes Signal umgesetzt wird und wie lange dieses wirkt. Aus der Forderung

nach Kausalität ergibt sich, dass $m(t) = 0$ für $t < 0$ gelten muss. Das gängige Halteglied nullter Ordnung, beispielsweise, hat die Formierungsfunktion $m(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)$.

Das Übertragungsverhalten der Regelstrecke sei charakterisiert durch ihre Impulsantwort $g(t)$. Damit ist der Ausgang gegeben durch

$$y(t) = (g(\cdot) * u(\cdot))(t) .$$

Darin symbolisiere der Stern $*$ die einseitige Faltung. Setzt man Gl. (5.1) ein, so erhält man

$$y(t) = \left(g(\cdot) * \sum_{k=0}^{\infty} m(\cdot - kT) u[k] \right) (t) .$$

Da die Faltung distributiv ist (siehe [Mik57], §5), kann man diese in die Summe hineinnehmen

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(\cdot) * m(\cdot - kT) u[k] \right) (t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t g(t-\bar{t}) m(\bar{t} - kT) d\bar{t} u[k] . \end{aligned}$$

Es genügt, bei $\bar{t} = kT$ mit der Integration zu beginnen, da $m(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Ferner muss auch nicht bis $k = \infty$ summiert werden, da nur für $kT < t$ der Integrand einen Wert verschieden von Null liefert. Man kann daher die Summation bei $k = \lfloor \frac{t}{T} \rfloor$ beenden, wobei die eckigen Klammern $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzen Anteil symbolisieren. Man erhält

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \int_{kT}^t g(t-\bar{t}) m(\bar{t} - kT) d\bar{t} u[k] ,$$

und durch die Substitution $t' = \bar{t} - kT$,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} \left[\int_0^{t-kT} g(t-kT-t') m(t') dt' \right] u[k] .$$

Betrachtet man den Ausdruck in den eckigen Klammern genauer, so erkennt man dort $(g * m)(t-kT)$. Daher definiert man $g_m(t) := (g * m)(t)$ und erhält

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} g_m(t-kT) u[k] .$$

Diese diskrete Faltung soll mit der modifizierten z-Transformation gelöst werden, wobei im Gegensatz zu [Jur64] der „gedachte negative Verzug (fictitious negative delay)“ durch eine kleine Zeit $(-\tau)$ mit $0 \leq \tau < T$ beschrieben wird. Mit dieser Änderung der Zeit wird t zu

$$t = kT + \tau , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad 0 \leq \tau < T .$$

Die modifizierte z -Transformation ist dann definiert durch

$$Y(z, \tau) = \mathcal{Z}_m \{y(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT + \tau) z^{-k},$$

und ihre Inverse ist

$$y(t) \Big|_{t=kT+\tau} = \mathcal{Z}_m^{-1} \{Y(z, \tau)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z, \tau) z^{k-1} dz$$

mit $k = 0, 1, 2, \dots$ und $0 \leq \tau < T$. Man erhält:

$$Y(z, \tau) = G(z, \tau) \cdot U(z),$$

womit die parametrische Übertragungsfunktion $G(z, \tau)$ eingeführt ist als

$$G(z, \tau) = \mathcal{Z}_m \{(g * m)(kT + \tau)\} = \frac{Z(z, \tau)}{N(z)}. \quad (5.2)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass nur das Zählerpolynom $Z(z, \tau)$ von τ abhängt, nicht jedoch das Nennerpolynom $N(z)$. Offensichtlich ist die obige Herleitung auch mit vektoriellen Größen $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ möglich. Dann wird aus der Impulsantwort eine Impulsantwortsmatrix $G(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ und aus der Formierungsfunktion wird eine $(m \times m)$ -Diagonalmatrix. Abschließend erhält man dann eine parametrische Übertragungsfunktionsmatrix $G(z, \tau) \in \mathbb{R}(z)^{p \times m}$.

Beispiel 5.1 Als ein einfaches Beispiel diene ein PT_1 -Übertragungsglied

$$y(t) + T_1 \dot{y}(t) = u(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Das Halteglied sei nullter Ordnung mit der Formierungsfunktion

$$m(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T) \quad \text{oder anders} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g_m(t) = (g * m)(t) &= \int_0^t (\mathbf{1}(\tau) - \mathbf{1}(\tau - T)) \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} d\tau \\ &= \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} d\tau = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} & \text{für } 0 \leq t < T \\ \int_0^T \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} d\tau = \left(e^{\frac{T}{T_1}} - 1\right) e^{-\frac{t}{T_1}} & \text{für } t \geq T. \end{cases} \end{aligned}$$

Bild 5.2 zeigt die Formierungsfunktion $m(t)$ und die daraus resultierende Funktion $g_m(t)$. Die parametrische Übertragungsfunktion berechnet man nach Gl. (5.2) unter Nutzung der geometrischen Reihe

$$G(z, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_m(kT + \tau) z^{-k} = g_m(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} g_m(kT + \tau) z^{-k}$$

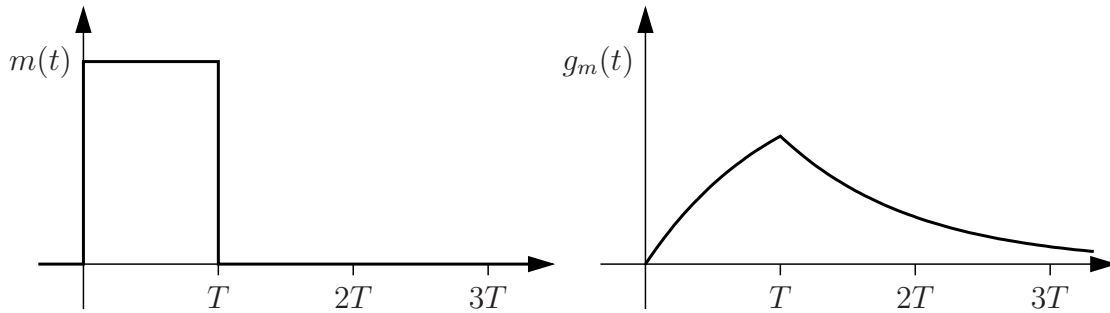


Bild 5.2: (zu Beispiel 5.1) Formierungsfunktion $m(t)$ und $g_m(t)$ mit $T_1 = T$.

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T_1}}\right) + e^{-\frac{\tau}{T_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\tau}{T_1}} - 1\right) e^{-k\frac{\tau}{T_1}} z^{-k} \\
 &= \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T_1}}\right) + e^{-\frac{\tau}{T_1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{(1-k)\frac{\tau}{T_1}} z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\frac{\tau}{T_1}} z^{-k}\right) \\
 &= \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T_1}}\right) + e^{-\frac{\tau}{T_1}} \left(\frac{1}{z - e^{-\frac{\tau}{T_1}}} - \left(\frac{z}{z - e^{-\frac{\tau}{T_1}}} - 1\right)\right) \\
 &= 1 - e^{-\frac{\tau}{T_1}} \frac{z - 1}{z - e^{-\frac{\tau}{T_1}}} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T_1}}\right) z + e^{-\frac{\tau}{T_1}} - e^{-\frac{\tau}{T_1}}}{z - e^{-\frac{\tau}{T_1}}}.
 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel kann man noch gut elementar durchrechnen. Bei komplizierteren Aufgaben kann man selbstverständlich auf verschiedene Hilfsmittel, z. B. die Laplace-Transformation, zur Berechnung der Faltung zurückgreifen. ■

Behandlung von Anfangswerten

Die PÜF untersucht – wie die übliche Übertragungsfunktion – nur das Verhalten von dem Eingang zu inneren- bzw. Ausgangsgrößen. Das Verhalten von den Anfangswerten aus gesehen, ist weiterhin nach den im Zeitkontinuierlichen bekannten Regeln zu bestimmen (typischerweise Laplace-Transformation) und im Bedarfsfall zu addieren. Dann wäre

$$\mathbf{y}(kT + \tau) = \mathcal{Z}_m^{-1} \{G_m(z, \tau) \mathbf{U}(z)\} + \mathcal{L}^{-1} \{C_P A_P^{-1} \mathbf{a}(s)\} \Big|_{t=kT + \tau}.$$

5.2 Basisgrößen für abgetastete Systeme

Die Basisgrößen für abgetastete Systeme sollen die selben grundlegenden Eigenschaften wie im zeitkontinuierlichen Fall haben, nämlich:

- Sie sind frei und unabhängig voneinander wählbar.
- Aus ihnen ergeben sich alle übrigen Signale, insbesondere die nötigen Steuersignale.

Aus diesen Forderungen folgt, dass die Basisgrößen jetzt nur noch Folgen $\boldsymbol{\xi}[k]$ sein können, denn wegen des zeitdiskreten Charakters der Stellfolge $\mathbf{u}[k]$ kann nur zu den Abtastzeitpunkten das Stellsignal unabhängig festgelegt werden. Ab dann hängt es bis zum nächsten

Abtastzeitpunkt von den Werten der Stellfolge zum letzten Abtastzeitpunkt ab. Die Gleichung (2.1a) liegt mit $\mathbf{u}(t)$ aus Gl. (5.1) in der Form

$$A_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + B_P \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}[k] \mathbf{m}(t-kT) = \mathbf{0}$$

vor. Diese Gleichung enthält nicht mehr nur einen Operator $\left(\frac{d}{dt}\right)$, sondern dazu eine Zeitverschiebung, die unendlich oft anzuwenden ist. Ein Vorgehen in direkter Analogie zu Abschnitt 2.2.2 ist damit nicht sinnvoll. Stattdessen sollen die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.2.1 neu genutzt werden.

Hat das Paar (A_P, B_P) einen gemeinsamen Linksteiler, so kann dieser nach links herausgezogen werden und man erhält Gleichung (2.1a) als

$$L \left(\frac{d}{dt}\right) \underbrace{\left(V_{11}^R \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + V_{12}^R \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} \right)}_{\xi_a} = \mathbf{0}$$

mit den in Abschnitt 3.3 näher besprochenen autonomen Größen. Dieser Teil des Systemverhaltens wird von dem Stellsignal $\mathbf{u}(t)$ nicht beeinflusst, ganz gleich, welcher Gestalt es ist. Daher kann dieser Teil an dieser Stelle zunächst ignoriert werden. Jedoch ist immer zu bedenken, dass die Basisfolge $\xi[k]$ dann nicht das gesamte Systemverhalten parametriert.

5.2.1 Definition der Basisgrößen

Es wird also davon ausgegangen, dass eine linksteilerfremde Darstellung

$$V_{11}^R \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x} + V_{12}^R \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

vorliegt. Für dieses System wird in [Rei06] ein alternativer Weg aufgezeigt, Basisgrößen im Bildbereich der Laplace-Transformation zu definieren. Man gibt mit Gleichung (2.6) und $V^R = (U^R)^{-1}$ die Übertragungsfunktion als rechtsteilerfremde Matrizenbruchdarstellung an:

$$\mathbf{X}(s) = G_{\mathbf{u}}^{\mathbf{x}}(s) \mathbf{U}(s) = - (V_{11}^R)^{-1} V_{12}^R \mathbf{U}(s) = U_{12}^R (U_{22}^R)^{-1} \mathbf{U}(s),$$

denn aus

$$\begin{pmatrix} V_{11}^R & V_{12}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12}^R \\ U_{22}^R \end{pmatrix} = 0 \quad \text{folgt} \quad - (V_{11}^R)^{-1} V_{12}^R = U_{12}^R (U_{22}^R)^{-1}.$$

Definiert man nun

$$\Xi(s) := (U_{22}^R)^{-1} \mathbf{U}(s), \quad \text{so folgt daraus} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}^R(s) \\ U_{22}^R(s) \end{pmatrix} \Xi_b(s),$$

was, von Anfangswerten abgesehen, Gleichung (2.14) entspricht. Dieser Weg lässt sich auf abgetastete Systeme anwenden. Da in den Einträgen der parametrischen Übertragungsfunktionsmatrix nur die Zähler von τ abhängen, muss es eine rechte teilerfremde¹ Matrizenbruchdarstellung der Art

$$\mathbf{Y}(z, \tau) = G_m(z, \tau) \mathbf{U}(z) = Z^R(z, \tau) (N^R(z))^{-1} \mathbf{U}(z) \quad (5.3)$$

¹Teilerfremd meint hier teilerfremd in z mit beliebigem τ .

geben. Damit kann man

$$\Xi(z) := (N^R(z))^{-1} \mathbf{U}(z)$$

definieren. Daraus folgt dann offensichtlich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}(z, \tau) \\ \mathbf{U}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^R(z, \tau) \\ N^R(z) \end{pmatrix} \Xi(z).$$

Nun kann man Basisfolgen unabhängig vorgeben und daraus die notwendige Stellfolge und die resultierenden Ausgangssignale berechnen. Da es sich um Polynome in der Zeitverschiebung z handelt, müssen ausreichend viele Werte in der Zukunft bekannt sein, d. h. der Planungshorizont muss mindestens $\max_{\mu=1\dots m} \text{grad}_{\mu} \begin{pmatrix} Z^R(z, \tau) \\ N^R(z) \end{pmatrix}$ Abtastschritte in die Zukunft reichen. Dieser Forderung entspricht im Zeitkontinuierlichen die Forderung nach der ausreichenden Glattheit der Basissignale.

Es bleibt noch zu klären, wie eine rechte teilerfremde Darstellung der parametrischen Übertragungsfunktionsmatrix

$$G_m(z, \tau) = Z^R(z, \tau) (N^R(z))^{-1}$$

gefunden werden kann. Das Problem besteht darin, dass bei der Modellierung keine Matrixdarstellung der Art Gl. (2.1a) anfällt, sondern eine Übertragungsfunktionsmatrix. Zwei Wege sollen im Folgenden vorgestellt werden.

5.2.2 Auffinden einer rechten teilerfremden Darstellung der PÜF-Matrix mithilfe der Hauptnenner

Man kann den gemeinsamen Hauptnenner $n_i^z(z)$ aller Zeilen bzw. aller Spalten $n_j^s(z)$ herausziehen und erhält

$$G_m(z, \tau) = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1^z(z) & & \\ & \ddots & \\ & & n_r^z(z) \end{pmatrix}^{-1}}_{\widetilde{N}^L^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} n_1^z(z) & & \\ & \ddots & \\ & & n_r^z(z) \end{pmatrix}}_{\widetilde{Z}^L(z, \tau)} \cdot G_m(z, \tau) \quad (5.4a)$$

$$= G_m(z, \tau) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} n_1^s(z) & & \\ & \ddots & \\ & & n_m^s(z) \end{pmatrix}}_{\widetilde{Z}^R(z, \tau)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} n_1^s(z) & & \\ & \ddots & \\ & & n_m^s(z) \end{pmatrix}^{-1}}_{\widetilde{N}^R^{-1}}. \quad (5.4b)$$

Diese Darstellung ist in aller Regel nicht teilerfremd, denn bei einer teilerfremden Darstellung müssen die Nullstellen von $\det \widetilde{N}^R(z)$ gleich den Nullstellen von $\det \widetilde{N}^L(z)$ und gleich den Polen von $\det G(z, \tau)$ sein (siehe [Kai80], Abschnitt 6.5.3). Zumeist ist jedoch bereits der Grad von $\det \widetilde{N}^R(z)$ größer als der Grad des Nenners von $\det G(z, \tau)$. Allerdings lässt sich der gemeinsame Teiler durch Überführen in die Hermitesche Normalform identifizieren und eine teilerfremde Matrizenbruchdarstellung gewinnen. Dabei erweist sich selbst bei kleineren Beispielen das Invertieren der unimodularen Überführungsmatrizen $V^R(z, \tau)$

bzw. $U^R(z, \tau)$ als rechnerisch sehr aufwendig. Daher scheint es am bequemsten, mit der Darstellung (5.4b) zu beginnen, den gemeinsamen Rechtsteiler $R(z)$ zu bestimmen und abschließend die teilerfremde Matrizendarstellung aus

$$Z^R(z, \tau) = \widetilde{Z}^R(z, \tau) \cdot (R(z))^{-1} \quad \text{und} \quad N^R(z, \tau) = \widetilde{N}^R(z, \tau) \cdot (R(z))^{-1}$$

zu bestimmen. Um nicht unnötig viele Schritte vorausplanen zu müssen, kann es sinnvoll sein, $N^R(z)$ spaltenreduziert zu erarbeiten. Dieses Vorgehen soll an einem kleinen Beispiel demonstriert werden.

Beispiel 5.2 Als Beispiel diene das einfache inverse Pendel mit zwei Stellgrößen, der Kraft f am Wagen und dem Drehmoment d_1 . Aus Abschnitt B.3 erhält man mit $N = 1$ und der Ruhelage $\varphi_1^{\text{ss}} = 0$, sowie $s_0''(w_0) \equiv 0$

$$\begin{pmatrix} (m_0 + m_1) \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & m_1 l_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & l \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_1 m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ d_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Nimmt man als normierte Werte $m_0 = 2$, $m_1 = 4$, $l_1 = 1$ und $g = 10$ an, so erhält man die numerische Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 + 10}{s^2(2s^2 + 60)} & \frac{1}{2s^2 + 60} \\ \frac{1}{2s^2 + 60} & \frac{3}{2(2s^2 + 60)} \end{pmatrix}.$$

Mit einem Halteglied nullter Ordnung mit $m(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)$ erhält man zunächst die Matrix

$$\begin{aligned} G_m(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right\} = (1 - \mathcal{S}_T) \circ \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} \\ &= (1 - \mathcal{S}_T) \circ \begin{pmatrix} -\frac{1}{90} \cos(\sqrt{30}t) + \frac{1}{90} + \frac{1}{12}t^2 & -\frac{1}{60} \cos(\sqrt{30}t) + \frac{1}{60} \\ -\frac{1}{60} \cos(\sqrt{30}t) + \frac{1}{60} & -\frac{1}{40} \cos(\sqrt{30}t) + \frac{1}{40} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit dem Verschiebeoperator \mathcal{S}_T , der durch seine Wirkung $\mathcal{S}_T \circ x(t) = x(t-T)$ erklärt ist. Mit der Wahl der Abtastzeit $T = \frac{1}{4}$ ergibt sich die parametrische Übertragungsfunktionsmatrix zu

$$\begin{aligned} G(z, \tau) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}_m \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{90} \cos(\sqrt{30}(\frac{k}{4} + \tau)) + \frac{1}{90} + \frac{1}{12}(\frac{k}{4} + \tau)^2 & -\frac{1}{60} \cos(\sqrt{30}(\frac{k}{4} + \tau)) + \frac{1}{60} \\ -\frac{1}{60} \cos(\sqrt{30}(\frac{k}{4} + \tau)) + \frac{1}{60} & -\frac{1}{40} \cos(\sqrt{30}(\frac{k}{4} + \tau)) + \frac{1}{40} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}(z, \tau) & \frac{1}{60} g_*(z, \tau) \\ \frac{1}{60} g_*(z, \tau) & \frac{1}{40} g_*(z, \tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &(-32 + 32 \cos(\sqrt{30}\tau) - 240\tau^2)z^4 \\ &+ (576.2\tau^2 - 102.4 \cos(\sqrt{30}\tau) - 31.35 \sin(\sqrt{30}\tau) + 61.83 - 120\tau)z^3 \\ &+ (115.2 \cos(\sqrt{30}\tau) + 168.1\tau - 672.4\tau^2 - 98.64 + 94.05 \sin(\sqrt{30}\tau))z^2 \\ &+ (67.84 - 51.24 \cos(\sqrt{30}\tau) + 576.2\tau^2 - 168.1\tau - 94.05 \sin(\sqrt{30}\tau))z \\ &- 47 - 240\tau^2 + 6.413 \cos(\sqrt{30}\tau) + 120\tau + 31.35 \sin(\sqrt{30}\tau) \\ g_{11}(z, \tau) &= - \frac{\hspace{15em}}{2880(z-1)^2(z^2 - 0.4008z + 1)} \end{aligned}$$

$$g_*(z, \tau) = - \frac{(\cos(\sqrt{30}\tau) - 1)z^2 + (-1.2 \cos(\sqrt{30}\tau) - 0.9797 \sin(\sqrt{30}\tau) + 0.4008)z - 1 + 0.9797 \sin(\sqrt{30}\tau) + 0.2004 \cos(\sqrt{30}\tau)}{z^2 - 0.4008z + 1}.$$

Man wählt also als ersten nicht teilerfremden Ansatz

$$\widetilde{N}^R(z) = \begin{pmatrix} 2880(z-1)^2(z^2 - 0.4008z + 1) & 0 \\ 0 & z^2 - 0.4008z + 1 \end{pmatrix},$$

und $\widetilde{Z}^R(z, \tau)$ sind die Zähler von $G(z, \tau)$. Eine Überführung des Paares $\begin{pmatrix} \widetilde{N}^R(z) \\ \widetilde{Z}^R(z, \tau) \end{pmatrix}$ liefert als gemeinsamen Rechtsteiler

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 & -0.007832 + 0.01954z \\ 0 & z^2 - 0.4008z + 1 \end{pmatrix}.$$

Auf die Darstellung der Überführungsmatrix $U^L(z, \tau)$, die in sämtlichen Elementen von z und τ abhängt, soll aus Platzgründen verzichtet werden. Mit dem Rechtsteiler $R(z)$ erhält man die teilerfremde Matrixendarstellung mit

$$N^R(z) = \begin{pmatrix} 2880(z-1)^2(z^2 - 0.4008z + 1) & -56.30(z - 0.4008)(z-1)^2 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Dieses $N^R(z)$ ist noch nicht spaltenreduziert. Durch Multiplikation mit einer weiteren unimodularen Matrix (siehe Satz A.1)

$$U_{\text{red}}^R(z) = \begin{pmatrix} 0.01954 & 0.01954z \\ z & 1 + z^2 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$N^R(z) = \begin{pmatrix} 56.30(z^2 - 2z + 1) & 22.55(z^2 - 2z + 1) \\ 60z & 60(z^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$Z^R(z, \tau) = \widetilde{Z}^R(z, \tau) (R(z))^{-1} U_{\text{red}}^R(z) = \begin{pmatrix} z_{11}^R(z, \tau) & z_{12}^R(z, \tau) \\ z_{21}^R(z, \tau) & z_{22}^R(z, \tau) \end{pmatrix}$$

mit den Einträgen

$$z_{11}^R(z, \tau) = 0.01954 \left(32 + 240\tau^2 - 32 \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z^2$$

$$+ 0.01954 \left(31.35 \sin(\sqrt{30}\tau) + 2.17 - 480\tau^2 + 120\tau + 38.41 \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z$$

$$+ 4.689\tau^2 - 2.345\tau - 0.1253 \cos(\sqrt{30}\tau) + 0.9185 - 0.6126 \sin(\sqrt{30}\tau)$$

$$z_{12}^R(z, \tau) = 0.03909 \left(48.10\tau^2 + 32 - 32 \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z^2$$

$$+ 0.03909 \left(38.41 \cos(\sqrt{30}\tau) + 24.05\tau + 31.35 \sin(\sqrt{30}\tau) - 96.19\tau^2 - 9.820 \right) z$$

$$+ 1.369 + 1.880\tau^2 - 0.9403\tau - 0.2507 \cos(\sqrt{30}\tau) - 1.226 \sin(\sqrt{30}\tau)$$

$$z_{21}^R(z, \tau) = -0.9382 \left(-1 + \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z^2$$

$$\begin{aligned}
& - 0.9382 \left(0.4008 - 0.9797 \sin(\sqrt{30}\tau) - 1.200 \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z \\
& \quad + 0.9382 - 0.1880 \cos(\sqrt{30}\tau) - 0.9195 \sin(\sqrt{30}\tau) \\
z_{22}^R(z, \tau) = & -1.876 \left(-1 + \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z^2 \\
& - 1.876 \left(0.4008 - 0.9797 \sin(\sqrt{30}\tau) - 1.200 \cos(\sqrt{30}\tau) \right) z \\
& \quad + 1.876 - 0.3760 \cos(\sqrt{30}\tau) - 1.839 \sin(\sqrt{30}\tau) .
\end{aligned}$$

Damit hat man eine teilerfremde Matrizenbruchdarstellung der Art (5.3) gefunden. ■

5.2.3 Auffinden einer rechten teilerfremden Darstellung der PÜF-Matrix mithilfe einer Darstellung durch Dgl. erster Ordnung in expliziter Form

Wie am Beispiel 5.2 schon zu erkennen ist, ist der im vorigen Abschnitt beschrittene Weg rechnerisch sehr aufwendig, weshalb er bei umfangreicheren System wenig geeignet erscheint. Hier bietet sich als Alternative ein Weg über eine Darstellung durch eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in expliziter Form

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

an. Wie ein beliebiges System in polynomialer Darstellung systematisch in diese Darstellung überführt werden kann, wird im Abschnitt A.2 erläutert.

Auffinden einer ausgabeparametrischen Darstellung

Zuerst soll das System in einer sogenannten „ausgabeparametrischen Darstellung“ überführt werden. In einer ausgabeparametrischen Darstellung hängt lediglich die Ausgabegleichung vom Parameter τ ab, nicht jedoch die Systemgleichung. Der besondere Vorteil einer expliziten Differentialgleichung erster Ordnung ist, dass sich die Lösung geschlossen angeben lässt

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\bar{t})} B\mathbf{u}(\bar{t}) d\bar{t} .$$

Sucht man also das Verhalten im aktuellen Abtastschritt $\mathbf{x}(kT+\tau)$, mit $0 \leq \tau < T$, in Abhängigkeit vom Ergebnis des letzten Abtastschrittes $\mathbf{x}(kT)$, so setzt man $t = kT + \tau$ und $t_0 = kT$ ein und erhält

$$\mathbf{x}(kT+\tau) = e^{A\tau}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{A(kT+\tau-\bar{t})} B\mathbf{u}(\bar{t}) d\bar{t}$$

und mit der Substitution $\bar{\tau} = \bar{t} - kT$

$$= e^{A\tau}\mathbf{x}(kT) + \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B\mathbf{u}(kT+\bar{\tau}) d\bar{\tau} .$$

Setzt man das gestufte Stellsignal aus Gl. (5.1) ein und bedenkt, dass $m(t) \equiv 0$ für $t < 0$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + \tau) &= e^{A\tau} \mathbf{x}(kT) + \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B \sum_{\kappa=0}^k u[\kappa] m((k-\kappa)T + \bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ &= e^{A\tau} \mathbf{x}(kT) + \sum_{\kappa=0}^k \left(\int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B m((k-\kappa)T + \bar{\tau}) d\bar{\tau} \right) \mathbf{u}[\kappa] \quad \text{mit } 0 \leq \tau < T. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Häufig beeinflussen die Stellwerte nur den laufenden Abtastschritt, was $m(t) \equiv 0$ auch für $t \geq T$ nach sich zieht. Damit vereinfacht sich die vorstehende Formel noch einmal zu

$$\mathbf{x}(kT + \tau) = e^{A\tau} \mathbf{x}(kT) + \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \mathbf{u}[k] \quad \text{mit } 0 \leq \tau < T. \quad (5.6)$$

Die Ausgangsgleichung für $\mathbf{y}(kT + \tau)$ lautet mit den obigen Überlegungen

$$\mathbf{y}(kT + \tau) = C \mathbf{x}(kT + \tau) + D \left(\frac{d}{dt} \right) \sum_{\kappa=0}^k m((k-\kappa)T + \bar{\tau}) u[\kappa], \quad (5.7)$$

wobei sich dieses im Fall $m(t) \equiv 0$ für $t \geq T$ zu

$$\mathbf{y}(kT + \tau) = C \mathbf{x}(kT + \tau) + D \left(\frac{d}{dt} \right) m(\bar{\tau}) \mathbf{u}[k] \quad (5.8)$$

vereinfacht.

Aus diesen Gleichungen (5.5) bis (5.8) kann die ausgabeparametrische Darstellung gewonnen werden. Der besseren Übersicht halber soll mit dem Fall $m(t) \equiv 0$ für $t \geq T$ begonnen werden. Hier kann man als zeitdiskreten Vektor $\mathbf{x}[k] := \mathbf{x}(kT)$ definieren. Lässt man in Gleichung (5.6) den Parameter τ gegen T laufen, so erhält man eine Systemgleichung, die *nicht* von τ abhängt:

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{AT} \mathbf{x}[k] + \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \mathbf{u}[k].$$

Zusammen mit der Ausgangsgleichung (5.8), in die Gl. (5.6) eingesetzt wurde, lautet die ausgabeparametrische Darstellung somit

$$\mathbf{x}[k+1] = A^* \mathbf{x}[k] + B^* \mathbf{u}[k] \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{y}[k, \tau] = C^*(\tau) \mathbf{x}[k] + D^*(\tau) \mathbf{u}[k] \quad (5.9b)$$

mit

$$\begin{aligned} A^* &= e^{AT} & B^* &= \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ C^*(\tau) &= C e^{A\tau} & D^*(\tau) &= C \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} + D \left(\frac{d}{dt} \right) m(\tau). \end{aligned} \quad (5.10)$$

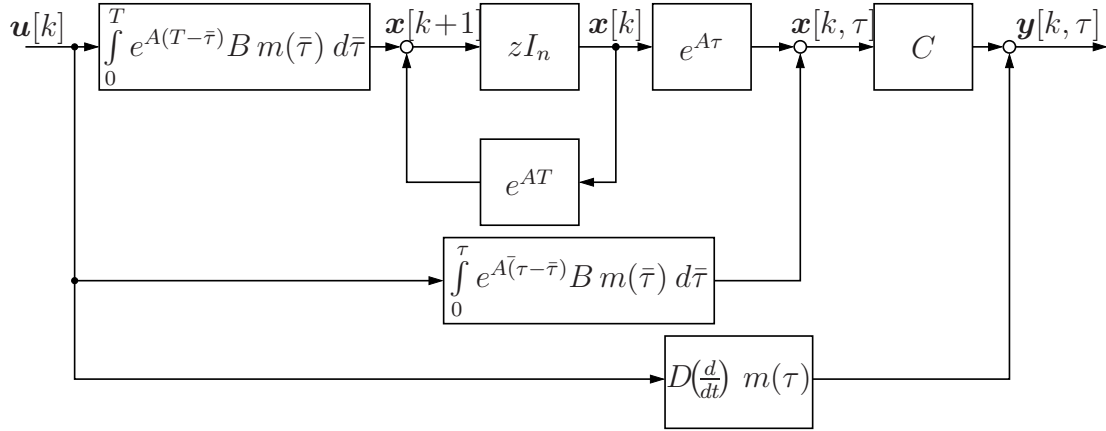


Bild 5.3: Wirkungsplan der ausgabeparametrischen Darstellung bei $m(t) \equiv 0$ für $t \geq T$

In Bild 5.3 ist die Wirkungsweise schematisch dargestellt. Im Fall $m(t) \neq 0$ für $t \geq T$ fließen auch zurückliegende Werte von $\mathbf{u}[k]$ ein. Daher muss der diskrete Vektor $\mathbf{x}[k]$ um zurückliegende Werte erweitert werden. Ebenso müssen die Matrizen A^* und $C^*(\tau)$ um die Summanden mit $\kappa < k$ aus Gleichung (5.5) und (5.7) erweitert werden. Nimmt man an, dass k_m zurückliegende Werte $\mathbf{u}[k]$ eingehen, d. h. $m(t) \equiv 0$ für $t \geq (k_m + 1)T$, so definiert man $\mathbf{x}[k]$

$$\mathbf{x}[k] := \begin{pmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[k-k_m] \end{pmatrix}.$$

Aus Gl. (5.5) erhält man dann für $\tau \rightarrow T$

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{AT} \mathbf{x}[k] + \sum_{\kappa=k-k_m}^{k-1} \left(\int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m((k-\kappa)T + \bar{\tau}) d\bar{\tau} \right) \mathbf{u}[\kappa] + \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \mathbf{u}[k]$$

und die erweiterten Matrizen $A^* \in \mathbb{R}^{(n+mk_m) \times (n+mk_m)}$, $B^* \in \mathbb{R}^{(n+mk_m) \times m}$ und $C^*(\tau) \in \mathbb{R}^{p \times (n+mk_m)}$ lauten

$$A^* = \begin{pmatrix} e^{AT} & \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(1T + \bar{\tau}) d\bar{\tau} & \cdots & \cdots & \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(k_m T + \bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} \int_0^T e^{A(T-\bar{\tau})} B m(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^*(\tau) = \begin{pmatrix} C e^{A\tau} & C \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B m(T+\bar{\tau}) d\bar{\tau} + D\left(\frac{d}{dt}\right) m(T+\tau) & \cdots \\ \cdots & C \int_0^\tau e^{A(\tau-\bar{\tau})} B m(k_m T+\bar{\tau}) d\bar{\tau} + D\left(\frac{d}{dt}\right) m(k_m T+\tau) & \cdots \end{pmatrix}.$$

$D^*(\tau)$ bleibt unverändert.

Auffinden der rechtsteilerfremden Darstellung von $G(z, \tau)$

Aus der speziellen Darstellung (5.9) ergibt sich durch die modifizierte z -Transformation

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}_{(-0)} &= A^* \mathbf{X}(z) + B^* \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z, \tau) &= C^*(\tau) \mathbf{X}(z) + D^*(\tau) \mathbf{U}(z), \end{aligned}$$

was ohne Schwierigkeiten zu einer gemischten Matrizenbruchdarstellung der parametrischen Übertragungsfunktion führt

$$Y(z, \tau) = C^*(\tau)(zI - A^*)^{-1} \mathbf{x}_{(-0)} + \underbrace{\left[C^*(\tau)(zI - A^*)^{-1} B^* + D^*(\tau) \right]}_{\text{PÜF: } G(z, \tau)} \mathbf{u}[k]. \quad (5.11)$$

Diese Darstellung ist genau dann teilerfremd, wenn das Paar $\begin{pmatrix} C^*(\tau) \\ zI - A^* \end{pmatrix}$ beobachtbar und das Paar $(zI - A^*, B^*)$ steuerbar ist. Im Falle $m(t) \equiv 0$ für $t \geq T$ genügt es, zu prüfen, ob das Paar $\begin{pmatrix} C \\ zI - A^* \end{pmatrix}$ beobachtbar ist, da es sich bei $e^{A\tau}$ um eine Einheit im Ring der polynomialen Matrizen in z handelt. Pathologische Abtastfrequenzen sind also nach wie vor zu meiden.

Eine teilerfremde rechte Matrizenbruchdarstellung kann im Anschluss gefunden werden, indem man den Matrizenbruch $(zI - A^*)^{-1} B^*$ in eine rechte teilerfremde Darstellung umwandelt. Der Vorteil gegenüber der Vorgehensweise in Abschnitt 5.2.2 besteht darin, dass man hier allein mit Polynomen in z umgeht. Interessant ist in diesem Zusammenhang die in [Rei06], Abschnitt 6.4.4.2, vorgestellte Methode, und zwar aus drei Gründen: Die Matrizen der Darstellung (A.3) liegen ohnehin vor, die eigentliche Rechnung geschieht nicht mit polynomialen Matrizen, sondern mit reellen, und drittens erscheint $U_{22}^*(z)$ automatisch in spalten- und zeilenreduzierter Form. Aber auch die in den Abschnitten 2.3 und A.1 oder in [RL07] vorgestellten Methoden können genutzt werden. Hat man die Darstellung

$$(zI_n - A^*)^{-1} B^* = -U_{12}^*(z) \cdot (U_{22}^*(z))^{-1}$$

erhalten, setzt man das in die PÜF aus Gl. (5.11) ein, und bekommt schließlich

$$G(z, \tau) = -C^*(\tau) U_{12}^* (U_{22}^*)^{-1} + D^*(\tau) = \underbrace{\left(-C^*(\tau) U_{12}^* + D^*(\tau) U_{22}^* \right)}_{Z^R(z, \tau)} \underbrace{\left(U_{22}^* \right)^{-1}}_{N^R(z)}. \quad (5.12)$$

Ein etwaiger gemeinsamer Linksteiler von $(zI_n - A^*, B^*)$ wurde gekürzt. Wenn außerdem das Paar $\begin{pmatrix} C^*(\tau) \\ zI - A^* \end{pmatrix}$ rechtsteilerfremd ist, so ist diese Darstellung teilerfrei.

Beispiel 5.3 Es soll das verschiebliche Zweifachpendel aus Beispiel 2.1 verwendet werden, allerdings mit herabhängenden Pendelkörpern. Damit lauten die Systemgleichungen im Bildbereich

$$\begin{pmatrix} (m_0+m_1+m_2)s^2 & (l_1m_1+a_1m_2)s^2 & l_2m_2s^2 \\ (l_1m_1+a_1m_2)s^2 & (l_1^2m_1+a_1^2m_2)s^2+g(l_1m_1+a_1m_2) & a_1l_2m_2s^2 \\ s^2 & a_1s^2 & l_2s^2+g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ D_1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s).$$

Der besseren Übersicht halber sollen die (normierten) Werte

g	a_1	l_1	l_2	m_0	m_1	m_2	T
10	0.25	0.2	0.4	0.25	0.1	0.2	0.4

angenommen werden. Damit lautet die Übertragungsfunktionsmatrix

$$G_{\mathbf{u}}^{\mathbf{x}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{7 + 0.445s^2 + 0.0016s^4}{s^2(3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4)} & -\frac{0.008s^2 + 0.7}{3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4} \\ -\frac{0.008s^2 + 0.7}{3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4} & \frac{0.14s^2 + 5.5}{3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4} \\ -\frac{-0.001s^2 + 0.7}{3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4} & \frac{-0.0675s^2}{3.85 + 0.1398s^2 + 0.0004s^4} \end{pmatrix}.$$

Nach der in Abschnitt A.2 beschriebenen Methode erhält man die Dgl. erster Ordnung in expliziter Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -245 & 118.1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 135 & -104.4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & -20 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 350 & -168.8 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -168.8 & 130.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Als Digital-Analog-Umsetzer komme das Halteglied nullter Ordnung aus Beispiel 5.2 zum Einsatz ($m(t) = \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T)$). Die (normierte) Abtastzeit T sei 0.4. Damit liefern die Formeln (5.10)

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1584 & 0.3326 & -0.5048 & 0.03581 & 0.06953 & 0.04294 \\ 0.2579 & -0.5769 & -0.2684 & 0.03439 & 0.04907 & 0.1206 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.8875 & -11.24 & 3.731 & 0.1584 & 0.3326 & -0.5048 \\ 0.4457 & 4.264 & -6.795 & 0.2579 & -0.5769 & -0.2684 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.005299 & 0.01432 \\ 0.00285 & 0.02405 \\ 0.4 & 0 \\ 0.03581 & 0.06953 \\ 0.03439 & 0.04907 \end{pmatrix}$$

$$C^*(\tau) = \begin{pmatrix} 1.42 \cos(5.49\tau) + 0.757 \cos(17.9\tau) + 1.82 & -3.96 \cos(5.49\tau) - 16.0 \cos(17.9\tau) & -6.31 \cos(5.49\tau) + 8.81 \cos(17.9\tau) & \dots \\ -3.96 \cos(5.49\tau) - 16.0 \cos(17.9\tau) & 11.0 \cos(5.49\tau) + 339 \cos(17.9\tau) & 17.6 \cos(5.49\tau) - 186 \cos(17.9\tau) & \dots \\ -6.31 \cos(5.49\tau) + 8.81 \cos(17.9\tau) & 17.6 \cos(5.49\tau) - 186 \cos(17.9\tau) & 28.0 \cos(5.49\tau) + 102 \cos(17.9\tau) & \dots \\ \dots & 0.260 \sin(5.49\tau) + 0.0425 \sin(17.9\tau) + 1.82\tau & -0.730 \sin(5.49\tau) - 0.896 \sin(17.9\tau) & -1.15 \sin(5.49\tau) + 0.493 \sin(17.9\tau) \\ \dots & -0.722 \sin(5.49\tau) - 0.897 \sin(17.9\tau) & 2.06 \sin(5.49\tau) + 19.0 \sin(17.9\tau) & 3.18 \sin(5.49\tau) - 10.4 \sin(17.9\tau) \\ \dots & -1.15 \sin(5.49\tau) + 0.494 \sin(17.9\tau) & 3.18 \sin(5.49\tau) - 10.4 \sin(17.9\tau) & 5.14 \sin(5.49\tau) + 5.73 \sin(17.9\tau) \end{pmatrix}$$

$$D^*(\tau) = \begin{pmatrix} 0.909\tau^2 - 0.0472 \cos(5.49\tau) + 0.0496 - 0.00238 \cos(17.9\tau) & -0.182 + 0.0502 \cos(17.9\tau) + 0.132 \cos(5.49\tau) \\ -0.182 + 0.0502 \cos(17.9\tau) + 0.132 \cos(5.49\tau) & 1.43 - 1.06 \cos(17.9\tau) - 0.367 \cos(5.49\tau) \\ 0.209 \cos(5.49\tau) - 0.182 - 0.0276 \cos(17.9\tau) & 0.584 \cos(17.9\tau) - 0.584 \cos(5.49\tau) \end{pmatrix}.$$

Um $U_{22}^*(z)$ in spaltenreduzierter Form zu erhalten, wird die Methode aus [Rei06], Abschnitt 6.4.4.2, verwendet. Die Kroneckerschen Steuerbarkeitsindizes sind 4 und 2. Damit errechnet man

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\mathbf{b}_1^*, A^* \mathbf{b}_1^*, A^{*2} \mathbf{b}_1^*, A^{*3} \mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, A^* \mathbf{b}_2^* \right)^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 14.31 & -142.2 & 38.19 & -2.403 & 24.99 & -12.62 \\ -23.07 & 481.1 & -261.7 & 0.6913 & -14.11 & 7.881 \end{pmatrix}.$$

Weil mit diesem P

$$\det \begin{pmatrix} zI - A^* & -B^* \\ P & 0 \end{pmatrix} = 1$$

gilt, kann man statt der inversen auch die adjungierte Matrix bilden und erhält

$$\begin{pmatrix} zI - A^* & B^* \\ P & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} zI - A^* & B^* \\ P & 0 \end{pmatrix}_{\text{adj}} = \begin{pmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen

$$U_{12}^* = \begin{pmatrix} 0.08z^3 + 0.1796z^2 + 0.1947z + 0.09509 & 0.1789z + 0.1789 \\ 0.005299z^3 + 0.02729z^2 + 0.02949z + 0.007506 & 0.02617z + 0.02617 \\ 0.00285z^3 + 0.03432z^2 + 0.03689z + 0.005415 & 0.03042z + 0.03042 \\ 0.4z^3 + 0.09812z^2 - 0.02268z - 0.4754 & 0.8947z - 0.8947 \\ 0.03581z^3 + 0.05296z^2 - 0.04034z - 0.04843 & 0.1496z - 0.1496 \\ 0.03439z^3 + 0.08621z^2 - 0.07559z - 0.04501 & 0.126z - 0.126 \end{pmatrix}$$

$$U_{22}^* = \begin{pmatrix} -z^4 + 0.7547z^3 + 0.302z^2 + 1.132z - 1.189 & -2.237z^2 + 4.474z - 2.237 \\ 0.1158z - 0.08432 & -z^2 + 1.374z - 1 \end{pmatrix}$$

für die rechtsteilerfremde Darstellung

$$G_m(z, \tau) = \underbrace{(D^*(\tau)U_{22}^* - C^*(\tau)U_{12}^*)}_{Z(z, \tau)} (U_{22}^*)^{-1}.$$

Auf die Darstellung von $Z(z, \tau)$ wird aus Platzgründen verzichtet. Jedoch lautet

$$Z(z, 0) = \begin{pmatrix} -0.2211z^3 - 0.2586z^2 - 0.2812z - 0.2438 & -0.2684z - 0.2684 \\ 0.2262z^3 - 0.166z^2 - 0.2037z + 0.1885 & -0.4474z - 0.4474 \\ 0.3224z^3 - 0.3224z^2 - 0.3224z + 0.3224 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13) \quad \blacksquare$$

5.3 Trajektorienplanung

Genau wie im Fall einer zeitkontinuierlichen Steuerung (Kapitel 3) kann auch die Basisfolge $\xi[k]$ frei vorgegeben werden. Aus dieser ergeben sich dann sowohl die Stellfolge $\mathbf{u}[k]$ als auch die Ausgangssignale $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(kT + \tau)$. Jedoch ist die Planungsfreiheit gegenüber Kapitel 3 eingeschränkt, denn anstelle von Signalen, die über die gesamte Zeitachse wählbar sind, stehen jetzt nur noch abzählbar viele Zahlenwerte zur Verfügung. Das Verhalten in der Zeit ist durch die in $Z(z, \tau)$ enthaltenen Funktionen in τ vorgezeichnet.

5.3.1 Trajektorienplanung zwischen Ruhelagen

Da $Z(z, \tau)$ im Gegensatz zu $U_{12}(s)$ in Abschnitt 3.1.1 nicht differenzierend wirkt und darüber hinaus die Basisfolge $\xi[k]$ keine Ableitung nach der Zeit besitzt, ist neu zu fragen, was eine Ruhelage kennzeichnet. Man nimmt also an, dass

$$\mathbf{y}(t) = \text{const}$$

gilt. Daraus kann man folgern, dass bei $t = kT + \tau$ auch

$$\mathbf{y}(kT + \tau) - \mathbf{y}((k-1)T + \tau) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad 0 \leq \tau < T \quad (5.14)$$

gelten muss, bzw. z -transformiert

$$(1 - z^{-1}) Y(z, \tau) = (1 - z^{-1}) Z(z, \tau) \Xi(z) = \mathbf{0}.$$

Da es sich bei $(1 - z^{-1})$ um einen Skalar handelt, kann man ihn durchschieben und erhält

$$Z(z, \tau) (1 - z^{-1}) \Xi(z) = \mathbf{0}.$$

Man kann davon ausgehen, dass der Normalrang von $Z(z, \tau)$ maximal ist. Damit kann das Produkt nur null sein, wenn einer der Faktoren null ist. Deshalb muss

$$(1 - z^{-1}) \Xi(z) = \mathbf{0} \quad \implies \quad \xi[k] - \xi[k-1] = \mathbf{0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

gelten, d. h. $\xi[k]$ muss konstant sein. Die Ruhelage ist dann erreicht, wenn mindestens $\text{sgrad}_\mu Z(z, \tau)$ Werte von $\xi_\mu[k]$ gleich sind, wobei $\text{sgrad}_\mu Z(z, \tau)$ den höchsten Grad in z der μ -ten Spalte von $Z(z, \tau)$ angibt, $\mu = 1 \dots m$ (siehe Abschnitt A.1).

Damit ist zunächst nur gesichert, dass die Bedingung (5.14) erfüllt ist. Die Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ kann immer noch eine periodische Funktion mit der Periodendauer T sein. In diesem Fall kann man die Funktion $\mathbf{y}(t)$ in eine Fourierreihe entwickeln, und es muss (mit $\xi[k] = \bar{\xi}$)

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_\kappa e^{j\kappa \frac{2\pi}{T} t} = \mathbf{Z}_m^{-1} \left\{ Z(z, \tau) \frac{z}{z-1} \bar{\xi} \right\}$$

gelten, was zu

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c}_\kappa e^{j\kappa \frac{2\pi}{T}t} = Z(1, t) \bar{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{für } 0 \leq t < T \quad (5.15)$$

führt. Allerdings entsteht $Z(z, \tau)$ durch Anwendung von Gl. (5.2). Hat die Funktion $G_m(s) = \mathcal{L}\{g_m(t)\}$ die n Pole mit den Werten s_ν , $\nu = 1 \dots n$, dann sind die in $Z(1, t)$ auftretenden Funktionen vom Typ

$$Z(1, t) = \sum_{\nu=1}^n C_\nu e^{s_\nu t} \quad \text{mit } C_\nu \in \mathbb{C}^{r \times m}.$$

Die Gleichung (5.15) kann also nur erfüllt werden, wenn für ein Polpaar $s_{1,2}$

$$s_{1,2} = \pm j\kappa \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit beliebigem } \kappa \in \mathbb{Z}$$

gilt. Mit anderen Worten: Das aus Regelstrecke und Halteglied bestehende System muss eine ungedämpfte Eigenfrequenz $\omega_e = \kappa \frac{2\pi}{T}$ haben. Wenn man also die Abtastfrequenz T nicht sehr unglücklich gewählt hat, treten solche Schwingungen nicht auf.

Der Zusammenhang zwischen den konstanten Werten $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ und der Ruhelage $\mathbf{y}(t) = \text{const} = \mathbf{y}^{\text{ss}}$ und den konstanten Stellwerten $\bar{\mathbf{u}}$ ist mithin gegeben durch

$$\mathbf{y}^{\text{ss}} = Z(1, 0) \bar{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{u}} = N(1) \bar{\boldsymbol{\xi}}. \quad (5.16)$$

Die gewonnenen Erkenntnisse werden im nächsten Abschnitt in Beispiel 5.4 demonstriert.

5.3.2 Trajektorienplanung unter Berücksichtigung weiterer Bedingungen

Im Allgemeinen ist das bloße Erreichen einer Ruhelage nicht ausreichend. Meistens sollen die Trajektorien auch weitere Kriterien erfüllen. Beispielsweise sollen Ausgangsgrößen $\mathbf{Y}(z, \tau)$ oder Stellgrößen zu bestimmten Zeitpunkten festgelegte Werte annehmen, wie in Abschnitt 3.1.2 oder 3.1.3. Es können aber auch, wie in Abschnitt 3.2, Forderungen an den gesamten Trajektorienverlauf gestellt werden. Dabei kommt einem mathematisch zu gute, dass die Basisgröße nicht mehr eine Funktion wie in Kapitel 3 ist, sondern eine Zahlenfolge mit abzählbar vielen Elementen. Man wählt also aus einem endlich dimensional reellen Vektorraum, nicht mehr aus dem unendlich dimensional Funktionenraum, aus.

Der Planungszeitraum ΔT soll im Voraus festliegen und ein ganzzahliges Vielfaches Δ der Abtastzeit T sein. Es sind also Δ Werte der Basisfolgen $\boldsymbol{\xi}_b$ festzulegen, zuzüglich der Anzahl der benötigten Werte in der Zukunft, die durch den maximalen Grad der Spalten von $\begin{pmatrix} Z(z, \tau) \\ N(z) \end{pmatrix}$ bestimmt ist (siehe Seite 88). Man definiert

$$\boldsymbol{\xi}_d := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_b[0] \\ \boldsymbol{\xi}_b[1] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_b[\Delta] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_b[\Delta + \text{sgrad } N] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_d \in \mathbb{R}^{\Delta m + \text{sgrad } N}.$$

Außerdem wird die Summendarstellung von $Z(z, \tau)$ und $N(z)$ benötigt:

$$Z(z, \tau) = \sum_{\kappa=0}^{k_Z} Z_{\kappa}(\tau) z^{\kappa} \quad \text{und} \quad N(z) = \sum_{\kappa=0}^{k_N} N_{\kappa} z^{\kappa}$$

mit dem maximalen Grad k_Z von $Z(z, \tau)$ und k_N von $N(z)$. Damit kann man den Signalverlauf $\mathbf{y}(kT + \tau)$ im k -ten Abtastschritt in folgender Weise darstellen

$$\mathbf{y}(kT + \tau) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{p \times mk} & Z_0(\tau) & Z_1(\tau) & \cdots & Z_{k_Z}(\tau) & 0 & \cdots \end{pmatrix}}_{Z_{\bullet}(k, \tau)} \boldsymbol{\xi}_d. \quad (5.17)$$

Natürlich kann man auch Forderungen an die Ableitung stellen, indem man $Z_{\bullet}(k, \tau)$ nach τ differenziert. Auch ließen sich Forderungen an die Stellfolge darstellen:

$$\mathbf{u}[k] = \begin{pmatrix} 0_{m \times mk} & N_0 & N_1 & \cdots & N_{k_N} & 0 & \cdots \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_d.$$

Forderungen zu bestimmten Zeitpunkten

Es seien n skalare Forderungen y_{ν} an einzelne Ausgangsgrößen zu bestimmten Zeitpunkten t_{ν} gestellt. Durch Entnahme der zugehörigen Zeilen aus $Z_{\bullet}(k, \tau)$ erhält man

$$y_{\nu} \stackrel{!}{=} y(t_{\nu}) = y(k_{\nu}T + \tau_{\nu}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{p \times mk_{\nu}} & z_0^T(\tau_{\nu}) & z_1^T(\tau_{\nu}) & \cdots & z_{k_Z}^T(\tau_{\nu}) & 0 & \cdots \end{pmatrix}}_{z^T(k_{\nu}, \tau_{\nu})} \boldsymbol{\xi}_d$$

für $\nu = 1, \dots, n$.

Damit kann man sämtliche Forderungen in einem linearen Gleichungssystem zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} z^T(k_1, \tau_1) \\ \vdots \\ z^T(k_n, \tau_n) \end{pmatrix}}_{R_Z} \boldsymbol{\xi}_d. \quad (5.18)$$

Durch die Auswertung an konkreten Zeitpunkten τ_{ν} ist die Matrix R_Z eine reine Zahlenmatrix. Häufig werden die ersten und die letzten Werte von $\boldsymbol{\xi}_d$ durch die Forderung, aus einer Ruhelage in eine andere überzugehen, festliegen. Dann muss man nach den noch frei bleibenden Werten auflösen. Dabei kann das Gleichungssystem auch überbestimmt sein, jedoch lassen sich dann im Allgemeinen die Forderungen nicht mehr exakt erfüllen. Das folgende Beispiel soll die Vorgehensweise illustrieren.

Beispiel 5.4 (Fortsetzung des Beispiels 5.3) Es soll eine Basisfolge geplant werden. Die Bewegung soll innerhalb von Δ Abtastschritten aus der Ruhelage $w_0(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ um zwei Einheiten nach rechts versetzt werden in die Ruhelage $w_0(\Delta T) = 2$, $\varphi_1(\Delta T) = 0$, $\varphi_2(\Delta T) = 0$. Da das lineare System durch Linearisierung um eine Ruhelage mit $\varphi_1^{\text{ss}} = 0$ und $\varphi_2^{\text{ss}} = 0$ entstanden ist, liegt es nahe, während der Bewegung möglichst in der Nähe der Ruhelage zu bleiben. Daher sollen die Winkel φ_1 und φ_2 zu den Abtastzeitpunkten möglichst null sein, beide Pendelkörper also (nach Möglichkeit) senkrecht hinunterhängen. Die höchsten Spaltengrade von $Z(z, \tau)$ sind dieselben wie in $U_{22}^*(z)$. Somit folgt aus der Tatsache, dass die höchsten Spaltengrade von $U_{22}^*(z)$ vier und zwei sind, dass die erste Komponente $\xi_{b1}[k]$ der Basisfolge

mit vier Nullen für $k = 0, 1, 2, 3$, die zweite Komponente mit zwei Nullen für $k = 0, 1$ beginnen muss. Um den Übergang schnell zu absolvieren, wird $\Delta = 5$ festgelegt. Die Übergangszeit beträgt damit zwei Zeiteinheiten (ΔT). Die vier bzw. zwei konstanten Endwerte werden nach Gleichung (5.16) zu $\bar{\xi}_{b1} = -1.939$ und $\bar{\xi}_{b2} = -0.09750$ bestimmt. Damit liegt ein großer Teil von ξ_d bereits fest:

$$\begin{aligned} \xi_d &= (\xi_b[0]^T, \xi_b[2]^T, \xi_b[3]^T, \xi_b[4]^T, \xi_b[5]^T, \xi_b[6]^T, \xi_b[7], \xi_{b1}[8], \xi_{b1}[9])^T \\ &= (0 \ 0, \ 0 \ 0, \ 0 \ \xi_{b2}[2], \ 0 \ \xi_{b2}[3], \ \xi_{b1}[4] \ \xi_{b2}[4], \ \dots \\ &\quad \dots \ -1.939 \ -0.09750, \ -1.939 \ -0.09750, \ -1.939, \ -1.939)^T \end{aligned}$$

Außer dem Beginn und Ende in einer Ruhelage werden noch acht weitere Forderungen erhoben, $\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0$, $\varphi_1(2T) = \varphi_2(2T) = 0$, $\varphi_1(3T) = \varphi_2(3T) = 0$ und $\varphi_1(4T) = \varphi_2(4T) = 0$, d. h. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 4$ und sämtliche $\tau_\nu = 0$. Damit kann man die Matrix R_Z aus Gl. (5.13) entnehmen

$$R_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1885 & -0.4474 & -0.2037 & -0.4474 & -0.166 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1885 & -0.4474 & -0.2037 & -0.4474 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1885 & -0.4474 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3224 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0.2262 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0.3224 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -0.166 & 0 & 0.2262 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -0.3224 & 0 & 0.3224 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -0.2037 & -0.4474 & -0.166 & 0 & 0.2262 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & 0.3224 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0.1885 & -0.4474 & -0.2037 & -0.4474 & -0.166 & 0 & 0.2262 & 0 \\ \dots & 0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & -0.3224 & 0 & 0.3224 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhält die Forderungsgleichung (5.18)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4474 & 0 & 0.2262 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3224 & 0 \\ -0.4474 & -0.4474 & -0.166 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3224 & 0 \\ 0 & -0.4474 & -0.2037 & -0.4474 \\ 0 & 0 & -0.3224 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1885 & -0.4474 \\ 0 & 0 & 0.3224 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{b2}[2] \\ \xi_{b2}[3] \\ \xi_{b1}[4] \\ \xi_{b2}[4] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.4386 \\ -0.625 \\ -0.1168 \\ 0 \\ 0.3218 \\ 0.625 \end{pmatrix},$$

welche, als lineares Quadratmittelproblem behandelt, die Lösung

$$\begin{pmatrix} \xi_{b2}[2] \\ \xi_{b2}[3] \\ \xi_{b1}[4] \\ \xi_{b2}[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4901 \\ -0.13048 \\ -0.9693 \\ 0.3109 \end{pmatrix}$$

hat (siehe z. B. [BSMM00], 4.4.1.3). Damit lautet die Basisfolge

$$\xi_b[k] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4901 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -0.13048 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.9693 \\ 0.3109 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.939 \\ -0.09750 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.939 \\ -0.09750 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Aus dieser folgt für

$$\mathbf{y}(kT) = \begin{pmatrix} w0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}(kT) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3459 \\ 0 \\ -0.3125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8459 \\ 0 \\ -0.3125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1541 \\ 0 \\ 0.3125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.6541 \\ 0 \\ 0.3125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Winkel $\varphi_1(kT)$ wurde die Forderung sogar exakt erfüllt. Jedoch kann aus der Tatsache, dass φ_1 an den Abtastzeitpunkten Null ist, keinesfalls geschlossen werden, dass es auch dazwischen Null bleibt. Die Variation des Parameters τ im Bild 5.4 offenbart, dass φ_1 zwischen den Abtastzeitpunkten beachtlich ausschlägt (Animationsfilm siehe Bild 5.5). Die Werte zu den Abtastzeitpunkten sind eingekreist. Dies unterstreicht die Notwendigkeit, auch den Verlauf der Ausgangsgrößen zwischen den Abtastzeitpunkten zu untersuchen. Auch die anderen Ausgangssignale sind zwischen den Abtastzeitpunkten weit von einer linearen Interpolation entfernt. Das liegt daran, dass die Periodendauer der höheren Eigenfrequenz 0.3517 beträgt und damit kleiner ist als die Abtastzeit $T = 0.4$. ■

Optimale Basisfolgen

Aufgrund der zeitdiskreten Eigenschaft der Basisfolge lassen sich auch Integralkriterien im bestehenden Rahmen untersuchen und erfüllen. Ähnlich wie in Abschnitt 3.2.1 soll die Abweichung von einer Referenztrajektorie $\mathbf{y}^d(t)$ minimal im folgenden Sinne sein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \int_0^{\Delta T} \left(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t) \right)^T W \left(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\Delta-1} \int_0^T \left(\mathbf{y}(kT + \tau) - \mathbf{y}^d(kT + \tau) \right)^T W \left(\mathbf{y}(kT + \tau) - \mathbf{y}^d(kT + \tau) \right) d\tau \rightarrow \min \quad (5.19) \end{aligned}$$

mit einer reellen positiv definiten Wichtungsmatrix W . Die Beschränkung auf Ausgangsgrößen \mathbf{y} stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Man muss lediglich bei der Diskretisierung sämtliche wesentlichen Größen in \mathbf{y} aufnehmen. Zerlegt man die Kurvenverläufe von $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{y}^d(t)$ in Abschnitte zwischen den Abtastzeitpunkten und ordnet diese in Vektoren an

$$\mathbf{y}_v(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(\tau) \\ \mathbf{y}(T+\tau) \\ \mathbf{y}(2T+\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{y}((\Delta-1)T+\tau) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_v^d(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^d(\tau) \\ \mathbf{y}^d(T+\tau) \\ \mathbf{y}^d(2T+\tau) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^d((\Delta-1)T+\tau) \end{pmatrix},$$

so erhält man

$$\mathfrak{G} = \int_0^T \left(\mathbf{y}_v(\tau) - \mathbf{y}_v^d(\tau) \right)^T W_v \left(\mathbf{y}_v(\tau) - \mathbf{y}_v^d(\tau) \right) d\tau.$$

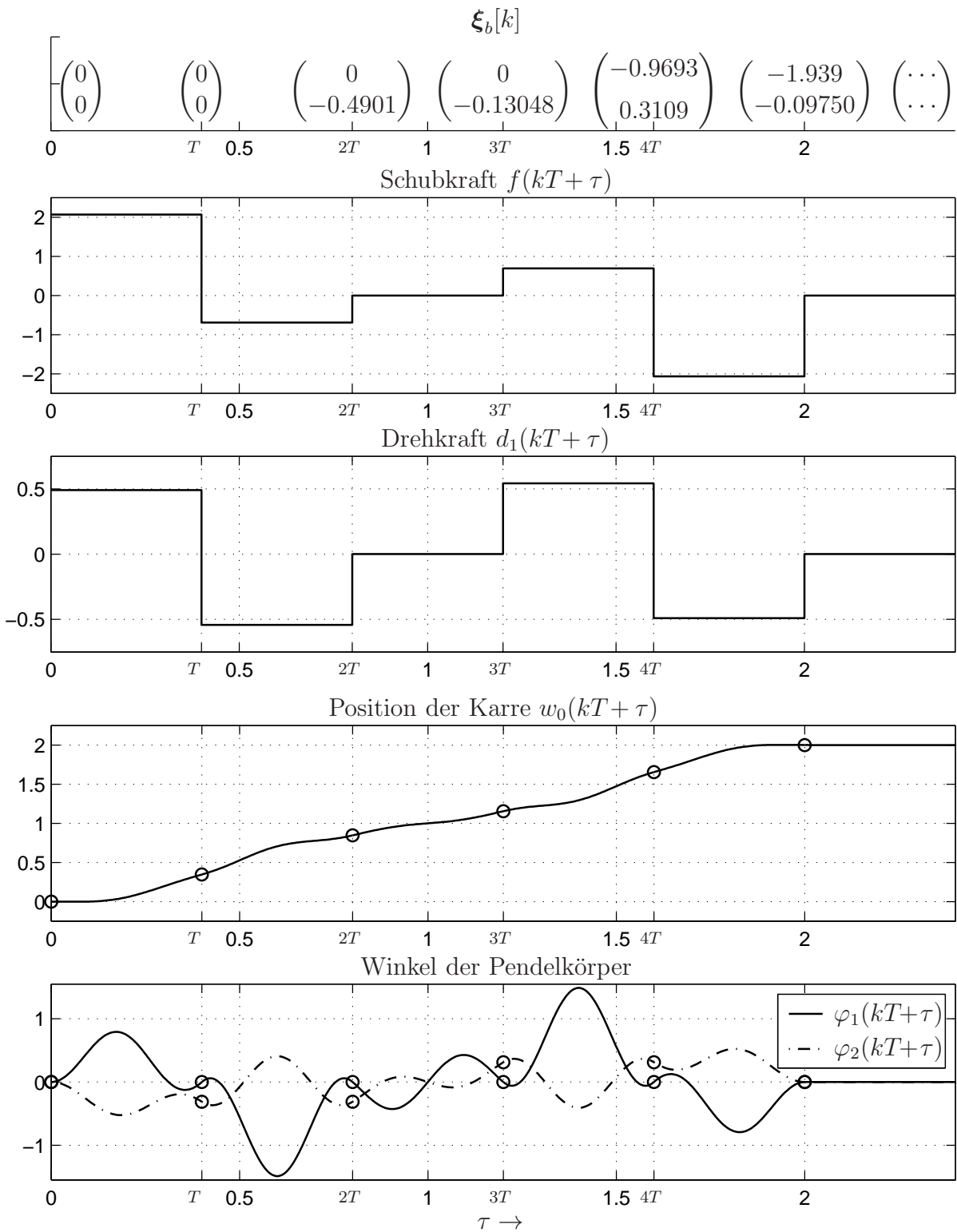


Bild 5.4: Basisfolge und resultierende Zeitverläufe der Stell- und Ausgangssignale zum Beispiel 5.4

Passend zu $\mathbf{y}_v(\tau)$ ergibt sich die neue Wichtungsmatrix W_v , indem man die alte Wichtungsmatrix W in einer Blockdiagonalmatrix Δ -mal aneinanderreihet. Da die Werte ξ_d der Basisfolge die freien Parameter darstellen, muss das Kriterium auf diese zurückgeführt

Bild 5.5: Animationsfilm der Planung von Beispiel 5.4

werden. Analog zu $\mathbf{y}_v(\tau)$ stellt man die Matrix $Z_v(\tau)$ aus Gl. (5.17) zusammen:

$$Z_v(\tau) = \begin{pmatrix} Z_{\bullet}(0, \tau) \\ Z_{\bullet}(1, \tau) \\ Z_{\bullet}(2, \tau) \\ \vdots \\ Z_{\bullet}(\Delta-1, \tau) \end{pmatrix},$$

so dass man $\mathbf{y}_v(\tau) = Z_v(\tau)\boldsymbol{\xi}_d$ erhält. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \int_0^T \left(Z_v(\tau)\boldsymbol{\xi}_d - \mathbf{y}_v^d(\tau) \right)^T W_v \left(Z_v(\tau)\boldsymbol{\xi}_d - \mathbf{y}_v^d(\tau) \right) d\tau \\ &= \int_0^T \left(\boldsymbol{\xi}_d^T (Z_v(\tau))^T W_v Z_v(\tau) \boldsymbol{\xi}_d - 2\boldsymbol{\xi}_d^T (Z_v(\tau))^T W_v \mathbf{y}_v^d(\tau) + (\mathbf{y}_v^d(\tau))^T W_v \mathbf{y}_v^d(\tau) \right) d\tau \\ &= \boldsymbol{\xi}_d^T \underbrace{\int_0^T (Z_v(\tau))^T W_v Z_v(\tau) d\tau}_{R_Z^I} \boldsymbol{\xi}_d - 2\boldsymbol{\xi}_d^T \underbrace{\int_0^T (Z_v(\tau))^T W_v \mathbf{y}_v^d(\tau) d\tau}_{\mathbf{r}_Z^I} + \int_0^T (\mathbf{y}_v^d(\tau))^T W_v \mathbf{y}_v^d(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{5.20}$$

da $\boldsymbol{\xi}_d$ konstant bezüglich τ ist. An dieser Stelle wird deutlich, dass es sich bei \mathfrak{G} nicht um ein Funktional wie in Abschnitt 3.2.1, sondern um eine Funktion von $\boldsymbol{\xi}_d$ handelt. Die Matrix R_Z^I ist quadratisch, ihre Einträge sind genau wie die des Vektors \mathbf{r}_Z^I reelle Zahlen. Als letztes ist noch zu bedenken, dass einige Werte von $\boldsymbol{\xi}_d$ durch die Forderung nach Beginn und Ende in einer Ruhelage festliegen. Es seien $\bar{\boldsymbol{\xi}}_d$ die festliegenden und $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_d$ die noch offenen Werte von $\boldsymbol{\xi}_d$, dann kann man durch Umsortieren von Zeilen und Spalten

Gleichung (5.20) als

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_d^T & \bar{\xi}_d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Z11}^I & R_{Z12}^I \\ R_{Z21}^I & R_{Z22}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_d \\ \bar{\xi}_d \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_d^T & \bar{\xi}_d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{Z1}^I \\ r_{Z2}^I \end{pmatrix} + \int_0^T (\mathbf{y}_v^d(\tau))^T W_v \mathbf{y}_v^d(\tau) d\tau \quad (5.21)$$

schreiben. Aus

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \tilde{\xi}_d} = 2R_{Z11}^I \tilde{\xi}_d + \left(R_{Z21}^I + R_{Z12}^I \right) \bar{\xi}_d - 2r_{Z1}^I = \mathbf{0}$$

ergeben sich die noch offenen Werte

$$\tilde{\xi}_d = \left(R_{Z11}^I \right)^{-1} \left(r_{Z1}^I - \frac{1}{2} \left(R_{Z21}^I + R_{Z12}^I \right) \bar{\xi}_d \right). \quad (5.22)$$

Eine Neubetrachtung der Aufgabe aus Beispiel 5.4 (Fortsetzung des Beispiels 5.3) soll die Methode verdeutlichen.

Beispiel 5.5 Weiterhin soll die Überführung innerhalb von fünf Abtastschritten aus der Ruhelage $w_0(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ in die Ruhelage $w_0(\Delta T) = 2$, $\varphi_1(\Delta T) = 0$, $\varphi_2(\Delta T) = 0$ bei einer Abtastzeit $T = 0.4$ realisiert werden. Doch diesmal wird die Forderung an die gesamte Trajektorie, nicht nur an deren abgetastete Werte, gestellt (siehe Gl. 5.19):

$$\mathfrak{G} := \int_0^2 \left[(\varphi_1(t))^2 + (\varphi_2(t))^2 \right] dt = \sum_{k=0}^4 \int_0^{0.4} \left[(\varphi_1(k \cdot 0.4 + \tau))^2 + (\varphi_2(k \cdot 0.4 + \tau))^2 \right] d\tau \rightarrow \min .$$

Man benötigt die letzten beiden Zeilen von $Z^R(z, \tau)$ (Gl. 5.13); die Matrizen W und W_v sind Einheitsmatrizen. Bei der Berechnung von $Z_v(\tau)$ macht man sich Gl. (5.12)

$$Z^R(z, \tau) = -C^*(\tau)U_{12}^*(z) + D^*(\tau)U_{22}^* = -C^*(\tau) \left(\sum_{\kappa=0}^3 U_{12\kappa}^* z^\kappa \right) + D^*(\tau) \left(\sum_{\kappa=0}^4 U_{22\kappa}^* z^\kappa \right)$$

zunutze, um $Z_\bullet(k, \tau)$ anzugeben (Gl. 5.17):

$$Z_\bullet(k, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(0_{3 \times 2k} \quad D^*(\tau)U_{22,0}^* - C^*(\tau)U_{12,0}^* \quad D^*(\tau)U_{22,1}^* - C^*(\tau)U_{12,1}^* \quad \cdots \quad D^*(\tau)U_{22,4}^* \quad 0 \quad \cdots \right)$$

und damit die Teilmatrizen von R_Z^I zu berechnen. Die für eine Minimierung nutzbaren Werte der Basisfolge sind $\xi_{b2}[2]$, $\xi_{b2}[3]$, $\xi_{b1}[4]$ und $\xi_{b2}[4]$, wie auch schon in Beispiel 5.4. Man erhält mit Hilfe von Gl. (5.20) und Gl. (5.21)

$$R_{Z11}^I = \begin{pmatrix} 2.659 & -1.722 & -0.05885 & 0.5525 \\ -1.722 & 2.659 & -0.00355 & -1.722 \\ -0.05885 & -0.00355 & 0.2609 & 0.1188 \\ 0.5525 & -1.722 & 0.1188 & 2.659 \end{pmatrix}$$

$$R_{Z_{21}}^I = \begin{pmatrix} 0.01169 & 0 & 0.002747 & 0 \\ 0.5525 & 0 & -0.03489 & 0 \\ -0.09723 & 0.01169 & 0.045 & 0 \\ -1.722 & 0.5525 & 0.04796 & 0 \\ 0.1188 & -0.09723 & -0.08575 & 0.01169 \\ -0.00355 & 0.1188 & -0.09201 & -0.09723 \\ 0.04796 & -0.05885 & -0.09201 & -0.00355 \\ 0 & 0.5525 & -0.09723 & -1.722 \\ -0.03489 & 0.04796 & -0.08575 & -0.05885 \\ 0 & 0 & 0.01169 & 0.5525 \\ 0 & -0.03489 & 0.045 & 0.04796 \\ 0 & 0 & 0.002747 & -0.03489 \end{pmatrix}$$

$$R_{Z_{12}}^I = \begin{pmatrix} 0.01169 & 0.5525 & -0.09723 & -1.722 & 0.1188 & -0.00355 & \dots \\ 0 & 0 & 0.01169 & 0.5525 & -0.09723 & 0.1188 & \dots \\ 0.002747 & -0.03489 & 0.045 & 0.04796 & -0.08575 & -0.09201 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01169 & -0.09723 & \dots \\ \dots & 0.04796 & 0 & -0.03489 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -0.05885 & 0.5525 & 0.04796 & 0 & -0.03489 & 0 \\ \dots & -0.09201 & -0.09723 & -0.08575 & 0.01169 & 0.045 & 0.002747 \\ \dots & -0.00355 & -1.722 & -0.05885 & 0.5525 & 0.04796 & -0.03489 \end{pmatrix}.$$

Da sämtliche Referenztrajektorien $y^d(t)$ identisch null sind, ist auch der Vektor \mathbf{r}_Z^I null. Am Ende erhält man die noch offenen Werte der Basisfolge durch Auswertung von Gleichung (5.22) zu

$$\begin{pmatrix} \xi_{b2}[2] \\ \xi_{b2}[3] \\ \xi_{b1}[4] \\ \xi_{b2}[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.07471 \\ -0.1305 \\ -0.9693 \\ -0.1045 \end{pmatrix}.$$

Die weiteren Ergebnisse sind in Bild 5.6 graphisch dargestellt (Animationsfilm siehe Bild 5.7). Wieder sind die Werte zu den Abtastzeitpunkten eingekreist. Man sieht, dass, im Gegensatz zu Beispiel 5.4 bzw. Bild 5.4, keiner der abgetasteten Werte null ist. Doch die Betrachtung der Werte zwischen den Abtastzeitpunkten offenbart, dass die Winkel φ_1 und φ_2 jetzt erheblich weniger ausschlagen und in einem Bereich bleiben, in dem die Linearisierung Gültigkeit haben sollte. Die Übergangszeit wurde dafür nicht verändert. Dies zeigt noch einmal, wie notwendig es ist, bei längeren Abtastzeiten das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten in das Kalkül einzubeziehen. ■

5.4 Folgeregelung

Ebenso wie in Kapitel 4 kann man nicht davon ausgehen, dass das mathematische Modell das System exakt widerspiegelt. Vielmehr muss insbesondere bei einer instabilen Regelstrecke eine Folgeregelung dafür sorgen, dass das System in der Nähe der geplanten Trajektorie bleibt. Da eine digitale Steuer- und Regeleinrichtung vorliegt, kann der Messwert auch nur zu bestimmten Zeitpunkten erfasst werden. Eine Einrichtung dafür heißt „Abtast- und Halteglied“. Der Messwert wird dann mit dem aus der Basisfolge berechneten Sollwert $\mathbf{y}(kT+0) = \mathcal{Z}_m^{-1} \{ \mathcal{Z}^R(z, 0) \Xi(z) \}$ zum Abtastzeitpunkt verglichen. Aus

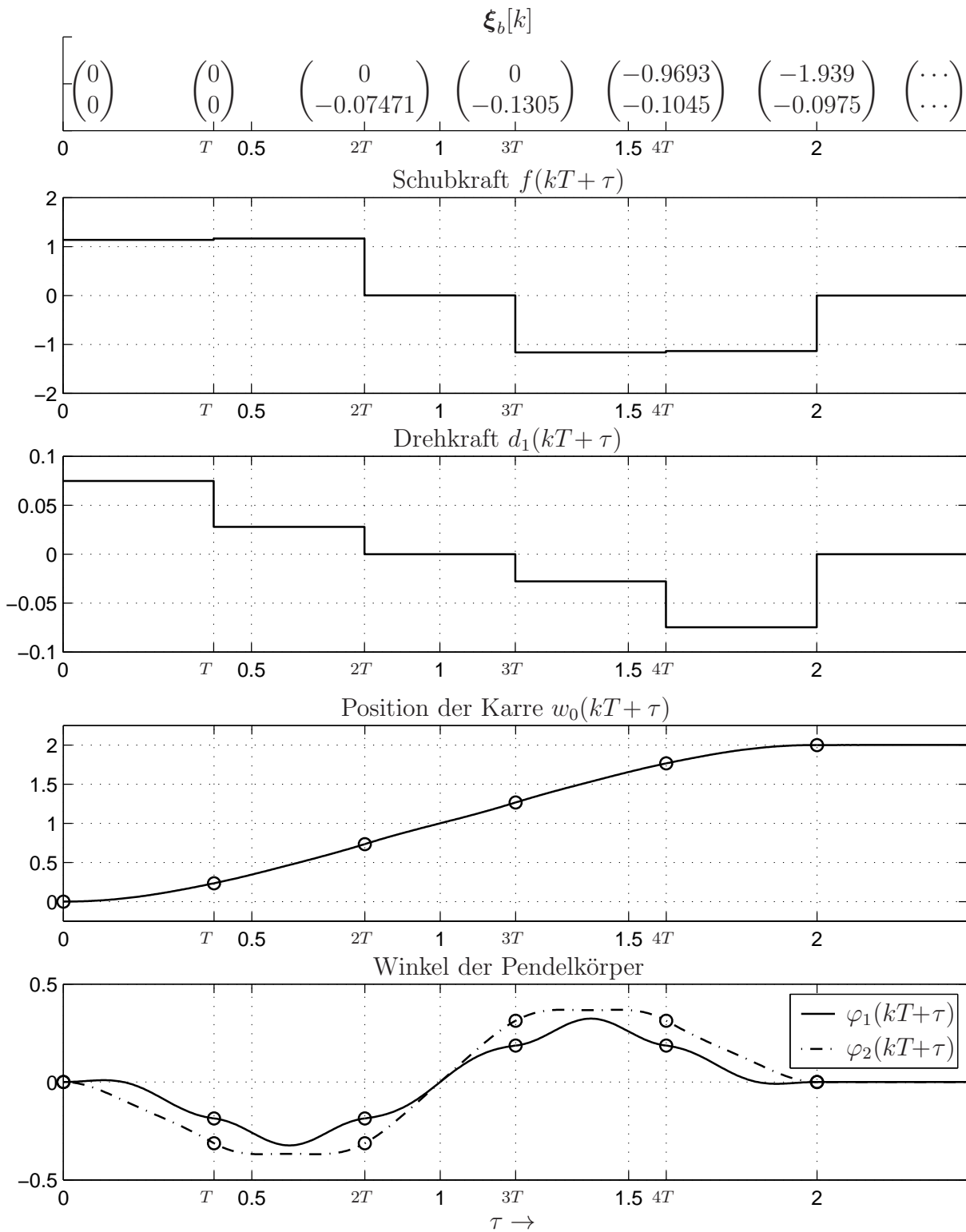
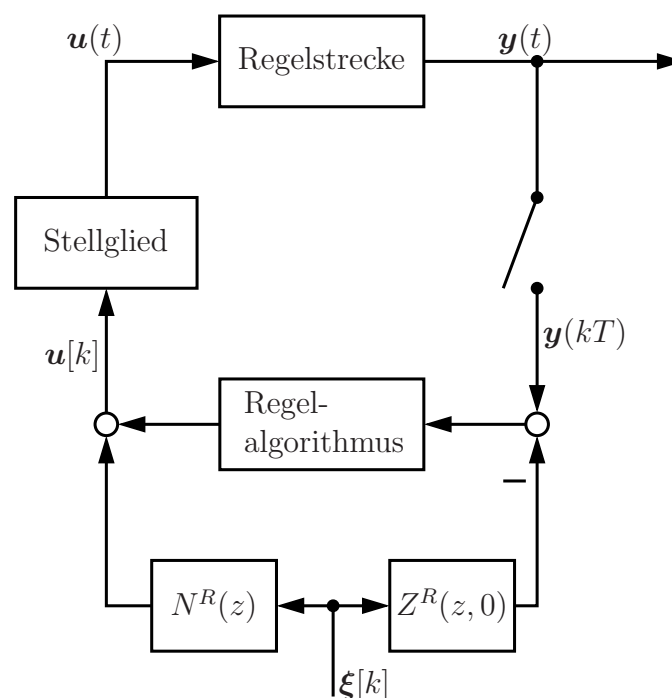


Bild 5.6: Basisfolge & resultierende Zeitverläufe der Stell- und Ausgangssignale

der Differenz berechnet ein digitaler Regelalgorithmus einen Korrekturstellwert und addiert diesen zum geplanten zeitdiskreten Stellwert. Das Schema ist in Bild 5.8 dargestellt.

Mit einer ähnlichen Überlegung wie in Abschnitt 5.3.1 kann man feststellen, dass ein

Bild 5.7: Animationsfilm der Planung von Beispiel 5.5**Bild 5.8:** Schema der digitalen Steuer- und Regeleinrichtung

Signal $y(t)$ konstant ist, wenn die abgetasteten Werte $y(kT)$ über einen längeren Zeitraum konstant sind, sofern man keine pathologische Abtastfrequenz gewählt hat. Mithin genügt es, die Stabilität des zeitdiskreten Teils zu untersuchen. Dazu wird der zeitkontinuierlich wirkende Teil zusammengefasst, und man erhält den Signalflussplan in Bild 5.9. Störungen der Strecke, gleich welcher Natur, äußern sich aus Sicht des Reglers in einem gestörten abgetasteten Signal $\mathbf{y}(kT) =: \mathbf{y}[k]$; diese Störung werde recht grob durch eine Störfolge $\mathbf{y}_s[k]$ modelliert. Man definiert eine Hilfsgröße Ξ_h und stellt mit ihrer Hilfe das Übertragungsverhalten der abgetasteten Strecke als

$$\mathbf{U}(z) = N^R(z) \Xi_H(z) \quad \text{und} \quad \mathbf{Y}(z) = Z^R(z, 0) \Xi_H(z)$$

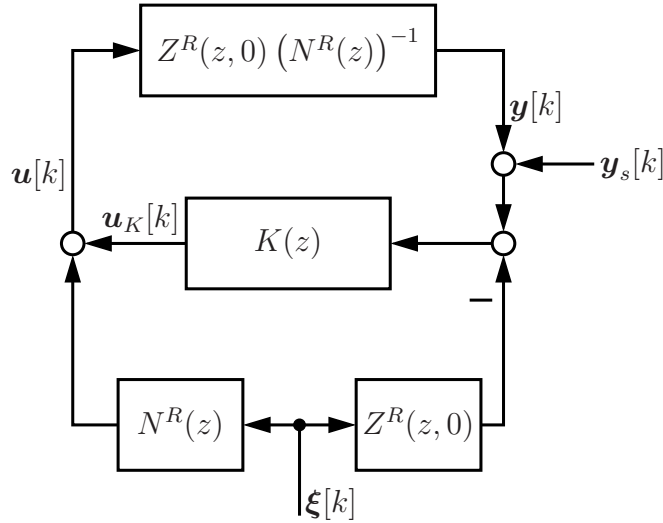


Bild 5.9: Schema des zeitdiskreten Teils der digitalen Steuer- und Regeleinrichtung

dar. Die Übertragungsfunktion $K(z)$ des Reglers besitze eine rechte teilerfremde Matrizenbruchdarstellung $Z_K(z)(N_K(z))^{-1} = K(z)$ und damit auch eine Darstellung mit Hilfsgröße $\Xi_K(z)$

$$\mathbf{Y}(z) + \mathbf{Y}_s(z) - Z(z, 0) \Xi_b(z) = N_K(z) \Xi_K(z) \quad \text{und} \quad \mathbf{U}_K(z) = Z_K(z) \Xi_K(z).$$

Dann lauten die z-transformierten² Gleichungen des gestörten zeitdiskreten Regelkreises in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -N^R & 0 \\ 0 & I & -Z^R & 0 \\ I & 0 & 0 & -Z_K \\ 0 & I & 0 & -N_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \\ \Xi_H \\ \Xi_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N^R & 0 \\ Z^R & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi_b \\ \mathbf{Y}_s \end{pmatrix}$$

und durch Zeilenkombination

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -N^R & 0 \\ 0 & I & -Z^R & 0 \\ 0 & 0 & N^R & -Z_K \\ 0 & 0 & Z^R & -N_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \\ \Xi_H \\ \Xi_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N^R & 0 \\ Z^R & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi_b \\ \mathbf{Y}_s \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Wegen der Teilerfremdheit bildet

$$\det \begin{pmatrix} N^R(z) & -Z_K(z) \\ Z^R(z, 0) & -N_K(z) \end{pmatrix} =: \text{CLCP}(z)$$

den gemeinsamen Hauptnenner sämtlicher Übertragungsfunktionen von äußeren zu inneren Größen und damit eine direkte Entsprechung zum CLCP aus Satz 4.1. Das Problem

²Anfangswerte sollen nicht beachtet werden.

der Nullstellenzuweisung kann mit den Methoden aus dem Abschnitt 4.4 behandelt werden. Löst man Gl. (5.23) nach \mathbf{U} und \mathbf{Y} auf, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^R(z) & (I - G_o(z))^{-1} K(z) \\ Z^R(z, 0) & P(z) (I - \widetilde{G}_o(z))^{-1} K(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Xi}_b(z) \\ \mathbf{Y}_s(z) \end{pmatrix}$$

mit $P(z) = Z^R(z, 0) (N^R(z))^{-1}$ und den Übertragungsmatrizen des offenen Kreises

$$G_o = Z^R (N^R)^{-1} Z_K N_K^{-1} \quad \text{und} \quad \widetilde{G}_o = Z_K N_K^{-1} Z^R (N^R)^{-1} .$$

Genau wie in Abschnitt 4.1 gilt auch hier: Wenn keine Störungen $\mathbf{y}_s[k]$ auftreten, bleibt der Regler inaktiv, und es stellen sich die geplanten Werte ein. Die Übertragungsfunktionen der Störung können durch die Auslegung eines Reglers gestaltet werden. Auf eine bestimmte Matrizenbruchdarstellung ist man dabei nicht angewiesen. Es lassen sich sämtliche bekannten Methoden zur Auslegung zeitdiskreter Regler nutzen.

6 Beobachter auf Basis polynomialer Matrizendarstellung

Die Möglichkeiten, die verschiedenen Größen einer Regelstrecke zu messen, sind stets begrenzt, einerseits aus physikalisch-technischen Gründen und andererseits aus Kostengründen. Üblicherweise werden die meisten bei der Modellierung verwendeten Größen nicht verfügbar sein, sondern nur einige Größen \mathbf{y} , die „Ausgänge“ heißen.

Für eine Regelung stellt das grundsätzlich kein Problem dar. Durch einen dynamischen Regler lassen sich prinzipiell sämtliche Pole des geschlossenen Kreises platzieren. Einschränkungen wurden in Abschnitt 4.2.1 diskutiert. Wie in Kapitel 4 deutlich wurde, genügt eine (dynamische) Ausgangsrückführung. Auch lassen sich diverse weitere Forderungen an den geschlossenen Kreis verwirklichen. So gesehen, könnte man mit der Unkenntnis der nicht gemessenen Größen gut leben. Trotzdem kann es Situationen geben, in denen die Rekonstruktion nicht gemessener Größen in Echtzeit gewünscht wird (z. B. zu Diagnose- oder Überwachungszwecken). Hier bietet sich das Konzept der Beobachter an, das auf Basis einer polynomialen Matrizenbeschreibung neu untersucht werden soll.

6.1 Allgemeines Konzept

Da das Beobachterproblem isoliert untersucht werden soll, ist es zunächst unerheblich, welche Größen z Stellgrößen sind und welche Größen sich daraus ergeben. Ebenso wie bei der isolierten Untersuchung des Steuerungsentwurfs in Kapitel 3 nur zwischen Stell- und sonstigen Größen, wird hier nur zwischen bekannten – bzw. gemessenen – Größen $\mathbf{z}_k(t) \in \mathbb{R}^k$ und zu beobachtenden Größen $\mathbf{z}_b(t) \in \mathbb{R}^b$ unterschieden. (Der Index k steht für „kennen“, der Index b für „beobachten“.) Bei der Streckenbeschreibung (2.1) in Abschnitt 2.1 wäre

$$\mathbf{z}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+p} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_b(t) = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^r .$$

Es gebe insgesamt $n \leq k + b$ Differentialgleichungen, die die Regelstrecke modellieren. Diese Gleichungen werden homogen geschrieben und mithilfe einer Systemmatrix S_P mit n Zeilen und $(k + b)$ Spalten zusammengefasst:

$$S_P \left(\frac{d}{dt} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_b \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad S_P \in \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n \times (k+b)} . \quad (6.1)$$

Bei der Systembeschreibung (2.1) wäre demnach

$$S_P \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} A_P \left(\frac{d}{dt} \right) & B_P \left(\frac{d}{dt} \right) & 0 \\ C_P \left(\frac{d}{dt} \right) & D_P \left(\frac{d}{dt} \right) & -I_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(r+p) \times (r+m+p)} .$$

Unter der Bedingung $n > b$ und $k > 0$ kann man $S_P\left(\frac{d}{dt}\right)$ in folgender Weise partitionieren:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_b \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad S_{11} \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{b \times b}. \quad (6.2)$$

6.1.1 Beobachtbarkeit

Bei der Betrachtung der grundsätzlichen Beobachtbarkeit soll zunächst davon ausgegangen werden, dass die bekannten Größen kontinuierlich und störungsfrei gemessen werden bzw. bekannt sind. Dann sind auch sämtliche Ableitungen störungsfrei bekannt. Unter Beobachtbarkeit soll somit Folgendes verstanden werden:

Definition 6.1 *Wenn man aus den bekannten Größen \mathbf{z}_k und ausreichend vielen Ableitungen sämtliche übrigen Größen berechnen kann, so heißt das System „beobachtbar“.*

Diese Eigenschaft soll mathematisch auf Basis der polynomialen Matrizendarstellung (6.2) in Anlehnung an [Rei07] beschrieben werden. Das Paar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ kann in Analogie zu Abschnitt 2.2.1 durch elementare Zeilenoperationen in die Hermitesche Normalform überführt werden ([Rei06], Abschnitt 6.2.4):

$$U^L \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Systemverhalten und die Bedeutung der Größen bleiben dabei unverändert:

$$U^L \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_b \\ \mathbf{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{z}_b + U^L \begin{pmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{pmatrix} \mathbf{z}_k = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad R \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{b \times b}. \quad (6.3)$$

Bei der Matrix R handelt es sich um den gemeinsamen Rechtsteiler von S_{11} und S_{21} . Wenn das Paar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ rechtsteilerfremd ist, so ist R unimodular und kann o. B. d. A. auf eine Einheitsmatrix gebracht werden. Mit geeigneter Partitionierung von U^L

$$U^L = \begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L \\ U_{21}^L & U_{22}^L \end{pmatrix}, \quad U_{11}^L \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{b \times b}$$

kann man Gleichung (6.3) im Falle der Rechtsteilerfreiheit umstellen zu

$$\mathbf{z}_b = - (U_{11}^L S_{12} + U_{12}^L S_{22}) \mathbf{z}_k \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{0} = (U_{21}^L S_{12} + U_{22}^L S_{22}) \mathbf{z}_k. \quad (6.4b)$$

Die erste Gleichung (6.4a) liefert genau die Vorschrift, nach der aus den bekannten Größen \mathbf{z}_k und deren Ableitungen die gesuchten Größen berechnet werden können. Solch eine Vorschrift existiert aber nur dann, wenn das Paar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ rechtsteilerfremd ist. Andernfalls lautete die Gleichung (6.4a)

$$R \mathbf{z}_b = - (U_{11}^L S_{12} + U_{12}^L S_{22}) \mathbf{z}_k,$$

wobei es sich um eine lineare Differentialgleichung mit den Unbekannten \mathbf{z}_b handelt. Zu deren Lösung würden die Anfangswerte $\mathbf{z}_b(-0)$ gebraucht, die jedoch vereinbarungsgemäß unbekannt sind. Diese Gleichung wäre daher nicht lösbar. Die zweite Gleichung (6.4b) gibt Zwangsbedingungen an, denen die bekannten Größen \mathbf{z}_k gehorchen müssen, und soll hier nicht weiter untersucht werden. Damit liegen alle Bedingungen vor, unter denen ein System beobachtbar ist.

Satz 6.1 (Beobachtbarkeit) Ein System (6.1) ist beobachtbar, wenn

1. $k > 0$. (Es gibt bekannte Größen.)
2. $n \geq b$. (Es gibt mindestens so viele Gleichungen wie zu beobachtende Größen.)
3. $\text{Rang} \begin{pmatrix} S_{11}(s) \\ S_{21}(s) \end{pmatrix} = b \quad \forall s \in \mathbb{C}$. (S_{11} und S_{21} sind rechtsteilerfremd.)

Für die Konstruktion eines Beobachters muss Bedingung 2 verschärft werden zu $n > b$, wie folgender Abschnitt zeigt.

6.1.2 Konstruktion eines Beobachters

In aller Regel liegen die bekannten Größen nicht fehlerfrei vor. Insbesondere die Messwerte sind verrauscht. Dieses Messrauschen wird durch Ableitung nach der Zeit noch verstärkt, so dass Ableitungen oft nur mit erheblicher Ungenauigkeit bestimmt werden können. Das Ziel lautet also, eine Vorrichtung zu entwerfen, die die unbekanntenen Größen \mathbf{z}_b ohne Zuhilfenahme von differenzierten bekannten Größen „schätzt“ bzw. beobachtet. So eine Vorrichtung wird „Beobachter“ genannt.

Man betrachtet die aufgeteilte Systemgleichung (6.2)

$$S_{11}\mathbf{z}_b + S_{12}\mathbf{z}_k = \mathbf{0} \tag{6.5a}$$

$$S_{21}\mathbf{z}_b + S_{22}\mathbf{z}_k = \mathbf{0} \tag{6.5b}$$

und wendet sich der ersten Gleichung (6.5a) zu. Es wird parallel zu der Regelstrecke ein zweites System aufgebaut, das die bekannten Größen \mathbf{z} als Eingang erhält. In diesem System wird ein Teil des Verhaltens der Strecke dupliziert

$$S_{11}\hat{\mathbf{z}}_b + S_{12}\mathbf{z}_k = \mathbf{0}, \tag{6.6}$$

um das Verhalten der Strecke gewissermaßen zu simulieren. Da die Matrix S_{11} quadratisch ist (siehe Gl. 6.2) kann man durch Integration einen Schätzwert der zu beobachtenden Größen \mathbf{z}_b bestimmen, sofern $\det S_{11}$ nicht das Nullpolynom ist¹. Mit der Laplace-Transformation erhält man beispielsweise

$$\hat{\mathbf{Z}}_b = (S_{11}(s))^{-1} (-S_{12}(s)\mathbf{Z}_k + \boldsymbol{\zeta}(s, \hat{\mathbf{z}}_{b(-0)}, \mathbf{z}_{k(-0)})).$$

Die Anfangswerte $\boldsymbol{\zeta}(s, \mathbf{z}_{b(-0)}, \mathbf{z}_{k(-0)})$ werden wie in Gleichung (2.4) berechnet. Damit lassen sich bei bekannten Anfangswerten die unbekanntenen Größen wie in Bild 6.1 dargestellt simulieren. Falls die Anfangswerte $\hat{\mathbf{z}}_{b(-0)}$ mit den tatsächlichen $\mathbf{z}_{b(-0)}$ übereinstimmen, ist $\hat{\mathbf{z}}_b = \mathbf{z}_b$. Da die Anfangswerte $\mathbf{z}_{b(-0)}$ jedoch nicht bekannt sind, liefert der Simulator im Allgemeinen ein Ergebnis $\hat{\mathbf{z}}_b$, das nicht mit \mathbf{z}_b übereinstimmt. Um den Fehler zu korrigieren, wird die zweite Gleichung (6.5b) herangezogen. Mit

$$\mathbf{z}_e = S_{21}\hat{\mathbf{z}}_b + S_{22}\mathbf{z}_k \tag{6.7}$$

¹Diese Forderung kann man später wieder fallen lassen.

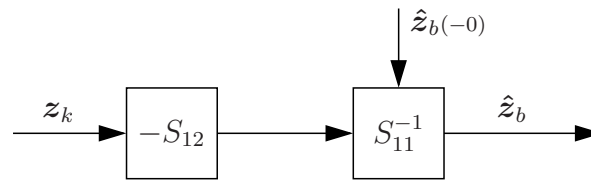


Bild 6.1: Schema des Simulators

hat der Simulator ein Maß für den Fehler, das Null für $\hat{z}_b = z_b$ ist. Diese Größe z_e wird über eine dynamische Rückführung, die der Gleichung

$$L_1 z_e + L_2 z_a = 0 \quad \text{mit} \quad L_1 \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{b \times (n-b)}, \quad L_2 \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{b \times b} \quad (6.8)$$

genügt, der Simulatorgleichung (6.6) aufgeschaltet, um den Fehler zu korrigieren. Die korrigierte Gleichung lautet somit

$$S_{11} \hat{z}_b = -S_{12} z_k + z_a \quad (6.9)$$

mit dem Ausgang z_a der Fehlerrückführung. Damit ist der Beobachter, wie in Bild 6.2 dargestellt, vollständig. Die Matrizen L_1 und L_2 der dynamischen Rückführung können

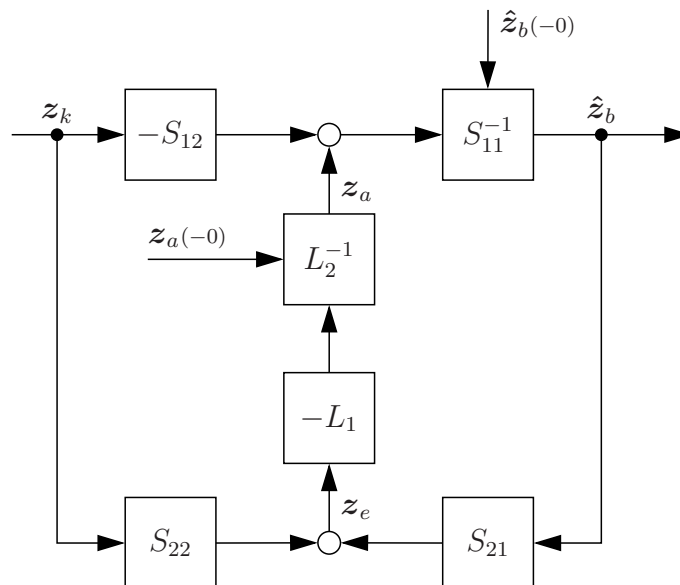


Bild 6.2: allgemeines Beobachterschema

dabei frei gewählt werden, um ein gewünschtes Verhalten des Fehlers zu erzielen. Allerdings muss L_2 invertierbar sein.

6.1.3 Differentialgleichung des Beobachterfehlers

Offensichtlich hat der Beobachter nur dann einen Sinn, wenn der Beobachterfehler $\hat{z}_b - z_b$ mit der Zeit abklingt und zu null wird. Der Beobachterfehler soll einer stabilen autonomen

Differentialgleichung genügen. Daher wird nun die Differentialgleichung des Beobachterfehlers hergeleitet. Multipliziert man Gl. (6.9) mit L_2 , so erhält man

$$L_2 S_{11} \hat{\mathbf{z}}_b + L_2 S_{12} \mathbf{z}_k - L_2 \mathbf{z}_a = 0.$$

Setzt man dort Gleichung (6.8) ein, so ergibt sich

$$L_2 S_{11} \hat{\mathbf{z}}_b + L_2 S_{12} \mathbf{z}_k + L_1 \mathbf{z}_e = 0;$$

und wenn man \mathbf{z}_e aus Gleichung (6.7) einsetzt

$$(L_2 S_{11} + L_1 S_{21}) \hat{\mathbf{z}}_b + (L_2 S_{12} + L_1 S_{22}) \mathbf{z}_k = \mathbf{0}. \quad (6.10)$$

Dies ist die eigentliche Beobachtergleichung, die zeigt, wie man aus den bekannten Größen die zu beobachtenden Größen errechnet. Man beachte, dass die im Beobachter zu invertierende Matrix $(L_2 S_{11} + L_1 S_{21})$ lautet. Diese Matrix muss daher invertierbar sein, nicht die Matrix S_{11} , wie Bild 6.1 suggeriert. Auch bei Satz 6.1 wurde Invertierbarkeit von S_{11} nicht vorausgesetzt.

Um eine Gleichung im Beobachterfehler $\hat{\mathbf{z}}_b - \mathbf{z}_b$ zu erhalten, zieht man von dieser Gleichung die Gleichungen (6.5) der Strecke ab, und zwar

$$\begin{aligned} & (L_2 S_{11} + L_1 S_{21}) \hat{\mathbf{z}}_b + (L_2 S_{12} + L_1 S_{22}) \mathbf{z}_k - L_2 \cdot \text{Gl. (6.5a)} - L_1 \cdot \text{Gl. (6.5b)} \\ &= (L_2 S_{11} + L_1 S_{21}) \hat{\mathbf{z}}_b + (L_2 S_{12} + L_1 S_{22}) \mathbf{z}_k - L_2 (S_{11} \mathbf{z}_b + S_{12} \mathbf{z}_k) - L_1 (S_{21} \mathbf{z}_b + S_{22} \mathbf{z}_k) \\ &= (L_2 S_{11} + L_1 S_{21}) (\hat{\mathbf{z}}_b - \mathbf{z}_b) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Der Beobachterfehler gehorcht also einer autonomen Differentialgleichung, wird damit nur von abweichenden Anfangswerten $\hat{\mathbf{z}}_{b(-0)} - \mathbf{z}_{b(-0)}$ gestört. Damit der Beobachterfehler abklingt, muss das charakteristische Polynom des Beobachters

$$\text{CP}_B(s) = \det \left(L_2(s) \cdot S_{11}(s) + L_1(s) \cdot S_{21}(s) \right) \quad (6.11)$$

stabil sein. An dieser Stelle zeigt sich erneut die Bedingung 3 aus Satz 6.1. Denn wenn das Paar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ nicht teilerfremd ist, kann man $R(s)$ nach rechts ausklammern und erhält (siehe [Rei06], Abschnitt 6.2.4)

$$\text{CP}_B(s) = \det \left(L_2(s) \cdot V_{11}^L(s) + L_1(s) \cdot V_{21}^L(s) \right) \cdot \det R(s).$$

Das charakteristische Beobachterpolynom hat dann fixe Nullstellen (vgl. 4.2.1).

Abschließend soll gezeigt werden, wie man das Problem der Nullstellenzuweisung von Gl. (6.11) mit den in den Abschnitten 4.3 und 4.4 diskutierten Methoden bearbeiten kann.

Satz 6.2 *Das rechtsteilerfremde Matrizenpaar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ werde durch eine unimodulare Matrix U^L in die Hermitesche Normalform überführt:*

$$\begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L \\ U_{21}^L & U_{22}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Dann gilt

$$\text{CP}_B(s) = \det (L_2 \cdot S_{11} + L_1 \cdot S_{21}) = k \cdot \det \begin{pmatrix} U_{22}^L & U_{21}^L \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$.

Beweis: Man kann Gleichung (6.12) auch in zwei Zeilen schreiben:

$$\begin{aligned} U_{11}^L S_{11} + U_{12}^L S_{21} &= I \\ U_{21}^L S_{11} + U_{22}^L S_{21} &= 0 \quad \Rightarrow \quad (U_{22}^L)^{-1} U_{21}^L = -S_{21} S_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

Als Nächstes muss man festhalten, dass $\det S_{11}$ und $\det U_{22}^L$ bis auf eine Konstante gleich sind, denn mit der Determinantenformel von Schur gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} U_{11}^L & U_{12}^L \\ U_{21}^L & U_{22}^L \end{pmatrix} &= \det U_{22}^L \cdot \det \left(U_{11}^L - U_{12}^L (U_{22}^L)^{-1} U_{21}^L \right) = \det U_{22}^L \cdot \det (U_{11}^L + U_{12}^L S_{21} S_{11}^{-1}) \\ &= \det U_{22}^L \cdot \det \underbrace{(U_{11}^L S_{11} + U_{12}^L S_{21})}_{=I} \det (S_{11}^{-1}) = \det U_{22}^L \cdot \frac{1}{\det S_{11}} = \text{const} = \det U^L. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorüberlegungen kann man die Gleichheit (6.13) zeigen

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} U_{22}^L & U_{21}^L \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix} &= \det U_{22}^L \cdot \det \left(L_1 - L_2 (U_{22}^L)^{-1} U_{21}^L \right) \\ &= \det U_{22}^L \cdot \det (L_1 + L_2 S_{21} S_{11}^{-1}) = \det U_{22}^L \cdot \det (L_1 S_{11} + L_2 S_{21}) \frac{1}{\det S_{11}} \\ &= \det U^L \cdot \det (L_1 S_{11} + L_2 S_{21}). \end{aligned}$$

Damit ist auch klar, welchen Wert die Konstante k hat, es ist $k = \frac{1}{\det U^L}$. **q. e. d.**

Folglich hat das Problem der Nullstellenzuweisung die gleiche Form wie in Gleichung (4.5) und kann mit den gleichen Methoden bearbeitet werden. Es können selbstverständlich auch alle anderen Methoden eingesetzt werden, die eine gedachte Regelstrecke $G(s) = (U_{22}^L)^{-1} U_{21}^L = -S_{21} S_{11}^{-1}$ stabilisieren. Eine Demonstration findet sich in Beispiel 6.3.

6.1.4 Über die Unvermeidbarkeit improperer Beobachter

Wenn man das Bild 6.2 betrachtet, könnte man Bedenken haben, weil die gemessenen Signale z_k anscheinend mehrfach durch $S_{12}(\frac{d}{dt})$, $S_{22}(\frac{d}{dt})$ und $L_1(\frac{d}{dt})$ differenziert werden. Das ist jedoch nicht der Fall, da die internen Signale z_e und z_a theoretische Hilfsgrößen sind und bei einem tatsächlichen Aufbau nicht realisiert werden müssen. Entscheidend ist vielmehr, ob bei der Übertragung von z_k zu \hat{z}_b differenziert werden muss. Das tritt nur dann auf, wenn die Übertragungsmatrix $G_B(s)$ des Beobachters, die sich aus Gleichung (6.10) zu

$$\begin{aligned} G_B(s) &= - \left(L_2(s) \cdot S_{11}(s) + L_1(s) \cdot S_{21}(s) \right)^{-1} \left(L_2(s) \cdot S_{12}(s) + L_1(s) \cdot S_{22}(s) \right) \\ &=: -N_B^{-1} Z_B \end{aligned}$$

ergibt, improper ist. Das ist nach Satz A.2 genau dann gegeben, wenn N_B zeilenreduziert² ist und der Grad der Zeilen von Z_B den der entsprechenden Zeilen von N_B übersteigt. Dies ist durch geeignete Wahl von L_1 und L_2 zu vermeiden. Insbesondere ist darauf zu achten, dass der Grad des charakteristischen Beobachterpolynoms gleich der Summe der Zeilengrade von N_B ist, damit N_B zeilenreduziert ist.

Es kann jedoch vorkommen, dass es unmöglich ist, einen properen Beobachter zu erzielen.

Satz 6.3 *Ein properer Beobachter kann genau dann entworfen werden, wenn in der Matrix S_P sich b Zeilen – ggf. auch durch elementare Zeilenoperationen – finden und zu einer $b \times (b+k)$ -Matrix mit der Unterteilung $(S_{b \times b} \ S_{b \times k})$ zusammenstellen lassen, für die Folgendes gilt:*

1. $S_{b \times b}$ ist eine zeilenreduzierte (quadratische) Matrix.
2. Die Grade der Zeilen von $S_{b \times k}$ übersteigen nicht die Grade der entsprechenden Zeilen in $S_{b \times b}$.

Beweis: Nenner- und Zählermatrix des Beobachters werden in folgender Form dargestellt:

$$(N_B \mid Z_B) = (L_2 \ L_1) \left(\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array} \right). \quad (6.14)$$

In dieser Darstellung wird deutlich, dass die Elemente von $(L_2 \ L_1)$ immer die selben Zeilen in N_B und in Z_B beeinflussen. Daher sind die Grade in den Zeilen von S_P für den Erhalt eines properen Beobachters entscheidend, denn ein Eintrag in $(L_2 \ L_1)$ wird immer die Grade sämtlicher Zeilenelemente erhöhen und damit an den Graddifferenzen nichts ändern. Die Forderung nach einem zeilenreduzierten N_B ist keine Einschränkung, denn die eventuell benötigte erzeugende Matrix U_B^L lässt sich nach dem Beobachterentwurf auch dem Paar (L_2, L_1) zuschlagen:

$$(L_2 \ L_1) = (\tilde{L}_2 \ \tilde{L}_1) U_B^L.$$

Finden sich also in S_P keine b Zeilen, die den Bedingungen für ein properes Übertragungsverhalten genügen, so ist durch die Wahl von $(L_2 \ L_1)$ an der Properheit von $G_B(s)$ nichts zu ändern.

Umgekehrt kann man, wenn es eine solche Auswahl $(S_{b \times b} \ S_{b \times k})$ an Zeilen gibt, immer durch ausreichend große s -Potenzen in $(L_2 \ L_1)$ sicherstellen, dass diese Auswahl die höchsten Grade in $(N_B \ Z_B)$ stellt, so dass die Übertragungsfunktion des Beobachters $G_B(s)$ proper ist. **q. e. d.**

Praktisch wird man wohl meist so vorgehen, dass man zunächst $(S_{11} \ S_{12})$ untersucht. Dort wird man, insbesondere bei $S_{11} = A_P$ und $S_{12} = (B_P \ 0)$, die Bedingungen aus Satz 6.3 erfüllt finden. Sollte das nicht der Fall sein, wird man versuchen, durch Hinzunahme von Zeilen von $(S_{21} \ S_{22})$ das Ziel zu erreichen. Dabei sind allerdings insgesamt höchstens $\binom{n}{b}$ Möglichkeiten durchzuspielen.

²siehe Anhang A.1 oder [Wol74]

6.1.5 Beziehung zu Berechnung durch Differenziation

In Gleichung (6.4a) wurde bereits eine Vorschrift zur Berechnung der unbekanntenen Größen angegeben. Wie ist deren Beziehung zum Beobachter? Im Allgemeinen wird man die Matrizen L_1 und L_2 so wählen, dass die Übertragungsfunktion des Beobachters proper ist (siehe Satz A.2). Man kann aber auch den Grad von $\det(L_2 S_{11} + L_1 S_{21})$ kleiner wählen, um die Konvergenz zu beschleunigen – um den Preis, dass der Beobachter abgeleitete Signale verwenden muss. Im Extremfall könnte man die Matrizen aus Gleichung (6.3) verwenden und $L_2 = U_{11}^L$ sowie $L_1 = U_{12}^L$ wählen. Dies hätte zur Folge, dass der Beobachterfehler zu

$$(U_{11}^L S_{11} + U_{12}^L S_{21})(\hat{\mathbf{z}}_b - \mathbf{z}_b) = I(\hat{\mathbf{z}}_b - \mathbf{z}_b) = \mathbf{0}$$

wird. Mit anderen Worten: Dieser Beobachter arbeitet fehlerfrei, denn der Beobachterfehler $(\hat{\mathbf{z}}_b - \mathbf{z}_b)$ ist identisch Null. Die Beobachtergleichung (6.10) lautet damit

$$\hat{\mathbf{z}}_b + (U_{11}^L S_{12} + U_{12}^L S_{22})\mathbf{z}_k = \mathbf{0},$$

worin man die Berechnungsvorschrift (6.4a) wiedererkennt. So gesehen, handelt es sich bei dieser Berechnungsvorschrift durch Differentiation der bekannten Größen um den „perfekten“ Beobachter. Dies bestätigt noch einmal die, beispielsweise aus [Lue71] bekannte und in [SZ81] nachgewiesene, Tatsache, dass ein unendlich schnell konvergierender Beobachter wie ein Differenzierglied höherer Ordnung wirkt, wobei [SZ81] sich auf SISO-Systeme in Zustandsdarstellung (2.2) beschränken.

6.2 Vollständiger Beobachter

Im folgenden Abschnitt soll das obige, recht allgemeine Beobachterkonzept auf das Standardstreckenmodell (2.1) in dieser Arbeit angewendet werden. In der Schreibweise von Gleichung (6.1) sieht das wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{c|cc} A_P & B_P & 0 \\ \hline C_P & D_P & -I \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \quad (6.15)$$

wobei die Striche die Partitionierung nach Gl. (6.2) zeigen. Nennt man $L_1 = H_P$ und setzt $L_2 = I$, was bei diesem Typ Beobachter anscheinend häufig ausreicht, so erhält man den in [Rei06] 6.3.2 entworfenen polynomialen Beobachter (Bild 6.3). Die Bedingungen 1 und 2 für die Beobachtbarkeit aus Satz 6.1 sind hier automatisch erfüllt, denn

$$(r + p) > r \quad \Rightarrow \quad n > b.$$

Als Bedingung 3 der Teilerfremdheit erscheint nun das Kriterium

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A_P(s) \\ C_P(s) \end{pmatrix} = r \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

welches für ein System in Zustandsdarstellung (2.2) dem Hautuskriterium

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = r \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

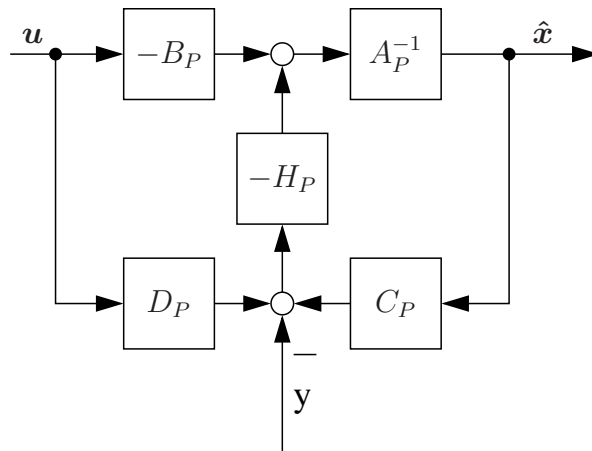


Bild 6.3: Beobachter für innere Größen x

entspricht. Setzt man nun in dieses Schema ein System in Zustandsdarstellung ein

$$\left(\begin{array}{c|cc} \left(\frac{d}{dt} \right) I - A & -B & 0 \\ \hline C & D & -I \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

so erscheint der wohlbekannte vollständige Luenberger-Beobachter. In einem Beispiel soll das Konzept jedoch auf eine nicht propere Strecke angewendet werden, die keine klassische Zustandsdarstellung (2.2) hat.

Beispiel 6.1 Es wird die RC-Schaltung mit Operationsverstärkern aus [Rei06], Abschnitt 2.4.2, für $k = 2$ Kondensatoren betrachtet (siehe Bild 6.4). Die Stellgröße sei U^e , gemessen

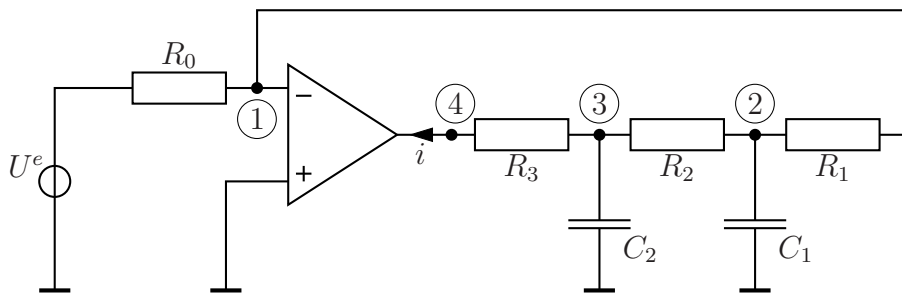


Bild 6.4: RC-Schaltung mit Operationsverstärker

wird die Spannung $U_{\phi 4}$ am vierten Knoten. Die übrigen Knotenspannungen, sowie der Strom i sollen beobachtet werden. Die Gleichungen dazu lauten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 + G_2 + C_1 \frac{d}{dt} & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 + C_2 \frac{d}{dt} & -G_3 \\ 1 & 0 & -G_3 & G_3 \end{pmatrix}}_{A_P} \begin{pmatrix} i \\ U_{\phi 2} \\ U_{\phi 3} \\ U_{\phi 4} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} G_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_P} U^e.$$

Hier bezeichne G die Leitwerte der Widerstände. Die normierten Parameterwerte seien:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & C_1 & C_2 \\ \hline \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{40} & 3 & 4 \end{array} .$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktionsmatrix der Strecke zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i \\ U_{\phi 2} \\ U_{\phi 3} \\ U_{\phi 4} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & -G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 + G_2 + sC_1 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 + sC_2 & -G_3 \\ 1 & 0 & -G_3 & G_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U^e \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} - 26s - 720s^2 \\ 2 \\ 5 + 180s \\ 9 + 1220s + 28800s^2 \end{pmatrix} U^e . \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Strecke nicht proper ist, mithin keine klassische Zustandsdarstellung besitzt. Die Partionierung gemäß (6.3) sieht hier wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -G_1 & 0 & 0 & G_0 \\ 0 & G_1 + G_2 + sC_1 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 + sC_2 & -G_3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -G_3 & G_3 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} i \\ U_{\phi 2} \\ U_{\phi 3} \\ U_{\phi 4} \\ U^e \end{pmatrix} = 0 .$$

Man beachte, dass S_{11} hier nicht invertierbar ist. Bei der Wahl der Matrizen L_1 und L_2 sollte man darauf achten, dass man einerseits genügend freie linear unabhängige Parameter hat, um alle Pole zu platzieren, und andererseits die Übertragungsfunktion (6.10) des Beobachters proper ist. Dies leistet die Wahl $L_2 = I_3$ und $L_1 = (l_1 \ l_2 \ l_3)^T$. Damit lautet das charakteristische Beobachterpolynom (6.11)

$$\begin{aligned} \text{CP}_B(s) &= \det(S_{11} + L_1 S_{21}) = \det \begin{pmatrix} S_{11} & -L_1 \\ S_{21} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -G_1 & 0 & -l_1 \\ 0 & G_1 + G_2 + sC_1 & -G_2 & -l_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 + sC_2 & -l_3 \\ 1 & 0 & -G_3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= s^2 C_2 C_1 l_1 + [((G_2 + G_3)C_1 + (G_1 + G_2)C_2)l_1 + l_2 C_2 G_1]s \\ &\quad + (G_3 G_1 + G_2 G_1 + G_2 G_3)l_1 + (G_2 G_1 + G_3 G_1)l_2 + l_3 G_2 G_1 \stackrel{!}{=} p_2 s^2 + p_1 s + p_0 \end{aligned}$$

Die Pole sollen bei -2 liegen. Daraus folgt $p_1 = 4p_2$ und $p_0 = 4p_2$. Der freibleibende Parameter p_2 wird zu $p_2 = 1$ gewählt. Damit ergibt der Koeffizientenvergleich mit den oben genannten Parameterwerten

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ 19.79 \\ 2365 \end{pmatrix} .$$

Die aus Gleichung (6.10) abgeleitete Beobachterübertragungsfunktion lautet

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{U}_{\phi 2} \\ \hat{U}_{\phi 3} \end{pmatrix} = -(S_{11} + L_1 S_{21})^{-1} (S_{12} + L_1 S_{22}) \begin{pmatrix} U_{\phi 4} \\ U^e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{s^2+3.994s+64.425}{40(s^2+4s+4)} & \frac{-s^2+14.74s+0.4117}{\frac{5}{6}(s^2+4s+4)} \\ \frac{1}{14400(s^2+4s+4)} & \frac{7.915s+7.999}{s^2+4s+4} \\ \frac{s+3.985}{160(s^2+4s+4)} & \frac{709.6s+19.78}{s^2+4s+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\phi 4} \\ U^e \end{pmatrix}.$$

Eine Simulation zeigt, dass der Beobachter die gewünschten Signale rekonstruiert, obwohl er „falsch“ initialisiert wird. In Bild 6.5 sieht man den zeitlichen Verlauf der Stellgröße $U^e(t)$ und den der gemessenen Größe $U_{\phi 4}$. Das Verhalten des Beobachters ist in Bild 6.6 dargestellt. ■

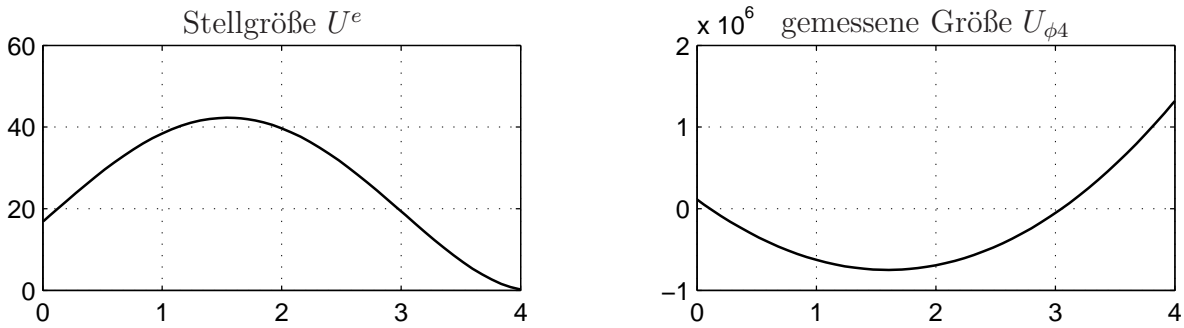


Bild 6.5: zu Beispiel 6.1: Verlauf der bekannten Größen

6.3 Reduzierter Beobachter

Seit Langem ist von Zustandsbeobachtern bekannt, dass man die Anzahl der zu beobachtenden Größen und die dynamische Ordnung reduzieren kann, indem man die Messgrößen \mathbf{y} in die inneren Größen \mathbf{x} integriert. Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu beobachtenden Größen und die dynamische Ordnung um die Anzahl der Messgrößen. Da bei Zustandsdarstellungen die dynamische Ordnung gleich der Dimension des Zustandes ist, wird immer beides reduziert, die Anzahl der zu beobachtenden Größen und die dynamische Ordnung. Bei Systemen in polynomialer Matrizendarstellung sind jedoch Anzahl der inneren Größen und dynamische Ordnung völlig unabhängig. Wenn man also von reduzierten Beobachtern spricht, muss man sagen, was man reduzieren möchte.

Im Folgenden soll die Anzahl der zu beobachtenden Größen reduziert werden. Falls das Paar (C_P, D_P) linksteilerfremd ist, also $(C_P(s), D_P(s))$ aus Gl. (2.1b) für alle $s \in \mathbb{C}$ zeilenregulär ist, kann man die Matrix auf die Hermitesche Normalform bringen

$$(C_P, D_P) \begin{pmatrix} U_{11}^R & U_{12}^R \\ U_{21}^R & U_{22}^R \end{pmatrix} = (0 \quad I). \tag{6.16}$$

Siehe dazu auch Abschnitt 2.2.1! Mithilfe der unimodularen Matrix $U^L = (U^R)^{-1}$ kann man neue Größen z_b und z_k

$$\begin{pmatrix} z_b \\ z_k \end{pmatrix} = V^R \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = U^R \cdot \begin{pmatrix} z_b \\ z_k \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

definieren, denn damit werden die gemessenen Größen \mathbf{y} Bestandteil der inneren Größen \mathbf{x} . Aus der Ausgangsgleichung (2.1b) wird nämlich

$$(C_P \quad D_P) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

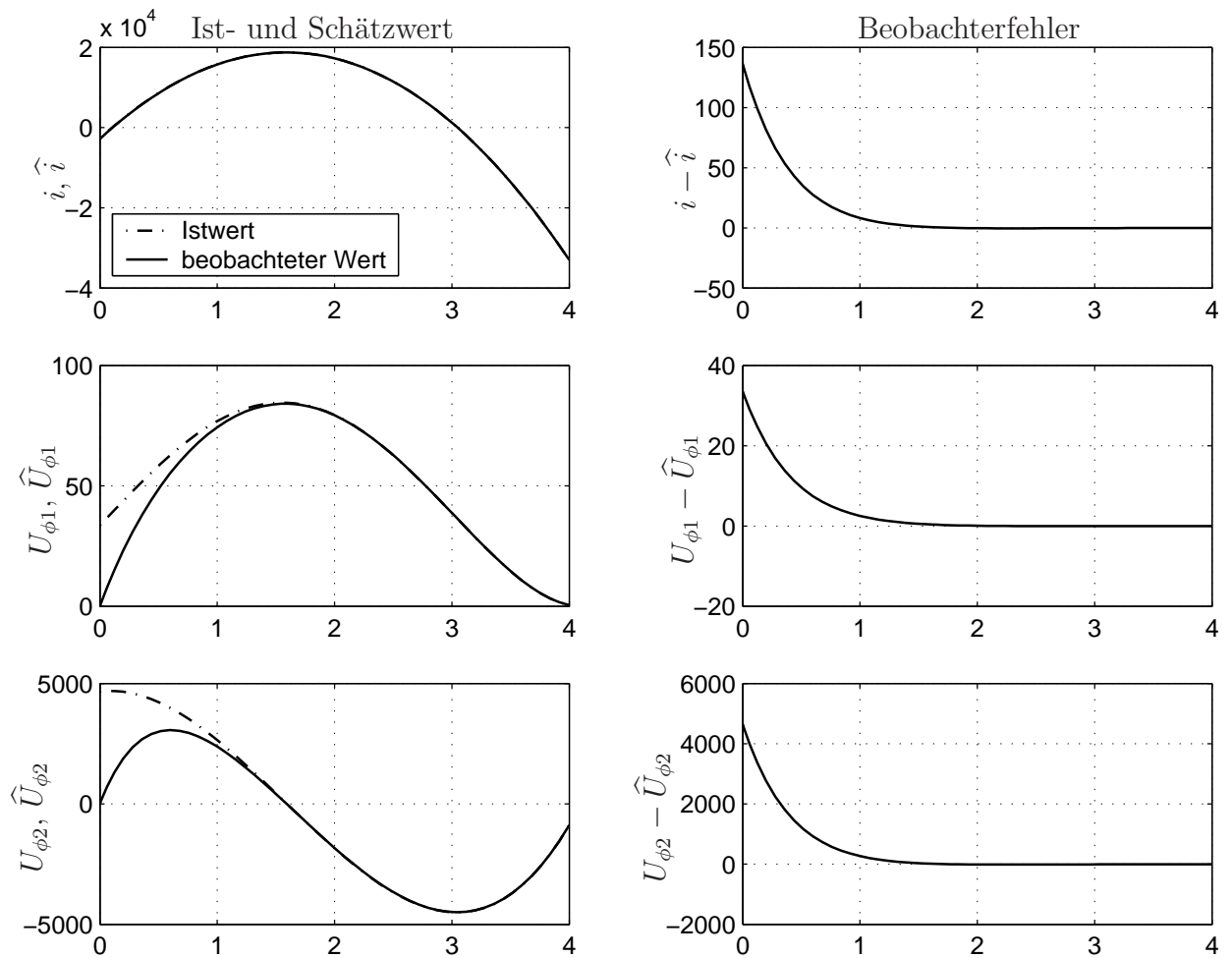


Bild 6.6: zu Beispiel 6.1: Verhalten des Beobachters

$$(C_P \quad D_P) U^R \begin{pmatrix} z_b \\ z_k \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

$$(0 \quad I) \begin{pmatrix} z_b \\ z_k \end{pmatrix} = z_k = \mathbf{y}.$$

Damit erscheint die Gleichung (6.15) in folgender Form

$$\left(\begin{array}{cc|c} A_P U_{11}^R + B_P U_{21}^R & A_P U_{12}^R + B_P U_{22}^R & 0 \\ \hline 0 & I & -I \end{array} \right) \begin{pmatrix} z_b \\ z_k \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Das Reduzieren bedeutet nun, dass man die Gleichheit von z_k und \mathbf{y}_k ernst nimmt und \mathbf{y} aus dem Gleichungssystem streicht, was in der Systemmatrix die Streichung der letzten Hyperzeile und der letzten Hyperspalte zur Folge hat. Mit der sich dann ergebenden Gleichung

$$(A_P U_{11}^R + B_P U_{21}^R, \quad A_P U_{12}^R + B_P U_{22}^R) \begin{pmatrix} z_b \\ z_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

wird nach der in Abschnitt 6.1 skizzierten allgemeinen Methode verfahren, falls das reduzierte System nach Satz 6.1 beobachtbar ist.

Bei dem Prozedere sollte man bedenken, dass man die Systemgleichung (6.1) immer von links mit einer unimodularen Matrix U^L multiplizieren kann, ohne die Gleichung wesentlich zu verändern. Sollte also das Paar (C_P, D_P) nicht linksteilerfremd sein, so kann man das durch Hinzunahme von Zeilen aus (A_P, B_P) meist beheben. Es ist also lediglich gefordert, dass

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) \\ C_P(s) & D_P(s) \end{pmatrix} \geq p \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

ist, eine Bedingung, die sehr häufig erfüllt sein dürfte.

Außerdem ist es ratsam, eine konstante Matrix U^R , nicht nur eine unimodulare zu verwenden, denn wenn man aus dem reduzierten Beobachter zum Schluss die ursprünglichen Größen \mathbf{x} und \mathbf{u} gewinnen will, so kommt Gleichung (6.17) zum Einsatz. Wenn also in U^R Potenzen von $\left(\frac{d}{dt}\right)$ auftreten, so muss der Ausgang des Beobachters differenziert werden, wodurch trotz eines properen Beobachters der gesamte Aufbau unter Umständen nicht mehr proper ist.

Das folgende Beispiel soll die beschriebene Methode deutlich machen.

Beispiel 6.2 Als Beispiel diene das Zweifachpendel auf einer ebenen Bahn aus Beispiel 4.1 oder 2.1, wobei in diesem Fall beide Pendelkörper in der Ruhelage herabhängen sollen. Die normierten Parameterwerte seien

g	a_1	l_1	ψ_1	l_2	l_y	m_0	m_1	m_2	f^{ss}	d_1^{ss}	φ_1^{ss}	φ_1^{ss}
10	0.25	0.2	0	0.4	0.8	0.25	0.15625	0.5	0	0	0	0

Ein auf den Wagen geklebter Beschleunigungssensor liefere die erste Messgröße $y_1 = \ddot{w}_0$. Außerdem werde die x -Position eines ähnlich wie in Beispiel 3.2 herausgehobenen Punktes y_2 auf dem zweiten Pendelkörper

$$y_2(t) = w_0(t) + a_1\varphi_1(t) + l_y\varphi_2(t)$$

gemessen. Dies sei die zweite Messgröße. Die Systemgleichung (6.1) lautet mithin

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0.90625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.15625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 \\ 0.15625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.0375 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.5625 & 0.05 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 \\ 0.2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.05 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.08 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2 & 0 & 0 \\ \hline \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.8 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Hier tritt der oben besprochene Fall ein, dass das Paar (C_P, D_P) zunächst nicht linksteilerfremd ist, denn der Rang fällt für $s = 0$ offensichtlich ab. Das ist zu beheben, indem man die Systemgleichung von links mit

$$U^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & -2.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multipliziert. Damit erhält man die Systemgleichung

$$\begin{pmatrix} 0.90625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.15625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.0375 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1.5625 & 0.05 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.05 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.08 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31.25 & -5 & 4 & -20 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f \\ d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Diese hat überdies den Vorteil, dass (C_P, D_P) konstant ist. Die Überführung (6.16) in die Hermitesche Normalform ist damit durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 31.25 & -5 & 4 & -20 \\ 1 & 0.25 & 0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.84 & 0.032 & -0.16 & -0.008 & 1 \\ 0.16 & -0.128 & 0.64 & 0.032 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

gegeben und die Systemgleichungen erscheinen in der reduzierten Form (6.18)

$$\begin{pmatrix} -0.53625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.009 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 1 & -0.045 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.00225 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.90625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ -0.07525 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.25 & 0.0002 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.2 & -0.001 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -5 \cdot 10^{-5} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.05 & 0.15625 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ -0.08 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ f \\ d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.20)$$

Man erkennt leicht, dass die linke Spalte für kein $\left(\frac{d}{dt}\right)$ gleich Null wird, und das reduzierte System damit beobachtbar ist. ■

6.4 Eingangsbeobachter oder Störgrößenbeobachter

Bisweilen sind auch Eingänge eines Systems nicht messbar, typischerweise dann, wenn es sich um Störungen handelt. Dann lassen sich auch diese beobachten. Hierbei ist der vorliegende Ansatz nützlich, denn in ihm wird ohnehin nicht streng zwischen Eingangsgrößen und anderen Größen unterschieden. Sind also Eingangsgrößen unbekannt, muss man das System lediglich neu partitionieren. Es seien unter den m Eingangsgrößen die Größen $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ unbekannt, die Größen $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ bekannt ($m_1 + m_2 = m$). Dann modifiziert man die Systemdarstellung (2.1) wie folgt:

$$A_P \mathbf{x} + B_{P1} \mathbf{u}_1 + B_{P2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

$$C_P \mathbf{x} + D_{P1} \mathbf{u}_1 + D_{P2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}.$$

Um einen Beobachter für die Größen \mathbf{x} und \mathbf{u}_1 zu bekommen, partitioniert man die Gleichungen

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} A_P & B_{P1} & B_{p2} & 0 & 0 \\ C_{P1} & D_{P11} & D_{P12} & I_{m_1} & 0 \\ \hline C_{P2} & D_{P21} & D_{P22} & 0 & I_{p-m_1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^{(p-m_1)}.$$

Das System ist daher beobachtbar, wenn

- $r + m_1 < r + p \Rightarrow m_1 < p$ (weniger unbekannte Eingangsgrößen als Messgrößen),
- $\text{Rang} \begin{pmatrix} A_P(s) & B_{P1}(s) \\ C_{P1}(s) & D_{P11}(s) \\ C_{P2}(s) & D_{P21}(s) \end{pmatrix} = r + m_1 \quad \forall s \in \mathbb{C}$ (Teilerfremdheit)

gegeben ist. Bei diesem Beobachertyp ist die Frage, ob der Beobachter proper ist (Satz 6.3), besonders kritisch. Oftmals ist die Übertragungsfunktion $-A_P^{-1}B_P$ streng proper, $C_P = \text{const.}$ und $D_P = 0$. Unter diesen Umständen gibt es in $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ keine zeilenreduzierte Matrix, weil die zweite Hyperspalte der Matrix Γ^z der führenden Zeilenkoeffizienten systematisch Null ist (siehe Abschnitt A.1). Bei der Zeilenreduktion steigen die Zeilengrade in S_{12} an, da bei der Reduktion Zeilen von $(C_P \ D_P \ -I)$ mit s multipliziert und zu den anderen Zeilen addiert werden, um deren Grade auf das Niveau von B_P zu drücken. Dadurch ist die Bedingung aus Satz 6.3 oftmals nicht zu erfüllen.

Die Fortführung von Beispiel 6.2 soll den Entwurf eines Eingangsbeobachters demonstrieren. Ferner kommt Satz 6.2 zu Anwendung.

Beispiel 6.3 Die Kraft f auf den Wagen sei unbekannt. Dies könnte dadurch entstehen, dass die Bahn nicht waagrecht ist, sondern wellig, wodurch die Schwerkraft g an der Karre angreift. Die reduzierten Systemgleichungen (6.20) sind daher neu zu partitionieren:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|ccc} -0.53625\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.009\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 1 & -0.045\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.00225\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.90625\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ -0.07525\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.25 & 0.0002\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 0.2 & -0.001\left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -5 \cdot 10^{-5}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 0.05 & 0.15625\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ \hline -0.08\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2 & 0 & 0 & 0 & 0.2\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{array} \right)}_{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ f \\ d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Man kann leicht überprüfen, dass das Paar $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ für $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 = 25$ und $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 = 1000$ vollen Rang hat und somit beobachtbar ist. Auch die Bedingung für einen properen Beobachter aus Satz 6.3 wird nicht verletzt. Man kann also mit der Auslegung des charakteristischen Polynoms $CP_B(s)$ des Beobachters beginnen. Da Satz 6.2 genutzt werden soll, wird zunächst die Überführung in die Hermitesche Normalform von $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ benötigt:

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0.0001481s^2 - 0.1481 & -0.006667s^2 + 0.7407 & 0.005278s^2 + 0.4074 \\ -0.001111s^2 + 1.236 & 0.05s^2 - 11.18 & -0.03958s^2 + 1.398 \\ \hline 1.6 \cdot 10^{-5}s^4 - 0.0164s^2 + 0.4 & -0.00072s^4 + 0.098s^2 - 2 & 0.00057s^4 + 0.02975s^2 + 0.25 \end{array} \right)}^{U^L} \cdot \begin{pmatrix} -0.53625s^2 & 0.009s^2 - 1 \\ -0.07525s^2 + 0.25 & 0.0002s^2 - 0.2 \\ -0.08s^2 + 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Problem der Nullstellenzuweisung lautet also

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \frac{0.00057s^4 + 0.02975s^2 + 0.25}{L_1(s)} & \frac{1.6 \cdot 10^{-5}s^4 - 0.0164s^2 + 0.4 \quad -0.00072s^4 + 0.098s^2 - 2}{L_2(s)} \\ \hline & \end{array} \right) \stackrel{!}{=} \text{CP}_B.$$

Die Nullstellen werden zu $s_1^0 = -5$, $s_2^0 = -7$ und alle übrigen zu $s^0 = -10$ gewählt. Weil (U_{22}^L, U_{21}^L) ausschließlich gerade s Potenzen enthält, müssen (L_1, L_2) mindestens eine einfache s Potenz enthalten, denn andernfalls enthielte auch $\text{CP}_B(s)$ ausschließlich gerade Potenzen, so dass es nicht stabil sein könnte. Daher soll die erste Zeile von (L_1, L_2) den Grad eins haben und die zweite Grad null. Das charakteristische Polynom $\text{CP}_B(s)$ hat damit den Grad fünf. Mit der ersten Zeile $(l_{11}, \mathbf{l}_{21}^T)$ sollen nach der in Abschnitt 4.4.2 beschriebenen Methode die Nullstellen $s_1^0 = -5$, $s_2^0 = -7$ fixiert werden. Man erhält

$$(l_{11} \quad \mathbf{l}_{21}^T) = (1 \quad a) \begin{pmatrix} -2.657s - 13.28 & 7.808s + 39.04 & -4.99s - 79.69 \\ -4.522s - 22.61 & 13.29s + 66.44 & 18.83s + 55.63 \end{pmatrix},$$

wobei analog zu Beispiel 4.3 ein Faktor $a \in \mathbb{R}$ offen bleibt. Mit dessen Hilfe kann im zweiten Schritt die Matrix M so gestaltet werden, dass das Gleichungssystem der zweiten Zeile $(l_{12}, \mathbf{l}_{22}^T)$

$$M \cdot \begin{pmatrix} l_{12} \\ \mathbf{l}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

trotz seiner Überbestimmtheit³ eine eindeutige Lösung hat. Mit $a = 2.5769$ erhält man

$$(L_1 \quad L_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 43.54s + 63.68 & -14.31s - 71.54 & 42.05s + 210.3 \\ 585.7 & 406.9 & -3292 \end{array} \right).$$

Die Differentialgleichung (6.10) des Beobachters lautet damit

$$\begin{pmatrix} 1.026 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 17.45 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 97.58 \left(\frac{d}{dt}\right) + 179.9 & -0.1204 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 - 0.6018 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 5.898 \left(\frac{d}{dt}\right) + 29.49 \\ -17.28 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 348.4 & 3.003 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 251.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_2 \\ \widehat{f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6018 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 3.009 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0.03009 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + 0.1505 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 2.103 \left(\frac{d}{dt}\right) + 10.51 & 2.311 \left(\frac{d}{dt}\right)^3 - 19.25 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ -15.02 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -0.7508 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 164.6 & -28.58 \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

³siehe dazu Beispiel 4.4

Dieser reduzierte Beobachter liefert zunächst nur Schätzwerte für den Winkel φ_2 und die Kraft f . Die verbleibenden Systemgrößen w_0 und φ_1 werden mithilfe der definierenden Gleichung (6.17) und der ersten zwei Zeilen von U^L aus Gl. (6.19) berechnet:

$$\begin{pmatrix} \widehat{w}_0 \\ \widehat{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.84 & 0.032 \\ 0.16 & -0.128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_2 \\ \widehat{f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.16 & -0.008 & 1 \\ 0.64 & 0.032 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

In Bild 6.7 finden sich Simulationsergebnisse für eine willkürliche Trajektorie. Oben sind die bekannten Größen d_1 , y_1 und y_2 zu finden. Darunter stehen die Verläufe der beobachteten Größen, wobei die tatsächlichen Verläufe gestrichelt eingezeichnet sind. Sämtliche Anfangswerte des Beobachters sind Null. Man sieht, dass der Beobachter den Anfangsfehler kompensiert und danach den tatsächlichen Verläufen gut folgt. ■

6.5 Elimination von Größen

Oftmals wird man bei der Modellierung einer Strecke mehr Größen verwenden, als man später technisch benötigt. Daher liegt der Wunsch nahe, einen Beobachter zu entwerfen, der nur einen Teil der unbekanntenen Größen beobachtet. Dabei kann es sich um einen Eingang handeln, was einem unknown input observer wie in [HZ05] entspricht, oder um innere Größen, was auch als functional observer bezeichnet wird. Es wird wieder von der Beschreibung (6.1) ausgegangen, mit dem Unterschied, dass es drei Arten von Größen gibt, gemessene Größen z_k , zu beobachtende Größen z_b und irrelevante Größen $z_i \in \mathbb{R}^u$:

$$(S_b \ S_u \ S_k) \begin{pmatrix} z_b \\ z_i \\ z_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

Es gilt jetzt, einen Satz von Gleichungen zu gewinnen, in denen die uninteressanten Größen z_i nicht mehr auftauchen. Auch das ist eine Anwendung der Überführung in die Hermitesche Normalform. Falls S_u weniger Spalten als Zeilen hat ($u < n$), so kann man es durch elementare Zeilenoperationen in die Hermitesche Normalform bringen⁴:

$$\begin{pmatrix} U_1^L \\ U_2^L \end{pmatrix} S_u = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_1^L \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{u \times u}, U_2^L \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{(n-u) \times u}.$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Rechtsteiler $R\left[\frac{d}{dt}\right]$ unimodular ist, denn hier wird lediglich die zweite Zeile ausgebeutet. Man multipliziert Gl. (6.21) mit U_2^L und erhält

$$(U_2^L S_b \ 0 \ U_2^L S_k) \begin{pmatrix} z_b \\ z_i \\ z_k \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

in der offensichtlich z_i keine Rolle mehr spielt. Mit diesen Gleichungen legt man den Beobachter nach Abschnitt 6.1 aus. Dieses System ist nach Satz 6.1 beobachtbar, wenn $(n - u) > b$ ist und $U_2^L S_b$ rechtsteilerfremd. Doch wann ist Letzteres der Fall? Allein aus der Tatsache, dass U_2^L und S_b je für sich vollen Rang für alle $s \in \mathbb{C}$ haben, kann nicht

⁴Dadurch werden die Größen nicht verändert.

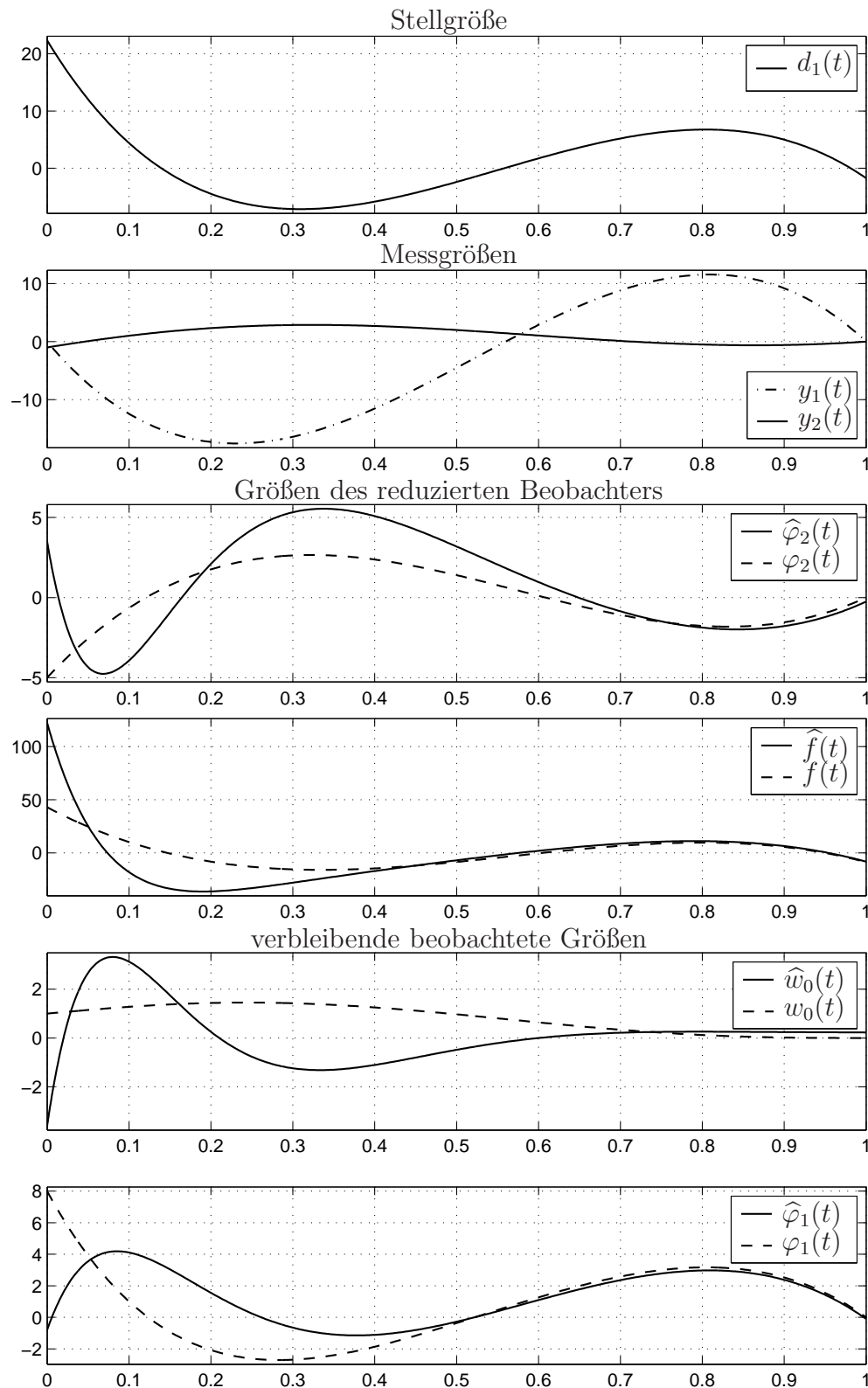


Bild 6.7: Konvergenzverhalten des Beobachters aus Beispiel 6.3

auf die Rechtsteilerfreiheit von $U_2^L S_b$ geschlossen werden. Man denke sich $U_2^L S_b$ durch eine weitere unimodulare Matrix \tilde{U}^L in Hermitesche Normalform $\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ überführt. Dann

entsteht der am Schluss interessierende Rechtsteiler \tilde{R} durch

$$\begin{pmatrix} I_u & \\ & \tilde{U}^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^L \\ U_2^L \end{pmatrix} (S_u \ S_b) = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} .$$

Hierin kann $R(s)$ durchaus nicht unimodular sein, aber $\tilde{R}(s)$ muss unimodular sein. Falls also die Matrix $(S_u(s) \ S_b(s))$ für einige $s = s_0$ einen Rangabfall gegenüber dem Normalrang hat, so müssen das dieselben s_0 sein, für die auch der Rang $S_u(s)$ abfällt, denn nur dann sind sämtliche Nullstellen von $(\det R(s) \cdot \det \tilde{R}(s))$ in $\det R(s)$ enthalten. Diese Bedingung findet sich auch in [Rei07] und [HP98] mit je anderer Herleitung.

Ausblick auf offene Fragen

Die Arbeit erhebt nicht den Anspruch, sämtliche diskutierten Fragen abschließend beantwortet zu haben. In diesem Kapitel sollen einige offene Fragen und mögliche Untersuchungsgegenstände in Stichpunkten benannt und skizziert werden, die nach Auffassung des Autors einer weiteren Untersuchung bedürfen.

- Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Methode zur Nullstellenzuweisung durch Ergänzung von Zeilen vorgegebener Struktur lässt ein Kriterium für die Lösbarkeit des Problems vermissen. Auch ist es nicht möglich, systematisch alle möglichen Lösungen anzugeben. So hat der Autor beobachtet, dass sich in Beispiel 4.8 bzw. 4.6 jedesmal ein anderer konstanter Regler ergibt, je nachdem, in welcher Reihenfolge man die einzelnen gewünschten Nullstellen s_κ in die Rechnung hineinnimmt. Da zunächst zwei von sechs Nullstellen herangezogen werden und dann die übrigen, gibt es $\binom{2}{6} = 15$ unterschiedliche Reihenfolgen, in denen man die Nullstellen heranziehen kann. Alle 15 Regler sind unterschiedlich und platzieren die Pole in gewünschter Weise. Wie hängen diese Regler zusammen? Für den Fall eines konstanten Reglers kann das Problem mit Mitteln der linearen Algebra wie folgt formuliert werden (Bezeichnungen siehe Abschnitt 4.4.2):

Betrachtet wird ein Vektorraum $V = \mathbb{R}^{m+p}$.

Darin sind gegeben k_C Untervektorräume

$$V_1, \dots, V_{k_C} \subset V \quad \text{mit} \quad \dim V_\kappa = p \quad \text{für} \quad \kappa = 1, \dots, k_C.$$

Die Unterräume werden durch die Zeilen von $(\tilde{B}_P(s_\kappa), \tilde{A}_P(s_\kappa))$ aufgespannt. Dass der Rang stets voll ist, folgt aus der angenommenen Linksteilerfremdheit.

Gesucht wird ein Untervektorraum $U \subset V$ mit

$$\dim U = m$$

und

$$\dim(U \cap V_\kappa) \geq 1 \quad \text{für} \quad \kappa = 1, \dots, k_C.$$

Gibt es solche Unterräume? Wie viele Unterräume gibt es? Wie kann man sie berechnen? Darauf hat der Autor trotz Konsultation eines in linearer Algebra erfahrenen Mathematikers keine Lösung finden können.

Daran könnte man die Frage nach dynamischen Reglern der Ordnung k_F anschließen. Hier müsste man k_C unterschiedliche Unterräume U_κ angeben, für die gilt

$$\dim(U_\kappa \cap V_\kappa) \geq 1 \quad \text{und} \quad \kappa = 1, \dots, k_C,$$

wobei die Unterräume durch Zeilen von $(k_F + 1)$ Matrizen $F_\lambda \in \mathbb{R}^{m \times (r+m)}$ aufgespannt werden und zwar so, dass

$$U_\kappa = \text{span} \left[\sum_{\lambda=0}^{k_F} F_\lambda s_\kappa^\lambda \right]$$

gilt.

- Im Abschnitt 6.3 über reduzierte Beobachter wurde lediglich untersucht, wie die Anzahl der zu beobachtenden Größen reduziert werden kann. Die Frage nach der Reduktion der dynamischen Ordnung des Beobachters bleibt offen. Betrachtet man den Grad der Nenner von der Übertragungsmatrix des Beobachters als dynamische Ordnung, so ist diese gegeben durch

$$\text{grad CP}_B = \text{grad det} (L_2 S_{11} + L_1 S_{21}) .$$

Die dynamische Ordnung wird also durch die Wahl von $L_1(s)$ und $L_2(s)$ bestimmt. Daher haben Beobachter auf polynomialer Basis im Gegensatz zu Zustandsbeobachtern keine „natürliche“ Ordnung, gegenüber der man reduzieren könnte. Man kann, wie in Abschnitt 6.1.5 gezeigt wurde, die Ordnung bis auf Null drücken. Allerdings wird der Beobachter dann improper. Jedoch soll gerade die Differentiation von Messsignalen durch einen Beobachter vermieden werden. Man kann also fragen: Was ist die kleinste möglich Ordnung, die einen properen Beobachter zulässt? Um einen solchen Beobachter zu konstruieren, betrachtet man noch einmal Satz 6.3 und dessen Beweis. Gleichung (6.14) kann wie folgt modifiziert werden:

$$\left(N_B \mid Z_B \right) = \underbrace{\left(L_2 \quad L_1 \right) U^L(s)}_{\left(\tilde{L}_2 \quad \tilde{L}_1 \right)} \left(\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array} \right) .$$

Da die Matrix $\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{pmatrix}$ niemals zeilenreduziert ist, weil sie mehr Zeilen als Spalten hat, kann man die Zeilengrade immer weiter drücken (Abschnitt A.1). Wenn man also in S_P Zeilen findet, in denen Bedingung 1 gilt und die Grade der Zeilen von $S_{b \times k}$ echt kleiner sind als die Grade der entsprechenden Zeilen in $S_{b \times b}$, so kann man die Zeilengrade reduzieren, ohne die Bedingung 2 zu verletzen. Dies lässt sich fortsetzen, bis für $U^L S$ Satz 6.3 gerade noch erfüllt ist. Bei der anschließenden Bestimmung von L_1 und L_2 kann es allerdings vorkommen, dass man die Ordnung wieder erhöhen muss, um ausreichend Freiheitsgrade zur Polplatzierung zu haben. Doch ist dieses Vorgehen eher ein geschicktes Rechnen. Es fehlen ein Kriterium, welches die kleinste mögliche Ordnung angibt, und eine Methode, den entsprechenden Beobachter zu berechnen.

- In Abschnitt 5.4 wird festgestellt, dass die Methoden zum zeitdiskreten Reglerentwurf weiter verwendet werden können. Es bleibt die Frage offen, wie sich die Streckenbeschreibung durch die auf der modifizierten z -Transformation beruhende parametrische Übertragungsmatrix für den Reglerentwurf nutzen lässt. In [RL97] werden Methoden zum Reglerentwurf unter Berücksichtigung des Verhaltens zwischen den Abtastzeitpunkten angegeben. Kann man ähnliche oder weitere Methoden auch mit der modifizierten z -Transformation erarbeiten?

- Betrachtet man lineare *zeitvariante* Systeme mit konzentrierten Parametern, so kann man diese ebenfalls mithilfe von Matrizen, deren Einträge Polynome im $\left(\frac{d}{dt}\right)$ sind, darstellen. Allerdings sind diese Matrizen dann zeitveränderlich. Das hat zur Folge, dass man nicht mehr einfach mit dem Operator $\left(\frac{d}{dt}\right)$ multiplizieren und mit den Koeffizienten c der Polynome kommutieren kann, denn es gilt jetzt

$$\left(\frac{d}{dt}\right) (c x) = \dot{c}x + c\dot{x} = \left(\dot{c} + c \left(\frac{d}{dt}\right)\right) x$$

und nicht mehr einfach $\left(\frac{d}{dt}\right) cx = c \left(\frac{d}{dt}\right) x$. In [Rud03] wird deutlich gemacht, dass auch dann eine lineare Struktur über einem Ring vorliegt. Für die Trajektorienplanung ist dieser Ansatz wenig sinnvoll (siehe Abschnitt 1.2). Aber wie sieht es mit den in den Kapiteln 4 und 6 diskutierten Methoden aus? Kann man eine Parallele zur zeitvarianten Ackermannformel formulieren, die nicht auf eine Zustandsdarstellung angewiesen ist?

- Das zehnte Kapitel von [Mac33] ist Matrizen mit unendlicher Zeilen- und Spaltenzahl (matrices of infinite order) gewidmet. Es werden deren Determinanten eingeführt. Wenn solche Matrizen eine Determinante haben, dann können sie vermutlich auch unimodular sein. Ließe sich damit die vorliegende Theorie auf unendlich dimensionale Systeme ausdehnen? In welcher Beziehung stünde dieses dann zu den in [Woi07] dargestellten Methoden? Ferner wird in [Mac33] auch eine zugehörige Matrizenalgebra besprochen. Allerdings stammen dabei die Einträge aus einem Körper.

A Mathematische Grundlagen

Von den im folgenden Kapitel aufgezählten mathematischen Grundlagen ist keine vollständig neu. Jedoch scheint es dem Autor jeweils sinnvoll, sie in neuer Form zu präsentieren, um sie in der für dieses Werk nützlichen und (subjektiv) verständlichen Form vorliegen zu haben.

A.1 Zeilen- und spaltenreduzierte Matrizen

Die folgenden Ausführungen fußen im Wesentlichen auf [Wol74], der solche Matrizen column- bzw. row-proper nannte, sowie auf [Kai80] und [RL06].

Zunächst wird der Grad eines polynomialen Vektors definiert, sei es ein Zeilenvektor $\mathbf{p}^T(s)$ oder ein Spaltenvektor $\mathbf{p}(s)$.

Definition A.1 Der Grad eines polynomialen Vektors $\mathbf{p}(s) \in \mathbb{R}[s]^n$ wird mit $\text{grad } \mathbf{p}(s)$ bezeichnet und ist der höchste Grad der in $\mathbf{p}(s)$ auftretenden Polynome $p(s)$

$$\text{grad } \mathbf{p}(s) = \max_{\nu=1}^n \text{grad } p_\nu(s).$$

Bei der Definition des Grades einer polynomialen Matrix soll zwischen Zeilengrad zgrad und Spaltengrad sgrad unterschieden werden.

Definition A.2 Der Zeilengrad bzw. Spaltengrad einer polynomialen Matrix $M(s) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_s}$ ist die Summe der Grade ihrer Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren:

$$\begin{aligned} \text{zgrad } M(s) &= \sum_{\nu=1}^{n_z} \text{grad } \mathbf{p}_\nu^T(s) = \sum_{\nu=1}^{n_z} \text{zgrad}_\nu M(s) \\ \text{bzw.} \quad \text{sgrad } M(s) &= \sum_{\nu=1}^{n_s} \text{grad } \mathbf{p}_\nu(s) = \sum_{\nu=1}^{n_s} \text{sgrad}_\nu M(s). \end{aligned}$$

Darin bezeichne zgrad_ν den Grad des ν -ten Zeilenvektors einer polynomialen Matrix und sgrad_ν den Grad des ν -ten Spaltenvektors.

Damit kann man jede Matrix $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{n_z \times n_s}$ als die Summe aus einer Zahlenmatrix Γ_M , bestehend aus den höchsten Koeffizienten einer Zeile bzw. Spalte, einer Diagonalmatrix mit entsprechenden s -Potenzen und einer polynomialen Restmatrix $M_R(s)$ kleiner Ordnung darstellen:

$$M(s) = \langle s^{\text{zgrad}_1 M(s)} \quad s^{\text{zgrad}_2 M(s)} \quad \dots \quad s^{\text{zgrad}_{n_z} M(s)} \rangle \cdot \Gamma_M^z + M_R(s) \quad (\text{A.1a})$$

$$\text{bzw.} \quad M(s) = \Gamma_M^s \cdot \langle s^{\text{sgrad}_1 M(s)} \quad s^{\text{sgrad}_2 M(s)} \quad \dots \quad s^{\text{sgrad}_{n_s} M(s)} \rangle + \widetilde{M}_R(s). \quad (\text{A.1b})$$

Darin symbolisieren die spitzen Klammern $\langle \rangle$ eine Diagonalmatrix.

Definition A.3 Wenn die Matrix Γ_M^z (Γ_M^s) vollen Rang hat, heißt die Matrix $M(s)$ zeilenreduziert (spaltenreduziert).

Im Falle quadratischer Matrizen gilt bei einer zeilenreduzierten (spaltenreduzierten) Matrix

$$\text{zgrad } M(s) = \text{grad det } M(s) \quad \text{bzw.} \quad \text{sgrad } M(s) = \text{grad det } M(s).$$

Beispiel A.1 Als Beispiel für die obigen Definitionen diene die Matrix

$$M(s) = \begin{pmatrix} 2s^2+s & s+3 & -3s^2 & 1 & s \\ s^3 & 4 & s+2 & 0 & 1 \\ 4s^2+3 & s-4 & s+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Grade der einzelnen Zeilenvektoren sind 2, 3, 2, die der Spaltenvektoren 3, 1, 2, 0, 1. Also ist

$$\text{zgrad } M(s) = 7 \quad \text{und} \quad \text{sgrad } M(s) = 7.$$

Die Darstellung (A.1a) lautet

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 & & & & \\ & s^3 & & & \\ & & & & s^2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Gamma_M^z} + \begin{pmatrix} s & s+3 & 0 & 1 & s \\ 0 & 4 & s+2 & 0 & 1 \\ 3 & s-4 & s+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Zahlenmatrix Γ_M^z hat Rang 2, mithin keinen vollen Rang. Die Matrix $M(s)$ ist daher nicht zeilenreduziert. Hingegen hat die Matrix Γ_M^s der höchsten Spaltenkoeffizienten

$$\Gamma_M^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vollen Rang. Die Matrix ist daher spaltenreduziert. ■

Satz A.1 Jede polynomiale Matrix kann durch elementare Zeilenoperationen, d. h. durch Multiplikation von links mit einer unimodularen Matrix in eine zeilenreduzierte Form gebracht werden. Ebenso kann jede Matrix durch elementare Spaltenoperationen in eine spaltenreduzierte Form gebracht werden.

Beweis: O. B. d. A. kann man sich auf die Zeilenreduktion beschränken. Hat die Matrix Γ_M^z in Gl. (A.1a) keinen vollen Rang, so kann man aus deren Kern mindestens einen Zeilenvektor γ^T entnehmen, für den gilt

$$\gamma^T \cdot \Gamma_M^z = \mathbf{0}^T.$$

Unter den Zeilen, die durch γ^T herangezogen werden, d. h. deren korrespondierendes Element von γ^T ungleich Null ist, sei der höchste Grad N :

$$N = \max \text{zgrad}_\nu M(s) \quad \text{aus allen} \quad \nu = 1, \dots, n_z \quad \text{und} \quad \gamma^{T\nu} \neq 0.$$

Man multipliziert den Zahlenvektor γ^T von rechts mit einer polynomialen Diagonalmatrix und erhält

$$\gamma_P^T(s) := \gamma^T \cdot \langle s^{N-\text{zgrad}_1 M(s)} \quad s^{N-\text{zgrad}_2 M(s)} \quad \dots \quad s^{N-\text{zgrad}_{n_z} M(s)} \rangle .$$

In diesem polynomialen Vektor muss mindestens ein Element eine Konstante sein. Man kann diesen polynomialen Vektor $\gamma_P^T(s)$ daher zu einer unimodularen Matrix $U_\gamma(s)$ ergänzen, indem man Zeilen der Einheitsmatrix hinzufügt, die die Eins nicht an der Stelle der Konstanten haben. Multipliziert man die Matrix $M(s)$ mit dieser unimodularen Matrix $U_\gamma(s)$, so erhält man

$$\begin{aligned} U_\gamma(s) \cdot M(s) &= \\ \begin{pmatrix} \text{Zeilen von } I_{n_z} \\ \gamma_P^T(s) \end{pmatrix} \cdot \left[\langle s^{\text{zgrad}_1 M(s)} \quad s^{\text{zgrad}_2 M(s)} \quad \dots \quad s^{\text{zgrad}_{n_z} M(s)} \rangle \cdot \Gamma_M^z + M_R(s) \right] &= \\ &= \begin{pmatrix} \text{Zeilen von } M(s) \\ \mathbf{0}^T + \gamma_P^T(s) M_R(s) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Der Zeilengrad der oberen Zeilen ist $\text{zgrad } M(s) - N$, denn es fehlt grade die Zeile mit dem Grad N . Der Grad von $\gamma_P^T(s) M_R(s)$ ist höchstens $N - 1$, denn im ν -ten Element ist der Grad höchstens

$$\begin{aligned} \text{grad} (\gamma_P^T(s) M_R(s)) &= \max_{\nu=1, \gamma^{T\nu} \neq 0}^{n_z} (N - \text{zgrad}_\nu M(s) + \text{zgrad}_\nu M_R(s)) \\ &\leq \max_{\nu=1, \gamma^{T\nu} \neq 0}^{n_z} (N - \text{zgrad}_\nu M(s) + \text{zgrad}_\nu M(s) - 1) = N - 1 . \end{aligned}$$

Daher ist der Grad der Matrix (A.2) höchstens

$$\text{zgrad } M(s) - N + N - 1 = \text{zgrad } M(s) - 1 .$$

Der Grad der Matrix $M(s)$ wird also durch die Multiplikation mit U_γ systematisch um mindestens eins reduziert. Diese Prozedur lässt sich fortsetzen, bis Γ_M^z vollen Rang hat. Dann ist die Matrix $M(s)$ zeilenreduziert. **q. e. d.**

Beispiel A.2 Die Fortsetzung von Beispiel A.1 soll die Prozedur verdeutlichen. Der Rang der Matrix Γ_M^z ist zwei, der Kern ist

$$\ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad -4 \quad 1) = \gamma^T .$$

Der höchste Zeilengrad in $M(s)$ ist 3, daher ist

$$\gamma_P^T(s) = (0 \quad -4 \quad 1) \cdot \langle s \quad 1 \quad s \rangle = (0 \quad -4 \quad s) ,$$

das zur unimodularen Matrix U_γ ergänzt wird

$$U_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & s \end{pmatrix} .$$

Somit lautet die reduzierte Matrix

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2s^2+s & s+3 & -3s^2 & 1 & s \\ s^3 & 4 & s+2 & 0 & 1 \\ 4s^2+3 & s-4 & s+5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2s^2+s & s+3 & -3s^2 & 1 & s \\ 4s^2+3 & s-4 & s+5 & 0 & 0 \\ 3s & s^2-4s-16 & s^2+s-8 & 0 & -4 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

deren Matrix der höchsten Koeffizienten

$$\Gamma_{\widetilde{M}}^z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat. Damit ist man bereits am Ende der Prozedur. Die Matrix $\widetilde{M}(s)$ ist zeilenreduziert. ■

Wenn die Matrix $M(s)$ mehr Zeilen als Spalten hat, so hat Γ_M^z auch bei vollem Rang einen Kern. Folglich kann man die Prozedur nach der Zeilenreduktion fortführen. Wenn die Matrix rechtsteilerfremd ist, kann man sukzessive alle Zeilengrade auf Null drücken und erreicht in systematischer Weise die Überführung in die Hermitesche Normalform. Falls die Matrix nicht teilerfremd ist, offenbart sich das dadurch, dass die Grade nicht auf Null zu drücken sind, da Zeilen mit s Potenzen nicht mehr von einem $\gamma^{T\nu} \neq 0$ angesprochen werden. Dieses Vorgehen soll für die Spaltenreduktion an der in Beispiel A.1 und A.2 betrachteten Matrix demonstriert werden.

Beispiel A.3 Die Matrix ist, wie in Beispiel A.1 gezeigt, bereits spaltenreduziert. Von der Matrix der höchsten Spaltenkoeffizienten lautet der Kern

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\gamma_1 \quad \gamma_2).$$

Der höchste Grad N ist hier für beide Spalten zwei. Daher ist

$$(\gamma_{P_1}(s) \quad \gamma_{P_2}(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & s^2 \\ s & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix kann jedoch nicht zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden, da sie nicht vollen Rang für alle $s \in \mathbb{C}$ hat (Rangabfall bei $s = 0$). Man muss sich daher für einen Vektor

entscheiden, die Wahl fällt hier auf $\gamma_{P_1}(s)$, und die erste unimodulare Matrix lautet

$$U_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix}$$

und der erste Zwischenschritt

$$M(s) \cdot U_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 2s^2+s & s+3 & 1 & s & 0 \\ s^3 & 4 & 0 & 1 & \frac{4}{3}s+\frac{2}{3} \\ 4s^2+3 & s-4 & 0 & 0 & \frac{1}{3}s+\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Wiederum wird der Kern der Matrix mit den höchsten Koeffizienten bestimmt

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\gamma_1 \quad \gamma_2).$$

Die höchsten Grade N sind hier 3 und 1, die polynomialen Vektoren $\gamma_{P_1}(s)$ und $\gamma_{P_2}(s)$ können zu einer unimodularen Matrix

$$U_{\gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}s^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}s^3 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ergänzt werden, und man erhält im zweiten Schritt

$$M(s) \cdot U_{\gamma_1} \cdot U_{\gamma_2} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 0 & -\frac{11}{3}s^2-\frac{4}{3}s & 0 \\ 4 & 0 & \frac{4}{3}s+\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}s^2 & 1 \\ s-4 & 0 & \frac{1}{3}s+\frac{5}{3} & -\frac{7}{3}s^2-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im dritten Durchlauf ergibt sich aus

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\gamma_1 \quad \gamma_2)$$

die unimodulare Matrix

$$U_{\gamma 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{6}s \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}s & \frac{3}{2}s^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2}s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 \end{pmatrix}$$

und damit der vierte Zwischenschritt

$$M(s) \cdot U_{\gamma 1} \cdot U_{\gamma 2} \cdot U_{\gamma 3} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{31}{6}s \\ 4 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 9s \\ s-4 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} & \frac{47}{6}s-4 \end{pmatrix}.$$

An dieser Stelle ist man fast fertig, denn obige Matrix enthält in der zweiten bis vierten Spalte eine unimodulare, in diesem Fall sogar konstante, Matrix. Deshalb lässt sich die letzte Überführungsmatrix leicht angeben, denn

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1(s) & U(s) & \mathbf{p}_2(s) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & 0 \\ U^{-1}(s) & -U^{-1}(s)\mathbf{p}_1(s) & -U^{-1}(s)\mathbf{p}_2(s) \\ \mathbf{0}^T & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_{\gamma 4}} = (I \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}).$$

Mit eingesetzten Werten lautet $U_{\gamma 4}$

$$U_{\gamma 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}s - \frac{5}{3} & -\frac{23}{9}s + \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9}s - \frac{28}{9} & -\frac{196}{27}s + \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}s - \frac{16}{9} & -\frac{94}{27}s - \frac{16}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die komplette Überführungsmatrix $U^R(s)$

$$U^R(s) = U_{\gamma 1} U_{\gamma 2} U_{\gamma 3} U_{\gamma 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9}s + \frac{5}{9} & -\frac{1}{3}s^2 + \frac{35}{27}s - \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9}s + \frac{4}{9} & \frac{1}{3}s^2 + \frac{28}{27}s + \frac{4}{9} \\ 1 & -s & \frac{4}{9}s^2 - \frac{1}{9}s + \frac{1}{3} & -\frac{4}{9}s^3 + \frac{17}{9}s^2 + \frac{20}{9}s - \frac{5}{3} & \frac{103}{27}s^3 + \frac{308}{27}s^2 - 3s + \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9}s + \frac{2}{9} & \frac{1}{9}s^2 - \frac{2}{3}s - \frac{28}{9} & s^3 - \frac{10}{27}s^2 - \frac{208}{27}s + \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Matrizenbruchdarstellung properer Übertragungsmatrizen

Eine Übertragungsmatrix heißt „proper“, wenn sämtliche Einträge propere Übertragungsfunktionen sind. Die vorangegangene Theorie bildet die Grundlage, um ein Kriterium anzugeben, wann eine Übertragungsmatrix $N^{-1}Z$ oder $\tilde{Z}\tilde{N}^{-1}$ proper ist.

Satz A.2 Eine Übertragungsmatrix $N^{-1}Z$ oder $\tilde{Z}\tilde{N}^{-1}$ ist genau dann proper, wenn

- $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ zeilenreduziert ist und der Zeilengrad in den Zeilen von $Z(s)$ den der entsprechenden Zeilen in $N(s)$ nicht übersteigt:

$$\text{Rang } \Gamma_N^z = n \quad \text{und} \quad \text{zgrad}_\nu N(s) \geq \text{zgrad}_\nu Z(s) \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n,$$

- $\tilde{N}(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ spaltenreduziert ist und der Spaltengrad in den Spalten von $\tilde{Z}(s)$ den der entsprechenden Spalten in $\tilde{N}(s)$ nicht übersteigt:

$$\text{Rang } \Gamma_{\tilde{N}}^s = \tilde{n} \quad \text{und} \quad \text{sgrad}_\nu \tilde{N}(s) \geq \text{sgrad}_\nu \tilde{Z}(s) \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, \tilde{n}.$$

Ein Beweis für diesen Satz findet man in [Kai80], Abschnitt 6.3.2.

A.2 Überführung der polynomialen Matrizendarstellung in eine Darstellung durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form

Unter den vielen Möglichkeiten einer polynomialen Matrizendarstellung ragt eine besonders heraus, bei der die Systemgleichung (2.1a) in einer speziellen Form erscheint, nämlich als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form:

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \right) I - A \right) \mathbf{x} - B \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u}.$$

Hierin sind A und B jetzt Zahlenmatrizen, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. In dem Softwarepaket MATLAB wird diese Form ein ODE-System genannt. Insbesondere zur numerischen Simulation unter MATLAB greift der Autor stets auf eine solche ODE-Darstellung zurück. In der Regelungstechnik ist sie unter dem Namen „Zustandsdarstellung“ bekannt. Die Zustandsdarstellung wurde in den zurückliegenden Jahrzehnten umfangreich erforscht und hat daher den Vorteil, dass zu ihrer Bearbeitung ausgereifte Softwarepakete verfügbar sind. Jedoch hat sie den Nachteil, dass in ihr impropere Systeme nicht dargestellt werden können. Um auch impropere Systeme einzuschließen, muss in der Ausgangsgleichung (2.1b) die Matrix D_P weiterhin eine polynomiale Matrix in $\left(\frac{d}{dt} \right)$ sein. Die Matrix C_P hingegen wird ebenfalls zu einer Zahlenmatrix $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$. Insgesamt lautet die angestrebte Form der Gleichungen (2.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u} \tag{A.3a}$$

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x} + D \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{u}. \tag{A.3b}$$

Darin wird der Vektor \mathbf{x} der inneren Größen gegenüber Gl. (2.1) erweitert¹, so dass

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad n = \text{grad det } A_P$$

gilt, denn in der polynomialen Matrizendarstellung (2.1) von (A.3) wäre $\tilde{A}_P = \left(\left(\frac{d}{dt} \right) I - A \right)$, und es muss gelten $\det \tilde{A}_P = \det A_P$. Natürlich kann im Extremfall auch $\text{grad det } A_P = 0$ sein, dann entarten die Gleichungen (A.3) zu $\mathbf{y} = D \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{u}$.

¹meist durch die Hinzunahme von Ableitungen der inneren Größen

In [Kai80] ist ein Weg zur systematischen Überführung in eine Zustandsdarstellung angegeben. Jedoch beschränkt sich der Autor dort auf den Fall eines streng properen Übertragungsverhaltens, also mit $D\left(\frac{d}{dt}\right) = 0$. Daher soll an dieser Stelle der Weg für impropere Systeme neu diskutiert werden. Ausgangspunkt ist eine (nicht notwendigerweise teilerfremde) rechte Matrizenbruchdarstellung

$$\mathbf{y} = Z_P N_P^{-1} \mathbf{u}.$$

Allerdings muss N_P spaltenreduziert nach Definition A.3 sein. Führt man analog zu [Kai80] den Teilzustand $\boldsymbol{\xi}$ (partial state) ein², so kann man die vorstehende Gleichung als

$$N_P \left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{y} = Z_P \left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.4b})$$

schreiben. Zunächst wendet man sich Gl. (A.4a) zu und zerlegt die Matrix N_P nach Gl. (A.1b) in

$$N_P = \Gamma_N^s S(s) + \widetilde{M}_R(s).$$

Darin ist $S(s)$ die in Abschnitt A.1 eingeführte Diagonalmatrix, wobei o. B. d. A.

$$s^{\text{sgrad}_1 N_P(s)} \geq s^{\text{sgrad}_2 N_P(s)} \geq \dots \geq s^{\text{sgrad}_{n_s} N_P(s)} \geq 0$$

gelten soll. Außerdem zerlegt man noch $\widetilde{M}_R(s)$ und erhält

$$N_P = \Gamma_N^s S(s) + R_N \Psi(s). \quad (\text{A.5})$$

In $\Psi(s)$ sind die kleineren vorkommenden Grade nach folgendem Schema versammelt:

$$\Psi(s) = \begin{pmatrix} s^{(\text{sgrad}_1 N_P) - 1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & s^{(\text{sgrad}_{n_s} N_P) - 1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{(\text{sgrad}_{n_s} N_P) - (\text{sgrad}_1 N_P)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

wobei jedoch Zeilen, in denen ein negativer Exponent entsteht, *nicht* aufgenommen werden. Die Matrix hat also insgesamt m Spalten und $\text{grad det } N_P$ Zeilen. Passend dazu enthält $R_N \in \mathbb{R}^{m \times \text{grad det } N_P}$ die zugehörigen Koeffizienten. Mit dieser Zerlegung kann Gleichung (A.4a) als

$$\left(\Gamma_N^s S\left(\frac{d}{dt}\right) + R_N \Psi\left(\frac{d}{dt}\right) \right) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}$$

schreiben, und da Γ_N^s invertierbar ist, gilt weiter

$$S\left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\xi} = -(\Gamma_N^s)^{-1} R_N \Psi\left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\xi} + (\Gamma_N^s)^{-1} \mathbf{u}. \quad (\text{A.7})$$

²Das sind nicht notwendigerweise die Basisgrößen, da die Darstellung nicht unbedingt teilerfremd sein muss. Will man das gesamte System modellieren, darf die Matrizenbruchdarstellung unter Umständen nicht teilerfremd sein.

In dieser Gleichung (A.7) wurde nach den höchsten jeweils auftretenden Ableitungen von ξ aufgelöst, ein wesentliches Merkmal der gesuchten Darstellung (A.3). Zu beachten ist, dass in den letzten Zeilen von $S\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ mitunter keine Ableitung steht, da der entsprechende Spaltengrad null ist. Seien die letzten m_0 -Spalten vom Grad null, dann stimmen die oberen $m - m_0$ Zeilen von $S\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ und $\left(\frac{d}{dt}\right)\Psi\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ überein, d. h.

$$\left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \cdot S\left(\frac{d}{dt}\right)\xi = \left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \cdot \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \Psi\left(\frac{d}{dt}\right)\xi.$$

Jetzt kann man \mathbf{x} definieren als $\mathbf{x} := \Psi\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ und erhält, indem man $S\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ mit Gl. (A.7) ersetzt, die oberen $(m - m_0)$ Zeilen:

$$\left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \cdot \left(-\left(\Gamma_N^s\right)^{-1} R_N \mathbf{x} + \left(\Gamma_N^s\right)^{-1} \mathbf{u}\right) = \left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \cdot \left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathbf{x}.$$

Die unteren $(n - m + m_0)$ Zeilen sind durch die Definition von Ψ gegeben. Aus der Definition (A.6) geht hervor, dass $(n - m + m_0)$ Elemente von $\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \Psi\xi$ und $\Psi\xi$ gleich sind. Dies muss durch entsprechende Einheitszeilenvektoren E^T angezeigt werden. Die Matrix E^T wird daher nach folgendem Schema erstellt:

Schema E^T : Man nehme aus der Einheitsmatrix I_n die Zeilen, die in $\Psi(s)$ eine s -Potenz größer null enthalten. Anders gesagt: Enthält die ν -te Zeile von $\Psi(s)$ nicht die Eins, so nehme man die ν -te Zeile der Einheitsmatrix I_n auf, wobei die Reihenfolge der Zeilen einzuhalten ist.

Damit kann man die gesuchte Systemgleichung (A.3a) in \mathbf{x} angeben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \left(\Gamma_N^s\right)^{-1} R_N \\ E^T \end{pmatrix}}_A \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \left(I_{(m-m_0)} \quad 0\right) \left(\Gamma_N^s\right)^{-1} \\ 0_{(n-m+m_0) \times m} \end{pmatrix}}_B \mathbf{u}. \quad (\text{A.8})$$

Als Zweites wendet man sich der Gleichung (A.4b) zu. Die Matrix Z_P wird analog zur Zerlegung von N_P in Gl. (A.5) dargestellt als

$$Z_P(s) = Z_\Gamma(s) \cdot S(s) + R_Z \cdot \Psi(s),$$

wobei die Matrix $Z_\Gamma(s)$ keine reine Zahlenmatrix ist, sondern Potenzen von s enthalten kann. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass das Übertragungsverhalten der Strecke improper sein kann (siehe Satz A.2). Setzt man dies in Gleichung (A.4b) ein, so erhält man

$$\mathbf{y} = Z_\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot S\left(\frac{d}{dt}\right)\xi + R_Z \cdot \Psi\left(\frac{d}{dt}\right)\xi,$$

und wenn man die Definition $\mathbf{x} := \Psi\left(\frac{d}{dt}\right)\xi$ sowie Gleichung (A.7) einsetzt,

$$\mathbf{y} = Z_\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right) \left(-\left(\Gamma_N^s\right)^{-1} R_N \mathbf{x} + \left(\Gamma_N^s\right)^{-1} \mathbf{u}\right) + R_Z \mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

Das einzige, was gegenüber der gewünschten Ausgabegleichung (A.3b) noch stört, sind die auftretenden Ableitungen von \mathbf{x} . Diese werden mithilfe von Gl. (A.8) eliminiert:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = A(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) + B\dot{\mathbf{u}} = A^2\mathbf{x} + AB\mathbf{u} + B\dot{\mathbf{u}}$$

A.2 Überführung der polynomialen Matrizendarstellung in eine Darstellung durch
lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form

$$\begin{aligned} \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= A^k \mathbf{x} + \sum_{\kappa=0}^{(k-1)} A^\kappa B \mathbf{u}^{(k-1-\kappa)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $M\left(\frac{d}{dt}\right)$ und deren Darstellung als Summe von $\left(\frac{d}{dt}\right)$ Potenzen

$$-Z_\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right) (\Gamma_N^s)^{-1} R_N =: M\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{\kappa=0}^{k_M} M_\kappa \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa$$

erhält man aus Gl. (A.9) die Ausgabegleichung (A.3b) mit

$$C = R_Z + \sum_{\kappa=0}^{k_Z} M_\kappa A^\kappa \tag{A.10a}$$

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) = Z_\Gamma\left(\frac{d}{dt}\right) (\Gamma_N^s)^{-1} + \sum_{\kappa=1}^{k_Z} \sum_{\lambda=0}^{(\kappa-1)} M_\kappa A^\lambda B \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\kappa-1-\lambda)}. \tag{A.10b}$$

Damit ist die Überführung in die Darstellung (A.3) durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form komplett.

Beispiel A.4 Ein Zahlenbeispiel soll die Vorgehensweise verdeutlichen. Das System sei gegeben durch die teilerfremde rechte Matrizenbruchdarstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \left(\frac{d}{dt}\right) + 2 & 2\left(\frac{d}{dt}\right) + 1 & 2 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) + 5 & -5\left(\frac{d}{dt}\right) + 1 & 4 \\ 3\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{dt}\right) & \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{N_P} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3\left(\frac{d}{dt}\right) + 1 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) + 1 & \left(\frac{d}{dt}\right) + 3 & 1 \end{pmatrix}}_{Z_P} \boldsymbol{\xi}$$

mit der Übertragungsfunktionsmatrix

$$G_{\mathbf{u}}^{\mathbf{y}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{45s^3 - 51s^2 + 69s - 19}{2(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} & -\frac{3s^4 - 19s^3 + 12s^2 + 28s - 10}{2(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} & -\frac{15s^5 - 8s^4 + 34s^3 + 53s^2 + 49s - 3}{2s(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} \\ -\frac{3(9s^2 + 4s - 7)}{2(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} & \frac{s^3 + 14s - 10}{2(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} & \frac{9s^4 + 11s^3 - 9s^2 + 4s - 5}{2s(2s^3 - 27s^2 + 16s + 1)} \end{pmatrix}.$$

Dieses System ist offensichtlich improper. Die Zerlegung (A.5) von N_P lautet hier

$$N_P\left(\frac{d}{dt}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\Gamma_N^s} \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & & \\ & \left(\frac{d}{dt}\right) & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{S\left(\frac{d}{dt}\right)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{R_N} \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Psi\left(\frac{d}{dt}\right)}.$$

Da N_P spaltenreduziert ist, kann man Gl. (A.7) angeben

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & & & \\ & \left(\frac{d}{dt}\right) & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Hier steht in der letzten Spalte keine Ableitung auf der linken Seite ($m_0 = 1$). Es werden also nur die oberen beiden Gleichungen in die Systemgleichung (A.3a) aufgenommen. Der Vektor \mathbf{x} wird definiert als

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Da $\Psi\left(\frac{d}{dt}\right)$ in der ersten und dritten Zeile Potenzen in $\left(\frac{d}{dt}\right)$ stehen hat, besteht E^T aus der ersten und dritten Zeile der Einheitsmatrix I_4 :

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit liegt die Gleichung (A.3a) vollständig vor:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Nun muss die Ausgangsgleichung (A.3b) erarbeitet werden. Dazu wird die Matrix Z_P dargestellt als

$$Z_P\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3\left(\frac{d}{dt}\right)+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 & & & \\ & \left(\frac{d}{dt}\right) & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\right) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit ihr wird Gleichung (A.9) im Beispiel

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{45}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) - \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) & \frac{9}{4} - \frac{27}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) & -\frac{5}{4} + \frac{15}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) \\ -\frac{27}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{17}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) & -\frac{15}{4}\left(\frac{d}{dt}\right) + \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Damit kann man C und $D\left(\frac{d}{dt}\right)$ nach den Gleichungen (A.10) berechnen und gewinnt die vollständige Darstellung (A.3) des Übertragungssystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

A.2 Überführung der polynomialen Matrizen­darstellung in eine Darstellung durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1113}{8} & -\frac{71}{8} & -\frac{795}{8} & \frac{59}{8} \\ -\frac{27}{4} & \frac{11}{4} & \frac{21}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_C \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{45}{4} & -\frac{43}{8} - \frac{3}{4} \left(\frac{d}{dt}\right) & -\frac{389}{8} - \frac{15}{4} \left(\frac{d}{dt}\right) \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}}_{D\left(\frac{d}{dt}\right)} \mathbf{u}.$$

Man kann nachrechnen, dass $G_{\mathbf{u}}^{\mathbf{y}}(s) = C(sI_4 - A)^{-1}B + D(s)$ gilt. ■

Bisher wurde dargelegt, wie aus einer rechten Matrizenbruchdarstellung eine Darstellung durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in expliziter Form gewonnen werden kann. Häufiger dürfte jedoch das Modell in einer linken Matrizenbruchdarstellung wie bei Gl. (2.1) anfallen. Es gibt zwei Möglichkeiten, das oben dargestellte Verfahren dann zu nutzen. Die eine besteht darin, dass man nach der in Abschnitt 2.2.2 besprochenen Methode zunächst eine rechte Matrizenbruchdarstellung berechnet und darauf das Verfahren anwendet. Zu beachten ist allerdings, dass dabei möglicherweise ein Linksteiler „gekürzt“ wird. Daher wird unter Umständen wichtiges Verhalten des Systems nicht modelliert.

Eine Alternative, die zudem einfacher zu rechnen ist, besteht darin, die Darstellung (A.3) des transponierten Systems

$$\left(G_{\mathbf{u}}^{\mathbf{y}}(s)\right)^T = \left(A_P^{-1}B_P\right)^T = B_P^T \left(A_P^T\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{C}\tilde{\mathbf{x}} + \widetilde{D\left(\frac{d}{dt}\right)}\tilde{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

zu berechnen. Daraus erhält man dann das ursprünglich gesuchte System mit

$$A = \tilde{A}^T, \quad B = \tilde{C}^T, \quad C = \tilde{B}^T \quad \text{und} \quad D\left(\frac{d}{dt}\right) = \widetilde{D\left(\frac{d}{dt}\right)}^T.$$

B Modellbildung für das verschiebliche N -fach Pendel

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Varianten des N -fach-Pendels wiederholt als Beispiel herangezogen. Deshalb sollen an dieser Stelle dessen Bewegungsgleichungen und deren Linearisierung hergeleitet werden.

B.1 Modellierung als ebenes System von Starrkörpern

Betrachtet wird ein verschiebliches N -fach-Kettenpendel im Erdschwerefeld. Das mechanische System enthält einen Wagen der Masse M_0 , der auf einer Bahn, gegeben durch $x_0(w_0)$ und $y_0(w_0)$, verschoben werden kann. An den Wagen wurden N Körper angehängt, die sich um N Drehachsen, welche senkrecht auf der (x, y) -Ebene stehen, drehen können (vgl. Bild B.1). Es wird vorausgesetzt, dass sich der Wagen und die angehängten N Körper als Starrkörper modellieren lassen. Unter diesen Voraussetzungen wird das mechanische Verhalten des Wagens allein durch die Koordinaten $(x_0(w_0), y_0(w_0))$ seines Massenmittelpunktes und seine translatorische Trägheit, also seine Masse M_0 , bestimmt. Das mechanische Verhalten des ν -ten Pendelkörpers wird durch die (x, y) -Koordinaten seines Drehpunktes und seines Massenmittelpunktes bestimmt. Er besitze eine translatorische Trägheit, d. h. eine Masse M_ν , und eine rotatorische Trägheit, d. h. sein Trägheitsmoment $J_{d,\nu}$ um die Drehachse durch den ν -ten Drehpunkt. Die Lage des Massenmittelpunktes soll angegeben werden durch den Abstand s_ν von der ν -ten Drehachse und dem Winkel α_ν zwischen den Verbindungslinien vom Massenmittelpunkt bzw. von der $(\nu + 1)$ -ten Drehachse zur ν -ten Drehachse.

Stellsignale: Schubkraft $f(t)$,
Drehkräfte $d_\nu(t)$ für $\nu = 1, \dots, N$.

Jedes Modell, das dieselben mechanischen Eigenschaften hat, ist dem Starrkörpermodell äquivalent. Damit ist der Übergang auf ein Punktmassenmodell möglich.

Zu diesem Zweck sollen die einzelnen Pendelkörper durch sogenannte „Hanteln“ ersetzt werden. Die Ersatzanordnung Hantel besteht aus zwei Punktmassen m und \tilde{m} , die mit einer masselosen, starren Stange der Länge l verbunden sind. Diese müssen so gewählt werden, dass die wesentlichen physischen Größen M_ν , $J_{d,\nu}$ und s_ν erhalten bleiben. Zweckmäßigerweise beginnt man mit dem letzten bzw. untersten Körper. Bei der Erfüllung der Bedingungen der Gleichheit von Masse, Trägheitsmoment und Lage des Schwerpunkts bleibt ein Freiheitsgrad zurück. Diesen nutzt man um \tilde{m}_N auf die Drehachse zu legen, und man erhält (siehe Bild B.2)

$$l_N = \frac{J_{d,N}}{m_N s_N}, \quad m_N = \frac{M_N^2 s_N^2}{J_{d,N}} \quad \text{und} \quad \tilde{m}_N = M_N - m_N.$$

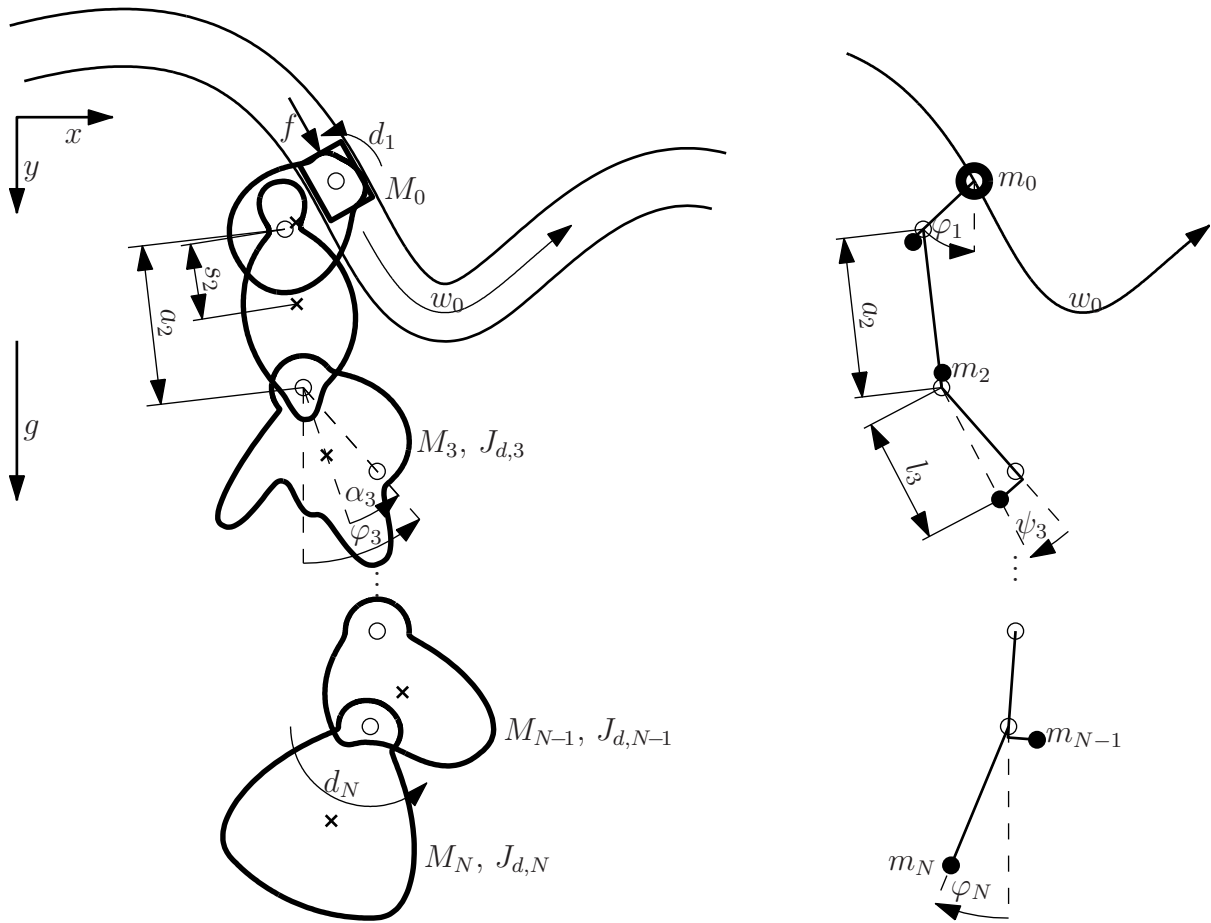


Bild B.1: Übergang vom Starrkörpermodell auf ein Punktmassenmodell

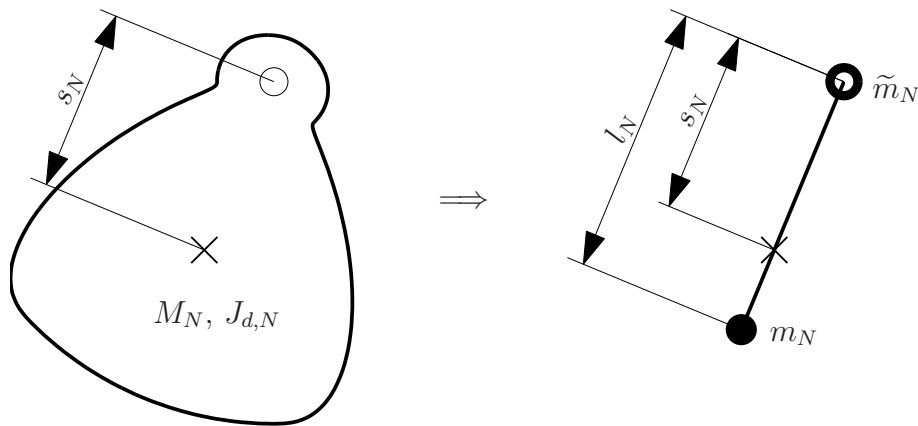


Bild B.2: Übergang auf das Ersatzmodell Hantel für den letzten Pendelkörper

Die nun starr mit dem folgenden Körper verbundene Masse \tilde{m}_N wird diesem zugeschlagen, man erhält neue mechanische Eigenschaften (siehe Bild B.3):

$$\begin{aligned} \bar{M}_{N-1} &= M_{N-1} + \tilde{m}_N, \\ \bar{J}_{d,N-1} &= \bar{J}_{d,N-1} + \tilde{m}_N a_{N-1}^2, \end{aligned}$$

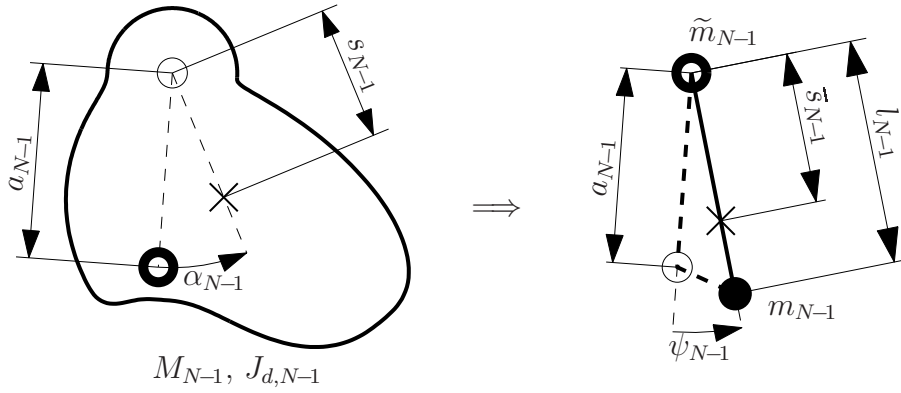


Bild B.3: Übergang auf das Ersatzmodell Hantel für die folgenden Pendelkörper

$$\bar{s}_{N-1} = \frac{\sqrt{(M_{N-1}s_{N-1})^2 + 2M_{N-1}s_{N-1}\tilde{m}_N a_{N-1} \cos \alpha_{N-1} + (\tilde{m}_N a_{N-1})^2}}{\bar{M}_{N-1}}.$$

Dabei erweist es sich als nützlich, die Verbindungslinie zwischen den beiden Drehachsen als Referenzachse zu wählen. Die Verbindungslinie von der ν -ten Drehachse zum neuen Massenmittelpunkt weicht von der Referenzachse um den Winkel ψ_ν ab:

$$\tan \psi_{N-1} = \frac{M_{N-1} s \sin \alpha}{M_{N-1} s \cos \alpha + \tilde{m}_N a_{N-1}}. \quad (\text{B.1})$$

Da der letzte Körper keine zweite Drehachse hat, wird dessen Verbindungslinie von der N -ten Drehachse zum Massenmittelpunkt als Referenzachse gewählt, was $\psi_N = 0$ zur Folge hat.

Ersichtlich lässt sich diese Vorgehensweise bis zum ersten Pendelkörper fortsetzen. Dessen Masse \tilde{m}_1 wird dem Wagen zugeschlagen, so dass sich die Ersatzmasse des Wagens zu

$$m_0 = M_0 + \tilde{m}_1$$

ergibt. Bei dem dabei erhaltenen Punktmassen-System handelt es sich nicht um eine Vereinfachung im Sinne einer Vernachlässigung. Vielmehr hat es die gleichen mechanischen Eigenschaften wie das ursprüngliche System aus Starrkörpern.

Auch wenn die Pendelkörper nicht in einer Kette aneinander hängen, sondern in einer Baumstruktur, wo ein Pendelkörper mehrere nachfolgende an unterschiedlichen Gelenken haben kann, ist das Verfahren anwendbar. Man beginnt dann an sämtlichen freien Enden, setzt fort bis zur Karre. Wichtig für das Verfahren ist lediglich, dass jeder Strang von Pendelkörpern frei endet.

Der Vorteil der Formulierung als Modell von Punktmassen besteht darin, dass sich die kinetische Energie kürzer formulieren lässt. Ausgehend vom Punktmassenmodell, sollen nun die Bewegungsgleichungen hergeleitet werden.

B.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfolgt nach dem d'Alembertschen Prinzip in Lagrangescher Fassung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (\text{B.2})$$

mit der kinetischen Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ als Funktion der Lagrangeschen Koordinaten \mathbf{q} und den verallgemeinerten Kräften \mathbf{Q} . Die Lagrangeschen Koordinaten sind die Winkel φ der Hanteln in der Ebene und der Bahnparameter w_0 der durch $x(w_0)$ und $y(w_0)$ gegebenen Bahn des Wagens,

$$\mathbf{q} = (w_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_N)^T. \quad (\text{B.3})$$

Da es sich um ein ebenes Problem handelt, liegt es nahe, das Problem unter Zuhilfenahme der komplexen Zahlen zu beschreiben. Dafür wird die x - y -Ebene in die Gaußsche Zahlenebene abgebildet. Um die Winkel ϕ , ψ als Winkeln von komplexen Zahlen zu erhalten, soll die reelle Achse der negativen y -Achse, und die imaginäre Achse der x -Achse entsprechen. Ein Punkt (x, y) wird in einer komplexen Zahl s wie folgt zusammengefasst:

$$s = y + jx \quad \text{bzw.} \quad \Re(s) = y \quad \text{und} \quad \Im(s) = x. \quad (\text{B.4})$$

B.2.1 Formulierung der kinetischen Energie

Aus (B.4) folgt die (komplexe) Position s_0 des Wagens

$$s_0(w_0) = y(w_0) + jx(w_0).$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sowohl $x(w_0)$ als auch $y(w_0)$ wenigstens zweimal differenzierbar sind. Damit ist die Geschwindigkeit des Wagens zu

$$\frac{d}{dt} s_0(w_0) = \dot{w}_0 \frac{\partial s_0(w_0)}{\partial w_0} = \dot{w}_0 s'_0(w_0),$$

wobei der Strich ' von jetzt an die Ableitung nach w_0 symbolisiert. Der zurückgelegte Weg S des Wagens ergibt sich damit zu

$$S(w_0(t)) = \int_0^t |\dot{s}(\tau)| d\tau = \int_0^{w_0} |s'_0(w)| dw$$

und das Quadrat der Geschwindigkeit des Wagens

$$\left(\frac{d}{dt} S(w_0) \right)^2 = \dot{w}_0^2 s'_0(w_0) \overline{s'_0(w_0)},$$

wobei der Überstrich den konjugiert komplexen Wert anzeigen soll. Die Lage der k -ten Ersatzpunktmasse für $k = 1, 2, \dots, N$ ist in der x - y -Ebene gegeben durch

$$x_k = x_0(w_0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \sin \varphi_i + l_k \sin(\varphi_k + \psi_k)$$

$$y_k = y_0(w_0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cos \varphi_i + l_k \cos(\varphi_k + \psi_k)$$

und in komplexer Schreibweise durch

$$s_k = s_0(w_0) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i e^{j\varphi_i} + l_k e^{j(\varphi_k + \psi_k)}.$$

Versammelt man alle die Positionen aller Ersatzpunktmassen in einem komplexen Vektor

$$\mathbf{s} = (s_0 \ s_1 \ \dots \ s_N)^T,$$

so ist dieser unter Zuhilfenahme der Matrixschreibweise

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & l_1 e^{j\psi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & l_2 e^{j\psi_2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & a_2 & l_3 e^{j\psi_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} & l_N e^{j\psi_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(w_0) \\ e^{j\varphi_1} \\ e^{j\varphi_2} \\ e^{j\varphi_3} \\ \vdots \\ e^{j\varphi_N} \end{pmatrix} =: L \begin{pmatrix} s_0(w_0) \\ e^{j\varphi} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

wobei vereinbarungsgemäß $\psi_N = 0$ gilt. Der Vorteil dieser Schreibweise mit der komplexen Matrix $L \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}$ ist, dass sie mühelos eine Verallgemeinerung auf Baumstrukturen zulässt. In den Zeilen kann man durch Nullsetzen einzelner Elemente detailliert festlegen, über welche Pendelkörper die jeweilige Ersatzpunktmasse mit dem Wagen verbunden ist. Auch wenn die Pendelkörper mehr als ein weiterführendes Gelenk haben, lässt sich das problemlos berücksichtigen, indem man weitere Längen a einführt, die ggf. komplex sein können, falls die beiden Gelenke nicht auf einer Geraden liegen. Die Geschwindigkeiten der Ersatzpunktmassen ergeben sich zu

$$\dot{\mathbf{s}} = L \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ j\dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} s'_0(w_0) \\ e^{j\varphi} \end{pmatrix} = L \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ j e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Darin sollen die spitzen Klammern $\langle \ \rangle$ eine Diagonalmatrix symbolisieren. Zum Schluss wird noch eine Massendiagonalmatrix

$$M := \langle m_0 \ m_1 \ \dots \ m_N \rangle$$

eingeführt. Damit liegt nun alles bereit, um mit (B.3) die kinetische Energie T anzugeben.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \overline{\dot{\mathbf{s}}}^T M \dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} (\dot{w}_0 \ \dot{\varphi}^T) \left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -j e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ j e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{T}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{B.6a})$$

mit

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}) = \left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -j e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ j e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}. \quad (\text{B.6b})$$

B.2.2 Verallgemeinerte Kräfte

Als Zweites soll die rechte Seite von Gl. (B.2), die verallgemeinerten Kräfte Q , bestimmt werden. Dafür wird die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte in Abhängigkeit von den virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{q}$ in den Lagrangeschen Koordinaten gesucht:

$$\delta A^e = \sum_{\nu=0}^N Q_\nu \delta q_\nu = \delta \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} := \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}.$$

Die virtuelle Arbeit setzt sich zusammen aus der virtuellen Arbeit δA_g^e der Schwerkraft und der virtuellen Arbeit der erregenden Kräfte f und d_ν . Die Kraft f wirke auf die Karre entlang der Bahn $S(w_0)$. Damit ergibt sich die virtuelle Kraft auf die Karre zu

$$\delta A_f^e = f \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2} \delta w_0 = f |s'(w_0)| \delta w_0.$$

Die Drehmomente d_ν wirken zwischen dem ν -ten und dem $(\nu-1)$ -ten Pendelkörper, beispielsweise durch an den Körpern befestigte Motoren. Daher wirke das Drehmoment auf den ν -ten Pendelkörper positiv und auf den $(\nu-1)$ -ten Pendelkörper entgegengesetzt. Das führt auf die virtuellen Kräfte

$$\delta A_{d_\nu}^e = d_\nu (\delta \varphi_\nu - \delta \varphi_{\nu-1}).$$

Fasst man die Kräfte in Matrixschreibweise zusammen, so erhält man die virtuelle Arbeit der erregenden Kräfte:

$$\delta A_{fd}^e = \delta \mathbf{q}^T \underbrace{\begin{pmatrix} |s'(w_0)| & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K_\delta} \begin{pmatrix} f \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Auch hier ist eine Erweiterung auf eine Baumstruktur ohne Weiteres möglich, da man über die Matrix K_δ im Einzelnen festlegen kann, welches Motormoment d_ν zwischen welchen Pendelkörpern wirkt. Der Schwerkraftanteil ergibt sich durch Summierung über alle Körper mit (B.5) zu

$$\begin{aligned} \delta A_g^e &= \sum_{\nu=0}^N \left(\sum_{i=0}^N m_i g \frac{\delta y_i}{\delta q_\nu} \right) \delta q_\nu = \sum_{\nu=0}^N \left(\sum_{i=0}^N m_i g \Re \left[\frac{\delta s_\nu}{\delta q_\nu} \right] \right) \delta q_\nu \\ &= g \delta \mathbf{q}^T \Re \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} = g \delta \mathbf{q}^T \Re \left[\left\langle s_0'(w_0) \right\rangle_{j e^{j\varphi}} \right] L^T \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die Schwerkraft nur in y -Richtung wirkt. Addiert man die beiden virtuellen Teilkräfte, so erhält man den Vektor Q der verallgemeinerten Kräfte:

$$\delta A^e = \delta \mathbf{q}^T \left[K_\delta \begin{pmatrix} f \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} + g \cdot \Re \left[\left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle L^T \right] \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \right] = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}. \quad (\text{B.8})$$

Hinzu kommen eventuell noch Reibkräfte. Beispielsweise kann eine viskose Dämpfung entlang der Bahn bzw. in den Gelenken einbezogen werden, indem man die erregenden Kräfte modifiziert:

$$\mathbf{Q} = K_\delta \left[\begin{pmatrix} f \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} - \left\langle \begin{matrix} c_0^r \\ \vdots \\ c_N^r \end{matrix} \right\rangle K_\delta^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_N \end{pmatrix} \right] + g \cdot \Re \left[\left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle L^T \right] \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

mit den Reibkoeffizienten c_\bullet^r .

B.2.3 Abschließende Formulierung der Bewegungsgleichungen

Als Letztes soll die linke Seite der Bewegungsgleichungen (B.2) sukzessive berechnet werden. Mithilfe der Formulierung (B.6) der kinetischen Energie erhält man:

$$\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} (\mathcal{T}(\mathbf{q}) + \mathcal{T}(\mathbf{q})^T) \dot{\mathbf{q}}.$$

Dabei ist die Matrix $\frac{1}{2} (\mathcal{T}(\mathbf{q}) + \mathcal{T}(\mathbf{q})^T)$ wieder rein reell, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathcal{T}(\mathbf{q}) + \mathcal{T}(\mathbf{q})^T) &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle L^T M \overline{L} \left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \overline{\left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle} \right] \\ &= \Re \left[\left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right] = \Re[\mathcal{T}(\mathbf{q})] =: H(\mathbf{q}). \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Die totale Ableitung nach der Zeit lautet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(H(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) = H(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{T}(\mathbf{q}) + \frac{d}{dt} \mathcal{T}(\mathbf{q})^T \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.11a})$$

mit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}(\mathbf{q}) = \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \overline{s''_0(w_0)} \\ -e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s'_0(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} \overline{s'_0(w_0)} \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \overline{L}^T ML \left\langle \begin{matrix} s''_0(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle. \quad (\text{B.11b})$$

Der zweite Teil der linken Seite wird errechnet aus Gl. (B.6):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\begin{pmatrix} \dot{w}_0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right)^T \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left[\left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle L^T M \bar{L} \left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right] \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

Zum Schluss sollen noch alle Terme in Gl. (B.11) und (B.12), die nicht $\ddot{\mathbf{q}}$ enthalten, zusammen gefasst werden:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{T}(\mathbf{q}) + \frac{d}{dt} \mathcal{T}(\mathbf{q})^T \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ je^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle L^T M \bar{L} \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right] \begin{pmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle + \overline{\left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle} \right] \begin{pmatrix} \dot{w}_0^2 \\ \dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} \\
 &= \Re \left[\left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0) \\ -je^{-j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \bar{L}^T M L \left\langle \begin{matrix} s_0''(w_0) \\ -e^{j\varphi} \end{matrix} \right\rangle \right] \begin{pmatrix} \dot{w}_0^2 \\ \dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} := R(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^2. \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

Darin bedeutet das 2 an einem Vektor, dass dessen Elemente quadriert werden. Mit Gl. (B.10) und Gl. (B.13) erscheinen die Bewegungsgleichungen (B.6) in abschließender Form:

$$\boxed{H(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + R(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{Q}}. \quad (\text{B.14})$$

B.3 Gleichgewichtslagen und Linearisierung

Die Gleichgewichtslagen \mathbf{q}^{ss} sind definiert durch $\dot{\mathbf{q}}^{\text{ss}} \equiv 0$. Setzt man in Gl. (B.14) $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, so erhält man als Bedingung für eine Gleichgewichtslage $\mathbf{Q} = 0$, bzw. mit Gl. (B.8)

$$K_\delta \cdot \begin{pmatrix} f^{\text{ss}} \\ d_1^{\text{ss}} \\ \vdots \\ d_N^{\text{ss}} \end{pmatrix} = -g \cdot \Re \left[\left\langle \begin{matrix} s_0'(w_0^{\text{ss}}) \\ je^{j\varphi^{\text{ss}}} \end{matrix} \right\rangle L^T \right] \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix}.$$

Darin symbolisiert $^{\text{ss}}$ die Werte der Gleichgewichtslage. Mit der Matrix K_δ aus Gl. (B.7) und der Matrix L aus Gl. (B.5) erhält man in reeller Schreibweise:

$$f^{\text{ss}} \sqrt{x_0'(w_0^{\text{ss}})^2 + y_0'(w_0^{\text{ss}})^2} = g y_0'(w_0^{\text{ss}}) \sum_{k=0}^N m_k$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots = \vdots \\
 d_\nu^{\text{ss}} - d_{\nu+1}^{\text{ss}} &= g \left(l_\nu m_\nu \sin(\varphi_\nu^{\text{ss}} + \psi_\nu) + a_\nu \sin \bar{\varphi}_\nu \sum_{k=\nu+1}^N m_k \right) \\
 & \vdots = \vdots \\
 d_N^{\text{ss}} &= gl_N m_N \sin(\varphi_N^{\text{ss}}) \quad , \text{ wobei } \psi_N = 0 .
 \end{aligned}$$

Falls die erregenden Kräfte verschwinden ($f^{\text{ss}} \equiv 0$ und $d_\nu^{\text{ss}} \equiv 0$), lauten die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 y_0'(w_0^{\text{ss}}) &= 0 \\
 & \vdots = \vdots \\
 \tan \varphi_\nu^{\text{ss}} &= - \frac{l_\nu m_\nu \sin \psi_\nu}{l_\nu m_\nu \cos \psi_\nu + a_\nu \sum_{k=\nu+1}^N m_k} \quad (\text{B.15}) \\
 & \vdots = \vdots \\
 \varphi_N^{\text{ss}} &= 0 .
 \end{aligned}$$

Bei der Linearisierung der Bewegungsgleichung (B.14) um die zuvor bestimmte Gleichgewichtslage entsteht ein Gleichungssystem der Art

$$\underbrace{H(\mathbf{q}^{\text{ss}})}_{A_2} \ddot{\mathbf{q}} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{\text{ss}} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{\text{ss}}}}}_{-A_0} \tilde{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{\text{ss}} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{\text{ss}}}}}_{-A_1} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{\text{ss}} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^{\text{ss}}}}}_{-B_0} \tilde{\mathbf{u}} .$$

Dabei tritt die Matrix A_1 bei Vernachlässigung von Dämpfung, wie in Gl. (B.8), nicht auf. Allenfalls die Modellierung einer Reibung kann zu einem $A_1 \neq 0$ führen. So ergäbe sich bei der viskosen Dämpfung wie in Gleichung (B.9)

$$A_1 = K_\delta \begin{pmatrix} c_0^r \\ \vdots \\ c_N^r \end{pmatrix} K_\delta^T . \quad (\text{B.16})$$

Des Weiteren erhält man mit Gl. (B.8)

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -g \cdot \left\langle \Re \left[\begin{pmatrix} s_0''(w_0^{\text{ss}}) \\ -e^{j\varphi^{\text{ss}}} \end{pmatrix} L^T \right] \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left(\begin{array}{c|ccc} -gy_0''(w_0^{\text{ss}}) \sum_{k=0}^N m_k & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & g \left(l_\nu m_\nu \cos(\varphi_\nu^{\text{ss}} + \psi_\nu) + a_\nu \cos \varphi_\nu^{\text{ss}} \sum_{k=\nu+1}^N m_k \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{array} \right) \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

und abschließend

$$B_0 = - \frac{\partial}{\partial(f, \dots, d_\nu, \dots)} (Q) \Big|_{\substack{q=q^{ss} \\ u=u^{ss}}} = -K_\delta . \quad (\text{B.18})$$

Damit liegen die linearisierten Bewegungsgleichungen in der in dieser Arbeit vielfach verwendeten Form

$$A_2 \ddot{\tilde{q}} + A_1 \dot{\tilde{q}} + A_0 \tilde{q} + B_0 \mathbf{u} = 0$$

vor.

C Kondition der Matrix M

Im Abschnitt 3.1 (Seite 23) wurde behauptet, dass die bei der Berechnung Hermite-Interpolation entstehenden linearen Gleichungssysteme insbesondere bei hoher Ordnung n der Ansatzpolynome schlecht konditioniert seien. Diese Behauptung soll untermauert werden.

Die Überlegung schließt direkt an die Untersuchungen in Abschnitt 3.1.3 an. Da dort die Matrix M in Gleichung (3.12) und deren Inverse symbolisch vorliegen, lässt sich die Kondition des Problems untersuchen, siehe z.B. [ZF86], § 25.5. Um die Rechnung einfach zu halten, soll zur Abschätzung der Kondition eine Konditionszahl, nämlich

$$\text{cond}(M) = \|M\|_\infty \|M^{-1}\|_\infty$$

verwendet werden. Da in der Matrix M , siehe (3.11), jedes Element einer Zeile größer ist als das der vorhergehenden, ergibt sich die unendlich-Norm $\|M\|_\infty$ der Matrix M durch Summation der ersten Zeile zu

$$\|M\|_\infty = \sum_{\kappa=0}^n \prod_{\lambda=0}^{n-1} (n+1+\kappa-\lambda) = n! \sum_{\kappa=0}^n \binom{n+1+\kappa}{n} = n! \left[\binom{2n+2}{n+1} - 1 \right].$$

Die Norm der Inversen ist wegen $M^{-1} = M_p^{-1} M_{b2}^{-1} M_f^{-1} = M_{pb}^{-1} M_f^{-1}$ per definitionem

$$\|M^{-1}\|_\infty = \max_{i=0 \dots n} \sum_{j=0}^n \frac{1}{(n-j)!} \sum_{\kappa=0}^{\min(i,j)} \binom{n+j-\kappa}{j-\kappa} \binom{n-\kappa}{n-i}.$$

In Tabelle C.1 sind die Konditionszahlen für $n = 1 \dots 24$ berechnet. Man sieht, dass

n	cond M	n	cond M	n	cond M	n	cond M
1	20	7	1.7121 10^{13}	13	9.807 10^{27}	19	1.2044 10^{44}
2	874	8	3.7394 10^{15}	14	4.0046 10^{30}	20	7.2198 10^{46}
3	54027	9	9.0314 10^{17}	15	1.7259 10^{33}	21	4.4893 10^{49}
4	5.1731 10^6	10	2.542 10^{20}	16	8.1459 10^{35}	22	2.9777 10^{52}
5	6.1215 10^8	11	7.7375 10^{22}	17	4.0281 10^{38}	23	2.0414 10^{55}
6	9.5519 10^{10}	12	2.668 10^{25}	18	2.1579 10^{41}	24	1.4843 10^{58}

Tabelle C.1: Tabelle der Konditionszahlen von M

die Zahlen auch bei einer recht kleinen Anzahl n an festzulegenden Ableitungen sehr groß werden. Dies liefert einen Hinweis darauf, wie schlecht die Matrix M schon bei kleineren n konditioniert ist.

Literaturverzeichnis

- [AT07] ACETO, L ; TRIGIANTE, D.: Pascal matrix, classical polynomials and difference equations. In: ELAYDI, S. et a. (Hrsg.): *Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials*, World Scientific, 2007, S. 1–16. – ISBN 981-270-643-7, 978-981-270-643-0 [3.1.3](#)
- [BSMM00] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, A.K. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. überarbeitet und erweiterte Auflage. Thun, Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 2000. – ISBN 3-8171-2005-2 [3.1](#), [5.4](#)
- [CV93] CALL, Gregory S. ; VELLEMAN, Daniel J.: Pascal's Matrices. In: *The American mathematical monthly* 100 (1993), Nr. 4, S. 372–376 [3.1.3](#)
- [Deu04] DEUTSCHER, Joachim: *Flachheitsbasierter Entwurf von Mehrgrößenregelungen mittels linearer Differentialoperatordarstellung*. Aachen : Shaker Verlag, 2004. – ISBN 3-8322-2811-X [1.2](#)
- [Hor63] HOROWITZ, Isaac M.: *Synthesis of Feedback Systems*. New York and London : Academic Press, 1963 [1.2](#)
- [HP98] HOU, M. ; PATTON, R. J.: Input Observability and Input Reconstruction. In: *Automatica* 34 (1998), Nr. 6, S. 789–794 [6.5](#)
- [HZ05] HUI, Stephen ; ZAK, Stanislaw H.: Observer Design for Systems with unknown Inputs. In: *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 15 (2005), Nr. 4, S. 431–446 [6.5](#)
- [Jur64] JURY, E. I.: *Theory and Application of the z-Transform Method*. New York, London, Sydney : John Wiley & Sons, Inc., 1964 [1.2](#), [5.1](#), [5.1](#)
- [Kai80] KAILATH, Thomas: *Linear Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1980 [1.2](#), [2.2.1](#), [4.2.1](#), [5.2.2](#), [A.1](#), [A.1](#), [A.2](#)
- [Kre99] KREISSELMEIER, Gerhard: Struktur mit zwei Freiheitsgraden. In: *Automatisierungstechnik* 47 (1999), Nr. 6, S. 266–269 [1.2](#)
- [Lin09] LINDERT, Sven-Olaf: *Beiträge zur Steuerung und Regelung von mehrvariablen linearen zeitinvarianten Systemen in polynomialer Darstellung*. Düsseldorf : VDI Verlag, 2009 (Fortschritt-Bericht VDI Reihe 8 1164). – ISBN 978-3-18-516408-8 [1.3](#)
- [LK95] LEVENTIDES, J. ; KARCANIAS, N.: Sufficient Conditions for Arbitrary Pole Assignment by Constant Decentralized Output Feedback. In: *Math. Control Signals Systems* 8 (1995), S. 222–240 [4.4.2](#)

- [LK07] LEVENTIDES, J. ; KARCANIAS, N.: Decentralizes dynamic pole assignment with low-order compensators. In: *Journal of Mathematical Control and Information* 24 (2007), S. 395–410 [4.4.2](#)
- [LR03] LAMPE, Bernhard P. ; ROSENWASSER, Efim N.: Strukturierte Polvorgabe für PMD Prozesse. In: *Automatisierungstechnik* 51 (2003), S. 119–127 [4.2](#)
- [LR07] LAMPE, Bernhard ; ROSENWASSER, Efim: Allgemeine Polvorgabe für zeitdiskrete Systeme. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 634–640 [4.3](#)
- [Lue71] LUENBERGER, David G.: An Introduction to Observers. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (1971), Nr. 6, S. 596–602 [6.1.5](#)
- [Mac33] MACDUFFEE, C. C.: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 2: The Theory of Matrices*. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1933 [1.2](#), [2.2.1](#), [2.3](#), [6.5](#)
- [Mik57] MIKUSINSKI, Jan ; BÖGEL, K. (Hrsg.) ; HEINRICH, H. (Hrsg.): *Operatorenrechnung*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957 [2.1](#), [5.1](#)
- [Pap96] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung*. 2. Auflage. München, Wien : R. Oldenbourg Verlag, 1996. – ISBN 3-486-23775-6 [3.2](#)
- [Rai94] RAISCH, J.: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. München, Wien : R. Oldenbourg Verlag, 1994. – ISBN 3-486-21796-8 [2.2.1](#)
- [Rei06] REINSCHKE, Kurt: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. – ISBN 3-540-21886-6 [1.2](#), [2.2.1](#), [3](#), [4.4.1](#), [5.1](#), [5.2.1](#), [5.2.3](#), [5.3](#), [6.1.1](#), [6.1.3](#), [6.2](#), [6.1](#)
- [Rei07] REINSCHKE, Kurt: Eingangsbeobachtbarkeit und -rekonstruktion für LTI-Übertragungssysteme in polynomialer Darstellung. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 1, S. 20–27 [6.1.1](#), [6.5](#)
- [RF04] REINSCHKE, Kurt ; FRITSCHKE, Oliver: Geometrischer Zugang zur Polzuweisbarkeit mittels konstanter Ausgangsrückführungen. In: *Automatisierungstechnik* 52 (2004), Nr. 9, S. 432–439 [4.4.2](#), [4.4.3](#)
- [RL97] ROSENWASSER, Y. N. ; LAMPE, B. P.: *Digitale Regelung in kontinuierlicher Zeit*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1997 [1.2](#), [5.1](#), [6.5](#)
- [RL06] ROSENWASSER, Efim N. ; LAMPE, Bernhard P.: *Multivariable Computer-controlled Systems: A Transfer Function Approach*. London : Springer-Verlag, 2006 [2.3](#), [3.3](#), [A.1](#)
- [RL07] REINSCHKE, Kurt ; LINDERT, Sven-Olaf: Basisgrößen und ihre Nutzung zur Steuerung und Regelung von MIMO-LTI-Regelstrecken. In: KUGI, A. (Hrsg.) ; LOHMANN, B. (Hrsg.): *Tagungsband GMA-Fachausschuss 1.40*, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, 23. bis 26.09 2007, S. 342–375. – ISBN 978-3-9502451-0-3 [2.3](#), [5.2.3](#)

-
- [Ros70] ROSENBROCK, H. H.: *State-space and Multivariable Theory*. London : Nelson, 1970 [1.2](#), [3.3](#), [4.2.1](#)
- [Rud03] RUDOLPH, Joachim: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Aachen : Shaker Verlag, 2003. – ISBN 3-8322-1765-7 [1.2](#), [6.5](#)
- [RWW03] RUDOLPH, J. ; WINKLER, J. ; WOITTENNEK, F.: *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems: Examples and Computer Exercises from Various Technological Domains*. Aachen : Shaker-Verlag, 2003 [3.1](#)
- [Sch41] SCHMIDT, Hermann: Regelungstechnik, die technische Aufgabe und ihre wirtschaftliche, sozialpolitische und kulturpolitische Auswirkung. In: *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 85 (1941), Nr. 4, S. 81–88 [1.1](#)
- [SZ81] SCHMIDT, W. ; ZEITZ, M.: Grenzübergang Beobachter – Differenzierer. In: *Regelungstechnik* 29 (1981), Nr. 8, S. 270–274 [6.1.5](#)
- [Tsi54] TSIEN, H. S.: *Engineering Cybernetics*. New York, London, Toronto : McGraw-Hill Publishing Company, 1954 [1.2](#)
- [Wer92] WERNER, Jochen: *Aufbaukurs Mathematik*. Bd. 32: *Numerische Mathematik 1*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1992. – ISBN 3-528-0723206 [3.1](#)
- [Woi07] WOITTENNEK, Frank: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentriertem Stelleingriff*. Aachen : Shaker Verlag, 2007. – ISBN 978-3-8322-6138-2 [6.5](#)
- [Wol74] WOLOVICH, W. A.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 11: *Linear Multivariable Systems*. New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1974 [1.2](#), [2.2.1](#), [2](#), [A.1](#)
- [ZF86] ZURMÜHL, R. ; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*. Bd. 2: *Numerische Methoden*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer-Verlag, 1986 [C](#)