

Ein Konzept zur numerischen Berechnung
inkompressibler Strömungen auf Grundlage einer
diskontinuierlichen Galerkin–Methode in Verbindung
mit nichtüberlappender Gebietszerlegung

Von der Fakultät Maschinenwesen
der
Technischen Universität Dresden
zur

Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)
angenommene Dissertation

Dipl.-Ing. Müller, Hannes
geb. am: 14.04.1969 in: Berlin

Tag der Einreichung: 11.05.1999
Tag der Verteidigung: 27.09.1999

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Grundmann
Prof. Dr. rer. nat. habil. G. Lube
Dr.-Ing. W. Kordulla

.....
Prof. Dr.-Ing. habil. H. Goldhahn
Vorsitzender der Prüfungskommission

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit am Institut für Luft- und Raumfahrttechnik der TU Dresden. Bei Herrn Prof. R. Grundmann bedanke ich mich für die stetig erfahrene Förderung, den mir eingeräumten Freiraum sowie das entgegengebrachte Vertrauen.

Die Anregung zu dieser Thematik habe ich von Herrn Dr. A. Auge erhalten. Für seine vielfältigen Hinweise sowie die enge Zusammenarbeit in der Anfangsphase gilt Ihm mein besonderer Dank.

In erheblichem Maße trugen auch die zahlreichen Diskussionen mit Herrn Prof. G. Lube und Dr. F.-C. Otto vom Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen zum Gelingen der Arbeit bei.

Weiterhin danke ich den Mitarbeitern, die mir hilfreich und beratend zur Seite standen. Besonders hervorheben möchte ich hierbei die Herrn Dr. M. Rösler, Dr. K.-P. Neitzke und Dipl.-Ing. R. Gritzki, mit denen mich eine herzliche Arbeitsatmosphäre verband.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen Gutachtern für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse und Ihre nützlichen Hinweise.

Förderung habe ich durch das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie unter den Kennzeichen 0329016D und 0329016G erfahren.

Dresden, im September 1999

Hannes Müller

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	1
1 Einleitung	5
1.1 Vorbetrachtung	5
1.2 Einordnung der Arbeit	7
2 Mathematisch–physikalische Modellierung	9
2.1 Grundannahmen	9
2.2 Bilanzgleichungen	9
2.3 Dimensionslose Darstellung	11
2.4 Turbulenzmodell	12
2.5 Verkürzte Schreibweise	15
2.6 Randbedingungen	16
2.7 Wandfunktionen	20
2.8 Kräfte und Flüsse	26
3 Numerisches Modell	27
3.1 Systematisierung	27
3.2 Zeitliche Diskretisierung	29
3.2.1 Diskontinuierliche Galerkin–Methode	29
3.2.2 Konstanter Zeitansatz	33
3.2.3 Linearer Zeitansatz	34
3.3 Gebietszerlegung	38
3.4 Diskrete Raum–Zeit Formulierung	42
3.4.1 Approximation	42
3.4.2 Randbedingungen	45
3.4.3 Least–squares Stabilisierung	48
3.4.4 Konsistenzsicherung	52
3.4.5 Drucknormierung	53
3.4.6 Zusammenstellung der Gleichungen	53
3.4.7 Auswertung der zeitlichen Integrale	54
3.5 Diskreter Gebietszerlegungsalgorithmus	55
3.6 Besonderheiten des Turbulenzmodells	59
3.6.1 Innere Berandung	59
3.6.2 Turbulente Viskosität	61
3.7 Linearisierung	62
3.8 Kopplung der Gleichungen	64
3.9 Eigenschaften der Gleichungssysteme	66

3.10	Berechnung von Randintegralen	67
4	Programmsystem ParallelNS	71
4.1	Überblick	71
4.2	Parallelisierung	71
4.2.1	Implementierung	71
4.2.2	Bewertungskriterien	74
4.3	Weitere Merkmale	76
5	Numerische Untersuchungen und Anwendung	78
5.1	Vorbemerkung	78
5.2	Konvektions–Diffusionsgleichung	78
5.2.1	Berechnung des stationären Zustands mit DG(0)	79
5.2.2	Zeitgenaue Rechnung mit DG(1)	84
5.3	Laminare Strömung	88
5.3.1	Zylinderumströmung	88
5.3.2	Periodische Randbedingung mit Drucksprung	95
5.4	Turbulente Strömung	98
5.4.1	Homogene Turbulenz nach einem Gitter	98
5.4.2	Ebene Kanaleinlaufströmung	99
5.4.3	Auftriebsinduzierte Strömung	104
6	Zusammenfassung	109
	Literaturverzeichnis	111
	Anhang	
A	Dimensionslose Größen	119
B	DG_N^{φ,β}(1)–Algorithmus	120
C	Weitere numerische Ergebnisse	122
C.1	Konvektions–Diffusionsgleichung (zu 5.2)	122
C.2	Zylinderumströmung (zu 5.3.1)	129
C.3	Periodische Randbedingung (zu 5.3.2)	134
C.4	Kanaleinlaufströmung (zu 5.4.2)	136
C.5	Auftriebsinduzierte Strömung (zu 5.4.3)	140

Symbolverzeichnis

Formelzeichen

a	Temperaturleitkoeffizient
\mathbf{a}	linearisiertes Geschwindigkeitsfeld
$A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot),$ $F(\cdot), L(\cdot)$	Funktionale der Semidiskretisierung
$\mathcal{A}(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)$	zusammengefaßte Funktionale der Semidiskretisierung
$\mathbf{A}(\cdot), \mathbf{F}(\cdot)$	Funktionale der diskreten Probleme
\mathbf{A}, \mathbf{B}	Matrix
\mathbf{b}	vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld
c	Reaktionskoeffizient
c_p	spezifische Wärmekapazität
C	Konstante
C^k	Raum der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen
d	Dimension
$\mathbf{D}(\cdot)$	Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten
e	Fehler
E_{th}	theoretische parallele Effizienz
\mathcal{E}	räumliches Randelement
f, \mathbf{f}	Quellterm (skalar, vektorwertig)
\mathbf{F}_p	Druckkraft
\mathbf{F}_ν	Reibungskraft
\mathbf{F}, \mathbf{L}	Vektor
\mathbf{g}	Beschleunigungsvektor
G	produzierte turbulente kinetische Energie infolge von Auftrieb
$G_L(\cdot)$	Lumping-Operator
h	Enthalpie
h	räumlicher Diskretisierungsparameter
H^1	Sobolev-Raum
\dot{H}	Enthalpiestrom
I	Zeitintervall
$\mathcal{I}(\cdot)$	zeitlicher Integrationsoperator
\mathbf{I}	Einheitstensor
k	turbulente kinetische Energie
\mathcal{K}	räumliches Element
l	Länge
l_ε	turbulenter Makromaßstab
L_p	parallele Lastverteilung
\mathcal{L}	Differentialoperator

\dot{m}	Massestrom
\mathbf{n}	Normalenvektor
N	Iterationsanzahl (N_L : Linearisierung, N_{DD} : Gebietszerlegung)
N	Anzahl der Knoten (N_k), Elemente (N_{el}) und Teilgebiete (N_{sd})
\mathbf{N}	Menge der Knoten der Vernetzung
\mathcal{N}	Knoten der Diskretisierung
\mathbb{N}	Raum der natürlichen Zahlen
p	Druck
p	Anzahl der Prozesse
P	Rand der Raum–Zeit Schicht
P_k	produzierte turbulente kinetische Energie infolge von Dissipation
P_n	Polynome vom Grad n
\mathcal{P}	Raum–Zeit Randelement
Pe	Péclet–Zahl
Pr	Prandtl–Zahl
q	Testfunktion des Drucks
\dot{q}	flächenspezifischer Wärmestrom
\dot{q}^V	volumenspezifische Wärmestromdichte
Q	Raum–Zeit Schicht
\mathcal{Q}	Raum–Zeit Element
\dot{Q}	Wärmestrom
\mathbb{R}	Raum der reellen Zahlen
R_u, R_ϑ	Konstanten im Wandgesetz
Ra	Rayleigh–Zahl
Re	Reynolds–Zahl
S_e	zu erwartende parallele Geschwindigkeitserhöhung
t	Zeit
T	Endzeitpunkt
\tilde{T}	dimensionsbehaftete Temperatur
\mathbf{T}	CPU–Zeit
\mathcal{T}_h	räumliche Zerlegung
\mathbf{v}	Testfunktion der Geschwindigkeit
Tu	Turbulenzgrad
$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$	Geschwindigkeitsvektor
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
U, V, W	Funktionsräume
\mathbf{w}	Hilfsvektor
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$	Ortsvektor
X, Y, Z	Platzhalter
y	senkrechter Wandabstand
\mathcal{Z}	Funktion im Kontext der Gebietszerlegung
α	Wärmeübergangskoeffizient
β	isobarer Volumenausdehnungskoeffizient

γ	Konstante im Gebietszerlegungsalgorithmus
Γ	Gebietsrand
δ	GLS–Stabilisierungsparameter
δ_w	Wandabstand der Schnittstelle Wandfunktion/Turbulenzmodell
ϵ	Diffusionskoeffizient
ε	turbulente Dissipation
ζ	Regularisierungsparameter
η	Ansatzfunktion
ϑ	Temperatur
κ	von–Kármán–Konstante
λ	Wärmeleitkoeffizient
Λ, Ξ	Funktionen im Gebietszerlegungsalgorithmus
μ	Genauigkeitsschranke
ν	kinematische Viskosität
ξ	zeitliche Ansatzfunktion
Π_r	zeitliches Polynom vom Grad r
ρ	Übertragungsfunktion an der inneren Berandung
ϱ	Dichte
σ	Spannungstensor
τ	Reibungstensor
τ	Tangential- oder Normalspannung
ϕ	skalare Größe
ψ	skalare Testfunktion
ω	Relaxationsparameter
Ω	Berechnungsgebiet

Tiefgestellte Indizes

$+, -$	zeitliche Grenzwerte
0	Vergleichszustand
B	randbezogen
d	Dirichlet
DG	diskontinuierlich Galerkin
DD	Gebietszerlegung
e	effektiv
g	Grenzschicht
h, q	diskret (räumlich, räumlich–zeitlich)
K	konsistenzgesichert
\mathcal{K}	auf räumlichem Element
L	Linearisierung
LS	least–squares
min	Minimum
n	Neumann

r	Robin
\mathcal{Q}	auf Raum–Zeit Element
R	Referenz
red	reduziert
t	turbulent
w	Wand
z	zyklisch
δ	Schnittstelle Wandfunktion/Turbulenzmodell
ω	relaxiert

Hochgestellte Indizes

\sim	dimensionsbehaftet
$\{n\}$	knotenorientiert
$*$	adäquate Größen des stationären Problems
$+$	universelle Grenzschichtgröße
(i)	bezogen auf zeitliche Ansatzfunktion ξ_i
k	Zähler Gebietsiterationen
k	bezogen auf turbulente kinetische Energie
l	Zähler Linearisierungsschleife
m	Zähler Zeitschleife (außer Δt_m)
n	Zähler innerhalb $DG_N(1)$ -Algorithmus
p	druckbezogen
u	geschwindigkeitsbezogen
α, β	Varianten
ε	bezogen auf turbulente Dissipation
ϑ	temperaturbezogen
ϕ	auf skalare Größe bezogen

Mathematische Symbole

$\cdot, \{\cdot\}$	Platzhalter
\setminus	Differenz zweier Mengen
$\bar{}$	turbulenter Mittelwert; Abschluß einer Menge
\prime	turbulenter Schwankungswert
\circ, \circledast	einfach und doppelt skalares Produkt
∇	Nabla–Operator
$[\cdot]$	Sprungterm
$ \cdot $	Betrag
$\ \cdot\ _0$	L^2 -Norm
$\ \cdot\ _\infty$	Maximumnorm
meas	Maß
∂_t	partielle zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$

1 Einleitung

1.1 Vorbetrachtung

Die Verwendung numerischer Methoden zur Lösung technischer Aufgabenstellungen hat in den letzten Jahren stetig zugenommen. Beispielsweise finden die auf dem Gebiet der Strömungsmechanik angesammelten Erkenntnisse, die vornehmlich auf Betreiben der Luft- und Raumfahrtindustrie erreicht wurden, zunehmend Einzug in bisher vernachlässigte Anwendungsbereiche. Hierzu zählt auch die numerische Berechnung von Raumluchtströmungen als ein sehr junger Zweig.

Insbesondere in großen Räumen, z. B. Atrien und Konzertsälen, beeinflussen zahlreiche unterschiedliche Faktoren, die von der Anordnung und Gestalt der Zu- und Abluftöffnungen bis hin zum Wärmeübergang an den Wänden reichen, das Strömungs- und Temperaturfeld. Deren Kenntnis ist die Voraussetzung zur Ermittlung von Behaglichkeitskriterien. Innerhalb der traditionellen Herangehensweise bedient man sich hierbei halbempirischer Modelle, die für geometrisch einfache Konfigurationen aus experimentellen Untersuchungen abgeleitet wurden. Für komplizierter gestaltete Räume ist die Verwendung maßstäblicher Modelle deutlich aufwendiger und die Übertragung der Ergebnisse aufgrund der nicht vollständig zu realisierenden Ähnlichkeit ebenfalls problematisch. Nicht selten sind daher unangenehme Zugluferscheinungen oder Wärmestauungen die Folge und bedürfen kostspieliger Nachbesserungen. Demgegenüber gewinnt die numerische Berechnung infolge ihres Potentials zu detaillierten Aussagen zunehmend an Bedeutung. Eine Voraussetzung hierfür sind die erheblichen Leistungssteigerungen der Rechentechnik. In einem ähnlichen Maß ist dieser Trend jedoch auch durch die Weiterentwicklung numerischer Verfahren bestimmt.

Ohne sich auf Raumluchtströmungen zu beschränken, sollen diese hier stellvertretend für die Beschreibung der Eigenschaften einer ganzen Klasse von Strömungen stehen. Aufgrund der sehr kleinen Mach-Zahlen läßt sich das Fluid zunächst als inkompressibel beschreiben. Auch wenn infolge von Wärmeübertragungsvorgängen die nunmehr nichtisothermen Strömungen durch temperaturbedingte Dichteunterschiede gekennzeichnet sind, wird an diesem Modell festgehalten und die Auftriebswirkung mit der Boussinesq-Approximation [1] erfaßt. Weiterhin sind die auftretenden Strukturen durch echte Dreidimensionalität gekennzeichnet, und bei moderaten Reynolds-Zahlen von 10^4 bis 10^5 treten große turbulente Schwankungen auf.

Abgesehen von der Genauigkeit, mit der all diese Erscheinungen im Rahmen des verwendeten Algorithmus wiedergespiegelt werden, bilden die hierbei entstehenden Kosten ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium. Hierzu zählt nicht nur die benötigte Rechenkapazität, sondern im Zuge immer komplizierter werdender Geometrien auch die Gittergenerierung. Während neuerdings verstärkt Parallelisierung zur Laufzeitverkürzung eingesetzt wird, kann durch Übergang von strukturierter

zu unstrukturierter Vernetzung der manuelle Aufwand bei deren Erstellung ganz erheblich gesenkt werden. Der Mehraufwand bei der Handhabung unstrukturierter Netze ist auch aus Sicht einfach zu realisierender lokaler Gitterverfeinerungen zu motivieren.

Vor dem Hintergrund der genannten Aspekte soll im Rahmen dieser Arbeit eine numerische Methode vorgestellt und untersucht werden, die durch die folgenden wesentlichen Merkmale gekennzeichnet ist:

- Finite-Elemente Diskretisierung auf Grundlage der diskontinuierlichen Galerkin-Methode
- Verwendung einer least-squares Stabilisierungstechnik in Verbindung mit linearen Elementen
- Einsatz eines k - ε Turbulenzmodells
- Parallelisierung mittels einer nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethode.

Auch wenn insbesondere die ersten drei Punkte für sich genommen keinen Neuigkeitswert darstellen, erwächst nach Kenntnisstand des Autors die Originalität aus der erstmaligen Verknüpfung all dieser Elemente und neuartiger Modifikationen des Gebietszerlegungsalgorithmus.

Die Realisierung dieses Konzeptes in Form des Programmpakets ParallelNS, das in Zusammenarbeit mit dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen entstanden ist, erhebt nicht den Anspruch besonderer Leistungsfähigkeit. Es ist vielmehr ein geeignetes Werkzeug zur Bewertung der eingesetzten Strategien und ein wertvolles Hilfsmittel bei der Lösung praktischer Aufgabenstellungen. In diesem Sinn erfolgt die Untersuchung der Methode vorwiegend auf Grundlage der numerisch erzielten Resultate.

Die Arbeit bedient sich somit einer ingenieurtechnischen Herangehensweise und wendet sich an einen mit den Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik vertrauten Leser. Aus mathematischer Sicht bleibt die Darstellung allerdings aufgrund fehlender Beweise und Fehlerabschätzungen unvollständig und ist als anwendungsorientiert zu bezeichnen. Dieser Umstand soll aber nicht als Mangel, sondern als Möglichkeit zu einer anschaulichen Darstellung und der damit verbundenen Chance einer größeren Akzeptanz in den Ingenieurwissenschaften verstanden werden.

Nachdem im nächsten Abschnitt die zugrunde liegenden Methoden in den Kontext früherer Veröffentlichungen eingeordnet und gegenüber anderen Verfahren abgegrenzt werden, gliedert sich die Arbeit in weitere fünf Hauptbestandteile.

Das zweite Kapitel widmet sich der mathematisch-physikalischen Modellierung einzelner Strömungsformen. Besonderer Wert wird hierbei auf die Diskussion zahlreicher Randbedingungen und das Zusammenwirken von Wandfunktionen und Turbulenzmodell gelegt. Für das im Ergebnis der Darstellung gewonnene Differentialgleichungssystem wird im folgenden Kapitel ein numerisches Verfahren abgeleitet. Ausgangspunkt bildet die Semidiskretisierung auf Grundlage der diskontinuierlichen Galerkin-Methode zur Formulierung eines instationären Verfahrens, gefolgt von der

Gebietszerlegung der so entstandenen elliptischen Probleme. Anschließend wird das aus der Galerkin/least-squares Diskretisierung hervorgehende volldiskrete System schrittweise dargelegt.

Das vierte Kapitel geht vor allem auf die Implementierung der Gebietszerlegung unter dem Gesichtspunkt der Parallelisierung ein. Zur Bewertung des numerischen Verfahrens erfolgt in einem weiteren Kapitel die Anwendung auf zahlreiche Beispiele, die von der Konvektions-Diffusionsgleichung bis hin zu einer nichtisothermen, turbulenten Strömung reichen. Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt, bestehende Probleme angesprochen und mögliche Ansatzpunkte zu deren Lösung aufgezeigt.

1.2 Einordnung der Arbeit

Erst nachdem BROOKS und HUGHES [2] zu Beginn der achtziger Jahre mit der SUPG-Stabilisierung eine upwind-Technik ohne substantielle Genauigkeitseinbußen für Galerkin-Methoden entwickelt hatten, war die Voraussetzung für den breiten Einsatz von FEM-Diskretisierungen zur Lösung konvektionsdominanter Probleme gegeben. Die Attraktivität dieser Verfahren gegenüber Finite-Differenzen oder Finite-Volumen Zugängen entspringt vor allem ihrem weitreichenden mathematischen Zugang.

Von JOHNSON et al. [3] wurde diese Stabilisierungstechnik in Verbindung mit der diskontinuierlichen Galerkin-Methode, vielfach auch als Raum-Zeit FEM bezeichnet, auf instationäre Aufgabenstellungen ausgedehnt. Darauf aufbauende Entwicklungen erweiterten dieses Verfahren auf Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichungen [4] und die inkompressible Navier-Stokes Gleichung [5]. Zuvor hatten HUGHES et al. [6] für die stationäre Stokes-Gleichung mit der PSPG-Stabilisierung eine gemischte Finite-Elemente Formulierung aufgestellt, die die Einschränkung der Ansatzräume für Druck und Geschwindigkeit, ausgedrückt durch die Babuška-Brezzi Bedingung, umgeht. Von der gleichen Gruppe [7] wird die least-squares Technik als eine allgemeine Methode zur Konstruktion stabilerer Galerkin-Verfahren vorgeschlagen, in die sich sowohl die SUPG- als auch die PSPG-Stabilisierung einordnen lassen. Insbesondere TEZDUYAR et al. haben zahlreiche Anwendungen dieser Stabilisierungsmethode in Verbindung mit der Raum-Zeit FEM vorgestellt, u. a. zeitlich veränderliche Gebiete [8], [9] und massiv parallele Implementierungen [10], [11]. Weitere Untersuchungen der Galerkin/least-squares Technik, insbesondere in Hinblick auf nichtisotherme Strömungen, wurden von LUBE et al. [12], [13] durchgeführt, wobei für die in dieser Arbeit verwendeten linearen konformen Elemente AUGE [14] u. a. den Einfluß der Stabilisierungsparameter im stationären Fall an einer Reihe von Beispielen numerisch bestimmt hat.

Im Vergleich zu anderen zeitlichen Diskretisierungsverfahren stellt die diskontinuierliche Galerkin-Methode durch die methodisch gleichartige Behandlung von Raum und Zeit mittels FEM den konsequentesten und zugleich systematischsten Zugang zur Konstruktion und Analyse instationärer Verfahren höherer Ordnung dar [15],

[16]. Aus Sicht des Anwenders ist besonders die Robustheit bezüglich größerer Zeitschritte gegenüber den weit verbreiteten Projektionsmethoden [17], [18] und dem zweiten Ordnung genauen Zwischenschritt- Θ -Verfahren [19], [20] von Interesse.

Zur Beschreibung turbulenter Strömungen wird das bereits Anfang der siebziger Jahre von LAUNDER und SPALDING [21] vorgeschlagene k - ε Turbulenzmodell eingesetzt. Ohne auf die damit verbundenen Unzulänglichkeiten einzugehen, ist es jedoch derzeit immer noch das am häufigsten verwendete Zweiparametermodell. Als solches wird es hier akzeptiert und soll nicht Gegenstand der Untersuchung sein. Abgesehen von der modifizierten Wandanbindung durch Verwendung neuartiger Wandfunktionen [22], liegt der Schwerpunkt der Darstellung in der Einarbeitung dieses Modells in den FEM-Kontext auf unstrukturierten Gittern. Hierbei sind insbesondere Vorschläge von MOHAMMADI und PIRONNEAU [23] aufgegriffen worden.

Mit dem in verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen unterschiedlich definierten Begriff Gebietszerlegung [24], soll im weiteren aus mathematischer Sicht die Unterteilung des Lösungsgebietes der kontinuierlichen Probleme durch Einführung künstlicher Ränder bezeichnet werden. Auf jedem der so entstandenen Teilgebiete wird eine eigene, in der Regel partielle Differentialgleichung gelöst. Bei der nichtüberlappenden Variante überdecken sich die Gebiete nicht. Innerhalb des hier verfolgten Zugangs erfolgt deren Kopplung ausschließlich über spezielle Übergangsbedingungen, die in einem Iterationsprozeß über die Teilgebiete abgeglichen werden. Einerseits ist diese Methode aus Sicht der Parallelisierung aufgrund des geringen Kommunikationsaufwandes interessant. Andererseits muß durch das Verfahren nur die Adaption der Kopplungsbedingungen erfolgen, während bei überlappenden Methoden die optimale Überdeckungsbreite beispielsweise eine Funktion der Zeitschrittweite und damit wesentlich schwieriger algorithmisch zu realisieren ist.

Erstmals wurde von LIONS [25] für die Poisson-Gleichung eine nichtüberlappende Gebietszerlegungsmethode auf Grundlage einer Robinschen Randbedingung vorgeschlagen. Die Hauptfragestellung hierbei ist die geeignete Wahl einer den Dirichlet-schen Anteil wichtenden Übertragungsfunktion. Für konvektionsdominante Probleme haben GASTALDI et al. [26] mit dem adaptiven Neumann-Robin Algorithmus hierzu einen Vorschlag unterbreitet. Eine allgemeinere Konstruktion der Übertragungsfunktion von AUGE et al. [27] erweitert die Anwendbarkeit auf Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichungen. Darüberhinaus gehen LUBE et al. [28] auf den instationären, singular gestörten Fall ein. Wiederum von OTTO und LUBE [29] wurde diese Methodik auf die Oseen-Gleichung erweitert und damit die Voraussetzung für den Einsatz dieser Methode auf Strömungsprobleme geschaffen. Einen ganz anderen Ansatz verfolgen beispielsweise ACHDOU et al. [30], indem sie den Grenzschichtbereich in eine Vielzahl von Teilgebieten zerlegen und so insbesondere bei turbulenten Strömungen mit Wandrauigkeiten genauere Ergebnisse als bei Verwendung von Wandfunktionen erwarten. Für den weiterführend interessierten Leser sei besonders auf die parallel zu dieser Arbeit entstandene Dissertation von OTTO [31] verwiesen, die sich speziell der mathematisch-numerischen Untersuchung des hier verwendeten Gebietszerlegungsalgorithmus widmet.

2 Mathematisch–physikalische Modellierung

2.1 Grundannahmen

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik und Thermofluidodynamik, in denen das Strömungsmedium als Kontinuum betrachtet wird. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich hierbei auf Newtonsche Fluide. Abgesehen von der Boussinesq–Approximation, die eine temperaturabhängige Dichte ρ im Quellterm der Bewegungsgleichung einführt, wird von inkompressiblen Fluiden ausgegangen. Die sich durch diese Vereinfachungen ergebenden Grundgleichungen sind der Literatur entnommen (vgl. [32], [33] und [34]) und werden im weiteren in koordinatenfreier Schreibweise für ein raumfestes Bezugssystem verwendet.

Turbulente Strömungen werden mit Hilfe des k – ε Turbulenzmodells nachgebildet. Wirkungen dieses Turbulenzmodells basieren auf der lokal unterschiedlichen Vergrößerung der Transportkoeffizienten in den Bilanzgleichungen. Obwohl konstante molekulare Stoffwerte vorausgesetzt sind, werden die Grundgleichungen daher für veränderliche Transportkoeffizienten angegeben.

2.2 Bilanzgleichungen

Für Newtonsche Fluide ist der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) := \nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T \quad (2.1)$$

über einen linearen, isotropen Zusammenhang mit dem Reibungstensor

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\rho} \tilde{\nu} \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (2.2)$$

verbunden. Die Bewegungsgleichung eines inkompressiblen Fluids lautet damit

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \circ \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \right) - \nabla \circ \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{g}} \quad (2.3)$$

und beschreibt in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \circ \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.4)$$

Strömungen ohne Wärmeübergang vollständig. Die kinematische Zwangsbedingung (2.4) folgt aus dem Masseerhaltungsgesetz. Durch Umformung des Konvektionsterms

$(\tilde{\mathbf{u}} \circ \nabla) \tilde{\mathbf{u}}$ in (2.3) mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung erhält man die auch häufig verwendete konservative Form der Impulsgleichung

$$\tilde{\varrho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \nabla \circ (\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}) \right) - \nabla \circ \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{g}}. \quad (2.5)$$

Untersuchungen von SKALICKÝ [35] zeigen jedoch, daß diese Form der Bewegungsgleichung Nachteile für ein numerisches Verfahren gegenüber der nichtkonservativen Variante (2.3) aufweist. Demnach ist für inkompressible, reibungsbehaftete Strömungen nicht die Konservativität sondern die Widerspiegelung der Singularität einer Neumannschen Randwertaufgabe durch die Diskretisierung ausschlaggebend für deren Genauigkeit.

Bei nichtisothermen Strömungen sind Auftriebswirkungen infolge temperaturabhängiger Dichte in der Regel nicht vernachlässigbar. Mit der Definition des isobaren Volumenausdehnungskoeffizienten

$$\tilde{\beta} := -\frac{1}{\tilde{\varrho}} \left(\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{T}} \right)_{\tilde{p}} \quad (2.6)$$

folgt aus einer Taylorreihenentwicklung der Dichte mit Abbruch nach dem linearen Glied

$$\tilde{\varrho}(\tilde{T}) = \tilde{\varrho}_0 - \tilde{\varrho}_0 \tilde{\beta}_0 (\tilde{T} - \tilde{T}_0) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varrho}_0 := \tilde{\varrho}(\tilde{T}_0), \quad \tilde{\beta}_0 := \tilde{\beta}(\tilde{T}_0) \quad (2.7)$$

um die Entwicklungsstelle \tilde{T}_0 . Bei der Boussinesq-Approximation wird dieser lineare Dichteansatz lediglich im Quellterm der Impulsgleichung (2.3) verwendet. Von GRAY und GIORGINI [36] wird bei Rayleigh-Bénard Konvektion die Gültigkeit dieser Annahme bis zu einer Temperaturdifferenz von 28,6 K für Luft bei Raumtemperatur abgeschätzt. Neuere Untersuchungen [37], [38] vertreten hingegen einen deutlich größeren Gültigkeitsbereich, insbesondere wenn die Stoffwerte bei einer mittleren Temperatur bestimmt werden.

Unter der Annahme eines konstanten Beschleunigungsvektors \mathbf{g} kann ein reduzierter Druck

$$\tilde{p}_{red} := \tilde{p} - \tilde{\varrho}_0 \tilde{\mathbf{g}} \circ \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

durch Abspaltung des hydrostatischen Anteils definiert werden. Die Bewegungsgleichung für nichtisotherme Strömung nimmt dann in Verbindung mit (2.7) die Form

$$\tilde{\varrho}_0 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \circ \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \right) - \nabla \circ \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \nabla \tilde{p}_{red} = -\tilde{\varrho}_0 \tilde{\beta}_0 (\tilde{T} - \tilde{T}_0) \tilde{\mathbf{g}} \quad (2.9)$$

an. Zur Berechnung der Temperatur muß zusätzlich die Energiegleichung

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \circ \nabla) \tilde{T} - \nabla \circ (\tilde{\alpha} \nabla \tilde{T}) = \frac{\tilde{q}^V}{\tilde{\varrho}_0 \tilde{c}_p} \quad (2.10)$$

mit

$$\tilde{c}_p = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\varrho}_0 \tilde{a}} \quad (2.11)$$

gelöst werden. Als Quellterme sind lediglich innere Wärmequellen zugelassen, dissipative Effekte bleiben hingegen in der Energiegleichung unberücksichtigt. Die Gleichungen (2.9) und (2.10) sind wechselseitig durch das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld gekoppelt.

2.3 Dimensionslose Darstellung

In der Strömungsmechanik ist es üblich, dimensionslose Gleichungen zu verwenden. Hierbei wird die Vielzahl der Parameter auf einen minimalen Satz von Kennzahlen reduziert, der das physikalische Problem vollständig beschreibt. Jedoch führt die Verwendung dimensionsloser Ähnlichkeitskennzahlen bei der Aufstellung eines numerischen Verfahrens nicht immer auf die einem Strömungsmechaniker vertrauten Definitionen. Beispielsweise bildet man bei der Untersuchung von Raumluftströmungen die Rayleigh-Zahl mit der Raumhöhe. In die Reynolds-Zahl geht hingegen vielfach eine charakteristische Größe der Zuluftöffnung ein.

Eine andere Möglichkeit zu einer dimensionslosen Darstellung zu gelangen, besteht in der Verwendung eines Satzes von Bezugsgrößen, der im allgemeinen durch die Anzahl der Basisdimensionen bestimmt ist. Der Satz der in dieser Arbeit verwendeten Referenzgrößen umfaßt \tilde{x}_R , \tilde{u}_R , $\tilde{\varrho}_R$, \tilde{T}_R und $\Delta\tilde{T}_R$. Da in das physikalische Modell keine absoluten Temperaturen eingehen, ist es möglich und, wie sich zeigen wird, günstig, die dimensionslose Temperatur mittels zweier Referenzgrößen zu definieren:

$$\vartheta := \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_R}{\Delta\tilde{T}_R}. \quad (2.12)$$

Durch die Wahl von

$$\tilde{\varrho}_R = \tilde{\varrho}_0, \quad \varrho := \frac{\tilde{\varrho}_0}{\tilde{\varrho}_R} \equiv 1 \quad (2.13)$$

kann die ohnehin konstante Dichte aus den dimensionslosen Gleichungen eliminiert werden. In den numerischen Beispielen wurden die übrigen Referenzgrößen so gewählt, daß l_Ω , $\|u\|_\infty$ und $\|\vartheta\|_\infty$ in der Größenordnung eins liegen.

Mit den in Anhang A definierten dimensionslosen Größen lauten die Bilanzgleichungen (2.3), (2.4), (2.9) und (2.10) wie folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} - \nabla \circ (\nu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{g}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \circ \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} - \nabla \circ (\nu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla p_{red} = -\beta \vartheta \mathbf{g}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \vartheta - \nabla \circ (a \nabla \vartheta) = \frac{\dot{q}^V}{c_p}. \quad (2.17)$$

2.4 Turbulenzmodell

Turbulente Strömungen sind besonders durch kleinskalige Strukturen, die sich in scheinbar zufälligen Schwankungen des Strömungsfeldes äußern, und starke zeitliche Fluktuationen gekennzeichnet. Will man diese mit den oben aufgeführten Gleichungen erfassen, so muß das Berechnungsgebiet entsprechend fein aufgelöst werden. Allein für den räumlichen Diskretisierungsabstand h ergibt eine Abschätzung nach TENNEKES und LUMLEY [39]

$$h \approx l \operatorname{Re}(u')^{-3/4} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re}(u') \approx 0,01 \operatorname{Re}(u), \quad \operatorname{Re}(u) := \frac{ul}{\nu}. \quad (2.18)$$

Bei einer Vielzahl praktischer Anwendungen ist die Reynolds-Zahl Re so hoch, daß diese auf absehbare Zeit nicht mit Hilfe der direkten numerischen Simulation lösbar sind.

Die statistische Turbulenztheorie verfolgt einen anderen Zugang. Die Grundgleichungen werden gefiltert und für die so entstehenden Anteile werden spezielle dynamische Gleichungen abgeleitet. Während dieses Prozesses nimmt die Anzahl der Unbekannten zu, wodurch zusätzliche Annahmen zur Lösung des Gleichungssystems erforderlich werden. Die einfachste Form der Filterung ist die sogenannte Reynolds-Mittelung [40]. Hierbei werden alle Zustandsgrößen in einen zeitlichen Mittelwert sowie einen Schwankungsanteil zerlegt:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad p = \bar{p} + p', \quad \vartheta = \bar{\vartheta} + \vartheta'. \quad (2.19)$$

Der Begriff des zeitlichen Mittelwertes bezieht sich hierbei auf kleine turbulente Skalen. Ein darauf aufbauendes instationäres Verfahren kann somit nur großskalige Phänomene widerspiegeln. Nach dem Einsetzen dieses Ansatzes in (2.14), (2.15), (2.16) und (2.17) sowie Vereinfachung durch Anwendung der statistischen Mittelungsregeln [23] ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \circ \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} - \nabla \circ (\nu \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})) + \nabla \bar{p} = \mathbf{g}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \circ \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \circ \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} - \nabla \circ (\nu \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})) + \nabla \bar{p}_{red} = -\beta \bar{\vartheta} \mathbf{g}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \bar{\vartheta} + \nabla \circ \overline{\mathbf{u}'\vartheta'} - \nabla \circ (a \nabla \bar{\vartheta}) = \frac{\dot{q}^V}{c_p}. \quad (2.23)$$

Neben den gemittelten Größen tauchen in der Bewegungsgleichung $\nabla \circ \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$ und in der Energiegleichung $\nabla \circ \overline{\mathbf{u}'\vartheta'}$ als weitere Terme auf. Sie beschreiben den zusätzlichen Transport von Impuls und Energie aufgrund turbulenter Austauschprozesse. Die Theorie liefert jedoch keine Aussage, wie sie zu berechnen sind. Durch zusätzliche Annahmen, die auch als Schließungshypothesen bezeichnet werden, müssen diese Terme eliminiert werden.

Experimentelle Untersuchungen motivieren die Annahme, daß die Reynolds–Spannung proportional den Geschwindigkeitsgradienten ist:

$$-\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \propto \mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}}). \quad (2.24)$$

Im Zuge der Reynolds–Mittelung lassen sich aus der Impulsgleichung zwei weitere Differentialgleichungen ableiten, die das Verhalten der Schwankungswerte beschreiben (vgl. [23]). Als neue Größen treten hierbei die turbulente kinetische Energie

$$k := \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \circ \mathbf{u}'} \quad (2.25)$$

sowie die turbulente Dissipation

$$\varepsilon := \frac{\nu}{2} \overline{\mathbf{D}(\mathbf{u}') \circ \mathbf{D}(\mathbf{u}')} \quad (2.26)$$

auf. Bei der Herleitung der Transportgleichungen für k und ε werden weitere Annahmen zur Elimination neu auftretender Korrelationen notwendig. So wird unter anderem isotrope Turbulenz angenommen, d. h. die örtlichen turbulenten Schwankungen sind in allen Richtungen gleich groß. Zumindest in Grenzschichten und Drallströmungen widerspricht diese Annahme experimentellen Ergebnissen.

Als Proportionalitätsfaktor in der Reynolds–Hypothese (2.24) wird die turbulente Viskosität ν_t eingeführt:

$$-\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \nu_t \mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3} k \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad \nu_t := C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Der Term $\frac{2}{3} k \mathbf{I}^\ddagger$ wird erforderlich, um Definition (2.25) zu erfüllen, wonach

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \circ \mathbf{I} = \overline{\mathbf{u}' \circ \mathbf{u}'} = 2k \quad (2.28)$$

ist und aufgrund der Kontinuitätsgleichung

$$\mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}}) \circ \mathbf{I} = 2 \nabla \circ \overline{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.29)$$

gilt. Das Standard k – ε Turbulenzmodell lautet damit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \circ \nabla) k - \nabla \circ (\nu_k \nabla k) + \varepsilon = P_k, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \circ \nabla) \varepsilon - \nabla \circ (\nu_\varepsilon \nabla \varepsilon) + C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (2.31)$$

mit folgenden Definitionen

$$\nu_k := \nu + \frac{\nu_t}{\text{Pr}_k}, \quad \nu_\varepsilon := \nu + \frac{\nu_t}{\text{Pr}_\varepsilon}, \quad P_k := \frac{\nu_t}{2} \mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}}) \circ \mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}}). \quad (2.32)$$

[‡]Dieser Term ist genau genommen nur in 3D richtig. Formal gilt $\frac{2}{d} k \mathbf{I}$ für die Dimension d .

Zur Beschreibung des turbulenten Energietransports wird eine (2.27) analoge Schließungshypothese [40] gewählt:

$$-\overline{\mathbf{u}'\vartheta'} = a_t \nabla \overline{\vartheta} \quad \text{mit} \quad a_t = \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t}. \quad (2.33)$$

Für nichtisotherme Strömungen, bei denen insbesondere die freie Konvektion eine dominierende Rolle spielt, liefern die Standardgleichungen (2.30) und (2.31) deutlich andere Ergebnisse als experimentelle Untersuchungen (vgl. [41]). Eine Modifikation des Standard k - ε Turbulenzmodells [42] versucht durch Einführung eines weiteren Produktionsterms

$$G := C_t \beta \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \mathbf{g} \circ \nabla \overline{\vartheta} \quad (2.34)$$

die Dämpfung der Turbulenz bei stabiler Schichtung ($\mathbf{g} \circ \nabla \overline{\vartheta} < 0$) bzw. Anfachung bei labiler Schichtung zu erfassen.

Die Konstanten des k - ε Turbulenzmodells lassen sich aus experimentellen Untersuchungen charakteristischer Strömungen bestimmen (vgl. auch Beispiel in Abschnitt 5.4.1). Der dieser Arbeit zugrunde liegende Standardkonstantensatz [43] ist in Tabelle 2.1 angegeben. In der Literatur (vgl. [44], [45]) findet man jedoch zahlreiche Modifikationen, mit denen sich bestimmte Strömungsformen besser beschreiben lassen.

C_1	C_2	C_μ	Pr_k	Pr_ε	C_t	Pr_t
1,44	1,92	0,09	1,0	1,3	0,8	0,9

Tabelle 2.1: Verwendete Konstanten für das k - ε Turbulenzmodell.

Alle Schwankungsanteile aus den reynoldsgemittelten Gleichungen (2.20), (2.21) und (2.22), (2.23) lassen sich nun eliminieren. Die turbulenten Normalspannungen werden in die Definition eines modifizierten Drucks aufgenommen

$$\overline{p}^* := \overline{p} + \frac{2}{3}k, \quad \overline{p}_{red}^* := \overline{p}_{red} + \frac{2}{3}k. \quad (2.35)$$

Weiterhin sind Wirkungen molekularer und turbulenter Austauschvorgänge durch Einführung effektiver Transportkoeffizienten zusammengefaßt:

$$\nu_e := \nu + \nu_t, \quad a_e := a + a_t. \quad (2.36)$$

Das System aus Erhaltungsgleichungen und k - ε Turbulenzmodell läßt sich mit diesen Definitionen in einer kompakten Schreibweise darstellen. Für den nichtisothermen Fall erhält man:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \circ \nabla) \overline{\mathbf{u}} - \nabla \circ (\nu_e \mathbf{D}(\overline{\mathbf{u}})) + \nabla \overline{p}_{red}^* = -\beta \overline{\vartheta} \mathbf{g}, \quad (2.37)$$

$$\nabla \circ \overline{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \bar{\vartheta} - \nabla \circ (a_e \nabla \bar{\vartheta}) = \frac{\dot{q}^V}{c_p}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) k - \nabla \circ (\nu_k \nabla k) + \varepsilon = P_k + G, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \varepsilon - \nabla \circ (\nu_\varepsilon \nabla \varepsilon) + C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P_k + G). \quad (2.41)$$

Bei isothermen Problemen gilt anstelle von (2.37) die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \circ \nabla) \bar{\mathbf{u}} - \nabla \circ (\nu_e \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})) + \nabla \bar{p}^* = \mathbf{g}. \quad (2.42)$$

Desweiteren entfällt die Energiegleichung (2.39) ebenso wie der Term G in (2.40) und (2.41).

Das Turbulenzmodell ist an positive Werte von k und ε gebunden. Sowohl negative Viskositäten als auch negative turbulente kinetische Energien sind unphysikalisch. Einen partiellen Beweis für die mathematische Sinnfälligkeit des Modells liefern MOHAMMADI und PIRONNEAU [23], indem sie im Falle Dirichletscher Randbedingungen für (2.30) und (2.31) die Positivität von k beweisen. Als problematisch muß der im nichtisothermen Fall in (2.40) und (2.41) auftauchende Term G angesehen werden. Er existiert losgelöst vom Geschwindigkeitsfeld und bewirkt bei stabiler Schichtung auch in Ruhezonen einen Abbau turbulenter kinetischer Energie. Eine weitere Schwierigkeit resultiert aus der Annahme isotroper Turbulenz. Die sich entlang von Wänden ausbildenden Grenzschichten erfordern somit eine besondere Behandlung auf die in Abschnitt 2.7 eingegangen wird. Trotz der angeführten Probleme wird das k - ε Turbulenzmodell erfolgreich für eine Vielzahl von Strömungssituationen eingesetzt. Nicht zuletzt zeugt die Verfügbarkeit dieses Turbulenzmodells in kommerziellen CFD-Programmen von dessen breitem Einsatzspektrum bei der Lösung praktischer Aufgaben.

2.5 Verkürzte Schreibweise

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die Grundgleichungen zur physikalischen Beschreibung laminarer und turbulenter Strömungen dargelegt. Dabei ist jeweils zwischen Vorgängen mit und ohne Wärmeübergang unterschieden worden. Beim Vergleich der entstehenden Differentialgleichungen zeigen sich jedoch nur geringfügige Unterschiede in der Definition einzelner Größen sowie in den Quelltermen. Für die weitere Darstellung ist es daher günstig, zu einer vereinheitlichten Form der einzelnen Grundgleichungen überzugehen. Insbesondere die Formulierung von Randbedingungen gestaltet sich deutlich übersichtlicher.

Zur gemeinsamen Behandlung der vier unterschiedlichen Strömungsformen werden folgende Festlegungen getroffen.

1. Für laminare Strömungen gilt $\nu_t = 0$ sowie

- (a) ohne Wärmeübergang: $\mathbf{f}_u := \mathbf{g}$;
- (b) mit Wärmeübergang: $\mathbf{f}_u := -\beta\vartheta\mathbf{g}$, $p := p_{red}$.

2. In turbulenten Strömungen ist $\mathbf{u} := \overline{\mathbf{u}}$ und

- (a) ohne Wärmeübergang: $\mathbf{f}_u := \mathbf{g}$, $p := \overline{p^*}$, $G = 0$;
- (b) mit Wärmeübergang: $\mathbf{f}_u := -\beta\vartheta\mathbf{g}$, $p := \overline{p_{red}^*}$, $\vartheta := \overline{\vartheta}$.

Weiterhin wird ein modifizierter Reibungstensor, der mit der effektiven Viskosität gebildet ist, eingeführt:

$$\boldsymbol{\tau}_e := \nu_e \mathbf{D}(\mathbf{u}). \quad (2.43)$$

Mit diesen Definitionen läßt sich die bisherige Darstellung auf drei Sätze von Differentialgleichungen reduzieren.

1. Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} - \nabla \circ \boldsymbol{\tau}_e + \nabla p = \mathbf{f}_u, \quad (2.44)$$

$$\nabla \circ \mathbf{u} = 0. \quad (2.45)$$

2. Energiegleichung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \vartheta - \nabla \circ (a_e \nabla \vartheta) = \frac{\dot{q}^V}{c_p}. \quad (2.46)$$

3. Turbulenzgleichungen:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) k - \nabla \circ (\nu_k \nabla k) + \varepsilon = P_k + G, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \varepsilon - \nabla \circ (\nu_\varepsilon \nabla \varepsilon) + C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P_k + G). \quad (2.48)$$

Entsprechend der Problemstellung werden die Gleichungsgruppen wahlweise kombiniert.

2.6 Randbedingungen

Bisher wurden nur die Differentialgleichungen für Impuls, Masse, Energie und die Turbulenzgrößen dargestellt. Korrekt formulierte Probleme ergeben sich jedoch erst durch deren Vervollständigung mit Rand- und Anfangsbedingungen. Für praxisbezogene Berechnungen kommt gerade den Randbedingungen eine besondere Bedeutung zu. Deren spezielle Formulierung erlaubt es vielfach erst, komplexere Aufgaben zu

lösen oder zumindest zu vereinfachen. Aus diesem Grund soll die Vielfalt möglicher Randbedingungen näher vorgestellt werden, wobei deren Typ für die obigen Gleichungsgruppen auf identischen Randstücken durchaus unterschiedlich sein kann. Zur Unterscheidung werden daher die drei Bezeichnungen Γ^{up} , Γ^ϑ und $\Gamma^{k\varepsilon}$ eingeführt. Da die Gleichungen (2.44), (2.46), (2.47) und (2.48) als partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung klassifiziert werden können, soll zunächst auf die sich unmittelbar daraus ergebenden möglichen Randbedingungen 1., 2. und 3. Art eingegangen werden.

Die Vorgabe Dirichletscher Randbedingungen in Form von Funktionswerten

$$\mathbf{u}\Big|_{\Gamma_d^{up}} = \mathbf{u}_d, \quad \vartheta\Big|_{\Gamma_d^\vartheta} = \vartheta_d, \quad k\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}} = k_d, \quad \varepsilon\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}} = \varepsilon_d \quad (2.49)$$

ist die klassische Randbedingung an Eintrittsrändern. In laminaren Strömungen dient sie auch zur Spezifikation fester oder tangential bewegter Wände durch Festlegung der Geschwindigkeit am Gebietsrand und der Vorgabe von Oberflächentemperaturen. Vielfach ist bei turbulenten Strömungen die Dissipation am Eintrittsrand nicht bekannt. Eine kompatible Randbedingung unter Einbeziehung des Turbulenzgrades Tu und des Makromaßstabes l_ε lautet [43]:

$$k\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}} = \frac{3}{2}(Tu|\mathbf{u}|)^2\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}}, \quad \varepsilon\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}} = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon}\Big|_{\Gamma_d^{k\varepsilon}}. \quad (2.50)$$

Der Makromaßstab entspricht den Abmessungen der größten Turbulenzballen, für den in Abhängigkeit von der Geometrie der Zuströmöffnung Meßwerte herangezogen werden können.

Homogene Neumannsche Randbedingungen sind typische Austrittsrandbedingungen. Die Forderung des spannungsfreien Abströmens

$$\mathbf{n} \circ (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e)\Big|_{\Gamma_n^{up}} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

beinhaltet, daß sich die Summe aus Reibungs- und Druckkräften in der Ausströmöffnung aufhebt und somit keine Kräfte auf das Fluid wirken. Demgegenüber bewirken beim reibungsfreien Ausströmen

$$\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e\Big|_{\Gamma_n^{up}} = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

die am Rande noch vorhandenen Druckkräfte eine Ausrichtung der Stromlinien an der Lage des Austrittsrandes (siehe Abbildung 2.1). Damit wird der allgemeinen Anforderung an eine Austrittsbedingung, das stromauf liegende Gebiet möglichst wenig zu beeinflussen, widersprochen. Die weitere Betrachtung geht daher nicht mehr auf diese Randbedingung ein.

Für nichtisotherme Vorgänge kann die Wärmeübertragung am Rand durch Vorgabe eines flächenspezifischen Wärmestroms

$$\mathbf{n} \circ \lambda \nabla \vartheta\Big|_{\Gamma_n^\vartheta} = \dot{q}_w \quad (2.53)$$

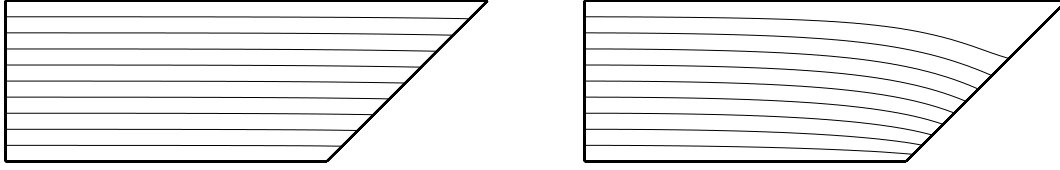


Abbildung 2.1: Gegenüberstellung der Stromlinien beim spannungsfreien (links) und reibungsfreien Abströmen (rechts) aus einem schräg abgeschnittenen Kanal bei ausgebildeter Strömung mit $Re = 500$.

erfolgen. In Anlehnung an die Technische Thermodynamik kennzeichnen hierbei positive Werte von \dot{q}_w einen Energieeintrag in das Fluid. Die allgemeine Forderung, daß an Austrittsöffnungen lediglich stofflich gebundener Transport durch das Fluid erfolgt, beinhaltet verschwindende Gradienten der Feldgrößen normal zum Rand. Entsprechend gilt $\dot{q}_w = 0$ für das Temperaturfeld und

$$\mathbf{n} \circ \nu_k \nabla k \Big|_{\Gamma_n^{k\varepsilon}} = 0, \quad \mathbf{n} \circ \nu_\varepsilon \nabla \varepsilon \Big|_{\Gamma_n^{k\varepsilon}} = 0 \quad (2.54)$$

für die Turbulenzgrößen.

Randbedingungen 3. Art sind bei der Energiegleichung von praktischer Bedeutung. Die Vorgabe eines äußeren Wärmeübergangskoeffizienten α_u und der Umgebungstemperatur ϑ_u außerhalb des Berechnungsgebietes kennzeichnen hierbei den Wärmeübergang am Rand. Durch Einsetzen der Beziehung $\dot{q}_w = \alpha_u(\vartheta_u - \vartheta)$ in das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz (2.53) erhält man

$$(\alpha_u \vartheta + \mathbf{n} \circ \lambda \nabla \vartheta) \Big|_{\Gamma_\vartheta} = \alpha_u \vartheta_u. \quad (2.55)$$

Aus der speziellen Gestalt der Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung lassen sich noch eine Reihe weiterer Randbedingungen ableiten. Die als Druckrandbedingung bekannte Formulierung (vgl. [46])

$$(p - \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e \circ \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_p^{up}} = \tau_n \quad (2.56)$$

zeigt sich bei näherer Betrachtung als eine besondere Form einer Neumannschen Randbedingung. Nicht der Druck, sondern die normal auf den äußeren Rand wirkende flächenbezogene Kraft wird vorgegeben. Der Druckanteil ist jedoch in der Regel sehr viel größer als die viskosen Normalspannungen und rechtfertigt damit die Bezeichnung. Eine vollständige Formulierung von (2.56), in der auch die verschwindenden Tangentialspannungen zum Ausdruck kommen, lautet somit

$$\mathbf{n} \circ (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e) \Big|_{\Gamma_n^{up}} = \tau_n \mathbf{n}. \quad (2.57)$$

Zum besseren Verständnis der Wirkung einzelner Terme sind in Abbildung 2.2 die am Rand auftretenden Kräfte und deren Komponenten dargestellt.

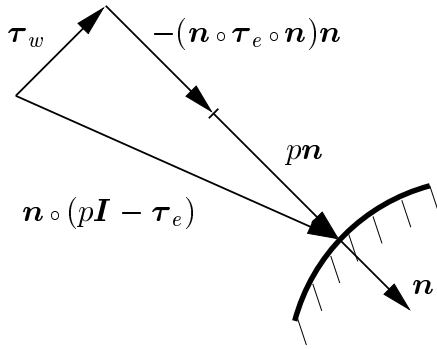


Abbildung 2.2: Kraftwirkungen an Gebietsrändern.

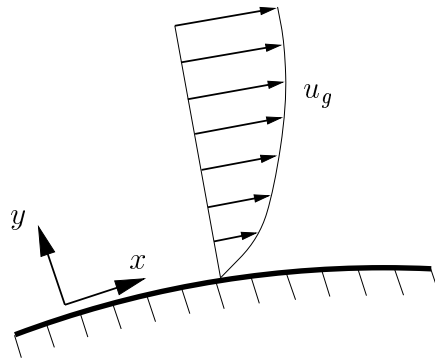


Abbildung 2.3: Zweidimensionale Grenzschichtkoordinaten.

Der in der Bewegungsgleichung (2.44) lediglich als Ableitung auftauchende Druck ist nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die Festlegung des Druckniveaus geschieht gerade durch die Randbedingung (2.57). Andererseits geht mit $\tau_n = 0$ diese Randbedingung in (2.51) über. Spannungsfreies Abströmen kann somit auch als Druckrandbedingung mit Gegendruck Null aufgefaßt werden. Umgekehrt beinhaltet die Druckrandbedingung eine verallgemeinerte Form des spannungsfreien Abströmen. Es erfolgt lediglich eine andere Normierung des Drucks. Ihre eigentliche Wirkung entfalten Druckrandbedingungen jedoch erst durch deren mehrfache Verwendung, wenn die Strömung sich entsprechend den vorgegebenen Druckunterschieden, die genaugenommen als flächenbezogene Kraftunterschiede bezeichnet werden müssen, einstellt. An dieser Stelle sei bemerkt, daß sowohl Ein- als auch Ausströmen durch diese Randbedingung realisiert werden kann.

Die Vorgabe einer Schubspannung τ_w sowie der normal dazu stehenden Geschwindigkeitskomponente u_n stellt eine weitere gültige Randbedingung dar

$$\left((\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e \circ \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e \right) \Big|_{\Gamma_w^{up}} = \boldsymbol{\tau}_w, \quad -\mathbf{u} \circ \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_w^{up}} = u_n. \quad (2.58)$$

Als eine Vereinfachung dieser Bedingung ergibt sich mit $u_n = 0$ für stoffundurchlässige Wände die Wandschubspannungsrandbedingung, die eine zentrale Rolle bei der Wandanbindung des k - ε Turbulenzmodells (vgl. Abschnitt 2.7) spielt. Auch die Wirkung von Oberflächenkräften läßt sich mit dieser Randbedingung erfassen. Für freie, nichtdeformierbare Oberflächen kann die Marangoni-Randbedingung, bei der die an der Phasengrenze wirkende Schubspannung gleich dem Gradienten der Oberflächenspannung σ ist, mit $\boldsymbol{\tau}_w = -\nabla \sigma$ angegeben werden [32]. Eine eher untergeordnete Rolle spielt (2.58) mit $\boldsymbol{\tau}_w = \mathbf{0}$ und $u_n \neq 0$. Entsprechend der Beziehung

$$\dot{m} = \int_{\Gamma_w^{up}} u_n \, d\Gamma \quad (2.59)$$

ist der ein- bzw. austretende Volumenstrom bestimmt. Die in der Öffnungsebene liegenden Geschwindigkeitskomponenten stellen sich hierbei entsprechend der Bedingung verschwindender Tangentialspannungen ein.

An Symmetrierändern ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit ebenso wie der Gradient der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten Null. Diese Bedingung stellt einen weiteren wichtigen Spezialfall von (2.58) mit $\boldsymbol{\tau}_w = \mathbf{0}$ und $u_n = 0$ dar. Für die skalaren Gleichungen gelten homogene Neumannsche Randbedingungen, d. h. (2.53) mit $\dot{q}_w = 0$ für die Energiegleichung und (2.54) für das k - ε Turbulenzmodell. Vielfach kann durch die geschickte Wahl von Symmetrierändern das Berechnungsgebiet räumlich eingeschränkt werden, wodurch eine um so detailliertere Auflösung möglich wird. Diese Aussage trifft ebenso auf periodische Randbedingungen, die vielfach auch als zyklisch bezeichnet werden, zu. Weiterhin erlaubt der Einsatz dieser beiden Randbedingungen teilweise erst eine realitätsnahe Modellierung physikalischer Vorgänge, wodurch ihnen eine besondere Bedeutung zukommt.

Zyklische Randbedingungen verknüpfen räumlich entfernte Gebietsränder und bewirken eine innere Schließung des Berechnungsgebietes. Sie treten demzufolge immer paarweise mit jeweils identischen Abmessungen auf. Aus mathematischer Sicht bezeichnet ein solches Paar einen gemeinsamen Rand. Hieraus ergibt sich gemäß der zugrunde liegenden Differentialgleichungen die Forderung nach Gleichheit der Funktionswerte und der ersten Ableitungen an periodischen Rändern. Anschaulich läßt sich diese Randbedingung wie folgt interpretieren: Ein aus einem Rand ausströmendes Fluid taucht mit den gleichen Eigenschaften am zugeordneten Zwillingsrand wieder auf. Die folgenden, physikalisch motivierten Randbedingungen werden zur Charakterisierung periodischer Ränder benutzt:

$$\mathbf{n} \circ (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e) \Big|_{\Gamma_{z,i}^{up}} + \mathbf{n} \circ (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e) \Big|_{\Gamma_{z,j}^{up}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_{z,i}^{up}} = \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_{z,j}^{up}}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{n} \circ \lambda \nabla \vartheta \Big|_{\Gamma_{z,i}^{\vartheta}} + \mathbf{n} \circ \lambda \nabla \vartheta \Big|_{\Gamma_{z,j}^{\vartheta}} = 0, \quad \vartheta \Big|_{\Gamma_{z,i}^{\vartheta}} = \vartheta \Big|_{\Gamma_{z,j}^{\vartheta}}, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{n} \circ \nu_k \nabla k \Big|_{\Gamma_{z,i}^{k\varepsilon}} + \mathbf{n} \circ \nu_k \nabla k \Big|_{\Gamma_{z,j}^{k\varepsilon}} = 0, \quad k \Big|_{\Gamma_{z,i}^{k\varepsilon}} = k \Big|_{\Gamma_{z,j}^{k\varepsilon}}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{n} \circ \nu_\varepsilon \nabla \varepsilon \Big|_{\Gamma_{z,i}^{k\varepsilon}} + \mathbf{n} \circ \nu_\varepsilon \nabla \varepsilon \Big|_{\Gamma_{z,j}^{k\varepsilon}} = 0, \quad \varepsilon \Big|_{\Gamma_{z,i}^{k\varepsilon}} = \varepsilon \Big|_{\Gamma_{z,j}^{k\varepsilon}}. \quad (2.63)$$

Für die Impulstransportgleichung ist die Bedingung (2.60) mit sich aufhebenden Kräften und identischen Geschwindigkeiten an paarweise periodischen Rändern ausreichend. Eine geringfügige Modifikation

$$\mathbf{n} \circ ((p + \Delta p_z)\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e) \Big|_{\Gamma_{z,i}^{up}} + \mathbf{n} \circ (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_e) \Big|_{\Gamma_{z,j}^{up}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_{z,i}^{up}} = \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_{z,j}^{up}} \quad (2.64)$$

beinhaltet zusätzlich den Drucksprung Δp_z zwischen zwei periodischen Rändern. Dieses Druckgefälle bewirkt einen zusätzlichen Antrieb der Strömung und erweitert damit das Einsatzspektrum periodischer Randbedingungen.

2.7 Wandfunktionen

Das k - ε Turbulenzmodell wurde unter der Annahme isotroper Turbulenz und für hohe Reynolds-Zahlen abgeleitet. Beide Annahmen werden in den sich an Wänden

ausbildenden Grenzschichten verletzt, so daß eine besondere Behandlung dieser Regionen erforderlich ist. Prinzipiell lassen sich drei unterschiedliche Herangehensweisen bei der Modellierung wandnaher Bereiche unterscheiden [23]. Low-Reynolds-Modelle ermöglichen ein Relaminarisieren der Strömung durch Einbringung zusätzlicher Dämpfungsfunktionen in die Transportgleichungen für k und ε , die insbesondere in Wandnähe wirksam werden. Der Einsatz solcher Modelle ist mit der Forderung einer ausreichend feinen Auflösung der Grenzschicht verknüpft, in der auch die laminare Unterschicht durch eine Reihe von Diskretisierungsstellen vertreten sein muß. Demgegenüber steht die Verwendung von Wandfunktionen, bei der der Grenzschichtbereich aus dem Berechnungsgebiet der Turbulenzgrößen ausgeblendet ist. Statt dessen werden an der so gebildeten inneren Berandung Beziehungen aus der Grenzschichttheorie als Randbedingung verwendet. Eine Mischform dieser beiden Vorgehensweisen ist die Anwendung von Eingleichungsmodellen im Übergangsbereich, in denen lediglich die k -Gleichung bis an die Wand gilt. Für die Dissipation hingegen, deren Definitionsbereich ähnlich wie bei der Verwendung von Wandfunktionen auf einen inneren Bereich eingeschränkt ist, wird eine algebraische Beziehung, in die die turbulente kinetische Energie an dieser Stelle eingeht, als Randbedingung gestellt.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Verwendung von Wandfunktionen, die auch in wandnäheren Bereichen als Standardfunktionen gültig sind. Zunächst machen die in der Grenzschichttheorie benutzten Ähnlichkeitsbeziehungen einige Definitionen erforderlich. Mit der auf die Wand wirkenden Schubspannung $\tau_{w,g}$ wird zunächst die Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau := \sqrt{\tau_{w,g}} \quad (2.65)$$

gebildet. Darauf aufbauend sind die universellen Grenzschichtgrößen wie folgt definiert:

$$u^+ := \frac{u_g}{u_\tau}, \quad y^+ := \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad \vartheta^+ := \frac{c_p u_\tau (\vartheta_{w,g} - \vartheta_g)}{\dot{q}_{w,g}}. \quad (2.66)$$

Hierbei kennzeichnet der Index g Größen in der Grenzschicht. Die Koordinate y steht senkrecht auf der Wand (vgl. Abbildung 2.3).

Bei der Ableitung von Wandgesetzen kann man zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Herangehensweisen unterscheiden [47]. Unter der Annahme unvollständiger Ähnlichkeit im turbulenten Übergangsbereich erhält man mit Reynolds-Zahl und Geometrie skalierende, exponentielle Funktionen. Demgegenüber soll sich hier auf vollständige Ähnlichkeit beschränkt werden. Das unter dieser Voraussetzung hergeleitete und bereits auf VON KÁRMÁN und PRANDTL zurückgehende universelle Wandgesetz kann für hydraulisch glatte Wände [43] als

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & : y^+ \leq 11,06 \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5,2 & : y^+ > 11,06 \quad \text{mit } \kappa = 0,41 \end{cases} \quad (2.67)$$

angegeben werden. Die Form der Gleichung deutet bereits auf das Vorhandensein von zwei physikalisch unterschiedlich zu beschreibenden Regionen hin. In der laminaren Unterschicht besteht direkte Proportionalität zwischen Wandabstand und Geschwindigkeit, die in einen logarithmischen Zusammenhang im turbulenten Bereich der Grenzschicht übergeht. Das dazwischenliegende Übergangsgebiet wird in (2.67) nicht gesondert behandelt, so daß der Umschlagpunkt $y^+ = 11,06$ lediglich aus der Stetigkeit von u^+ resultiert. Die universelle Temperatur ϑ^+ kann in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl durch eine (2.67) analoge Beziehung ausgedrückt werden. Um den Übergangsbereich besser zu erfassen, haben YUAN et al. [48] anhand experimenteller Ergebnisse empirische Wandfunktionen aufgestellt, die vier Schichten innerhalb der turbulenten Grenzschicht unterscheiden. Eine ebenso gute Übereinstimmung zu Meßwerten kann auch mit der jüngst von NEITZKE [22] vorgeschlagenen Beziehung

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & : y^+ \leq R_u \\ R_u \sqrt{2 \ln \left(\frac{y^+}{R_u} \right) + 1} & : y^+ > R_u \end{cases} \quad (2.68)$$

erzielt werden. Sie läßt sich analytisch durch Integration der in der Grenzschicht als konstant angenommenen Schubspannung

$$\tau_g = \nu_e \frac{\partial u_g}{\partial y} \quad (2.69)$$

in Verbindung mit dem von ALBRING [49] vorgeschlagenen Wirbelviskositätsansatz

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{min}} \quad (2.70)$$

herleiten. Lediglich mit der freien Konstante R_u erfolgte eine Anpassung an Meßwerte

$$R_u := \sqrt{\text{Re}_{min}} = 6,25. \quad (2.71)$$

Übrigens ist dies die einzige der hier erwähnten Wandfunktionen, die sowohl im Funktionswert als auch in der Ableitung stetig ist und damit die Stabilität der sie benutzenden numerischer Verfahren nicht negativ beeinflußt. Eine Gegenüberstellung der unterschiedlichen Wandfunktionsverläufe zeigt Abbildung 2.4.

Im Fall nichtisothermer Strömung mit Dirichletschen Temperaturrandbedingungen wird eine weitere Wandfunktion für ϑ^+ erforderlich. Überträgt man die Vorgehensweise bei der Herleitung von (2.68) auf die Temperatur, so ergibt sich mit den gleichen Eigenschaften wie für u^+ die Beziehung

$$\vartheta^+ = \begin{cases} \text{Pr } y^+ & : y^+ \leq R_\vartheta \\ \text{Pr } R_\vartheta \sqrt{2 \ln \left(\frac{y^+}{R_\vartheta} \right) + 1} & : y^+ > R_\vartheta. \end{cases} \quad (2.72)$$

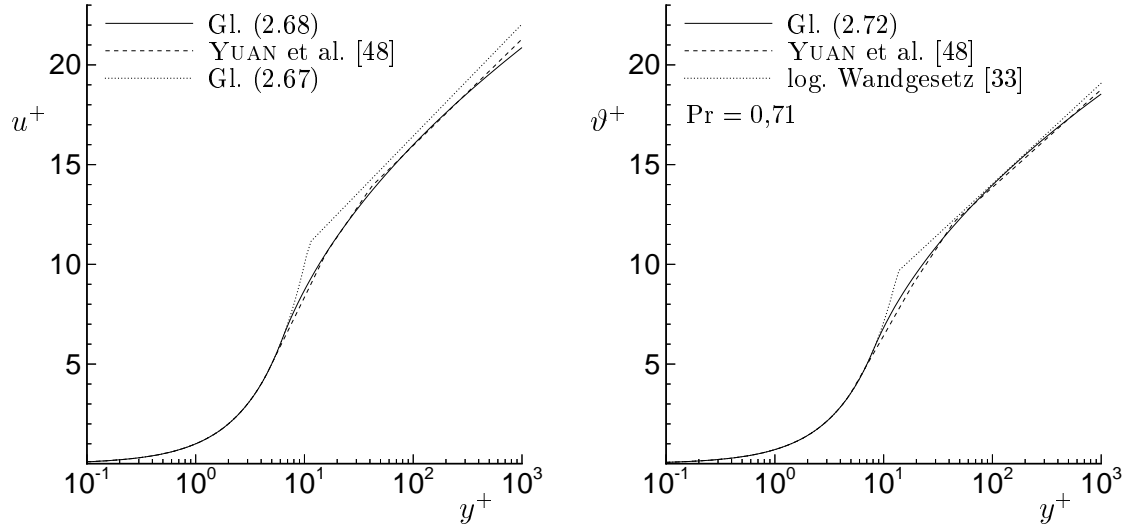


Abbildung 2.4: Vergleich verschiedener Wandfunktionen für u^+ und ϑ^+ .

Für $Pr = 0,71$ ergibt sich mit $R_\vartheta = 8,0$ eine sehr gute Widerspiegelung experimenteller Ergebnisse (vgl. Abbildung 2.4). Einschränkend muß jedoch bemerkt werden, daß die Wandfunktionen für u^+ nur aus einer isothermen Grenzschichtbetrachtung abgeleitet wurden. Insofern ist auch deren Einsatz beim Vorhandensein von Temperaturgradienten mit einem größeren Fehler verbunden.

Anhand der Definitionen

$$k^+ := \frac{k_g}{u_\tau^2}, \quad \varepsilon^+ := \frac{\varepsilon_g \nu}{u_\tau^4} \quad (2.73)$$

läßt sich der Verlauf dieser Kenngrößen im Bereich $20 \leq y^+ \leq 100$ der turbulenten Grenzschicht mit

$$k^+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+} \quad (2.74)$$

angeben. Aufgrund experimenteller Untersuchungen werden wiederum von YUAN et al. [48] die Modifikationen

$$k^+ = \min \left(\frac{1}{\sqrt{C_\mu}}; 0,05(y^+)^2 \right), \quad \varepsilon^+ = \frac{0,1 + 0,003(y^+)^2}{1 + 0,00125(y^+)^3} \quad (2.75)$$

vorgeschlagen. Sie sind bis in den Bereich der laminaren Unterschicht verwendbar und liefern mit $k^+ = 0$ an der Wand den richtigen Grenzwert (vgl. Abbildung 2.5).

Das Zusammenwirken zwischen Wandfunktionen und Turbulenzmodell an der inneren Berandung $\Gamma_{d+\delta}$, die per Definition in der Grenzschicht liegen soll, kann im nichtisothermen Fall folgendermaßen beschrieben werden. Zunächst wird eine

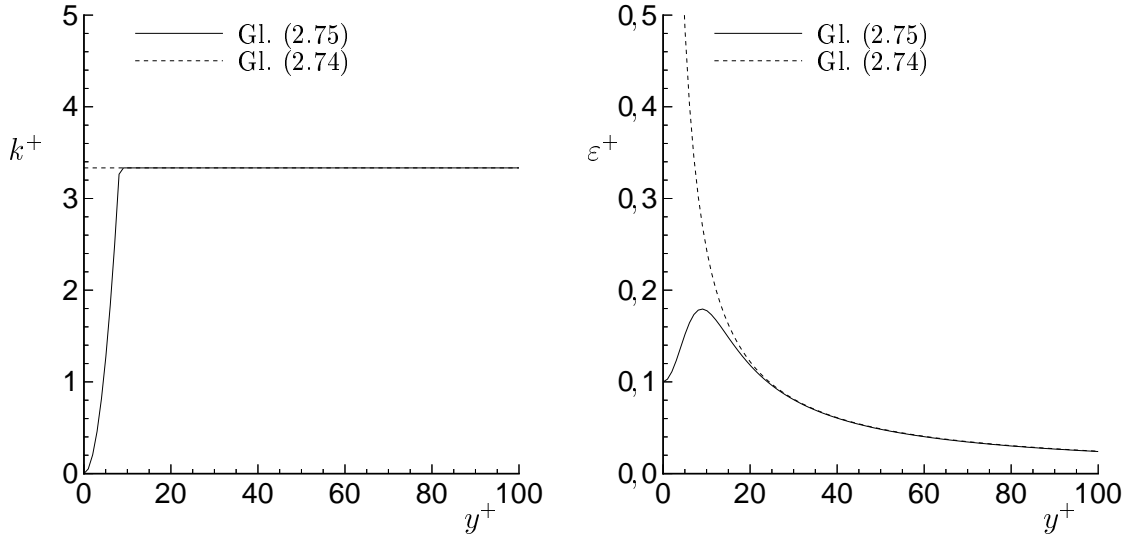


Abbildung 2.5: Darstellung der in der laminaren Unterschicht modifizierten Wandfunktionen für k^+ und ε^+ .

wirksame Geschwindigkeit an $\Gamma_{d+\delta}^{up}$ ermittelt. Unter diesem Begriff ist die relativ zur Wandgeschwindigkeit gebildete und in der Wandebene liegende Geschwindigkeit an der inneren Berandung zu verstehen. Mit den Festlegungen

$$\mathbf{u}_w := \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_d^{up}}, \quad \mathbf{u}_\delta := \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_{d+\delta}^{up}} \quad (2.76)$$

kann die wirksame Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{u}}$ (vgl. Abbildung 2.6) wie folgt definiert werden

$$\hat{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_\delta - (\mathbf{n} \circ \mathbf{u}_\delta) \mathbf{n} - \mathbf{u}_w. \quad (2.77)$$

Diese Geschwindigkeit stellt die Eingangsgröße

$$u_g(\delta_w) = |\hat{\mathbf{u}}| \quad (2.78)$$

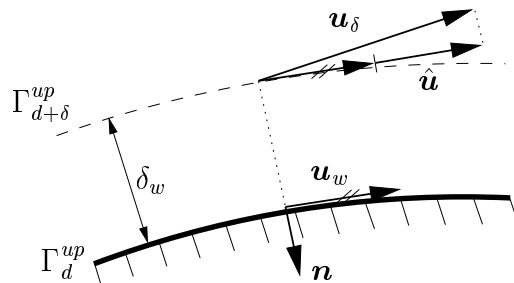


Abbildung 2.6: Geschwindigkeiten am inneren Rand $\Gamma_{d+\delta}^{up}$.

für die Wandfunktion (2.68) dar, aus der über $u_\tau = f(y^+, u^+)$ iterativ die Wand Schubspannung $\tau_{w,g}$ ermittelt wird. Bei Vorgabe einer Wandtemperatur ist zusätzlich aus der Temperatur am Rand der Kernströmung

$$\vartheta_g(\delta_w) = \vartheta \Big|_{\Gamma_{d+\delta}^\vartheta} \quad (2.79)$$

mittels (2.72) der turbulente Wärmestrom $\dot{q}_{w,g}$ zu bestimmen. Ursprünglich Dirichletsche Randbedingungen für die Bewegungs- und Energiegleichung lassen sich auf diese Weise in Ableitungen enthaltende Randbedingungen an der äußeren Begrenzung umformulieren. Die Wandschubspannung wird in Richtung der wirksamen Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{u}}$ angesetzt

$$\boldsymbol{\tau}_w = \begin{cases} \tau_{w,g} \frac{\hat{\mathbf{u}}}{|\hat{\mathbf{u}}|} & : \quad |\hat{\mathbf{u}}| \neq 0 \\ \mathbf{0} & : \quad |\hat{\mathbf{u}}| = 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

und geht in dieser Form in die Randbedingung (2.58) ein. Mit der Beziehung

$$\dot{q}_w = \dot{q}_{w,g} \quad (2.81)$$

ist der Wärmestrom in (2.53) bestimmt. Schließlich wird mit u_τ und (2.75) eine Dirichletsche Randbedingung für die Turbulenzgrößen

$$k \Big|_{\Gamma_{d+\delta}^{k\varepsilon}} = k_g(\delta_w), \quad \varepsilon \Big|_{\Gamma_{d+\delta}^{k\varepsilon}} = \varepsilon_g(\delta_w) \quad (2.82)$$

an der inneren Berandung gestellt. Weitere typische Kombinationen von Randbedingungen und deren Verbindung mit Wandfunktionen sind in Tabelle 2.2 angeführt. Anhand der Lösung ist die Lage von $\Gamma_{d+\delta}$ gemäß dem Gültigkeitsbereich der Wandfunktionen zu kontrollieren und der zunächst angenommene Wert für \mathbf{u}_δ in (2.76)

Gleichung	Randbedingungstyp	
	Wand	Grenzfläche
Bewegungsgl.	Γ_d^{up} (intern mit Wandfkt. $\Gamma_d^{up} \mapsto \Gamma_w^{up}$)	Γ_w^{up}
Energiegl.	$\Gamma_d^\vartheta, \Gamma_n^\vartheta$ oder Γ_r^ϑ (falls Γ_d^ϑ : intern mit Wandfkt. $\Gamma_d^\vartheta \mapsto \Gamma_n^\vartheta$)	
Turbulenzgl.	(intern mit Wandfkt. $\Gamma_{d+\delta}^{k\varepsilon}$)	meist $\Gamma_n^{k\varepsilon}$ oder $\Gamma_d^{k\varepsilon}$

Tabelle 2.2: Vielfach genutzte Randbedingungen für Wände und Grenzflächen und deren Umformulierung mit Wandfunktionen (vgl. Abschnitt 2.6).

zu korrigieren. Das Zusammenwirken von Turbulenzmodell und Wandfunktionen ist somit nur in einem iterativen Prozeß zu realisieren.

Aus der bisherigen Darstellung wird bereits ersichtlich, wie sehr die verwendeten Wandfunktionen und deren Kopplung mit der Kernströmung die Eigenschaften des Turbulenzmodells bestimmen. Es existieren daher auch zahlreiche Varianten von Wandfunktionen, die weitere Phänomene in die Betrachtung einbeziehen. Als Beispiele seien hier überströmte raue Oberflächen [50] und ablösende Strömung [51] genannt.

2.8 Kräfte und Flüsse

Eine vielfach angewendete Methode zur qualitativen Bewertung von Impuls- und Energieströmen an Gebietsgrenzen ist die Verwendung integraler Kennwerte. Die Integration lokaler Größen wird hierbei entlang ausgewählter Teilränder durchgeführt.

An stoffdurchlässigen Berandungen wird der hindurchtretende Massestrom \dot{m} durch

$$\dot{m} = - \int_{\Gamma} \mathbf{u} \circ d\mathbf{n} \quad (2.83)$$

bestimmt. Bei nichtisothermen Strömungen ist zusätzlich die Kenntnis der mit dem Fluid über den Gebietsrand transportierten Energiemenge von Bedeutung. Durch den Enthalpiestrom

$$\dot{H} = - \int_{\Gamma} (c_p \vartheta + h_0) \mathbf{u} \circ d\mathbf{n} \quad (2.84)$$

wird dieser stoffgebundene Energietransport beschrieben. Aufgrund der dimensionslosen Darstellung ist die Enthalpie h_0 bei der Temperatur $\vartheta = 0$ definiert (vgl. Anhang A).

Die auf durch- und umströmte Körper einwirkenden Kräfte stellen eine weitere bedeutsame Fragestellung bei numerischen Strömungssimulationen dar. Von Vorteil erweist es sich, zwischen Kraftwirkungen infolge Reibung

$$\mathbf{F}_\nu = - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}_e \circ d\mathbf{n} \quad (2.85)$$

und Druck

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Gamma} p \mathbf{I} \circ d\mathbf{n} \quad (2.86)$$

zu unterscheiden. Nicht zuletzt ist in Strömungen mit Wärmeübergang der an der Oberfläche übertragene Wärmestrom

$$\dot{Q} = \int_{\Gamma} \lambda \nabla \vartheta \circ d\mathbf{n} \quad (2.87)$$

von Interesse.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß bei einer zweidimensionalen Betrachtung die hier aufgeführten integralen Größen auf die Referenzlänge \tilde{x}_R bezogen sind. Anschaulich betrachtet stellt \tilde{x}_R die Ausdehnung des Berechnungsgebietes in die fehlende Raumdimension dar.

3 Numerisches Modell

3.1 Systematisierung

Die im vorangegangenen Kapitel dargestellte Energiegleichung und die im turbulenten Fall auftretenden Gleichungen für k und ε weisen eine ähnliche Struktur auf. Es ist daher im Sinne einer übersichtlichen Vorgehensweise zweckmäßig, zunächst auf eine verallgemeinerte Form einzugehen. Jede der angesprochenen Gleichungen wird hierbei als eigenständige skalare Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung der Form

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}_\phi \phi := \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{b} \circ \nabla) \phi - \nabla \circ (\epsilon \nabla \phi) + c\phi = f_\phi \quad (3.1)$$

aufgefaßt. Die Zuordnung des Geschwindigkeitsfeldes, der Diffusions-, Reaktions- und Quellterme für die einzelnen Gleichungen ist in Tabelle 3.1 aufgeführt. Glieder, die keine direkte Entsprechung in (3.1) finden, sind in die Definition des Quellterms f_ϕ einbezogen. Für die die Dissipation beschreibende Transportgleichung findet noch eine weitere Betrachtungsweise Anwendung. Durch Abspaltung von ε in den nicht-linearen Gliedern ist es möglich, einen Reaktionsterm c einzuführen. Es wird sich dabei auf die in Tabelle 3.1 dargestellte Variante beschränkt.

Gleichung	ϕ	ϵ	\mathbf{b}	c	f_ϕ
Energiegleichung (2.46)	ϑ	a_e	\mathbf{u}	0	$\frac{\dot{q}^V}{c_p}$
k -Gleichung (2.47)	k	ν_k	\mathbf{u}	0	$P_k + G - \varepsilon$
ε -Gleichung (2.48)					
ohne Reaktionsterm	ε	ν_ε	\mathbf{u}	0	$C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P_k + G) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$
mit Reaktionsterm	ε	ν_ε	\mathbf{u}	$C_2 \frac{\varepsilon}{k}$	$C_1 \frac{\varepsilon}{k} (P_k + G)$

Tabelle 3.1: Definition der Terme ϵ , \mathbf{b} , c und f_ϕ für die Energie- und Turbulenzgleichungen beim Übergang zur allgemeinen Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung (3.1).

Die weitere Darstellung kann mit diesen Festlegungen vielfach auf die Behandlung der Bewegungsgleichung (2.44) und Kontinuitätsgleichung (2.45) mit einer oder mehreren Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen (3.1) reduziert werden. Lediglich bei der Kopplung der einzelnen Gleichungen und der Behandlung der nicht-linearen Terme wird auf die ursprüngliche Energiegleichung (2.46) und die Turbu-

lenzgleichungen (2.47), (2.48) zurückgegriffen.

Bei der Darlegung einzelner Aspekte des numerischen Verfahrens, z. B. der Zeitdiskretisierung und der Gebietszerlegung, ist es gelegentlich notwendig, sowohl auf die linearisierten als auch auf die nichtlinearen Gleichungen einzugehen. Daher soll bereits an dieser Stelle ein kurzer Einblick in die beiden verwendeten Linearisierungsstrategien gegeben werden. Zunächst erfolgt eine Linearisierung des Gesamtsystems durch Herauslösung einzelner Gleichungen und deren iterativer Kopplung untereinander. Dieser als äußere Linearisierung bezeichnete Prozeß ist für den kompliziertesten Fall einer nichtisothermen, turbulenten Strömung innerhalb eines Iterationsschrittes l innerhalb der übergeordneten Zeitschleife wie folgt zu beschreiben:

1. Berechne Transportkoeffizienten mittels $\nu_t^l = C_\mu \frac{(k^{l-1})^2}{\varepsilon^{l-1}}$.

2. Löse System aus Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^l}{\partial t} + (\mathbf{u}^{l-1} \circ \nabla) \mathbf{u}^l - \nabla \circ (\nu_e^l \mathbf{D}(\mathbf{u}^l)) + \nabla p^l &= \mathbf{f}_u(\vartheta^{l-1}), \\ \nabla \circ \mathbf{u}^l &= 0. \end{aligned}$$

3. Löse Energiegleichung:

$$\frac{\partial \vartheta^l}{\partial t} + (\mathbf{u}^l \circ \nabla) \vartheta^l - \nabla \circ (a_e^l \nabla \vartheta^l) = \frac{\dot{q}^V}{c_p}.$$

4. Löse nacheinander Turbulenzgleichungen mit $f_{k\varepsilon}^l := P_k(\nu_t^l, \mathbf{u}^l) + G(\nu_t^l, \vartheta^l)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^l}{\partial t} + (\mathbf{u}^l \circ \nabla) k^l - \nabla \circ (\nu_k^l \nabla k^l) &= f_{k\varepsilon}^l - \varepsilon^{l-1}, \\ \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial t} + (\mathbf{u}^l \circ \nabla) \varepsilon^l - \nabla \circ (\nu_\varepsilon^l \nabla \varepsilon^l) &= C_1 \frac{\varepsilon^{l-1}}{k^{l-1}} f_{k\varepsilon}^l - C_2 \frac{(\varepsilon^{l-1})^2}{k^{l-1}}. \end{aligned}$$

5. Teste geeignetes Abbruchkriterium: Springe zu 1. mit $l \mapsto l + 1$ bei Nichterfüllung.

Zusammenfassend kann dieses Schema als Block–Gauß–Seidel–Iteration mit festgehaltenen Koeffizienten beschrieben werden. Eine Ausnahme bilden die turbulente kinetische Energie sowie die Dissipation, die zur Erhöhung der Stabilität des Verfahrens jeweils dem letzten Iterationsschritt entnommen sind. Entsprechende Vereinfachungen ergeben sich, wenn weniger Gleichungen zur Problembeschreibung erforderlich sind.

Bei Verwendung des in Abschnitt 3.2.3 erläuterten iterativen $DG_N^u(1)$ -Verfahrens

geht die Navier–Stokes Gleichung in zwei eng gekoppelte Gleichungen über. Deren iterative Kopplung wird gleichzeitig genutzt, um den Konvektionsterm $(\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u}$ zu linearisieren. Hierbei kann auch von einer inneren Linearisierung gesprochen werden, da nur eine nichtlineare Gleichung betroffen ist. Insofern ist die obige Darstellung der äußeren Linearisierung nur in Verbindung mit der zeitlich konstanten Approximation eines Zeitschrittes des DG(0)–Verfahrens exakt. In Abschnitt 3.7 und 3.8 wird diese Thematik noch einmal aufgegriffen und unter dem Gesichtspunkt der diskreten Gleichungssysteme vertieft.

3.2 Zeitliche Diskretisierung

3.2.1 Diskontinuierliche Galerkin–Methode

Die diskontinuierliche Galerkin–Methode kann als Semidiskretisierung in der Zeit mittels eines Finite–Elemente Konzeptes interpretiert werden. Ein wesentliches Merkmal ist die Gewährleistung der Galerkin–Orthogonalität, die den Ausgangspunkt für quasi–optimale a–priori Fehlerabschätzungen und bei Verwendung adaptiver Verfahren die Basis von a–posteriori Fehlerabschätzungen bilden (vgl. [15]). Zugleich läßt sich zeigen, daß bekannte instationäre Verfahren aus dieser allgemeinen Methode abgeleitet werden können (siehe Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3).

Im Sinne einer hierarchischen Vorgehensweise wird zunächst kurz die Variationsformulierung für den stationären Fall vorgestellt. Da auf die Behandlung von unterschiedlichen Randbedingungen in Abschnitt 3.4.2 ausführlich eingegangen wird, beschränkt sich die folgende Darstellung auf homogene Dirichletsche Randbedingungen

$$\phi = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Auf dem hinreichend glatten räumlichen Lösungsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ werden folgende Funktionenräume definiert:

$$V_0^u := H_0^1(\Omega)^d, \quad V^p := L^2(\Omega), \quad V_0^\phi := H_0^1(\Omega). \quad (3.3)$$

Weiterhin werden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\nu_e}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} p (\nabla \circ \mathbf{v}) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$A_G^p(\mathbf{u}, q) := \int_{\Omega} (\nabla \circ \mathbf{u}) q \, d\Omega, \quad (3.5)$$

$$A_G^\phi(\phi, \psi) := \int_{\Omega} (\mathbf{b} \circ \nabla) \phi \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon \nabla \phi \circ \nabla \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} c \phi \psi \, d\Omega \quad (3.6)$$

und Linearformen

$$F_G^u(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (3.7)$$

$$F_G^\phi(\psi) := \int_{\Omega} f_\phi \psi \, d\Omega \quad (3.8)$$

eingeführt. Die gemischte Variationsformulierung der stationären Form der Impulstransportgleichung (2.44) in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung (2.45) lautet nun:

$$\begin{cases} \text{Finde } \mathbf{u} \in V_0^u, p \in V^p \text{ für alle } \mathbf{v} \in V_0^u, q \in V^p \text{ mit} \\ A_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) = F_G^u(\mathbf{v}), \\ A_G^p(\mathbf{u}, q) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Für die stationäre Variante der Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung (3.1) ergibt sich in analoger Weise

$$\begin{cases} \text{Finde } \phi \in V_0^\phi \text{ für alle } \psi \in V_0^\phi \text{ mit} \\ A_G^\phi(\phi, \psi) = F_G^\phi(\psi). \end{cases} \quad (3.10)$$

Beim Übergang zur diskontinuierlichen Galerkin–Methode wird das räumliche Lösungsgebiet Ω um die zeitliche Dimension I zu

$$Q = \Omega \times I \quad (3.11)$$

erweitert. Der Rand dieses Gebietes auf dem Intervall $I = (0, T]$ ist mit

$$P = \partial\Omega \times I = \Gamma \times I \quad (3.12)$$

bezeichnet (siehe Abbildung 3.1). Weiterhin gehen mit der Definition $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ die auf Q angepaßten Funktionenräume W_0^u , W^p und W_0^ϕ über die Bildungsvorschrift*

$$W^X := \{v : v \in L^2(I; V^X) : \partial_t v \in L^2(I; \check{V}^X)\}, \quad (3.13)$$

$$W_0^X := \{v : v \in L^2(I; V_0^X) : \partial_t v \in L^2(I; \check{V}_0^X)\} \quad (3.14)$$

mit $X = u, p, \phi$ aus denen auf Ω definierten Räumen (3.3) hervor. Mit

$$\phi_0 = \phi(t = 0), \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t = 0) \quad (3.15)$$

können für die instationären Probleme Variationsformulierungen mit schwach gestellten Anfangsbedingungen aufgestellt werden. Für (3.1) und der Randbedingung $\phi = 0$ auf P erhält man auf diese Art: Gesucht ist $\phi \in W_0^\phi$ mit

$$\begin{aligned} & \int_I \int_\Omega \partial_t \phi \psi \, d\Omega \, dI + \int_I A_G^\phi(\phi, \psi) \, dI + \int_\Omega \phi(0) \psi(0) \, d\Omega \\ &= \int_I F_G^\phi(\psi) \, dI + \int_\Omega \phi_0 \psi(0) \, d\Omega \quad \forall \psi \in W_0^\phi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bei der diskontinuierlichen Galerkin–Methode wird in einem weiteren Schritt der parabolische Charakter der Zeit, worunter anschaulich die Ausbreitung von Informationen lediglich in Richtung der positiven Zeitachse verstanden werden kann,

*An den Raum \check{V} können hier geringere Anforderungen als an V gestellt werden, es gilt $V \subset \check{V}$. Speziell ist $\check{V}_0^u := L^2(\Omega)^d$ und $\check{V}_0^\phi := L^2(\Omega)$ ausreichend.

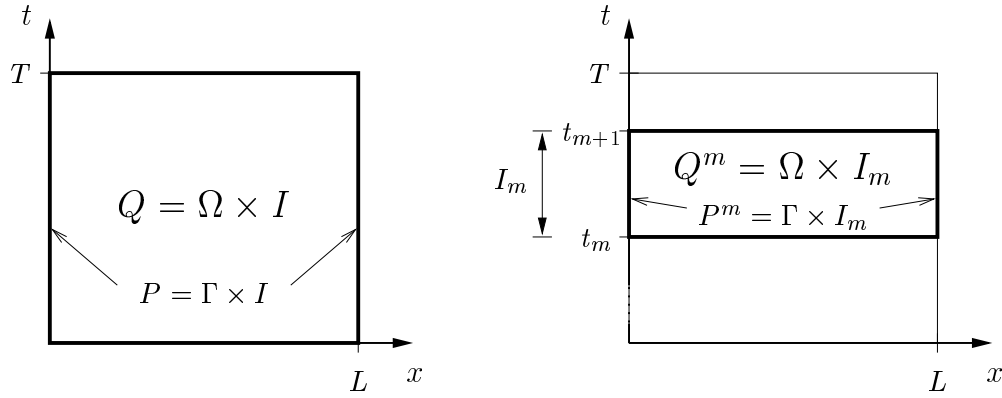


Abbildung 3.1: Definitionen auf dem Lösungsgebiet vor und nach der Einführung diskreter Zeitschichten.

ausgenutzt, um das Gesamtproblem in eine Folge von elliptischen Teilproblemen zu zerlegen. Hierbei werden durch Einführung diskreter Zeitpunkte

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{M+1} = T \quad (3.17)$$

die Intervalle $I_m := [t_m, t_{m+1}]$ mit der Zeitschrittweite $\Delta t := t_{m+1} - t_m$ gebildet. Auf der Folge von Zeitscheiben $Q^m = \Omega \times I_m$ sind die zugeordneten Räume über die Beziehung

$$W_\tau^X := \{v : v \in L^2(I; V^X) : v|_{Q^m} \in \Pi_r^m(V^X), m = 1, \dots, M\}, \quad (3.18)$$

$$W_{\tau,0}^X := \{v : v \in L^2(I; V_0^X) : v|_{Q^m} \in \Pi_r^m(V_0^X), m = 1, \dots, M\} \quad (3.19)$$

und

$$\Pi_r^m(V) := \{w : w = \sum_{i=0}^r v_{(i)} t^i, r \in \mathbb{N}_0, v_{(i)} \in V, t \in I_m\} \quad (3.20)$$

bestimmt. Damit besteht W_τ in jeder Zeitschicht aus Polynomen mit dem maximalen Grad r in der Zeit und Koeffizienten in den Funktionsräumen V der stationären Probleme. Aufgrund der diskontinuierlich definierten Funktionen an den Grenzen von Q^m werden über

$$\mathbf{u}_\pm^m := \lim_{s \rightarrow +0} \mathbf{u}(t_m \pm s), \quad \phi_\pm^m := \lim_{s \rightarrow +0} \phi(t_m \pm s) \quad (3.21)$$

die Sprungterme

$$[\mathbf{u}^m] := \mathbf{u}_+^m - \mathbf{u}_-^m, \quad [\phi^m] := \phi_+^m - \phi_-^m \quad (3.22)$$

eingeführt. Mit

$$A_{DG}^{\phi,m}(\phi, \psi) := \int_{I_m} \int_{\Omega} \partial_t \phi \psi \, d\Omega \, dI + \int_{I_m} A_G^\phi(\phi, \psi) \, dI, \quad (3.23)$$

$$F_{DG}^{\phi,m}(\psi) := \int_{I_m} F_G^\phi(\psi) \, dI \quad (3.24)$$

läßt sich die Variationsformulierung (3.16) in folgender Weise umformulieren: Bestimme $\phi \in W_{\tau,0}^\phi$ so, daß

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \left(A_{DG}^{\phi,m}(\phi, \psi) + \int_{\Omega} [\phi^m] \psi_+^m \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \phi_+^0 \psi_+^0 \, d\Omega \\ &= \sum_{m=0}^M F_{DG}^{\phi,m}(\psi) + \int_{\Omega} \phi_0 \psi_+^0 \, d\Omega \quad \forall \psi \in W_{\tau,0}^\phi \end{aligned} \quad (3.25)$$

gilt. Aufeinanderfolgende Zeitschichten sind lediglich in schwacher Form über den Sprungterm $[\phi^m]$ gekoppelt, wodurch die summarische Formulierung (3.25) in eine Folge von Teilaufgaben überführt werden kann. Die diskontinuierliche Galerkin-Methode $DG(r)$ angewendet auf (3.1) lautet somit: Für alle $\psi \in \Pi_r^m(V_0^\phi)$ auf Q^m , $m = 1, \dots, M$ wird $\phi \in \Pi_r^m(V_0^\phi)$ mit

$$A_{DG}^{\phi,m}(\phi, \psi) + \int_{\Omega} \phi_+^m \psi_+^m \, d\Omega = F_{DG}^{\phi,m}(\psi) + \int_{\Omega} \phi_-^m \psi_+^m \, d\Omega \quad (3.26)$$

und $\phi_-^0 = \phi_0$ gesucht.

Aus einer analogen Betrachtung ergibt sich basierend auf (3.9) und

$$A_{DG}^{u,m}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) := \int_{I_m} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \, d\Omega \, dI + \int_{I_m} A_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) \, dI, \quad (3.27)$$

$$A_{DG}^{p,m}(\mathbf{u}, q) := \int_{I_m} A_G^p(\mathbf{u}, q) \, dI, \quad (3.28)$$

$$F_{DG}^{u,m}(\mathbf{v}) := \int_{I_m} F_G^u(\mathbf{v}) \, dI \quad (3.29)$$

die $DG(r)$ -Formulierung für das System aus Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung mit $\mathbf{u} = 0$ auf P^m : Finde $\mathbf{u} \in \Pi_r^m(V_0^u)$ und $p \in \Pi_r^m(V^p)$ für alle $\mathbf{v} \in \Pi_r^m(V_0^u)$, $q \in \Pi_r^m(V^p)$, $m = 1, \dots, M$ auf Q^m mit

$$A_{DG}^{u,m}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{u}_+^m \circ \mathbf{v}_+^m \, d\Omega = F_{DG}^{u,m}(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \mathbf{u}_-^m \circ \mathbf{v}_+^m \, d\Omega, \quad (3.30)$$

$$A_{DG}^{p,m}(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (3.31)$$

und $\mathbf{u}_-^0 = \mathbf{u}_0$.

Durch geeignete Wahl von Π_r^m lassen sich auf diese Weise A-stabile Verfahren höherer Genauigkeit ableiten. Im Rahmen dieser Arbeit wird die weitere Betrachtung in den nächsten beiden Abschnitten auf

- $r = 0$ bei Verwendung großer Zeitschrittweiten, gegebenenfalls zum schnellen Erreichen eines stationären Zustandes und
- $r = 1$ für zeitgenaue Berechnungen

beschränkt. Zunächst erfolgt die analytische Auswertung der zeitlichen Integrale. Anschließend werden die verbleibenden räumlichen Variationsformulierungen in einer kompakten Schreibweise zusammengefaßt, um die sich ergebenden Algorithmen in einer einheitlichen Form darzustellen.

3.2.2 Konstanter Zeitansatz

Aus (3.20) folgt, daß für DG(0) die gleichen Funktionenräume wie in der stationären Variationsformulierung Anwendung finden:

$$\Pi_0^m(V) = \{w : w = v, v \in V\}. \quad (3.32)$$

An den Grenzen der Zeitintervalle (vgl. Abbildung 3.2) gilt

$$\partial_t \phi = 0, \quad \phi_+^m = \phi^m, \quad \phi_-^m = \phi^{m-1}, \quad \psi_+^m = \psi^m, \quad \phi, \psi \in \Pi_0^m(V_0^\phi) \quad (3.33)$$

womit (3.26) als

$$A_{DG}^{\phi,m}(\phi, \psi) + \int_{\Omega} \phi^m \psi^m \, d\Omega = F_{DG}^{\phi,m}(\psi) + \int_{\Omega} \phi^{m-1} \psi^m \, d\Omega \quad \forall \psi^m \quad (3.34)$$

geschrieben werden kann. Approximiert man \mathbf{b} , ϵ , c und f_ϕ ebenfalls als konstant innerhalb der Zeitscheiben, so ergibt sich nach Auswertung der Zeitintegration

$$A_{DG}^{\phi,m}(\phi, \psi) = \Delta t_m A_G^\phi(\phi^m, \psi^m), \quad F_{DG}^{\phi,m}(\psi) = \Delta t_m F_G^\phi(\psi^m). \quad (3.35)$$

Die so erhaltene Form

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\phi^m - \phi^{m-1}}{\Delta t_m} \psi^m \right) d\Omega + A_G^\phi(\phi^m, \psi^m) = F_G^\phi(\psi^m) \quad \forall \psi^m \quad (3.36)$$

ist identisch mit der Euler-rückwärts-Diskretisierung von (3.1) und einer Variationsformulierung des semidiskreten Problems. Mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^\phi(\phi, \psi) &:= A_G^\phi(\phi, \psi) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega, \\ \mathcal{F}_0^\phi(\phi, \psi) &:= F_G^\phi(\psi) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

kann die DG $^\phi(0)$ -Methode verkürzt in folgender Form dargestellt werden: Bestimme $\phi^m \in V_0^\phi$ aus

$$\mathcal{A}_0^\phi(\phi^m, \psi^m) = \mathcal{F}_0^\phi(\phi^{m-1}, \psi^m) \quad \forall \psi^m \in V_0^\phi.$$

Bei der Übertragung dieser Vorgehensweise auf die Bewegungsgleichung wird bereits innerhalb der Zeitdiskretisierung der Term $(\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u}$ linearisiert. Die Aufspaltung von A_G^u aus (3.4) in

$$B_G^u(\mathbf{u}, \mathbf{a}; \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (3.37)$$

$$C_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{\nu_e}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \circ \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (3.38)$$

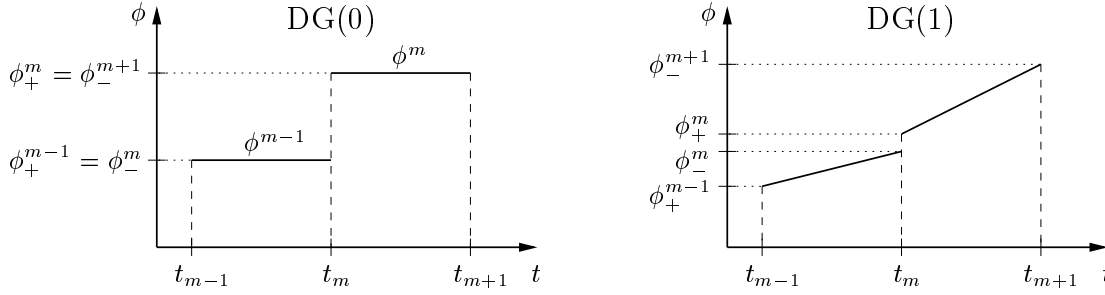


Abbildung 3.2: Bezeichnungen bei der Approximation der Größe ϕ durch das DG(0)- und DG(1)-Verfahren.

ermöglicht auf diese Weise eine entkoppelte Behandlung der Geschwindigkeiten im Konvektionsterm. Aus einer zu $DG^\phi(0)$ analogen Vorgehensweise ergibt sich basierend auf den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}) &:= B_G^u(\mathbf{u}, \mathbf{a}; \mathbf{v}) + C_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t_m} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \mathcal{F}_0^u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= F_G^u(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t_m} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \mathcal{A}_0^p(\mathbf{u}, q) &:= A_G^p(\mathbf{u}, q) \end{aligned}$$

die $DG^u(0)$ -Formulierung für (3.30) und (3.31): Finde $u^m \in V_0^u$, $p^m \in V^p$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^u(\mathbf{u}^m, p^m, \underline{\mathbf{u}}^m; \mathbf{v}^m) &= \mathcal{F}_0^u(\mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{v}^m) \quad \forall \mathbf{v}^m \in V_0^u, \\ \mathcal{A}_0^p(\mathbf{u}^m, q^m) &= 0 \quad \forall q^m \in V^p. \end{aligned}$$

Mit dem zweifach auftretenden Argument des Geschwindigkeitsfeldes soll die Nichtlinearität der obigen Variationsformulierung verdeutlicht werden. Gleichzeitig stellt $\underline{\mathbf{u}}^m$ die Verbindung zu \mathbf{u}^{l-1} bei der Darstellung der Kopplung der Gleichungen (äußere Linearisierung) in Abschnitt 3.8 dar. Das so erzeugte $DG^u(0)$ -Verfahren ist ebenso wie $DG^\phi(0)$ bezüglich der Zeit erster Ordnung genau.

3.2.3 Linearer Zeitansatz

Bei Verwendung linearer Ansatz- und Testfunktionen aus Π_1^m verdoppelt sich die Anzahl der Unbekannten innerhalb jedes Zeitschrittes (vgl. Abbildung 3.2). Der Speicherbedarf für die entstehenden Matrizen vergrößert sich gleichzeitig um den Faktor vier. Zur Vermeidung dieser Nachteile wird im weiteren auf eine Reduktion der entstehenden Probleme eingegangen. Hierbei erfolgt eine Zerlegung in Teilaufgaben, die die gleiche Dimension wie das DG(0)-Verfahren besitzen, sowie deren zweckmäßige iterative Kopplung. Die Wahl der zeitlichen Formfunktionen ist bei dieser Vorgehensweise für die Stabilität der so entstehenden Iterationsverfahren von Bedeutung.

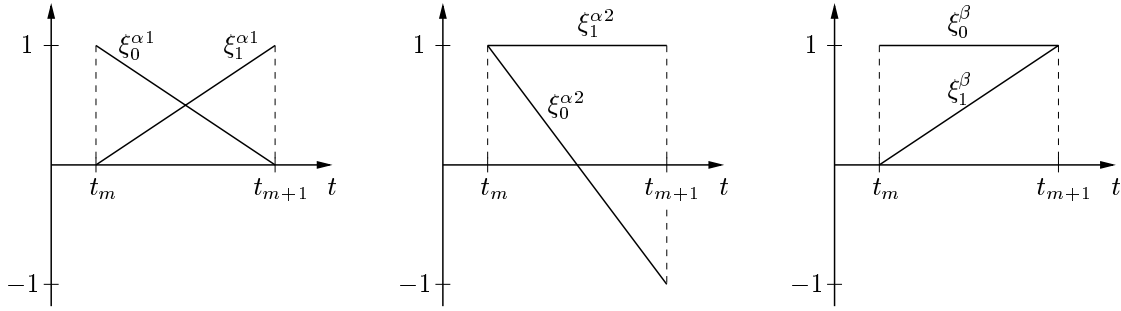


Abbildung 3.3: Darstellung der verwendeten zeitlichen Formfunktionen in (3.39).

Zwei Fälle lassen sich anhand der hier zugrunde liegenden Differentialgleichungen unterscheiden. Einerseits die Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung (3.1) mit bekanntem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{b} , das man wahlweise zeitlich konstant oder linear approximieren kann. Zum anderen die Impulsgleichung (2.44), bei der das unbekannte Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} bei DG(1) in jedem Fall zeitlich linear angenommen wird. Die Diffusionskoeffizienten ν_e , ϵ und der Reaktionsterm c werden jeweils als konstant innerhalb der Zeitintervalle I_m approximiert. Zunächst soll Gleichung (3.1) mit zeitlich konstantem \mathbf{b}^m betrachtet werden.

In Anlehnung an SHAKIB et al. [52], die ein iteratives DG(1)–Verfahren für die kompressible Navier–Stokes Gleichung vorstellen, ist der Funktionenraum der Ansatzfunktionen $\Pi_1^{m,\alpha 1}$ und Testfunktionen $\Pi_1^{m,\alpha 2}$ entsprechend

$$\Pi_1^{m,Y}(V) = \{w : w = \xi_0^Y v_{(0)} + \xi_1^Y v_{(1)}, v_{(i)} \in V\} \quad (3.39)$$

mit $Y = \alpha 1, \alpha 2$ über

$$\xi_0^{\alpha 1} = \frac{t_{m+1} - t}{\Delta t_m}, \quad \xi_1^{\alpha 1} = \frac{t - t_m}{\Delta t_m}, \quad \xi_0^{\alpha 2} = \frac{t_{m+1} + t_m - 2t}{\Delta t_m}, \quad \xi_1^{\alpha 2} = 1, \quad t \in I_m \quad (3.40)$$

bestimmt (vgl. Abbildung 3.3). An den Grenzen von I_m (vgl. Abbildung 3.2) gilt dementsprechend:

$$\partial_t \phi = \frac{-\phi_{(0)}^m + \phi_{(1)}^m}{\Delta t_m}, \quad \phi_+^m = \phi_{(0)}^m, \quad \phi_-^m = \phi_{(1)}^{m-1}, \quad \phi \in \Pi_1^{m,\alpha 1}(V_0^\phi), \quad (3.41)$$

$$\psi_+^m = \psi_{(0)}^m + \psi_{(1)}^m, \quad \psi \in \Pi_1^{m,\alpha 2}(V_0^\phi). \quad (3.42)$$

Das Einsetzen dieser Größen in (3.26) und Ausführung der zeitlichen Integration, wobei der Quellterm $f_\phi \in \Pi_1^{m,\alpha 1}(L^2(\Omega))$ ebenfalls aus dem Raum der Ansatzfunktionen approximiert wird, führt mit

$$\begin{aligned} L_{(0)}^{\phi,\alpha}(\psi) &:= \frac{1}{\Delta t_m} F_{DG}^{\phi,m}(\xi_0^{\alpha 2} \psi) = \int_{\Omega} \frac{f_{\phi,(0)}^m - f_{\phi,(1)}^m}{6} \psi \, d\Omega, \\ L_{(1)}^{\phi,\alpha}(\psi) &:= \frac{1}{\Delta t_m} F_{DG}^{\phi,m}(\xi_1^{\alpha 2} \psi) = \int_{\Omega} \frac{f_{\phi,(0)}^m + f_{\phi,(1)}^m}{2} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

unmittelbar auf die DG(1)–Formulierung für das Gesamtsystem: Aus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\phi_{(0)}^m - \phi_{(1)}^{m-1}}{\Delta t_m} \psi_{(0)}^m \, d\Omega + A_G^\phi \left(\frac{\phi_{(0)}^m - \phi_{(1)}^m}{6}, \psi_{(0)}^m \right) &= L_{(0)}^{\phi, \alpha}(\psi_{(0)}^m) \quad \forall \psi_{(0)}^m \in V_0^\phi, \\ \int_{\Omega} \frac{\phi_{(1)}^m - \phi_{(1)}^{m-1}}{\Delta t_m} \psi_{(1)}^m \, d\Omega + A_G^\phi \left(\frac{\phi_{(0)}^m + \phi_{(1)}^m}{2}, \psi_{(1)}^m \right) &= L_{(1)}^{\phi, \alpha}(\psi_{(1)}^m) \quad \forall \psi_{(1)}^m \in V_0^\phi \end{aligned}$$

wird $\phi_{(0)}^m, \phi_{(1)}^m \in V_0^\phi$ gesucht. Der iterative DG $_{N}^{\phi, \alpha}$ (1)–Algorithmus kann mittels der Definitionen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(0)}^{\phi, \alpha}(\phi, \psi) &:= A_G^\phi \left(\frac{\phi}{6}, \psi \right) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega, \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi, \psi) &:= A_G^\phi \left(\frac{\phi}{2}, \psi \right) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1,(0)}^{\phi, \alpha}(\phi^m, \phi^{m-1}; \psi) &:= A_G^\phi \left(\frac{\phi^m}{6}, \psi \right) + L_{(0)}^{\phi, \alpha}(\psi) + \int_{\Omega} \frac{\phi^{m-1}}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega, \\ \mathcal{F}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi^m, \phi^{m-1}; \psi) &:= A_G^\phi \left(\frac{-\phi^m}{2}, \psi \right) + L_{(1)}^{\phi, \alpha}(\psi) + \int_{\Omega} \frac{\phi^{m-1}}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

nun für einen Zeitschritt m wie folgt angegeben werden:

1. *Initialisiere $n = 1$ und setze $\phi_{(0)}^{m,n} = \phi^{m-1}$.*

2. *Bestimme $\phi_{(1)}^{m,n} \in V_0^\phi$ mit*

$$\mathcal{A}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(1)}^{m,n}, \psi_{(1)}^m) = \mathcal{F}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(0)}^{m,n}, \phi^{m-1}; \psi_{(1)}^m) \quad \forall \psi_{(1)}^m \in V_0^\phi.$$

3. *Ermittle $\phi_{(0)}^{m,n+1}, \phi_{(1)}^{m,n+1} \in V_0^\phi$ solange $n < N$ aus:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(0)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(0)}^{m,n+1}, \psi_{(0)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(0)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(1)}^{m,n}, \phi^{m-1}; \psi_{(0)}^m) \quad \forall \psi_{(0)}^m \in V_0^\phi, \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(1)}^{m,n+1}, \psi_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^{\phi, \alpha}(\phi_{(0)}^{m,n+1}, \phi^{m-1}; \psi_{(1)}^m) \quad \forall \psi_{(1)}^m \in V_0^\phi, \\ n &\mapsto n + 1. \end{aligned}$$

4. *Setze $\phi^m = \phi_{(1)}^{m,N}$.*

Im Initialisierungsschritt wird die Lösung auf den Anfang der neuen Zeitscheibe unter Vernachlässigung des a–priori unbekanntem Sprungterms übertragen. Mit dieser Näherung erfolgt anschließend die Berechnung der Werte am anderen Ende der Zeitscheibe[†]. Hierbei sind Ansatz- und Testfunktionen gerade so gewählt, daß

[†]Das Zusammenfallen der Werte am Anfang und Ende der Zeitscheibe mit $\phi_{(0)}^m$ und $\phi_{(1)}^m$ gilt nicht allgemein, sondern beruht auf der speziellen Wahl von $\xi_0^{\alpha 1}$ und $\xi_1^{\alpha 1}$.

die bei der zeitlichen Integration entstehenden Faktoren vor den räumlichen Integralen mit $N = 1$ das zweiter Ordnung genaue Crank–Nicolson Schema erzeugen. Für $N > 1$ werden weitere Iterationsschritte durchgeführt, wodurch u. a. die Stabilität des Verfahrens erhöht werden kann.

Bei der Übertragung dieser Vorgehensweise auf das System von Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung (2.44), (2.45) erwies sich das darauf aufbauende numerische Verfahren als instabil. Ursache hierfür scheint der starke Stabilitätsverlust im Crank–Nicolson Schritt zu sein. Für diese Auffassung sprechen auch Untersuchungen von OHLOFF [53], die für ein Θ -Verfahren bei Verwendung der gleichen räumlichen Diskretisierungstechnik Stabilität lediglich mit Θ nahe Eins beobachtet hat. Aus diesem Grund werden bei Problemen, die in Verbindung mit (2.44), (2.45) auftreten, die zeitlichen Formfunktionen

$$\xi_0^\beta = 1, \quad \xi_1^\beta = \frac{t - t_{m-1}}{\Delta t_m}, \quad t \in I_m \quad (3.43)$$

zur Bildung der Ansatz- und Funktionenräume $\Pi_1^{m,\beta}(V)$ gemäß (3.39) mit $Y = \beta$ verwendet. Mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Pi_1^{m,\beta}(V_0^u)$, $p \in \Pi_1^{m,\beta}(V^p)$ und $f_u \in \Pi_1^{m,\beta}(L^2(\Omega)^d)$ gilt für $Z = \mathbf{u}, \mathbf{v}, p, f_u$ an den Intervallgrenzen von I_m

$$\partial_t Z = \frac{Z_{(1)}^m}{\Delta t_m}, \quad Z_+^m = Z_{(0)}^m, \quad Z_-^m = Z_{(0)}^{m-1} + Z_{(1)}^{m-1}, \quad (3.44)$$

wodurch nach Ausführung der zeitlichen Integration die Quellterme zu

$$L_{(0)}^u(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(f_{u,(0)}^m + \frac{f_{u,(1)}^m}{2} \right) \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \quad L_{(1)}^u(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{f_{u,(0)}^m}{2} + \frac{f_{u,(1)}^m}{3} \right) \circ \mathbf{v} \, d\Omega.$$

zusammengefaßt werden können. Mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(0)}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1; \mathbf{v}) &:= B_G^u \left(\mathbf{u}, \mathbf{a}_0 + \frac{\mathbf{a}_1}{2}; \mathbf{v} \right) + C_G^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t_m} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1; \mathbf{v}) &:= B_G^u \left(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{a}_0}{3} + \frac{\mathbf{a}_1}{4}; \mathbf{v} \right) + C_G^u \left(\frac{\mathbf{u}}{3}, \frac{p}{3}; \mathbf{v} \right) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}}{2\Delta t_m} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \mathcal{A}_{1,(0)}^p(\mathbf{u}, q) &:= A_G^p(\mathbf{u}, q), \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}, q) &:= A_G^p \left(\frac{\mathbf{u}}{3}, q \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1,(0)}^u(\mathbf{u}^m, p, \mathbf{a}, \mathbf{u}^{m-1}; \mathbf{v}) &:= B_G^u \left(\mathbf{u}^m, -\frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{u}^m}{3}; \mathbf{v} \right) + C_G^u \left(-\frac{\mathbf{u}^m}{2}, -\frac{p}{2}; \mathbf{v} \right) \\ &\quad + L_{(0)}^u(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^m}{\Delta t_m} \circ \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \mathcal{F}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}) &:= B_G^u \left(\mathbf{u}, -\frac{\mathbf{u}}{2} - \frac{\mathbf{a}}{3}; \mathbf{v} \right) + C_G^u \left(-\frac{\mathbf{u}}{2}, -\frac{p}{2}; \mathbf{v} \right) \\ &\quad + L_{(1)}^u(\mathbf{v}), \\ \mathcal{F}_{1,(0)}^p(\mathbf{u}, q) = \mathcal{F}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}, q) &:= A_G^p \left(-\frac{\mathbf{u}}{2}, q \right) \end{aligned}$$

lautet das als $\text{DG}_N^u(1)$ bezeichnete Schema im Schritt m :

1. *Initialisiere* $n = 1$ und setze $\mathbf{u}_{(0)}^{m,n} = \mathbf{u}^{m-1}$, $p_{(0)}^{m,n} = p^{m-1}$.

2. *Bestimme* $\mathbf{u}_{(1)}^{m,n} \in V_0^u$, $p_{(1)}^{m,n} \in V^p$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}, p_{(1)}^{m,n}, \underline{\mathbf{u}_{(0)}^{m,n}}, \mathbf{0}; \mathbf{v}_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n}, p_{(0)}^{m,n}, \mathbf{0}; \mathbf{v}_{(1)}^m), \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}, q_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n}, q_{(1)}^m), \quad \forall \mathbf{v}_{(1)}^m \in V_0^u, q_{(1)}^m \in V^p. \end{aligned}$$

3. *Ermittle* $\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}$, $\mathbf{u}_{(1)}^{m,n+1} \in V_0^u$ und $p_{(0)}^{m,n+1}$, $p_{(1)}^{m,n+1} \in V^p$ solange $n < N$ aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(0)}^u(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}, p_{(0)}^{m,n+1}, \underline{\mathbf{u}_{(0)}^{m,n}}, \underline{\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}}; \mathbf{v}_{(0)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(0)}^u(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}, p_{(1)}^{m,n}, \mathbf{u}_{(0)}^{m,n}, \mathbf{u}^{m-1}; \mathbf{v}_{(0)}^m), \\ \mathcal{A}_{1,(0)}^p(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}, q_{(0)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(0)}^p(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}, q_{(0)}^m) \quad \forall \mathbf{v}_{(0)}^m \in V_0^u, q_{(0)}^m \in V^p, \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n+1}, p_{(1)}^{m,n+1}, \underline{\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}}, \underline{\mathbf{u}_{(1)}^{m,n}}; \mathbf{v}_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^u(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}, p_{(0)}^{m,n+1}, \mathbf{u}_{(1)}^{m,n}; \mathbf{v}_{(1)}^m), \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}_{(1)}^{m,n+1}, q_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^p(\mathbf{u}_{(0)}^{m,n+1}, q_{(1)}^m) \quad \forall \mathbf{v}_{(1)}^m \in V_0^u, q_{(1)}^m \in V^p, \\ n &\mapsto n + 1. \end{aligned}$$

4. *Setze* $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}_{(0)}^{m,N} + \mathbf{u}_{(1)}^{m,N}$ und $p^m = p_{(0)}^{m,N} + p_{(1)}^{m,N}$.

Die einzelnen Teilschritte lassen sich in gleicher Weise wie beim $\text{DG}_N^\phi(1)$ -Algorithmus interpretieren. Für $N = 1$ kann keine Konvergenz zweiter Ordnung gezeigt werden, jedoch hat sich dieses Schema als robust auch gegenüber großen Zeitschritten erwiesen. Eine höhere Genauigkeit wird erst mit $N > 1$ erzielt. Zusätzlich bietet das iterative Verfahren eine Möglichkeit, die Nichtlinearität zu behandeln. Hierbei gehen die jeweils aktuellen Werte des Geschwindigkeitsfeldes in den Konvektionsterm ein, so daß für $N > 1$ auch eine innere Linearisierung erfolgt (vgl. unterstrichene Argumente).

In Anhang B ist der zugeordnete $\text{DG}_N^{\phi,\beta}(1)$ -Algorithmus dargestellt, der die linearen zeitlichen Ansätze (3.43) auch auf das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{b} anwendet und somit die direkte Kopplung mit $\text{DG}_N^u(1)$ gestattet.

3.3 Gebietszerlegung

Die Gebietszerlegung stellt einen Ansatzpunkt für die parallelisierte Lösung der im vorhergehenden Abschnitt aufgestellten elliptischen Probleme der allgemeinen Form $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ in Ω dar. Bei der nichtüberlappenden Variante wird das Lösungsgebiet durch Einführung künstlicher innerer Ränder in mehrere Regionen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{N_{sd}}$ unter der Voraussetzung

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{sd}} \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (3.45)$$

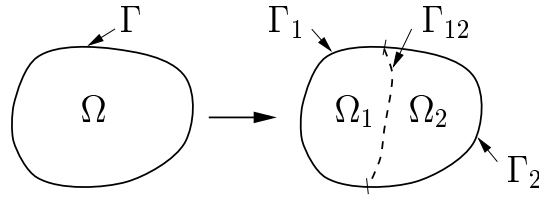


Abbildung 3.4: Aufteilung des Gebietes Ω in zwei Teilgebiete durch Einführung eines künstlichen inneren Randes Γ_{12} .

separiert. Gleichzeitig erfolgt die Einschränkung der zu lösenden Differentialgleichung auf die jeweiligen Ω_i , wobei an den inneren Rändern

$$\Gamma_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad \forall i \neq j \quad (3.46)$$

spezielle Randbedingungen formuliert werden, über die die Kopplung zwischen den Teilgebieten realisiert wird. Die einem Gebiet Ω_i zugeordnete äußere physikalische Berandung ist mit

$$\Gamma_i := \partial\Omega_i \cap \Gamma \quad (3.47)$$

bezeichnet, siehe Abbildung 3.4. Eine zur stationären Form von (3.1) mit $\phi = 0$ auf Γ gleichwertige Formulierung lautet damit

$$\mathcal{L}_\phi \phi_i = f_{\phi,i} \quad \text{in } \Omega_i, \quad \phi_i = 0 \quad \text{auf } \Gamma_i, \quad (3.48)$$

$$\phi_i = \phi_j \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i \circ \nabla \phi_i + \mathbf{n}_j \circ \nabla \phi_j = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{ij}. \quad (3.49)$$

Die Bedingung (3.49) läßt sich nur in einem iterativen Prozeß umsetzen, der von LIONS [25] durch Verwendung Robinscher Randbedingungen wie folgt angegeben wird

$$\rho_i \phi_i^k + \mathbf{n}_i \circ \epsilon \nabla \phi_i^k = \rho_i \phi_j^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \epsilon \nabla \phi_j^{k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij}. \quad (3.50)$$

Der Index k bezeichnet die Gebietsiterationen, innerhalb derer ein Informationsaustausch auf inneren Rändern erfolgt. Dementsprechend oft ist auch (3.48) zu lösen

$$\mathcal{L}_\phi \phi_i^k = f_{\phi,i} \quad \text{in } \Omega_i, \quad \phi_i^k = 0 \quad \text{auf } \Gamma_i. \quad (3.51)$$

Das Hauptproblem bei diesem Algorithmus besteht in der geeigneten Wahl des Parameters ρ . Für

$$\rho_i := \frac{1}{2} (-\mathbf{b} \circ \mathbf{n}_i + \mathcal{Z}_i) \quad (3.52)$$

kann mit einer streng positiv definierten Funktion \mathcal{Z} die Konvergenz von (3.51), (3.50) nachgewiesen werden (vgl. [27]). Wählt man

$$\mathcal{Z}_i := \sqrt{(\mathbf{b} \circ \mathbf{n}_i)^2 + (\gamma + c)\epsilon}, \quad \gamma = \text{const} \quad (3.53)$$

so zeigen numerische Untersuchungen [54][‡] über den gesamten Parameterbereich von diffusions-, konvektions- und reaktionsdominanten bis hin zu singular gestörten Problemen $0 < \epsilon \ll 1$ eine zufriedenstellende Konvergenzrate, die nahezu unabhängig von der Diskretisierungsgröße h ist. Für reine Konvektion und $\gamma = 0$ wird in (3.50) auf Ausströmrändern $\mathbf{b} \circ \mathbf{n} > 0$ der Dirichletsche Anteil Null. Am Einströmrand hingegen ist der Parameter ρ mit $\mathbf{b} \circ \mathbf{n}$ groß und bewirkt eine Übernahme des Funktionswertes aus dem Nachbargebiet. In diesem Fall ergibt sich die auch als adaptiver Robin–Neumann–Algorithmus [26] bezeichnete Variante, die den Informationstransport in Richtung des Geschwindigkeitsfeldes widerspiegelt.

Im instationären Fall läßt sich der beispielsweise beim $DG^\phi(0)$ –Algorithmus zusätzlich auftretende Term $1/\Delta t_m \int_\Omega \phi \psi \, d\Omega$ als ein vergrößerter Reaktionskoeffizient $c \mapsto c + 1/\Delta t$ in (3.53) interpretieren (vgl. [28]). Aufgrund dieser Analogie und im Sinne einer einheitlichen Darstellung des Gebietszerlegungsalgorithmus werden die aus der Zeitdiskretisierung hervorgehenden Variationsformulierungen als Probleme der adäquaten stationären Fälle behandelt. Für die Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung können die speziellen Beziehungen $\mathcal{A}^\phi = \mathcal{F}^\phi$ auf diese Weise auch als Variationsformulierung von

$$\mathcal{L}_\phi^* \phi := (\mathbf{b}^* \circ \nabla) \phi - \nabla \circ (\epsilon^* \nabla \phi) + c^* \phi = f_\phi^* \quad (3.54)$$

angesehen werden. Im Reaktionskoeffizient c^* sind, wie bereits angesprochen, zusätzliche Glieder aus der Diskretisierung von Zeitableitung und Sprungterm enthalten. Alle weiteren mit dem Index $*$ gekennzeichneten Größen entsprechen bei $DG(0)$ denen in der instationären Beziehung (3.1), unterscheiden sich hingegen bei $DG(1)$ jeweils um einem Vorfaktor aus der Zeitintegration (vgl. Abschnitt 3.2.3).

Der auf dem kontinuierlichem Niveau verwendete Gebietszerlegungsalgorithmus für (3.54) innerhalb einer Gebietsiteration k mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen lautet somit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^* \phi_i^k &= f_{\phi,i}^* \quad \text{in } \Omega_i, \\ \phi_i^k &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_i, \\ \rho_i^\phi \phi_i^k + \mathbf{n}_i \circ \epsilon^* \nabla \phi_i^k &= \rho_i^\phi \phi_j^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \epsilon^* \nabla \phi_j^{k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij} \end{aligned} \quad (3.55)$$

für $i = 1, \dots, N_{sd}$ und den Definitionen

$$\rho_i^\phi := \frac{1}{2} \left(-\mathbf{b}^* \circ \mathbf{n}_i + \mathcal{Z}_i^\phi \right), \quad \mathcal{Z}_i^\phi := \sqrt{(\mathbf{b}^* \circ \mathbf{n}_i)^2 + (\gamma^\phi + c^*)\epsilon}. \quad (3.56)$$

Neuere Erkenntnisse beziehen noch weitere Parameter wie z. B. die Teilgebietsgröße in die Funktion \mathcal{Z} ein [31], im konvektionsdominanten Fall sind sie jedoch von untergeordneter Bedeutung. Weiterhin sei angemerkt, daß für die Dissipationsgleichung (2.48) die Variante ohne Reaktionsterm in Tabelle 3.1 verwendet wird. Auf diese

[‡]Die Funktion \mathcal{Z} ist in modifizierter Form angegeben, kann aber leicht in (3.53) überführt werden.

Weise resultiert c^* in allen Gleichungen nur aus der Zeitdiskretisierung. Im Gegensatz dazu verwenden CODINA und SOTO einen in der stationären Formulierung enthaltenen Reaktionsterm zur Konstruktion eines sehr stabilen Verfahrens [55], so daß die hier gewählte Vorgehensweise eher willkürlich und nicht zwingend gut ist.

In Analogie zu (3.54) wird das System aus linearisierter Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung im Anschluß an die zeitliche Diskretisierung mit

$$\mathcal{L}_u^* \mathbf{u} := (\mathbf{a}^* \circ \nabla) \mathbf{u} - \nabla \circ (\nu_e^* \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \nabla p + c_u^* \mathbf{u} = \mathbf{f}_u^*, \quad (3.57)$$

$$\nabla \circ \mathbf{u} = 0 \quad (3.58)$$

beschrieben[§]. Nach einem Vorschlag von OTTO und LUBE [29], [31] kann für die auch als Oseen–Gleichung bezeichneten Formulierung (3.57) ohne die Betrachtung äußerer Randbedingungen und mit $\boldsymbol{\sigma}^* := \nu_e^* \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}$ folgender Gebietszerlegungsalgorithmus aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u^* \mathbf{u}_i^k &= \mathbf{f}_{u,i}^* \quad \text{in } \Omega_i, \\ \nabla \circ \mathbf{u}_i^k &= 0 \quad \text{in } \Omega_i, \\ \rho_{i,n}^{u,\alpha} \mathbf{u}_i^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\sigma}_i^{*k} &= \rho_{i,n}^{u,\alpha} \mathbf{u}_j^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\sigma}_j^{*k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Bezugnehmend auf (3.56) ist mit den Funktionen

$$\rho_{i,n}^u(\mathbf{a}) := \frac{1}{2} \left(-\mathbf{a} \circ \mathbf{n}_i + \mathcal{Z}_{i,n}^u(\mathbf{a}) \right), \quad \mathcal{Z}_{i,n}^u(\mathbf{a}) := \sqrt{(\mathbf{a} \circ \mathbf{n}_i)^2 + (\gamma_n^u + c_u^*)\epsilon}. \quad (3.60)$$

der Parameter $\rho_{i,n}^{u,\alpha} := \rho_{i,n}^u(\mathbf{a}^*)$ für jede Geschwindigkeitskomponente $n = 1, \dots, d$ in (3.59) definiert.

Die Oseen–Gleichung (3.57) tritt hier im Kontext der linearisierten Navier–Stokes Gleichung auf. Demzufolge ist das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{a}^* als Approximation der eigentlichen Lösung \mathbf{u} anzusehen und erfüllt nicht die Anforderungen einer über die Gebietsgrenzen stetigen und glatten Funktion. In Gleichung (3.59) kann somit das Ersetzen von $\rho_{i,n}^{u,\alpha}$ durch die Beziehung $\rho_{i,n}^{u,k-1} := \rho_{i,n}^u(\mathbf{u}_i^{k-1})$ motiviert werden. Da hierbei die Anforderungen an ein im Sinne der Gebietszerlegung konvergiertes \mathbf{a}^* sinken, ist anzunehmen, daß die Konvergenz des Gebietszerlegungsalgorithmus (kurz DD–Algorithmus von *Domain Decomposition*) zu beschleunigen ist. Allerdings hat sich diese Hoffnung für das in in Abschnitt 5.4.2 vorgestellte Beispiel nicht erfüllt.

Die durch (3.55) und (3.59) ausgedrückten Übertragungsfunktionen können auch als Realisierung der periodischen Randbedingungen (2.60)–(2.63) aufgefaßt werden. Lediglich bezeichnet Γ_{ij} dann Paare von äußeren periodisch definierten Rändern. Jedoch lassen sich infolge des gemeinsamen Auftretens von Druck und Geschwindigkeit im Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ periodische Randbedingungen mit Drucksprung (2.64)

[§]Formal gesehen taucht beim DG^u(1)–Schema auch ein Quellterm in der Kontinuitätsgleichung (3.58) auf. Er enthält aber lediglich die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes mit der komplementären zeitlichen Ansatzfunktion und kann somit auch als Null betrachtet werden.

nicht realisieren. Diese aus physikalischer Sicht nicht notwendige Beschränkung wird mit einem alternativen Gebietszerlegungsalgorithmus umgangen:

$$\mathcal{L}_u^* \mathbf{u}_i^k = \mathbf{f}_{u,i}^* \quad \text{in } \Omega_i,$$

$$\nabla \circ \mathbf{u}_i^k = 0 \quad \text{in } \Omega_i,$$

$$\rho_{i,n}^{u,k-1} \mathbf{u}_i^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\tau}_i^{*k} = \rho_{i,n}^{u,k-1} \mathbf{u}_j^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\tau}_j^{*k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij}, \quad (3.61)$$

$$\rho_i^{p,k-1} p_i^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_i^k = \rho_i^{p,k-1} p_j^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_j^{k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij}. \quad (3.62)$$

Bedingung (3.61) benutzt im Gegensatz zu (3.59) den ausschließlich Geschwindigkeitsableitungen enthaltenden Reibungstensor $\boldsymbol{\tau}^* := \nu_e^* \mathbf{D}(\mathbf{u})$. Die Druckinformation wird anstelle dessen separat mit den bisher nur aus numerischen Untersuchungen empirisch ermittelten Funktionen

$$\rho_i^{p,k-1} := \frac{1}{2} \left(-\mathbf{u}_i^{k-1} \circ \mathbf{n}_i + \mathcal{Z}_i^p \right), \quad \mathcal{Z}_i^{p,k-1} := \sqrt{(\mathbf{u}_i^{k-1} \circ \mathbf{n}_i)^2 + \gamma^p}. \quad (3.63)$$

transportiert [56].

Auf den in (3.62) auftretenden Parameter δ_1^p wird in Abschnitt 3.4.3 näher eingegangen. Es sei aber bereits hier bemerkt, daß der damit gebildete Term $\mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p$ auf natürliche Weise entsteht. Dies gilt auch für die Neumannschen Anteile in den schon angesprochenen Übertragungsfunktionen, die aus der partiellen Integration des Diffusions- bzw. Reibungsglieds in den zugeordneten Variationsformulierungen hervorgehen.

Eine leichte Modifikation im zuletzt vorgestellten Gebietszerlegungsalgorithmus bei der Übertragung des Drucks in Form von

$$\rho_i^{p,k-1} p_i^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_i^k = \rho_i^{p,k-1} (p_j^{k-1} + r_{ij} \Delta p_z) + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_j^{k-1} \quad \text{auf } \Gamma_{ij} \quad (3.64)$$

und $r_{ij} = -r_{ji} = 1$ gestattet nun auch die algorithmische Umsetzung des Drucksprungs Δp_z bei ansonsten periodischen Randbedingungen auf Γ_{ij} .

3.4 Diskrete Raum–Zeit Formulierung

3.4.1 Approximation

Die bereits erfolgte Darlegung der semidiskreten Probleme im Zuge der zeitlichen Diskretisierung geschah unter dem Blickwinkel der Ableitung elliptischer Teilaufgaben für den Gebietszerlegungsprozeß und deren Analogie zur stationären Formulierung. Insbesondere wurde es durch die Auswertung der zeitlichen Integrale erst möglich, einen iterativen DG(1)–Algorithmus aufzustellen. Bei der Darstellung der volldiskreten Probleme soll nun soweit als möglich der Gedanke der gleichzeitigen Diskretisierung von Raum und Zeit hervorgehoben werden. Die auf diese Weise formulierten Gleichungen widerspiegeln die Vorgehensweise bei der DG(r)–Methode

besser, da sie eine allgemeinere Gültigkeit besitzen. In gleicher Weise wie bei der Semidiskretisierung der kontinuierlichen Probleme in Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3 erfolgt die anschließende analytische Auswertung der Zeitintegration und gegebenenfalls iterative Zerlegung, auf die nun in verkürzter Form eingegangen werden kann.

Zur Überführung der aus der diskontinuierlichen Galerkin-Methode hervorgegangenen Variationsformulierungen in endlichdimensionale Probleme erfolgt die Diskretisierung des räumlichen Berechnungsgebietes, das vereinfachend als zeitlich konstant vorausgesetzt wird. Hierbei werden stückweise lineare konforme Elemente \mathcal{K}_j verwendet, die auch unter dem Begriff P_1 -Elemente klassifiziert sind. Entsprechend der Dimension des Problems sind dies in 2D Dreieckselemente bzw. Tetraederelemente in 3D. Die ebenfalls zeitlich unveränderliche Zerlegung \mathcal{T}_h approximiert das Berechnungsgebiet als polygonal/polyhedral (2D/3D) berandet

$$\bar{\Omega} \approx \bar{\Omega}_h := \bigcup_{\mathcal{K}_j \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K}_j, \quad \Gamma \approx \Gamma_h. \quad (3.65)$$

In Verbindung mit der Zeitdiskretisierung entstehen auf diese Weise zylinderförmige Raum-Zeit Elemente \mathcal{Q} mit der Ausdehnung Δt_m in zeitliche Richtung (vgl. Abbildung 3.5):

$$\bar{Q}^m \approx \bar{Q}_q := \bigcup_j \mathcal{Q}_j, \quad \mathcal{Q}_j := \mathcal{K}_j \times I_m; \quad P^m \approx P_q. \quad (3.66)$$

Im Gegensatz zu h soll der Index q nicht nur die räumliche sondern auch zeitliche Basis kennzeichnen. Weiterhin ist zugunsten einer übersichtlicheren Schreibweise der den Zeitschritt andeutende Index m weggelassen worden.

Basierend auf der räumlichen Vernetzung sind die diskreten Funktionenräume auf den Elementen \mathcal{K} wie folgt definiert:

$$V_h := \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\mathcal{K}_j} \in P_1(\mathcal{K}_j) \ \forall \mathcal{K}_j \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.67)$$

$$V_{0,h} := \{v : v \in V_h : v|_{\Gamma_{d,h}} = 0\}. \quad (3.68)$$

In Analogie zu (3.18) und (3.19) sind die Funktionenräume auf Q_q als Fortsetzungen von V_h in der Zeit bestimmt

$$W_q := \{v : \Pi_r^m(V_h)\} \quad \text{für } r = 0, 1, \quad (3.69)$$

$$W_{0,q} := \{v : v \in W_q : v|_{P_{d,q}} = 0\}. \quad (3.70)$$

Die in den diskreten Gleichungen auftauchenden Größen werden entsprechend der zugrunde liegenden Funktionenräume durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h &\in (V_h)^d; & \phi_h, \psi_h &\in V_h; \\ \mathbf{u}_q, \mathbf{a}_q, \mathbf{v}_q, \mathbf{f}_{u,q}, \mathbf{b}_q &\in (W_q)^d; & p_q, q_q, \phi_q, \psi_q, f_{\phi,q} &\in W_q \end{aligned} \quad (3.71)$$

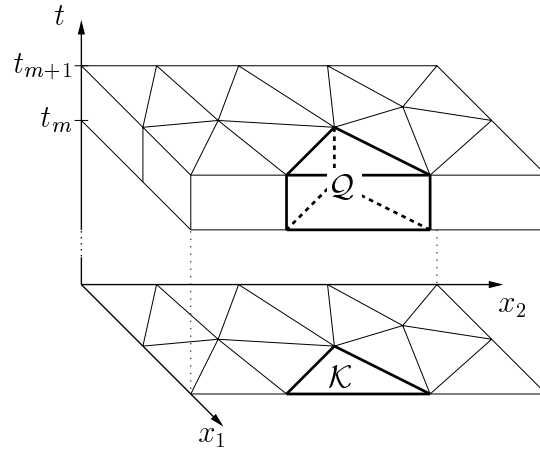


Abbildung 3.5: Im Zuge der Diskretisierung gebildete zylinderförmige Raum-Zeit Elemente.

genähert. Die Koeffizienten

$$\nu_{e,q}, \epsilon_q, c_q \in \Pi_0^m(U_h), \quad U_h := \{v : v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\mathcal{K}_j} \in P_0(\mathcal{K}_j) \forall \mathcal{K}_j \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.72)$$

sind wiederum zur Vereinfachung elementweise konstant approximiert.

Anhand der Variationsformulierungen (3.26) und (3.30), (3.31) der diskontinuierlichen Galerkin-Methode lassen sich die Gebietsintegrale unmittelbar mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{DG}^\phi(\phi, \psi) &:= \int_{Q_q} (\partial_t \phi + (\mathbf{b}_q \circ \nabla) \phi + c_q \phi) \psi \, dQ + \int_{Q_q} \epsilon_q \nabla \phi \circ \nabla \psi \, dQ \\ &\quad + \int_{\Omega_h} \phi_{+,h} \psi_{+,h} \, d\Omega, \\ \mathbf{F}_{DG}^\phi(\psi) &:= \int_{Q_q} f_{\phi,q} \psi \, dQ + \int_{\Omega_h} \phi_{-,h} \psi_{+,h} \, d\Omega, \\ \mathbf{A}_{DG}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}) &:= \int_{Q_q} (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{u}) \circ \mathbf{v} \, dQ + \int_{Q_q} \frac{\nu_{e,q}}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dQ \\ &\quad - \int_{Q_q} p (\nabla \circ \mathbf{v}) \, dQ + \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_{+,h} \circ \mathbf{v}_{+,h} \, d\Omega, \\ \mathbf{F}_{DG}^u(\mathbf{v}) &:= \int_{Q_q} \mathbf{f}_{u,q} \circ \mathbf{v} \, dQ + \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_{-,h} \circ \mathbf{v}_{+,h} \, d\Omega, \\ \mathbf{A}_{DG}^p(\mathbf{u}, q) &:= \int_{Q_q} \nabla \circ \mathbf{u} \, q \, dQ. \end{aligned}$$

zusammenfassen. Im Laufe der folgenden Abschnitte werden nun schrittweise weitere Funktionale eingeführt, anhand derer letztendlich die Formulierung des diskreten Verfahrens erfolgt.

3.4.2 Randbedingungen

Bisher beschränkten sich die Variationsformulierungen jeweils auf homogene Dirichletsche Randbedingungen. Zur Erweiterung der Darstellung sei die äußere Berandung (vgl. auch Abbildung 3.1) für die jeweiligen Erhaltungsgleichungen in einzelne Teilabschnitte unterteilt:

$$P_q^\cdot = P_{d,q}^\cdot \cup P_{n,q}^\cdot \cup P_{r,q}^\cdot \cup P_{w,q}^\cdot \cup P_{z,q}^\cdot, \quad P_{d,q}^\cdot \cap P_{n,q}^\cdot \cap P_{r,q}^\cdot \cap P_{w,q}^\cdot \cap P_{z,q}^\cdot = \emptyset. \quad (3.73)$$

Auf jedem dieser Teilränder wird ein anderer Typ der in Abschnitt 2.6 angesprochenen Randbedingungen gestellt. Deren Realisierung erfolgt durch Modifikation der diskreten Gleichungen am Gebietsrand, die mehrheitlich in der Hinzufügung von Randintegralen besteht. Zugunsten einer systematischen Randbehandlung werden die entstehenden Ausdrücke in einer einheitlichen Schreibweise angegeben. Auf weitere Definitionen für die auf dem Rand geltenden Räume wird verzichtet, da sie sich in natürlicher Weise als Spuren der im Gebiet geltenden Funktionen ergeben.

Im FEM-Kontext nehmen Dirichletsche Randbedingungen eine besondere Rolle ein. Durch die Verwendung von Funktionen aus $V_{0,h}$, $W_{0,q}$ wird dieser Bereich vom eigentlichen Berechnungsgebiet abgespalten. Somit kann unabhängig von den übrigen Gleichungen die Abbildung der Funktionswerte $\phi_{d,q}$, $\mathbf{u}_{d,q}$ auf den Lösungsvektor erfolgen. Zwei unterschiedliche Methoden werden hier verwendet. Zum einen die mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^{\phi,\alpha}(\phi, \psi) &:= \int_{P_{d,q}^\phi} \phi \psi \, dP, & \mathbf{F}_d^{\phi,\alpha}(\psi) &:= \int_{P_{d,q}^\phi} \phi_{d,q} \psi \, dP, \\ \mathbf{A}_d^{u,\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{P_{d,q}^\phi} \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \, dP, & \mathbf{F}_d^{u,\alpha}(\mathbf{v}) &:= \int_{P_{d,q}^\phi} \mathbf{u}_{d,q} \circ \mathbf{v} \, dP \end{aligned}$$

gebildeten schwachen Formulierungen, in denen $\phi \in W_q$ und $\mathbf{u} \in (W_q)^d$ aus

$$\mathbf{A}_d^{\phi,\alpha}(\phi, \psi) = \mathbf{F}_d^{\phi,\alpha}(\psi) \quad \forall \psi \in W_q, \quad \mathbf{A}_d^{u,\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}_d^{u,\alpha}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in (W_q)^d \quad (3.74)$$

bestimmt wird. Die integrale Abbildung ist andererseits auch durch eine knotenorientierte Variante ersetzbar. Beispielsweise kann ϕ_q als Linearkombination von Funktionen $\eta^{\{n\}}$ auf der Menge der die Vernetzung bildenden Knoten \mathbf{N} und den Koeffizienten $\phi^{\{n\}}$ aufgefaßt werden

$$\phi_q = \sum_{\forall n \in \mathbf{N}} \phi_q^{\{n\}} \eta^{\{n\}}.$$

Bezeichnet \mathbf{N}_d die Teilmenge der Punkte auf dem Rand $P_{d,q}^\cdot$, so lassen sich die trivialen Gleichungen

$$\phi_q^{\{n\}} = \phi_{d,q}^{\{n\}} \quad \forall n \in \mathbf{N}_d^\phi$$

aufstellen. Mit den Definitionen

$$\phi_q \Big|_{\{P_{d,q}^\phi\}} := \sum_{n \in \mathbf{N}_d^\phi} \phi_q^{\{n\}} \eta^{\{n\}}, \quad \mathbf{u}_q \Big|_{\{P_{d,q}^{up}\}} := \sum_{n \in \mathbf{N}_d^{up}} \mathbf{u}_q^{\{n\}} \eta^{\{n\}}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d^{\phi,\beta}(\phi) &:= \phi \Big|_{\{P_{d,q}^\phi\}}, & \mathbf{F}_d^{\phi,\beta} &:= \phi_{d,q} \Big|_{\{P_{d,q}^\phi\}}, \\ \mathbf{A}_d^{u,\beta}(\mathbf{u}) &:= \mathbf{u} \Big|_{\{P_{d,q}^{up}\}}, & \mathbf{F}_d^{u,\beta} &:= \mathbf{u}_{d,q} \Big|_{\{P_{d,q}^{up}\}} \end{aligned}$$

kann dieser Zusammenhang auch in der Form

$$\mathbf{A}_d^{\phi,\beta}(\phi_q) = \mathbf{F}_d^{\phi,\beta}, \quad \mathbf{A}_d^{u,\beta}(\mathbf{u}_q) = \mathbf{F}_d^{u,\beta} \quad (3.75)$$

dargestellt werden.

Über die knotenbasierte Formulierung sind auch die Dirichletschen Randbedingungen an inneren Rändern für die Turbulenzgleichungen entsprechend (2.82), (2.82) realisiert. Auf die Ermittlung der inneren Berandung wird in Abschnitt 3.6.1 eingegangen.

In Tabelle 3.2 sind die Funktionale zur Realisierung von allgemeinen Neumann-, Robin- und Wandschubspannungsrandbedingungen zusammengestellt. Druck- und Symmetrierandbedingungen werden entsprechend der Darstellung in 2.6 als deren Sonderformen aufgefaßt. Die neu auftauchenden diskreten Größen sind durch

$$\sigma_{n,q}, \phi_{r,q}, u_{n,q} \in W_q, \quad \boldsymbol{\sigma}_{n,q}, \mathbf{u}_{r,q}, \boldsymbol{\tau}_{w,q} \in (W_q)^d, \quad \rho_{r,q}^\phi, \rho_{r,q}^u \in \Pi_0^m(U_h) \quad (3.76)$$

approximiert.

Bevor auf einzelne Randbedingungen näher eingegangen wird, erfolgt zunächst die Zusammenfassung der Funktionale zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_B^\phi(\phi, \psi) &:= \mathbf{A}_r^\phi(\phi, \psi), & \mathbf{F}_B^\phi(\psi) &:= \mathbf{F}_n^\phi(\psi) + \mathbf{F}_r^\phi(\psi), \\ \mathbf{A}_B^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) &:= \mathbf{A}_r^u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{A}_w^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}), & \mathbf{F}_B^u(\mathbf{v}) &:= \mathbf{F}_n^u(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_r^u(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_w^u(\mathbf{v}), \\ \mathbf{A}_B^p(\mathbf{u}, q) &:= \mathbf{A}_w^p(\mathbf{u}, q), & \mathbf{F}_B^p(q) &:= \mathbf{F}_w^p(q). \end{aligned}$$

Die vorläufigen diskreten Variationsformulierungen lauten nun:

- Bestimme $\phi \in W_{0,q}$ aus

$$\mathbf{A}_{DG}^\phi(\phi, \psi) + \mathbf{A}_B^\phi(\phi, \psi) = \mathbf{F}_{DG}^\phi(\psi) + \mathbf{F}_B^\phi(\psi) \quad \forall \psi \in W_{0,q}. \quad (3.77)$$

- Gesucht ist das Paar $(\mathbf{u}, p) \in (W_{0,q})^d \times W_q$, für das gilt

$$\mathbf{A}_{DG}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{u}; \mathbf{v}) + \mathbf{A}_B^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) = \mathbf{F}_{DG}^u(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_B^u(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in (W_{0,q})^d, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{A}_{DG}^p(\mathbf{u}, q) + \mathbf{A}_B^p(\mathbf{u}, q) = \mathbf{F}_B^p(q) \quad \forall q \in W_q. \quad (3.79)$$

Die Einarbeitung dieser Randbedingungen erfolgte in natürlicher Weise, d. h. durch Anwendung der Integralsätze wurden solche Randintegrale gebildet, die die geforderten Randbedingungen in integraler Form widerspiegeln. Im einzelnen kamen folgende

Typ	Konv.-Diff.-Reaktionsgl.	Impuls- und Kontinuitätsgleichung
Neumann	definiert als	$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \circ (\boldsymbol{\tau}_e - p\mathbf{I}) \Big _{P_n^{up}}$
	realisiert mit	$\mathbf{F}_n^u(\mathbf{v}) := \int_{P_{n,q}^{up}} \boldsymbol{\sigma}_{n,q} \circ \mathbf{v} \, dP$
Robin	definiert als	$\boldsymbol{\sigma}_r = (\rho_r^u \mathbf{u} + \mathbf{n} \circ (\boldsymbol{\tau}_e - p\mathbf{I})) \Big _{P_r^{up}}$
	realisiert mit	$\mathbf{A}_r^u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{P_{r,q}^{up}} \rho_{r,q}^u \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \, dP$
		$\mathbf{F}_r^u(\mathbf{v}) := \int_{P_{r,q}^{up}} \boldsymbol{\sigma}_{r,q} \circ \mathbf{v} \, dP$
Wand- schub- spannung	definiert als	$\boldsymbol{\tau}_w = ((\mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e \circ \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}_e) \Big _{P_w^{up}}, \quad u_n = -\mathbf{u} \circ \mathbf{n} \Big _{P_w^{up}}$
	realisiert mit	$\mathbf{A}_w^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) := \int_{P_{w,q}^{up}} (p \mathbf{n} \circ \mathbf{v} - \nu_{e,q} (\mathbf{n} \circ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{n}) \mathbf{n} \circ \mathbf{v}) \, dP$ $\mathbf{A}_w^p(\mathbf{u}, q) := - \int_{P_{w,q}^{up}} \mathbf{n} \circ \mathbf{u}_q \, dP$ $\mathbf{F}_w^u(\mathbf{v}) := \int_{P_{w,q}^{up}} \boldsymbol{\tau}_{w,q} \circ \mathbf{v} \, dP$ $\mathbf{F}_w^p(q) := \int_{P_{w,q}^{up}} u_{n,q} q \, dP$

Tabelle 3.2: Definitionen für die diskrete Umsetzung von Neumann-, Robin- und Wand-schubspannungsrandbedingungen.

Beziehungen zur Anwendung:

$$\begin{aligned}
\int_{Q_q} \epsilon_q \nabla \phi_q \circ \nabla \psi_q \, dQ &= \int_{P_q} \mathbf{n} \circ \epsilon_q \nabla \phi_q \psi_q \, dP - \int_{Q_q} \nabla \circ (\epsilon_q \nabla \phi_q) \psi_q \, dQ, \\
\int_{Q_q} \frac{\nu_{e,q}}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}_q) \circ \mathbf{D}(\mathbf{v}_q) \, dQ &= \int_{P_q} \mathbf{n} \circ \nu_{e,q} \mathbf{D}(\mathbf{u}_q) \circ \mathbf{v}_q \, dP - \int_{Q_q} \nabla \circ (\nu_{e,q} \mathbf{D}(\mathbf{u}_q)) \circ \mathbf{v}_q \, dQ, \\
- \int_{Q_q} p_q \nabla \circ \mathbf{v}_q \, dQ &= - \int_{P_q} \mathbf{n} \circ p_q \mathbf{v}_q \, dP + \int_{Q_q} \nabla p_q \circ \mathbf{v}_q \, dQ, \\
\int_{Q_q} \nabla \circ \mathbf{u}_q q_q \, dQ &= \int_{P_q} \mathbf{n} \circ \mathbf{u}_q q_q \, dP - \int_{Q_q} \mathbf{u}_q \circ \nabla q_q \, dQ.
\end{aligned}$$

Hierbei wird auch der Zusammenhang zwischen den formal durch Multiplikation mit einer Testfunktion entstehenden Gliedern der Variationsformulierung und den tatsächlich in partiell integrierter Form auftauchenden Termen erkennbar. Gleichzeitig ist der Grad der Ableitungen in Diffusions- bzw. Reibungstermen gesunken, so daß die Verwendung linearer Elemente möglich wurde. Die ersten beiden Beziehungen gelten nur unter der Voraussetzung elementweise konstanter Koeffizienten ϵ_q und $\nu_{e,q}$, vgl. (3.72). Auch die Normalkomponente der Geschwindigkeit u_n bei der Wandschubspannungsrandbedingung wird nach dem Vorschlag [23, S. 47] in schwacher Form über die partiell integrierte Kontinuitätsgleichung vorgegeben.

Aus zweierlei Beweggründen werden zyklische Randbedingungen auf andere Weise behandelt. Einerseits sind die periodisch zu verbindenden Ränder räumlich voneinander entfernt, so daß die Forderung, diese müßten sich auf dem selben Teilgebiet befinden, der Gebietszerlegung entgegen steht. Will man diese Einschränkung vermeiden, wird der Austausch entsprechender Informationen zwischen den Gebieten erforderlich. Da der Gebietszerlegungsalgorithmus als Realisierung periodischer Randbedingungen, gegebenenfalls auch mit Drucksprung, angesehen werden kann, ist es andererseits naheliegend, ihn auch in diesem Sinne zu verwenden. Dementsprechend wird an dieser Stelle auf die diskrete Realisierung des DD-Algorithmus in Abschnitt 3.5 verwiesen.

3.4.3 Least-squares Stabilisierung

Die bisher vorgestellten diskreten Variationsformulierungen erweisen sich als nicht stabil. Hierfür können Ursachen aus mehreren Problemkreisen angeführt werden.

Einerseits sind aus mathematischer Sicht bei einer gemischten Variationsformulierung die zugeordneten Funktionenräume der Testfunktionen nicht beliebig wählbar. Für das System aus Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung wird die Kompatibilität dieser Räume durch die Babuška–Brezzi (kurz BB) Bedingung bestimmt. Erfolgt die Approximation von Druck und Geschwindigkeit auf den gleichen Elementen, ist dieses Kriterium bereits nicht erfüllt. So zeigen sich beispielsweise bei Verwendung von (3.78), (3.79) unphysikalische Oszillationen im Druckfeld.

Mit Hilfe einer Druckstabilisierung — vielfach auch als PSPG- (pressure stabilizing/Petrov–Galerkin) Stabilisierung bezeichnet — ist es jedoch möglich, diese

Bedingung zu umgehen (vgl. [57]). Der Begriff Petrov–Galerkin–Verfahren kennzeichnet die Verwendung unterschiedlicher Räume für Ansatz- und Testfunktionen, speziell geht \mathbf{v}_q in $\mathbf{v}_q + \delta_1^p \nabla q_q$ über. Auch kann die so entstandene diskrete Variationsformulierung wieder als eine Modifikation der kontinuierlichen Gleichungen aufgefaßt werden. Durch partielle Integration der ∇q_q enthaltenen Terme ergibt sich, diesmal unter erhöhten Glattheitsanforderungen, die veränderte Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \circ \mathbf{u} + \delta_1^p \nabla \circ (- (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} + \nabla \circ \boldsymbol{\tau}_e - \nabla p + \mathbf{f}_u) = 0, \quad (3.80)$$

in der zusätzlich die Divergenz der Impulstransportgleichung mit dem Faktor δ_1^p auftaucht. Mit $\delta_1^p \mapsto \Delta t$ ist der Bezug zur Druck–Geschwindigkeits–Iteration nach der *Marker–And–Cell–Methode* (MAC) [58] hergestellt. Hierbei erfolgt die Berechnung des Drucks durch Umformung dieser Beziehung in eine Poisson–Gleichung für ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld. Auf diese Weise läßt sich auch anschaulich die zusätzliche Kopplung bei der PSPG–Stabilisierung interpretieren.

Weiterhin tritt in konvektionsdominanten Strömungen bei Überschreitung des Grenzwertes von ca. zwei der elementweise gebildeten lokalen Péclet- bzw. Reynolds-Zahl

$$\text{Pe}_Q := \frac{h \|\mathbf{b}_h\|_{\infty, Q}}{\epsilon_Q}, \quad \text{Re}_Q := \frac{h \|\mathbf{u}_h\|_{\infty, Q}}{\nu_{e, Q}} \quad (3.81)$$

mit

$$\epsilon_Q := \epsilon_q|_Q, \quad \nu_{e, Q} := \nu_{e, q}|_Q, \quad h := (\text{meas } \mathcal{K})^{1/d} \quad (3.82)$$

ein Stabilitätsverlust auf. Dieser äußert sich wiederum in numerisch bedingten Oszillationen der Lösung. Hierbei gilt die Definition von h strenggenommen nur für quasiuniforme Ortsgitter, d. h. stark anisotrope Elemente werden nicht richtig erfaßt. Da die gitterabhängigen Größen Pe_Q bzw. Re_Q typischerweise um ein mehrfaches größer als zwei sind, stellt die Verfeinerung der Vernetzung keine allgemein praktikable Lösung dar. Einen anderen Ansatz verfolgen upwind–Techniken, bei denen die Kopplung der diskreten Gleichungen abhängig vom Geschwindigkeitsfeld erfolgt. Einfache Zugänge wichten lediglich den Konvektionsterm in stromauf liegenden Punkten stärker und führen so im mehrdimensionalen Fall zwingend zur Nichtkonsistenz. Bei der SUPG–Stabilisierung (SUPG: streamline–upwind/Petrov–Galerkin) verwendet man diese stärkere Wichtung in konsistenter Weise, indem die Testfunktion um einen vom Konvektionsterm abhängigen Anteil erweitert wird (siehe [4], [5]):

$$\psi_q \mapsto \psi_q + \delta_1^\phi (\mathbf{b}_q \circ \nabla) \psi_q, \quad \mathbf{v}_q \mapsto \mathbf{v}_q + \delta_1^u (\mathbf{u}_q \circ \nabla) \mathbf{v}_q. \quad (3.83)$$

Dieser kann nach [14] als anisotrope Vergrößerung der Transportkoeffizienten in Richtung des Geschwindigkeitsfeldes um den Betrag $\delta_1^\phi |\mathbf{b}_q|^2$ bzw. $\delta_1^u |\mathbf{u}_q|^2$ angesehen werden.

Die beiden bisher genannten Stabilisierungsverfahren lassen sich auch als Bestandteile der allgemeineren least–squares Stabilisierungstechnik ansehen. Ein Vor-

teil dieser Methode besteht u. a. darin, daß sie ganz formal auf beliebige Galerkin-Formulierungen angewendet werden kann. Auf diese Weise läßt sich mit der Galerkin/least-squares Technik eine sehr viel größere Klasse konvergenter FEM-Methoden als mit herkömmlichen Galerkin-Verfahren erzeugen [7].

Für die Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichung (3.1) kann die diskrete Variationsformulierung (3.77) ohne Berücksichtigung der Randintegrale und der partiellen Integration des Diffusionsterms auch vereinfacht durch

$$(\partial_t \phi_q + \mathcal{L}_{\phi,q} \phi_q, \psi_q)_{Q_q} = (f_q, \psi_q)_{Q_q} - ([\phi_h], \psi_{+,h})_{\Omega_h} \quad (3.84)$$

ausgedrückt werden. In dieser Schreibweise bezeichnet $(\cdot, \cdot)_G$ das Skalarprodukt auf $L^2(G)$. Beim Übergang zur least-squares Formulierung wird die Testfunktion um den Anteil ergänzt, der aus der elementweisen Anwendung des Differentialoperators auf die Testfunktion hervorgeht. Die so entstehenden Terme sind mit einem geeignet gewählten δ -Parameter multipliziert. Im einzelnen geht (3.84) in die Form

$$\begin{aligned} & (\partial_t \phi_q + \mathcal{L}_{\phi,q} \phi_q, \psi_q)_{Q_q} + \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \delta_{1,\mathcal{Q}}^\phi (\partial_t \phi_q + \mathcal{L}_{\phi,q} \phi_q, \partial_t \psi_q + \mathcal{L}_{\phi,q} \psi_q)_{\mathcal{Q}} \\ &= (f_q, \psi_q)_{Q_q} + \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \delta_{1,\mathcal{Q}}^\phi (f_q, \partial_t \psi_q + \mathcal{L}_{\phi,q} \psi_q)_{\mathcal{Q}} - ([\phi_h], \psi_{+,h})_{\Omega_h} \end{aligned} \quad (3.85)$$

über. Auch diese gewichtete Residuenmethode ist konsistent, da für eine ausreichend glatte Lösung die least-squares Anteile verschwinden. Weiterhin wird die Genauigkeit des Verfahrens nicht durch die stabilisierenden Terme herabgesetzt [59].

Zur Einbeziehung der least-squares Terme in die diskreten Variationsformulierungen werden folgende Funktionale definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{LS}^\phi(\phi, \psi) &:= \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \delta_{1,\mathcal{Q}}^\phi \int_{\mathcal{Q}} (\partial_t \phi + (\mathbf{b}_q \circ \nabla) \phi + c_q \phi) \cdot \\ & \quad (\partial_t \psi + (\mathbf{b}_q \circ \nabla) \psi + c_q \psi) \, d\mathcal{Q}, \\ \mathbf{F}_{LS}^\phi(\psi) &:= \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \delta_{1,\mathcal{Q}}^\phi \int_{\mathcal{Q}} f_{\phi,q} (\partial_t \psi + (\mathbf{b}_q \circ \nabla) \psi + c_q \psi) \, d\mathcal{Q}, \\ \mathbf{A}_{LS}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}, q) &:= \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \int_{\mathcal{Q}} (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{u} + \nabla p) \circ \\ & \quad (\delta_{1,\mathcal{Q}}^u (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{v}) + \delta_1^p \nabla q) \, d\mathcal{Q}, \\ \mathbf{F}_{LS}^u(\mathbf{v}, q) &:= \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \int_{\mathcal{Q}} \mathbf{f}_{u,q} \circ (\delta_{1,\mathcal{Q}}^u (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{v}) + \delta_1^p \nabla q) \, d\mathcal{Q}, \\ \mathbf{A}_{LS}^p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sum_{\forall \mathcal{Q} \in Q_q} \delta_{2,\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} (\nabla \circ \mathbf{u}) (\nabla \circ \mathbf{v}) \, d\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß keine Diffusions- bzw. Reibungsterme vertreten sind, da die hierbei auftretenden höheren Ableitungen auf linearen Elementen Null sind. Der damit verbundene Konsistenzverlust erfordert eine besondere Behandlung, auf die in Abschnitt 3.4.4 eingegangen wird.

Neben den angesprochenen PSPG- und SUPG-Termen treten noch weitere Glieder auf. Während für den instationären und reaktiven Anteil der SUPG-Parameter übernommen wird, taucht in der stabilisierten Kontinuitätsgleichung die neue Größe δ_2 auf. Alle hier aufgeführten Anteile bewirken eine weitere Stabilisierung des Gesamtsystems, wobei der zuletzt genannte Term mit der Nichterfüllung der Divergenzfreiheit des diskreten Geschwindigkeitsfeldes skaliert.

Eine grundlegende Schwierigkeit besteht in der zweckmäßigen Wahl der δ -Parameter. Diese sind wiederum Funktionen, auf deren allgemeines Design in [52] eingegangen wird. Allerdings ist die Festlegung der Stabilisierungsparameter bisher noch nicht in jedem Fall theoretisch gut abgesichert. Bezugnehmend auf [8] kommen folgende Beziehungen zur Ermittlung von δ_1^ϕ und δ_1^u zum Einsatz:

$$\delta_{1,\mathcal{Q}}^\phi := C_1^\phi \frac{h^2}{2\epsilon_{\mathcal{Q}}} \left(1 + \text{Pe}_{\mathcal{Q}}^2 + \left(\frac{h^2}{\Delta t \epsilon_{\mathcal{Q}}} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad C_1^\phi = \text{const}, \quad (3.86)$$

$$\delta_{1,\mathcal{Q}}^u := C_1^u \frac{h^2}{2\nu_{e,\mathcal{Q}}} \left(1 + \text{Re}_{\mathcal{Q}}^2 + \left(\frac{h^2}{\Delta t \nu_{e,\mathcal{Q}}} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad C_1^u = \text{const}. \quad (3.87)$$

Aufgrund der in Abschnitt 3.3 aufgezeigten Analogie zwischen Zeitschrittweite und Reaktionskoeffizient ist in (3.86) auch der Übergang zu $\Delta t \mapsto \Delta t + 1/c_{\mathcal{Q}}$ denkbar. In den numerischen Untersuchungen wird diese Variante jedoch nicht weiter verfolgt.

Mit der Festlegung des Stabilisierungsparameters

$$\delta_{2,\mathcal{Q}} := C_2 \nu_{e,\mathcal{Q}} \sqrt{1 + \text{Re}_{\mathcal{Q}}^2}, \quad C_2 = \text{const} \quad (3.88)$$

wurde der in [14] für stationäre Probleme angegeben Vorschlag übernommen. Jedoch benutzen auch TEZDUYAR et al. [11], [60] in Zusammenhang mit der diskontinuierlichen Galerkin-Methode eine Funktion mit dem gleichen asymptotischen Verhalten.

Die bisherigen Parameter sind aus den lokalen Größen auf einem Element ermittelt. Im Gegensatz dazu wird bei der PSPG-Stabilisierung die globale Definition

$$\delta_1^p := C_1^p \frac{\bar{h}^2}{2\nu_{max,q}}, \quad C_1^p = \text{const} \quad (3.89)$$

verwendet, da für elementweise unterschiedliche Werte ein zusätzlicher Konsistenzverlust auftritt. Diese Beziehung zeigt wiederum einen ähnlichen Aufbau wie die Angabe in [61], bei der jedoch konstante Viskosität vorausgesetzt wurde. Eigene numerische Untersuchungen favorisierten die Verwendung der maximalen Viskosität $\nu_{max,q}$ und eines mittleren Elementdurchmessers \bar{h} entsprechend

$$\nu_{max,q} := \max_{\mathcal{Q}} \nu_{e,\mathcal{Q}}, \quad \bar{h} := \left(\frac{1}{N_{el}} \sum_{i=1}^{N_{el}} \text{meas } \mathcal{K}_i \right)^{1/d}. \quad (3.90)$$

In den numerischen Beispielen sind die noch nicht angesprochenen Konstanten C_1 , C_2 generell mit eins festgelegt. Deren Variation gestattet gegebenenfalls Eingriffsmöglichkeiten für problemspezifische Anpassungen.

3.4.4 Konsistenzsicherung

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt angesprochen, bewirkt die Verwendung linearer Elemente einen Konsistenzverlust, weil der aus der PSPG–Stabilisierung hervorgehende Term

$$-\delta_1^p \nu_{e,Q} \int_Q \nabla^2 \mathbf{u}_q \circ \nabla q_q \, dQ \quad (3.91)$$

nicht direkt nachgebildet werden kann. Das auf diese Weise veränderte Problem verursacht Druckgrenzschichten am Rand, die sich auch anschaulich durch veränderte Randbedingungen interpretieren lassen.

Wendet man den Divergenzoperator auf die integral formulierte Navier–Stokes Gleichung an, so kann aus der Überführung in ein Oberflächenintegral eine Randbedingung für den Druck abgeleitet werden:

$$\mathbf{n} \circ \nabla p = -\mathbf{n} \circ (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \circ \nabla \circ \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{n} \circ \mathbf{f}_u \quad \text{auf } P^m. \quad (3.92)$$

Die gleiche Vorgehensweise führt beim kontinuierlichen Äquivalent der PSPG–Stabilisierung (3.80) ohne $\delta_1^p \mathbf{n} \circ \nabla \circ \boldsymbol{\tau}_e$ auf eine veränderte Beziehung, in der das Randintegral des Reibungsterms nicht enthalten ist. Durch Rückassemblierung dieser Anteile verfolgt eine Variante der Konsistenzsicherung nach DROUX und HUGHES [62] das Ziel, die Wirkung der fehlerhaften Randbedingung zu eliminieren. Auf dem zu modifizierenden Rand

$$P_{(n|r|w),q}^{up} := P_{n,q}^{up} \cup P_{r,q}^{up} \cup P_{w,q}^{up}$$

erfolgt in diesem Fall die Addition der Funktionale

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_K^{u,\alpha}(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; q) &:= -\delta_1^p \sum_{\forall \mathcal{P} \in P_{(n|r|w),q}^{up}} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{n} \circ (\nabla p + (\mathbf{a} \circ \nabla) \mathbf{u}) q \, d\mathcal{P}, \\ \mathbf{F}_K^{u,\alpha}(q) &:= -\delta_1^p \sum_{\forall \mathcal{P} \in P_{(n|r|w),q}^{up}} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{n} \circ \mathbf{f}_u q \, d\mathcal{P} \end{aligned}$$

zu \mathbf{A}_{LS}^u bzw. \mathbf{F}_{LS}^u . Allerdings wirken sich insbesondere die negativen Einträge in der Hauptdiagonale des Drucks ungünstig auf die iterative Lösung des diskreten Systems aus. Aus dieser Darstellung wird andererseits auch das natürliche Entstehen von $\mathbf{n} \circ \delta_1^p \nabla p$ beim Gebietszerlegungsalgorithmus in (3.62) deutlich.

Ein anderer Zugang nach PIERRE [63] versucht, (3.91) geeignet zu approximieren. Anhand der Identität

$$-\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla(\nabla \circ \mathbf{u})$$

wird unter der Annahme eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes die Betrachtung auf den Term $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ beschränkt. In Verbindung mit der Testfunktion erlaubt die Umformung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \circ \nabla q = \nabla \circ ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \nabla q)$$

ein Randintegral mit lediglich ersten Ableitungen zu formulieren. Über das so gebildete Funktional

$$\mathbf{A}_K^{u,\beta}(\mathbf{u}, q) := \delta_1^p \sum_{\forall \mathcal{P} \in P_{(n|r|w),q}^{up}} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{n} \circ (\nabla \times \mathbf{u}) \times \nabla q \, d\mathcal{P}$$

erfolgt die Definition des konsistenzgesicherten least-squares Ausdrucks

$$\mathbf{A}_{K,LS}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}, q) := \mathbf{A}_K^{u,\beta}(\mathbf{u}, q) + \mathbf{A}_{LS}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}, q).$$

Aufgrund der besseren algebraischen Eigenschaften der diskreten Gleichungen ist nur diese Form der Konsistenzsicherung eingesetzt worden.

3.4.5 Drucknormierung

Bei ausschließlich Dirichletschen Randbedingungen ist der Druck nur bis auf eine Konstante bestimmt. Im Diskreten äußert sich dieser Sachverhalt in einer singulären Matrix für das zu lösende Gleichungssystem. Einige iterative Löser konvergieren nicht für derartige Matrizen, so daß gegebenenfalls eine Regularisierung notwendig wird. Dies trifft für den gebietszerlegten Fall so nicht zu, da dessen Realisierung mit Robinschen Randbedingungen erfolgt. Hierbei stellt sich lediglich das Druckniveau innerhalb der Gebietsiterationen frei ein.

Über die Einführung des Störterms

$$\mathbf{A}_P^p(p, q) := \sum_{\forall Q \in Q_q} h^4 \mathbf{G}_L \left(\int_Q p q \, dQ \right)$$

wird eine Beschränkung des Ausdrucks $\int p \, dQ$ erzielt [63]. Der neu auftauchende Operator \mathbf{G}_L ist für die daraus abgeleiteten Matrizen wie folgt definiert:

$$\mathbf{G}_L(\mathbf{A}) := \{\mathbf{B} : b_{ii} = a_{ii} - \sum_{\forall j \neq i} a_{ij}, \quad b_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i\}. \quad (3.93)$$

Vielfach wird diese Vorgehensweise durch den Begriff 'lumping' gekennzeichnet und kann als vereinfachte Integrationsformel angesehen werden. Sie dient in diesem Zusammenhang der schnelleren Assemblierung, da die genaue Widerspiegelung des Integrals von untergeordneter Bedeutung ist.

3.4.6 Zusammenstellung der Gleichungen

Zunächst seien die in den vorhergehenden Abschnitten definierten Funktionale zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\phi(\phi, \psi) &:= \mathbf{A}_{DG}^\phi(\phi, \psi) + \mathbf{A}_B^\phi(\phi, \psi) + \mathbf{A}_{LS}^\phi(\phi, \psi), \\ \mathbf{F}^\phi(\psi) &:= \mathbf{F}_{DG}^\phi(\psi) + \mathbf{F}_B^\phi(\psi) + \mathbf{F}_{LS}^\phi(\psi), \\ \mathbf{A}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}, q) &:= \mathbf{A}_{DG}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}) + \mathbf{A}_B^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \mathbf{A}_{K,LS}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{a}; \mathbf{v}, q), \\ \mathbf{F}^u(\mathbf{v}, q) &:= \mathbf{F}_{DG}^u(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_B^u(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_{LS}^u(\mathbf{v}, q), \\ \mathbf{A}^p(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= \mathbf{A}_{DG}^p(\mathbf{u}, q) + \mathbf{A}_B^p(\mathbf{u}, q) + \mathbf{A}_{LS}^p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{A}_P^p(p, q), \\ \mathbf{F}^p(q) &:= \mathbf{F}_B^p(q) \end{aligned}$$

zusammengefaßt. Die diskreten Variationsformulierungen lassen sich nun wie folgt angeben:

- Ermittle $\phi \in W_{0,q}$ aus

$$\mathbf{A}^\phi(\phi, \psi) = \mathbf{F}^\phi(\psi) \quad \forall \psi \in W_{0,q}. \quad (3.94)$$

- Finde das Paar $(\mathbf{u}, p) \in (W_{0,q})^d \times W_q$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^u(\mathbf{u}, p, \mathbf{u}; \mathbf{v}, q) &= \mathbf{F}^u(\mathbf{v}, q), \\ \mathbf{A}^p(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= \mathbf{F}^p(\mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in (W_{0,q})^d, \forall q \in W_q. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Deren Auswertung führt in Verbindung mit den Gleichungen zur Umsetzung der Dirichletschen Randbedingungen (3.74) bzw. (3.75) auf die Gleichungssysteme

$$\hat{\mathbf{A}}^\phi \phi_q^{\{n\}} = \hat{\mathbf{F}}^\phi, \quad (3.96)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^{up}[\mathbf{u}_q] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_q^{\{n\}} \\ p_q^{\{n\}} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{F}}^{up}. \quad (3.97)$$

Mit der Schreibweise $\mathbf{A}[\mathbf{u}]$ ist die Abhängigkeit von \mathbf{A} bezüglich des bei der Assemblierung verwendeten Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} gekennzeichnet. Die hierbei notwendige Linearisierung ist in 3.7 vorgestellt, so daß sich an dieser Stelle auf das Entstehen linearer Gleichungssysteme in der allgemeinen Form

$$\hat{\mathbf{A}}\{\cdot\}_q^{\{n\}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (3.98)$$

als Ergebnis der bisherigen Diskretisierung beschränkt werden kann.

3.4.7 Auswertung der zeitlichen Integrale

Bei der Ableitung der diskreten Raum-Zeit Formulierung ist bisher nicht näher auf den Zusammenhang mit dem DG(0)- und insbesondere DG_N(1)-Algorithmus eingegangen worden. Der Bezug wird durch die analytische Auswertung der Zeitintegrale in den diskreten Variationsgleichungen hergestellt. Aufgrund der Vielzahl der dabei entstehenden Terme und der ausführlichen Darstellung in 3.2.2 und 3.2.3 sei hier auf deren explizite Angabe verzichtet. Jedoch lassen sich die bei DG(1) entstehenden Matrizen und Vektoren auch in der Form

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{(00)} & \hat{\mathbf{A}}_{(01)} \\ \hat{\mathbf{A}}_{(10)} & \hat{\mathbf{A}}_{(11)} \end{bmatrix}, \quad \{\cdot\}_q^{\{n\}} = \begin{pmatrix} \xi_0 \{\cdot\}_{(0),h}^{\{n\}} \\ \xi_1 \{\cdot\}_{(1),h}^{\{n\}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{(0)} \\ \hat{\mathbf{F}}_{(1)} \end{pmatrix}$$

schreiben. Mit dem die zeitliche Integration beschreibenden Operator \mathcal{I} gelten nun folgende Definitionen:

- Für $DG^{\cdot}(0)$ sei $\mathbf{A}^{\cdot} := \mathcal{I}(\hat{\mathbf{A}}^{\cdot})$, $\mathbf{F}^{\cdot} := \mathcal{I}(\hat{\mathbf{F}}^{\cdot})$.
- Beim iterativen $DG_N^{\cdot}(1)$ -Algorithmus gelte

$$\mathbf{A}_{(i)}^{\cdot} := \mathcal{I}(\hat{\mathbf{A}}_{(ii)}^{\cdot}), \quad \mathbf{F}_{(i)}^{\cdot}[\{\cdot\}_{(j),h}^{\{n\}}] := \mathcal{I}(\hat{\mathbf{F}}_{(i)}^{\cdot} - \hat{\mathbf{A}}_{(ij)}^{\cdot} \xi_j \{\cdot\}_{(j),h}^{\{n\}}) \quad i, j = 0, 1; i \neq j.$$

Entsprechend Tabelle 3.3 ist damit einerseits die Verwandtschaft zu den semidiskreten Problemen hergestellt. Andererseits wird noch einmal die Zerlegung des Gesamtgleichungssystems beim $DG_N^{\cdot}(1)$ -Verfahren aus einem anderen Blickwinkel dargestellt.

Problemklasse	$DG^{\cdot}(0)$		$DG_N^{\cdot}(1)$	
semidiskret	\mathcal{A}_0^{\cdot}	\mathcal{F}_0^{\cdot}	$\mathcal{A}_{1,(i)}^{\cdot}$	$\mathcal{F}_{1,(i)}^{\cdot}$
volldiskret	\mathbf{A}^{\cdot}	\mathbf{F}^{\cdot}	$\mathbf{A}_{(i)}^{\cdot}$	$\mathbf{F}_{(i)}^{\cdot}$

Tabelle 3.3: Analogien zwischen der volldiskreten und semidiskreten Darstellung (vgl. Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3).

Für den Rest dieses Kapitels seien mit der verkürzten Schreibweise $\{\cdot\}$ die bisher mit $\{\cdot\}_h^{\{n\}}$ bezeichneten Koeffizienten der Lösung $\{\cdot\}_h$ gekennzeichnet. Die entstehenden Gleichungssysteme können nun allgemein mit

$$\mathbf{A}^{\cdot} \{\cdot\} = \mathbf{F}^{\cdot} \tag{3.99}$$

angegeben werden. Gleichzeitig sind es die Gleichungen, die aus der räumlichen Diskretisierung der adäquaten stationären Probleme (3.54) und (3.57), (3.58) bei der Gebietszerlegung hervorgehen.

3.5 Diskreter Gebietszerlegungsalgorithmus

Auch im Zusammenhang mit der Gebietszerlegung wird zunächst das Gesamtgebiet entsprechend der Darstellung in 3.4.1 vernetzt. Anschließend erfolgt die Bildung der diskreten Teilgebiete, die im Verlauf der Berechnung unverändert bleiben, durch Zusammenfassung einer Menge benachbarter Elemente. Somit sind die Randelemente \mathcal{E} an der inneren Berandung jeweils paarweise vorhanden (vgl. Abbildung 3.6). Da zyklische Randbedingungen ebenfalls über den DD-Algorithmus realisiert werden, seien auch periodische Ränder identisch zerlegt, um eine ebensolche Paarbildung zu ermöglichen.

Die Berandung, auf der der DD-Algorithmus wirksam ist, wird dementsprechend durch

$$\Gamma_{DD}^{\cdot} := \bigcup_{\forall i,j;i \neq j} (\Gamma_{ij,h}^{\cdot} \cup \Gamma_{z,ij,h}^{\cdot}), \quad \Gamma_{DD,ij}^{\cdot} := \Gamma_{DD}^{\cdot} \cup \Gamma_{i,h}^{\cdot} \cup \Gamma_{j,h}^{\cdot} \tag{3.100}$$

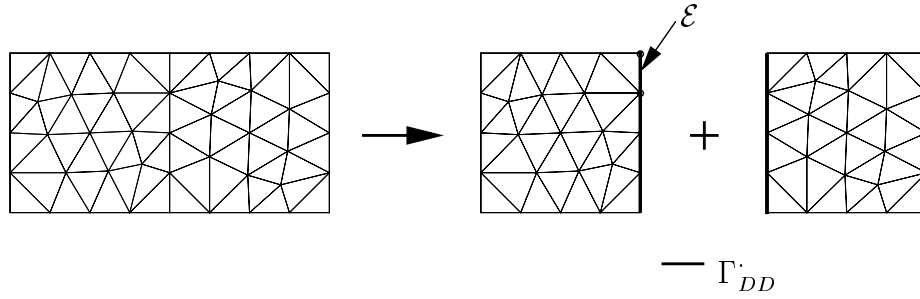


Abbildung 3.6: Aufteilung der Elemente einer Triangulation in zwei Teilgebiete.

bestimmt. Da der Austausch von Informationen randelementorientiert erfolgt, ist mit $\Gamma_{DD,ij}$ der Kommunikationsrand zwischen den Teilgebieten i und j gekennzeichnet. Hingegen ist bei einem knotenbasierten Algorithmus die Anzahl der einen bestimmten Randknoten enthaltenden Gebiete von der Topologie der Makrovernetzung, d. h. der Lage der Teilgebiete zueinander, abhängig und verkompliziert die Implementierung.

Mit den auf den Randelementen $\mathcal{E} \in \Gamma_{DD,ij}$ definierten Größen

$$\begin{aligned} \Lambda_{ji}^{\phi,k} &:= (1 - \omega_{DD}^{\phi}) \left(\rho_{i,h}^{\phi} \phi_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \epsilon_h^* \nabla \phi_{i,h}^k \right) + \omega_{DD}^{\phi} \left(\rho_{i,h}^{\phi} \phi_{j,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \epsilon_h^* \nabla \phi_{j,h}^k \right), \\ \Lambda_{ji}^{up,k} &:= (1 - \omega_{DD}^{up}) \left(\rho_{i,h}^{u,k} \mathbf{u}_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\sigma}_{i,h}^{*k} \right) + \omega_{DD}^{up} \left(\rho_{i,h}^{u,k} \mathbf{u}_{j,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\sigma}_{j,h}^{*k} \right), \\ \Lambda_{ji}^{u,k} &:= (1 - \omega_{DD}^u) \left(\rho_{i,h}^{u,k} \mathbf{u}_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\tau}_{i,h}^{*k} \right) + \omega_{DD}^u \left(\rho_{i,h}^{u,k} \mathbf{u}_{j,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\tau}_{j,h}^{*k} \right), \\ \Lambda_{ji}^{p,k} &:= (1 - \omega_{DD}^p) \left(\rho_{i,h}^{p,k} p_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_{i,h}^k \right) + \omega_{DD}^p \left(\rho_{i,h}^{p,k} p_{j,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_{j,h}^k \right) \end{aligned}$$

lassen sich zur Realisierung der Kopplungsbedingungen (3.55), (3.59), (3.61) und (3.62) die folgenden Beziehungen für das Gebiet i aufstellen:

$$\begin{aligned} \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{\phi}} \int_{\mathcal{E}_i} \left(\rho_{i,h}^{\phi} \phi_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \epsilon_h^* \nabla \phi_{i,h}^k \right) \psi_h \, d\mathcal{E} &= \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{\phi}} \int_{\mathcal{E}_i} \Lambda_{ji}^{\phi,k-1} \psi_h \, d\mathcal{E}, \\ \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \left(\rho_{i,h}^{u,k-1} \mathbf{u}_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\sigma}_{i,h}^{*k} \right) \circ \mathbf{v}_h \, d\mathcal{E} &= \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \Lambda_{ji}^{up,k-1} \circ \mathbf{v}_h \, d\mathcal{E}, \\ \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \left(\rho_{i,h}^{u,k-1} \mathbf{u}_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \boldsymbol{\tau}_{i,h}^{*k} \right) \circ \mathbf{v}_h \, d\mathcal{E} &= \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \Lambda_{ji}^{u,k-1} \circ \mathbf{v}_h \, d\mathcal{E}, \\ \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \left(\rho_{i,h}^{p,k-1} p_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_{i,h}^k \right) q_h \, d\mathcal{E} &= \sum_{\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{DD,ij}^{up}} \int_{\mathcal{E}_i} \Lambda_{ji}^{p,k-1} q_h \, d\mathcal{E}. \quad (3.101) \end{aligned}$$

Hierbei ist ρ_h in Anlehnung an (3.76) elementweise konstant approximiert und geht aus den kontinuierlichen Definitionen (3.56), (3.60) und (3.63) durch ein auf den Randelementen \mathcal{E} gemittelt Geschwindigkeitsfeld hervor. Im Unterschied zur bisherigen Darstellung wurde nun der zusätzliche Relaxationsparameter ω_{DD} aufgenommen. Er wichtet die Robinschen Randbedingungen in beiden Teilgebieten aus

dem letzten Iterationsschritt und ist in den entsprechenden kontinuierlichen Formulierungen bisher mit eins angenommen worden.

Bei der Ermittlung von Λ_{ji}^\cdot sollte auf die explizite Berechnung von Ableitungen am Gebietsrand verzichtet werden. Zwar lassen sich hierfür die Knotenwerte der angrenzenden Elemente \mathcal{K} heranziehen, jedoch ist dies eine vergleichsweise ungenaue Approximation (vgl. auch Abschnitt 3.10). Auch bei einer glatten Lösung werden auf diese Weise bestimmte Ableitungen im allgemeinen in den beiden angrenzenden Teilgebieten unterschiedlich sein und stehen damit im Widerspruch zur kontinuierlichen Formulierung.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zur Beschreibung des diskreten DD-Algorithmus die im kontinuierlichen Fall aufgestellte Koppelbedingung für den Druck (3.62) herangezogen. Weiterhin ist die Betrachtung zunächst auf den nicht unterrelaxierten Fall mit $\omega_{DD}^p = 1$ beschränkt. Auf dem Gebiet i in der DD-Iteration k gilt

$$\rho_{i,h}^{p,k-1} p_{i,h}^k + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_{i,h}^k = \underline{\Lambda_{ji}^{p,k-1}} = \rho_{i,h}^{p,k-1} p_{j,h}^{k-1} + \mathbf{n}_i \circ \delta_1^p \nabla p_{j,h}^{k-1}$$

während im vorhergehenden Schritt im Nachbargebiet die Gleichung

$$\underline{\rho_{j,h}^{p,k-2} p_{j,h}^{k-1} + \mathbf{n}_j \circ \delta_1^p \nabla p_{j,h}^{k-1}} = \Lambda_{ij}^{p,k-2} = \rho_{j,h}^{p,k-2} p_{i,h}^{k-2} + \mathbf{n}_j \circ \delta_1^p \nabla p_{i,h}^{k-2}$$

verwendet wird. Aus den unterstrichenen Anteilen der beiden letzten Formeln läßt sich $\Lambda_{ji}^{p,k-1}$ aus $\Lambda_{ij}^{p,k-2}$ bestimmen, wobei der Neumannsche Anteil über $\mathbf{n}_j = -\mathbf{n}_i$ eliminiert ist. Verallgemeinert lautet diese rekursive Bildungsvorschrift (vgl. [29], [31]) mit

$$\Xi_i^{\phi,k}(\rho) := \rho \phi_{i,h}^k, \quad \Xi_i^{u,k}(\rho) := \rho \mathbf{u}_{i,h}^k, \quad \Xi_i^{p,k}(\rho) := \rho p_{i,h}^k \quad (3.102)$$

und $\omega_{DD}^p = 1$ wie folgt:

$$\Lambda_{ji}^{\cdot,k-1} = \Xi_j^{\cdot,k-1}(\rho_{i,h}^{\cdot,k-1} + \rho_{j,h}^{\cdot,k-2}) - \Lambda_{ij}^{\cdot,k-2}. \quad (3.103)$$

Unter Einbeziehung des Relaxationsfaktors geht aus einer analogen Betrachtung die obige Beziehung in

$$\begin{aligned} \Lambda_{ji}^{\cdot,k-1} &= (1 - \omega_{DD}) \left(\Xi_i^{\cdot,k-1}(\rho_{i,h}^{\cdot,k-1} - \rho_{i,h}^{\cdot,k-2}) + \Lambda_{ji}^{\cdot,k-2} \right) \\ &+ \omega_{DD} \left(\Xi_j^{\cdot,k-1}(\rho_{i,h}^{\cdot,k-1} + \rho_{j,h}^{\cdot,k-2}) - \Lambda_{ij}^{\cdot,k-2} \right) \end{aligned} \quad (3.104)$$

über.

Aus der Sicht eines einzelnen Gebietes i kann der DD-Algorithmus in Verbindung mit den aus der diskreten Raum-Zeit Formulierung hervorgegangenen \mathbf{A}_i^\cdot und \mathbf{F}_i^\cdot in folgender Weise angegeben werden:

1. Initialisiere $\rho_{i,h}^{\cdot,[0]}$, $\Lambda_{ij}^{\cdot,[0]}$ und setze $k = 1$.
2. Austausch der $\Lambda_{ij}^{\cdot,[k-1]}$:

- (a) Versende $\Lambda_{ij}^{[k-1]}$ an alle Nachbarn j .
 (b) Empfange $\Lambda_{ji}^{[k-1]}$ von allen Nachbarn j .

3. Assembliere DD-Anteile:

- (a) $\mathbf{A}_i \mapsto \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{DD}$; Matrix \mathbf{A}_{DD} berechnet sich aus den Dirichletschen Anteilen der linken Seite von (3.101), Neumannsche Anteile bereits vorhanden, vgl. Abschnitt 3.4.2.
 (b) $\mathbf{F}_{i,DD} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{DD}$; Vektor \mathbf{F}_{DD} berechnet sich aus $\Lambda_{ji}^{[k-1]}$ entsprechend der rechten Seite von (3.101).

4. Bestimme $\{\cdot\}_{i,h}^{[k]}$ durch Lösung von $\mathbf{A}_i \{\cdot\}_i^{[k]} = \mathbf{F}_{i,DD}$.

5. Deassembliere DD-Matrixanteile $\mathbf{A}_i \mapsto \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_{DD}$.

6. Berechne Λ_{ij} für den neuen DD-Schritt $k \mapsto k + 1$:

(a) Berechne den vorläufigen Wert

$$\Lambda_{ij}^{[k-1]} \mapsto (1 - \omega_{DD})\Lambda_{ij}^{[k-2]} + \omega_{DD} \left(\Xi_i^{[k-1]}(\rho_{i,h}^{[k-2]}) - \Lambda_{ji}^{[k-2]} \right).$$

(b) Berechne eine Hilfsgröße (nutze dazu die freie Variable Λ_{ji})

$$\Lambda_{j\underline{i}} = -(1 - \omega_{DD})\Xi_i^{[k-1]}(\rho_{i,h}^{[k-2]}).$$

(c) Bestimme $\rho_{i,h}^{[k-1]}$ aus $\{\cdot\}_{i,h}^{[k-1]}$.

(d) Vervollständige die Hilfsgröße

$$\Lambda_{j\underline{i}} \mapsto \Lambda_{j\underline{i}} + (1 - \omega_{DD})\Xi_i^{[k-1]}(\rho_{i,h}^{[k-1]}).$$

(e) Versende $\Lambda_{j\underline{i}}$ und $\rho_{i,h}^{[k-1]}$ an alle Nachbarn j .

(f) Empfange $\Lambda_{\underline{j}i}$ und $\rho_{j,h}^{[k-1]}$ von allen Nachbarn j .

(g) Berechne den endgültigen Wert

$$\Lambda_{ij}^{[k-1]} \mapsto \Lambda_{ij}^{[k-1]} + \Lambda_{\underline{j}i} + \omega_{DD} \Xi_i^{[k-1]}(\rho_{j,h}^{[k-1]}).$$

7. Solange $k < N_{DD}$ springe zu Punkt 2.

Innerhalb dieses Schemas wird jeweils nur eine Instanz der darin vertretenen Variablen benötigt, so daß die in eckigen Klammern angegebenen Indizes nur dem Vergleich mit der bisherigen Darstellung dienen. Im ersten Zeitschritt erfolgt die Initialisierung von $\Lambda_{ij}^{[0]}$ aus dessen elementweiser Definition mit $\omega_{DD} = 1$. Im Verlauf

der weiteren Berechnung wird für diese Größe der letzte Wert aus dem vorhergegangenen DD–Zyklus übernommen.

Der Algorithmus ist in dieser Form für den allgemeinsten Fall mit Relaxationsparameter und adaptiver Berechnung von $\rho_{i,h}$ angegeben. Für die Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung ergeben sich aufgrund des konstanten Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{b}_h^* deutliche Vereinfachungen. So kann die Modifikation der Matrix \mathbf{A}_i einmalig vor dem eigentlichen Beginn der DD–Schleife erfolgen. Weiterhin reduziert sich die Neuberechnung von Λ_{ij} (Punkt 6.) auf

$$\Lambda_{ij}^{:[k-1]} \mapsto (1 - \omega_{DD})\Lambda_{ij}^{:[k-2]} + \omega_{DD} \left(\Xi_i^{:[k-1]}(\rho_{i,h} + \rho_{j,h}) - \Lambda_{ji}^{:[k-2]} \right)$$

und benötigt damit keine Kommunikation. Kürzlich wurde in [31] bewiesen, daß die Konvergenz des DD–Algorithmus durch

$$\sum_{\forall \mathcal{E} \in \Gamma_{DD}} \|\{\cdot\}_{i,h}^k - \{\cdot\}_{j,h}^{k-1}\|_{0,\mathcal{E}} < \mu_{DD}$$

bestimmt werden kann. Die Aufnahme dieses Abbruchkriteriums in das obige Schema gestaltet sich problemlos, da lediglich ein zusätzlicher Austausch der Lösung auf den Teilgebietsrändern erforderlich wird.

3.6 Besonderheiten des Turbulenzmodells

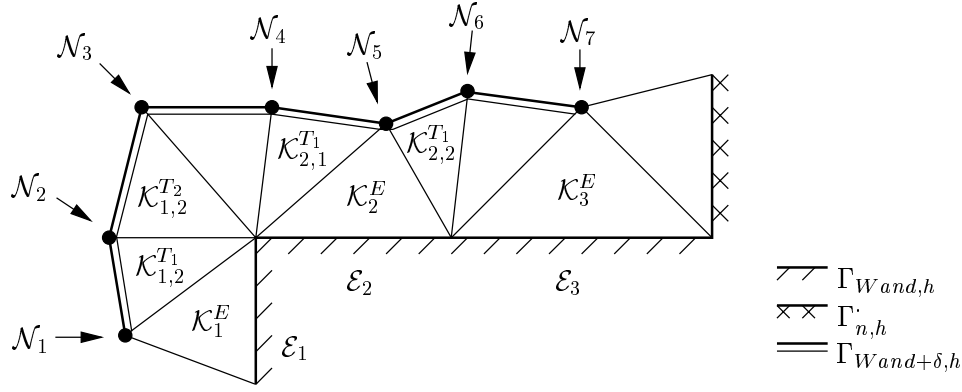
3.6.1 Innere Berandung

Im Gegensatz zu strukturierten Netzen kann bei unstrukturierten Gittern die innere Berandung, die hier gleichungsunabhängig als $\Gamma_{Wand+\delta,h}$ bezeichnet ist, nicht in natürlicher Weise durch eine einfache Verschiebung der Elementindizes erzeugt werden. Vielfach hat man auch wenig Einfluß auf die konkrete Gestalt der Randelemente, so daß der Ermittlung der inneren Berandung im Kontext unstrukturierter Gitter eine gewisse Bedeutung zukommt. Aus diesem Grund sei der zu diesem Zweck verwendete Algorithmus näher vorgestellt.

Das Suchen von Elementgrenzen in einem bestimmten Intervall δ_w von der Wand erscheint aus mehreren Gründen als nicht zweckmäßig. Zum einen muß eine derartige Grenze nicht überall existieren. In einem solchen Fall ist jedoch davon abzuraten, innere und äußere Berandung gleich zu definieren. Andererseits sind diese Suchalgorithmen ausgesprochen zeitaufwendig.

Eine sehr viel effizientere Methode kann durch Ausnutzung der Kenntnis von Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Elementen formuliert werden. Ausgehend von den Randelementen werden hierbei Graphen zu den die innere Berandung beschreibenden Knoten auf der Grundlage ausschließlich topologischer Informationen aufgebaut. In 2D und 3D läßt sich dieser Algorithmus wie folgt beschreiben:

1. *Schleife über alle $\mathcal{E}_i \in \Gamma_{Wand,h}$:*

Abbildung 3.7: Bildung der inneren Berandung $\Gamma_{Wand+\delta,h}$.

- (a) Baue Graph $\mathcal{G}(\mathcal{E}_i)$ (Bezeichnung: \rightarrow) auf: $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{K}_i^E$ mit $\mathcal{E}_i \cap \bar{\mathcal{K}}_i^E = \mathcal{E}_i$.
 - (b) Wenn \mathcal{N}_j innerer, noch nicht zugewiesener Knoten mit $\mathcal{N}_j \notin \mathcal{E}_i$ und $\mathcal{N}_j \in \mathcal{K}_i^E$, dann $\mathcal{K}_i^E \rightarrow \mathcal{N}_j$.
 - (c) Schleife über alle angrenzenden Elemente $\mathcal{K}_{i,j}^{T_1}$ mit $\bar{\mathcal{K}}_{i,j}^{T_1} \cap \bar{\mathcal{K}}_i^E = \mathcal{E}_k$ [¶]:
 - i. Wenn \mathcal{N}_l innerer, noch nicht zugewiesener Knoten mit $\mathcal{N}_l \notin \mathcal{E}_k$ und $\mathcal{N}_l \in \mathcal{K}_{i,j}^{T_1}$, dann $\mathcal{K}_i^E \rightarrow \mathcal{K}_{i,j}^{T_n}$ und $\mathcal{K}_{i,j}^{T_n} \rightarrow \mathcal{N}_l$, ansonsten beende den Graph $\mathcal{K}_i^E \rightarrow \text{END}$.
2. Schleife über alle $\mathcal{E}_i \in \Gamma_{Wand,h}$:
 - (a) Schleife über alle Enden $\mathcal{K}_{i,j}^{T_n}$ des Graphen $\mathcal{G}(\mathcal{E}_i)$ wenn vorhanden:
 - i. Gehe in Element $\mathcal{K}_{i,j}^{T_{n+1}}$ mit $\bar{\mathcal{K}}_{i,j}^{T_{n+1}} \cap \bar{\mathcal{K}}_{i,j}^{T_n} = \mathcal{E}_k$.
 - ii. Wenn \mathcal{N}_l innerer, noch nicht zugewiesener Knoten mit $\mathcal{N}_l \notin \mathcal{E}_k$ und $\mathcal{N}_l \in \mathcal{K}_{i,j}^{T_{n+1}}$, dann $\mathcal{K}_{i,j}^{T_n} \rightarrow \mathcal{K}_{i,j}^{T_{n+1}}$ und $\mathcal{K}_{i,j}^{T_{n+1}} \rightarrow \mathcal{N}_l$, ansonsten beende den Graph $\mathcal{K}_{i,j}^{T_n} \rightarrow \text{END}$.
 3. Gehe erneut zu 2. bis alle Graphen beendet sind.

Für die in Abbildung 3.7 gezeigte Triangulation erhält man folgende Graphen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &\rightarrow \mathcal{K}_1^E [\rightarrow \mathcal{N}_1] \rightarrow \mathcal{K}_{1,2}^{T_1} [\rightarrow \mathcal{N}_2] \rightarrow \mathcal{K}_{1,2}^{T_2} [\rightarrow \mathcal{N}_3], \\ \mathcal{E}_2 &\rightarrow \mathcal{K}_2^E [\rightarrow \mathcal{N}_5] \rightarrow \begin{cases} \mathcal{K}_{2,1}^{T_1} [\rightarrow \mathcal{N}_4] \\ \mathcal{K}_{2,2}^{T_1} [\rightarrow \mathcal{N}_6] \end{cases}, \\ \mathcal{E}_3 &\rightarrow \mathcal{K}_3^E [\rightarrow \mathcal{N}_7]. \end{aligned}$$

[¶] \mathcal{E}_k bezeichnet ein im Gebietsinnern liegendes Element aus der gleichen Klasse wie die Randelemente.

Letztendlich wird so aus mathematischer Sicht eine Einschränkung des Berechnungsgebietes auf $\Omega_h \setminus \Omega_{\delta,h}$ mit

$$\Omega_{\delta,h} := \sum_j \mathcal{K}_j \quad \forall \bar{\mathcal{K}}_j \cap \Gamma_{Wand,h} \neq \emptyset$$

erzielt. Es obliegt dem Prozeß der Vernetzung, die Dicke dieser Elementschicht in der Größenordnung δ_w zu generieren.

Mit Hilfe der knotenbasierten Formulierung (3.75) können nun auf einfache Weise die Dirichletschen Randbedingungen realisiert werden, wobei der Vektor $\mathbf{A}_d^{\cdot,\beta}$ elementweise für $\forall \mathcal{E}_i \in \Gamma_{Wand,h}$ aufgebaut wird:

1. Bestimme $\boldsymbol{\tau}_{w,h}$ bzw. $\dot{q}_{w,h}$ aus Grenzschichtrechnung auf $\mathcal{K}_i^E \leftarrow \mathcal{E}_i$.
2. Berechne $k_{\delta,h}, \epsilon_{\delta,h} = f(\boldsymbol{\tau}_{w,h}, \delta_w(\mathcal{N}_j))$ an $\mathcal{N}_j \leftarrow \mathcal{K}_i^E$.
3. Übertrage $k_{\delta,h}, \epsilon_{\delta,h}$ auf $\forall \mathcal{N}$ in $\mathcal{G}(\mathcal{E}_i)$ und $\forall \mathcal{N} \in \mathcal{E}_i$.

Durch die Abbildung von $k_{\delta,h}$ und $\epsilon_{\delta,h}$ auch auf den Rand vereinfacht sich die im nächsten Abschnitt dargelegte Berechnung der turbulenten Viskosität. Erst bei der Ausgabe der Ergebnisse werden für diese beiden Größen Nullwerte bzw. für Geschwindigkeit und Temperatur die ursprünglich Dirichletschen Randbedingungen auf $\Gamma_{Wand,h}$ projiziert. Ohne diesen Projektionsschritt erhielte man an der Wand infolge der aus den Wandgesetzen abgeleiteten Neumannschen Randbedingungen falsche Funktionswerte. Dies ist zugleich noch einmal die Begründung für die Verwendung von Wandfunktionen.

3.6.2 Turbulente Viskosität

Ein Unterschwingen der Lösung wird durch das verwendete numerische Verfahren nicht verhindert. Für die Turbulenzgleichungen sind damit physikalisch nicht sinnvolle negative Werte insbesondere im Bereich scharfer Gradienten möglich. Aus diesem Grund wird eine untere Schranke bei der elementweisen Berechnung der turbulenten Viskosität festgelegt:

$$\nu_{t,\mathcal{K}} := \frac{1}{d+1} \sum_{\forall \mathcal{N}_j \in \mathcal{K}} \begin{cases} C_\mu \frac{(k_h^{\{j\}})^2}{\epsilon_h^{\{j\}}} & : k_h^{\{j\}} > k_{min,h} \wedge \epsilon_h^{\{j\}} > \epsilon_{min,h} \\ C_\mu \frac{k_{min,h}^2}{\epsilon_{min,h}} & : k_h^{\{j\}} \leq k_{min,h} \vee \epsilon_h^{\{j\}} \leq \epsilon_{min,h}. \end{cases}$$

Die minimalen Werte sind mit

$$k_{min,h} = \epsilon_{min,h} = 1,5 \cdot 10^{-6}$$

derart bestimmt, daß sich entsprechend (2.50) und einem in der Größenordnung eins normierten Geschwindigkeitsfeld ein minimaler Turbulenzgrad von

$$\text{Tu}_{min}(k_{min,h}, \mathbf{u} = 1) = 0,1\%$$

ergibt. Der damit verbundene Fehler bei der Berechnung der effektiven Viskosität ist für die in dieser Arbeit betrachteten turbulenten Strömungen mit moderaten Reynolds-Zahlen von ca. 10^4 ohne Bedeutung.

Von ganz erheblichem Einfluß hingegen ist die Art der Bestimmung von $\nu_{t,\mathcal{K}}$ am Gebietsrand. Nähme man für die auf dem Rand liegenden Knoten die turbulente Viskosität mit Null an, so träten in Abhängigkeit von der Lage der Elemente an der Berandung starke Sprünge auf. Für die in Abbildung 3.7 dargestellte Triangulation ergäbe sich beispielsweise $\nu_{t,\mathcal{K}}(\mathcal{K}_2^E) : \nu_{t,\mathcal{K}}(\mathcal{K}_{2,1}^{T_1}) = 1 : 2$ und würde so vornehmlich die Lösung des Drucks lokal stark verfälschen.

3.7 Linearisierung

Wenn auch durch die entkoppelte Sichtweise auf die einzelnen Gleichungen bereits eine teilweise Linearisierung erfolgt ist (äußere Linearisierung), so sind jedoch bei der Betrachtung des Gesamtsystems die Operatoren \mathbf{A} in den Variationsformulierungen nichtlinear. Die Lösung der daraus hervorgehenden diskreten Probleme erfordert durch deren Nichtlinearität eine besonderen Behandlung. Exemplarisch soll die hierbei eingesetzte Vorgehensweise am Beispiel des Modellgleichungssystems (3.99)

$$\mathbf{A}[\{\cdot\}]\{\cdot\} = \mathbf{F}$$

erläutert werden. Mit Hilfe eines allgemeinen Fixpunktiterationsverfahrens läßt sich dessen Lösung aus einer Folge linearer Gleichungssysteme der Form

$$\mathbf{B}[\{\cdot\}^{l-1}](\{\cdot\}^l - \{\cdot\}^{l-1}) = \omega_L(\mathbf{F} - \mathbf{A}[\{\cdot\}^{l-1}]\{\cdot\}^{l-1})$$

bestimmen. Die Iterationsmatrix \mathbf{B} ist ähnlich \mathbf{A} zu wählen, kann jedoch günstigere algebraische Eigenschaften aufweisen. Insbesondere soll sich hier auf $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ beschränkt werden. Weiterhin wird über den Relaxationsfaktor ω_L eine Wichtung des Residuums vorgenommen.

Je nachdem wie man die Größe definiert, für die das Gleichungssystem zu lösen ist, ergeben sich unterschiedliche Varianten. Die so entstehende Defektkorrekturmethode und die Picard-Iteration sind in Tabelle 3.4 gegenübergestellt. Entsprechend den dort aufgeführten Definitionen läßt sich ein Linearisierungsschritt für DG(0) mit einer geeignet gewählten Startlösung $\{\cdot\}^{l-1}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}[\{\cdot\}^{l-1}]$ wie folgt angeben:

1. Löse das Gleichungssystem $\mathbf{A} \mathbf{w}^l = \mathbf{L}$.
2. Bestimme die neue Lösung $\{\cdot\}^l$ aus \mathbf{w}^l .

Bei Vorhandensein von lediglich einem Gleichungssystem wird dieser Algorithmus wiederholt angewendet. Als Kriterium zur Beendigung der Linearisierungszyklen dient deren maximale Anzahl L oder die relative Änderung der Lösung bzw. das Residuum. Für letztere werden zweckmäßigerweise die dazugehörigen Normen

nicht algebraisch aus den Matrizen und Vektoren bestimmt, sondern anhand des kontinuierlich definierten $\{\cdot\}_h$. Auf diese Weise wird die Lösung nicht nur an den Knotenwerten, sondern im gesamten Berechnungsgebiet bewertet. Speziell kommt

$$\frac{\|\{\cdot\}_h^l - \{\cdot\}_h^{l-1}\|_{0,\Omega_h}}{\|\{\cdot\}_h^l\|_{0,\Omega_h}} < \mu_L \quad (3.105)$$

als Abbruchkriterium zum Einsatz.

Merkmale	Defektkorrektur	Picard-Iteration
Ausgangssystem	$\mathbf{A}(\{\cdot\}^l - \{\cdot\}^{l-1}) = \omega_L(\mathbf{F} - \mathbf{A}\{\cdot\}^{l-1})$	
Transformiertes System	$\mathbf{A}\mathbf{w}^l = \mathbf{L}$	
Rechte Seite	$\mathbf{L} := \mathbf{F} - \mathbf{A}\{\cdot\}^{l-1}$	$\mathbf{L} := \mathbf{F} - \frac{\omega_L - 1}{\omega_L} \mathbf{A}\{\cdot\}^{l-1}$
Neue Lösung	$\{\cdot\}^l = \{\cdot\}^{l-1} + \omega_L \mathbf{w}^l$	$\{\cdot\}^l = \omega_L \mathbf{w}^l$

Tabelle 3.4: Zwei Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme.

Während bei der Defektkorrektur \mathbf{w}^l von der eigentlichen Lösung abgespalten definiert ist und in der Regel $\|\mathbf{w}^l\| \ll \|\{\cdot\}^l\|$ gilt, unterscheiden sich bei der Picard-Iteration diese beiden Werte nur durch den Relaxationsfaktor ω_L . Dieser Unterschied bewirkt ein deutlich anderes Verhalten des DD-Algorithmus für eine im DD-Sinne nicht konvergierte Lösung im vorhergehenden Linearisierungsschritt.

Wird die Gebietszerlegung für den Defekt durchgeführt, so muß für ein nichtlineares \mathbf{A} am Ende der DD-Iteration die Lösung an den Gebietsrändern eindeutig gemacht werden. Andernfalls würde der Sprung in der Lösung eine veränderte Problemstellung festschreiben. Da ein solcher Eingriff störend auf die Konvergenz des folgenden DD-Algorithmus wirkt, ist in jedem Linearisierungszyklus eine ausreichende Anzahl von DD-Iteration zum Erreichen einer hinreichend glatten Lösung über die Gebietsränder anzustreben.

Bei der Picard-Iteration wird demgegenüber im Verlauf der Linearisierung jeweils die komplette Lösung neu bestimmt, so daß deren Eindeutigkeit zur Beibehaltung der Problemstellung nicht gefordert ist. Insofern können auch zu Beginn der Linearisierung Gebietsiterationen eingespart werden. All die genannten Gründe favorisieren die Picard-Iteration in Verbindung mit der Gebietszerlegung, so daß die weitere Darstellung auf diese Linearisierungsmethode beschränkt bleibt.

Beim iterativen $DG_N(1)$ -Verfahren wird für jedes Teilgleichungssystem ein Linearisierungsschritt entsprechend der Vorgehensweise bei $DG(0)$ ausgeführt, d. h. der Konvektionsterm der Navier-Stokes Gleichung erfährt hierbei bereits eine innere Linearisierung. Bezugnehmend auf die Abschnitte 3.2.3 und 3.4.7 ergibt sich:

1. *Initialisiere $n = 1$ und falls $l = 1$ führe Prädiktorschritt aus:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(1)} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{F}_{(1)} - \frac{\omega_L - 1}{\omega_L} \mathbf{A}_{(1)} \{\cdot\}_{(1)}^{l-1}, & \mathbf{A}_{(1)}, \mathbf{F}_{(1)} &= f(\{\cdot\}_{(0)}^{l-1}, \{\cdot\}_{(1)}^{l-1}), \\ \{\cdot\}_{(1)}^{l,[n]} &= \omega_L \mathbf{w}, & \{\cdot\}_{(0)}^{l,[n]} &= \{\cdot\}_{(0)}^{l-1}. \end{aligned}$$

2. *Berechne $\{\cdot\}_{(0)}^{l,[n+1]}$, $\{\cdot\}_{(1)}^{l,[n+1]}$ solange $n < N$ (für $l > 1$ gelte $\{\cdot\}_{(j)}^{l,[1]} = \{\cdot\}_{(j)}^{l-1}$):*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(0)} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{F}_{(0)} - \frac{\omega_L - 1}{\omega_L} \mathbf{A}_{(0)} \{\cdot\}_{(0)}^{l,[n]}, & \mathbf{A}_{(0)}, \mathbf{F}_{(0)} &= f(\{\cdot\}_{(0)}^{l,[n]}, \{\cdot\}_{(1)}^{l,[n]}), \\ \{\cdot\}_{(0)}^{l,[n+1]} &= \omega_L \mathbf{w}, \\ \mathbf{A}_{(1)} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{F}_{(1)} - \frac{\omega_L - 1}{\omega_L} \mathbf{A}_{(1)} \{\cdot\}_{(1)}^{l,[n]}, & \mathbf{A}_{(1)}, \mathbf{F}_{(1)} &= f(\{\cdot\}_{(0)}^{l,[n+1]}, \{\cdot\}_{(1)}^{l,[n]}), \\ \{\cdot\}_{(1)}^{l,[n+1]} &= \omega_L \mathbf{w}, \\ n &\mapsto n + 1. \end{aligned}$$

3. *Setze $\{\cdot\}_{(j)}^l = \{\cdot\}_{(j)}^{l,[N]}$ für $j = 0, 1$.*

Analog zum Block–Gauß–Seidel Verfahren wird zur Assemblierung die jeweils aktuellste Lösung verwendet. Damit besitzt der in eckigen Klammern auftretende Index n nur formalen Charakter. Tritt lediglich eine Gleichung auf, so sind l und n gleichberechtigt, d. h. die Anzahl der Iterationszyklen kann über beide Größen gesteuert werden. Erst in Verbindung mit weiteren Gleichungen kommt der äußeren Linearisierungsschleife eine besondere Bedeutung zu.

Zur übersichtlicheren Darstellung der Kopplung einzelner Gleichungen wird im weiteren ein Linearisierungsschritt für $DG(0)$ bzw. $DG_N(1)$ verkürzt durch

$$\mathbf{A} \{\cdot\}_{\omega}^l = \mathbf{F}_{\omega} \quad (3.106)$$

beschrieben. Abschließend sei bemerkt, daß für $l = 0$ bei beiden Verfahren die Lösung aus dem letzten Zeitschritt herangezogen wird.

3.8 Kopplung der Gleichungen

In Verbindung mit der Linearisierung erfolgt gleichzeitig die Kopplung der bisher voneinander losgelöst betrachteten Transportgleichungen. Für den komplexesten Fall einer turbulenten, nichtisothermen Strömung wird folgender Algorithmus verwendet (vgl. auch Abschnitt 3.1):

1. *Bestimme $\nu_t^l = \nu_t^l(k^{l-1}, \epsilon^{l-1})$.*

2. *Schleife über alle Gleichungsblöcke:*

- *Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung:*
 - (a) Löse $\mathbf{A}^{up}[\mathbf{u}^{l-1}, \nu_t^l] (\mathbf{u}_\omega^l, p_\omega^l)^T = \mathbf{F}_\omega^{up}[\vartheta^{l-1}]$
 - (b) Ermittle Abbruchkriterium für $(\mathbf{u}_h^l, p_h^l)^T$ und μ_L^{up} mit (3.107)
 - (c) Übernehme $\mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{u}^l$
- *Energiegleichung:*
 - (a) Löse $\mathbf{A}^\vartheta[\mathbf{u}^{l-1}, \nu_t^l] \vartheta_\omega^l = \mathbf{F}_\omega^\vartheta$
 - (b) Ermittle Abbruchkriterium für ϑ_h^l und μ_L^ϑ
 - (c) Übernehme $\vartheta^{l-1} = \vartheta^l$
- *k-Gleichung:*
 - (a) Löse $\mathbf{A}^k[\mathbf{u}^{l-1}, \nu_t^l] k_\omega^l = \mathbf{F}_\omega^k[\mathbf{u}^{l-1}, \epsilon^{l-1}, \vartheta^{l-1}, \nu_t^l]$
 - (b) Ermittle Abbruchkriterium für k_h^l und μ_L^k
- *ϵ -Gleichung:*
 - (a) Löse $\mathbf{A}^\epsilon[\mathbf{u}^{l-1}, k^{l-1}, \epsilon^{l-1}, \nu_t^l] \epsilon_\omega^l = \mathbf{F}_\omega^\epsilon[\mathbf{u}^{l-1}, k^{l-1}, \epsilon^{l-1}, \vartheta^{l-1}, \nu_t^l]$
 - (b) Ermittle Abbruchkriterium für ϵ_h^l und μ_L^ϵ .

3. Wenn nicht alle Abbruchkriterien erfüllt sind und $l < N_L$ ist, dann erhöhe $l \mapsto l + 1$ und gehe nach 1.

Die Anordnung der Gleichungsblöcke kann beliebig verändert werden, sie hat sich jedoch in der dargestellten Reihenfolge als günstig erwiesen. Bei anders gear- teten Problemstellungen entfallen nicht benötigte Gleichungen. Umgekehrt gestat- tet das Konzept Modellerweiterungen, beispielsweise auf Mehrphasenströmungen, durch einfaches Hinzufügen weiterer Transportbeziehungen. Jedoch kann mit dieser formalen Vorgehensweise nicht die Forderung nach einer stärkeren Kopplung einzel- ner Gleichungen erfüllt werden, wie sie insbesondere für die Turbulenzgleichungen denkbar ist.

Sämtliche Turbulenzgrößen zeigten sich von maßgeblichem Einfluß auf die Sta- bilität des Algorithmus, so daß diese generell dem letzten Linearisierungsschritt ent- nommen werden. Stabilitätsfördernd hat sich in diesem Zusammenhang auch die Verwendung der ϵ -Gleichung in der Variante mit Reaktionsterm entsprechend Ta- belle 3.1 ausgewirkt.

Zur Berechnung des Abbruchkriteriums (3.105) der Bewegungs- und Kontinui- tätsgleichung wird die angepaßte Norm

$$\|(\mathbf{u}_h, p_h)^T\|_{0, \Omega_h} := \sqrt{\|\mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_h}^2 + \|p_h\|_{0, \Omega_h}^2} \quad (3.107)$$

verwendet. In Verbindung mit instationären Problemen besitzen die Genauigkeits- schranken der Linearisierung jedoch eine eher untergeordnete Rolle, da der Aufwand zur Berechnung eines Zeitschrittes in der übergeordneten Zeitschleife in derselben Größenordnung wie der eines Linearisierungsschrittes liegt. Aus dieser Sicht wird zugunsten einer genaueren zeitlichen Auflösung oft nur ein Linearisierungsschritt

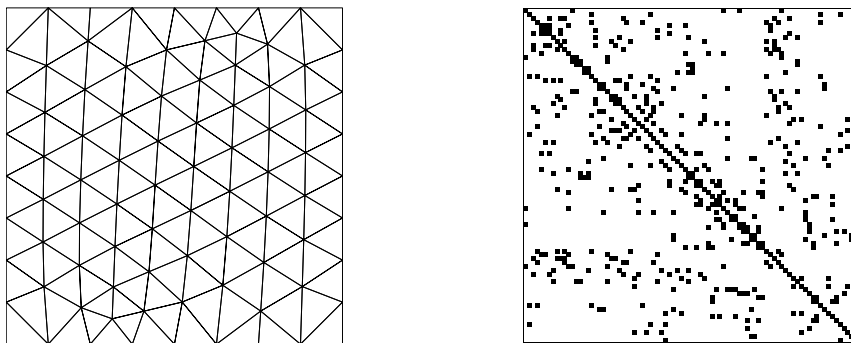


Abbildung 3.8: Aus einem unstrukturierten Gitter (links; 86 Knoten, 138 Elemente) hervorgehende Besetzung der Matrix (rechts).

ausgeführt. Bei der Lösung stationärer Aufgaben mit DG(0) erfolgt die Linearisierung ausschließlich über die Zeitdiskretisierung, diesmal jedoch für möglichst große Zeitschritte. Das Erreichen eines stationären Zustandes kann dann durch

$$e_T := \frac{\|\{\cdot\}_h^m - \{\cdot\}_h^{m-1}\|_{0,\Omega_h}}{\Delta t_m \|\{\cdot\}_h^m\|_{0,\Omega_h}} < \mu_T \quad (3.108)$$

bestimmt werden [64].

3.9 Eigenschaften der Gleichungssysteme

Infolge der elementweise definierten Test- und Ansatzfunktionen ist ein Knoten jeweils nur mit denen der angrenzenden Elemente verknüpft. Somit sind die aus der Diskretisierung hervorgehenden quadratischen Matrizen schwach besetzt, wobei die Anzahl der Nebendiagonaleinträge unmittelbar aus der Vernetzung hervorgeht (vgl. Abbildung 3.8). Beschränkt man den Elementinnenwinkel und die Diffusionskoeffizienten nach unten, so sind die entstehenden Matrizen regulär und deren symmetrischer Anteil ist aufgrund der verwendeten Stabilisierungstechnik positiv definit [11].

Zur effizienten Lösung derartiger Gleichungssysteme kommen vielfach Krylov-Methoden zum Einsatz. Allerdings sind die algebraischen Eigenschaften der Koeffizientenmatrix, allen voran die Konditionszahl, von wesentlichem Einfluß auf die Konvergenz iterativer Verfahren. Erste Aussagen über das numerische Verhalten der Löser gewinnt man bereits aus einer Abschätzung der Größenordnung einzelner Beiträge in der Steifigkeitsmatrix.

Bei instationären, skalaren Gleichungen bewirkt die Diskretisierung der Zeitableitung ein Dominieren dieses mit $1/\Delta t_m$ skalierenden Anteils für kleiner werdende Zeitschrittweiten. In der Koeffizientenmatrix verursachen diese Terme eine Stärkung der Hauptdiagonale, womit wiederum das Konvergenzverhalten der Löser positiv beeinflußt wird. Auf diese Weise bedarf die für einen kleinen Zeitschritt einfachere Problemstellung auch eines geringeren Aufwandes zu dessen Bewältigung.

Eine etwas andere Struktur zeigt das System aus inkompressibler Impuls- und Kontinuitätsgleichung. Anhand der nach Kombinationen von Ansatz- und Testfunktionen aufgespaltenen Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}^{up} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{uv} & \mathbf{B}^{pv} \\ \mathbf{B}^{uq} & \mathbf{B}^{pq} \end{bmatrix}$$

lassen sich den Teilmatrizen \mathbf{B} die folgenden, maßgeblich bestimmenden Anteile zuordnen:

$$\mathbf{B}^{uv} : \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \circ \nabla) \mathbf{u} - \nabla \circ \boldsymbol{\tau}_e, \quad \mathbf{B}^{pv} : \nabla p,$$

$$\mathbf{B}^{uq} : \nabla \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{B}^{pq} : \text{Druckstabilisierung } (\delta_1^p \nabla^2 p).$$

Während der Block \mathbf{B}^{uv} mit sinkender Zeitschrittweite zunehmend an Diagonaldominanz gewinnt, tritt dieser Effekt bei dem mit δ_1^p gewichteten Laplace in \mathbf{B}^{pq} nicht auf. Ohne Berücksichtigung dieses prinzipiellen Unterschiedes erzielt man für das mit \mathbf{A}^{up} gebildete System bei Verringerung des Zeitschrittes keine nennenswerte Einsparung an Iterationen innerhalb des Lösers. In diesem Sinn widerspiegelt die schlecht konditionierte Matrix die Nebenbedingung eines zu jedem Zeitpunkt divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes.

Andererseits sind gerade Projektionsmethoden [18] mit einer iterativen Kopplung von Druck- und Geschwindigkeit für kleine Zeitschrittweiten konzipiert. Bei der Übertragung dieses Algorithmus auf die diskreten Gleichungen können, basierend auf den Untermatrizen \mathbf{B} , deutlich einfachere Teilprobleme zur Lösung des Gesamtsystems herangezogen werden (siehe [65], [66], [67]). Auch wenn diese als Schur-Komplement bezeichneten Lösungstechniken innerhalb des numerischen Verfahrens nicht zur Verfügung stehen, so ist jedoch die Schwachstelle der noch recht hohen Rechenzeiten und ein möglicher Ansatzpunkt zu ihrer Beseitigung aufgezeigt.

3.10 Berechnung von Randintegralen

Die Bestimmung von Kräften und Flüssen am Gebietsrand, in die nur Funktionswerte eingehen, kann unmittelbar auf den Randelementen vorgenommen werden. Problematischer gestaltet sich die Ermittlung von Ableitungen, wie sie beispielsweise in der Definition des Wärmestroms und der viskosen Kräfte (vgl. Abschnitt 2.8) auftreten.

Zunächst sei eine elementweise Betrachtung angesprochen, die in ähnlicher Form auch im Kontext anderer Diskretisierungsverfahren Anwendung findet. Hierbei wird auf an die Berandung angrenzende Elemente übergegangen, deren zusätzlicher im Gebietsinneren liegender Punkt eine Berechnung der Ableitung normal zum Rand gestattet. Bezeichnet $\Gamma_{a,h}$ die Begrenzung, auf der die Integration ausgeführt werden soll, so kann dieses Vorgehen durch

$$\dot{Q}_h^\alpha := \sum_{\forall \mathcal{K}_k, \bar{\mathcal{K}}_k \cap \Gamma_{a,h}^\partial = \mathcal{E}_m} \int_{\mathcal{K}_k} \mathbf{n} \circ \lambda_{e,h} \nabla \vartheta_h \, d\mathcal{K} \approx \sum_{\forall \mathcal{E} \in \Gamma_{a,h}^\partial} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{n} \circ \lambda_{e,h} \nabla \vartheta_h \, d\mathcal{E}, \quad (3.109)$$

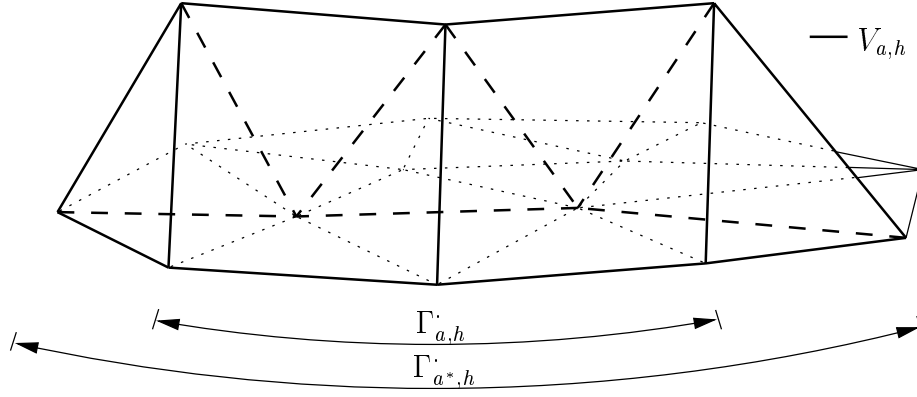


Abbildung 3.9: Raum der Testfunktionen $V_{a,h}$ zur integralen Berechnung von Ableitungen auf $\Gamma_{a,h}$.

$$\mathbf{F}_{\nu,h}^\alpha := - \sum_{\forall \mathcal{K}_k, \bar{\mathcal{K}}_k \cap \Gamma_{a,h}^{up} = \mathcal{E}_m} \int_{\mathcal{K}_k} \mathbf{n} \circ \nu_{e,h} \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) \, d\mathcal{K} \approx - \sum_{\forall \mathcal{E} \in \Gamma_{a,h}^{up}} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{n} \circ \nu_{e,h} \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) \, d\mathcal{E} \quad (3.110)$$

mit $\lambda_{e,h} := a_{e,h} c_{p,h}$ ausgedrückt werden. Auf diese Weise lassen sich auch auf einzelne Elemente bezogene lokale Werte bestimmen. Als nachteilig muß jedoch die eher schlechte Approximation angesehen werden. So ist der Fehler proportional dem Randabstand des im Inneren liegenden Punktes.

In Verbindung mit der Variationsformulierung kann aber auch eine natürlichere Berechnungsmethode eingesetzt werden. Ähnlich wie die partielle Integration der Einarbeitung Neumannscher Randbedingungen diene, kann sie auch zur Bestimmung von Randintegralen aus der Lösung herangezogen werden. Für die stationäre Form der Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung (3.10) erhält man entsprechend

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \circ \epsilon \nabla \phi \psi \, d\Gamma = \int_{\Omega} [(-f_\phi + (\mathbf{b} \circ \nabla) \phi + c\phi) \psi + \epsilon \nabla \phi \circ \nabla \psi] \, d\Omega \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Beim Übergang zum Diskreten wird ein kompakter Träger verwendet, d. h. ein Knoten ist unmittelbar nur mit den Knoten der angrenzenden Elemente verknüpft. Dies erlaubt den Raum V_h so einzuschränken, daß Funktionen auf Elementen ohne Kontakt zu $\Gamma_{a,h}$ Null sind:

$$V_{a,h} := \{v : v \in V_h : v|_{\mathcal{K}_k, \bar{\mathcal{K}}_k \cap \Gamma_{a,h} = \emptyset} = 0\}.$$

Aus Abbildung 3.9 wird gleichzeitig erkennbar, wie die Beschränkung auf einen Teilrand $\Gamma_{a,h} \subset \Gamma_h$ eine größeren Berandung $\Gamma_{a^*,h}$ aufgrund der in $V_{a,h}$ kontinuierlich definierten Funktionen mit sich bringt. In 2D wird daher noch die Hälfte des Flusses durch $\Gamma_{a^*,h} \setminus \Gamma_{a,h}$ mitberechnet. Eine Korrektur dieses Anteils erfolgt durch die zuvor dargestellte elementbasierte Bestimmung der Ableitungen an den Berandungsgren-

zen:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_h^\beta := & \sum_{\forall \mathcal{K}_k, \bar{\mathcal{K}}_k \cap \Gamma_{a,h}^\vartheta \neq \emptyset} \int_{\mathcal{K}_k} \left[\left(-\dot{q}_h^V + \frac{\lambda_{e,h}}{a_{e,h}} (\mathbf{u}_h \circ \nabla) \vartheta_h \right) \psi_h + \lambda_{e,h} \nabla \vartheta_h \circ \nabla \psi_h \right] d\mathcal{K} \\ & - \sum_{\forall \mathcal{K}_l, \bar{\mathcal{K}}_l \cap (\Gamma_{a^*,h}^\vartheta \setminus \Gamma_{a,h}^\vartheta) = \mathcal{E}_m} f_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{E}_m) \int_{\mathcal{K}_l} \mathbf{n} \circ \lambda_{e,h} \nabla \vartheta_h d\mathcal{K} \quad \forall \psi_h \in V_{a,h}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

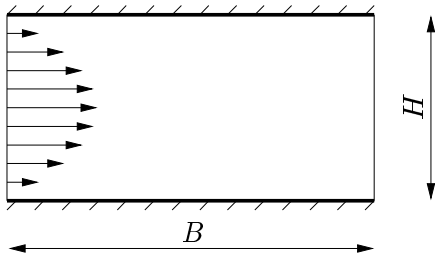
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\nu,h}^\beta := & \sum_{\forall \mathcal{K}_k, \bar{\mathcal{K}}_k \cap \Gamma_{a,h}^{u_p} \neq \emptyset} \int_{\mathcal{K}_k} \left[\left(\mathbf{f}_{u,h} - (\mathbf{u}_h \circ \nabla) \mathbf{u}_h - \nabla p_h \right) \circ \mathbf{v}_h - \frac{\nu_{e,h}}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) \circ \mathbf{D}(\mathbf{v}_h) \right] d\mathcal{K} \\ & + \sum_{\forall \mathcal{K}_l, \bar{\mathcal{K}}_l \cap (\Gamma_{a^*,h}^{u_p} \setminus \Gamma_{a,h}^{u_p}) = \mathcal{E}_m} f_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{E}_m) \int_{\mathcal{K}_l} \mathbf{n} \circ \nu_{e,h} \mathbf{D}(\mathbf{u}_h) d\mathcal{K} \quad \forall \mathbf{v}_h \in (V_{a,h})^d. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Neben der Dimension d des Problems wird in 3D der Faktor

$$f_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{E}) := \begin{cases} d = 2 & : \quad \frac{1}{2} \\ d = 3 & : \quad \text{wenn Knotenanzahl}(\mathcal{E} \cap \Gamma_{a,h}) = 2 \text{ dann } \frac{2}{3}, \text{ ansonsten } \frac{1}{3} \end{cases}$$

zusätzlich durch die Lage der Randleinheitsflächen an der Begrenzung von $\Gamma_{a^*,h}$ bestimmt. Die Genauigkeit bei Verwendung dieser Beziehungen ist damit von der Anzahl der Elemente auf $\Gamma_{a,h}$ im Verhältnis zu denen auf $\Gamma_{a^*,h} \setminus \Gamma_{a,h}$ abhängig: Auf einem geschlossenen Rand wird der Fluß exakt ermittelt, bei der lokalen Berechnung von Ableitungen ist jedoch keine Verbesserung gegenüber der zuvor dargestellten Methode erkennbar.

- Kanalströmung, $\text{Re}=500$, $B/H = 2$
- Eintritt: ausgebildetes Geschw.-profil



- \mathbf{F}_ν : Reibungskraft an der Wand
- Wie groß ist $e_{\mathbf{F}_\nu}(h) := \left| \frac{\mathbf{F}_\nu - \mathbf{F}_{\nu,h}}{\mathbf{F}_\nu} \right|$?

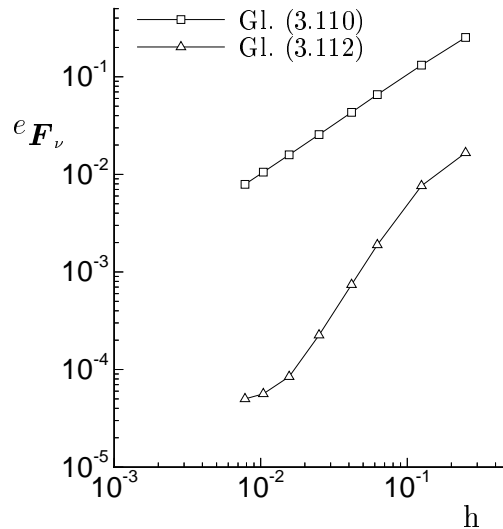


Abbildung 3.10: Abhängigkeit des Fehlers der Wandreibungskraft vom Elementdurchmesser (rechts) bei Verwendung zweier unterschiedlicher Methoden zur integralen Randableitungsbestimmung am Beispiel einer Kanalströmung (links).

Anhand des in Abbildung 3.10 angegebenen Beispiels einer Kanalströmung wird der beträchtliche Genauigkeitsgewinn bei Verwendung von (3.111) bzw. (3.112) deutlich. Der relative Fehler der Wandreibungskraft bezogen auf die analytische Lösung ist in Abhängigkeit von der Diskretisierungsgröße h gezeigt, wobei für jede Gitterfeinheit die Triangulation aus gleich großen Elementen bestand. Auch numerisch ergibt sich bei Verwendung von (3.110) der Zusammenhang $e_{\mathbf{F}_\nu} \propto h^{1,00}$ und widerspiegelt sehr gut die vorherigen theoretischen Überlegungen.

4 Programmsystem ParallelNS

4.1 Überblick

Zur Untersuchung des zuvor dargestellten numerischen Verfahrens wurde in Zusammenarbeit mit dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen das Programm ParallelNS [68] entwickelt. Nach der kurzen Erwähnung prinzipieller Parallelisierungsstrategien im nächsten Abschnitt steht die Erörterung der programmtechnischen Realisierung des DD-Algorithmus im Mittelpunkt. Aus den sich hierbei ergebenden Konsequenzen werden anschließend die Güte der Parallelisierung beschreibende Bewertungsgrößen abgeleitet und klassischen Parallelisierungskriterien gegenübergestellt. Abschließend wird kurz auf das Leistungsspektrum sowie auf weitere wichtige Merkmale des Programmes eingegangen.

4.2 Parallelisierung

4.2.1 Implementierung

Je nachdem wie man den Ansatzpunkt für die Parallelisierung einer Aufgabenstellung wählt, ergeben sich eine Vielzahl unterschiedlicher Zugänge. Von grobstrukturierter Parallelität spricht man, wenn der zu realisierende Algorithmus bereits die Zerlegung in eine Reihe von gleichzeitig ausführbaren Teilaufgaben beinhaltet. Demgegenüber sollen feingranularere Konzepte, bei denen beispielsweise voneinander unabhängige Anweisungen auf mehrere Prozessoren aufgeteilt sind, nicht betrachtet werden.

Die Parallelisierung numerischer Verfahren setzt vielfach bei der Lösung der Gleichungssysteme an. Stellvertretend seien hier Multigrid- und Multiblock-Techniken [69] genannt. Aus algorithmischer Sicht unterscheiden sich derartige *datenparallele Methoden* nicht von der sequentiellen Implementierung, da mit beiden Varianten die gleiche Lösung erzielt wird. Allerdings nimmt der Kommunikationsaufwand bei der Verwaltung der globalen Daten mit der Anzahl der Teilprozesse erheblich zu. Demgegenüber unterscheidet SCHIEWECK [70] *echte DD-Methoden* als eine „Klasse von Verfahren mit äußerer Iteration ... In jedem Schritt werden lokale Probleme auf den Teilgebieten ... gelöst und anschließend die lokalen Lösungen zu einer neuen Iterierten kombiniert.“ Zu diesen Verfahren zählt der in 3.3 beschriebene DD-Algorithmus, wobei durch die sich nichtüberlappenden Teilgebiete eine zusätzliche Verringerung der zu transferierenden Datenmenge erzielt wird. Dem steht die Einführung einer zusätzlichen Iterationsschleife gegenüber, deren

Iterationsanzahl in Abhängigkeit von der Zahl der Teilgebiete die Skalierbarkeit der DD-Methode beschreibt. Als Hardwarekonfiguration eignen sich somit MIMD-Architekturen (*Multiple Instruction, Multiple Data*) mit verteiltem Speicher. Aus praktischer Sicht ist vor allem deren weite Verbreitung von Bedeutung. Wenn auch noch keine Aussage über die Skalierbarkeit der Gebietszerlegung getroffen wurde, so bestehen bei dieser Zielplattform jedoch zumindest aus informationstheoretischer Sicht weniger Leistungsbeschränkungen als beispielsweise bei Systemen mit gemeinsamem Hauptspeicher [71].

Das von AUGE [27] konzipierte Programm ParallelNS ist in ANSI C kodiert und nutzt PVM (*Parallel Virtual Machine*) als Parallelisierungswerkzeug. Für den Einsatz von PVM sprach vor allem dessen Ausrichtung auf Verwendung eines heterogenen Workstation-Clusters als virtuellen Parallelrechner, der einzigen Plattform, die zum Entwicklungsbeginn zur Verfügung stand, sowie die Möglichkeit zur dynamischen Prozeßverwaltung. Auch wenn der Trend immer mehr zu MPI (*Message Passing Interface*) basierter Software geht, scheint jedoch erst mit Realisierung des MPI2-Standards, der den vollen Sprachumfang von PVM realisiert, ein Umstieg überdenkenswert. Gegenwärtig ist ParallelNS auf zahlreiche Architekturen und Betriebssysteme portiert (DEC, HP, SUN, SGI) und wird vornehmlich in einer UNIX-Netzwerkumgebung eingesetzt.

Der prinzipielle Programmablauf unter dem Gesichtspunkt der Parallelisierung ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Mittels zweier Hauptprogramme, die hier in Anlehnung an Termini aus dem Umfeld der Parallelisierung als 'master' und 'slave' bezeichnet sind, erfolgt die Realisierung unterschiedlicher Aufgaben. Vom 'master' wird die Steuerung des Programmablaufs einschließlich Ein- und Ausgabe übernommen. Entsprechend der Anzahl der Teilgebiete erzeugt dieser N_{sd} 'slave'-Instanzen, die ihrerseits vollständig die Teilprobleme behandeln.

Maßgeblichen Einfluß auf das Zeitverhalten besitzt die innerste Schleife der DD-Iterationen, so daß deren Aufbau genauer betrachtet werden soll. Für den dargestellten Fall eines konstanten ρ_i (vgl. Abschnitt 3.3, 3.5) finden lediglich zwei, jedoch grundlegend verschiedene Transfermechanismen statt (siehe Abbildung 4.2). Zum einen kommunizieren die 'slaves' untereinander, um die Daten auf gemeinsamen Rändern auszutauschen. Andererseits findet ein Datenaustausch mit dem 'master' statt, der anhand der zuvor in den 'slaves' lokal ermittelten Abbruchkriterien global über Fortführung oder Beendigung der DD-Schleife entscheidet und diese Nachricht wieder verteilt. Auch wenn dabei nur sehr wenige Informationen transportiert werden, wirkt zentrale Kommunikation negativ auf die Skalierbarkeit.

Während dieser Aspekt erst bei entsprechend vielen Teilnehmern zum Tragen kommt, erwächst in der Regel aus der Synchronisation der Prozesse ein sehr viel schwerer wiegender Zeitverlust. So sind alle Routinen zur Entgegennahme von Daten blockierend ausgeführt, d. h. der empfangende Prozeß befindet sich bis zum Eintreffen der Daten im Wartezustand. Damit ist die gleichmäßige Auslastung der Knoten eines Parallelrechners — auch als 'load balance' bezeichnet — ein Kriterium zur Leistungsbewertung. Allerdings erweist sich die Umsetzung dieser Forderung mit

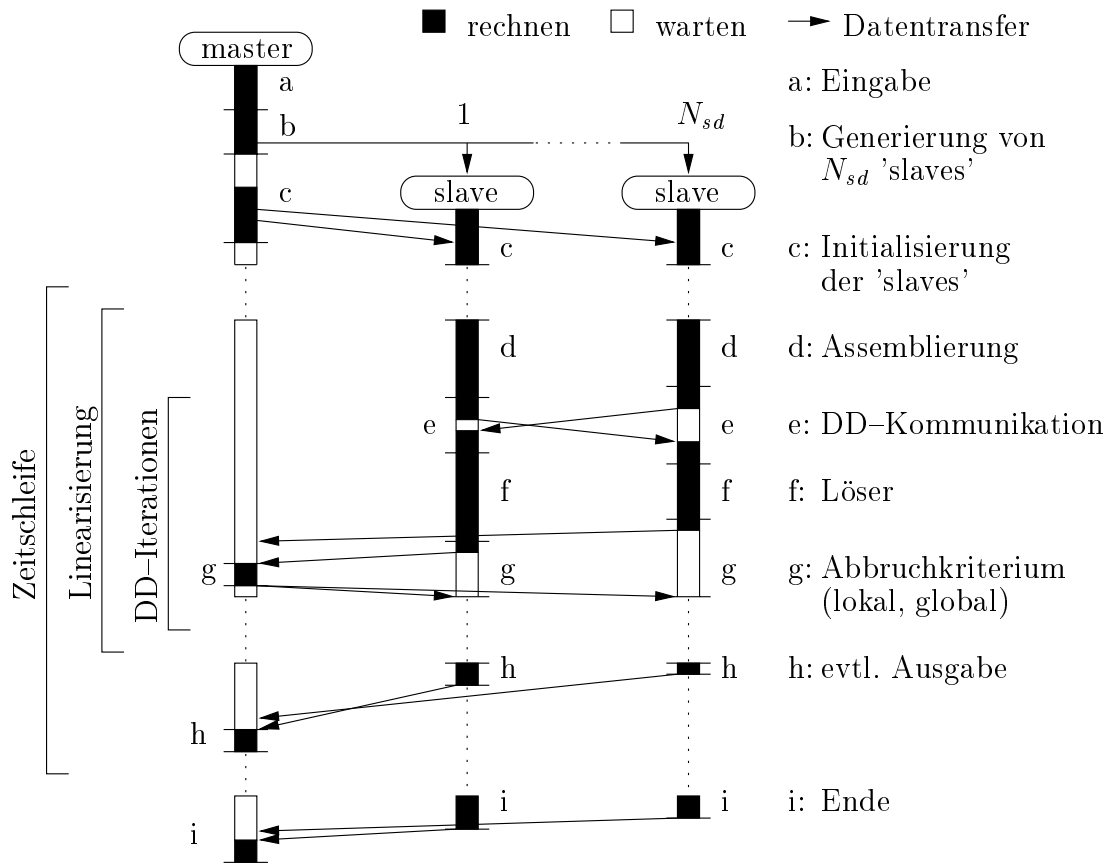


Abbildung 4.1: Überblick zum parallelisierten Programmablauf.

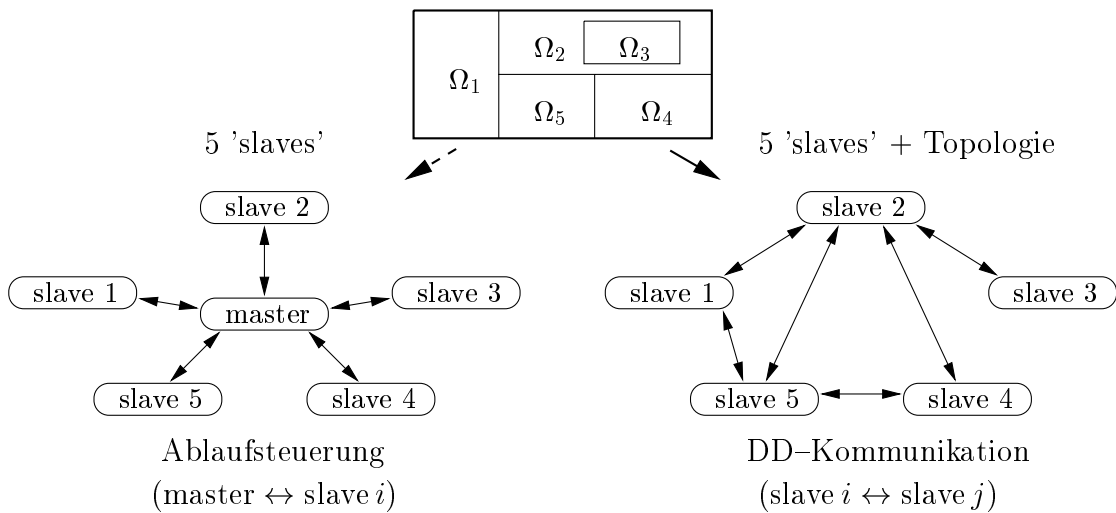


Abbildung 4.2: Zentraler und dezentraler Datenaustausch.

dem hier gewählten Ansatz zur Parallelisierung wie bei fast allen DD-Methoden als schwer realisierbar.

Aufgrund der notwendigen Partitionierung des Berechnungsgebietes durch den Nutzer in einem Präprozeß wird gleichzeitig Einfluß auf die Lastverteilung genommen. Aber auch für den Idealfall, daß sowohl allen Prozessen gleich viel Rechenkapazität zur Verfügung steht als auch die diskreten Teilprobleme gleiche Knoten- und Elementzahlen aufweisen, können unterschiedliche Rechenzeiten bei der Lösung der Gleichungssysteme auftreten. Ursache sind die in Abhängigkeit von den jeweiligen Matrixeigenschaften benötigten Iterationen innerhalb des Löser. So werden bei Formulierung der gleichen Aufgabenstellung mit Neumannschen Randbedingungen deutlich mehr Iterationen als bei Dirichletschen Randbedingungen benötigt. Weiterhin bestimmen auch die physikalischen Eigenschaften der Problemstellung, z. B. lokal konvektionsdominante Strömung, das Konvergenzverhalten der Löser.

4.2.2 Bewertungskriterien

Bevor wir uns dem zuvor dargestellten parallelisierten Algorithmus zuwenden, sollen zunächst kurz einige klassische Kriterien zur Leistungsbewertung angesprochen werden. Die parallele Beschleunigung (engl. speedup) S beschreibt das Verhältnis der benötigten Rechenzeit des sequentiellen Programmes T_1 bezogen auf die Rechenzeit eines Prozesses T_p in der mit insgesamt p Prozessen parallelisierten Variante [72]:

$$S(p) := \frac{T_1}{T_p} \leq p, \quad E(p) := \frac{S(p)}{p} \leq 1. \quad (4.1)$$

Daraus leitet sich die parallele Effizienz E als relative Größe ab.

Beide Definitionen gelten strenggenommen nur unter zwei Voraussetzungen. Zum einen müssen sequentieller und paralleler Algorithmus zu einem identischen Ergebnis führen. Andererseits sind gleiche Laufzeiten für alle Prozesse der parallelisierten Programmvariante angenommen worden. In einem solchen Fall kann mit Hilfe des Amdahlschen Gesetzes [73] die theoretisch erreichbare parallele Beschleunigung abgeschätzt werden, die sich aus dem anteiligen Zeitbedarf χ_s und χ_p zur Abarbeitung des sequentiellen und parallelisierbaren Programmanteils wie folgt berechnet

$$S(p) \leq \frac{1}{\chi_s + \frac{\chi_p}{p}} < \frac{1}{\chi_s} \quad \text{mit} \quad \chi_s + \chi_p = 1. \quad (4.2)$$

Bei der hier verwendeten DD-Methode sind im Gegensatz zu feingranularer Parallelität die beiden obigen Forderungen nicht erfüllt, wobei aus der Abweichung von sequentiell und parallel erzielter Lösung das Hauptproblem bei der Bewertung erwächst. Als gleichwertig können die Ergebnisse angesehen werden, wenn die durch die Gebietszerlegung hervorgerufenen Unterschiede in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers liegen. Da ein derartig scharfes Kriterium nicht zur Verfügung steht, müssen bei jeglicher Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Parallelisierung die erzielten Resultate mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Innerhalb des praktischen Rechenbetriebes erweist sich die Ermittlung des Geschwindigkeitszuwachses anhand der verstrichenen Zeit bei der Programmausführung, die auch mit Realzeit bezeichnet wird, als ungeeignet, da diese durch eine Reihe äußerer Faktoren (verfügbare Prozessoren, Systemlast etc.) beeinflusst ist. Zur Beschreibung des Zeitbedarfs wird daher ausschließlich die sehr viel besser reproduzierbare CPU-Zeit* \mathbf{T} verwendet. Für eine moderate Teilgebietsanzahl, wie sie bei den Beispielen in Kapitel 5 verwendet wird, ist die auf diese Weise nicht vollständig erfaßte Kommunikationszeit von eher untergeordneter Bedeutung. Auch unter dem Gesichtspunkt der Bewertung der algorithmischen Leistungsfähigkeit der Gebietszerlegung besitzt dieser Zugang Vorteile, da die verfügbare Bandbreite des Datentransfers eine ganz andere Problematik berührt.

Mit der theoretischen parallelen Effektivität

$$E_{th} := \frac{\mathbf{T}_{m,1} + \mathbf{T}_s(1)}{\mathbf{T}_{m,N} + \sum_{i=1}^{N_{sd}} \mathbf{T}_s(i)} \quad (4.3)$$

soll die insgesamt benötigte CPU-Zeit von 'master' \mathbf{T}_m und 'slave' \mathbf{T}_s ohne Gebietszerlegung, d. h. nur ein 'slave' Prozeß, in Bezug auf die Verwendung von N_{sd} Teilgebieten gekennzeichnet werden. Diese Größe gibt bereits Aufschluß über das Potential des DD-Algorithmus. Weil sich allerdings in der CPU-Zeit zweckmäßigerweise keine Wartezeiten niederschlagen, kann sie nicht als Anhaltspunkt für die vom Nutzer wahrgenommene Programmbeschleunigung dienen.

Um trotzdem Rückschlüsse auf das Realzeitverhalten zu erzielen, wird der Rechenzeitbedarf anhand des langsamsten 'slave' mit der zu erwartenden Geschwindigkeitserhöhung

$$S_e := \frac{\mathbf{T}_{m,1} + \mathbf{T}_s(1)}{\mathbf{T}_{m,N} + \max_i \mathbf{T}_s(i)} \quad (4.4)$$

abgeschätzt. Diese Definition basiert nicht nur auf theoretischen Überlegungen, sondern wird durch Realzeitmessungen unter idealen Bedingungen als gute Näherung bestätigt. Anders als in (4.1) beschreiben E_{th} und S_e ganz verschiedene Eigenschaften und sind daher auch nicht direkt ineinander überführbar.

Der Einfluß der 'load balance', die vornehmlich durch das Geschick des Nutzers bei der manuellen Aufteilung in Teilgebiete beeinflusst ist, soll anhand der parallelen Lastverteilung

$$L_p := \frac{1}{N_{sd}} \frac{\sum_{i=1}^{N_{sd}} \mathbf{T}_s(i)}{\max_i \mathbf{T}_s(i)} \leq 1 \quad (4.5)$$

ausgewiesen werden. Anhand dieser drei Kriterien erfolgt in Kapitel 5 die Bewertung der Eigenschaften der Parallelisierung für die numerischen Beispiele.

*Der Begriff CPU-Zeit beinhaltet hier auch die vom Prozeß beanspruchte Systemzeit.

4.3 Weitere Merkmale

Innerhalb des Programmes ParallelNS ist das gesamte in Kapitel 3 beschriebene mathematisch–numerische Modell realisiert. Neben der Zielstellung, zwei- und dreidimensionale laminare bzw. turbulente Strömungen zu berechnen, stand aus Sicht der an der Programmentwicklung beteiligten Partner [54], [29] die Untersuchung des DD–Algorithmus im Vordergrund. Dies ist eine wesentliche Ursache für den modularen Aufbau in Bezug auf die zum Einsatz kommenden Differentialgleichungen. So lassen sich auch allgemeine Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen allein oder in Verbindung mit der Stokes- oder Oseen–Gleichung behandeln. Weiterhin können die stationären Varianten der angesprochenen Gleichungen direkt gelöst werden. Andererseits ist das Programm damit konzeptionell nicht für die Lösung von Strömungsproblemen optimiert. Für eine ausführlichere Darstellung einschließlich der Bedienung des Programmes und der nun folgenden kurzen Übersicht bisher noch nicht angesprochener Programmkomponenten sei auf das dazugehörige Handbuch [68] verwiesen.

Mit dem zum Programmsystem gehörenden Gittergenerator Bsnnet lassen sich quasi–blockstrukturierte Netze für aus Rechtecken bzw. Quadern zusammengesetzte Geometrien erzeugen. Für anspruchsvollere Aufgaben wird gegenwärtig die kommerzielle Software GeoMesh[®] eingesetzt, wobei über eine bidirektionale Schnittstelle die Umwandlung der Formate erfolgt. Somit können Gitter unterschiedlicher Herkunft miteinander verknüpft und manipuliert werden. Innerhalb des verwendeten Formats werden die unstrukturierten Netze hierarchisch aus Knoten, Kanten bzw. Flächen, Elementen und daraus gebildeten Gruppen aufgebaut. Auf diese Weise stehen u. a. Nachbarschaftsbeziehungen zwischen einzelnen Elementen in ParallelNS zur Verfügung, die die Voraussetzung für die Behandlung innerer Berandungen und für eine derzeit nur in 2D implementierte rot/grün Verfeinerung sind.

Die überwiegende Mehrheit der Informationen zur Problembeschreibung und Ablaufsteuerung wird durch eine Eingabedatei bestimmt. Lediglich die Spezifikation der Randbedingungen und Quellterme erfolgt im Quelltext anhand einer Nutzerschnittstelle und gestattet so die Realisierung beliebiger Funktionsverläufe. Über ein weiteres Interface können für das $DG_N(1)$ –Verfahren beliebige zeitliche Ansatz- und Testfunktionen definiert werden.

Als lineares Algebrapaket wird die von PRIESNITZ [74] entwickelte Bibliothek BLANC verwendet. Neben dem objekt–orientierten Zugang zeichnet sie sich durch ein besonderes Speichermodell für die aus vektorwertigen Problemen hervorgehenden schwach besetzten Matrizen aus. Da die Besetzung der Matrix für alle Vektorkomponenten k an einem Knoten gleich ist, lassen sich diese Einträge auch als quadratische, vollbesetzte Untermatrizen der Dimension k darstellen. Mit der zusammenhängenden Abspeicherung der Blöcke sind auf diese Daten beschränkte Operationen, beispielsweise Block–SSOR Vorkonditionierer, sehr effizient realisierbar.

Abgesehen von den grundlegenden Vektor- und Matrixoperationen übernehmen die BLANC–Routinen in erster Linie die Lösung der linearen Gleichungssysteme.

Von den zahlreichen zur Verfügung stehenden Lösern haben sich die modernen Krylov-Verfahren BI-CGSTAB und QMR-CGSTAB [75] für nichtsymmetrische Matrizen in Verbindung mit ILU(0)-Vorkonditionierung als für alle Problemklassen prinzipiell geeignet herausgestellt. Bei Speicherplatzrestriktionen muß von ILU(0) auf Block-SSOR Vorkonditionierung, die keine zusätzliche Matrix benötigt, übergegangen werden. Hierbei hat die Wahl der Relaxationsparameter entscheidenden Einfluß auf das Konvergenzverhalten. Da mit dieser allgemeinen Vorgehensweise die besondere Struktur des aus Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung gebildeten Gleichungssystems (vgl. Abschnitt 3.9) nicht berücksichtigt wird, sind die Rechenzeiten bei zeitgenauen Rechnungen derzeit nicht befriedigend.

Für die Visualisierung der Ergebnisse kommt gegenwärtig Tecplot[®] als Graphiksoftware zum Einsatz. Die Lösung kann hierzu als komplettes Datenfeld oder an ausgewählten Monitorpunkten innerhalb der DD-, Linearisierungs- und Zeitschleife ausgegeben werden. Gleiches trifft für die berechneten Flüsse und Kräfte sowie zahlreiche in Verbindung mit den Abbruchkriterien stehende Normen zu. Bei bekannter exakter Lösung läßt sich außerdem der Verlauf entsprechender Fehlernormen verfolgen.

5 Numerische Untersuchungen und Anwendung

5.1 Vorbemerkung

Nach der Darlegung des numerischen Verfahrens sowie ausgewählter Aspekte der Implementierung widmet sich dieses Kapitel der Diskussion der mit dem Programm ParallelNS gewonnenen Ergebnisse. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf die Untersuchung des Gebietszerlegungsalgorithmus im Hinblick auf den Einfluß der DD-Parameter und die erzielten Leistungskriterien bezüglich der Parallelisierung gelegt. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die sich aus der Zeitdiskretisierung ergebenden Eigenschaften und das numerische Verhalten des Turbulenzmodells.

Die objektive Bewertung dieser Merkmale erfolgt in geeigneter Weise an bekannten Lösungen bzw. numerisch oder experimentell gut untersuchten Konfigurationen. Weiterhin wurde angestrebt, die einzelnen Einflüsse möglichst unabhängig voneinander zu untersuchen. Entsprochen wird diesem Anliegen durch schrittweise Erhöhung der Komplexität der Beispiele. Den Ausgangspunkt bildet daher die umfassende Untersuchung der Konvektions-Diffusionsgleichung. Anschließend wird auf eine laminare Zylinderumströmung und ein anwendungsorientiertes Problem zur Verifizierung von periodischen Randbedingungen mit Drucksprung übergegangen. Gegenstand des letzten Abschnittes sind turbulente Strömungen. Als Beispiele dienen hierbei die homogene Turbulenz nach einem Gitter, eine ebene Kanaleinlaufströmung sowie die freie Konvektion in einem geschlossenen Behälter.

5.2 Konvektions-Diffusionsgleichung

Bevor auf die eigentlichen Strömungsprobleme eingegangen wird, soll zunächst die Güte der Diskretisierung und Leistungsfähigkeit der Gebietszerlegung für eine skalare Konvektions-Diffusionsgleichung, d. h. Gl. (3.1) mit $c = 0$, näher untersucht werden. Auf diese Weise lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten der Energie- und Turbulenzgleichungen getrennt vom Problemkreis der Linearisierung ziehen. Gleichzeitig beinhaltet dieser Gleichungstyp für den konvektionsdominanten Fall und der hierbei erforderlichen Stabilisierung bereits einige Schwierigkeiten, deren Beherrschung eine wesentliche Voraussetzung für die erfolgreiche Behandlung der Navier-Stokes Gleichung ist.

Am einfachsten erfolgt die Bewertung der numerisch erzielten Ergebnisse anhand einer bekannten Lösung über geeignet gewählte Fehlernormen. Auf dem als Grundgebiet verwendeten Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ wurden die numerischen Bei-

sie daher ausgehend von einer vorgegebenen analytischen Lösung konstruiert. Obwohl sie damit von untergeordneter praktischer Bedeutung sind, so können jedoch auf diese Weise ganz gezielt unterschiedliche Phänomene betrachtet werden. Entsprechend den Eigenschaften der $DG^\phi(0)$ - und $DG_N^\phi(1)$ -Methode steht hierbei einerseits das möglichst schnelle Erreichen eines stationären Zustandes und andererseits die zeitgenaue Auflösung instationärer Vorgänge im Mittelpunkt. Um einen weiten Parameterbereich abzudecken, wird dazu jeweils zwischen konvektions- und diffusionsdominanten Problemen unterschieden.

Für die Berechnungen kamen fünf unterschiedlich feine Gitter, deren Triangulation jeweils aus gleich großen, rechtwinkligen Dreieckselementen besteht, zum Einsatz (vgl. Tabelle C.1). Gleichzeitig wurde die Vernetzung in Verbindung mit dem DD-Algorithmus in bis zu 16 Teilgebiete entsprechend der Darstellung in Abbildung 5.1 aufgeteilt. Da die Wahl der Stabilisierungsparameter bereits gut untersucht ist (vgl. [76], [61], [14]), wurde generell mit $C_1^\phi = 1$ gerechnet, auch wenn für die diffusionsdominanten Fälle keine Stabilisierung erforderlich gewesen wäre.

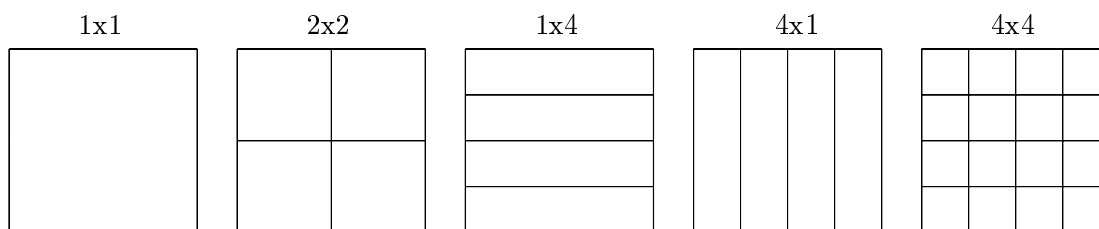


Abbildung 5.1: Zerlegung des Einheitsquadrates in verschiedene Teilgebiete.

5.2.1 Berechnung des stationären Zustands mit $DG(0)$

(I) Diffusionsdominant

Bei diesem diffusionsdominanten Beispiel mit $\epsilon = 1$ und ohne Geschwindigkeitsfeld ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) wurde die analytische Lösung

$$\phi = 2x_1^2(1 - x_1)^2(1 - 2x_2)(1 - x_2)x_2(1 - e^{-t}) \quad (5.1)$$

gewählt und mittels der Dirichletschen Randbedingung $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ realisiert. Durch das exponentielle Auftreten der Zeit t klingt der instationäre Anteil sehr schnell ab. Die dann verbleibende stationäre Lösung ist in Abbildung 5.2 gezeigt. Aus anwendungsorientierter Sicht läßt sich dieses Beispiel als Wärmeleitungsproblem mit Quell- bzw. Senkenverteilung sowie vorgegebener Randtemperatur auffassen.

Erste Tests zeigten, daß in Verbindung mit $DG(0)$ die Zeitschrittweite nicht nach oben begrenzt ist. Daraufhin wurde generell mit $\Delta t = 100$ ein sehr großer Zeitschritt gewählt. Ohne Gebietszerlegung genügten damit unabhängig von der Gitterfeinheit jeweils $N_T = 3$ Zeitschritte zum Erreichen des stationären Zustands nach (3.108) mit $\mu_T = 10^{-6}$. Gleichzeitig konnte das quadratische Abnehmen des L^2 -Fehlers mit

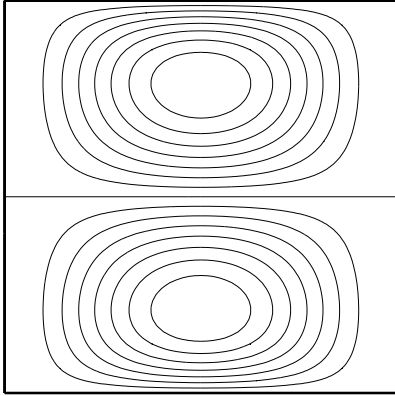


Abbildung 5.2: Isolines der stationären Lösung ($t \gg 1$) entsprechend Gl. (5.1).

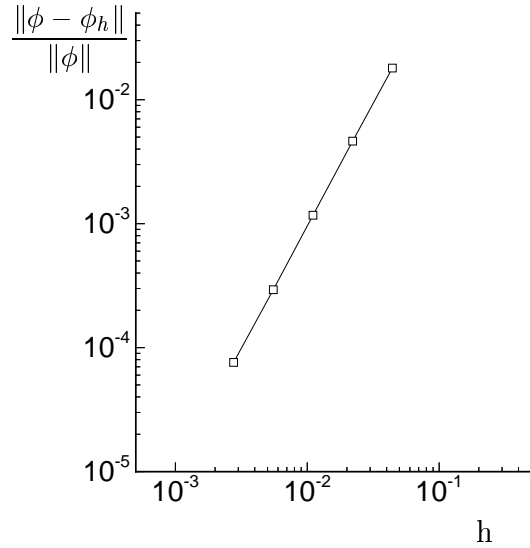


Abbildung 5.3: Verlauf des L^2 -Fehlers der diskreten Lösung in Abhängigkeit von der Gitterfeinheit ohne Gebietszerlegung.

Verkleinerung des Gitterparameters h (numerische Konvergenzrate: $h^{1,97}$) über den gesamten untersuchten Bereich nachgewiesen werden (vgl. Abbildung 5.3).

Anhand einer 2×2 - und 4×4 -Zerlegung erfolgte die numerische Untersuchung des DD-Algorithmus. Zunächst galt es den Einfluß des DD-Parameters zu klären (siehe Abbildung 5.4). Mit zunehmender Anzahl von Zeitschritten und damit auch Gebietsiterationen sinkt der Fehler und verharret schließlich auf dem Niveau der sequentiellen Variante (gepunktete Linie). Gleichzeitig zeigt die Lage dieses Stagnationspunktes eine deutliche Abhängigkeit von γ^ϕ . So kann der optimale Wert bei der 2×2 -Zerlegung mit ca. 500 angegeben werden, während er bei der 4×4 -Zerlegung etwa 200 beträgt. Offensichtlich ist γ^ϕ abhängig von der Größe der Teilgebiete.

Die mit diesen Parametern und variiertes DD-Iterationsanzahl verbundene Abnahme des L^2 -Fehlers sowie der Verlauf des Abbruchkriteriums e_T sind in den Abbildungen C.1 und C.2 im Anhang dargestellt. Während mit der Forderung $e_T \leq \mu_T = 1 \cdot 10^{-6}$ in Abhängigkeit von der verwendeten Vernetzung die Genauigkeit der sequentiellen Variante erreicht wird, zeigt sich der Verlauf des Abbruchkriteriums gänzlich unbeeinflusst von der Gitterfeinheit und enthält keinen Anhaltspunkt für die Konvergenz des DD-Algorithmus. Da die Abnahme des Fehlers relativ unabhängig von h erfolgt, sind bei einem sehr feinen Gitter durch den geringen Diskretisierungsfehler mehr DD-Iterationen erforderlich. Insofern ist μ_T auch durch die räumliche Auflösung beeinflusst und gegebenenfalls kleiner zu wählen.

Aus Tabelle 5.1 sind die hierbei erzielten Resultate bezüglich der Parallelisierungseigenschaften erkennbar. Zunächst wird die sehr gute parallele Lastverteilung L_p aufgrund der identisch triangulierten Teilgebiete mit einheitlichen Randbedin-

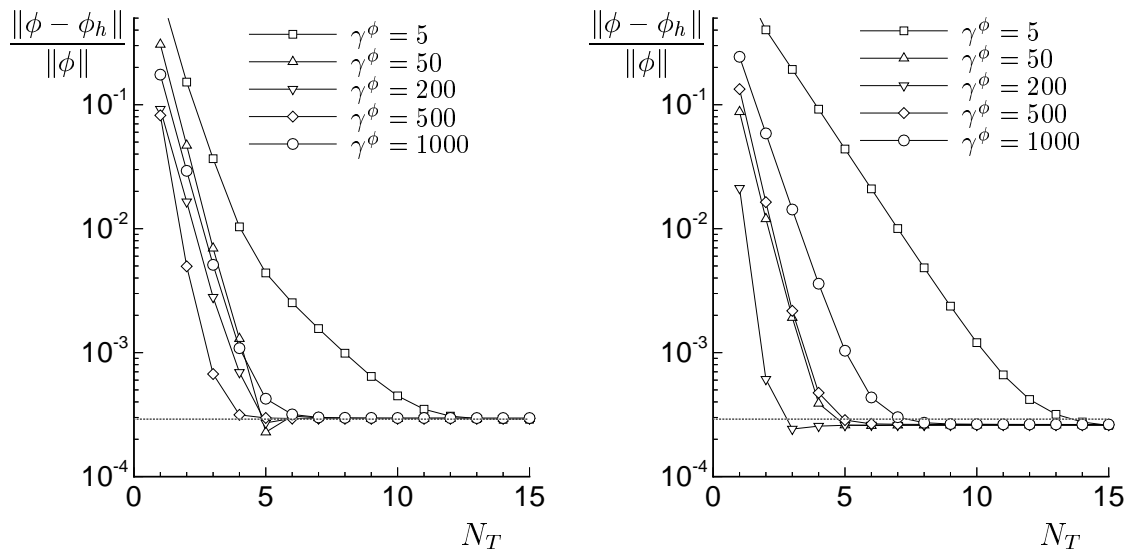


Abbildung 5.4: Einfluß des DD-Parameters (links: 2x2-Zerlegung, $N_{DD} = 2$; rechts: 4x4-Zerlegung, $N_{DD} = 4$) auf das Abklingen des L^2 -Fehlers im Verlauf der Zeitschritte für Gitter G4.

ungen deutlich. Auch lassen sich auf Kosten einer erhöhten Anzahl von Zeitschritten DD-Iterationen einsparen, dem jedoch der größere Zeitaufwand für einen Zeitschritt gegenübersteht. Weiterhin ist in allen Fällen in Form der zu erwartenden Geschwindigkeitserhöhung S_e ein Geschwindigkeitsvorteil mit Parallelisierung erkennbar, wobei die Effizienz der 4x4-Zerlegung sogar die der 2x2-Zerlegung übertrifft. Allerdings basieren diese Angaben auf der Erfüllung des Kriteriums für einen stationären Zustand. Wäre man in der Lage, das teilweise deutlich früher einsetzende Stagnieren des DD-Algorithmus zu erkennen, so ließen sich wesentlich bessere Ergebnisse erzielen.

Zerlegung	γ^ϕ	N_T	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
2x2	500	9	1	0,366	1,322	0,977
		5	2	0,468	1,674	0,971
		4	3	0,477	1,667	0,943
4x4	200	8	2	0,408	4,249	0,938
		4	4	0,537	5,233	0,920
		3	6	0,586	5,484	0,899

Tabelle 5.1: Bewertungskriterien der Parallelisierung bei Verwendung des Gitters G4 und der Abbruchschranke $\mu_T = 10^{-6}$.

(II) Konvektionsdominant

Ausgehend von der Anfangsbedingung ($t = 0$)

$$\phi = \begin{cases} (4x_2(1-x_2))^2 & : x_1 = 0 \\ 0 & : 0 < x_1 \leq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

und verschwindend kleiner Diffusion ($\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$) wird die Lösung nun nahezu ausschließlich durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmt, wobei zwischen zwei Fällen unterschieden wurde. Einerseits findet

- (a) der konvektive Transport mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (Festkörperrotation) und andererseits
- (b) entlang der x_1 -Achse

statt (siehe Abbildung 5.5). Nach $t = \frac{\pi}{2}$ bzw. $t = 1$ hat die Anfangslösung am

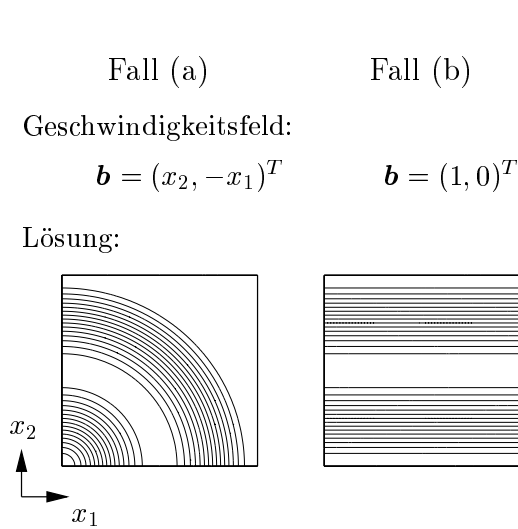


Abbildung 5.5: Geschwindigkeitsfeld und Isolinien der Lösung für die Fälle (a) und (b).

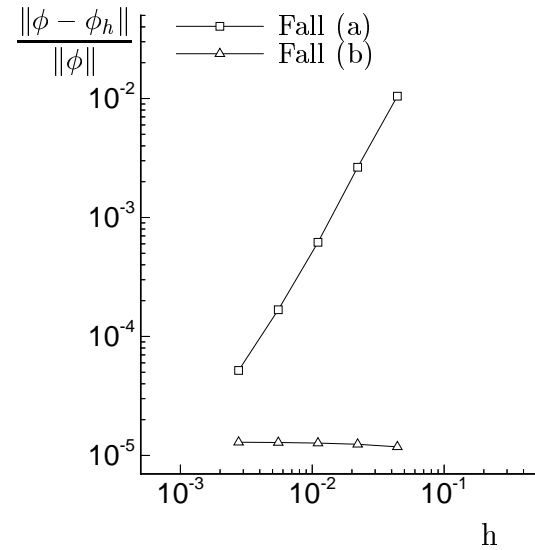


Abbildung 5.6: Verlauf des L^2 -Fehlers der diskreten Lösung in der sequentiellen Variante.

Eintritt den mittels einer homogenen Neumannschen Randbedingung definierten Austritt erreicht, wodurch keine weiteren zeitlichen Veränderungen mehr auftreten.

Wiederum ist keine Beschränkung der Zeitschrittweite feststellbar gewesen, so daß $\Delta t = 100$ gewählt wurde und damit erneut jeweils drei Zeitschritte bis zum Erreichen eines stationären Zustandes ($\mu_T = 1 \cdot 10^{-6}$) für die sequentiellen Varianten ausreichten. Zumindest auf gröberen Gittern konnte für den Fall (a) ebenso eine quadratische Konvergenzordnung des L^2 -Fehlers, die mit zunehmender Gitterfeinheit leicht absinkt (numerische Konvergenzrate: $h^{1,70\dots 1,98}$), gezeigt werden (vgl.

Abbildung 5.6). Hingegen ist bei (b) unabhängig von h dieser Fehler generell sehr klein und offenbar durch das identische Verschwinden des Konvektionsterms $(\mathbf{b} \circ \nabla) \phi$ in der stationären Lösung begründet.

In Verbindung mit der Gebietszerlegung beträgt der optimale DD-Parameter diesmal unabhängig von der Größe der Teilgebiete beim Fall (a) ca. 10^4 , wobei der Einfluß erst für sehr kleine Fehler erkennbar ist (vgl. Abbildung C.3). Allerdings zeigt sich, daß für die 4×4 -Zerlegung nicht ganz die Genauigkeit der sequentiellen Lösung erreicht wird. Sowohl die Wirkung der DD-Iterationsanzahl auf den Fehler als auch der Verlauf des Kriteriums zur Ermittlung des stationären Zustands unterscheiden sich kaum vom diffusionsdominanten Beispiel (Abbildung C.4 und C.5).

Erst der Fall (b) bringt den Einfluß von γ^ϕ in Abbildung C.6 deutlich stärker zum Vorschein. Während zu Beginn der Gebietszerlegung ein kleiner Wert positiv auf die Konvergenzrate wirkt, kehrt sich dieser Trend mit zunehmender Anzahl von DD-Iterationen um. Auch besteht die Gefahr, daß für einen ungünstig gewählten DD-Parameter aufgrund der sehr langsamen Konvergenz bereits ein stationärer Zustand vor Erreichen der Genauigkeit der sequentiellen Lösung nach (3.108) erkannt wird. Wie der Vergleich zwischen einer 1×4 - und 4×1 -Zerlegung zeigt, tritt dieses Verhalten nur bei parallel angeströmten Gebietsrändern auf (siehe Abbildung 5.7). Hierbei ist der den Dirichletschen Anteil wichtende Term ρ^ϕ sehr klein und liegt in der Größenordnung $\sqrt{\gamma^\phi \epsilon}$. Anscheinend ist der DD-Algorithmus jedoch nicht in der Lage, den konvektiven Informationstransport entlang der DD-Ränder zu realisieren, so daß nur über die Vergrößerung von γ^ϕ , gleichbedeutend mit einer Anfachung des diffusiven Transports, dieses Defizit zu kompensieren ist. Hierin liegt eine der Hauptursachen dafür, daß gegenwärtig keine allgemeingültige und robuste Wahl des DD-Parameters angegeben werden kann. Senkrecht durchströmte Gebietsränder sind hingegen unproblematisch.

Die parallele Lastverteilung, dargestellt in Tabelle 5.2, fällt deutlich ungünstiger als im diffusionsdominanten Beispiel aus. Eine Begründung stellen die in den ersten DD-Schritten trivial lösbaren Gleichungssysteme in den stromab liegenden Gebieten aufgrund des noch nicht bis hierhin vorgedrungenen Sprungs der Anfangslösung dar. Trotz geringfügig besserer theoretischer Effizienz gelingt es nicht, diesen Vorteil in

Zerlegung	γ^ϕ	N_T	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
2x2	10^4	14	1	0,416	1,211	0,807
		6	2	0,609	1,642	0,755
		5	3	0,587	1,551	0,730
4x4	10^4	7	2	0,651	4,561	0,839
		4	4	0,739	5,090	0,834
		4	6	0,626	4,502	0,787

Tabelle 5.2: Bewertungskriterien der Parallelisierung für den Fall (a) auf Gitter G4 und der Abbruchschranke $\mu_T = 10^{-6}$.

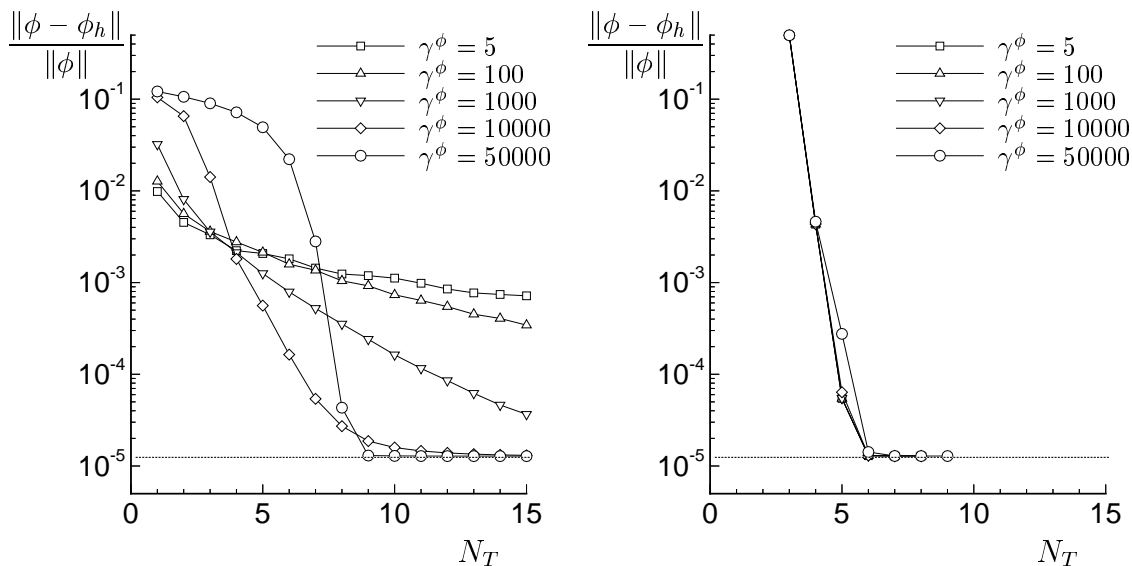


Abbildung 5.7: Verlauf des L^2 -Fehlers für den Fall (b) in Abhängigkeit vom DD-Parameter und von der Ausrichtung der Teilgebietsränder zum Geschwindigkeitsfeld (links: 1×4 -Zerlegung, $N_{DD} = 4$; rechts: 4×1 -Zerlegung, $N_{DD} = 1$) auf dem Gitter G4 im Verlauf der Zeitschritte.

einen Zuwachs der zu erwartenden Geschwindigkeitserhöhung umzusetzen.

5.2.2 Zeitgenaue Rechnung mit DG(1)

(I) Diffusionsdominant

Als Lösung der Poisson-Gleichung ($\epsilon = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$) wurde nun

$$\phi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \sin(1000t) \quad (5.3)$$

verwendet und wiederum in Verbindung mit Dirichletschen Randbedingungen realisiert. Der darin enthaltene hochfrequente Zeitanteil gestattet die Untersuchung der Zeitdiskretisierung weitgehend unabhängig von der räumlichen Auflösung. So haben erste Tests auf unterschiedlich feinen Gittern gezeigt, daß im Rahmen der hier untersuchten Zeitschrittweiten auf dem Gitter G4 keinerlei Einfluß der Ortsschrittweite h auf den Fehler erkennbar ist.

Zunächst wurden die DG-Varianten ohne Parallelisierung betrachtet. Für DG(0) ist der zeitliche Verlauf des Fehlers sowie dessen Abhängigkeit von Δt zu unterschiedlichen Zeitpunkten in Abbildung C.7 gezeigt. Einerseits weist der zeitliche Verlauf durch den nicht symmetrischen Fehleranteil beider Halbwellen auf eine deutliche Phasenverschiebung von exakter und diskreter Lösung hin, deren Abnahme bei den verwendeten Zeitschrittweiten nicht erkennbar wird. Andererseits ist die direkte Proportionalität von L^2 -Fehler und Zeitschrittweite ersichtlich.

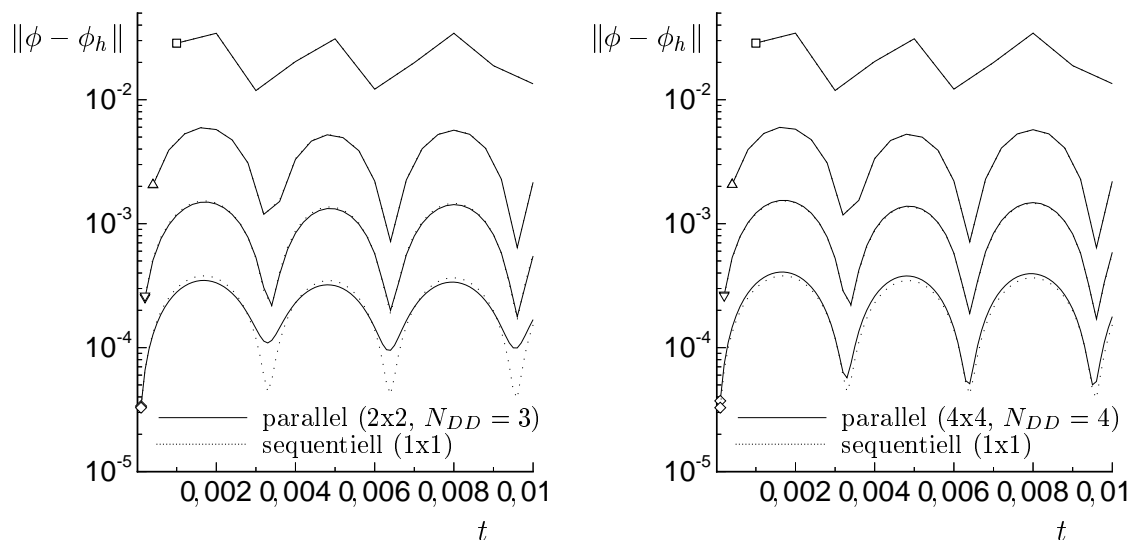


Abbildung 5.8: Verlauf des L^2 -Fehlers in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite (\square : $1 \cdot 10^{-3}$, \triangle : $4 \cdot 10^{-4}$, ∇ : $2 \cdot 10^{-4}$, \diamond : $1 \cdot 10^{-4}$) des $DG_2^{\phi,\beta}(1)$ -Verfahrens mit ($\gamma^\phi = 5$) und ohne Parallelisierung auf dem Gitter G4.

Da die $DG_1^{\phi,\alpha}(1)$ -Methode äquivalent zum Crank–Nicolson Verfahren ist (vgl. Abschnitt 3.2.3), liefert sie hier bereits sehr genaue Ergebnisse (siehe Abbildung C.8). Weitere Iterationen senken den Fehler kaum, scheinen aber noch aufgrund der deutlich geringeren Werte zu den Zeitpunkten $\frac{n}{1000}\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Phasenlage zu verbessern. Demgegenüber zeigt $DG_1^{\phi,\beta}(1)$ ein ganz ähnliches Verhalten zu $DG(0)$, allerdings auf etwas geringerem Fehlerniveau. Bei weiteren Iterationen ist noch einmal ein deutliches Absinken des Fehlers zu beobachten, wobei hier $DG_2^{\phi,\alpha}(1)$ und $DG_3^{\phi,\beta}(1)$ vergleichbare Ergebnisse aufweisen. Diese Merkmale liefern einen ersten Anhaltspunkt für die besseren Stabilitätseigenschaften der β -Variante, denn nur diese konnte erfolgreich auf die Navier–Stokes Gleichung angewendet werden.

In Verbindung mit der Gebietszerlegung ist die Wirkung des DD-Parameters und der DD-Iterationsanzahl für $DG_2^{\phi,\beta}(1)$ in Abbildung C.9 und C.10 dargestellt. Mit $\gamma^\phi = 5 \dots 10$ und in Abhängigkeit von der Zerlegung $N_{DD} = 3, 4$ ist bereits eine vergleichbare Genauigkeit wie in der sequentiellen Variante zu erzielen. Auch weist die Gegenüberstellung des zeitlichen Fehlerverlaufs bei Verwendung dieser Parameter und einer 2x2- bzw. 4x4-Zerlegung mit der sequentiellen Berechnung nur für die kleinste verwendete Zeitschrittweite Unterschiede auf (siehe Abbildung 5.8). Wiederum zeigt sich hier die Notwendigkeit, auf sehr kleinem Fehlerniveau die Anzahl der DD-Iterationen zu erhöhen. Abbildung C.11 ist entstanden, indem der Fehler zu unterschiedlichen Zeitpunkten in Abhängigkeit von der verwendeten Zeitschrittweite aufgetragen wurde. Im Gegensatz zu $DG(0)$ ist der L^2 -Fehler dem Quadrat der Zeitschrittweite proportional. Damit ist auch numerisch die Genauigkeit 2. Ordnung bezüglich der Zeit für die $DG(1)$ -Varianten bestätigt. Ein Vergleich mit

Abbildung C.7 bringt auch den deutlichen Aufwandsvorteil bei zeitgenauen Rechnungen zum Ausdruck. Als rechenzeitäquivalente Zeitschrittweite für $DG(0)$ kann hierbei ein Drittel derjenigen von $DG_2^{\phi,\beta}(1)$ angesetzt werden.

Aufgrund der sehr guten parallelen Lastverteilung kann die theoretische Effektivität gut in Geschwindigkeitserhöhung umgesetzt werden (siehe Tabelle 5.3).

Zerlegung	γ^ϕ	Δt	N_T	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
2x2	5	$4 \cdot 10^{-4}$	25	3	0,601	2,197	0,990
		$2 \cdot 10^{-4}$	50	3	0,619	2,262	0,995
		$1 \cdot 10^{-4}$	100	3	0,650	2,361	0,994
4x4	5	$4 \cdot 10^{-4}$	25	4	0,522	5,464	0,966
		$2 \cdot 10^{-4}$	50	4	0,524	5,363	0,965
		$1 \cdot 10^{-4}$	100	4	0,541	5,445	0,967

Tabelle 5.3: Bewertungskriterien der Parallelisierung bei Verwendung der $DG_2^{\phi,\beta}(1)$ -Methode auf dem Gitter G4.

(II) Konvektionsdominant

Betrachtet wird der konvektionsdominante Transport einer Startlösung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Infolge der verschwindend geringen Diffusion ($\epsilon = 10^{-8}$)

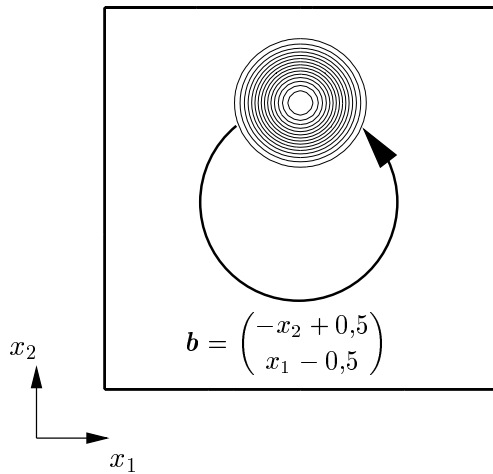


Abbildung 5.9: Schematische Darstellung des Transports der Startlösung durch das Geschwindigkeitsfeld (Festkörperrotation).

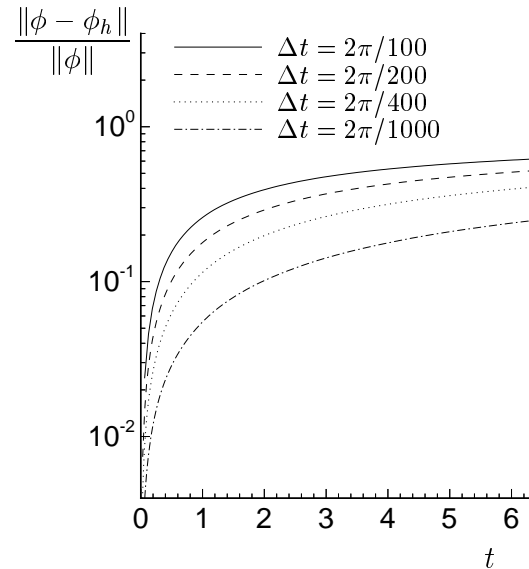


Abbildung 5.10: Verlauf des L^2 -Fehlers der diskreten Lösung mit $DG(0)$ in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ohne Gebietszerlegung auf dem Gitter G4.

wird diese lediglich auf einer Kreisbahn transportiert. Im Anfangszustand ($t = 0$)

ist die Lösung durch einen exzentrisch zum Rotationsmittelpunkt angeordneten Sinushügel

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(5\pi r)), & r := \sqrt{(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,75)^2} \quad : \quad r < 0,2 \\ 0 & : \quad r \geq 0,2 \end{cases} \quad (5.4)$$

beschrieben, der beispielsweise eine heiße Zone in einem rotierenden, sehr schlecht wärmeleitenden Fluid nachbilden könnte (siehe Abbildung 5.9). Die innerhalb eines numerischen Verfahrens erzeugte, jedoch in der Regel unerwünschte, künstliche Diffusion kann nun gut anhand des „Verschmierens“ der Lösung beurteilt werden.

Während bei $DG_N^{\phi,\beta}(1)$ ein gleichmäßiges Abnehmen des Fehlers mit zunehmender Anzahl von Iterationen N zu beobachten ist, wird bei der α -Variante bereits nach zwei Iterationen ein sehr geringes Fehlerniveau erreicht (vgl. Abbildung C.12). Die dazugehörigen Profilschnitte der Lösung nach einer Umdrehung zeigt Abbildung 5.11. Für das Crank–Nicolson Verfahren (resp. $DG_1^{\phi,\alpha}(1)$) sind ein deutliches Unterschwingen der Lösung sowie eine leichte Phasenverschiebung zu erkennen. Bei beiden iterativen $DG(1)$ -Varianten lassen sich diese Effekte durch eine ausreichende Iterationszahl N erheblich senken. Der damit verbundene Aufwand ist im Vergleich zu zeitgenauen $DG(0)$ -Rechnungen mit sehr kleiner Zeitschrittweite deutlich geringer (vgl. Abbildung 5.10).

Die Gebietszerlegung bereitet aufgrund der senkrechten Durchströmung der Teilgebiete keinerlei Probleme. So lassen sich mit $N_{DD} = 2$ (2x2-Zerlegung) bzw.

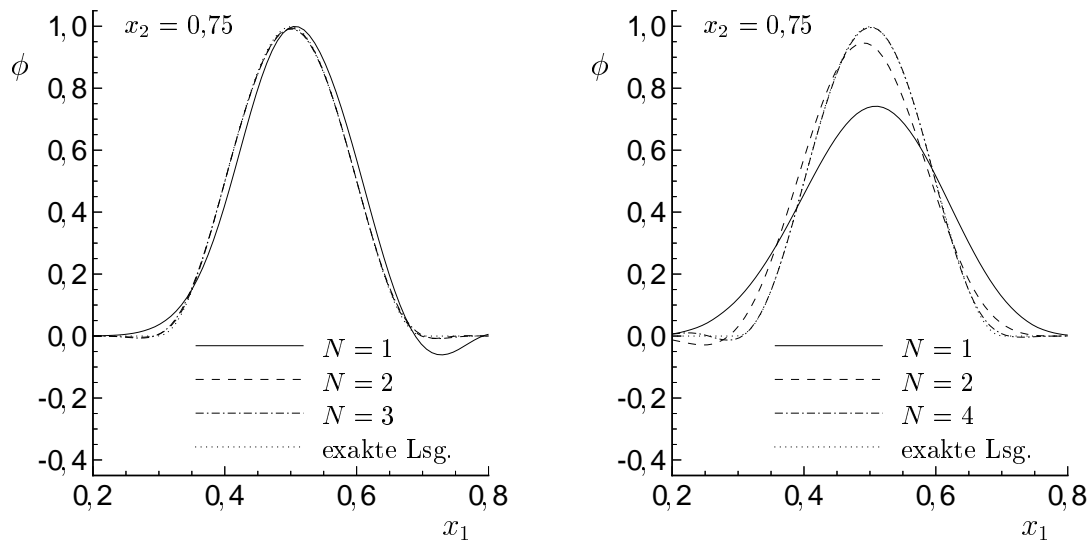


Abbildung 5.11: Vergleich von Profilschnitten der Lösung nach einer Umdrehung für die $DG_N^{\phi,\alpha}(1)$ - (links) und $DG_N^{\phi,\beta}(1)$ -Methode (rechts) mit $\Delta t = \frac{2\pi}{100}$ bei einer unterschiedlichen Anzahl von Iterationen N ohne Parallelisierung auf dem Gitter G4.

$N_{DD} = 3$ (4x4-Zerlegung) die sequentiell erzielten Resultate reproduzieren (vgl.

Abbildung C.13). Dementsprechend günstig fällt auch der Geschwindigkeitszuwachs bei der Parallelisierung aus (siehe Tabelle 5.4).

Zerlegung	γ^ϕ	Δt	N_T	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
2x2	5	$\frac{2\pi}{100}$	100	2	0,906	3,536	0,990
4x4	5	$\frac{2\pi}{100}$	100	3	0,743	10,01	0,934

Tabelle 5.4: Bewertungskriterien der Parallelisierung bei Verwendung der $DG_4^{\phi,\beta}(1)$ -Methode auf dem Gitter G4.

5.3 Laminare Strömung

5.3.1 Zylinderumströmung

Die in diesem Abschnitt untersuchten Beispiele zur laminaren Zylinderumströmung basieren auf dem maßgeblich von SCHÄFER und TUREK initiierten Benchmark [77]. Wesentliche Motivation zur Spezifikation dieser Referenzfälle war die Bewertung der Leistungsfähigkeit unterschiedlicher Diskretisierungs- und Lösungsmethoden. Neben meßtechnischen Daten existieren durch die Vielzahl der Teilnehmer auch zahlreiche auf numerischem Wege erzielte Ergebnisse. Somit ist auch der unmittelbare Vergleich zu anderen Berechnungsprogrammen gegeben.

Bei allen Testfällen befindet sich im vorderen Teil eines Kanals, leicht versetzt zur Kanalmitte, ein Zylinder. Das inkompressible Fluid, dessen kinematische Zähigkeit durch $\tilde{\nu} = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ und dessen Dichte mit $\tilde{\rho} = 1 \text{ kg}/\text{m}^3$ beschrieben wird, strömt jeweils mit einem parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil in den Kanaleintritt. Durch die asymmetrische Anordnung des Zylinders erfährt dieser bereits bei stationärer Umströmung eine geringe Auftriebswirkung, deren Berechnung eine erste Schwierigkeit darstellt.

Für die zweidimensionale Konfiguration ist die zugrunde liegende Geometrie einschließlich der Abmessungen in Abbildung 5.12 dargestellt. Bei den Berechnungen wurden drei unterschiedlich feine Gitter (vgl. Tabelle C.2) sowie drei verschiedene Gebietszerlegungen, die sich insbesondere durch die Anzahl der Teilungen am Zylinder unterscheiden, eingesetzt (siehe Abbildung C.14). Üblicherweise werden die auf den Zylinder wirkenden Reibungs- und Druckkräfte in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten aufgeteilt. Mit der in x_1 -Richtung wirkenden Widerstandskraft F_w und der in Richtung von x_2 definierten Auftriebskraft sind die entsprechenden dimensionslosen Beiwerte über den Staudruck und Zylinderdurchmesser D wie folgt bestimmt:

$$c_w := \frac{2F_w}{\rho \bar{U}^2 D}, \quad c_a := \frac{2F_a}{\rho \bar{U}^2 D} \quad \text{mit} \quad \bar{U} := \frac{1}{H} \int_0^H u_1(0, x_2) dx_2. \quad (5.5)$$

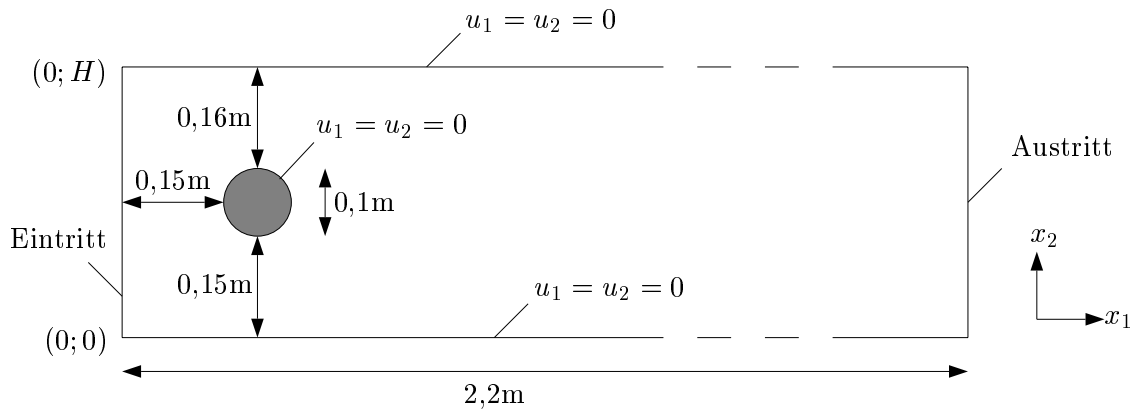


Abbildung 5.12: Schematische Darstellung der Geometrie mit Abmessungen in 2D.

Über die mittlere Geschwindigkeit \bar{U} ist auch die die einzelnen Referenzfälle beschreibende Reynolds-Zahl

$$\text{Re} := \frac{\bar{U} D}{\nu} \quad (5.6)$$

definiert.

Infolge der Strömungsablösung am Zylinder bildet sich ein Rückströmgebiet, dessen Länge

$$L_r := x_{1,r} - x_{1,e} \quad \text{für} \quad u_1(x_{1,r}, x_{2,m}) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_{1,e} = 0,25 \text{ m}; \quad \tilde{x}_{2,m} = 0,2 \text{ m} \quad (5.7)$$

eine weitere charakteristische Größe zur Beschreibung der Lösung ist und hierbei vereinfacht durch den Nulldurchgang der Geschwindigkeitskomponente u_1 in der horizontalen Symmetrieebene des Zylinders ermittelt wird. Als weiteres Vergleichskriterium dient die Druckdifferenz

$$\Delta p := p(x_{1,a}, x_{2,m}) - p(x_{1,e}, x_{2,m}) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_{1,a} = 0,15 \text{ m}, \quad (5.8)$$

die für stationäre Strömung gut mit dem Druckunterschied in den Staupunkten übereinstimmt.

Referenzfall '2D-1': $\text{Re} = 20$

Am Eintritt ist das Geschwindigkeitsprofil mit

$$u_1(0, x_2) = \frac{4U_m}{H^2} x_2(H - x_2) \quad \text{und} \quad u_2(0, x_2) = 0 \quad (5.9)$$

sowie $\tilde{U}_m = 0,3 \text{ m/s}$ vorgegeben. Aufgrund des sich einstellenden stationären Strömungsfeldes wurde bei allen Berechnungen das DG(0)-Verfahren in Verbindung mit der großen Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t} = 100 \text{ s}$ und jeweils nur einem Linearisierungsschritt N_L eingesetzt. Wie Tabelle C.4 zeigt, konnte damit bei allen Varianten der stationäre

Zustand entsprechend (3.108) und $\mu_T = 10^{-6}$ nach relativ wenigen Zeitschritten erreicht werden.

Die hierbei erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 5.5 zusammengefaßt. Einen qualitativen Eindruck des Geschwindigkeits- und Druckfeldes vermittelt Abbildung C.16. Bei Verwendung des feinsten Gitters G3 in der sequentiellen Variante V3 liegen

Variante	c_w	c_a	$\Delta\tilde{p}/\text{Pa}$	\tilde{L}_r/m
V1	5,772	-0,0061	0,1153	0,0919
V2	5,597	0,0046	0,1186	0,0857
V3	5,581	0,0093	0,1175	0,0847
V4	5,571	0,0070	0,1190	0,0845
V5	5,571	0,0067	0,1190	0,0845
V6	5,576	0,0095	0,1176	0,0845
V7	5,576	0,0093	0,1176	0,0845
V8	5,567	0,0081	0,1176	0,0846
V9	5,568	0,0082	0,1176	0,0846
Meßwert	5,570–5,590	0,0104–0,0110	0,1172–0,1176	0,0842–0,0852

Tabelle 5.5: Zusammenstellung der Ergebnisse für alle Varianten.

bis auf den Auftriebsbeiwert c_a alle Parameter innerhalb des Toleranzbereiches der Meßwerte. Im Vergleich zu anderen Programmen sind diese Resultate mit einer moderaten Gitterfeinheit von 83.943 Unbekannten erzielt worden — ein Kennzeichen für die Güte der Diskretisierung. Auch die absolute Rechenzeit von 3095 s CPU-Zeit bei 240 MFLOPS 'peak performance' ist für einen Forschungscode als akzeptabel zu bezeichnen. Andererseits konnte bei weiterer Gitterverfeinerung die Genauigkeit des Auftriebsbeiwertes nicht verbessert werden. Demgegenüber zeigten sich geringfügig veränderte Konstanten C_2 und C_1^p in (3.89), (3.88) von deutlichem Einfluß. Offensichtlich ist die Konstruktion der Stabilisierungsparameter $\delta_{2,Q}$ und δ_1^p noch nicht optimal.

Bei Verwendung des DD-Algorithmus ist eine um so größere Übereinstimmung der Ergebnisse mit der sequentiellen Rechnung zu beobachten, je weniger Teilgebiete an den Zylinder grenzen. Dies gilt besonders für die am Rand des Zylinders definierten Größen. Allerdings ist zu bemerken, daß Unterschiede in den Kraftbeiwerten c_w , c_a nicht nur auf Verfälschungen der Lösung durch den DD-Algorithmus hinweisen. Entsprechend der Darstellung in Abschnitt 3.10 beinhaltet deren stückweise Berechnung auf den Teilgebieten und anschließende Summation einen geringen Fehler im Vergleich zur exakten Berechnung auf einer geschlossenen Kurve in der sequentiellen Variante.

In Verbindung mit dem DD-Algorithmus wurden sowohl die Variante zur Übertragung der Druckinformation innerhalb des Spannungstensors als auch deren sepa-

Variante	Übertragungsfkt.	γ_1^u	γ_2^u	γ^p	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
V4	(3.59)	10	10^3	–	5	0,346	1,427	0,522
V5	(3.61), (3.62)	10	10^3	10^2	5	0,384	1,608	0,530
V6	(3.61), (3.62)	10	10^3	10^2	3	0,519	1,838	0,714
V7	(3.61), (3.62)	10	10^3	10^2	4	0,465	1,706	0,739
V8	(3.61), (3.62)	10	10^3	10^2	4	0,472	3,380	0,908
V9	(3.61), (3.62)	10	10^3	10^2	5	0,387	2,794	0,914

Tabelle 5.6: Parameter der Gebietszerlegung und Bewertungskriterien der Parallelisierung.

rater Austausch getestet (vgl. Tabelle 5.6). In beiden Fällen ergaben sich die gleichen optimalen Werte der DD-Parameter γ^u . Wenn auch bei der getrennten Übermittlung der Druckinformation eine weitere Konstante benötigt wird, so ist dennoch bei deren geeigneter Wahl stets ein schnelleres Konvergieren des DD-Algorithmus beobachtet worden. Eine deutliche Geschwindigkeitserhöhung konnte mit Variante V8 erzielt werden, die auch maßgeblich auf die gute parallele Lastverteilung infolge günstiger Gebietszerlegung zurückzuführen ist.

Referenzfall '2D-2': $Re = 100$

Die nun erhöhte Eintrittsgeschwindigkeit von $\tilde{U}_m = 1,5 \text{ m/s}$ in (5.9) verursacht die Ausbildung eines instationären Strömungsfeldes. Kleine Störungen der Strömung erfahren keine zeitliche Dämpfung und führen so zu einer Verstärkung zeitabhängiger Lösungsanteile. Gleichzeitig einsetzende Sättigungsprozesse beschränken dieses Wachstum. Der sich auf diese Weise einstellende Gleichgewichtszustand kommt in der zeitlich streng periodischen Lösung zum Ausdruck, die insbesondere durch die horizontale Lageveränderung des hinteren Staupunktes gekennzeichnet ist und so die nach VON KÁRMÁN bezeichnete Wirbelstraße induziert.

Nur mit einer zeitgenauen Berechnung gelingt es, eine qualitativ hochwertige numerische Lösung zu erzielen, so daß die nachfolgend vorgestellten Ergebnisse generell auf der $DG_3^u(1)$ -Zeitdiskretisierung basieren. Als Kennwerte der Lösung dienen die maximal auftretenden Widerstands- bzw. Auftriebsbeiwerte $c_{w,max}$, $c_{a,max}$ sowie die in (5.8) definierte Druckdifferenz zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$\Delta p_a := \Delta p(t_0 + 1/2f_a) \quad \text{mit} \quad f_a = f_a(c_a). \quad (5.10)$$

Mit f_a ist hierbei die Frequenz des Auftriebsbeiwertes gekennzeichnet, dessen Maximalwert den Zeitpunkt t_0 entsprechend $c_{a,max} = c_a(t_0)$ bestimmt. Weiterhin beschreibt die Angabe der Strouhal-Zahl

$$St := \frac{Df_a}{\bar{U}} \quad (5.11)$$

anhand von f_a das zeitliche Verhalten der Strömung. All diese Angaben beziehen sich auf den eingeschwungenen Zustand.

Innerhalb der sequentiellen Berechnungen wurden zunächst drei Zeitschrittweiten auf den Gittern G1 bis G3 getestet (siehe Tabelle C.5). Entsprechend den in Tabelle 5.7 zusammengestellten Ergebnissen liegen die Kennwerte der Varianten V4 und V5 mit dem feinsten Gitter bis auf jeweils eine Ausnahme innerhalb des Toleranzbereiches der Meßwerte. Einerseits wird so die Güte der Zeitdiskretisierung trotz

Variante	$c_{w,max}$	$c_{a,max}$	St	$\Delta\tilde{p}_a/\text{Pa}$
V1	4,170	1,368	0,270	2,689
V2	3,277	1,067	0,298	2,535
V3	3,278	1,148	0,294	2,498
V4	3,238	1,070	0,299	2,483
V5	3,188	1,001	0,301	2,476
V6	3,230	1,152	0,296	2,488
V7	3,282	1,077	0,294	2,509
V8	3,260	1,032	0,295	2,500
Meßwert	3,220–3,240	0,990–1,010	0,295–0,305	2,460–2,500

Tabelle 5.7: Zusammenstellung der Ergebnisse für alle Varianten.

vergleichsweise großer Zeitschrittweite — ca. 33,4 Zeitschritte für eine Periode von c_a in Variante V4 — bestätigt. Andererseits ist der damit verbundene Rechenzeitbedarf sehr hoch. Ursache sind die vielen, nicht mit der Zeitschrittweite skalierenden Iterationsschritte des für derartige Aufgabenstellungen wenig geeigneten Lösers (vgl. auch Abschnitt 3.9).

Nur bei der getrennten Übermittlung der Druckinformation innerhalb des DD-Algorithmus konnten gebietszerlegte Berechnungen erfolgreich absolviert werden. Voraussetzung war jedoch noch in sehr viel stärkerem Maße als bei den stationären Problemstellungen die geeignete Wahl der DD-Parameter. Andernfalls verstärkten sich mit zunehmender Anzahl von Zeitschritten besonders die Fehler des Drucks an den Teilgebietsrändern und bewirkten letztendlich ein Divergieren der Lösung.

Die mit Gebietszerlegung erzielten Ergebnisse weichen geringfügig von denen der vergleichbaren sequentiellen Variante V4 ab (siehe Tabelle 5.7), zeigen aber die prinzipielle Funktionsfähigkeit des DD-Algorithmus für zeitabhängige Strömungsprobleme. Einen besonders guten Eindruck des instationären Lösungsverhaltens und der Unterschiede der Varianten geben die in Abbildung C.17 und C.18 dargestellten zeitlichen Verläufe der Kraftbeiwerte bzw. Druckdifferenz. Neben den Phasenverschiebungen zwischen den einzelnen Kennwerten sind die mit doppelter Frequenz schwingenden Werte von c_w und Δp gegenüber dem Auftriebsbeiwert erkennbar. Um die Größenordnung des Fehlers an den Teilgebietsrändern zu verdeutlichen, zeigt Abbildung C.19 einen Ausschnitt des Lösungsgebietes in der Umgebung des Zylinders mit den Isobaren eines willkürlichen Zeitschrittes.

Aus Tabelle 5.8 können sowohl die DD-Parameter als auch die Bewertungskriterien der Parallelisierung entnommen werden. Demnach liegt die theoretische parallele

Variante	γ_1^u	γ_2^u	γ^p	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
V6	5	5000	5	4	1,017	3,078	0,618
V7	5	5000	5	6	0,829	5,485	0,919
V8	5	5000	5	8	0,720	3,734	0,710

Tabelle 5.8: Parameter der Gebietszerlegung und Bewertungskriterien der Parallelisierung.

Effizienz recht hoch und überschreitet sogar den bei feingranularer Parallelität vorhandenen Grenzwert von eins. Aufgrund der zum Teil ungünstigen Lastverteilung fällt die Geschwindigkeitserhöhung jedoch geringfügiger aus. Theoretisch sollte die Lastverteilung bei Variante V8 ebenso gut sein wie in der Variante V7, da der einzige Unterschied in der Anzahl der DD-Iterationen besteht. Wodurch diese deutliche Differenz hervorgerufen wurde, konnte bisher nicht geklärt werden.

Referenzfall '3D-1Z': $Re = 20$

Gegenüber dem unendlich breiten Kanal innerhalb der zweidimensionalen Betrachtungsweise wird nun auf einen quadratischen Kanalquerschnitt übergegangen, bei dem lediglich die Eintrittsebene um 30 cm vorverlegt ist (siehe Abbildung 5.13). Beim Übergang zu 3D wird auch eine modifizierte Definition der Widerstandskoeffizienten

$$c_w := \frac{2F_w}{\rho \bar{U}^2 DH}, \quad c_a := \frac{2F_a}{\rho \bar{U}^2 DH} \quad \text{mit} \quad \bar{U} := \frac{1}{H^2} \int_0^H \int_0^H u_1(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (5.12)$$

erforderlich. Der Punkt, an dem die Druckdifferenz Δp zu bestimmen ist, befindet sich nun in der Symmetrieebene des Kanals:

$$\Delta p := p(0,45 \text{ m}; 0,2 \text{ m}; 0,205 \text{ m}) - p(0,55 \text{ m}; 0,2 \text{ m}; 0,205 \text{ m}). \quad (5.13)$$

Wiederum sind drei unterschiedlich feine Gitter zum Einsatz gekommen, die im Gegensatz zu den Netzen in 2D lediglich in der Umgebung des Zylinders eine Verfeinerung aufweisen (vgl. Tabelle C.3). Die auf diese Weise entstandenen unterschiedlichen Elementvolumina sind durch das Verhältnis $(h_{max}/h_{min})^3$ gekennzeichnet. Gebietszerlegungen wurden lediglich in der x_1, x_2 -Ebene ausgeführt, wodurch verhindert werden konnte, daß sich Teilgebiete in nur einem Punkt berühren (siehe Abbildung C.15).

Mit dem Eintrittsprofil

$$u_1(0, x_2, x_3) = \frac{16U_m}{H^4} x_2 x_3 (H - x_2)(H - x_3), \quad u_2(0, x_2, x_3) = u_3(0, x_2, x_3) = 0 \quad (5.14)$$

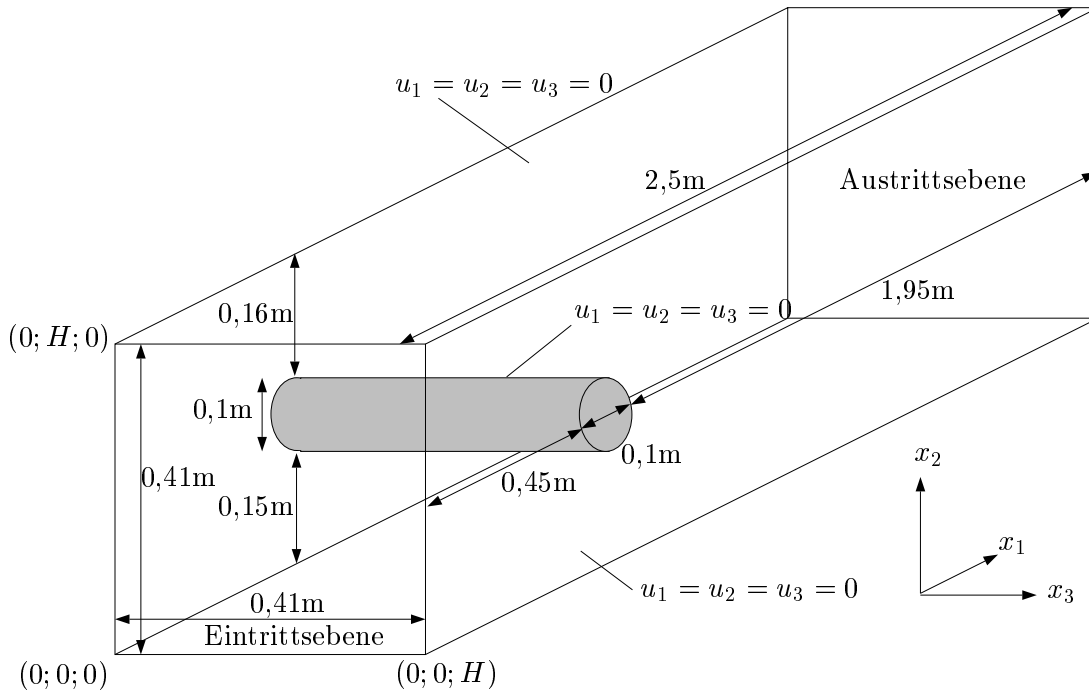


Abbildung 5.13: Schematische Darstellung der Geometrie mit Abmessungen in 3D.

und $\tilde{U}_m = 0,45 \text{ m/s}$ erhält man wiederum eine stationäre Lösung bei einer Reynolds-Zahl von 20. Die Parameter der Zeitdiskretisierung und der Linearisierung wurden wie im Referenzfall '2D-1' gewählt. Allerdings ist der Wert des Abbruchkriteriums auf $\mu_T = 5 \cdot 10^{-6}$ erhöht worden, da andernfalls kein stationärer Zustand in Verbindung mit dem DD-Algorithmus erzielt werden konnte. Wie aus Tabelle C.6 hervorgeht, lag damit die Anzahl der benötigten Zeitschritte N_T ähnlich derer in 2D.

Bei Betrachtung der erzielten Ergebnisse in Tabelle 5.9 fällt einerseits auf, daß die Widerstandsbeiwerte generell zu groß ausfallen, während die Druckdifferenz innerhalb der Meßbereichsgrenzen liegt. Andererseits weisen insbesondere die berechneten Auftriebsbeiwerte auf dem feinsten Gitter G3 merkliche Schwankungen auf. Die Ursache hierfür wird weniger in einer unzureichenden örtlichen Auflösung als vielmehr in Verfälschungen durch die Stabilisierungsparameter $\delta_{2,Q}$ und δ_1^p sowie in einer unzureichenden Konvergenz des DD-Algorithmus vermutet.

Wiederum konnte mit den Varianten, die eine separate Übertragung der Druckinformation innerhalb des DD-Algorithmus realisieren, eine geringfügig bessere Effizienz der Parallelisierung nachgewiesen werden (siehe Tabelle 5.10). Trotz der schlechten parallelen Lastverteilung ist in allen Fällen noch eine merkliche Geschwindigkeitserhöhung feststellbar gewesen.

Variante	c_w	c_a	$\Delta\tilde{p}/\text{Pa}$
V1	6,428	0,0194	0,1643
V2	6,340	0,0137	0,1662
V3	6,376	0,0107	0,1696
V4	6,353	0,0084	0,1709
V5	6,337	0,0082	0,1707
V6	6,274	0,0125	0,1733
V7	6,274	0,0126	0,1733
Meßwert	6,050–6,250	0,0080–0,0100	0,1650–0,1750

Tabelle 5.9: Zusammenstellung der Ergebnisse für alle Varianten.

Variante	Übertragungsfkt.	γ_1^u	γ_2^u	γ_3^u	γ^p	N_{DD}	E_{th}	S_e	L_p
V4	(3.59)	10^2	10^3	10^2	–	4	0,736	3,350	0,780
V5	(3.61), (3.62)	10^2	10^3	10^2	40	4	0,748	3,379	0,775
V6	(3.59)	10^2	10^3	10^2	–	5	0,522	2,843	0,622
V7	(3.61), (3.62)	10^2	10^3	10^2	40	5	0,555	3,080	0,635

Tabelle 5.10: Parameter der Gebietszerlegung und Bewertungskriterien der Parallelisierung.

5.3.2 Periodische Randbedingung mit Drucksprung

Anhand einer aus anwendungsorientierter Sicht hervorgegangenen Problemstellung soll nun der DD-Algorithmus unter dem Blickwinkel einer neuartigen Realisierung periodischer Randbedingungen mit Drucksprung numerisch untersucht werden. Üblicherweise wird eine derartige Randbedingung durch Abspaltung eines mit dem Drucksprung gebildeten konstanten Druckgradienten in Verbindung mit der Einführung eines reduzierten Drucks realisiert. Bei mehreren periodischen Rändern ist diese Vorgehensweise nur dann erfolgreich, wenn sich ein einheitlicher Druckgradient definieren läßt. Verwendet man die in Abschnitt 2.6 vorgeschlagene Gleichung (2.64), so existiert diese Einschränkung nicht.

Als Demonstrationsbeispiel dient die Untersuchung der Durchströmung einer von RÜHLICH vorgeschlagenen, streng periodisch aufgebauten Regeneratorgeometrie [78]. Dieses Bauteil wird u. a. in Gaskältemaschinen als Wärmeübertrager eingesetzt und besteht in der hier untersuchten Konfiguration aus einer Vielzahl ellipsenförmiger Drähte. Bei deren Umströmung wird im Anschluß an eine Einlaufstrecke das Strömungsfeld die gleiche Periodizitätslänge wie die Geometrie aufweisen. Im Vergleich zur Baulänge des Regenerators ist die Einlauflänge jedoch durch die sehr große Anzahl der nacheinander durchströmten Elementarzellen (siehe Abbildung 5.14) vernachlässigbar klein. Der in jeder Elementarzelle auftretende Druckverlust

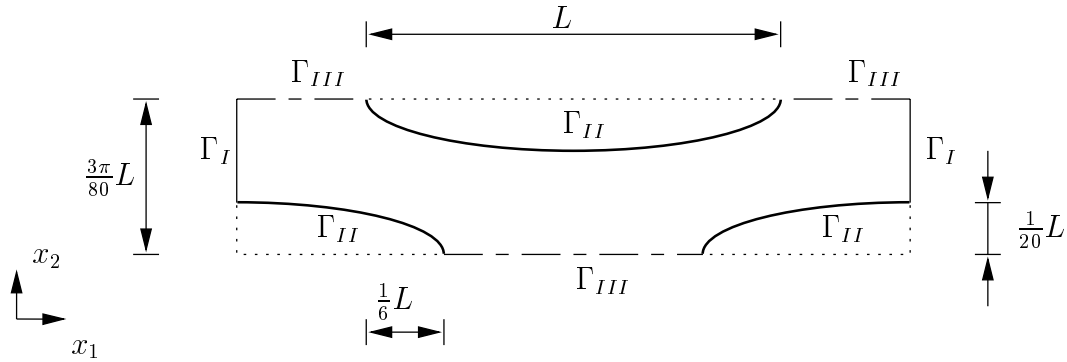


Abbildung 5.14: Regeneratorelementarzelle mit Bemaßung für einen Füllfaktor von 40%.

Δp_z ist damit gleich und kann direkt aus der Druckdifferenz über den gesamten Regenerator ermittelt werden. Wichtige Fragen — wie beispielsweise die nach dem sich einstellenden Massestrom oder das die Güte der Wärmeübertragung bestimmende Verhältnis von Reibungs- und Druckkräften — können somit erst bei Verwendung periodischer Randbedingungen mit Drucksprung anhand der numerischen Untersuchung einer Elementarzelle detailliert beantwortet werden. Entsprechend der in Tabelle 5.11 zusammengestellten Randbedingungen auf den einzelnen Randstücken, dient dieses Beispiel auch zur Verifizierung der Symmetrierandbedingung.

Randstück	Randbedingung
zykl. Rand Γ_I	Gl. (2.64)
Wand Γ_{II}	$\mathbf{u} = \mathbf{0}$
Symmetrie Γ_{III}	Gl. (2.58) mit $\boldsymbol{\tau}_w = \mathbf{0}$ und $u_n = 0$

Tabelle 5.11: Verwendete Randbedingungen auf den in Abbildung 5.14 bezeichneten Rändern.

Charakterisiert ist die im weiteren vorgestellte Strömungssituation durch

$$\text{Re}_d^* := \frac{U^* D_{gl}}{\nu} = 150 \quad \text{mit} \quad U^* := \sqrt{\frac{\Delta p_z}{\rho}}, \quad D_{gl} \approx 0,2249L. \quad (5.15)$$

Bei der hier verwendeten Definition der Reynolds-Zahl enthält die Pseudogeswindigkeit U^* den vorgegebenen Drucksprung. Für die numerischen Berechnungen wurden vier unterschiedlich feine Gitter eingesetzt (siehe Tabelle C.7), wobei jeweils die in Abbildung C.20 dargestellte 2x1-Gebietszerlegung zum Einsatz kam. Der DD-Algorithmus realisiert somit nicht nur die periodische Randbedingung, sondern er sichert auch die Stetigkeit der Lösung über dem inneren Gebietsrand. In diesem Sinne gelten die in Tabelle C.8 angegebenen DD-Parameter unabhängig von der Höhe des Drucksprungs.

Die Zeitschrittweite konnte einheitlich sehr groß mit $\Delta t = 100 D_{gl}/U^*$ in Verbindung mit der DG(0)-Zeitdiskretisierung gewählt werden, so daß bereits nach wenigen Zeitschritten der stationäre Zustand für $\mu_T = 10^{-6}$ erreicht wurde (siehe Tabelle 5.12). Neben den auf die Wand wirkenden Reibungs- und Druckkräften ist

Programm	Gitter	N_T	$\frac{\bar{U}}{U^*}$	$\frac{F_{1,\nu}}{\Delta p_z D_{gl}}$	$\frac{F_{1,p}}{\Delta p_z D_{gl}}$	$\frac{ F_{1,\nu} + F_{1,p} - F_P }{ F_P }$
ParallelNS	G1	20	0,312	0,282	0,00854	0,0371
ParallelNS	G2	19	0,331	0,287	0,0103	0,0130
ParallelNS	G3	19	0,334	0,288	0,0108	0,00778
ParallelNS	G4	18	0,335	0,289	0,0111	0,00553
Fluent [79] ⁽¹⁾	G4	–	0,319	0,290	0,0103	0,00233
TASCflow [78]	⁽²⁾	–	0,317	0,290	0,0120	0,00278

Tabelle 5.12: Zusammenstellung der Ergebnisse mit Angabe der in x_1 -Richtung wirkenden Reibungskraft $F_{1,\nu}$ und Druckkraft $F_{1,p}$ (⁽¹⁾: manuelle Berichtigung der Druckwerte aufgrund fehlerhafter Implementierung, ⁽²⁾: quasi-2D Rechnung auf strukturiertem Gitter bestehend aus 300x25x3 Hexaederelementen).

das sich einstellende Geschwindigkeitsfeld anhand der mittleren Geschwindigkeit

$$\bar{U} := \frac{1}{H} \int_0^H u_1(x_1 = 5/6 L) dx_2 \quad \text{für} \quad H := \left(\frac{3\pi}{80} - \frac{1}{20} \right) L \quad (5.16)$$

dokumentiert. Weiterhin wurde der relative Fehler bei der Bestimmung der Wandkräfte angegeben, da deren Summe gerade der aufgeprägten äußeren Kraft

$$F_P := \Delta p_z H \quad (5.17)$$

entsprechen muß. Zur Bewertung der erzielten Ergebnisse sind zusätzlich die mit zwei weit verbreiteten kommerziellen Programmen gewonnenen Resultate aufgenommen. Während die von allen drei Programmen bestimmte Reibungskraft $F_{1,\nu}$ ausgezeichnet übereinstimmt und nur geringfügige Unterschiede in der Druckkraft auftreten, zeigen sich Abweichungen in der berechneten mittleren Geschwindigkeit. Vermutlich liegt die Ursache in der nicht exakten Erfüllung von $u_n = 0$ auf der Symmetrielinie innerhalb von ParallelNS. Entsprechend der Darstellung in Abschnitt 3.4.2 wird diese Bedingung über die partielle Integration der Kontinuitätsgleichung realisiert, die jedoch als gestört durch die PSPG-Stabilisierung angesehen werden kann, vgl. (3.80). Für diese Annahme spricht, daß in der Lösung von ParallelNS der transportierte Massestrom über die Symmetrielinie in der Größenordnung der Abweichung gegenüber Fluent[®] bzw. TASCflow[®] liegt. Insofern ist eine andere Realisierung der Symmetrierandbedingung wünschenswert.

Das sich auf der Grenze zwischen beiden Teilgebieten einstellende Geschwindigkeitsprofil zeigt Abbildung C.21. Deutlich erkennbar ist der gegen Null strebende Gradient auf der Symmetrielinie. Betrachtet man den Druckverlauf entlang eines

horizontalen Mittelschnittes, so tritt erwartungsgemäß der größte Druckabfall in den engsten Kanalquerschnitten auf, vgl. Abbildung C.22. Einen qualitativen Überblick über das gesamte Strömungsfeld gibt die Isoliniendarstellung in Abbildung C.23. Neben periodischen Lösungsanteilen ist die ablösefreie Umströmung der ellipsoförmigen Hindernisse gut sichtbar.

5.4 Turbulente Strömung

5.4.1 Homogene Turbulenz nach einem Gitter

Mit diesem ersten, sehr einfachen Testfall soll zunächst die prinzipielle Funktionsfähigkeit des Turbulenzmodells in Verbindung mit dem verwendeten DD-Algorithmus und der Linearisierung gezeigt werden. Als Bewertungskriterien dienen die Turbulenzgrößen in einer stationären Parallelströmung ohne Geschwindigkeitsgradienten. Ausgehend vom Eintrittszustand ist deren Verlauf durch den konvektiven Transport mit dem Geschwindigkeitsfeld und einem gleichzeitigen Abklingen gekennzeichnet. Hierbei herrscht homogene Turbulenz, d. h. die Lösung ist nur von einer stromabgerichteten Koordinate abhängig.

Durch die Verwendung von zwei Symmetrierandbedingungen konnte das Berechnungsgebiet ohne die Induzierung von Randeffekten auf ein quadratisches Grundgebiet eingeschränkt werden (siehe Abbildung 5.15). Somit werden auch keine Wand-

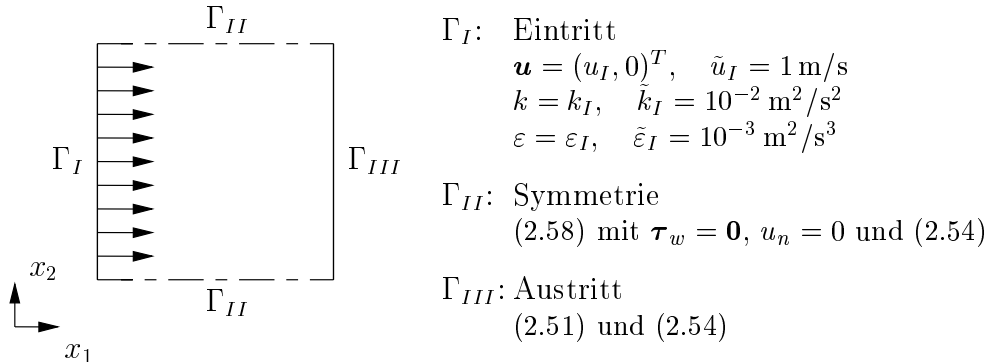


Abbildung 5.15: Schematische Darstellung der Geometrie einschließlich Randbedingungen.

funktionen, die ansonsten in Verbindung mit dem k - ε Turbulenzmodell einzusetzen sind, benötigt. Um den in Abschnitt 3.8 dargelegten Linearisierungsprozeß zu realisieren, wurden auch Druck und Geschwindigkeit mit Hilfe der Navier-Stokes Gleichung berechnet. Andererseits hätte die Vorwegnahme des konstanten Geschwindigkeitsfeldes einerseits eine zusätzliche Stabilisierung bedeutet und andererseits den Diskretisierungsfehler von \mathbf{u} eliminiert.

Bei Verwendung des k - ε Turbulenzmodells ist der Verlauf der Turbulenzgrößen in der zuvor beschriebenen Konfiguration durch die analytische Lösung

$$k = k_I \left(1 + (C_2 - 1) \frac{x_1 \varepsilon_I}{u_I k_I} \right)^{\frac{1}{1-C_2}}, \quad \varepsilon = \varepsilon_I \left(1 + (C_2 - 1) \frac{x_1 \varepsilon_I}{u_I k_I} \right)^{\frac{C_2}{1-C_2}} \quad (5.18)$$

bestimmt [23]. Diese Gleichung gilt wiederum nur, wenn die molekularen gegenüber den turbulenten Austauschprozessen vernachlässigbar sind und somit $\nu_e = \nu_t$ in (2.36) gilt. Übrigens diene (5.18) ursprünglich zur Bestimmung der Konstante C_2 (siehe Tabelle 2.1) aus experimentellen Untersuchungen [80], [81]. Hier wird sie jedoch als Referenzlösung zur Ermittlung des Fehlers der numerisch erzielten Resultate genutzt und ist für den verwendeten Eintrittszustand I in Abbildung 5.16 graphisch dargestellt.

Bei Einsatz des DG(0)-Verfahrens konnte keine Zeitschrittweitenbeschränkung festgestellt werden, so daß sich für großes Δt nach wenigen Zeitschritten eine stationäre Lösung einstellte. Dabei war es ausreichend, innerhalb der Zeitschleife nur jeweils einen Linearisierungsschritt durchzuführen. Dies galt ebenso für die mit Hilfe des DD-Algorithmus parallelisierten Berechnungen, bei denen die in Abbildung 5.1 gezeigte 4x1-Zerlegung angewendet wurde. Aufgrund der senkrechten, konvektionsdominanten Durchströmung der Teilgebiete erwies sich die Wahl der DD-Parameter als unkritisch.

Die relativen Fehler der numerisch erzielten Lösungen sind sehr gering und nehmen mit zunehmender Gitterverfeinerung ab — beides Hinweise, die auf eine fehlerfreie Implementierung des Turbulenzmodells deuten (siehe Abbildung 5.17). Hervorgerufen durch die glatte Lösung ist das Fehlerniveau bereits auf groben Gittern klein und sinkt nur noch wenig bei weiterer Verfeinerung. Der teilweise geringfügig höhere Fehler in den gebietszerlegten Berechnungen gegenüber den sequentiellen Varianten ist als vernachlässigbar zu bezeichnen.

5.4.2 Ebene Kanaleinlaufströmung

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel wird bei der Berechnung der turbulenten Kanaleinlaufströmung der Einsatz von Wandfunktionen notwendig. Da eine analytische Lösung bei Verwendung des k - ε Turbulenzmodells nicht bekannt ist, wurden die Resultate vorrangig mit den erzielten Ergebnissen einer Referenzimplementierung verglichen. Hierfür kam das kommerziell verfügbare Programm Fluent[®] [79] zum Einsatz, das auf einer Finite-Volumen-Methode basiert.

Aufgrund der bekannten, zum Teil deutlichen Abweichungen des Standard- k - ε -Turbulenzmodells gegenüber experimentellen Untersuchungen in Grenzschichtströmungen [82], soll die Bewertung anhand von Meßwerten in den Hintergrund treten. Vorrangiges Anliegen dieses Beispiels ist daher die Untersuchung des komplexen Zusammenwirkens von Turbulenzmodell, Wandfunktionen und DD-Algorithmus und nicht der Physik der turbulenten Kanalströmung.

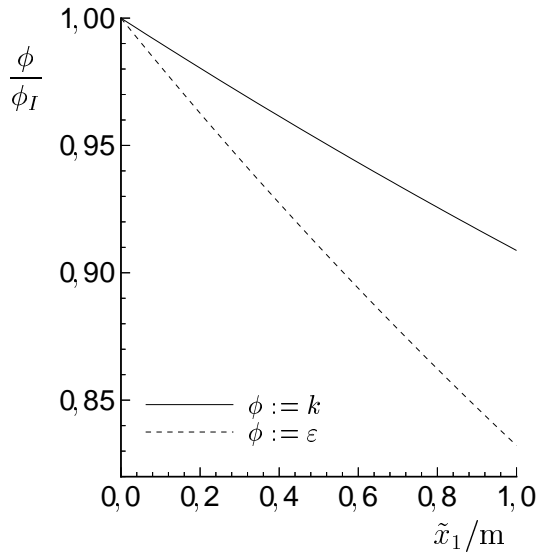


Abbildung 5.16: Abnahme der Turbulenzgrößen mit zunehmender Gitterentfernung.

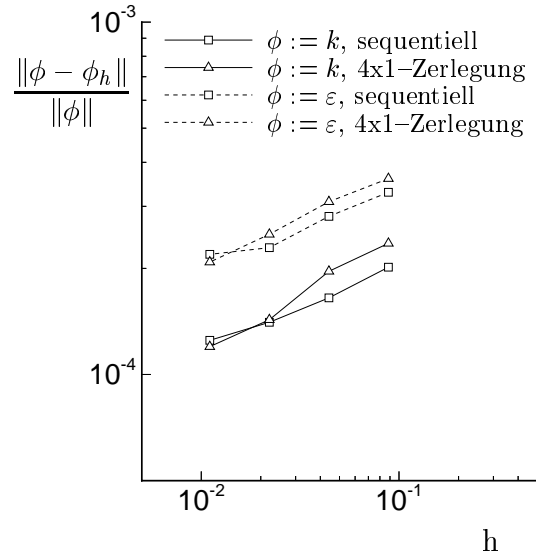


Abbildung 5.17: Verlauf des relativen L^2 -Fehlers in Abhängigkeit von der verwendeten Gitterfeinheit.

Die numerischen Berechnungen basieren auf zwei Kanalgeometrien mit einem Seitenverhältnis von 8:1 bzw. 40:1 (siehe Abbildung 5.18). Während für die Geschwin-

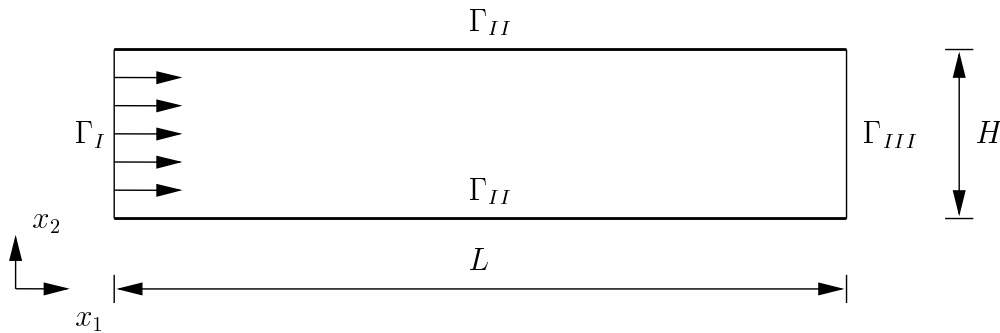


Abbildung 5.18: Schematische Darstellung der Geometrie mit Abmessungen.

digkeit am Eintritt ein rechteckförmiges Geschwindigkeitsprofil angesetzt wurde, ist für die Turbulenzgrößen ein parabelförmiges Profil vorgegeben worden, vgl. Tabelle 5.13. Der höhere Turbulenzgrad an der Wand war notwendig, da sonst in den unmittelbar an den Eintritt grenzenden Elementen negative turbulente kinetische Energien auftraten. Andererseits galt es, den Turbulenzgrad in der Kernströmung gering zu halten, um das Turbulenzmodell auch für den häufigen Anwendungsfall geringer Turbulenzenergien zu testen.

Charakterisiert werden kann die Strömung durch die mit dem gleichwertigen

Randstück	Randbedingungen
Eintritt Γ_I	$\mathbf{u} = (u_I, 0)^T$, $k = f_I(k_m, k_w)$, $\varepsilon = f_I(\varepsilon_m, \varepsilon_w)$, mit $f_I(\phi_m, \phi_w) := \phi_w - 4x_2(\phi_w - \phi_m)(1 - x_2)/H^2$ und k_m, ε_m entsprechend (2.50) für $Tu=5\%$ und $l_\varepsilon = H/20$, k_w, ε_w entsprechend (2.50) für $Tu=10\%$ und $l_\varepsilon = H/20$.
Wand Γ_{II}	stoffundurchlässige, feststehende Wand (Verwendung von Wandfunktionen, vgl. Abschnitt 2.7)
Austritt Γ_{III}	spannungsfreies Abströmen (2.51) und (2.54)

Tabelle 5.13: Verwendete Randbedingungen für die in Abbildung 5.18 bezeichneten Randstücke.

hydraulischen Durchmesser gebildete Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_d := \frac{u_I D_{\text{gl}}}{\nu} = 20.000 \quad \text{mit} \quad D_{\text{gl}} = 2H. \quad (5.19)$$

Im Anschluß an eine Einlaufstrecke stellt sich unabhängig vom Eintrittszustand eine ausgebildete turbulente Kanalströmung ein. Abgesehen vom Druck, der über dem Kanalquerschnitt konstant ist, treten keine Gradienten in Strömungsrichtung auf. Über den stromauf gerichteten Druckgradienten ist der Reibungsbeiwert

$$\lambda_w := -2 \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{D_{\text{gl}}}{\rho \bar{U}^2} = \frac{2 \Delta p D_{\text{gl}}}{L \rho \bar{U}^2} \quad \text{mit} \quad \bar{U} := \frac{1}{H} \int_0^H u_1 dx_2 = u_I \quad (5.20)$$

definiert, dessen Wert aus experimentellen Untersuchungen für den hier betrachteten Reynolds-Zahlbereich mit

$$\lambda_w = \frac{1,1}{(1,8 \lg \text{Re}_d - 1,64)^2} \approx 0,02954 \quad (5.21)$$

angegeben werden kann [83]. Entsprechend dem Kräftegleichgewicht von Druck- und Reibungskräften $H \Delta p = 2\tau_w L$ berechnet sich die Wandschubspannungsgeschwindigkeit zu

$$u_\tau = \bar{U} \sqrt{\frac{\lambda_w}{8}}. \quad (5.22)$$

Nicht zuletzt liefert das 1/7-Potenzgesetz von BLASIUS [84] in Verbindung mit der Massebilanz eine Aussage über das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil

$$u_1 = \frac{8}{7} u_I \left(1 - \left| \frac{2x_1}{H} - 1 \right|^7 \right). \quad (5.23)$$

Im Anschluß an diese theoretischen Vorüberlegungen soll nun auf die numerischen Berechnungen eingegangen werden. Für den Kanal mit dem Seitenverhältnis

$L/H = 40$ wurden vier unterschiedlich feine Gitter verwendet, deren Elemente durch einen hohen Schlankheitsgrad gekennzeichnet sind (siehe Tabelle C.9). Während die Gitter G1 bis G3 aus gleichgroßen, regelmäßig angeordneten Elementen bestehen, weist Gitter G4 eine vollkommen unstrukturierte Vernetzung auf (vgl. Abbildung C.28). Bei der Vergleichsrechnung mit dem Programm Fluent erwiesen sich diese Gitter als ungeeignet, da die Struktur der Vernetzung deutlich in Verfälschungen der Lösung wiederzuerkennen war. Daher wurde für die Berechnung mit Fluent auf ein strukturiertes Gitter bestehend aus 149×39 Viereckelementen übergegangen.

Für alle Berechnungen ist das DG(0)-Verfahren mit einer recht großen Zeitschrittweite von $\Delta t = 10H/u_I$ verwendet worden, wobei nach einer moderaten Anzahl von Zeitschritten das Abbruchkriterium mit $\mu_t = 10^{-6}$ erreicht wurde (siehe Tabelle C.10). Sowohl der Wandschubspannungsverlauf als auch der Druckabfall in Kanalmitte stimmen gut mit den Ergebnissen der Referenzimplementierung überein (siehe Abbildung 5.19, 5.20). Die geringen Unterschiede sind vornehmlich

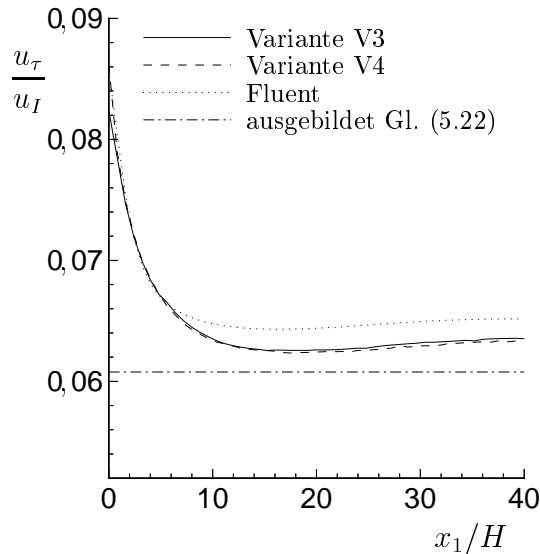


Abbildung 5.19: Verlauf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit.

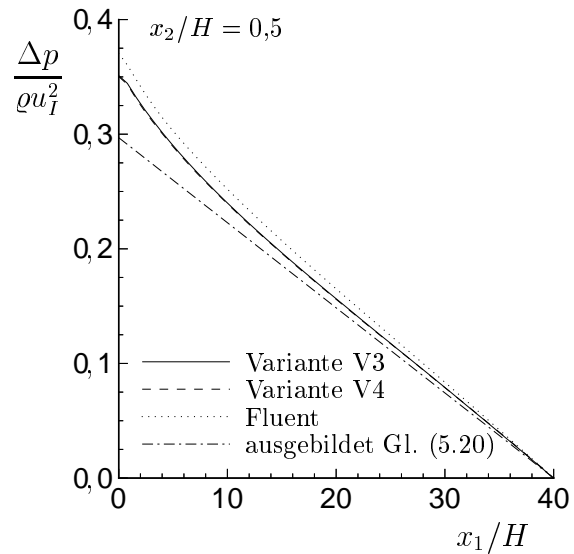


Abbildung 5.20: Druckabfall in Kanalmitte.

auf die verschiedenen Wandfunktionen zurückzuführen. Während von Fluent eine Standardfunktion ähnlich (2.67) benutzt wird, verwendet ParallelNS die im Übergangsbereich angepasste Gleichung (2.68). Entsprechend den Werten der universellen Grenzschichtgröße y^+ auf den einzelnen Gittern in Tabelle C.11 ist einerseits der Wandabstand geeignet gewählt, andererseits weisen gerade die Wandfunktionen in diesem Bereich Differenzen auf (vgl. auch Abbildung 2.4). Die Güte der innerhalb von ParallelNS verwendeten Wandfunktion wird durch die bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen für eine ausgebildete turbulente Kanalströmung unterstrichen. Trotz der deutlich variierenden Wandabstände für das Gitter G4 (Variante V4) ist der Wandschubspannungsverlauf zudem als ausgespro-

chen glatt zu bezeichnen.

Bei Betrachtung der Isoliniendarstellung in Abbildung C.31 tritt besonders die Parallelität der Isobaren positiv hervor — ein weiteres Kennzeichen für die Qualität der Wandanbindung und für die Implementierung der Austrittsrandbedingung. Auch die mit beiden Programmen berechneten Geschwindigkeitsprofile weisen eine gute Übereinstimmung auf (siehe Abbildung C.25, C.26). Allerdings zeigen sich starke Unterschiede gegenüber dem Geschwindigkeitsprofil von BLASIUS. Ebenso entspricht der Verlauf der turbulenten Viskosität in Abbildung C.27 nicht der von REICHHARDT [85] angegebenen Beziehung, die auf experimentellen Untersuchungen beruht. Ausschlaggebend hierfür sind jedoch die bereits angesprochenen Unzulänglichkeiten des Standard- k - ε -Turbulenzmodells für diese Klasse von Strömungen.

Bei Verwendung des DD-Algorithmus in Verbindung mit einer in Abbildung C.24 dargestellten 4×2 -Zerlegung konnten für den Kanal mit dem Seitenverhältnis von 1:40 keine befriedigenden Ergebnisse erreicht werden. Offensichtlich beeinträchtigen die langgestreckten Teilgebiete die Konvergenz der Gebietszerlegungsmethode. Daher wurde auf einen verkürzten Kanal mit $L/H = 8$ übergegangen, wobei die hier auf sequentiellm Wege erzielten Resultate ausgezeichnet mit den zuvor dargelegten Ergebnissen für den vorderen Bereich des längeren Kanals übereinstimmen. Zur Bewertung des DD-Algorithmus diente diese Lösung auch als Referenzlösung bei der Bildung von Fehlernormen. Die auf diese Weise gebildeten L^2 -Fehler sind für die vier untersuchten Varianten (vgl. Tabelle 5.14) in Abbildung C.29 über der Anzahl der Zeitschritte dargestellt. Obwohl bei der DD-Modifikation mit der separaten

Variante	Übertragungsfkt.	$\gamma_1^u, \gamma^k, \gamma^\varepsilon$	γ_2^u	γ^p	E_{th}^*	S_e^*	L_p^*
V6 ⁽¹⁾	(3.59)	5	5000	–	0,579	3,358	0,903
V7 ⁽¹⁾	(3.61), (3.62)	5	5000	25	0,585	3,143	0,822
V8 ⁽²⁾	(3.59)	5	5000	–	0,621	3,499	0,885
V9 ⁽²⁾	(3.61), (3.62)	5	5000	25	0,565	3,080	0,828

Tabelle 5.14: Parameter der Gebietszerlegung und Bewertungskriterien der Parallelisierung bei Verwendung von insgesamt $N_T = 30$ Zeitschritten und jeweils $N_{DD}^u = 5$, $N_{DD}^k = N_{DD}^\varepsilon = 3$ Gebietsiterationen (⁽¹⁾ mit $\rho_i := \rho_i(\mathbf{b})$, ⁽²⁾ mit $\rho_i := \rho_i(\mathbf{u}_i^{k-1})$ in (3.59)).

Übertragung der Druckinformation anfänglich eine etwas langsamere Konvergenz des Drucks zu beobachten ist, wird letztendlich ein um mehr als eine Größenordnung geringerer Fehler erreicht. Wie sich die beiden Fehlerniveaus in der Lösung ausdrücken, zeigt Abbildung C.30. Erfolgt der Informationsaustausch entsprechend (3.59), so ist die Lösung an den nahe der Wand gelegenen Teilgebietsrändern lokal verfälscht. Demgegenüber hat die Aktualisierung des Geschwindigkeitsfeldes bei der Berechnung von ρ_i in jedem DD-Schritt im Vergleich zur Verwendung eines eingefrorenen Geschwindigkeitsfeldes aus dem letzten Linearisierungsschritt (vgl. Abschnitt 3.3) für dieses Beispiel nicht zu einer Konvergenzbeschleunigung geführt.

Die Differenz der Fehlerniveaus der turbulenten kinetischen Energie der beiden

DD-Varianten bezüglich des Druckinformationstransports ist deutlich geringer. Allerdings ist die Ursache der Oszillationen bei sehr kleinem Fehler bisher ungeklärt. Gleichzeitig verhindern diese Schwankungen das Erreichen eines stationären Zustandes. Um aber trotzdem Aussagen über die Leistungsfähigkeit des DD-Algorithmus machen zu können, gelten die Bewertungskriterien in Tabelle 5.14 für eine maximale Anzahl von $N_T = 30$ Zeitschritten. Diese Begrenzung wurde gewählt, da weitere Zeitschritte nicht zu einer Verringerung des Fehlers führen. So wird einerseits aufgrund der gleichgroßen Teilgebiete eine gute parallele Lastverteilung erzielt, andererseits ist eine spürbare Geschwindigkeitserhöhung erkennbar.

5.4.3 Auftriebsinduzierte Strömung

Stellvertretend für nichtisotherme, turbulente Strömungen wird in diesem Beispiel die freie Konvektion in einem geschlossenen Behälter betrachtet. Für eine derartige Konfiguration haben CHEESEWRIGHT et al. [86] detaillierte experimentelle Untersuchungen durchgeführt und die gewonnenen Ergebnisse als zweidimensional definierten Testfall aufbereitet. Hierbei handelt es sich um einen rechteckigen Hohlraum mit einem Seitenverhältnis von 1:5, wobei die obere und untere Begrenzung als adiabate Wände betrachtet werden (siehe Abbildung 5.21). Demgegenüber weisen die beiden

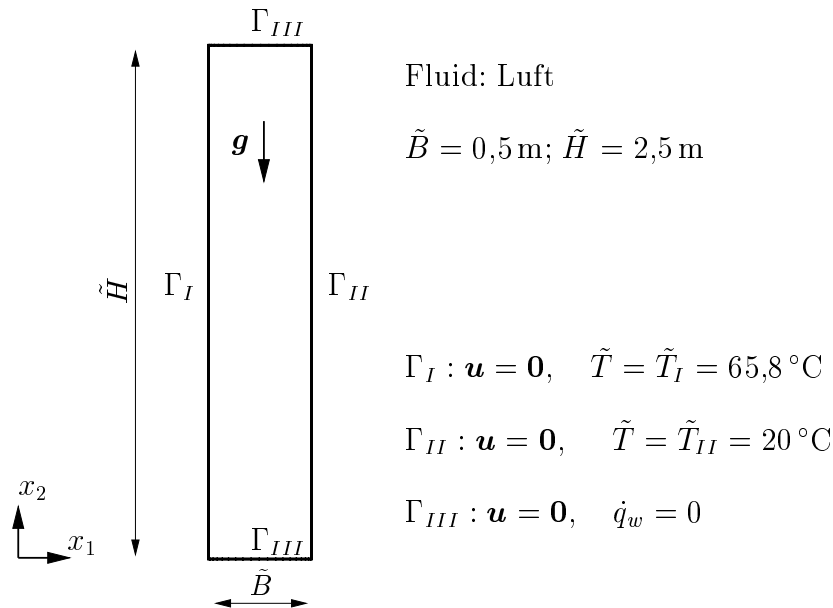


Abbildung 5.21: Schematische Darstellung der Geometrie und Randbedingungen.

seitlichen Berandungen konstante jedoch unterschiedliche Temperaturen auf und rufen infolge der temperaturabhängigen Dichte des Fluids den Antrieb der Strömung hervor. Überträgt man die im Experiment für das Strömungsmedium Luft verwendeten Randbedingungen in eine dimensionslose Darstellung, so ergeben sich die diesen

Vorgang beschreibenden Ähnlichkeitskennzahlen zu

$$\text{Ra} := \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu a} = 5,3 \cdot 10^{10} \quad \text{mit} \quad \Delta T = T_I - T_{II} \quad (5.24)$$

und $\text{Pr} = 0,71$.

Bei den numerischen Berechnungen kamen insgesamt drei unterschiedliche Gebietszerlegungen mit bis zu acht Teilgebieten zum Einsatz (vergleiche Abbildung C.32). Gleichzeitig sind vier verschieden feine Gitter verwendet worden, die ausschnittsweise für das untere linke Makroelement der 2x5-Zerlegung in Abbildung C.33 dargestellt sind. Hierbei ist neben der Anzahl der Elemente vor allem auch deren Seitenverhältnis stark variiert worden. So weisen beispielsweise die Randelemente des Gitters G3 mit 1:16,67 den größten Wert auf. Motivation hierfür war, mit den wandnächsten Punkten in den Gültigkeitsbereich der Wandgesetze zu kommen, ohne jedoch die Knotendichte in Strömungsrichtung zu erhöhen. Diese Werte sind in Tabelle C.12 neben weiteren Daten der Vernetzung angegeben.

Schon bei den Simulationen ohne Gebietszerlegung zeigte sich, daß unabhängig vom verwendeten Gitter kein stationärer Zustand erzielt werden konnte. Daraufhin wurden die Berechnungen generell auf die Nachbildung von 10 Minuten Echtzeit beschränkt. Zu diesem Zeitpunkt ist bereits ein quasi-stationäres Verhalten mit nur noch geringen Fluktuationen um einen Mittelwert beobachtbar. Im Zuge der Gitterverfeinerung mußte gleichzeitig die Zeitschrittweite verringert werden, da andernfalls das numerische Verfahren divergierte (vgl. Tabelle 5.15). Als eine integrale Größe

Variante	Gitter	Zerlegung	$\Delta \tilde{t}$ [s]	$\tilde{Q}_{w,I}$ [W]
V1	G1	1x1	1,0	219,7
V2	G2	1x1	0,5	337,7
V3	G3	1x1	0,3	436,9
V4	G3	2x1	0,3	436,9
V5	G3	1x5	0,3	435,9
V6	G3	2x5	0,3	435,9
V7	G4	1x1	0,3	437,2

Tabelle 5.15: Übersicht zu den durchgeführten Berechnungen, wobei der ermittelte Wärmestrom $\dot{Q}_{w,I}$ durch Γ_I über die letzten 100 s gemittelt und auf eine Tiefe von 1,3 m bezogen ist.

zum Vergleich der einzelnen Varianten ist zusätzlich der an der beheizten Wand ermittelte Wärmestrom aufgeführt. Dessen Berechnung ist unmittelbar mit den Wandfunktionen verknüpft und bedingt daher auch die starke Gitterabhängigkeit dieses Kennwertes. Damit kann die gute Übereinstimmung der Werte auf dem Gitter G3 und G4 erklärt werden. Gleichzeitig weisen die nur geringfügig abweichenden Ergebnisse bei den parallelisierten Varianten auf die erfolgreiche Gebietszerlegung hin.

Ein Vergleich zweier vertikaler Geschwindigkeitsprofile ist in Abbildung 5.22 dargestellt, der zumindest für den Mittelschnitt bei $x_2/H = 0,5$ eine sehr gute

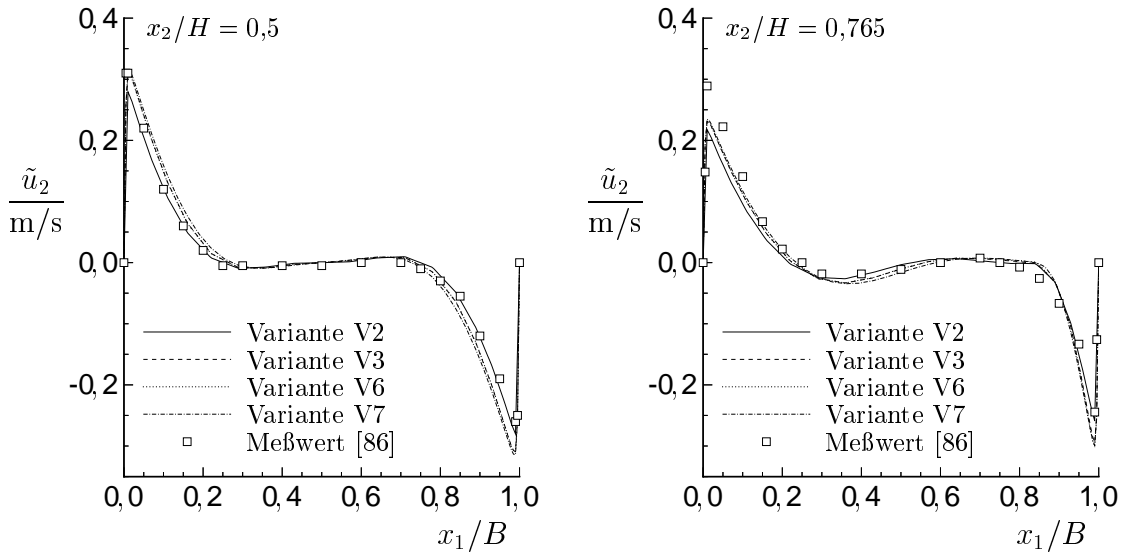


Abbildung 5.22: Gegenüberstellung der vertikalen Geschwindigkeitsprofile in zwei horizontalen Meßebenen.

Übereinstimmung mit Meßwerten aufweist. Auch der dimensionslose Wärmeübergang, der sich aus den mit der Lauflänge x_2 und der Temperatur in der Mittelebene ($x_1/B = 0,5$) gebildeten Kennzahlen

$$\text{Nu}_{x_2} := \frac{\dot{q}_{w,I} x_2}{\Delta T^* \lambda}, \quad \text{Ra}_{x_2} := \frac{\beta g \Delta T^* x_2^3}{\nu a} \quad \text{mit} \quad \Delta T^* = T_I - T(x_1/B = 0,5) \quad (5.25)$$

ergibt, wird durch die experimentell gewonnenen Ergebnisse bestätigt (siehe Abbildung 5.23). Hingegen zeigt das dimensionslose vertikale Temperaturprofil in Abbildung 5.24 einen anderen Verlauf als die Meßwerte. Während das berechnete Temperaturprofil vollkommen symmetrisch ist, sind die Meßpunkte deutlich in Richtung niedrigerer Werte verschoben. Als Ursache hierfür sind Wärmeverluste entlang der an sich adiabat definierten Begrenzungswände bei den Messungen anzusehen, auf die bereits von den Experimentatoren hingewiesen wird. Aufgrund dieser Fehlerquelle ist die Validierung der numerisch erzielten Resultate mit diesen Meßwerten ungeeignet. Zweckmäßiger erscheint die Bewertung anhand der turbulenten kinetischen Energie, für die experimentell ermittelte Daten im horizontalen Mittelschnitt vorliegen, vgl. Abbildung 5.25. So wird erkennbar, daß deren Maximalwerte für die Gitter G3 und G4 mit geeignet gewähltem minimalem Wandabstand gut wiedergegeben werden. Allerdings fallen die Grenzschichten in den numerischen Berechnungen deutlich dicker aus. Bei Betrachtung des universellen Wandabstandes y^+ an den wandnächsten Knoten in Abbildung 5.26 sind deren sehr geringe Werte auffällig. Als wesentliche Ursache hierfür ist das lediglich für isotherme Strömungen abgeleitete Wandgesetz (2.68) anzusehen, so daß nur bei sehr kleinem Wandabstand die Auftriebswirkungen von untergeordnetem Einfluß sind.

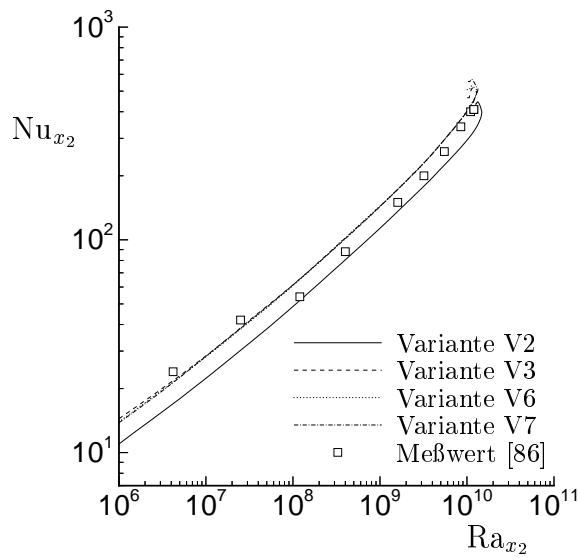


Abbildung 5.23: Wärmeübergang an Γ_I als Funktion der mit der Lauflänge x_2 gebildeten Kennzahlen.

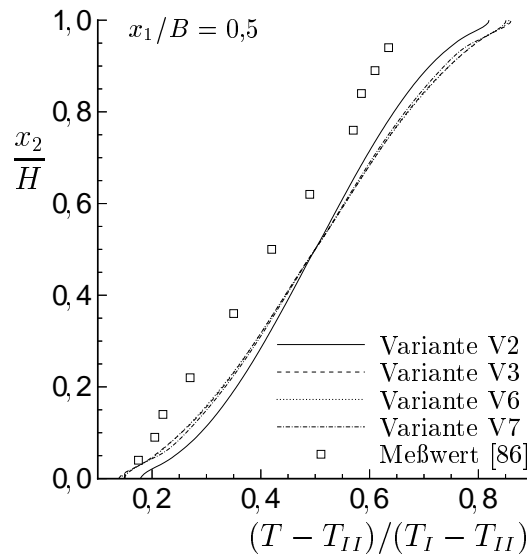


Abbildung 5.24: Vergleich der dimensionslosen vertikalen Temperaturprofile.

Der flächenspezifische Wärmestrom an der beheizten Wand weist am Boden den größten Wert auf (siehe Abbildung C.34). Mit zunehmender Erwärmung der Luft entlang der Lauflänge x_2 nimmt diese Größe dann monoton ab und erreicht an der Decke den Wert Null. Kurz nachdem das Fluid an der Decke umgelenkt wird, ist in den numerischen Berechnungen ein Ablösewirbel erkennbar (vgl. Abbildung C.35). Da die Lösung infolge der Verwendung der Boussinesq-Approximation symmetrisch ist, tritt diese Strömungsablösung ebenso am Boden nahe der gekühlten Wand auf. Auch in den zahlreichen Darstellungen in Abbildung C.36 kommt die Symmetrie deutlich zum Ausdruck, die jedoch bei den experimentellen Untersuchungen nicht beobachtet wurde. Von CHEESEWRIGHT et al. wird dieser Umstand nicht primär auf temperaturabhängige Stoffwerte, sondern auf Unzulänglichkeiten des Experiments zurückgeführt. So lagen die Temperaturen in dem geschlossenen Behältnis generell über der Umgebungstemperatur. Nicht zu vermeidende Wärmeverluste an der Decke wirkten einer stabilen Temperaturschichtung entgegen und fachten somit die Turbulenz an. Der umgekehrte Effekt trat am Boden der kalten Wand auf. Unvollständige Isolierung wirkte hier stabilisierend und begünstigte ein Relaminarisieren der Strömung. Da der Relaminarisierungsprozeß die Strömung stärker beeinflusst, sind die an der beheizten Wand erzielten Meßergebnisse als mit einem geringeren Fehler behaftet anzusehen und wurden somit vornehmlich zum Vergleich mit den numerischen Resultaten herangezogen.

Abschließend können die unter Verwendung des DD-Algorithmus erzielten Ergebnisse als gleichwertig gegenüber denen der sequentiellen Berechnungen angesehen werden. In Tabelle 5.16 sind die gewählten Iterationszahlen und damit erzielte

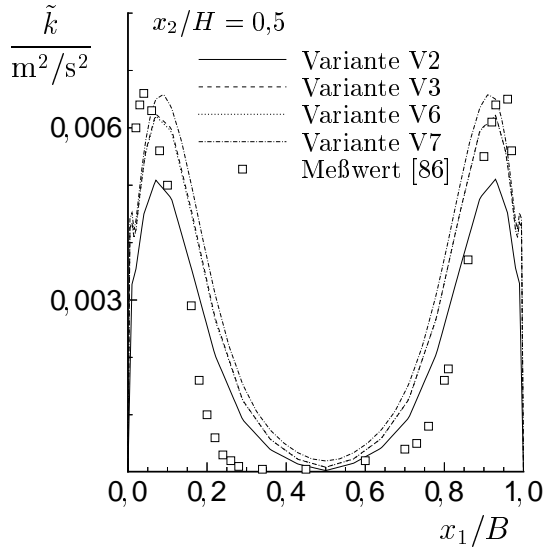
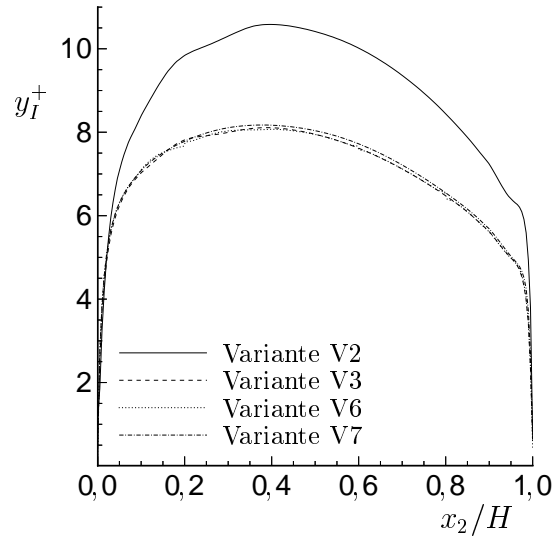


Abbildung 5.25: Horizontale Profile der turbulenten kinetischen Energie.

Abbildung 5.26: Universeller Wandabstand entlang der beheizten Wand Γ_I .

Variante	N_{DD}^u	N_{DD}^θ	N_{DD}^k	N_{DD}^ε	E_{th}	S_e	L_p
V4	2	2	2	2	0,949	1,43	0,828
V5	3	2	2	2	0,683	2,12	0,781
V6	5	3	3	3	0,657	2,53	0,615

Tabelle 5.16: Bewertungskriterien der Parallelisierung einschließlich der gewählten DD-Iterationsanzahl.

Bewertungskriterien zusammengestellt. Trotz flächenmäßig gleichgroßer Teilgebiete treten stark unterschiedliche Elementzahlen infolge der Grenzschichtverfeinerung auf. Hierin liegt das deutliche Absinken der parallelen Lastverteilung mit steigender Anzahl von Teilgebieten begründet. Insgesamt konnte trotzdem in allen Fällen noch eine Geschwindigkeitserhöhung festgestellt werden, wenngleich sie auch relativ gering ausfällt.

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein mathematisch–numerisches Verfahren zur Berechnung nichtisothermer inkompressibler Strömungen vorgestellt und anhand von Beispielen untersucht. Entsprechend den Eigenschaften der Erhaltungsgleichungen konzentriert sich die Darstellung hierbei vornehmlich auf die Behandlung allgemeiner skalarer Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen einerseits und des Systems aus Navier–Stokes- und Kontinuitätsgleichung andererseits.

Basierend auf einer Finite–Elemente Methode werden alle Größen auf linearen konformen Elementen approximiert. Der mit dieser Elementkombination von Druck und Geschwindigkeit verursachte Stabilitätsverlust, ausgedrückt durch die Verletzung der klassischen BB–Bedingung, wird durch least–squares Stabilisierung vermieden. Mit Hilfe der gleichen Stabilisierungstechnik werden lokal konvektionsdominante Probleme behandelt.

Zur zeitlichen Diskretisierung wird eine diskontinuierliche Galerkin–Methode eingesetzt. Das bei Verwendung zeitlich konstanter Ansätze entstehende DG(0)–Verfahren hat sich erwartungsgemäß in zahlreichen Anwendungsbeispielen als eine stabile und effiziente Methode zum möglichst schnellen Erreichen eines stationären Zustandes erwiesen. Für zeitgenaue Rechnungen ist eine iterative DG(1)–Methode vorgestellt worden, innerhalb derer die Teilprobleme die gleiche Dimension wie bei DG(0) aufweisen. Jedoch hängt die Stabilität dieses Verfahrens von der Wahl der zeitlichen Ansatzfunktionen ab. Wählt man sie entsprechend dem Vorschlag in [52], so ergibt sich im ersten Iterationsschritt gerade das Crank–Nicolson Verfahren. Diese Variante hat sich jedoch nur für Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen als ausreichend stabil erwiesen. Beim Übergang zur Navier–Stokes Gleichung wird eine andere Kombination von Ansatz- und Testfunktionen empfohlen, für die auch mit einer moderaten Iterationsanzahl zeitgenaue Ergebnisse erzielt werden konnten. Da die besondere Struktur des aus Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung gebildeten Gleichungssystems für kleine Zeitschritte derzeit durch die Löser keine Berücksichtigung erfährt, sind die benötigten Rechenzeiten noch nicht zu vergleichbaren Programmpaketen konkurrenzfähig. Ein Hauptaugenmerk bei der weiteren Entwicklung muß daher auf die Verwendung spezieller Vorkonditionierer gelegt werden.

Durch Anwendung einer Gebietszerlegungsmethode ist demgegenüber ein ganz anderes Lösungskonzept verfolgt worden. Ausgehend von der Zerlegung des Gesamtproblems in eine Reihe kleinerer, gekoppelter Teilaufgaben wurde ein parallelisierter Lösungsprozeß realisiert. Die hierbei zum Einsatz kommende, nichtüberlappende Variante führt die Gebietszerlegung durch eine Koppelbedingung vom Robin/Robin–Typ bereits für die kontinuierlichen Probleme ein. Somit ist einerseits der Informationsaustausch zwischen den Teilgebieten minimal und vergleichsweise einfach zu realisieren. Andererseits wird der Erfolg dieses Konzeptes maßgeblich durch die Anzahl der notwendigen Iterationen über die Teilgebiete bestimmt, die letztendlich

ein Ausdruck der Güte der Übertragungsfunktion sind. Die numerische Untersuchung der den DD-Algorithmus bestimmenden Parameter anhand spezieller Bewertungskriterien stellt damit einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit dar. Bei deren geeigneter Wahl ist für alle Anwendungsbeispiele ein Geschwindigkeitszuwachs bei der Parallelisierung feststellbar gewesen. Allerdings konnte keine allgemeingültige Funktion, die die Parameterwahl ersetzen könnte, angegeben werden. Insbesondere bereitet der Informationstransport entlang parallel angeströmter Interfacerränder in konvektionsdominanten Strömungen noch Probleme. Der Übergang zu einem neuerdings vorgeschlagenen zweistufigen Dirchlet/Robin-Algorithmus [87] erscheint hier vielversprechend.

Bei der Untersuchung der Übertragungsfunktionen für die Navier-Stokes Gleichung konnte gezeigt werden, daß die vom Geschwindigkeitsfeld getrennte Übermittlung der Druckinformation Vorteile aufweist. Im übrigen war nur mit dieser Variante die gebietszerlegte Berechnung einer instationären Zylinderumströmung möglich. Mit einer daraus abgeleiteten geringfügigen Modifikation des DD-Algorithmus gelang es auch, periodische Randbedingungen mit Drucksprung erfolgreich zu realisieren.

Für die Berechnung turbulenter Strömungen kam das Standard- k - ε -Turbulenzmodell mit neuartigen Wandfunktionen zum Einsatz. Dieses Modell wurde erfolgreich im FEM-Kontext auf unstrukturierten Gittern realisiert und dessen Funktionstüchtigkeit in Verbindung mit der Gebietszerlegung an mehreren Beispielen nachgewiesen. Allerdings ist die Umsetzung noch als verbesserungswürdig zu bezeichnen. Dies betrifft in besonderem Maße die derzeitige Behandlung negativer k - bzw. ε -Werte. Hier verspricht der Umstieg auf eine shock-capturing Technik zur Vermeidung von Unterschwingungen an Grenzschichten einen deutlichen Stabilitätsgewinn. Zu dem gleichen Zweck wäre eine engere Kopplung der Turbulenzgleichungen, insbesondere bei Verwendung großer Zeitschrittweiten, wünschenswert.

Das vorgestellte numerische Verfahren ist innerhalb des Programmpakets ParallelNS verwirklicht, an dessen bisheriger Entwicklung der Autor wesentlich beteiligt war. Infolge des gewählten DD-Zugangs ist die erforderliche Kommunikationsbandbreite vergleichsweise gering. Als Plattform eignen sich somit vornehmlich weit verbreitete UNIX-basierte Workstation- bzw. PC-Cluster. Die mit diesem Konzept erzielbare parallele Effizienz fällt moderat aus, wobei die Bewertung der Gleichwertigkeit der auf sequentiellem und parallelem Wege erhaltenen Lösung noch einen Schwachpunkt darstellt.

An zahlreichen Beispielen, ausgehend von eher akademischen Anwendungen für eine skalare Konvektions-Diffusionsgleichung bis hin zu einer nichtisothermen turbulenten Strömung, wurden ausgewählte Aspekte des numerischen Verfahrens untersucht. Zur Bewertung der Ergebnisse wurde stets der Vergleich zu analytischen Lösungen, zu den Ergebnissen vergleichbarer Programme bzw. zu Meßwerten gesucht. Insgesamt konnten so Stärken und Schwächen des vorgestellten Konzeptes aufgezeigt und der erfolgreiche Einsatz des daraus hervorgegangenen Programmes ParallelNS an praktischen, geometrisch anspruchsvollen Anwendungen unter Beweis gestellt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Boussinesq, J.: Manière dont y varie le poids de l'unité de volume fluide. In: *Théorie analytique de la chaleur*, **2** (1903), S. 172–176
- [2] Brooks, A.N.; Hughes, T.J.R.: Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **32** (1982), S. 199–259
- [3] Johnson, C.; Nävert, U.; Pitkäranta, J.: Finite element methods for linear hyperbolic problems. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **45** (1984), S. 285–312
- [4] Hughes, T.J.R.; Franca, L.P.; Mallet, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time–dependent multidimensional advective–diffusive systems. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **63** (1987), S. 97–112
- [5] Hansbo, P.; Szepessy, A.: A velocity–pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **84** (1990), S. 175–192
- [6] Hughes, T.J.R.; Franca, L.P.; Balestra, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška–Brezzi condition: A stable Petrov–Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal–order interpolations. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **59** (1986), S. 85–99
- [7] Hughes, T.J.R.; Franca, L.P.; Hulbert, G.M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least–squares method for advective–diffusive equations. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **73** (1989), S. 173–189
- [8] Tezduyar, T.E.; Behr, M.; Liou, J.: A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces — The deforming–spatial–domain/space–time procedure. I: The concept and the preliminary numerical tests. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **94** (1992), S. 339–351
- [9] Pironneau, O.; Liou, J.; Tezduyar, T.E.: Characteristic Galerkin and Galerkin/least–squares space–time formulations for the advection–diffusion equation with time–dependent domains. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **100** (1992), S. 117–141

- [10] Tezduyar, T.E.; Behr, M.; Mittal, S.; Johnson, A.A.: Computation of unsteady incompressible flows with the stabilized finite element methods: Space–time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*, **246** (1992), S. 7–24
- [11] Behr, M.; Tezduyar, T.E.: *Finite element solution strategies for large–scale flow simulations*. Preprint 92-140, Army High-Performance Computing Research Center, University of Minnesota, Minneapolis, 1992
- [12] Lube, G.; Auge, A.: Galerkin/least–squares approximations for incompressible flow problems. In: Vos, J.B.; Rizzi, A.; Ruyhming, I.L. (Hrsg.): *Proceedings of the Ninth GAMM–Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Notes Numer. Fluid Mech.*, **35** (1992), S. 289–298
- [13] Lube, G.; Auge, A.: Regularized mixed finite element approximations of non–isothermal incompressible flow problems. In: *Z. angew. Math. Mech.*, **73** (1993), Nr. 7/8, T 908–T 911
- [14] Auge, A.: *Numerische Untersuchung einer Galerkin/least–squares–Finite–Element–Methode zur Simulation inkompressibler Strömungen*. Dissertation, TU Dresden, 1994
- [15] Johnson, C.: *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, 3. Aufl., 1987
- [16] Großmann, C.; Roos, H.-G.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, 1992
- [17] Rannacher, R.: Numerical analysis of nonstationary fluid flow. In: *Applications of Mathematics and Industry and Technology*, S. 34–53, 1989
- [18] Rannacher, R.: On Chorin’s projection method for the incompressible Navier–Stokes equations. In: *Theory and Numerical Methods*, Springer–Verlag, 1992
- [19] Müller–Urbaniak, S.: *Eine Analyse des Zwischenschritt– Θ –Verfahrens zur Lösung der instationären Navier–Stokes–Gleichungen*. Dissertation, Universität Heidelberg, 1993
- [20] Müller, S.; Prohl, A.; Rannacher, R.; Turek, S.: Implicit time–discretization of the nonstationary incompressible Navier–Stokes equations. In: *Proceedings of the 10th GAMM seminar: Fast solvers for Flow problems*, Kiel, 1994
- [21] Launder, B.E.; Spalding, D.B.: *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, 1972
- [22] Neitzke, K.-P.: *Experimentelle Untersuchung und numerische Modellierung von wandnahen thermischen Auftriebsströmungen*. Dissertation, TU Dresden, 1999

- [23] Mohammadi, B.; Pironneau, O.: *Analysis of the k-epsilon turbulence model*. John Wiley & Sons/Masson, 1994
- [24] Smith, B.F.; Bjørstad, P.E.; Gropp, W.D.: *Domain decomposition, parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press, 1996
- [25] Lions, P.L.: On the Schwarz alternating method. III: A variant for nonoverlapping subdomains. In: Chan, T.F.; Glowinski, R.; Périaux, J.; Widlund, O. (Hrsg.): *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, SIAM, 1990
- [26] Gastaldi, F.; Gastaldi, L.; Quarteroni, A.: Adaptive domain decomposition methods for advection dominated equations. In: *East-West J. Numer. Math.*, **4** (1996), Nr. 3, S. 165–206
- [27] Auge, A.; Kapurkin, A.; Lube, G.; Otto, F.-C.: A note on domain decomposition of singularly perturbed elliptic problems. In: Bjørstad, P.E. et al. (Hrsg.): *Proceedings of the Ninth International Conference on Domain Decomposition Methods*, S. 163–170, John Wiley & Sons, 1998
- [28] Lube, G.; Otto, F.-C.; Müller, H.: A non-overlapping domain decomposition method for parabolic initial-boundary value problems. In: *Appl. Numer. Math.*, **28** (1998), S. 359–369
- [29] Otto, F.-C.; Lube, G.: A non-overlapping domain decomposition method for the Oseen equations. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **8** (1998), Nr. 6, S. 1091–1117
- [30] Achdou, Y.; Le Tallec, P.; Valentin, F.; Pironneau, O.: Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **151** (1998), S. 215–232
- [31] Otto, F.-C.: *A Non-overlapping Domain Decomposition Method for Elliptic Problems*. Dissertation, Universität Göttingen, 1999
- [32] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, 1971
- [33] Gersten, K.; Herwig, H.: *Strömungsmechanik*. Vieweg Verlag, 1992
- [34] Truckenbrodt, E.: *Fluidmechanik*. Springer-Verlag, 1989
- [35] Skalický, T.: *Physikalische Plausibilität numerischer Berechnungen von inkompressiblen, reibungsbehafteten Strömungen: Bewertungskriterien und praktische Bedeutung*. Dissertation, TU Dresden, 1996
- [36] Gray, D.; Giorgini, A.: The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. In: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19** (1976), S. 545–551

- [37] Zhong, Z.Y; Yang, K.T.; Lloyd, J.R.: Variable property effects in laminar natural convection in a square enclosure. In: *Journal of Heat Transfer*, **107** (1985), S. 133–138
- [38] Heiss, A.: *Numerische und experimentelle Untersuchungen der laminaren und turbulenten Konvektion in einem geschlossenen Behälter*. Dissertation, TU München, 1987
- [39] Tennekes, H.; Lumley, J.L.: *A first course in turbulence*. MIT Press, 1976
- [40] Rotta, J.C.: *Turbulente Strömungen*. B.G. Teubner Stuttgart, 1972
- [41] Vogl, N.A.: *Numerische Simulation von auftriebsbeeinflussten Raumluftströmungen*. Dissertation, RWTH Aachen, 1997
- [42] Ince, N.Z.; Launder, B.E.: On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures. In: *Int. J. Heat Fluid Flow*, **10** (1989), S. 110–117
- [43] Rodi, W.: Turbulence models and their application in hydraulics. In: Balkema, A.A. (Hrsg.): *Monograph of International Association for Hydraulic Research*. Rotterdam, 3. Aufl., 1993
- [44] Cardot, B.; Coron, F.; Mohammadi, B.; Pironneau, O.: Simulation of turbulence with the k - ε model. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **87** (1991), S. 103–116
- [45] Launder, B.E.: On the modelling of turbulent industrial flows. In: Hirsch, Ch.; Periaux, J.; Onate, E. (Hrsg.): *Computational Methods in Applied Sciences*, S. 91–102, Elsevier, 1992
- [46] Heywood, J.G.; Rannacher, R.; Turek, S.: Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier–Stokes equations. In: *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, **22** (1996), S. 325–352
- [47] Barenblatt, G.I.; Chorin, A.J.: New perspectives in turbulence: Scaling laws, asymptotics, and intermittency. In: *SIAM Review*, **40** (1998), S. 265–291
- [48] Yuan, X. et al.: New wall functions for the numerical simulation of air flow pattern in rooms. In: *Proceedings ROOMVENT '92*, Aalborg, 1992
- [49] Albring, W.: *Elementarvorgänge fluidier Wirbelbewegungen*. Akademie-Verlag Berlin, 1981
- [50] Mohammadi, B.; Pironneau, O.; Valentin F.: Rough boundaries and wall laws. In: *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, **27** (1998), S. 169–177

- [51] Mohammadi, B.; Pironneau, O.: Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and k - ε model. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **148** (1997), S. 393–405
- [52] Shakib, F.; Hughes, T.J.R.; Johan, Z.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. The compressible Euler and Navier–Stokes equations. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **89** (1991), S. 141–219
- [53] Ohloff, A.: *Numerische Untersuchungen zum Verhalten freier Konvektionsströmungen*. Diplomarbeit, TU Magdeburg, 1992
- [54] Auge, A.; Lube, G.; Otto, F.-C.: A non-overlapping domain decomposition method with adaptive interface conditions for elliptic problems. In: Hackbusch, W.; Wittum, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 13th GAMM Seminar*, Kiel, 1997
- [55] Codina, R.; Soto, O.: A finite element implementation of the k - ε model and an algebraic stress model for turbulent steady incompressible flows. In: *Computational Fluid Dynamics '96*, S. 71–77, John Wiley & Sons, 1996
- [56] Habashi, W.G. et al.: Large-scale computational fluid dynamics by the finite element method. In: *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, **18** (1994), S. 1083–1105
- [57] Franca, L.P.; Hughes, T.J.R.: Two classes of mixed finite element methods. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **69** (1988), S. 89–129
- [58] Harlow, F.H.; Welch, J.E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. In: *The Physics of Fluids*, **8** (1965), S. 2182–2189
- [59] Shakib, F.; Hughes, T.J.R.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **87** (1991), S. 35–58
- [60] Behr, M.A.; Franca, L.P.; Tezduyar, T.E.: *Stabilized finite element methods for the velocity–pressure–stress formulation of incompressible flows*. Preprint 92-022, Army High-Performance Computing Research Center, University of Minnesota, Minneapolis, 1992
- [61] Tezduyar, T.E.; Shih, R.; Mittal, S.; Ray, S.E.: *Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity–pressure elements*. Technical Report UMSI 90/165, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, Minneapolis, 1990
- [62] Droux, J.J.; Hughes, T.J.R.: A boundary integral modification of the Galerkin least squares formulation for the Stokes problem. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **113** (1994), S. 173–182

- [63] Pierre, R.: Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **68** (1988), S. 205–227
- [64] Codina, R.: *A finite element formulation for viscous incompressible flows*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria, Barcelona, Spain, 1. Aufl., 1993
- [65] Turek, S.: A comparative study of time stepping techniques for the incompressible Navier–Stokes equations: From fully implicit nonlinear schemes to semi–implicit projection methods. In: *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, **22** (1996), Nr. 10, S. 987–1011
- [66] Turek, S.: On discrete projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations: An algorithmical approach. In: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **143** (1997), S. 271–288
- [67] Turek, S.: *Multilevel pressure schur complement techniques for the numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations*. Dissertation, Universität Heidelberg, 1997
- [68] Müller, H.; Otto, F.-C. et al.: *Parallel Navier-Stokes User's Guide*. TU Dresden und Universität Göttingen, 1998
- [69] Lacor, C.; Eliasson, P.; Hirsch, C.; Lindblad, I.: Study of the efficiency of a parallelized multigrid/multiblock Navier–Stokes solver on different MIMD platforms. In: *2nd European CFD Conference*, Stuttgart, 1994
- [70] Schieweck, F.: *Parallele Lösung der stationären inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen*. Habilitationsschrift, Universität Magdeburg, 1997
- [71] Kuck, D.J.: *High performance computing; Challenges for future systems*. Oxford University Press, 1996
- [72] Erhard, W.: *Parallelrechnerstrukturen*. B.G. Teubner Stuttgart, 1990
- [73] Waldschmidt, K. (Hrsg.): *Parallelrechner: Architekturen–Systeme–Werkzeuge*. B.G. Teubner Stuttgart, 1995
- [74] Priesnitz, A.: *Untersuchungen iterativer Lösungsverfahren am Beispiel diskretisierter Konvektions–Diffusions–Reaktions–Gleichungen*. Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1996
- [75] Barret, R. et al.: *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. SIAM, 1994
- [76] Shakib, F.: *Finite Element Analysis of the compressible Euler and Navier–Stokes Equations*. Dissertation, Stanford University, 1988

- [77] Schäfer, M.; Turek, S.: Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. In: Hirschel, E.H. (Hrsg.): *Flow Simulations with High-Performance Computers II, Notes Numer. Fluid Mech.*, **52** (1996), S. 547–566
- [78] Rühlich, I.: *Strömungstechnische Optimierung von Regeneratoren für Gaskältemaschinen*. Dissertation, TU Dresden, 1999
- [79] Fluent Inc.: *User's Guide for Fluent, Release 5.0*. Lebanon, NH, 1998
- [80] Comte-Bellot, G.; Corrsin, S.: The use of contraction to improve the isotropy of grid generated turbulence. In: *J. Fluid Mech.*, **25** (1966), S. 657
- [81] Mohamed, M.S.; La Rue, J.C.: The decay power law in grid-generated turbulence. In: *J. Fluid Mech.*, **219** (1990), S. 195
- [82] Wilcox, D.C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 1993
- [83] Idelchik, I.E.: *Handbook of Hydraulic Resistance*. CRC Press, 3. Aufl., 1994
- [84] Schlichting, H.; Gersten K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, 1997
- [85] Reichhardt, H.: Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren. In: *Z. angew. Math. Mech.*, **31** (1951), S. 208–219
- [86] Cheesewright, R.; King, K.J.; Ziai, S.: Experimental data for the evaluation of computer codes for the prediction of two-dimensional bouyant cavity flows. In: *ASME winter annual meeting*, S. 75–81, Anaheim, 1986
- [87] Alonso, A.; Trotta, R.L.; Valli, A.: Coercive domain decomposition algorithms for advection–diffusion equations and systems. In: *Journal of Comp. and Appl. Math.*, **96** (1998), S. 51–76

A Dimensionslose Größen

Mit einem Satz von Referenzgrößen gebildet aus \tilde{x}_R , \tilde{u}_R , $\tilde{\varrho}_R$, \tilde{T}_R und $\Delta\tilde{T}_R$ erfolgt die Umrechnung dimensionsbehafteter in dimensionslose Variablen (vgl. Abschnitt 2.3). Die unmittelbar daraus abgeleiteten Größen sind

$$x := \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_R}, \quad u := \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_R}, \quad \varrho := \frac{\tilde{\varrho}_0}{\tilde{\varrho}_R} \equiv 1, \quad \vartheta := \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_R}{\Delta\tilde{T}_R}.$$

Mit diesen Definitionen ergibt sich für alle weiteren dimensionslosen Variablen:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{\tilde{a}}{\tilde{u}_R \tilde{x}_R}, & c_p &:= \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{a}} \frac{\Delta\tilde{T}_R}{\tilde{u}_R^2}, & F &:= \frac{\tilde{F}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^2 \tilde{x}_R^2}, \\ g &:= \frac{\tilde{g} \tilde{x}_R}{\tilde{u}_R^2}, & h_0 &:= \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{u}_R^2}, & \dot{H} &:= \frac{\tilde{H}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3 \tilde{x}_R^2}, \\ k &:= \frac{\tilde{k}}{\tilde{u}_R^2}, & \dot{m} &:= \frac{\tilde{m}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R \tilde{x}_R^2}, & p &:= \frac{\tilde{p}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^2}, \\ \dot{q} &:= \frac{\tilde{q}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3}, & \dot{q}^V &:= \frac{\tilde{q}^V \tilde{x}_R}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3}, & \dot{Q} &:= \frac{\tilde{Q}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3 \tilde{x}_R^2}, \\ t &:= \frac{\tilde{t} \tilde{u}_R}{\tilde{x}_R}, & \alpha &:= \frac{\tilde{\alpha} \Delta\tilde{T}_R}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3}, & \beta &:= \tilde{\beta}_0 \Delta\tilde{T}_R, \\ \varepsilon &:= \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{x}_R}{\tilde{u}_R^3}, & \lambda &:= \frac{\tilde{\lambda} \Delta\tilde{T}_R}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^3 \tilde{x}_R}, & \nu &:= \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{u}_R \tilde{x}_R}, \\ \tau &:= \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\varrho}_R \tilde{u}_R^2}. \end{aligned}$$

Die mit dem Index 0 versehenen Stoffwerte kennzeichnen deren Wert bei der Referenztemperatur \tilde{T}_R

$$\tilde{\beta}_0 = \tilde{\beta}(\tilde{T}_R), \quad \tilde{h}_0 = \tilde{h}(\tilde{T}_R), \quad \tilde{\varrho}_0 = \tilde{\varrho}(\tilde{T}_R).$$

B DG $_{N}^{\phi, \beta}$ (1)–Algorithmus

Die Verwendung der zeitlichen Ansatzfunktionen (3.43) bildet mit (3.39) den Raum $\Pi_1^{m, \beta}(V)$ (vgl. Abbildung 3.3). Für die Variationsformulierung der Konvektions–Diffusions–Reaktionsgleichung (3.26) wird $\phi, \psi \in \Pi_1^{m, \beta}(V_0^\phi)$ sowie $\mathbf{b} \in \Pi_1^{m, \beta}(L^2(\Omega)^d)$ und $f_\phi \in \Pi_1^{m, \beta}(L^2(\Omega))$ angenommen. Weiterhin ist der Diffusionsterm ϵ und Reaktionsterm c innerhalb des Intervalls I_m zeitlich konstant. Entsprechend (3.44) mit $Z = \phi, \psi, \mathbf{b}, f_\phi$ ergibt die Auswertung der zeitlichen Integration für die Quellterme

$$L_{(0)}^{\phi, \beta}(\psi) = \int_{\Omega} \left(f_{\phi, (0)}^m + \frac{f_{\phi, (1)}^m}{2} \right) \psi \, d\Omega, \quad L_{(1)}^{\phi, \beta}(\psi) = \int_{\Omega} \left(\frac{f_{\phi, (0)}^m}{2} + \frac{f_{\phi, (1)}^m}{3} \right) \psi \, d\Omega$$

und aus der Aufspaltung von A_G^ϕ in

$$\begin{aligned} B_G^\phi(\phi, \mathbf{b}; \psi) &:= \int_{\Omega} (\mathbf{b} \circ \nabla) \phi \psi \, d\Omega, \\ C_G^\phi(\phi, \psi) &:= \int_{\Omega} \epsilon \nabla \phi \circ \nabla \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} c \phi \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

werden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1, (0)}^{\phi, \beta}(\phi, \psi) &:= B_G^\phi \left(\phi, \mathbf{b}_{(0)}^m + \frac{\mathbf{b}_{(1)}^m}{2}; \psi \right) + C_G^\phi(\phi, \psi) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega, \\ \mathcal{A}_{1, (1)}^{\phi, \beta}(\phi, \psi) &:= B_G^\phi \left(\phi, \frac{\mathbf{b}_{(0)}^m}{3} + \frac{\mathbf{b}_{(1)}^m}{4}; \psi \right) + C_G^\phi \left(\frac{\phi}{3}, \psi \right) + \int_{\Omega} \frac{\phi}{2\Delta t_m} \psi \, d\Omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1, (0)}^{\phi, \beta}(\phi^m, \phi^{m-1}; \psi) &:= B_G^\phi \left(\phi^m, -\frac{\mathbf{b}_{(0)}^m}{2} - \frac{\mathbf{b}_{(1)}^m}{3}; \psi \right) + C_G^\phi \left(-\frac{\phi^m}{2}, \psi \right) + L_{(0)}^{\phi, \beta}(\psi) \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\phi^{m-1} - \phi^m}{\Delta t_m} \psi \, d\Omega, \\ \mathcal{F}_{1, (1)}^{\phi, \beta}(\phi, \psi) &:= B_G^\phi \left(\phi, -\frac{\mathbf{b}_{(0)}^m}{2} - \frac{\mathbf{b}_{(1)}^m}{3}; \psi \right) + C_G^\phi \left(-\frac{\phi}{2}, \psi \right) + L_{(1)}^{\phi, \beta}(\psi) \end{aligned}$$

definiert. Der DG $_{N}^{\phi, \beta}$ (1) Algorithmus im Zeitschritt m kann nun wie folgt beschrieben werden:

1. *Initialisiere $n = 1$ und setze $\phi_{(0)}^{m, n} = \phi^{m-1}$.*
2. *Bestimme $\phi_{(1)}^{m, n} \in V_0^\phi$ mit*

$$\mathcal{A}_{1, (1)}^{\phi, \beta}(\phi_{(1)}^{m, n}, \psi_{(1)}^m) = \mathcal{F}_{1, (1)}^{\phi, \beta}(\phi_{(0)}^{m, n}, \phi^{m-1}; \psi_{(1)}^m) \quad \forall \psi_{(1)}^m \in V_0^\phi.$$

3. Ermittle $\phi_{(0)}^{m,n+1}, \phi_{(1)}^{m,n+1} \in V_0^\phi$ solange $n < N$ aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,(0)}^{\phi,\beta}(\phi_{(0)}^{m,n+1}, \psi_{(0)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(0)}^{\phi,\beta}(\phi_{(1)}^{m,n}, \phi^{m-1}; \psi_{(0)}^m) \quad \forall \psi_{(0)}^m \in V_0^\phi, \\ \mathcal{A}_{1,(1)}^{\phi,\beta}(\phi_{(1)}^{m,n+1}, \psi_{(1)}^m) &= \mathcal{F}_{1,(1)}^{\phi,\beta}(\phi_{(0)}^{m,n+1}, \psi_{(1)}^m) \quad \forall \psi_{(1)}^m \in V_0^\phi, \\ n &\mapsto n+1. \end{aligned}$$

4. Setze $\phi^m = \phi_{(0)}^{m,N} + \phi_{(1)}^{m,N}$.

Anwendung findet dieses Schema für zeitgenaue Berechnungen, wenn mit der Bewegungsgleichung (2.44) gekoppelte Probleme vorhanden sind (siehe Abschnitt 3.2.3).

C Weitere numerische Ergebnisse

C.1 Konvektions–Diffusionsgleichung (zu 5.2)

Gitterparameter

Gitterbezeichnung	N_k	N_{el}	h
G1	289	512	$4,419 \cdot 10^{-2}$
G2	1089	2048	$2,210 \cdot 10^{-2}$
G3	4225	8192	$1,105 \cdot 10^{-2}$
G4	16641	32768	$5,524 \cdot 10^{-3}$
G5	66049	131072	$2,762 \cdot 10^{-3}$

Tabelle C.1: Parameter der quasi–strukturierten Vernetzung des Einheitsquadrates für unterschiedliche Gitterfeinheiten.

Berechnung des stationären Zustands mit DG(0)

(I) Diffusionsdominant

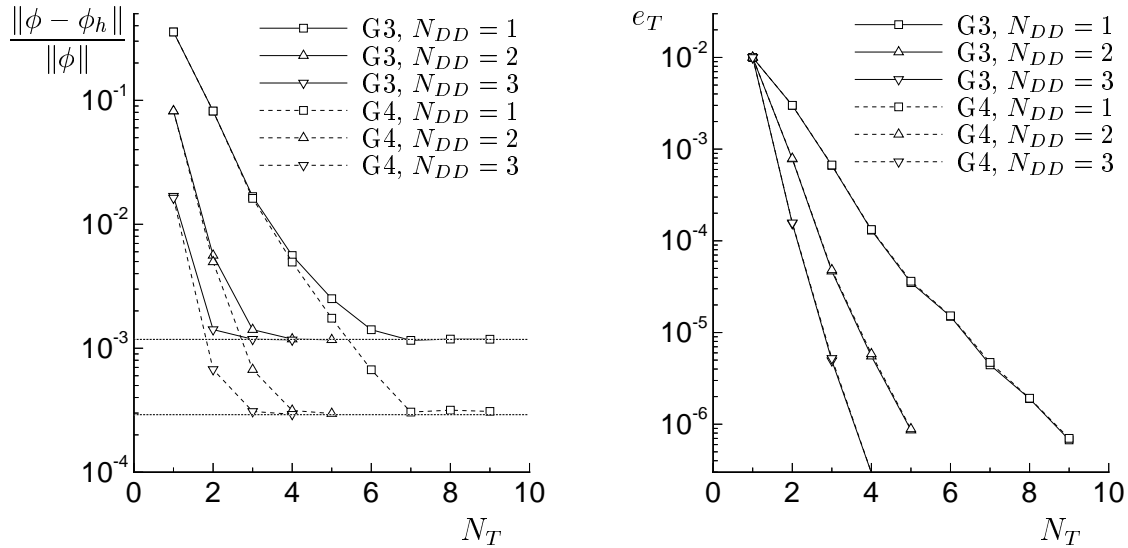


Abbildung C.1: Einfluß der Anzahl der DD–Iterationen bei Verwendung zweier unterschiedlich feiner Gitter auf die Abnahme des L^2 –Fehlers (links) und das Kriterium zum Erreichen des stationären Zustandes (rechts) bei Verwendung einer 2×2 –Zerlegung und $\gamma^\phi = 500$.

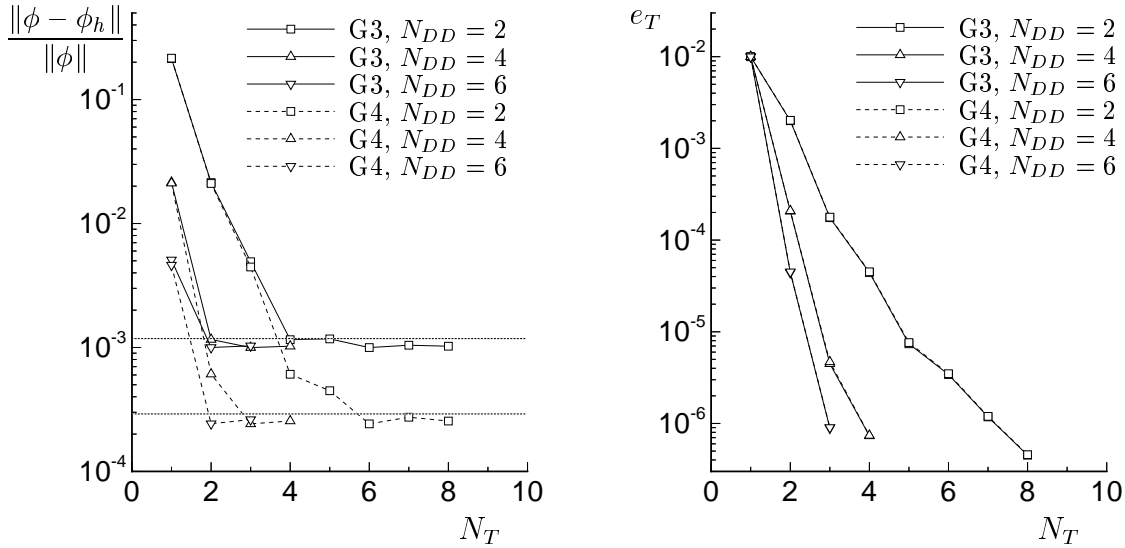


Abbildung C.2: Einfluß der Anzahl der DD-Iterationen bei Verwendung zweier unterschiedlich feiner Gitter auf die Abnahme des L^2 -Fehlers (links) und das Kriterium zum Erreichen des stationären Zustandes (rechts) bei Verwendung einer 4×4 -Zerlegung und $\gamma^\phi = 200$.

(II) Konvektionsdominant

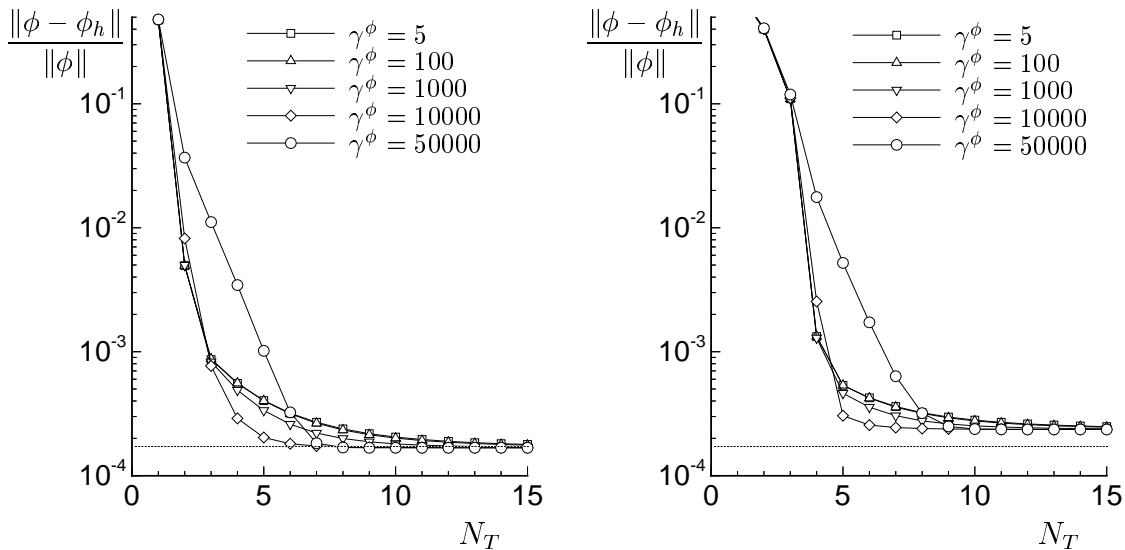


Abbildung C.3: Einfluß des DD-Parameters (links: 2×2 -Zerlegung; rechts: 4×4 -Zerlegung) für den Fall (a) mit jeweils $N_{DD} = 2$ Iterationen auf das Abklingen des L^2 -Fehlers im Verlauf der Zeitschritte für Gitter G4.

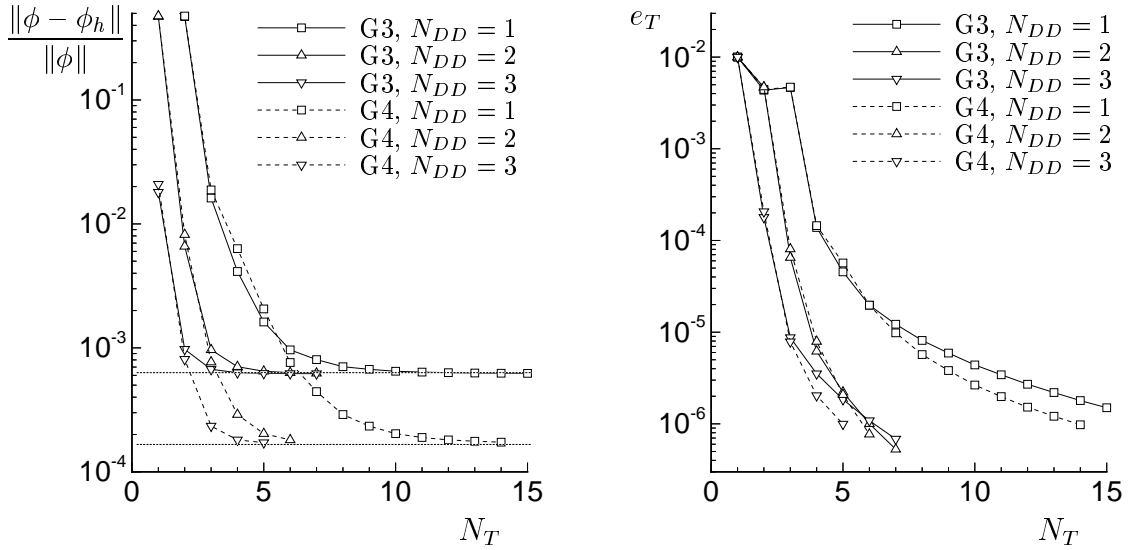


Abbildung C.4: Einfluß der Anzahl der DD-Iterationen für den Fall (a) bei Verwendung zweier unterschiedlich feiner Gitter auf die Abnahme des L^2 -Fehlers (links) und das Kriterium zum Erreichen des stationären Zustandes (rechts) bei Verwendung einer 2×2 -Zerlegung und $\gamma^\phi = 10^4$.

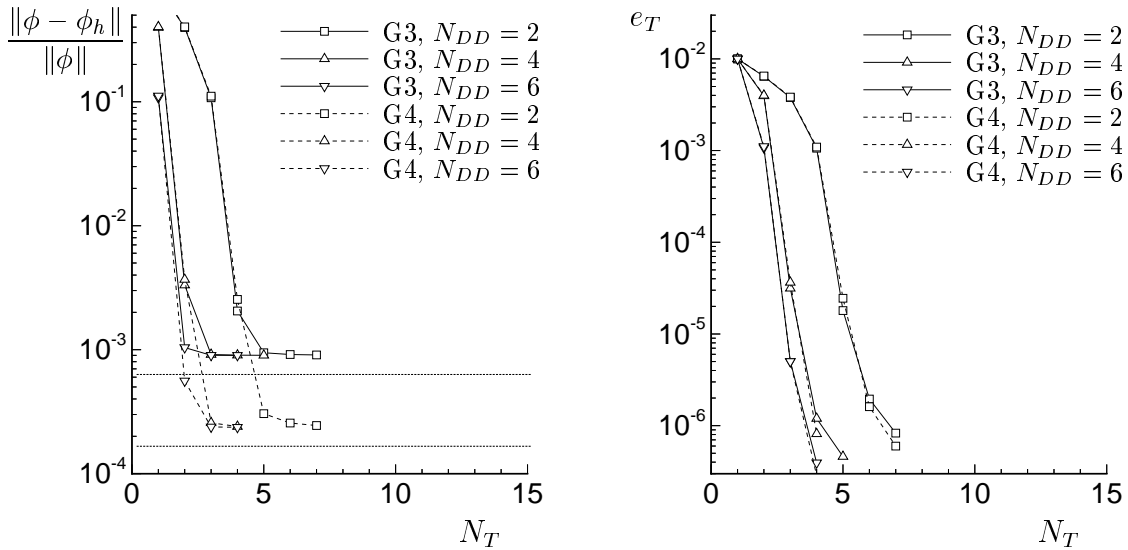


Abbildung C.5: Einfluß der Anzahl der DD-Iterationen für den Fall (a) bei Verwendung zweier unterschiedlich feiner Gitter auf die Abnahme des L^2 -Fehlers (links) und das Kriterium zum Erreichen des stationären Zustandes (rechts) bei Verwendung einer 4×4 -Zerlegung und $\gamma^\phi = 10^4$.

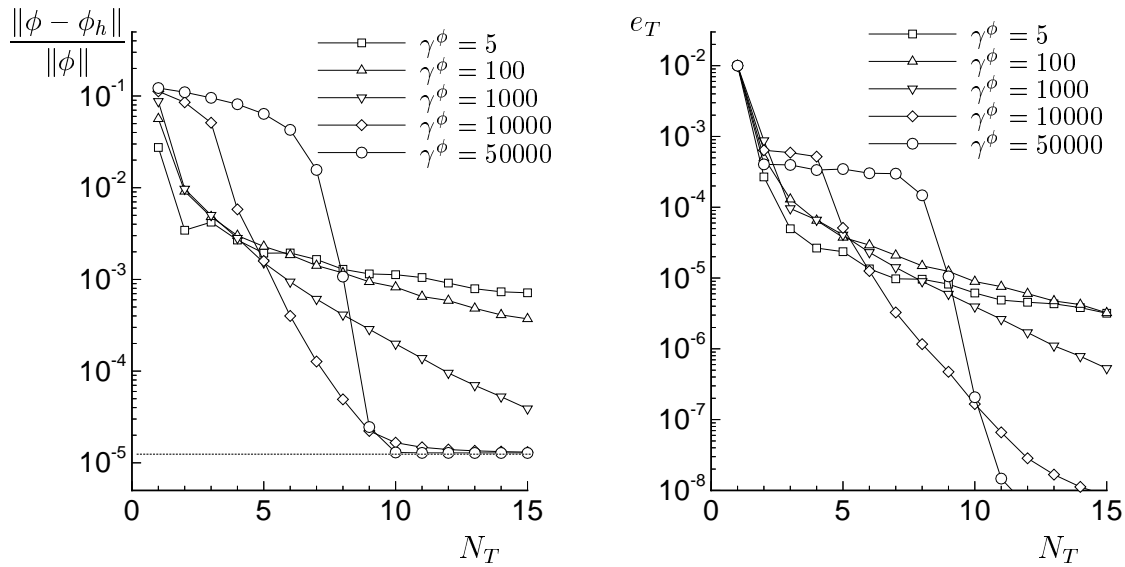


Abbildung C.6: Einfluß des DD-Parameters für den Fall (b) bei einer 4x4-Zerlegung auf Gitter G4 bezüglich des L^2 -Fehlers (links) und dem Kriterium zum Erreichen des stationären Zustandes (rechts) bei $N_{DD} = 4$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Zeitschritte.

Zeitgenaue Rechnung mit DG(1)

(I) Diffusionsdominant

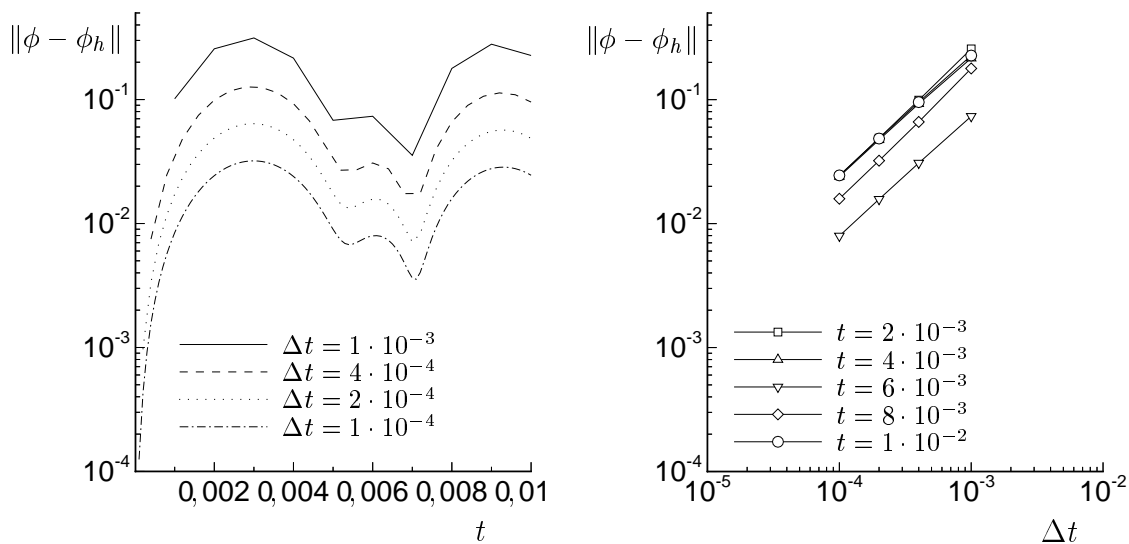


Abbildung C.7: L^2 -Fehler der mit DG(0) auf dem Gitter G4 sequentiell ermittelten Lösung (links: zeitlicher Verlauf, rechts: Abhängigkeit von der Zeitschrittweite).

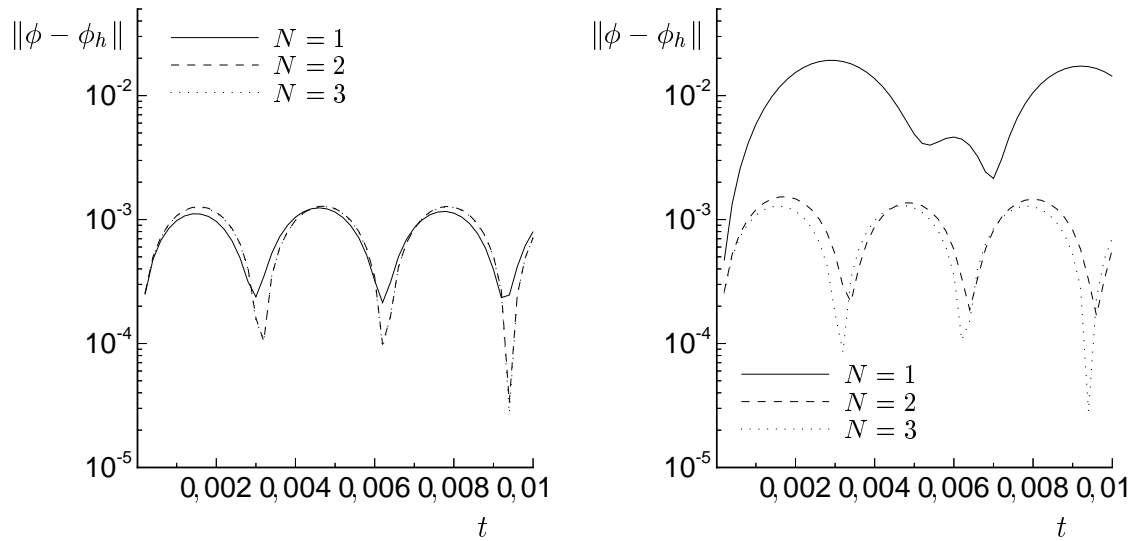


Abbildung C.8: Vergleich des L^2 -Fehlers für die $DG_N^{\phi,\alpha}(1)$ - (links) und $DG_N^{\phi,\beta}(1)$ -Methode (rechts) mit $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ bei einer unterschiedlichen Anzahl von Iterationen N ohne Parallelisierung auf dem Gitter G4.

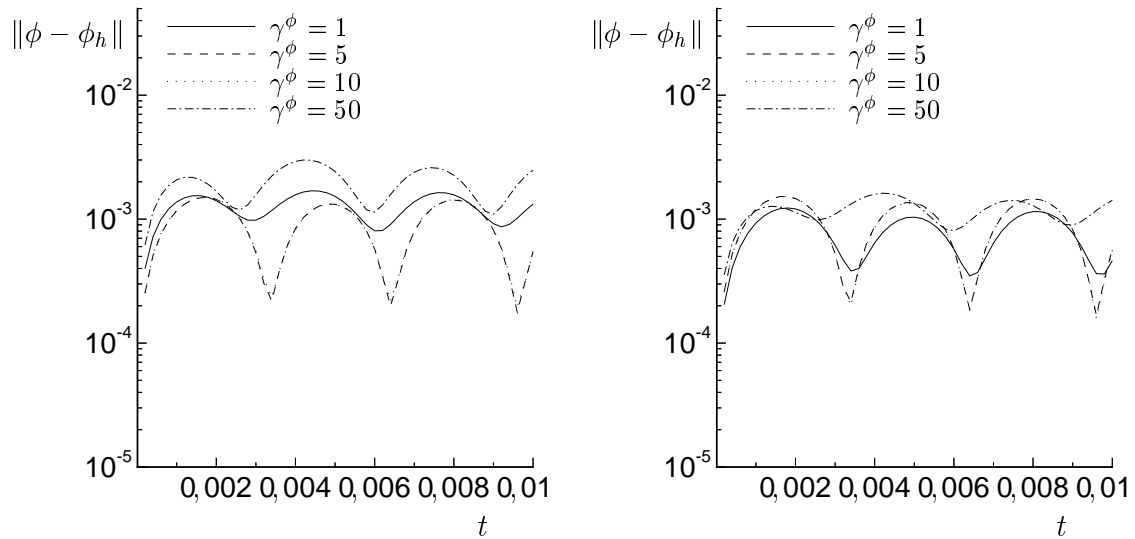


Abbildung C.9: Einfluß des DD-Parameters (links: 2x2-Zerlegung, $N_{DD} = 3$; rechts: 4x4-Zerlegung, $N_{DD} = 5$) auf das Abklingen des L^2 -Fehlers im Verlauf der Zeitschritte bei der $DG_2^{\phi,\beta}(1)$ -Methode mit $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ für Gitter G4.

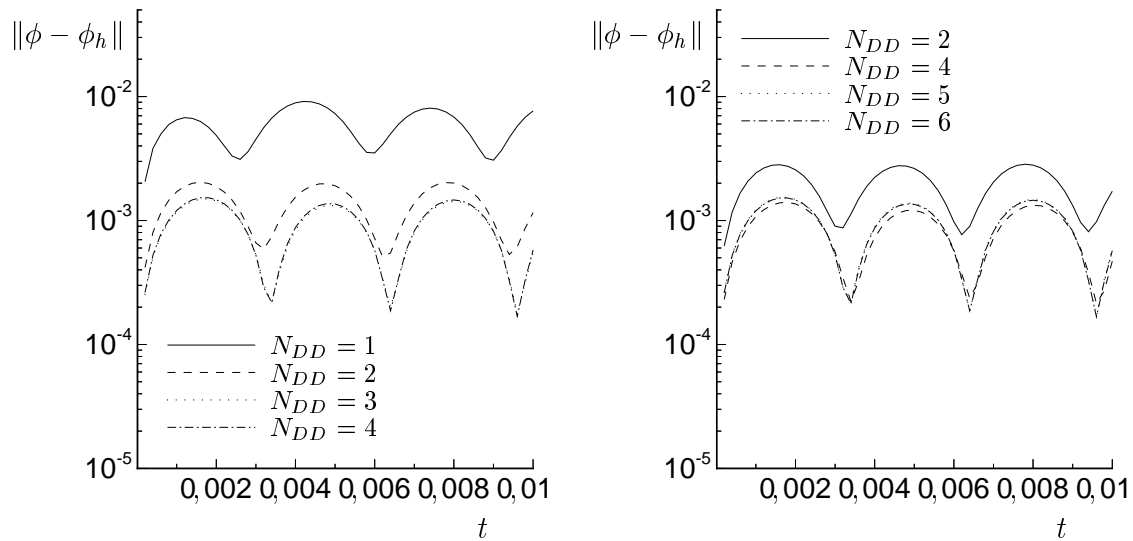


Abbildung C.10: Abhängigkeit des L^2 -Fehlers von der Anzahl der DD-Iterationen für eine 2x2-Zerlegung (links) bzw. 4x4-Zerlegung (rechts) bei Verwendung der $DG_2^{\phi, \beta}(1)$ -Methode mit $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ und $\gamma^\phi = 5$ auf dem Gitter G_4 .

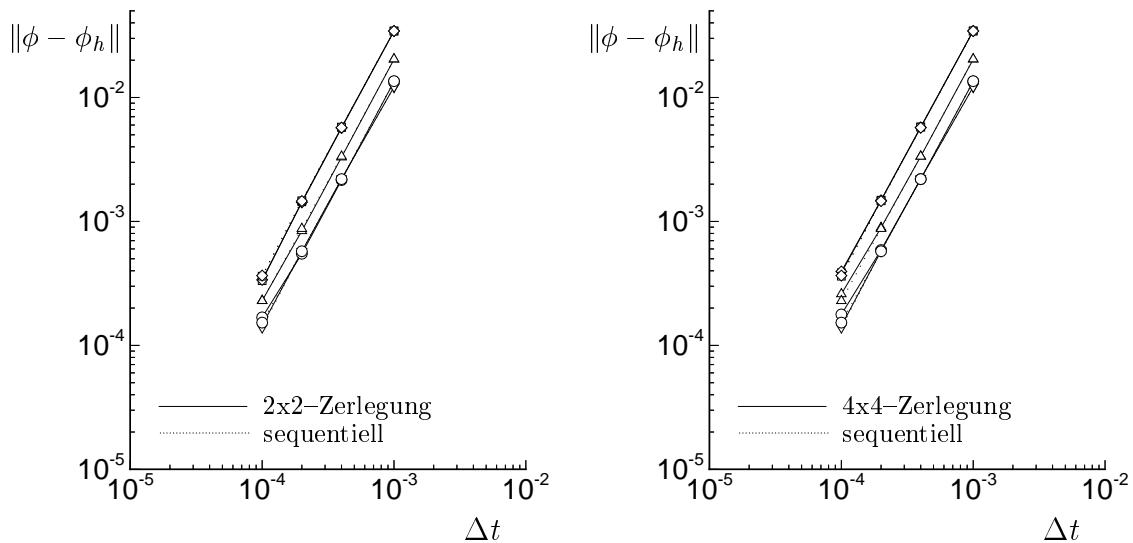


Abbildung C.11: Aus Abbildung 5.8 entnommene zeitliche Abhängigkeit des L^2 -Fehlers von der Zeitschrittweite zu unterschiedlichen Zeitpunkten (\square : $2 \cdot 10^{-3}$, \triangle : $4 \cdot 10^{-3}$, ∇ : $6 \cdot 10^{-3}$, \diamond : $8 \cdot 10^{-3}$, \circ : $1 \cdot 10^{-2}$) mit und ohne Parallelisierung.

(II) Konvektionsdominant

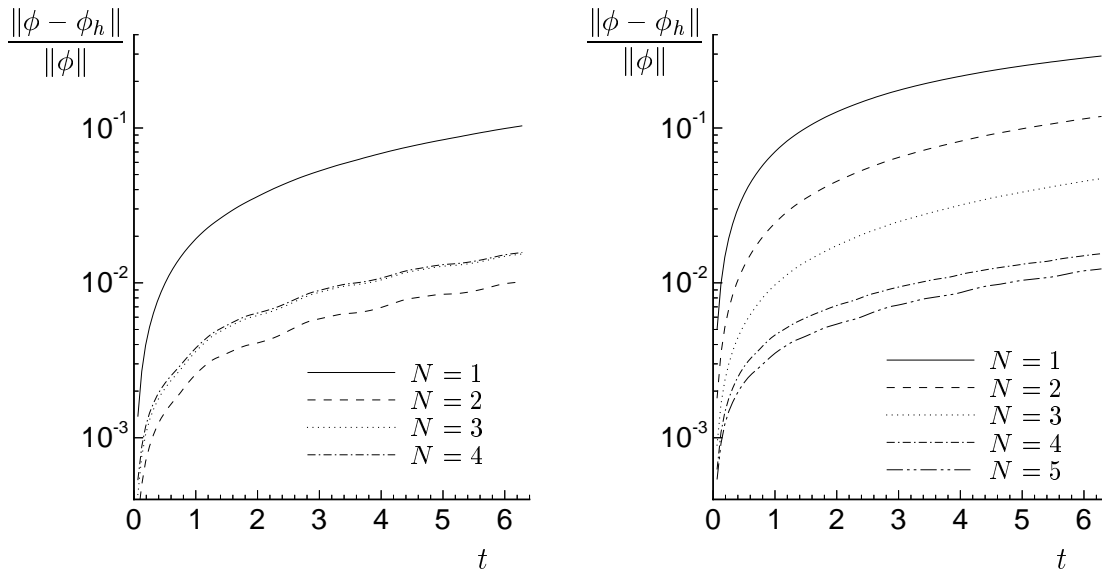


Abbildung C.12: Vergleich des L^2 -Fehlers für die DG $_N^{\phi,\alpha}(1)$ - (links) und DG $_N^{\phi,\beta}(1)$ -Methode (rechts) bei einer unterschiedlichen Anzahl von Iterationen N und der Zeitschrittweite $\Delta t = \frac{2\pi}{100}$ ohne Parallelisierung auf dem Gitter G4.

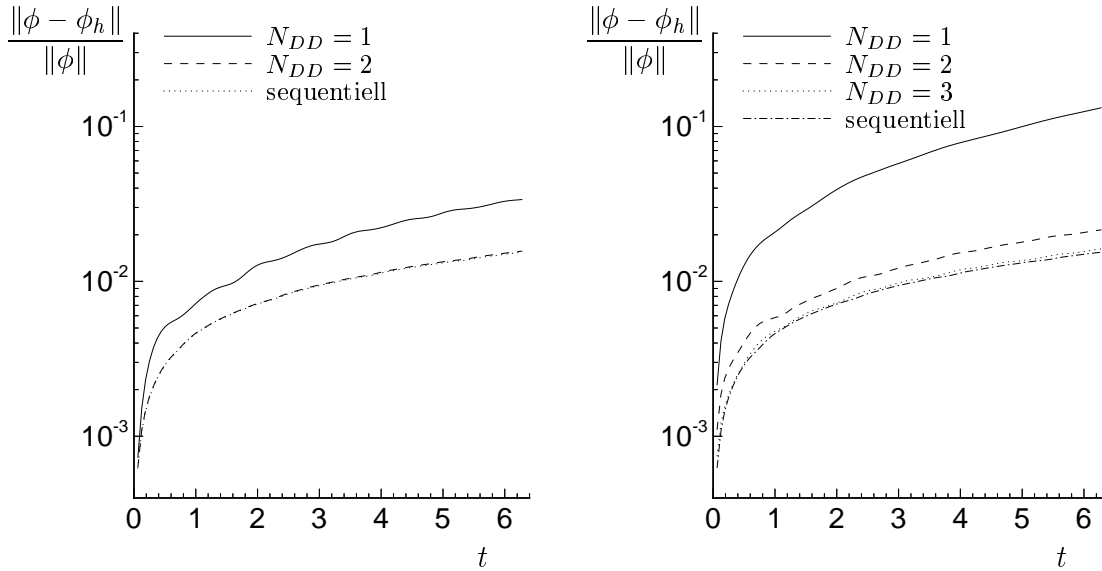


Abbildung C.13: Abhängigkeit des L^2 -Fehlers von der Anzahl der DD-Iterationen für eine 2x2-Zerlegung (links) bzw. 4x4-Zerlegung (rechts) bei Verwendung der DG $_4^{\phi,\beta}(1)$ -Methode mit der Zeitschrittweite $\Delta t = \frac{2\pi}{100}$ und $\gamma^\phi = 5$ auf dem Gitter G4.

C.2 Zylinderumströmung (zu 5.3.1)

Vernetzung und Gebietszerlegung in 2D

Gitterbezeichnung	N_k	N_{el}	\bar{h}	h_{max}/h_{min}
G1	4.087	7.814	0,0107	3,87
G2	15.988	31.256	0,00535	3,87
G3	27.981	55.002	0,00403	4,71

Tabelle C.2: Gitterparameter der verwendeten Netze.

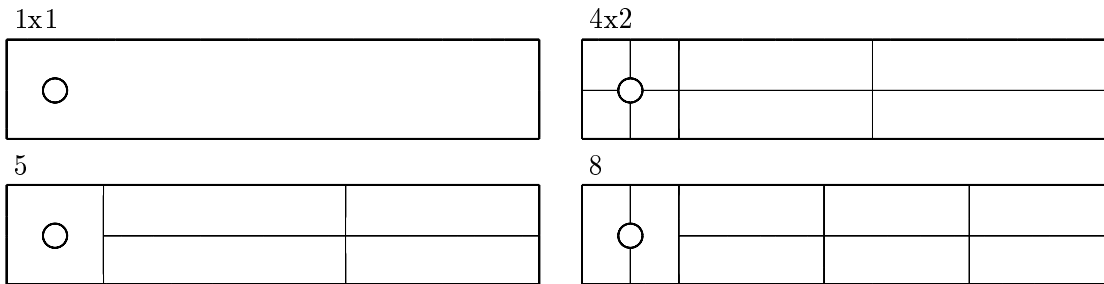
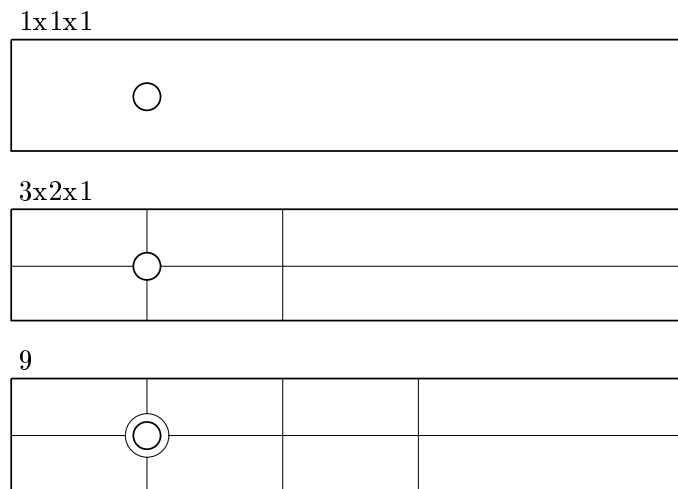


Abbildung C.14: Verwendete Zerlegungen des Berechnungsgebietes.

Vernetzung und Gebietszerlegung in 3D

Gitterbezeichnung	N_k	N_{el}	\bar{h}	h_{max}/h_{min}
G1	72.626	384.072	0,0103	10,9
G2	84.002	451.503	0,00974	12,8
G3	97.499	520.977	0,00928	16,3

Tabelle C.3: Gitterparameter der verwendeten Netze.

Abbildung C.15: Verwendete Zerlegungen des Berechnungsgebietes in der x_1, x_2 -Ebene.**Referenzfall '2D-1'**

Variante	Gitter	Zerlegung	N_T
V1	G1	1x1	9
V2	G2	1x1	14
V3	G3	1x1	16
V4	G3	4x2	15
V5	G3	4x2	14
V6	G3	5	13
V7	G3	5	11
V8	G3	8	13
V9	G3	8	14

Tabelle C.4: Übersicht der durchgeführten Berechnungen.

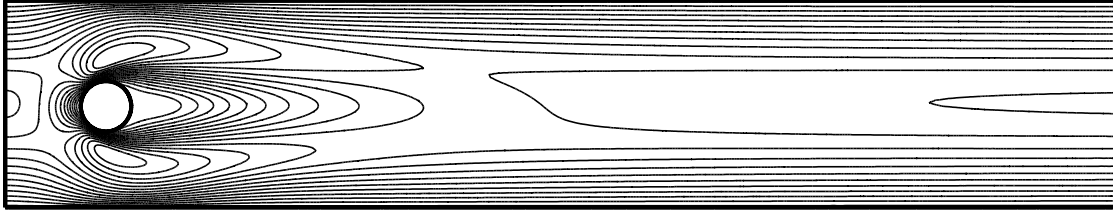
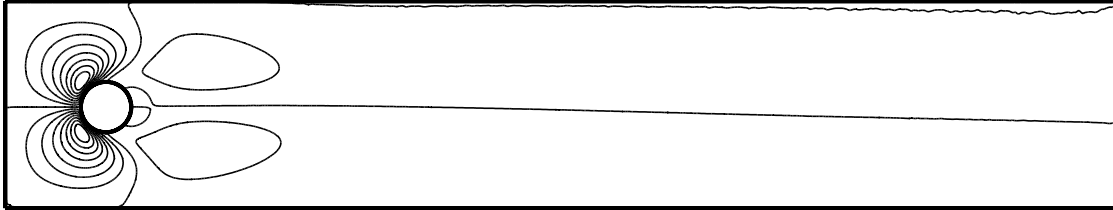
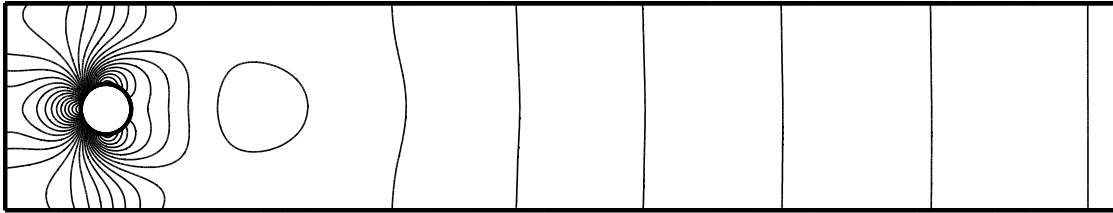
u_1 -Isolinien u_2 -Isolinien p -Isolinien

Abbildung C.16: Isolinien des Geschwindigkeits- und Druckfeldes.

Referenzfall '2D-2'

Variante	Gitter	Zerlegung	$\Delta\tilde{t}/s$
V1	G1	1x1	0,005
V2	G2	1x1	0,005
V3	G3	1x1	0,02
V4	G3	1x1	0,01
V5	G3	1x1	0,005
V6	G3	5	0,01
V7	G3	8	0,01
V8	G3	8	0,01

Tabelle C.5: Übersicht der durchgeführten Berechnungen.

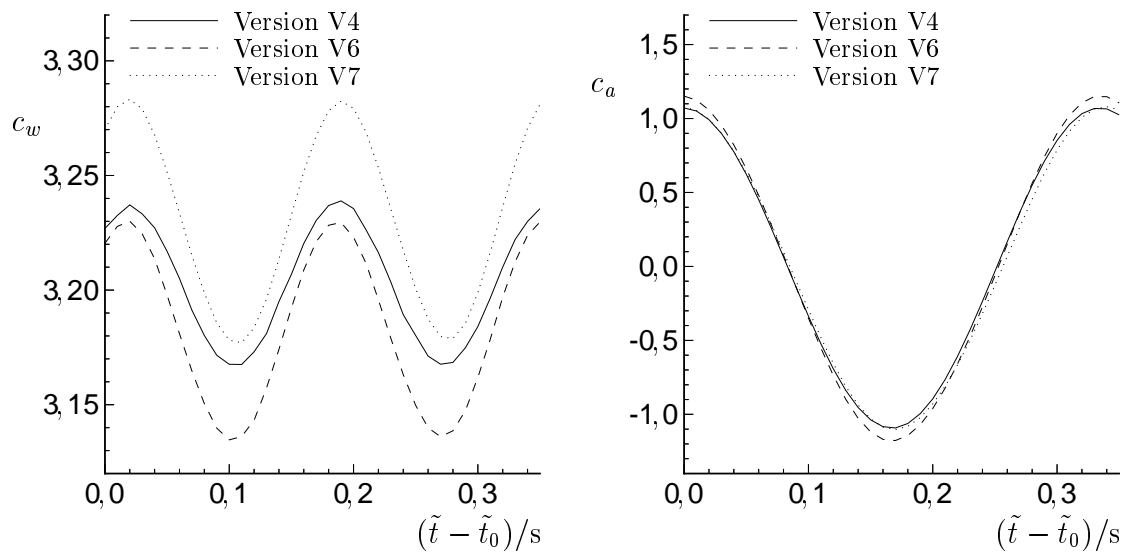


Abbildung C.17: Zeitlicher Verlauf des Widerstands- und Auftriebsbeiwertes.

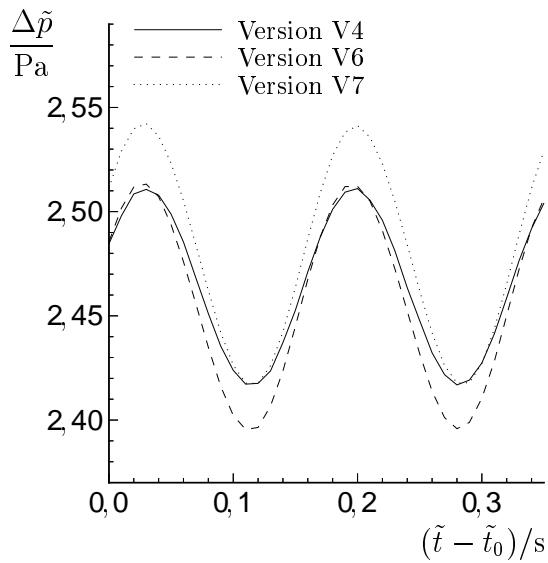


Abbildung C.18: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz $\Delta\tilde{p}$.

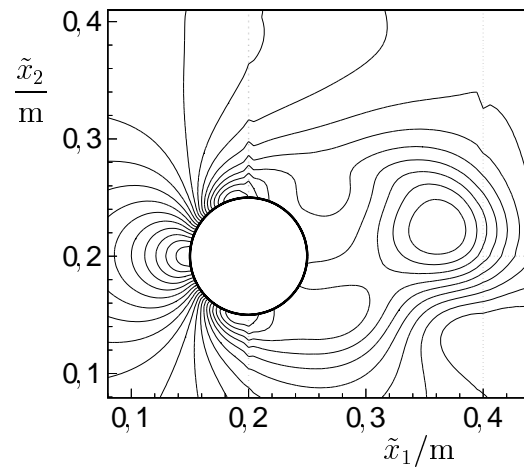


Abbildung C.19: Isobaren der gebietszerlegten Berechnung Variante V8 (Teilgebietsränder gepunktet dargestellt).

Referenzfall '3D-1Z'

Variante	Gitter	Zerlegung	N_T
V1	G1	1x1x1	9
V2	G2	1x1x1	10
V3	G3	1x1x1	10
V4	G3	3x2x1	10
V5	G3	3x2x1	10
V6	G3	9	14
V7	G3	9	13

Tabelle C.6: Übersicht der durchgeführten Berechnungen.

C.3 Periodische Randbedingung (zu 5.3.2)

Vernetzung und Gebietszerlegung

Gitterbezeichnung	N_k	N_{el}	Elementseitenverhältnis
G1	1.790	3.248	1,00–2,22
G2	7.643	14.602	1,00–2,46
G3	17.109	33.182	1,00–2,37
G4	30.929	60.470	1,00–2,53

Tabelle C.7: Daten der Vernetzung für unterschiedliche Gitterfeinheiten.

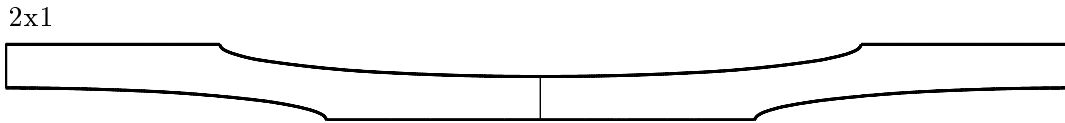


Abbildung C.20: Bei den Berechnungen verwendete Gebietszerlegung.

Weitere Resultate

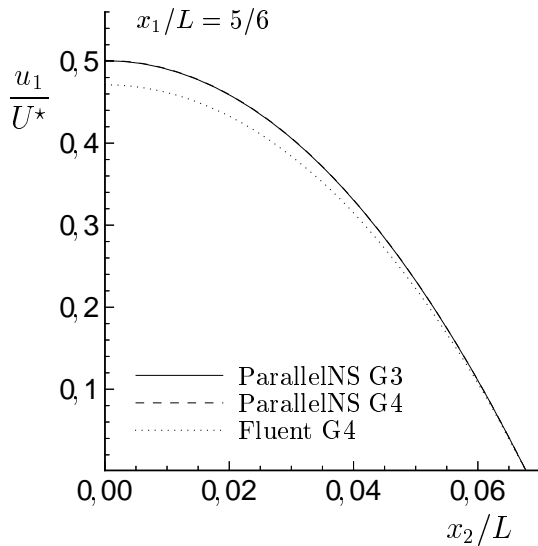


Abbildung C.21: Geschwindigkeitsprofil auf der Trennlinie der Teilgebiete.

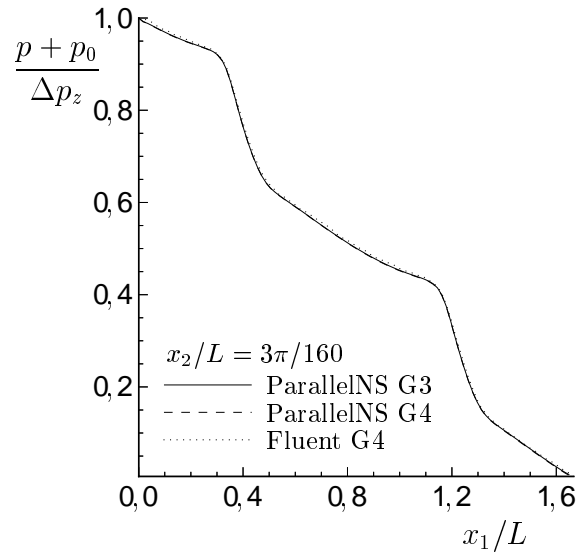
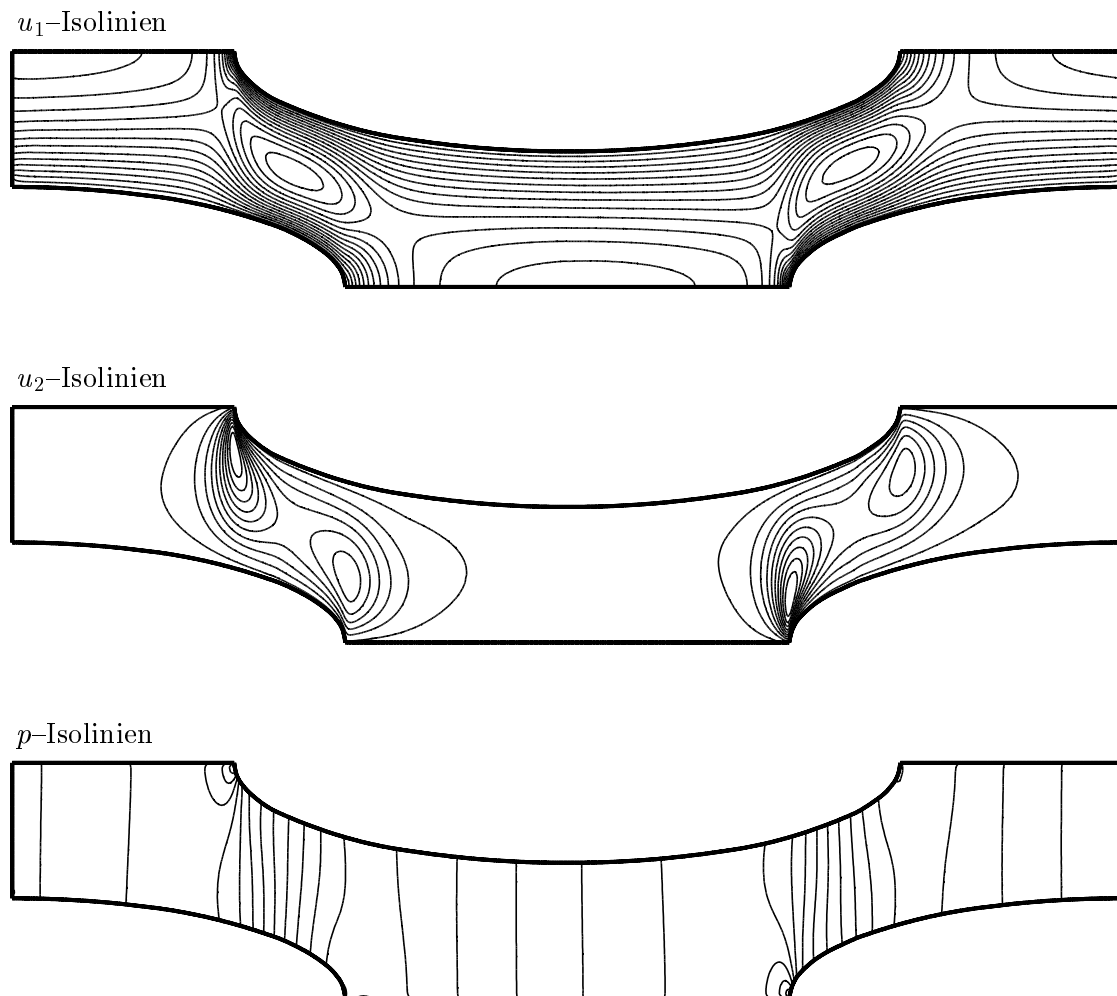


Abbildung C.22: Druckverlauf im horizontalen Mittelschnitt.

Zerlegung	γ_1^u	γ_2^u	γ^p	N_{DD}^u
2x1	5	5000	10^6	5

Tabelle C.8: Verwendete Parameter des DD-Algorithmus.

Abbildung C.23: Isolinien des Geschwindigkeits- und Druckfeldes (Ausdehnung in x_1 -Richtung dreifach gestaucht).

C.4 Kanaleinlaufströmung (zu 5.4.2)

Vernetzung und Gebietszerlegung

Gitterbezeichnung	L/H	N_k	N_{el}	Elementseitenverhältnis
G1	40	2425	4608	10,0
G2	40	3627	6960	10,3
G3	40	4795	9248	10,0
G4	40	6267	12240	1,9–22,1
G5	8	1855	3536	5,2

Tabelle C.9: Daten der Vernetzung zweier Kanäle für unterschiedliche Gitterfeinheiten.

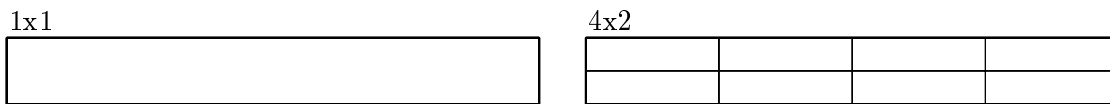


Abbildung C.24: Bei den Berechnungen verwendete Gebietszerlegungen.

Übersicht der Varianten und weitere Resultate

Variante	Gitter	Zerlegung	N_T	$F_{1,\nu}/(H \rho u_I^2)$
V1	G1	1x1	38	0,3215
V2	G2	1x1	58	0,3277
V3	G3	1x1	71	0,3323
V4	G4	1x1	51	0,3299
V5	G5	1x1	19	0,07882
V6	G5	4x2	30*	0,07832
V7	G5	4x2	30*	0,07832
V8	G5	4x2	30*	0,07832
V9	G5	4x2	30*	0,07832

Tabelle C.10: Übersicht zu den durchgeführten Berechnungen mit Angabe der auf den Kanal in x_1 -Richtung wirkenden Reibungskraft $F_{1,\nu}$. Die mit * gekennzeichneten Werte stellen die maximale Anzahl der durchzuführenden Zeitschritte N_T dar, d. h. das Abbruchkriterium $e_T < \mu_T$ wurde nicht erreicht.

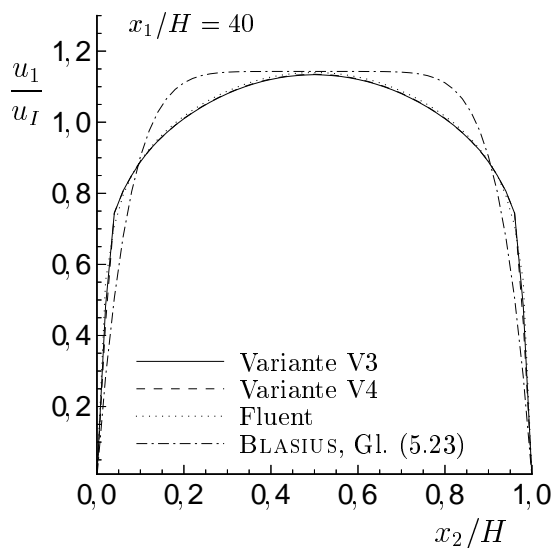


Abbildung C.25: Geschwindigkeitsprofil am Kanalaustritt.

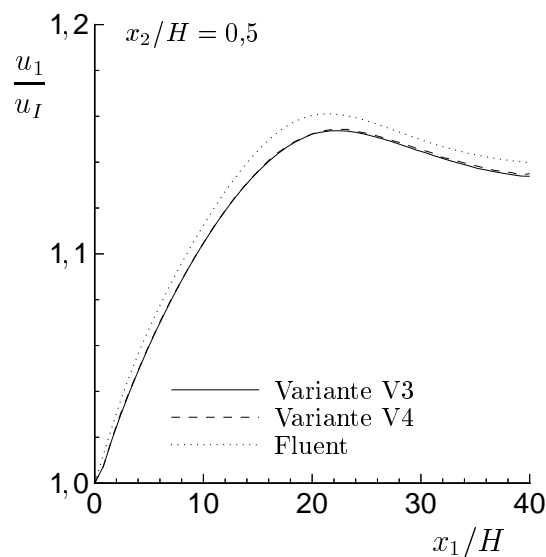


Abbildung C.26: Verlauf der horizontalen Geschwindigkeitskomponente in Kanalmitte.

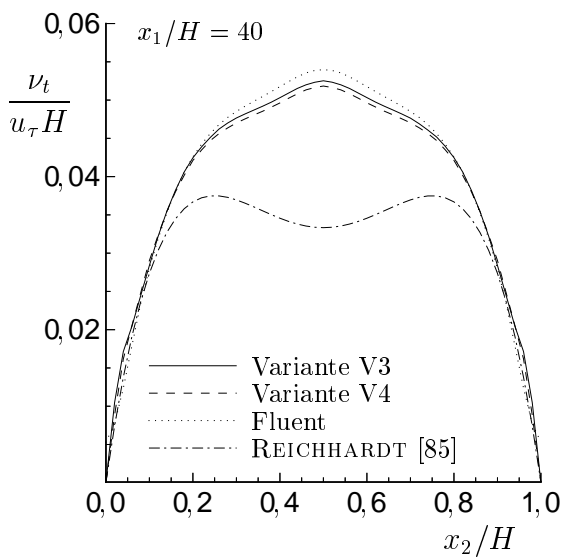


Abbildung C.27: Verlauf der turbulenten Viskosität über den Kanalquerschnitt am Austritt.

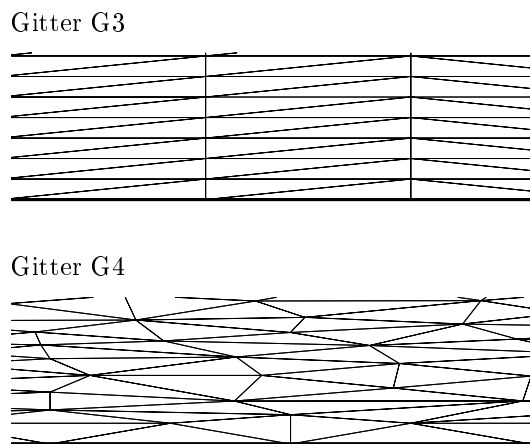


Abbildung C.28: Gegenüberstellung der quasi-strukturierten und unstrukturierten Vernetzung in Wandnähe.

Gitter	G1	G2	G3	G4	Fluent
y^+	29,2	23,3	20,6	21,1–30,4	17,9

Tabelle C.11: Grenzschichtgröße y^+ in Abhängigkeit von der verwendeten Vernetzung bei einer mittleren Wandschubspannungsgeschwindigkeit von $u_\tau/u_I = 0,07$.

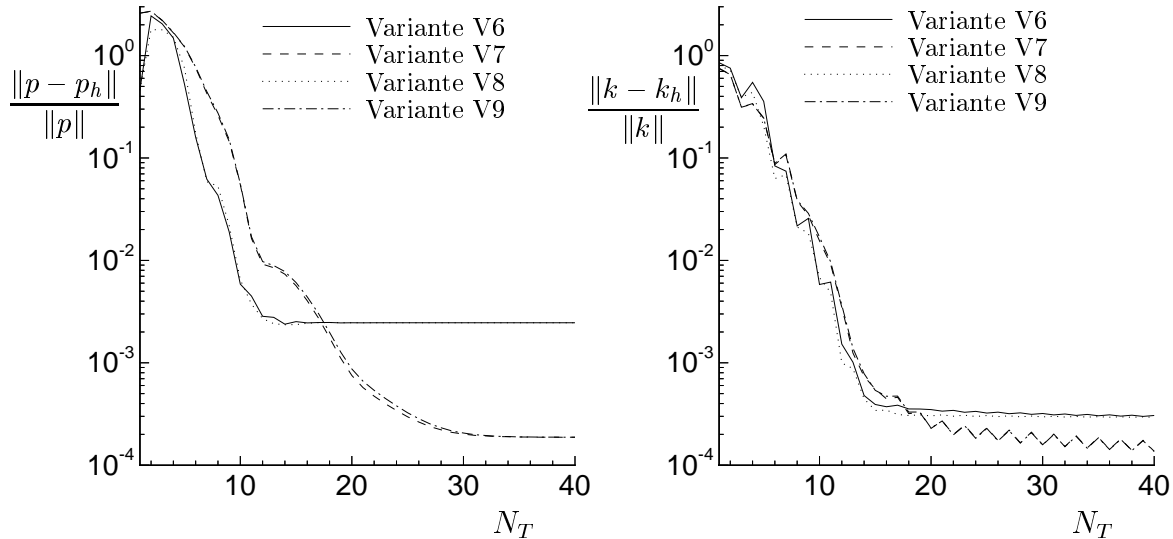


Abbildung C.29: Abnahme des L^2 -Fehlers für den Druck und die turbulente kinetische Energie bei den gebietszerlegten Varianten bezogen auf die sequentiell erzielte Lösung (Variante V5).

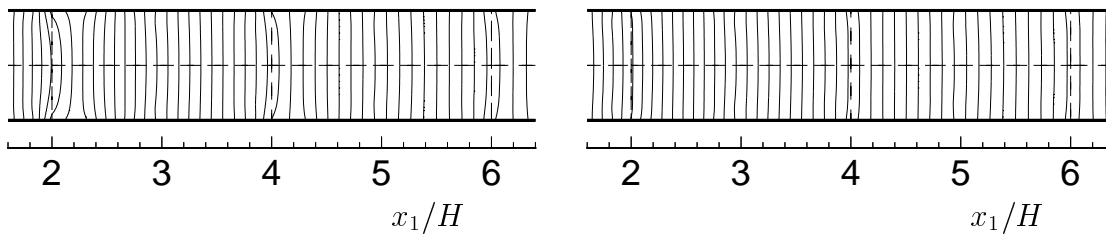
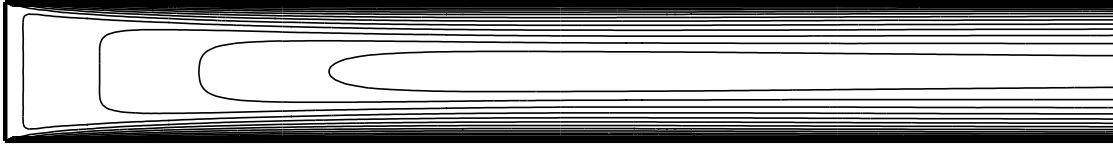
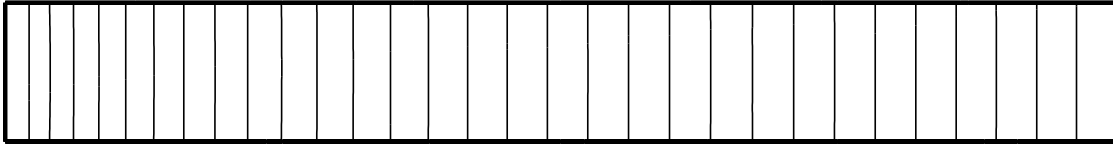
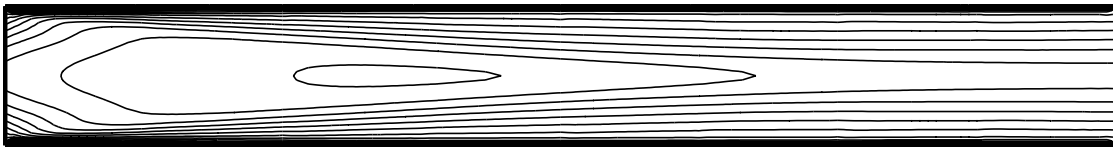
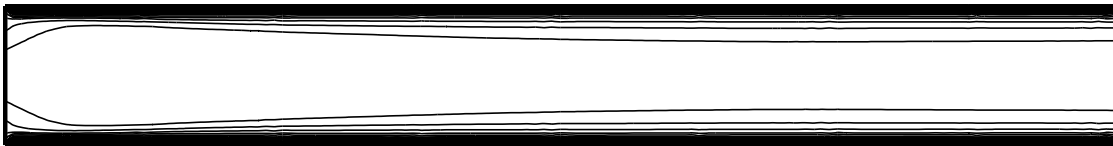
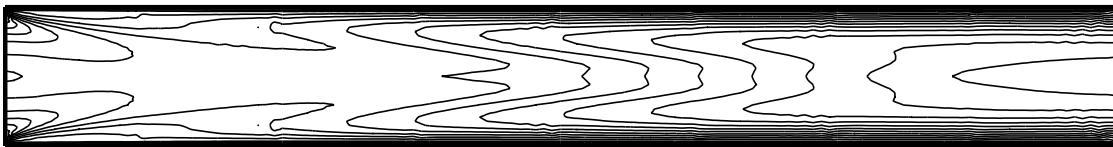


Abbildung C.30: Vergleich der Isobaren (links Variante V6, rechts Variante V7) bei unterschiedlicher Übertragung der Druckinformation im DD-Algorithmus (Teilgebietsränder gestrichelt dargestellt).

u_1 -Isolinien u_2 -Isolinien p -Isolinien k -Isolinien ε -Isolinien ν_t -IsolinienAbbildung C.31: Isolinien der Lösung von Variante V3 (x_1 -Achse fünffach gestaucht).

C.5 Auftriebsinduzierte Strömung (zu 5.4.3)

Gebietszerlegung

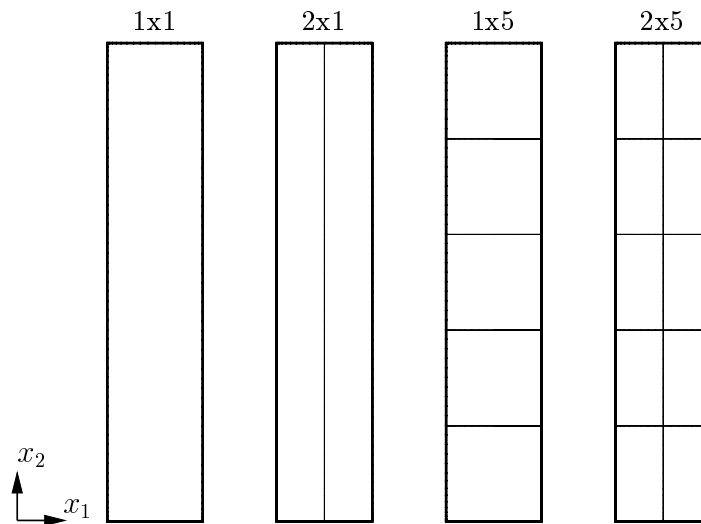


Abbildung C.32: Unterschiedliche Zerlegungen des Berechnungsgebietes.

Vernetzung

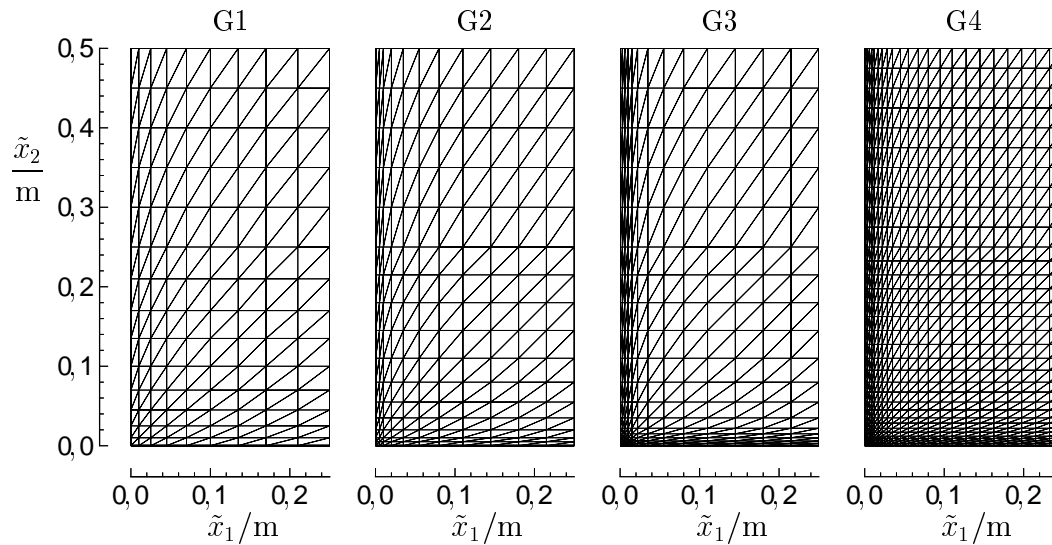


Abbildung C.33: Ausschnitte der Vernetzung (linkes unteres Makro der 2x5-Zerlegung) für unterschiedliche Gitterfeinheiten.

Gitterbezeichnung	N_k	N_{el}	min. Wandabstand
G1	1.121	2.088	10 mm
G2	1.449	2.728	5 mm
G3	1.809	3.432	3 mm
G4	5.625	10.912	3 mm

Tabelle C.12: Daten der Vernetzung für unterschiedliche Gitterfeinheiten.

Weitere Resultate

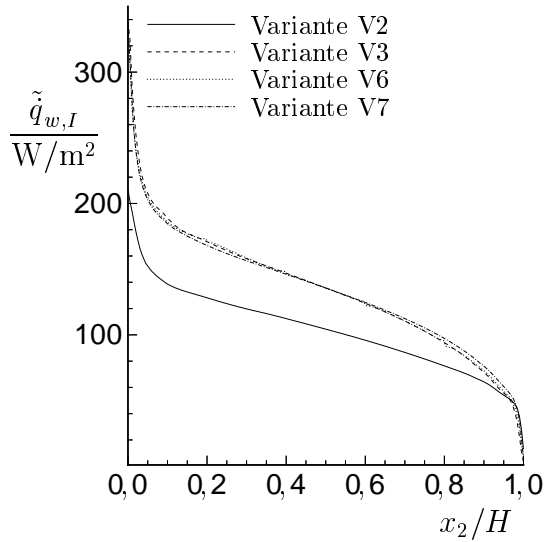
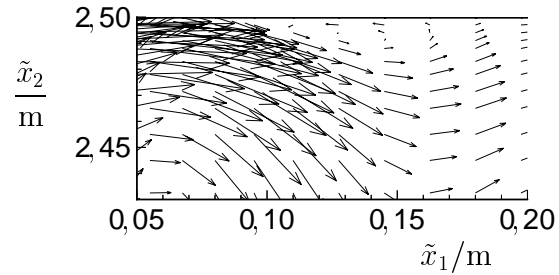
Abbildung C.34: Verlauf der berechneten Wärmestromdichte entlang der beheizten Wand Γ_I .

Abbildung C.35: Ausschnitt des Ablösegebietes nahe der linken oberen Ecke.

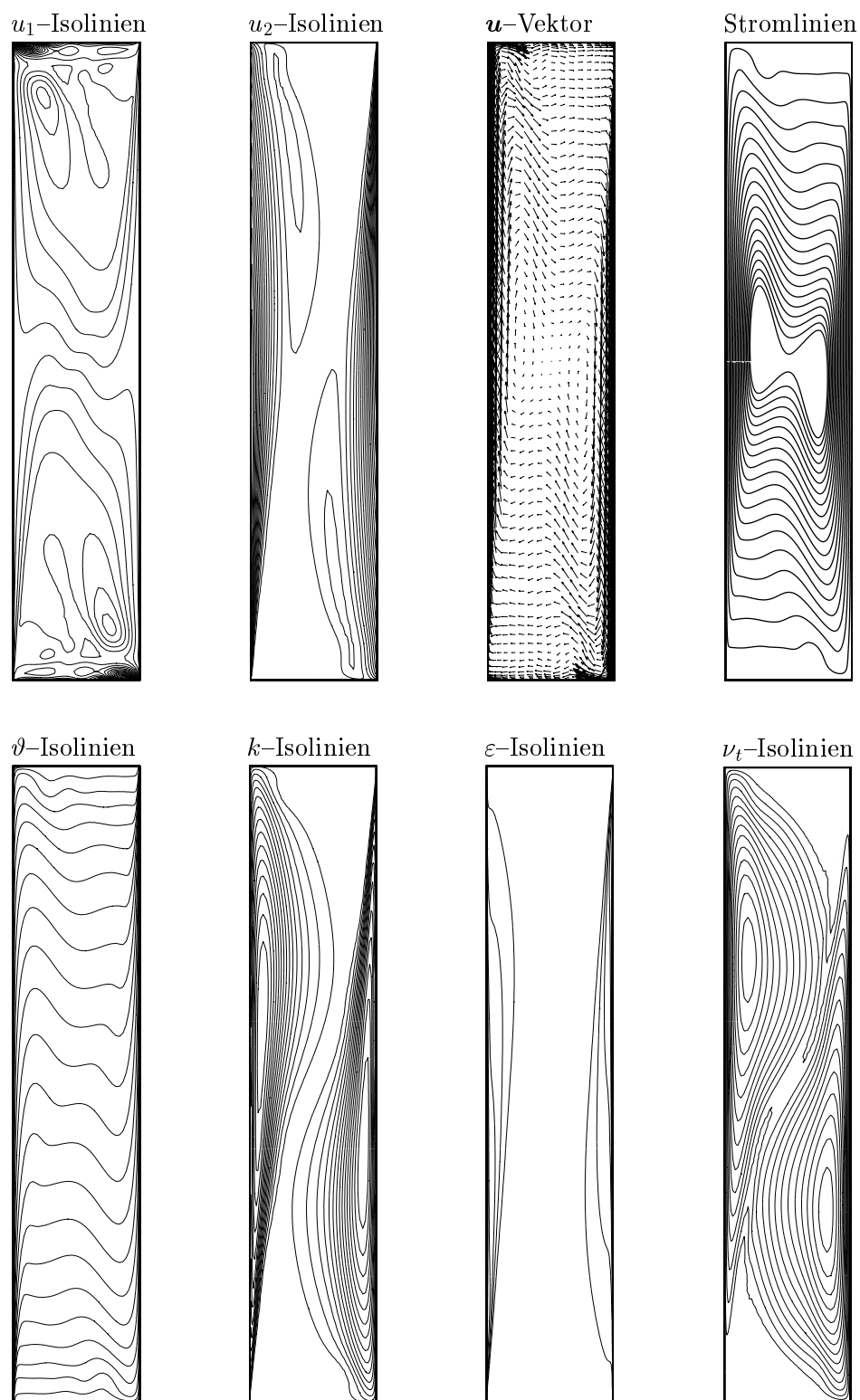


Abbildung C.36: Isolinien- und Vektordarstellung unterschiedlicher Lösungskomponenten.

