Mehrdimensionale Change-Point-Schätzung mit U-Statistiken

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technische Universität Dresden

von

Dipl.-Math. Maik Döring

geboren am 08. Dezember 1978 in Hoyerswerda

Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. habil. D. Ferger	TU Dresden
	Prof. Dr. rer. nat. habil. J. Steinebach	Universität zu Köln
	Prof. Dr. rer. nat. habil. C. Müller	Universität Kassel

Eingereicht am: 08.01.2007

Tag der Disputation: 02.04.2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist ein Change-Point-Problem. Es werden in zeitlicher Reihenfolge unabhängige Daten $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, beobachtet. Von diesen wird angenommen, dass für ein unbekanntes $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ mit $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q < \theta_{q+1} = 1$ die Beobachtungen $X_{[n\theta_i]+1}, \ldots, X_{[n\theta_{i+1}]}$ einer Verteilung ν_i für $0 \leq i \leq q$ entstammen.

$$\underbrace{X_1, \ldots, X_{[n\theta_1]}}_{\nu_0}, \ \ldots \ , \underbrace{X_{[n\theta_i]+1}, \ldots, X_{[n\theta_{i+1}]}}_{\nu_i}, \ \ldots \ , \underbrace{X_{[n\theta_q]+1}, \ldots, X_n}_{\nu_q}$$

Der interessierende Parameter ist der so genannte *Change-Point* $\boldsymbol{\theta}$. Der Name drückt aus, dass in der Folge von unabhängigen Daten die Verteilungen nach den Zeitpunkten $[n\theta_i] \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq q$ von ν_i zu ν_{i+1} wechseln. Ferner gibt die Differenz $\theta_{i+1} - \theta_i$ an, wie groß der Anteil der nach ν_i verteilten Daten in der Gesamtstichprobe ist. In dieser Arbeit wird der Fall von $q \in \mathbb{N}$ tatsächlichen Wechsel der Verteilungen betrachtet. Es wird vorausgesetzt, dass q bekannt ist.

Definition des Change-Point-Modells und des Change-Point-Schätzer. Nun wird das Change-Point-Modell präzise formuliert. Es bildet den mathematischen Rahmen für die gesamte Arbeit. Gegeben sei ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in einem messbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$.

$$\begin{array}{llll} X_{1,1} & & & \\ X_{1,2} & X_{2,2} & & \\ & \vdots & & \\ X_{1,n} & X_{2,n} & \ldots & X_{n,n} \\ & \vdots & & \end{array}$$

Die Betrachtung von doppelt indizierten Zufallselementen ist notwendig, um asymptotische Aussagen formulieren zu können. Die Anzahl der Verteilungswechsel $q \in \mathbb{N}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Wir definieren folgende Teilmenge H des $\mathbb{R}^q$.

$$H := \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q | \, 0 < t_1 < \cdots < t_q < 1 \}.$$

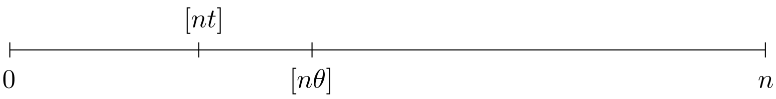
Es existiere ein Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q) \in H$ sowie Folgen von Maßen $(\nu_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ für $0 \leq i \leq q$, so dass

$$P \circ X_{j,n}^{-1} = \nu_{i,n} \qquad \text{für } [n\theta_i] < j \leq [n\theta_{i+1}], \, 0 \leq i \leq q \text{ mit } \theta_0 = 0, \, \theta_{q+1} = 1.$$

Neben dem unbekannten Change-Point $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$ werden auch die Verteilungen $\nu_{i,n}$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq q$, als nicht bekannt vorausgesetzt. Es handelt sich somit um ein nichtparametrisches Modell, da keine parametrischen Annahmen über die Verteilungen $\nu_{i,n}$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq q$, gemacht werden. Die unabhängigen Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ entsprechen somit der n-ten Zeile des Dreiecksschema. Eine zentrale Aufgabe besteht in der Schätzung des mehrdimensionalen Change-Points $\boldsymbol{\theta}$.

Zur Motivation des Schätzers betrachten wir kurz zwei Beispiele. Ein klassischer Ansatz im Fall von $q = 1$, das heißt, es liegt genau ein Verteilungswechsel vor, zur Schätzung des Zeitpunktes des Wechsels $[n\theta]$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bei reellwertigen Zufallsgrößen besteht in der Betrachtung von Differenzen von arithmetischen Mittel. Wir bezeichnen

$$\overline{X}_{k,m} := \frac{1}{m-k} \sum_{j=k+1}^{m} X_{j,n}.$$



Unter der Annahme, dass sich $\nu_{0,n}$ und $\nu_{1,n}$ im Erwartungswert unterscheiden, ist folgender Schätzer sinnvoll:

$$\hat{\theta}_n = \underset{t \in \left\{ \frac{k}{n} \middle| k=1,\ldots,n-1 \right\}}{\operatorname{argmax}} \left| \overline{X}_{0,[nt]} - \overline{X}_{[nt],n} \right|.$$

Um diesen Ansatz auf mehrere Change-Points zu erweitern, beachte man folgende Darstellung.

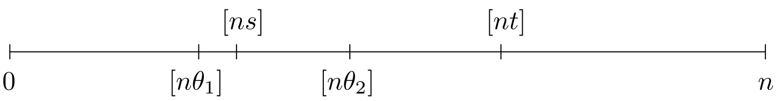
$$\overline{X}_{0,[nt]} - \overline{X}_{[nt],n} = \frac{1}{[nt]} \sum_{i=1}^{[nt]} X_{i,n} - \frac{1}{n-[nt]} \sum_{j=[nt]+1}^{n} X_{j,n} = \frac{1}{[nt]} \frac{1}{n-[nt]} \sum_{i=1}^{[nt]} \sum_{j=[nt]+1}^{n} X_{i,n} - X_{j,n}.$$

Im zweiten Beispiel seien ϵ_j für $j \in \mathbb{N}$ reellwertige zentrierte i.i.d. Zufallsgrößen und $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

$$X_{j,n} := \begin{cases} \epsilon_j & 1 \le j \le [n\theta_1] \\ \epsilon_j + \delta_n & [n\theta_1] < j \le [n\theta_2] \\ \epsilon_j & [n\theta_2] < j \le n. \end{cases}$$

Dann könnte man folgenden Schätzer betrachten.

$$\left(\hat{\theta}_{1,n}, \hat{\theta}_{2,n}\right) := \underset{(s,t) \in \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \middle| k,l \in \mathbb{N} \text{ mit } 0<k<l<n \right\}}{\operatorname{argmax}} \left| \left(\overline{X}_{0,[ns]} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right) + \left(\overline{X}_{[nt],n} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right) \right|.$$



Auch hier lässt sich eine Darstellung als Mehrfachsumme finden.

$$\overline{X}_{0,[ns]} - 2\overline{X}_{[ns],[nt]} + \overline{X}_{[nt],n} = \frac{1}{[ns]} \frac{1}{[nt]-[ns]} \frac{1}{n-[nt]} \sum_{i=1}^{[ns]} \sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} \sum_{k=[nt]+1}^{n} X_{i,n} - 2X_{j,n} + X_{k,n}.$$

Eine Verallgemeinerung von arithmetischen Mittel stellen U-Statistiken dar. Zur Schätzung des Change-Points betrachten wir Maximalstellen von gewichteten U-Statistiken. Im Fall von q Verteilungswechseln betrachten wir $(q+1)$-Stichproben-U-Statistiken in Abhängigkeit von einem so genannten Kern h vom Grade $\mathbf{m} = (m_0, \ldots, m_q)$. Dabei sei $m_i \in \mathbb{N}_0$ und $m := \sum_{i=0}^{q} m_i > 0$. Der Kern $h : \mathfrak{X}^m \to \mathbb{R}$ sei eine $\mathfrak{F}^m$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion, die jeweils in den m_i Koordinaten symmetrisch ist. Des Weiteren wird von der Kernfunktion h gefordert, dass sie bezüglich aller hier auftretenden Maße integrierbar sei. Das heißt, zu einem gegebenen $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \le p < \infty$ soll folgend definierte Größe $M_p \in \mathbb{R}$ existieren.

$$M_p := \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^{q+1} \\ \sum_{i=0}^{q} k_i = m}} \int_{\mathfrak{X}^m} \left| h(x_1, \ldots, x_m) \right|^p \prod_{i=0}^{q} \prod_{j=\left(\sum_{l=0}^{i-1} k_l\right)+1}^{\left(\sum_{l=0}^{i-1} k_l\right)+k_i} \nu_{i,n}(dx_j) < \infty.$$

Da $M_1 < \infty$, existieren für $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ mit $\sum_{i=0}^q k_i = m$ folgende Integrale der Kernfunktion h.

$$\mu_{\mathbf{k},n} := \int_{\mathfrak{X}^m} h\left(x_1, \ldots, x_m\right) \prod_{i=0}^{q} \prod_{j=\sum_{l=0}^{i-1} k_l+1}^{\sum_{l=0}^{i-1} k_l+k_i} \nu_{i,n}\left(dx_j\right).$$

Das heißt, k_i entspricht der Anzahl der Koordinaten der Kernfunktion h die nach $\nu_{i,n}$ integriert werden. Um asymptotische Aussagen machen zu können, setzen wir noch die Existenz folgender Grenzwerte für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ mit $\sum_{i=0}^q k_i = m$ voraus.

$$\mu_{\mathbf{k}} := \lim_{n\to\infty} \kappa_n \ \mu_{\mathbf{k},n}.$$

Dabei sei $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$ eine passend gewählte Folge und $\mathbb{R}_>$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Des Weiteren hängen die hier betrachteten U-Statistiken von einem reellen Vektor $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}$ ab, wobei

$$H_{\mathbf{m},n} := \left\{\mathbf{t} \in H | m_i \leq [nt_{i+1}] - [nt_i] \ \text{ für } 0 \leq i \leq q \ \text{ mit } t_0 = 0, t_{q+1} = 1\right\}.$$

Die i-te Stichprobe entspricht den Zufallsvariablen $X_{[nt_i]+1,n}, \ldots, X_{[nt_{i+1}],n}$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}$ definiere einen Vektor $\mathbf{n}\left(\mathbf{t}\right) \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ durch

$$\mathbf{n}\left(\mathbf{t}\right) := \left([nt_1], [nt_2] - [nt_1], \ldots, [nt_{i+1}] - [nt_i], \ldots, [nt_q] - [nt_{q-1}], n - [nt_q]\right).$$

Wir definieren für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}$ eine $(q+1)$-Stichproben-U-Statistik $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right)$ durch

$$U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right) := \prod_{i=0}^{q} \binom{[nt_{i+1}] - [nt_i]}{m_i}^{-1} \sum_{1 \leq j_1^0 < \cdots < j_{m_0}^0 \leq [nt_1]} \cdots \sum_{[nt_i] \leq j_1^i < \cdots < j_{m_i}^i \leq [nt_{i+1}]} \cdots \sum_{[nt_q]+1 \leq j_1^q < \cdots < j_{m_q}^q \leq n} h\left(X_{j_1^0,n}, \ldots, X_{j_{m_0}^0,n}, \ldots, X_{j_1^q,n}, \ldots, X_{j_{m_q}^q,n}\right).$$

Diese Statistik wird mit einer Funktion $w : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ gewichtet. Gewichtsfunktionen werden eingeführt, um Randprobleme, das heißt, wenn der Abstand zwischen zwei Change-Points sehr klein ist, zu lösen. Die Funktion w sollte eine auf H beschränkte, in $\boldsymbol{\theta}$ differenzierbare Funktion mit gewissen Monotonieeigenschaften sein. In dieser Arbeit werden wir w der Einfachheit halber wie folgt definieren. Für ein $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{q+1}$ mit $\frac{1}{2} < \alpha_i \leq 1$, $0 \leq i \leq q$ setze

$$w\left(\mathbf{t}\right) := \begin{cases} \prod_{i=0}^q \left(t_{i+1} - t_i\right)^{\alpha_i} & \mathbf{t} \in H \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $t_0 = 0$ und $t_{q+1} = 1$ sei. Man beachte, für $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{2}$ erhält man ähnliche Resultate mit schlechteren Konvergenzraten. Aus Übersichtlichkeitsgründen beschränken wir uns auf $\frac{1}{2} < \alpha_i \leq 1$. Es bezeichne $\frac{[n\mathbf{t}]}{n} := \left(\frac{[nt_1]}{n}, \ldots, \frac{[nt_q]}{n}\right)$. Damit wird eine Folge von stochastischen Prozessen $\left(\rho_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\rho_n = \left\{\rho_n\left(\mathbf{t}\right) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\right\}$ definiert durch

$$\rho_n\left(\mathbf{t}\right) := \begin{cases} \kappa_n \ w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right) & \mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ werde die folgende Klasse von Schätzern für den Change-Point $\boldsymbol{\theta}$ eingeführt. Dieser sei eine Maximalstelle des Prozesses ρ_n im Bereich

$$G_n := \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_q}{n} \right) \in H_{\mathbf{m},n} \,\middle|\, k_i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq q \right\}.$$

Der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ist definiert durch

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n := argmax \left(\left| \rho_n \left(\mathbf{t} \right) \right|, \ \mathbf{t} \in G_n \right).$$

Besitzt der Prozess ρ_n auf der endlichen Menge G_n mehrere Maximalstellen, so könnte man per Konvention die Stelle mit den kleinsten ersten Koordinaten wählen. Natürlich sind auch andere Konventionen möglich. Es wird vorausgesetzt, dass $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ messbar ist.
Der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ist von der gewählten Kernfunktion abhängig, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h)$. Der Einfluss der Verteilungen $\nu_{i,n}$ wird auf Integrale der Kernfunktion h zurückgeführt. An den messbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ werden keine Voraussetzungen gemacht. Die Güte des Schätzers hängt von der Wahl des Kerns h und dessen Integrationsordnung p ab.

Gliederung. Zunächst werden die Ergebnisse der Arbeit vorgestellt. Anschließend werden diese in die Literatur eingeordnet.
Im zweiten Kapitel werden einige Grundlagen zusammengestellt. Es werden einige Bezeichnungen eingeführt und wesentliche Martingalungleichungen angegeben. Des Weiteren beschäftigen wir uns mit Mehrstichproben-U-Statistiken, mit dem mehrdimensionalen Skorokhodraum sowie mit Stetigkeitssätzen des Argmax-Funktionals.
Das dritte Kapitel enthält die allgemeinen Untersuchungen des Schätzers. Dabei werden einige Eigenschaften der Prozessfolge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hergeleitet. Das erste Ziel ist dabei der Beweis der Konsistenz des Schätzers. Anschließend beweisen wir stochastische Beschränktheit für den Fehler $\left\| n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \right\|$. Schließlich zeigen wir, dass sich der Fehlervektor $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]$ als Maximalstelle eines zu einer Linearkombination von Irrfahrten äquivalenten Prozesses charakterisieren lässt.
Die festen Alternativen werden im vierten Kapitel untersucht. Hier betrachten wir das Problem unter der Bedingung, dass die Verteilungen nicht von n abhängen. Dabei werden die Bedingungen für Konsistenz und stochastischen Beschränktheit konkretisiert. Des Weiteren steht die Verteilungskonvergenz des ganzzahligen Fehlervektors $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]$ im Mittelpunkt.
Der zweite Fall, die lokalen Alternativen, werden im fünften Kapitel betrachtet. Dabei setzen wir voraus, dass sich die zugrundeliegenden Verteilungen in einem gewissen Sinne annähern, wenn n gegen unendlich strebt. Schließlich zeigen wir Konvergenz in Verteilung des skalierten Fehlervektors gegen die Maximalstelle eines Gaussprozesses.

Wesentliche Resultate Die grundlegende Idee besteht darin, den Change-Point $\boldsymbol{\theta}$ als Maximalstelle einer deterministischen Funktion zu charakterisieren. Aufgrund der Wahl der Folge $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ punktweise der Grenzwert für $n \to \infty$ der Folge der Mittelwertfunktionen des Prozesses ρ_n. Definiere die deterministische Funktion $\rho : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch

$$\rho(\mathbf{t}) := \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}).$$

Wir fordern, dass $\boldsymbol{\theta}$ die eindeutige Maximalstelle der Funktion $|\rho|$ sein soll. In Abhängigkeit von der Integrationsordnung p und der Konvergenzordnung der Folge $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man die Konsistenz des Schätzers. Dazu definiere für $q \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$

$$a_n(p,q) := \begin{cases} n^{-(p-1)+(2-p)q} & 1 \leq p < 2 \\ n^{-1}(\ln n)^q & p = 2 \\ n^{-\frac{1}{2}p} & 2 < p < \infty \end{cases} \quad \text{und} \quad a(p) := \begin{cases} p-1 & 1 \leq p \leq 2 \\ \frac{1}{2}p & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

1.1 Theorem. *Es existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und $\boldsymbol{\theta}$ sei eindeutige Maximalstelle von der Funktion $|\rho|$. Dann folgt:*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \begin{cases} P\text{-stochastisch, wenn} & \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0 \\ P\text{-f.s., wenn} & \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) < \infty. \end{cases}$$

Unter strengeren Voraussetzungen können wir stochastische Beschränktheit für den Fehler $\left\| n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \right\|$ zeigen. Wir setzen voraus, dass die Funktion $|\rho|$ an der Stelle $\boldsymbol{\theta}$ eine lokale "Spitze" besitzt. Wir sagen, es gelte die Eigenschaft (P), wenn ein beliebig kleines $\delta > 0$ sowie eine positive Konstante $L = L(\delta)$ existieren, so dass entweder

$$\begin{aligned} (P+): &\quad \rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t}) \geq L\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\| \;\; \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \\ &\textit{oder} \\ (P-): &\quad \rho(\mathbf{t}) - \rho(\boldsymbol{\theta}) \geq L\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\| \;\; \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

erfüllt ist. $B_\delta(\boldsymbol{\theta})$ sei die offene Kugel um $\boldsymbol{\theta}$ mit Radius δ. Die Eigenschaft $(P+)$ der Funktion ρ steht für eine Spitze, peak, nach oben im Punkt $\boldsymbol{\theta}$ und $(P-)$ für eine Spitze nach unten. Unter dieser Voraussetzung kann man nun die stochastische Beschränktheit mit Martingalmethoden zeigen. Mithilfe der Chowschen Ungleichung und Momentenungleichungen für U-Statistiken lässt sich eine Tailabschätzung für den Fehler $\left\| n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \right\|$ beweisen. Daraus folgt dann folgendes Theorem.

1.2 Theorem. *Es sei $\boldsymbol{\theta}$ eindeutige Maximalstelle der Funktion $|\rho|$ und es gelte die Eigenschaft (P). Des Weiteren existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$. Wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p b_n^{a(p)} < C_1$$

für eine Konstante $C_1 > 0$, dann folgt

$$b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) = O_P(1).$$

Die weiteren Untersuchungen beschäftigen sich mit der Verteilungskonvergenz des skalierten Fehlervektors $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)$. Dabei sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$ mit $nb_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Damit wird eine Folge von stochastischen Prozessen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Z_n = \{Z_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ definiert durch

$$Z_n(\mathbf{t}) := \begin{cases} nb_n\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+[b_n^{-1}\mathbf{t}]}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) & \frac{[n\boldsymbol{\theta}]+[b_n^{-1}\mathbf{t}]}{n} \in H_{\mathbf{m},n} \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Z_n ist ein bezüglich ρ_n normaliesierter reskalierter Prozess, der von der Kernfunktion h abhängt, $Z_n(\mathbf{t}) = Z_n(h,\mathbf{t})$ bzw. $Z_n = Z_n(h,\cdot)$. Viele Objekte in dieser Arbeit wie zum Beispiel der Prozess ρ_n, der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ oder die Funktion ρ sind von der Kernfunktion h abhängig. Wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir diese Objekte mit der Kernfunktion h. Es sei $arg(Z_n(h,\cdot))$ die Maximalstellenmenge des Prozesses $Z_n(h,\cdot)$. Unter bestimmten Voraussetzungen gilt $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \in arg(Z_n(h,\cdot))$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ P-f.s.

1.3 Satz. *Es existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0$. Dann gilt*

$$(1) \qquad -\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) < \rho(\boldsymbol{\theta}) \implies \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg(Z_n(\ h\ ,\cdot))\right) = 0$$

$$(2) \qquad -\sup_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) > \rho(\boldsymbol{\theta}) \implies \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg(Z_n(-h,\cdot))\right) = 0.$$

Zur Untersuchung asymptotischer Eigenschaften von $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)$ ist es sinnvoll, sich mit den Maximalstellenmengen des Prozesses Z_n zu beschäftigen. Die Idee ist zu zeigen, dass Z_n für $n \to \infty$ in einem gewissen funktionalen Sinne konvergiert und dass sich diese Konvergenz auf die Maximalstellen überträgt. Letzteres wird durch diverse Stetigkeitssätze für das Argmax-Funktional garantiert.

Der Prozess Z_n erweist sich asymptotisch äquivalent zu einer Linearkombination von eindimensionalen Irrfahrten mit Drift. Wir definieren folgende stochastische Prozesse $Z_{i,n} = \{Z_{i,n}(t), t \in \mathbb{R}\}$ für $1 \leq i \leq q$ durch

$$Z_{i,n}(t) := b_n \kappa_n$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{-[b_n^{-1}t]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) & -b_n\left([n\theta_i]-[n\theta_{i-1}]\right) < t < 0 \\ -\sum\limits_{j=1}^{[b_n^{-1}t]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) & 0 \leq t < b_n\left([n\theta_{i+1}]-[n\theta_i]\right) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei sind $R_{i,n} : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq q$ spezielle Funktionen, die im Zusammenhang mit den Hajekprojektionen von U-Statistiken auftreten.

Für ein festes $1 \leq i \leq q$, $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $Z_{i,n}(t)$ eine Summe über *i.i.d.* Zufallsvariablen und somit $Z_{i,n}$ eine zweiseitige Irrfahrt. Für alle festen $d \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_0 = n_0(d)$, so dass für alle $n \geq n_0$ die auf $[-d, d]$ eingeschränkten Prozesse $Z_{1,n}$, ..., $Z_{q,n}$ unabhängig sind.

Die Grenzfunktion ϕ der Folge der Mittelwertfunktionen des Prozesses $(\mathsf{E}Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich aus Richtungsableitungen der Funktion ρ im Punkt $\boldsymbol{\theta}$. Wir definieren die deterministische Funktion $\phi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(\mathbf{t}) := \sum_{i=1}^{q} |t_i|\, \partial_{\operatorname{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}}\, \rho(\boldsymbol{\theta}).$$

Man kann zeigen, dass für alle festen $d \in \mathbb{N}$ und gleichmäßig in $\mathbf{t} \in [-d, d]^q$

$$Z_n(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i) + o_P(1).$$

In unterschiedlichen Situationen erhält man unterschiedliche Grenzprozesse für die Folgen $(Z_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei unterscheiden wir im Wesentlichen zwischen zwei Situationen. Bei den festen Alternativen betrachten wir das Problem unter der Bedingung, dass die Verteilungen nicht von n abhängen. Bei den lokalen Alternativen nähern sich die zugrundeliegenden Verteilungen in einem gewissen Sinne an, wenn n gegen unendlich strebt.

Feste Alternativen. Hier setzen wir voraus, dass die Verteilungen nicht von n abhängen, $\nu_{i,n} = \nu_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq q$. Daraus folgt, dass die Integrale $\mu_{\mathbf{k},n}$ bzgl. der Kernfunktion h ebenfalls nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Daher können wir die Folge $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant Eins wählen und erhalten aus Theorem 1.1 folgenden Spezialfall:

1.4 Folgerung. *Es existiere ein $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ mit $M_p < \infty$ und $\boldsymbol{\theta}$ sei eindeutige Maximalstelle von der Funktion $|\rho|$. Dann folgt*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \begin{cases} P\text{-stochastisch, falls} & 1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty \\ P\text{-f.s., falls} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Ebenfalls wählen wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konstant Eins. Dann erhalten wir für den ganzzahligen Fehlervektor $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]$ stochastische Beschränktheit.

1.5 Folgerung. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Ferner sei* $\boldsymbol{\theta}$ *die eindeutige Maximalstelle von* $|\rho|$, *dann folgt*

$$n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] = O_P(1).$$

Der Grenzprozess Z der Folge der Prozesse $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erweist sich als Linearkombination von eindimensionalen unabhängigen Irrfahrten mit Drift. Es seien $\xi_{i,j}$ unabhängige Zufallselemente über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\xi_{i,j} \sim \nu_i$ für $0 \le i \le q$ und $j \in \mathbb{Z}$. Damit definiere folgende stochastische Prozesse $Z_i = \{Z_i(l), l \in \mathbb{Z}\}$ für $1 \le i \le q$ durch

$$Z_i(l) := \begin{cases} \sum\limits_{j=l+1}^{0} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(\xi_{i-1,j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} R_{i-1}(\xi_{i-1,j}) & l < 0 \\ -\sum\limits_{j=1}^{l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(\xi_{i,j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} R_{i-1}(\xi_{i,j}) & l \ge 0 \end{cases}$$

Hierbei sind $R_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ für $0 \le i \le q$ spezielle Funktionen, die im Zusammenhang mit den Hajekprojektionen von U-Statistiken auftreten. Der Prozess $Z = \{Z(\mathbf{k}) : \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_q) \in \mathbb{Z}^q\}$ wird definiert durch

$$Z(\mathbf{k}) := \phi(\mathbf{k}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(k_i) - \mathsf{E} Z_i(k_i).$$

Es sei $arg(Z)$ bzw. $arg(-Z)$ die Maximal- bzw. die Minimalstellenmenge von Z. Aufgrund der Definition der Driftfunktion ϕ folgt aus der Eigenschaft $(P+)$, dass $arg(Z) \neq \emptyset$. Aus $(P-)$ folgt $arg(-Z) \neq \emptyset$. Existieren mehrere Maximal- bzw. Minimalstellen von Z erhalten wir eine Grenzwertaussage für die Folge der Maximalstellenmengen $(arg(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge der Prozesses $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.6 Theorem. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Ferner sei* $\boldsymbol{\theta}$ *die eindeutige Maximalstelle von* $|\rho|$. *Dann folgt*

$$(1) \qquad (P+) \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} P(arg(Z_n(\ h\ , \cdot)) \cap F \neq \emptyset) \le P(arg(\ Z\ ) \cap F \neq \emptyset) \quad \forall F \subset \mathbb{Z}^q$$

$$(2) \qquad (P-) \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} P(arg(Z_n(-h, \cdot)) \cap F \neq \emptyset) \le P(arg(-Z) \cap F \neq \emptyset) \quad \forall F \subset \mathbb{Z}^q.$$

Falls der Prozess Z eine eindeutige Maximal- bzw. Minimalstelle besitzt, erhalten wir Verteilungskonvergenz.

1.7 Theorem. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Ferner sei* $\boldsymbol{\theta}$ *die eindeutige Maximalstelle von* $|\rho|$. *Dann folgt*

$$(1) \qquad (P+) \text{ und } arg(\ Z\ ) = \left\{\tau_f^+\right\} \text{ P-f.s.} \Longrightarrow \quad n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_f^+ \quad \text{in } \mathbb{Z}^q$$

$$(2) \qquad (P-) \text{ und } arg(-Z) = \left\{\tau_f^-\right\} \text{ P-f.s.} \Longrightarrow \quad n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_f^- \quad \text{in } \mathbb{Z}^q.$$

Lokale Alternativen. Nun betrachten wir Folgen von Maßen $(\nu_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$P\circ X_{j,n}^{-1}=\nu_{i,n} \quad \text{für } [n\theta_i]<j\leq[n\theta_{i+1}] \text{ und } 0\leq i\leq q.$$

Hierbei besitzen die Verteilungen die Eigenschaft, dass sie für $n\to\infty$ aufeinander zulaufen, $\nu_{i,n} \rightsquigarrow \nu$. Bei beschränkten Kernfunktionen h kann man an schwache Konvergenz der Maße denken. Damit der Verteilungswechsel noch erkannt werden kann, dürfen die Unterschiede der Verteilungen nicht zu schnell verschwinden. Diese Eigenschaft der Folgen von Maße $\nu_{i,n}$ wird mithilfe von speziellen Integralen der Kernfunktion h charakterisiert. Dazu definiere für $n\in\mathbb{N}$

$$\lambda_n:=\left|\int\limits_{\mathfrak{X}^m} h\left(x_{0,1},...,x_{q,m_0}\right)\prod_{i=0}^{q}\prod_{j=1}^{m_i}\nu_{i,n}\left(dx_{i,j}\right)\right|.$$

Man beachte, wenn $\nu_{0,n}=\cdots=\nu_{q,n}$ und h gewisse Antisymmetrien besitzt, dann folgt $\lambda_n=0$. Somit ist es sinnvoll, die Konvergenzbedingung (C) für das aufeinander zulaufen der Verteilungen mithilfe der Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu definieren.

$$\text{Konvergenzbedingung } (C): \quad \begin{array}{rl} (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} & \subset\mathbb{R}_{>} \\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n & =0 \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\lambda_n & =\infty \\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}\mu_{\mathbf{k},n} & \text{existiert für alle } \mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^{q+1} \text{ mit } \sum_{i=0}^{q}k_i=m. \end{array}$$

Die vorletzte Bedingung stellt sicher, dass sich die Verteilungen nicht zu schnell annähern. Wir wählen

$$\kappa_n:=\lambda_n^{-1}, \qquad\qquad b_n:=\lambda_n^2.$$

Aus der letzten Bedingung von (C) folgt dann die Existenz der $\mu_{\mathbf{k}}$. Damit erhalten wir Konsistenz und stochastische Beschränktheit des skalierten Fehlervektors $n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}\right)$ für $p>2$.

1.8 Folgerung. *Es existiere ein $p\in(2,\infty)$ mit $M_p<\infty$ und es gelte (C). Ferner sei $\boldsymbol{\theta}$ die eindeutige Maximalstelle von $|\rho|$. Dann folgt*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \quad P\text{-stochastisch.}$$

1.9 Folgerung. *Es existiere ein $p\in(2,\infty)$ mit $M_p<\infty$ und es gelte (C) und (P). Ferner sei $\boldsymbol{\theta}$ die eindeutige Maximalstelle von $|\rho|$. Dann folgt*

$$n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n-\boldsymbol{\theta}\right)=O_P\left(1\right).$$

Als Grenzprozess Y der Folge der Prozesse $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man eine Linearkombination von unabhängigen zweiseitigen Brownschen Bewegungen mit Drift. Es seien W_i, $\tilde{W}_i$ für $1\leq i\leq q$ unabhängige Brownsche Bewegungen und definiere damit folgende stochastische Prozesse $Y_i=\{Y_i(s), s\in\mathbb{R}\}$ für $1\leq i\leq q$ durch

$$Y_i(s):=\begin{cases}\sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-s) & s<0\\ \sigma_{i,+}W_i(\,s\,) & s\geq 0.\end{cases}$$

Hierbei ergeben sich $\sigma_{i,-}$ und $\sigma_{i,+}$ als Grenzwerte spezieller Integrale. Die Existenz der $\sigma_{i,-}$ und $\sigma_{i,+}$ wird durch eine zusätzliche Bedingung, die so genannte Stabilitätsbedingung (S), sichergestellt. Die Bedingung (S) fordert, dass gewisse Streuungen nicht zu sehr variieren. Ist die Kernfunktion h beschränkt und konvergieren für $0\leq i\leq q$ die Folgen von Maßen $(\nu_{i,n})$ schwach gegen ein Maß ν, dann ist (S) zum Beispiel erfüllt.

Ähnlich zum Prozess Z definieren wir den Prozess $Y = \{Y(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ durch

$$Y(\mathbf{t}) := \phi(\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Y_i(t_i).$$

Aufgrund der Definition der Driftfunktion ϕ folgt aus der Eigenschaft (P) die Existenz von Extremstellen des Prozesses Y. Die Eindeutigkeit der Extremstelle folgt mithilfe eines Satzes von Lifshits (1982). Damit ergibt sich durch die Anwendung eines Stetigkeitssatzes für das Argmax-Funktional Verteilungskonvergenz für die Folge $\left(n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.10 Theorem. *Es existiere ein $p \in (2, \infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C), (P) und (S). Dann gilt:*

(1) *Aus $(P+)$ folgt die Existenz einer P.-f.s. eindeutigen Maximalstelle τ_l^+ von Y mit*
$$n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^+ \quad \text{in } \mathbb{R}^q.$$

(2) *Aus $(P-)$ folgt die Existenz einer P.-f.s. eindeutigen Minimalstelle τ_l^- von Y mit*
$$n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^- \quad \text{in } \mathbb{R}^q.$$

Einordnung. Die beiden motivierenden Beispiele sind in unserer Klasse von Schätzern enthalten. Im ersten Fall ist $q = 1$, $\mathbf{m} = (1,1)$ und $h(x,y) = x - y$. Beim zweiten Fall ist $q = 2$, $\mathbf{m} = (1,1,1)$ und $h(x,y,z) = x - 2y + z$. Dieses Beispiel wird jeweils am Ende des vierten und fünften Kapitels etwas näher betrachtet.
Der Fall $q = 1$ und $\mathbf{m} = (1,1)$ wurde von Ferger (1994, 1995, 2001) untersucht. Der hier betrachtete Schätzer ist eine Verallgemeinerung in mehrfacher Hinsicht. Einerseits haben wir hier mehrere Verteilungswechsel untersucht. Ferner betrachten wir U-Statistiken mit beliebigem Grad. In Ferger (1995, 2001) wurde die Peakeigenschaft noch auf der gesamten Menge $H = (0,1)$ vorausgesetzt.
Der Fall $q = 1$ und $\mathbf{m} = (2,2)$ mit der Kernfunktion $h(x_1,x_2,y_1,y_2) = g(x_1,x_2) - g(y_1,y_2)$ wurde von mir im Rahmen meiner Diplomarbeit behandelt, Döring (2004).
Orasch (2004) untersuchte Tests zum Vorliegen von mehrdimensionalen Change-Points. Er betrachtete den Fall $m_i = 1$, $0 \le i \le q$ mit der Kernfunktion $h(x_0,\ldots,x_q) = \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q} g(x_i,x_j)$, wobei $g : \mathfrak{X}^2 \to \mathbb{R}$ eine messbare, symmetrische oder antisymmetrische Funktion sei.
Die Untersuchung von Change-Point-Problemen mithilfe von U-Statistiken geht auf Csörgö und Horvath zurück. Vergleiche zum Beispiel Csörgö und Horvath (1993), Kapitel 2.4.
Inzwischen gibt es eine Vielzahl von Arbeiten zu Change-Point-Problemen. Einen Überblick findet man zum Beispiel bei Antoch, Huskova und Jaruskova (1999). Ferner sei auf die Bücher von Brodsky und Darkhovsky (1993, 2000) verwiesen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen bereitgestellt. Dies sind größtenteils in der Literatur bekannte Aussagen. Es werden Mehrstichproben-U-Statistiken definiert und einige Eigenschaften gezeigt. Des Weiteren beschäftigen wir uns mit dem mehrdimensionalen Skorokhodraum. Ferner interessieren wir uns für Stetigkeitssätze des Argmax-Funktionals. Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt und anschließend zwei Martingalungleichungen angegeben.

Bezeichnungen. Es seien $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen ohne und mit der Null. Mit $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_>$ werden die reellen Zahlen bzw. die positiven reellen Zahlen bezeichnet. Durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ werden reellwertige Folgen dargestellt. Vektoren werden fett dargestellt. Zum Beispiel sei $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_q) \in \mathbb{N}^q$. Des Weiteren bedeutet

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \le \mathbf{n} &\Longleftrightarrow k_i \le n_i \text{ für } 1 \le i \le q \\
\mathbf{k} < \mathbf{n} &\Longleftrightarrow \mathbf{k} \le \mathbf{n} \text{ und es existiert ein } i \text{ aus } 1 \le i \le q \text{ mit } k_i < n_i.
\end{aligned}$$

$\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ und $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)$ sei der Nullvektor bzw. der Einsvektor. Der i-te Einheitsvektor werde mit $\mathbf{e_i}$ bezeichnet. Für ein $s \in \mathbb{R}$ bzw. ein $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ sei die Gaussklammer

$$[s] := \max\left(k \in \mathbb{Z}, k \le s\right), \qquad [\mathbf{t}] := \left([t_1], \ldots, [t_q]\right).$$

Wenn nichts weiter gesagt wird, dann gelten folgende Konventionen.

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \qquad \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1 \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } n < k \text{ oder } n < n-k.$$

Bzw. gelte für Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_l} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!} = 0 \quad \text{wenn } n < k_i \text{ für ein } 1 \le i \le l.$$

Es sei $F \subset \mathbb{R}^q$ und $f : F \to \mathbb{R}$. Für ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{t} \in F$ sei die Richtungsableitung von f in $\mathbf{t}$ definiert, wenn folgender Grenzwert existiert.

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{t}) := \lim_{\substack{\lambda > 0 \\ \lambda \to 0}} \frac{f\left(\mathbf{t} + \lambda \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) - f(\mathbf{t})}{\lambda}.$$

Es seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallselementen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in normierten Räumen.

$$\begin{aligned}
X_n = o_P(Y_n) &:\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ : P\left(\|X_n\| > \delta \|Y_n\|\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
X_n = O_P(Y_n) &:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \infty) \text{ sowie } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \ge n_0 \ : P\left(\|X_n\| > \delta \|Y_n\|\right) \le \epsilon\ .
\end{aligned}$$

Martingalungleichungen.

2.1 Satz (Chowsche Ungleichung). *Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Sub-Martingal bzgl. der isotonen Folge von σ-Algebren $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ und $a_{m+1} \ge a_{m+2} \ge \cdots \ge a_n > 0,\ m < n \in \mathbb{N}$*

$$\epsilon P\left(\left\{\max_{m+1 \le i \le n} a_i S_i \ge \epsilon\right\}\right) \le \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\, ES_i^+ + a_n ES_n^+\ .$$

Beweis: siehe Gänssler und Stute (1977), Satz 6.6.1., S. 229. □

2.2 Satz (Doobsche Ungleichung). *Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Sub-Martingal bzgl. der isotonen Folge von σ-Algebren $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt für alle $m < n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$*

$$\epsilon P\left(\left\{\max_{m \le i \le n} S_i \ge \epsilon\right\}\right) \le E|S_n|\ .$$

Beweis: siehe Gänssler und Stute (1977), Satz 6.6.7., S. 230. □

2.1 Mehrstichproben-U-Statistiken

U-Statistiken sind gut bekannt, vergleiche zum Beispiel Koroljuk und Borovskich (1994) oder Lee (1990). In der Literatur wird meistens der Einstichprobenfall betrachtet. Der Mehrstichprobenfall wird oft nur kurz mit der Bemerkung "funktioniert analog zum Einstichprobenfall" behandelt. Im folgenden werden einige Eigenschaften zusammengestellt. Zu Aussagen die nicht in Koroljuk und Borovskich (1994) bzw. Lee (1990) direkt auftauchen, habe ich die Beweise mit angegeben.
Die im folgenden benutzten Bezeichnungen beziehen sich nur auf diesen Abschnitt. Es seien $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^q$, $n = \sum_{i=1}^{q} n_i$ und $\xi_1^i, \ldots, \xi_{n_i}^i$ für $1 \leq i \leq q$ unabhängige Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ mit Werten in einem messbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$. Dabei besitzen ξ_k^i die Verteilung ν_i für alle $1 \leq k \leq n_i$. Des Weiteren sei $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^q$ mit $\mathbf{0} < \mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ und es sei $m := \sum_{i=1}^{q} m_i$. Dann sei $h : \mathfrak{X}^m \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{F}^m$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion, die jeweils in den m_i Variablen symmetrisch ist. Das heißt, für alle Permutationen π_i der jeweils m_i Koordinaten und für alle $\mathbf{x} = \left(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{m_q}^q\right) \in \mathfrak{X}^m$ gilt

$$h\left(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{m_q}^q\right) = h\left(x_{\pi_1(1)}^1, \ldots, x_{\pi_1(m_1)}^1, \ldots, x_{\pi_q(1)}^q, \ldots, x_{\pi_q(m_q)}^q\right).$$

Des Weiteren wird von der Funktion h wird gefordert, dass sie p-fach integrierbar ist. Das heißt, es existiert ein $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ und eine Konstante $\tilde{M}_p \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{M}_p := \int_{\mathfrak{X}^m} \left|h\left(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1, \ldots, y_1^q, \ldots, y_{m_q}^q\right)\right|^p \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) < \infty.$$

2.3 Definition. Unter der *q-Stichproben-U-Statistik* $U_{\mathbf{n}}(h)$ mit der so genannten Kernfunktion h vom Grad $\mathbf{m}$ versteht man folgendes Funktional

$$U_{\mathbf{n}}(h) := \prod_{i=1}^{q} \binom{n_i}{m_i}^{-1} \sum_{1 \leq i_1^1 < \ldots < i_{m_1}^1 \leq n_1} \cdots \sum_{1 \leq i_1^q < \ldots < i_{m_q}^q \leq n_q} h\left(\xi_{i_1^1}^1, ..., \xi_{i_{m_1}^1}^1, ..., \xi_{i_1^q}^q, ..., \xi_{i_{m_q}^q}^q\right).$$

Mit δ_x werde das Diracmaß im Punktes x bezeichnet.

2.4 Definition. Für einen Vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^q$ mit $\mathbf{0} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{m}$ und $d := \sum_{i=1}^{q} d_i$ sei $h_{\mathbf{d}} : \mathfrak{X}^d \to \mathbb{R}$ die zu h *assoziierte* Funktion definiert durch

$$\begin{aligned} & h_{\mathbf{d}}\left(x_1^1, \ldots, x_{d_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{d_q}^q\right) \\ & := \int_{\mathfrak{X}^m} h\left(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1, \ldots, y_1^q, \ldots, y_{m_q}^q\right) \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right). \end{aligned}$$

2.5 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & h_{\mathbf{d}} \text{ ist } \mathfrak{X}^d - \mathfrak{B}(\mathbb{R}) - \text{messbar}, \\ & h_{\mathbf{d}} \text{ ist jeweils in den } d_i \text{ Variablen symmetrisch}, \\ & h_{\mathbf{0}} = \mathsf{E}h\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{m_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{m_q}^q\right). \end{aligned}$$

2.6 Lemma. *Es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit $\tilde{M}_p < \infty$. Dann sind die Funktionen $h_{\mathbf{d}}$ p-fach Integrierbar und es existiert eine positive Konstante $C > 0$ für die gilt*

$$\mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{d_q}^q\right)\right|^p \leq C\tilde{M}_p.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1,\dots,\xi_{d_1}^1,\dots,\xi_1^q,\dots,\xi_{d_q}^q\right)\right|^p \\
&= \int_{\mathfrak{X}^d} |h_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})|^p \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^d} \left| \int_{\mathfrak{X}^m} h(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^q \left(\prod_{j=1}^{d_i} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\right|^p \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathfrak{X}^d} \left| \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \int_{\mathfrak{X}^d} h(\mathbf{y}) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\right|^p \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^d} \left| \mathsf{E} \int_{\mathfrak{X}^d} h\left(y_1^1,\dots,y_{d_1}^1,\xi_{d_1+1}^1\dots,\xi_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,y_{d_q}^q,\xi_{d_q+1}^q\dots,\xi_{m_q}^q\right)\right. \\
&\qquad \left. \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right|^p \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&\overset{Jensen}{\le} \int_{\mathfrak{X}^d} \mathsf{E} \left| \int_{\mathfrak{X}^d} h\left(y_1^1,\dots,y_{d_1}^1,\xi_{d_1+1}^1\dots,\xi_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,y_{d_q}^q,\xi_{d_q+1}^q\dots,\xi_{m_q}^q\right)\right. \\
&\qquad \left. \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right|^p \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \left| \int_{\mathfrak{X}^d} h(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&\overset{B.7}{=} \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \left| \int_{\mathfrak{X}^d} h(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^q \left(\sum_{k=0}^{d_i} \sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le d_i} (-1)^{d_i-k} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \prod_{j=1}^k \delta_{x_{l_j}^i}\left(dy_{l_j}^i\right) \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1,\dots,l_k\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \left| \int_{\mathfrak{X}^d} h(\mathbf{y}) \sum_{k_1=0}^{d_1} \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \cdots \sum_{k_q=0}^{d_q} \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \prod_{i=1}^q (-1)^{d_i-k_i} \right. \\
&\qquad \left. \prod_{j=1}^{k_i} \delta_{x_{l_j^i}^i}\left(dy_{l_j^i}^i\right) \prod_{j\in\{1,\dots d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&\le (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \\
&\qquad \left| \int_{\mathfrak{X}^d} h(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^q \left((-1)^{d_i-k_i} \prod_{j=1}^{k_i} \delta_{x_{l_j^i}^i}\left(dy_{l_j^i}^i\right) \prod_{j\in\{1,\dots d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\right|^p \\
&\qquad \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \\
&\quad \left| \int_{\mathfrak{X}^{d-k}} h\left(y_1^1,\dots,x_{l_1^1}^1,\dots,x_{l_{k_1}^1}^1,\dots,y_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,x_{l_1^q}^q,\dots,x_{l_{k_q}^q}^q,\dots,y_{m_q}^q\right)\right. \\
&\quad \left.\prod_{i=1}^q (-1)^{d_i-k_i} \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&\overset{Jensen}{\le} (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \\
&\quad \int_{\mathfrak{X}^{d-k}} \left| h\left(y_1^1,\dots,x_{l_1^1}^1,\dots,x_{l_{k_1}^1}^1,\dots,y_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,x_{l_1^q}^q,\dots,x_{l_{k_q}^q}^q,\dots,y_{m_q}^q\right) \prod_{i=1}^q (-1)^{d_i-k_i}\right|^p \\
&\quad \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&= (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \\
&\quad \int_{\mathfrak{X}^d} \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \int_{\mathfrak{X}^{d-k}} \left| h\left(y_1^1,\dots,x_{l_1^1}^1,\dots,x_{l_{k_1}^1}^1,\dots,y_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,x_{l_1^q}^q,\dots,x_{l_{k_q}^q}^q,\dots,y_{m_q}^q\right)\right|^p \\
&\quad \left(\prod_{i=1}^q \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dx_j^i\right)\right) \\
&\overset{Fubini}{=} (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \\
&\quad \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \int_{\mathfrak{X}^{d-k}} \int_{\mathfrak{X}^{d}} \left| h\left(y_1^1,\dots,x_{l_1^1}^1,\dots,x_{l_{k_1}^1}^1,\dots,y_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,x_{l_1^q}^q,\dots,x_{l_{k_q}^q}^q,\dots,y_{m_q}^q\right)\right|^p \\
&\quad \left(\prod_{i=1}^q\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dx_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \\
&= (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_q+1)^p \sum_{k_q=0}^{d_q} \binom{d_q}{k_q}^p \sum_{1\le l_1^q<\dots<l_{k_q}^q\le d_q} \\
&\quad \int_{\mathfrak{X}^{m-d}} \int_{\mathfrak{X}^{d-k}} \int_{\mathfrak{X}^{k}} \left| h\left(y_1^1,\dots,x_{l_1^1}^1,\dots,x_{l_{k_1}^1}^1,\dots,y_{m_1}^1,\dots,y_1^q,\dots,x_{l_1^q}^q,\dots,x_{l_{k_q}^q}^q,\dots,y_{m_q}^q\right)\right|^p \\
&\quad \left(\prod_{i=1}^q\prod_{j=1}^{k_i}\nu_i\left(dx_{l_j^i}^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j\in\{1,\dots,d_i\}/\{l_1^i,\dots,l_{k_i}^i\}} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^q \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \\
&\le (d_1+1)^p \sum_{k_1=0}^{d_1} \binom{d_1}{k_1}^p \sum_{1\le l_1^1<\dots<l_{k_1}^1\le d_1} \dots (d_r+1)^p \sum_{k_r=0}^{d_r} \binom{d_r}{k_r}^p \sum_{1\le l_1^r<\dots<l_{k_r}^r\le d_r} \tilde{M}_p \\
&\le C\tilde{M}_p.
\end{aligned}
$$

2.7 Definition. Eine Funktion $h : \mathfrak{X}^m \to \mathbb{R}$, die $\mathfrak{F}^m$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-messbar und integrierbar ist, heißt $\mathbf{d}$-degeneriert bezüglich $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$, wobei $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^q$ und $\mathbf{d} \leq \mathbf{m}$ ist, wenn gilt

$$h_{\mathbf{c}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{c_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{c_q}^q\right) = 0 \text{ P-f.s., für alle } \mathbf{c} \in \mathbb{N}_0^q \text{ mit } \mathbf{0} \leq \mathbf{c} < \mathbf{d},$$
$$h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{d_q}^q\right) \neq 0 \text{ P-f.s..}$$

Eine U-Statistik heißt $\mathbf{d}$-degeneriert, wenn ihr Kern $\mathbf{d}$-degeneriert ist.

Die Funktionen $h_{\mathbf{d}}$ sind $\mathbf{d}$-degenerierte Kerne.

2.8 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Des Weiteren sei $\mathbf{c} \in \mathbb{N}_0^q$ mit $\mathbf{c} < \mathbf{d}$ und es sei $c := \sum_{i=1}^{q} c_i$. Dann gilt für alle festen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^c$*

$$\mathsf{E}h_{\mathbf{d}}\left(x_1^1, \ldots, x_{c_1}^1, \xi_{c_1+1}^1, \ldots, \xi_{d_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{c_q}^q, \xi_{c_q+1}^q, \ldots, \xi_{d_q}^q\right) = 0 \ .$$

Beweis: Vergleiche Lee (1990), Theorem 2, Seite 28.. Aus $\mathbf{c} < \mathbf{d}$ folgt die Existenz eines i_0 mit $c_{i_0} < d_{i_0}$. Und damit folgt für ein beliebiges $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^c$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}h_{\mathbf{d}}\left(x_1^1, \ldots, x_{c_1}^1, \xi_{c_1+1}^1, \ldots, \xi_{d_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{c_r}^q, \xi_{c_r+1}^q, \ldots, \xi_{d_q}^q\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-c}} h_{\mathbf{d}}\left(x_1^1, \ldots, x_{d_1}^1, \ldots, x_1^q, \ldots, x_{d_q}^q\right) \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-c}} \left(\int_{\mathfrak{X}^m} h(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \right) \prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i} \nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathfrak{X}^{d-c-1}} \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} \int_{\mathfrak{X}^2} h(\mathbf{y}) \left(\delta_{x_{d_{i_0}}^{i_0}}\left(dy_{d_{i_0}}^{i_0}\right) - \nu_{i_0}\left(dy_{d_{i_0}}^{i_0}\right)\right) \nu_{i_0}\left(dx_{d_{i_0}}^{i_0}\right) \\
&\qquad \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \right) \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \nu_i\left(dx_j^i\right) \right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-c-1}} \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} \int_{\mathfrak{X}} \left(h\left(y_1^1, \ldots, x_{d_{i_0}}^{i_0}, \ldots, y_{m_q}^q\right) - \int_{\mathfrak{X}} h(\mathbf{y}) \nu_{i_0}\left(dy_{d_{i_0}}^{i_0}\right) \right) \nu_{i_0}\left(dx_{d_{i_0}}^{i_0}\right) \\
&\qquad \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \right) \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \nu_i\left(dx_j^i\right) \right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-c-1}} \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} \left(\int_{\mathfrak{X}} h\left(y_1^1, \ldots, x_{d_{i_0}}^{i_0}, \ldots, y_{m_q}^q\right) \nu_{i_0}\left(dx_{d_{i_0}}^{i_0}\right) - \int_{\mathfrak{X}} h(\mathbf{y}) \nu_{i_0}\left(dy_{d_{i_0}}^{i_0}\right) \right) \\
&\qquad \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \left(\delta_{x_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \right) \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \nu_i\left(dx_j^i\right) \right)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathfrak{X}^{d-c-1}} \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} 0 \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \left(\delta_{x_j^i} \left(dy_j^i \right) - \nu_i \left(dy_j^i \right) \right) \prod_{j=d_i+1}^{m_i} \nu_i \left(dy_j^i \right) \right) \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{q} \prod_{j=c_i+1}^{d_i}}_{(i,j)\neq(i_0,d_{i_0})} \nu_i \left(dx_j^i \right) \right)$$

$$= 0 \ .$$

□

2.9 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt insbesondere

- $\mathsf{E} h_{\mathbf{d}} \left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{d_q}^q \right) = 0.$
- $\left(h_{\mathbf{d}} \right)_{\mathbf{c}} \left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{c_1}^1, \ldots, \xi_1^q, \ldots, \xi_{c_q}^q \right) = 0$ P-f.s. für alle $\mathbf{c} \in \mathbb{N}_0^q$ mit $0 \leq \mathbf{c} < \mathbf{d}$.
- $\left(h_{\mathbf{d}} \right)_{\mathbf{d}} = h_{\mathbf{d}}$.

Man kann wieder U-Statistiken mit den degenerierten Kernfuntionen $h_{\mathbf{d}}$ bilden. Damit existiert eine Darstellung der U-Statistik als Summe von degenerierten U-Statistiken, die so genannte Hoeffding-Zerlegung.

2.10 Lemma (Hoeffding-Zerlegung)**.** *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt*

$$U_{\mathbf{n}} \left(h \right) = \mathsf{E} U_{\mathbf{n}} \left(h \right) + \underbrace{\sum_{d_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{d_q=0}^{m_q}}_{\mathbf{d}\neq\mathbf{0}} \binom{m_1}{d_1} \cdots \binom{m_q}{d_q} U_{\mathbf{n}} \left(h_{\mathbf{d}} \right)$$

Beweis: siehe Lee (1990), Theorem 3, S. 40. □

Zunächst sei an zwei Eigenschaften der bedingten Erwartung erinnert.

2.11 Satz (Streichen unabhängiger Anteile)**.** *Es sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ Sub-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, derart das $\sigma \left(\sigma \left(X \right) \cup \mathfrak{F}_1 \right)$ unabhängig von $\mathfrak{F}_2$ sind. Dann folgt*

$$\mathsf{E} \left(X | \sigma \left(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \right) \right) = \mathsf{E} \left(X | \mathfrak{F}_1 \right) \ .$$

Beweis: siehe Gänssler und Stute (1977), Übung 5.2.2., S. 203. □

2.12 Satz. *$Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega'', \mathfrak{A}'')$ und $Z : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ seien messbar und unabhängig, $T : \Omega'' \times \Omega' \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}'' \otimes \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}$ -messbar und $T \left(Y, Z \right)$ integrierbar. Dann gilt*

$$\mathsf{E} \left(T \left(Y, Z \right) | Z = x \right) = \mathsf{E} T \left(Y, x \right) \ \text{für } P_Z\text{-fast alle } x \in \Omega' \ .$$

Beweis: siehe Gänssler und Stute (1977), Satz 5.3.22, S. 199. □

Martingaleigenschaften für Mehrstichproben-U-Statistiken. Einstichproben-U-Statistiken besitzen folgende Martingaleigenschaften.

2.13 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt im Fall $q = 1$ für alle $1 \leq d_1 \leq m_1$*

$$\left(\binom{k}{d_1} U_k \left(h_{d_1} \right), \sigma \left(\left\{ \xi_j^1 \middle| 1 \leq j \leq k \right\} \right) \right)_{d_1 \leq k < \infty} \ \text{ist ein Martingal,}$$

$$\left(U_{n_1 - k} \left(h \right), \sigma \left(\left\{ U_{\bar{n}_1} \left(h \right) \middle| n_1 - k \leq \bar{n}_1 \leq n_1 \right\} \right) \right)_{0 \leq k \leq n_1 - m_1} \ \text{ist ein Martingal.}$$

Beweis: siehe Lee (1990), Theorem 1 und 2, S. 118 □

2.14 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt insbesondere

$$\left(U_{n_1-k}\left(h_{d_1}\right), \sigma\left(\left\{ U_{\bar{n}_1}\left(h_{d_1}\right) \middle| \, n_1 - k \leq \bar{n}_1 \leq n_1 \right\}\right)\right)_{0 \leq k \leq n_1 - d_1} \text{ ist ein Martingal.}$$

Auch Mehrstichproben-U-Statistiken besitzen Martingaleigenschaften. Im speziellen werden hier Martingale betrachtet, die nach $K \subseteq \mathbb{N}_0^q$ indiziert sind. Im Gegensatz zu Christofides und Serfling (1990) verwenden wir hier keine Ordnungsstatistiken.

2.15 Definition. Es sei $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in K\}$ eine Familie von Zufallselementen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\{\mathfrak{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in K\}$ eine Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$, für die gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathbf{l}} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathbf{n}} & \text{ für alle } \mathbf{l}, \mathbf{n} \in K \text{ mit } \mathbf{l} \leq \mathbf{n} \\ X_{\mathbf{n}} \text{ ist } \mathfrak{F}_{\mathbf{n}} & \text{ messbar und integrierbar für alle } \mathbf{n} \in K \\ \mathsf{E}\left(X_{\mathbf{n}} \middle| \, \mathfrak{F}_{\mathbf{l}}\right) = X_{\mathbf{l}} & \text{ für alle } \mathbf{l}, \mathbf{n} \in K \text{ mit } \mathbf{l} \leq \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Dann sagen wir $(X_{\mathbf{n}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in K}$ ist ein *Martingal.*

Analog zum Einstichprobenfall gilt für die degenerierten U-Statistiken folgende Martingalstruktur.

2.16 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Des Weiteren sei $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, q\}$ und für $i \notin I$ sei $k_i \in \mathbb{N}$ mit $d_i \leq k_i < \infty$ gegeben. Definiere für*
$\mathbf{k} \in K := \left\{ \bar{\mathbf{k}} \in \mathbb{N}_0^{|I|} \middle| \, d_i \leq \bar{k}_i < \infty, i \in I \right\}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathbf{k}} &:= \sigma\left(\left\{ \xi_j^i \middle| \, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq k_i \right\}\right) \\ S_{\mathbf{k}} &:= \prod_{i \in I} \binom{k_i}{d_i} U_{\tilde{\mathbf{k}}}\left(h_{\mathbf{d}}\right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{k}} \in \mathbb{N}_0^q$ mit $\tilde{k}_i = k_i$ sei. Dann gilt $(S_{\mathbf{k}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in K}$ ist ein Martingal.

Beweis: Der Beweis funktioniert analog zum Einstichprobenfall. Vergleiche Lee (1990), Theorem 1, S. 118 bzw. ausführlicher Antoni (2004), Lemma 1.6, S.15.
Es sei $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in K$ mit $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$. Dann gilt

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{k}} = \sigma\left(\left\{ \xi_j^i \middle| \, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq k_i \right\}\right) \subseteq \sigma\left(\left\{ \xi_j^i \middle| \, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq l_i \right\}\right) = \mathfrak{F}_{\mathbf{l}}.$$

Aus der Messbarkeit von h folgt die Messbarkeit von $h_{\mathbf{d}}$. Zusammen mit der Messbarkeit der ξ_j^i folgt, dass $S_{\mathbf{k}}$ bzgl. $\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}$ messbar ist. Aus $M_1 < \infty$ folgt die Integrierbarkeit von h, somit von $h_{\mathbf{d}}$ und auch von $S_{\mathbf{k}}$.
Um $\mathsf{E}\left(S_{\mathbf{l}} \middle| \, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right) = S_{\mathbf{k}}$ für alle $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in K$ mit $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ zu beweisen, zeigen wir für alle $l \in I$ die Gültigkeit von $\mathsf{E}\left(S_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_l} \middle| \, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right) = S_{\mathbf{k}}$. Es sei also $l \in I$ beliebig. Wir betrachten eine beliebige Teilmenge $\left\{j_1^i, \ldots, j_{d_i}^i\right\}$ von $\{1, \ldots, k_i\}$ für $1 \leq i \leq q, i \neq l$ und $\left\{j_1^l, \ldots, j_{d_l-1}^l\right\}$ von $\{1, \ldots, k_l\}$. Es sei $\xi^{\mathbf{J}} = \left(\xi_{j_1^1}, \ldots, \xi_{j_{d_q}^q}\right)$ ein $d-1$-dimensionaler Zuvallsvektor mit Verteilung $P_{\xi^{\mathbf{J}}}$. Dann folgt mit dem Faktorisierungssatz für bedingte Erwartungen 2.12 sowie der Degeneriertheit der Funktion $h_{\mathbf{d}}$, dass für $P_{\xi^{\mathbf{J}}}$-f.s. alle $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^{d-1}$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathsf{E}\left(h_{\mathbf{d}}\left(\xi_{j_1^1}, \ldots, \ldots, \xi^l_{j_1^l}, \ldots, \xi^l_{j^l_{d_l}}, \xi^l_{j^l_{k_l+1}} \ldots \ldots, \xi_{j^q_{d_q}} \right) \middle| \, \xi^{\mathbf{J}} = \mathbf{x} \right) \\ &= \mathsf{E}\left(h_{\mathbf{d}}\left(\xi^{\mathbf{J}}, \xi^l_{j^l_{k_l+1}} \right) \middle| \, \xi^{\mathbf{J}} = \mathbf{x} \right) \\ &\overset{2.12}{=} \mathsf{E} h_{\mathbf{d}}\left(\mathbf{x}, \xi^l_{j^l_{k_l+1}} \right) \\ &\overset{2.8}{=} 0 \, . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(S_{\mathbf{k}+\mathbf{e_l}}\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right) &= \mathsf{E}\left(\binom{k_l+1}{d_l}\prod_{i\in I\setminus\{l\}}\binom{k_i}{d_i}U_{\tilde{\mathbf{k}}+\mathbf{e_l}}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\sum\sum_{1\le j_1^l<\dots<j_{d_l}^l\le k_l+1} h_{\mathbf{d}}\left(\dots,\xi_{j_1^l}^l,\dots,\xi_{j_{d_l}^l}^l,\dots\right)\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)\\
&= \mathsf{E}\left(\sum\sum_{1\le j_1^l<\dots<j_{d_l}^l\le k_l} h_{\mathbf{d}}\left(\dots,\xi_{j_1^l}^l,\dots,\xi_{j_{d_l}^l}^l,\dots\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sum\sum_{1\le j_1^l<\dots<j_{d_l-1}^l\le k_l} h_{\mathbf{d}}\left(\dots,\xi_{j_1^l}^l,\dots,\xi_{j_{d_l-1}^l}^l,\xi_{j_{k_l+1}^l}^l,\dots\right)\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)\\
&= \mathsf{E}\left(S_{\mathbf{k}}+\sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{d}}\left(\xi^{\mathbf{J}},\xi_{j_{k_l+1}^l}^l\right)\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)\\
&= \mathsf{E}\left(S_{\mathbf{k}}\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)+\sum_{\mathbf{J}}\mathsf{E}\left(h_{\mathbf{d}}\left(\xi^{\mathbf{J}},\xi_{j_{k_l+1}^l}^l\right)\middle|\,\mathfrak{F}_{\mathbf{k}}\right)\\
&= S_{\mathbf{k}}+\sum_{\mathbf{J}}\mathsf{E}\left(h_{\mathbf{d}}\left(\xi^{\mathbf{J}},\xi_{j_{k_l+1}^l}^l\right)\middle|\,\left\{\xi_j^i\middle|\,1\le i\le q,1\le j\le k_i\right\}\right)\\
&\overset{2.11}{=} S_{\mathbf{k}}+\sum_{\mathbf{J}}\mathsf{E}\left(h_{\mathbf{d}}\left(\xi^{\mathbf{J}},\xi_{j_{k_l+1}^l}^l\right)\middle|\,\xi^{\mathbf{J}}\right)\\
&= S_{\mathbf{k}}\quad P\text{-f.s..}
\end{aligned}
$$

□

Analog zum Einstichprobenfall gilt eine "inverse" Martingaleigenschaft.

2.17 Lemma. *Es sei $M_1<\infty$. Definiere für $\mathbf{k}\in L:=\left\{\bar{\mathbf{k}}\in\mathbb{N}_0^q\middle|\,\mathbf{0}\le\bar{\mathbf{k}}\le\mathbf{n}-\mathbf{m}\right\}$*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\mathbf{k}} &:= \sigma\left(\left\{U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(h\right)\middle|\,\mathbf{n}-\mathbf{k}\le\bar{\mathbf{n}}\le\mathbf{n}\right\}\right)\\
T_{\mathbf{k}} &:= U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\left(h\right).
\end{aligned}
$$

Dann gilt $\left(T_{\mathbf{k}},\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{k}\in L}$ ist ein Martingal.

Beweis: Der Beweis funktioniert analog zum Einstichprobenfall. Vergleiche Lee (1990), Theorem 2, S. 118 bzw. ausführlicher Antoni (2004), Lemma 1.7, S.17.
Es sei $\mathbf{k},\mathbf{l}\in L$ mit $\mathbf{k}\le\mathbf{l}$. Daraus folgt $\mathbf{n}-\mathbf{k}\ge\mathbf{n}-\mathbf{l}$ und somit gilt

$$
\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}=\sigma\left(\left\{U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(h\right)\middle|\,\mathbf{n}-\mathbf{k}\le\bar{\mathbf{n}}\le\mathbf{n}\right\}\right)\subseteq\sigma\left(\left\{U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(h\right)\middle|\,\mathbf{n}-\mathbf{l}\le\bar{\mathbf{n}}\le\mathbf{n}\right\}\right)=\mathfrak{G}_{\mathbf{l}}\,.
$$

$T_{\mathbf{k}}=U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\left(h\right)$ ist $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$ messbar für alle $\mathbf{k}\in L$, da $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$ unter anderem von $U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\left(h\right)$ erzeugt wird. Aus $M_1<\infty$ folgt die Integrierbarkeit von h und somit auch von $U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\left(h\right)$.
Es bleibt, für $\mathbf{k},\mathbf{l}\in L$ mit $\mathbf{k}\le\mathbf{l}$

$$
\mathsf{E}\left(T_{\mathbf{l}}\middle|\,\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right)=T_{\mathbf{k}}
$$

zu zeigen. Der Beweis wird analog zu Antoni (2004), Lemma 1.7, geführt. Zunächst zeigen wir, dass für jede Teilmenge $\left\{j_1^i,\dots,j_{m_i}^i\right\}$ von $\{1,\dots,n_i-k_i\}$ für $1\le i\le q$

$$
\mathsf{E}\left(h\left(\xi_{j_1^1}^1,\dots,\xi_{j_{m_1}^1}^1,\dots,\xi_{j_1^q}^q,\dots,\xi_{j_{m_q}^q}^q\right)\middle|\,\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right)=\mathsf{E}\left(h\left(\xi_1^1,\dots,\xi_{m_1}^1,\dots,\xi_1^q,\dots,\xi_{m_q}^q\right)\middle|\,\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right)\,.
$$

Dies ist äquivalent zu

$$\int_G h\left(\xi^1_{j^1_1},\ldots,\xi^1_{j^1_{m_1}},\ldots,\xi^q_{j^q_1},\ldots,\xi^q_{j^q_{m_q}}\right)dP=\int_G h\left(\xi^1_1,\ldots,\xi^1_{m_1},\ldots,\xi^q_1,\ldots,\xi^q_{m_q}\right)dP \quad \forall G\in\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\ .$$

Es genügt, die Gleichheit der Integrale auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$ zu zeigen. Dazu betrachte folgende Darstellung der σ-Algebra $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$,

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}=\sigma\left(\bigcup_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)^{-1}(\mathfrak{B})\right)=\sigma(\mathcal{E})\ \text{,wobei}$$

$$\mathcal{E}:=\left\{\bigcap_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}\,\middle|\,\bar{\mathbf{n}}\in\mathbb{N}_0^q\ ,B_{\bar{\mathbf{n}}}\in\mathfrak{B}\right\}\ .$$

Diese Darstellung gilt, da zu jedem $G\in\bigcup_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)^{-1}(\mathfrak{B})$ existiert ein $\bar{\mathbf{n}}\in\mathbb{N}_0^q$ mit $\mathbf{n}-\mathbf{k}\le\bar{\mathbf{n}}\le\mathbf{n}$ und ein $B\in\mathfrak{B}$ mit $G=\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B\}$. Somit gilt $G\in\sigma(\mathcal{E})$. Sei jetzt $G\in\mathcal{E}$. Dann existieren Mengen $B_{\bar{\mathbf{n}}}\in\mathfrak{B}$, so dass $G=\bigcap_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}$. Da aber $\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}\in\bigcup_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)^{-1}(\mathfrak{B})$ für alle $\bar{\mathbf{n}}$ und $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$ Durchschnittsstabil ist, folgt $G\in\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}$. Und somit gilt die obige Gleichung. $\mathcal{E}$ ist Durchschnittsstabil, da für alle $G_1,G_2\in\mathcal{E}$ gilt

$$G_1\cap G_2=\left\{\bigcap_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}\right\}\bigcap\left\{\bigcap_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B'_{\bar{\mathbf{n}}}\}\right\}=\bigcap_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}\{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)\in B_{\bar{\mathbf{n}}}\cap B'_{\bar{\mathbf{n}}}\}\in\mathcal{E}.$$

Aus der Symmetrie der Kernfunktion h folgt, dass $U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)$ für alle $\bar{\mathbf{n}}\in\mathbb{N}_0^q$ mit $\mathbf{n}-\mathbf{k}\le\bar{\mathbf{n}}\le\mathbf{n}$ invariant bzgl. jeder Permutation π_i von n_i-k_i Koordinaten der $\xi^i_1,\ldots,\xi^i_{n_i-k_i}$ für alle $1\le i\le q$ sind. Das heißt, für jede Teilmenge $\left\{j^i_1,\ldots,j^i_{m_i}\right\}$ von $\{1,\ldots,n_i-k_i\}$ für $1\le i\le q$ gilt

$$\begin{aligned}U_{\bar{\mathbf{n}}}(h)&=U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(\xi^1_1,\ldots,\xi^1_{\bar{n}_1},\ldots,\xi^q_1,\ldots,\xi^q_{\bar{n}_q}\right)\\&=U_{\bar{\mathbf{n}}}\Big(\xi^1_{j^1_1},\ldots,\xi^1_{j^1_{m_1}},\xi^1_{r^1_1},\ldots,\xi^1_{r^1_{n_1-k_1-m_1}},\xi^1_{n_1-k_1+1},\ldots,\xi^1_{\bar{n}_1},\ldots,\\&\qquad\xi^q_{j^q_1},\ldots,\xi^q_{j^q_{m_q}},\xi^q_{r^q_1},\ldots,\xi^q_{r^q_{n_q-k_q-m_q}},\xi^q_{n_q-k_q+1},\ldots,\xi^q_{\bar{n}_q}\Big),\end{aligned}$$

wobei

$$\left\{r^i_1,\ldots,r^i_{n_i-k_i-m_i}\right\}=\{1,\ldots,n_i-k_i\}\setminus\left\{j^i_1,\ldots,j^i_{m_i}\right\}.$$

Definiere die n-dimensionalen Zufallsvektoren $\xi^{\mathbf{1}}$ und $\xi^{\mathbf{J}}$ durch

$$\begin{aligned}{\xi^{\mathbf{1}}}_{i,l}&:=\xi^i_l\\{\xi^{\mathbf{J}}}_{i,l}&:=\begin{cases}\xi^i_{j^i_l} & 1\le l\le m_i\\ \xi^i_{r^i_{l-m_i}} & m_i+1<l\le n_i-k_i\\ \xi^i_l & n_i-k_i<l\le n_i\end{cases}\qquad 1\le i\le q,1\le l\le n_i.\end{aligned}$$

Aus der identischen Verteilung innerhalb einer Stichprobe folgt, dass

$$\left(\xi^i_{j^i_1},\ldots,\xi^i_{j^i_{m_i}},\xi^i_{r^i_1},\ldots,\xi^i_{r^i_{n_i-k_i-m_i}},\xi^i_{n_i-k_i+1},\ldots,\xi^i_{n_i}\right)\stackrel{\mathscr{L}}{=}\left(\xi^i_1,\ldots,\xi^i_{n_i}\right),$$

und somit gilt $\xi^{\mathbf{1}}\stackrel{\mathscr{L}}{=}\xi^{\mathbf{J}}$.

Damit erhalten wir für alle $G \in \mathcal{E}$, wobei G die Darstellung $G = \bigcap\limits_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}} \{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h) \in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}$ besitzt, dass

$$\begin{aligned}
&\int_G h\left(\xi^1_{j^1_1}, \ldots, \xi^1_{j^1_{m_1}}, \ldots, \xi^q_{j^q_1}, \ldots, \xi^q_{j^q_{m_q}}\right) dP \\
&= \int_\Omega 1_{\left\{\bigcap\limits_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}} \{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h) \in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}\right\}} h\left(\xi^1_{j^1_1}, \ldots, \xi^1_{j^1_{m_1}}, \ldots, \xi^q_{j^q_1}, \ldots, \xi^q_{j^q_{m_q}}\right) dP \\
&= \int_\Omega g\left(\xi^{\mathbf{J}}\right) dP \quad \text{, wobei } g : \mathfrak{X}^n \to \mathbb{R} \text{ eine integrierbare Abbildung ist.} \\
&= \int_{\mathfrak{X}^n} g(\mathbf{x})\, P_{\xi^{\mathbf{J}}}(d\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^n} g(\mathbf{x})\, P_{\xi^{\mathbf{1}}}(d\mathbf{x}) \\
&= \int_\Omega g\left(\xi^{\mathbf{1}}\right) dP \\
&= \int_\Omega 1_{\left\{\bigcap\limits_{\bar{\mathbf{n}}=\mathbf{n}-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}} \{U_{\bar{\mathbf{n}}}(h) \in B_{\bar{\mathbf{n}}}\}\right\}} h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right) dP \\
&= \int_G h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right) dP\ .
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $\mathbf{k} \in L$

$$\mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_{j^1_1}, \ldots, \xi^1_{j^1_{m_1}}, \ldots, \xi^q_{j^q_1}, \ldots, \xi^q_{j^q_{m_q}}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) = \mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{k}} &= \mathsf{E}\left(T_{\mathbf{k}}\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) = \mathsf{E}\left(U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}(h)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^q \binom{n_i - k_i}{m_i}^{-1} \sum h\left(\xi^1_{j^1_1}, \ldots, \xi^1_{j^1_{m_1}}, \ldots, \xi^q_{j^q_1}, \ldots, \xi^q_{j^q_{m_q}}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^q \binom{n_i - k_i}{m_i}^{-1} \sum \mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_{j^1_1}, \ldots, \xi^1_{j^1_{m_1}}, \ldots, \xi^q_{j^q_1}, \ldots, \xi^q_{j^q_{m_q}}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^q \binom{n_i - k_i}{m_i}^{-1} \sum \mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right).
\end{aligned}$$

Letztendlich folgt für $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in L$ mit $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$, dass

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(T_{\mathbf{l}}\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{l}}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(h\left(\xi^1_1, \ldots, \xi^1_{m_1}, \ldots, \xi^q_1, \ldots, \xi^q_{m_q}\right)\middle|\, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}\right) \\
&= T_{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

□

2.18 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Definiere für beliebiges $0 < \mathbf{d} \leq \mathbf{m}$ und $\mathbf{k} \in \tilde{L} := \left\{ \bar{\mathbf{k}} \in \mathbb{N}_0^q \middle| \mathbf{0} \leq \bar{\mathbf{k}} \leq \mathbf{n} - \mathbf{d} \right\}$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\mathbf{k}} := \sigma\left(\left\{ U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(h_{\mathbf{d}}\right) \middle| \mathbf{n} - \mathbf{k} \leq \bar{\mathbf{n}} \leq \mathbf{n} \right\}\right)$$
$$\tilde{T}_{\mathbf{k}} := U_{\mathbf{n}-\mathbf{k}}\left(h_{\mathbf{d}}\right).$$

Dann gilt $\left(\tilde{T}_{\mathbf{k}}, \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{k}\in\tilde{L}}$ ist ein Martingal.

2.19 Lemma. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der vorangegangenen Lemmata folgt für beliebiges $1 \leq i \leq q$, dass*

$$\begin{aligned} \left(S_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}\right)_{d_i \leq k < \infty} \quad & \textit{für } \mathbf{k} \in K, \\ \left(T_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}, \mathfrak{G}_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}\right)_{0 \leq k \leq n_i - m_i} \quad & \textit{für } \mathbf{k} \in L, \\ \left(\tilde{T}_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}, \tilde{\mathfrak{G}}_{\mathbf{k}+(k-k_i)\mathbf{e_i}}\right)_{0 \leq k \leq n_i - d_i} \quad & \textit{für } \mathbf{k} \in \tilde{L} \end{aligned}$$

eindimensionale zeitdiskrete Martingale sind.

Somit sind für diese Martingale Maximalungleichungen wie die von Doob 2.2 oder Chow 2.1 anwendbar.

Momentenungleichung für Mehrstichproben-U-Statistiken.

2.20 Lemma. *Es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit $\tilde{M}_p < \infty$. Dann existiert eine von p abhängende Konstante $C_p > 0$ für die gilt*

$$\mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p \leq C_p \mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_q}^q\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^q n_i^{d_i}\right)^{-a(p)},$$

wobei $a(p)$ wie folgt definiert ist,

$$a(p) := \begin{cases} p - 1 & 1 \leq p \leq 2 \\ \frac{1}{2}p & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Beweis: *Der Beweis wird durch Vollständige Induktion über q geführt. Dabei wird eine Momentenungleichung für gewöhnliche U-Statistiken benutzt. Aus Antoni (2004), Satz 2.1 Seite 29, folgt folgende Ungleichung.*

Sei U_n eine d-degenerierte U-Statistik vom Grad m mit Kern h und es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit $\tilde{M}_p < \infty$. Dann existiert eine positive von p abhängende Konstante C_p, so dass gilt

$$\mathsf{E}\left|U_n - \mathsf{E}U_n\right|^p \leq C_p \mathsf{E}\left|h\left(X_1, \ldots, X_m\right)\right|^p n^{-da(p)}.$$

Im folgenden sei $C_p > 0$ eine positive generische von p abhängende Konstante. Es sei $q = 1$. Dann ist $U_{n_1}\left(h_{d_1}\right)$ eine d_1-degenerierte zentrierte U-Statistik, erfüllt also die Voraussetzungen der obigen Ungleichung, und es gilt

$$\mathsf{E}\left|U_{n_1}\left(h_{d_1}\right)\right|^p \leq C_p \mathsf{E}\left|h_{d_1}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_1}^1\right)\right|^p n_1^{-d_1 a(p)}.$$

Daraus ergibt sich der Induktionsanfang. Es gelte nun die Behauptung für $q - 1$. Dann betrachte für festen Vektor $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^{n_q}$ die Funktion $g_{\mathbf{x}} : \mathfrak{X}^{d - d_q} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_{\mathbf{x}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}\right) := \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right).$$

Für alle festen $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^{n_q}$ ist $g_{\mathbf{x}}$ ein Kern vom Grad $\bar{\mathbf{d}} = (d_1, \ldots, d_{q-1})$, der $\bar{\mathbf{d}}$-degeneriert bezüglich der Maße $(\nu_1, \ldots, \nu_{q-1})$ ist. Denn es sei $\mathbf{c} \in \mathbb{N}_0^{q-1}$ mit $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} < \bar{\mathbf{d}}$. Dann gilt für die zum Kern $g_{\mathbf{x}}$ assoziierte Funktion $g_{\mathbf{x},\mathbf{c}}$

$$
\begin{aligned}
& g_{\mathbf{x},\mathbf{c}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{c_{q-1}}^{q-1}\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-d_q}} g_{\mathbf{x}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}\right) \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=1}^{c_i} \left(\delta_{\xi_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=c_i+1}^{d_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d-d_q}} \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=1}^{c_i} \left(\delta_{\xi_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=c_i+1}^{d_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \\
&= \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} \int_{\mathfrak{X}^{d-d_q}} h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \prod_{i=1}^{q-1} \prod_{j=1}^{c_i} \left(\delta_{\xi_j^i}\left(dy_j^i\right) - \nu_i\left(dy_j^i\right)\right) \prod_{j=c_i+1}^{d_i} \nu_i\left(dy_j^i\right) \\
&= \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} \left(h_{\mathbf{d}}\right)_{(c_1, \ldots, c_{q-1}, d_q)}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{c_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \\
&= 0 \ \textit{P-f.s., da } h_{\mathbf{d}} \ \mathbf{d}\textit{-degeneriert ist.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_{\mathbf{x},\bar{\mathbf{d}}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{\bar{d}_{q-1}}^{q-1}\right) \stackrel{analog}{=} \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} \left(h_{\mathbf{d}}\right)_{(d_1, \ldots, d_{q-1}, d_q)}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \\
&= \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \\
& \neq 0 \ \textit{P-f.s., da } h_{\mathbf{d}} \ \mathbf{d}\textit{-degeneriert ist.}
\end{aligned}
$$

Somit ist die Induktionsvoraussetzung auf die $(q-1)$-Stichproben-U-Statistik $U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(g_{\mathbf{x}}\right)$, wobei $\bar{\mathbf{n}} = (n_1, \ldots, n_{q-1})$, mit dem $\bar{\mathbf{d}}$-degenerierten Kern $g_{\mathbf{x}}$ anwendbar. Und es gilt für alle festen $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^{n_q}$

$$
E\left|U_{\bar{\mathbf{n}}}\left(g_{\mathbf{x}}\right)\right|^p \leq C_p E\left|g_{\mathbf{x}}\left(\xi_1^1, \ldots, \xi_{d_{q-1}}^{q-1}\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^{q-1} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)}. \tag{2.1}
$$

Nun betrachte für festen Vektor $\mathbf{y} \in \mathfrak{X}^{d-d_q}$ die Abbildung $\tilde{g}_{\mathbf{y}} : \mathfrak{X}^{d_q} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
\tilde{g}_{\mathbf{y}}\left(x_1, \ldots, x_{d_q}\right) := h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}, x_1, \ldots, x_{d_q}\right).
$$

Es gilt für alle $\mathbf{y} \in \mathfrak{X}^{d-d_q}$ und alle $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^{n_q}$, dass

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1, \ldots, y_{d_{q-1}}^{q-1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \\
&= \binom{n_q}{d_q}^{-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{d_q} \leq n_q} \tilde{g}_{\mathbf{y}}\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d_q}}\right) \\
&= U_{n_q}\left(\tilde{g}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x}\right).
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$\tilde{g}_{\mathbf{y}}$ ist d_q-degeneriert bezüglich ν_q. Denn es sei $0 \leq c_q < d_q$. Dann gilt für die zum Kern $\tilde{g}_{\mathbf{y}}$ assoziierte Funktion $\tilde{g}_{\mathbf{y},c_q}$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mathbf{y},c_q}\left(\xi_1^q,\ldots,\xi_{c_q}^q\right) &= \int_{\mathfrak{X}^{d_q}} \tilde{g}_{\mathbf{y}}\left(x_1,\ldots,x_{d_q}\right) \prod_{j=1}^{c_q}\left(\delta_{\xi_j^q}\left(dx_j\right)-\nu_q\left(dx_j\right)\right) \prod_{j=c_q+1}^{d_q} \nu_q\left(dx_j\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{d_q}} h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1,\ldots,y_{d_{q-1}}^{q-1},x_1,\ldots,x_{d_q}\right) \prod_{j=1}^{c_q}\left(\delta_{\xi_j^q}\left(dx_j\right)-\nu_q\left(dx_j\right)\right) \prod_{j=c_q+1}^{d_q} \nu_q\left(dx_j\right) \\
&= \left(h_{\mathbf{d}}\right)_{(d_1,\ldots,d_{q-1},c_q)}\left(y_1^1,\ldots,y_{d_{q-1}}^{q-1},\xi_1^q,\ldots,\xi_{c_q}^q\right) \\
&= 0 \ P\text{-f.s., da } h_{\mathbf{d}} \ \mathbf{d}\text{-degeneriert ist.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mathbf{y},d_q}\left(\xi_1^q,\ldots,\xi_{d_q}^q\right) &\overset{analog}{=} \left(h_{\mathbf{d}}\right)_{(d_1,\ldots,d_{q-1},d_q)}\left(y_1^1,\ldots,y_{d_{q-1}}^{q-1},\xi_1^q,\ldots,\xi_{d_q}^q\right) \\
&= h_{\mathbf{d}}\left(y_1^1,\ldots,y_{d_{q-1}}^{q-1},\xi_1^q,\ldots,\xi_{d_q}^q\right) \\
&\neq 0 \ P\text{-f.s., da } h_{\mathbf{d}} \ \mathbf{d}\text{-degeneriert ist.}
\end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsanfang auf die Ein-Stichproben-U-Statistik $U_{n_q}\left(\tilde{g}_{\mathbf{y}}\right)$ mit dem d_q-degenerierten Kern $\tilde{g}_{\mathbf{y}}$ anwendbar. Und es gilt für alle festen $\mathbf{y} \in \mathfrak{X}^{d-d_q}$

$$E\left|U_{n_q}\left(\tilde{g}_{\mathbf{y}}\right)\right|^p \leq C_p E\left|\tilde{g}_{\mathbf{y}}\left(\xi_1^q,\ldots,\xi_{d_q}^q\right)\right|^p n_q^{-d_q a(p)}. \tag{2.3}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned}
&E\left|U_{\mathbf{n}}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p = E\left|U_{\mathbf{n}}\left(h_{\mathbf{d}},\xi_1^1,\ldots,\xi_{n_q}^q\right)\right|^p \\
&= \int_{\mathfrak{X}^n}\left|U_{\mathbf{n}}\left(h_{\mathbf{d}},x_1^1,\ldots,x_{n_q}^q\right)\right|^p \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{n_i}\nu_i\left(dx_j^i\right) \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathfrak{X}^{n_q}} E\left|U_{\mathbf{n}}\left(h_{\mathbf{d}},\xi_1^1,\ldots,\xi_{n_{q-1}}^{q-1},x_1^q,\ldots,x_{n_q}^q\right)\right|^p \prod_{j=1}^{n_q}\nu_q\left(dx_j^q\right) \\
&= \int_{\mathfrak{X}^{n_q}} E\left|U_{\tilde{\mathbf{n}}}\left(g_{\mathbf{x}},\xi_1^1,\ldots,\xi_{n_{q-1}}^{q-1}\right)\right|^p \prod_{j=1}^{n_q}\nu_q\left(dx_j^q\right) \\
&\overset{(2.1)}{\leq} \int_{\mathfrak{X}^{n_q}} C_p E\left|g_{\mathbf{x}}\left(\xi_1^1,\ldots,\xi_{d_{q-1}}^{q-1}\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^{q-1} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)} \prod_{j=1}^{n_q}\nu_q\left(dx_j^q\right) \\
&\overset{Fubini}{=} C_p \int_{\mathfrak{X}^{n_q+d-d_q}} \left|g_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}\right)\right|^p \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dy_j^i\right) \prod_{j=1}^{n_q}\nu_q\left(dx_j^q\right) \left(\prod_{i=1}^{q-1} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{(2.2)}{=} C_p \int_{\mathfrak{X}^{n_q+d-d_q}} \left|U_{n_q}\left(\tilde{g}_{\mathbf{y}},\mathbf{x}\right)\right|^p \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dy_j^i\right) \prod_{j=1}^{n_q}\nu_q\left(dx_j^q\right) \left(\prod_{i=1}^{q-1} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{Fubini}{=} C_p \int_{\mathfrak{X}^{d-d_q}} E\left|U_{n_q}\left(\tilde{g}_{\mathbf{y}},\xi_1^q,\ldots,\xi_{n_q}^q\right)\right|^p \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dy_j^i\right) \left(\prod_{i=1}^{q-1} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{(2.3)}{\leq} C_p \int_{\mathfrak{X}^{d-d_q}} E\left|\tilde{g}_{\mathbf{y}}\left(\xi_1^q,\ldots,\xi_{d_q}^q\right)\right|^p n_q^{-d_q a(p)} \prod_{i=1}^{q-1}\prod_{j=1}^{d_i}\nu_i\left(dy_j^i\right) \left(\prod_{i=1}^{q} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{Fubini}{=} C_p E\left|h_{\mathbf{d}}\left(\xi_1^1,\ldots,\xi_{d_q}^q\right)\right|^p \left(\prod_{i=1}^{q} n_i^{d_i}\right)^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

2.2 Der mehrdimensionale Skorokhodraum

Es seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^q$ mit $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Des Weiteren betrachten wir den Raum $D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, welcher eine Verallgemeinerung des Raumes $D([0,1]^q)$ im Sinne von Neuhaus (1971) ist. Der Raum $D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ist eine kanonische Erweiterung des Raumes $D[0,1]$. Das heißt, der Fall $q = 1$ entspricht dem klassischen Raum der rechtsseitig stetigen Funktionen, bei denen die linksseitigen Grenzwerte existieren. Das q-dimensionale Analogon wird mithilfe der so genannten Quadrantengrenzwerte definiert. Für $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und $I = \{i_1, \ldots, i_{\tilde{q}}\} \subseteq \{1, \ldots, q\}$ definiere

$$Q_I(\mathbf{t}_0) := \left\{ \mathbf{t} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \,|\, t_{i_j} < t_{0,i_j} \quad j \in I,\, t_{i_j} \geq t_{0,i_j} \quad j \in \{1, \ldots, q\} \setminus I \right\}.$$

Der Raum $D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ist die Menge aller Funktionen $x : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$, so dass für alle Elemente I der Potenzmenge von $\{1, \ldots, q\}$, alle $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und alle Folgen $(\mathbf{t}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Q_I(\mathbf{t}_0)$ mit $\mathbf{t}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{t}_0$ die folgenden Grenzwerte existieren.

$$x(\mathbf{t}_0 + 0_I) := \lim_{n\to\infty} x(\mathbf{t}_n) \qquad \text{und} \qquad x(\mathbf{t}_0) = x(\mathbf{t}_0 + 0_\emptyset).$$

Analog zum Eindimensionalen gilt $C[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset l^\infty[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Vollkommen analog definiert man den Raum $D(\mathbb{R}^q)$, für den ebenfalls offensichtlich gilt $C(\mathbb{R}^q) \subset D(\mathbb{R}^q)$. Wir betrachten den Raum $D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ mit der Skorokhod-Metrik s_q. Es sei

$$\Lambda := \{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) |\, \lambda_i : [a_i, b_i] \to [a_i, b_i] \text{ homöomorph mit } \lambda_i(a_i) = a_i \text{ und } \lambda_i(b_i) = b_i \}.$$

Für ein $\mathbf{t} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ bezeichne $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t}) = (\lambda_1(t_1), \ldots, \lambda_q(t_q))$.

2.21 Satz. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ konvergiert gegen ein $x \in D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ bzgl. der Skorokhod-Metrik s_q, $x_n \xrightarrow{n\to\infty}_{s_q} x$, genau dann wenn eine Folge $(\boldsymbol{\lambda}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ existiert, so dass gilt*

$$\sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x_n(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t})) - x(\mathbf{t})| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{t}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Beweis: siehe Neuhaus (1971) , (2.3) und (2.4), S. 1289. □

Analog zum Eindimensionalen sind die Projektionen $\pi_\mathbf{t} : D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ mit $\pi_\mathbf{t}(x) = x(\mathbf{t})$ für ein $\mathbf{t} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ bzgl. der von der Metrik s_q erzeugten Borel σ-Algebra messbar, vergleiche Neuhaus (1971), Seite 1290 nach Theorem 2.1. Ein Grund für die Benutzung der Metrik s_q ist, dass diese Messbarkeitseigenschaft nicht für die von der Supremumsnorm erzeugte Borel σ-Algebra gilt. Für eine beliebige Teilmenge $F \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sei $g_F : D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ die Abbildung definiert durch

$$g_F(x) := \sup_{\mathbf{t}\in F} x(\mathbf{t}).$$

Diese Abbildung spielt bei den Stetigkeitssätzen für das Argmax-Funktional eine Rolle. Die Abbildung g_F ist stetig auf $l^\infty[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ versehen mit der Supremumsmetrik. In Jacod und Shiryaev (2000) wird für ein beliebiges $c \geq 0$ und alle in c stetigen Funktionen $x \in D[0, \infty)$ die s_1-Stetigkeit der Abbildung $g_{[0,c]}$ in x gezeigt.

2.22 Lemma. *Es gilt*

(1) g_F *ist* $\mathfrak{B}(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q) - \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *-messbar.*

(2) $C[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *ist eine Teilmenge der s_q-Stetigkeitsmenge von g_F.*

Beweis: Zu (1). Für alle $x \in D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und alle $\mathbf{t}_0 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ existieren die Quadrantengrenzwerte $x(\mathbf{t}_0 + 0_I)$. Somit gilt

$$g_F(x) = \sup_{\mathbf{t}\in F} x(\mathbf{t}) = \sup_{\mathbf{t}\in F\cap\mathbb{Q}^d} x(\mathbf{t}).$$

Aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^d$ und der Messbarkeit der Projektionen folgt der erste Teil.

Zu (2) betrachte ein beliebiges $x \in C[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty}_{s_q} x$. Mit Satz 2.21 existiert eine Folge $(\boldsymbol{\lambda}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ mit

$$(*) \qquad \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x_n(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t})) - x(\mathbf{t})| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{t}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|g_F(x_n) - g_F(x)| &= \left|\sup_{\mathbf{t}\in F} x_n(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{t}\in F} x(\mathbf{t})\right| \\
&\overset{B.3}{\leq} \sup_{\mathbf{t}\in F} |x_n(\mathbf{t}) - x(\mathbf{t})| \\
&\leq \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x_n(\mathbf{t}) - x(\mathbf{t})| \\
&\leq \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x_n(\mathbf{t}) - x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right)\right| + \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right) - x(\mathbf{t})\right|.
\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{\lambda}_n$ ein Homöomorphismus auf $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x_n(\mathbf{t}) - x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right)\right| &= \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x_n(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t})) - x(\mathbf{t})| \\
\sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right) - x(\mathbf{t})\right| &= \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x(\mathbf{t}) - x(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t}))|.
\end{aligned}$$

Da x stetig und $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ eine Kompakte Menge ist, folgt die gleichmäßige Stetigkeit von x auf $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Somit folgt aus $(*)$

$$\begin{aligned}
|g_F(x_n) - g_F(x)| &\leq \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x_n(\mathbf{t}) - x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right)\right| + \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \left|x\left(\boldsymbol{\lambda}_n^{-1}(\mathbf{t})\right) - x(\mathbf{t})\right| \\
&= \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x_n(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t})) - x(\mathbf{t})| + \sup_{\mathbf{t}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |x(\mathbf{t}) - x(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t}))| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

Des Weiteren betrachten wir Linearkombinationen von Funktionen in $D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Man beachte, dass analog zum Eindimensionalen die Addition zweier Funktionen nicht stetig bzgl. der Skorokhodtopologieen ist. $(S, d)^q$ bezeichne die Produkttopologie bzgl. eines ein beliebigen metrischen Raumes (S, d).

2.23 Lemma. *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig und $T_{\alpha,\beta} : (D[\mathbf{a}, \mathbf{b}])^2 \to D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Dabei sei $T_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$T_{\alpha,\beta}(x_1, x_2)(\mathbf{t}) := \alpha x_1(\mathbf{t}) + \beta x_2(\mathbf{t}).$$

Dann gilt,

(1) *T ist nicht $(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q)^2$ - $(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q)$ -stetig.*

(2) *$D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times C[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cup C[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times D[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ liegt in der $(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q)^2$ - $(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q)$ -Stetigkeitsmenge von T.*

Beweis: Vergleiche zum Beispiel Jacod und Shiryaev (2000) Abschnitt VI, 1.22 bzw. 1.23 auf der Seite 329. Dort wird der Eindimensionale Fall bewiesen. Diese Beweise lassen auf beliebiges $q \in \mathbb{N}$ übertragen. □

Später haben wir es mit Zufallselementen, im Raum $D([-d, d]^q)$ zu tun. Diese erweisen sich als Linearkombination von unabhängigen Zufallselementen in $D[-d, d]$.

2.24 Lemma. *Es sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig und $S : (D[-d,d])^q \to D([-d,d]^q)$. Dabei sei $S(x_1,\ldots,x_q) : [-d,d]^q \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$S(x_1,\ldots,x_q)(\mathbf{t}) := \sum_{i=1}^{q} x_i(t_i).$$

Dann gilt, S ist $(D[-d,d], s_1)^q$-$(D([-d,d]^q), s_q)$-stetig.

Beweis: Es sei $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (D[-d,d])^q$ und $\mathbf{x} \in (D[-d,d])^q$, wobei $\mathbf{x}_n$ gegen $\mathbf{x}$ in der Produkttopologie konvergiert. Die Produkttopologie entspricht der koordinatenweise Konvergenz. Somit konvergieren die Folgen $x_{i,n} \xrightarrow{n\to\infty}_{s_1} x_i$ für $1 \le i \le q$. Mit Satz 2.21 existieren für $1 \le i \le q$ Folgen $(\lambda_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ von Homöomorphismen auf $[-d,d]$ mit

$$\sup_{t\in[-d,d]} |x_{i,n}(\lambda_{i,n}(t)) - x_i(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \sup_{t\in[-d,d]} |\lambda_{i,n}(t) - t| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daraus folgt $\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \|\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{t}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ mit $\boldsymbol{\lambda}_n = (\lambda_{1,n},\ldots,\lambda_{q,n})$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} |S\circ\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\lambda}_n(\mathbf{t})) - S\circ\mathbf{x}(\mathbf{t})| &= \sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left| \sum_{i=1}^{q} x_{i,n}(\lambda_{i,n}(t_i)) - \sum_{i=1}^{q} x_i(t_i) \right| \\
&\le \sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \sum_{i=1}^{q} |x_{i,n}(\lambda_{i,n}(t_i)) - x_i(t_i)| \\
&\le \sum_{i=1}^{q} \sup_{-d\le t\le d} |x_{i,n}(\lambda_{i,n}(t)) - x_i(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.21 folgt die Behauptung. □

Aufgrund des letzten Lemmas genügt es uns, die Verteilungskonvergenz für Zufallselemente auf $D[a,b]$ zu charakterisieren, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ ist.

2.25 Satz. *X_n, $n \in \mathbb{N}$ und X seien Zufallselemente definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $D[a,b]$ versehen mit der Skorokhodmetrik s_1. Des Weiteren gelte*

(i) $(X_n(t_1),\ldots,X_n(t_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} (X(t_1),\ldots,X(t_k))$ *für alle endlichen Teilmengen* $\{t_1,\ldots,t_k\} \subseteq [a,b]$.

(ii) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist straff.*

Dann gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} X$ in $D[a,b]$.

Beweis: siehe Billingsley (1968), Theorem 15.1, S. 124. □

2.26 Definition (Stetigkeitsmodul)**.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann definiere den Stetigkeitsmodul w für ein $\delta > 0$

$$w(f,\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |s-t|<\delta}} |f(s) - f(t)|.$$

2.27 Satz. *X_n, $n \in \mathbb{N}$ und X seien Zufallselemente definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $D[a,b]$ versehen mit der Skorokhodmetrik s_1. Des Weiteren gelte*

(i) *Zu jedem $\eta > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $P(|X_n(a)| > \delta) \le \eta$ gilt.*

(ii) *Zu jedem $\eta > 0$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $0 < \delta < 1$ und ein n_0, so dass für alle $n \ge n_0$ $P(w(X_n,\delta) > \epsilon) \le \eta$ gilt.*

Dann gilt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff.

Beweis: siehe Billingsley (1968), Theorem 15.5, S. 127. □

2.28 Satz. *X sei ein Zufallselement definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $D[a,b]$ versehen mit der Skorokhodmetrik s_1. Dann gilt für jede Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ mit $t_i - t_{i-1} \geq \delta$ für $2 \leq i \leq r-1$ dass*

$$P\left(w\left(X,\delta\right) > 3\epsilon\right) \leq \sum_{i=1}^{r} P\left(\sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i} \left|X\left(s\right) - X\left(t_{i-1}\right)\right| > \epsilon\right).$$

Beweis: In Billingsley (1968), Korollar zu Theorem 8.3, S. 56, wird der Satz für $C[a,b]$ bewiesen. Im Falle von $D[a,b]$ geht der Beweis analog. □

Eine allgemeine Theorie zur Verteilungskonvergenz von Zufallselementen auf metrischen Räumen findet man zum Beispiel bei Billingsley (1968). Konvergenzkriterien für Zufallselemente auf dem Raum $(D[\mathbf{a},\mathbf{b}], s_q)$ findet man bei Neuhaus (1971) bzw. bei Bickel und Wichura (1971). Konvergenzkriterien für Zufallselemente im l^∞ versehen mit der Supremumsmetrik findet man unter anderen bei van der Vaart und Wellner (1996).

2.3 Stetigkeitssätze für das Argmax-Funktional

Allgemein gilt für stetige Abbildungen das Continuous Mapping Theorem (CMT).

2.29 Satz (CMT)**.** *Es seien (S,d) und (S',d') metrische Räume, sowie X_n, $n \in \mathbb{N}$, und X Zufallselemente definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in S. Es sei $h : S \to S'$ eine $\mathfrak{B}(S) - \mathfrak{B}(S')$-messbare Abbildung mit $P(h \text{ unstetig in } X) = 0$. Dann gilt:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} X \Longrightarrow h\left(X_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} h\left(X\right) \;.$$

Beweis: siehe Gänssler und Stute (1977), folgt aus Satz 8.4.16., S. 345. □

Es seien M und M_n, $n \in \mathbb{N}$ stochastische Prozesse über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Pfaden in $D(\mathbb{R}^q)$. Des Weiteren konvergiere $M_n \rightsquigarrow M$ für $n \to \infty$ in einem gewissen funktionalen Sinne. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Übertragung der Konvergenz auf die Maximalstellen. Das Folgende ist eine Zusammenstellung aus der Vorlesung "Stochastische Prozesse mit Strukturbrüchen" gelesen von Ferger (2005) und eines unveröffentlichten Manuskripts von Ferger (2006). Wir definieren für ein $x \in D(\mathbb{R}^q)$ die Menge der Maximalstellen $\arg(x)$ und Supremalstellen $\operatorname{Arg}(x)$ durch

$$\begin{aligned} \arg\left(x\right) &:= \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q : x\left(\mathbf{t}\right) = \sup_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^q} x\left(\mathbf{s}\right)\right\} \\ \operatorname{Arg}\left(x\right) &:= \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q : \max_{I\subseteq\{1,\ldots,q\}} x\left(\mathbf{t} + 0_I\right) = \sup_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^q} x\left(\mathbf{s}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Besitzt der Grenzprozess eine eindeutige Maximalstelle, dann überträgt sich die *f.s.*-Konvergenz.

2.30 Satz. *Seien M und M_n, $n \in \mathbb{N}$ stochastische Prozesse über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für die jeweils P-f.s. gilt:*

(1) $\left(M_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D\left(\mathbb{R}^q\right)$

(2) $\tau_n \in Arg\left(M_n\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

(3) $M \in D\left(\mathbb{R}^q\right)$

(4) $Arg\left(M\right) = arg\left(M\right) = \{\tau\}$

(5) *zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert* $\max_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} \{M\left(t\right) : \|\mathbf{t} - \tau\| \geq \epsilon\}$

(6) $\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} \left|M_n\left(\mathbf{t}\right) - M\left(\mathbf{t}\right)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *in* $\mathbb{R}$.

Dann folgt $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} \tau$ P-f.s. in $\mathbb{R}^q$.

Beweis: In Ferger (2005) wurde der Fall $q = 1$ behandelt. Der Beweis lässt sich auf $q \geq 1$ übertragen. Dazu sei

$$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : (1), \ldots, (6) \text{ erfüllt.}\} \Longrightarrow P(\Omega_0) = 1.$$

Es sei $\omega \in \Omega_0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Aus (5) folgt die Existenz eines $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0(\epsilon)$ mit $\|\mathbf{t}_0 - \tau\| \geq \epsilon$. Insbesondere ist $\mathbf{t}_0 \neq \tau$ und mit (4) folgt $M(\tau) > M(\mathbf{t}_0)$. Mit (6) existiert ein $n_0 = n_0(\mathbf{t}_0) = n_0(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sup_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q} |M_n(\mathbf{t}) - M(\mathbf{t})| \leq \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)).$$

Es sei $n \geq n_0$ und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ mit $\|\mathbf{t} - \tau\| > \epsilon$, dann folgt

$$\begin{aligned} &(7) \qquad M(\tau) - M_n(\tau) \leq \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)), \\ &(8) \qquad M_n(\mathbf{t}) - M(\mathbf{t}) \leq \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)). \end{aligned}$$

Und es gilt

$$\begin{aligned} (9) \qquad M_n(\tau) &\overset{(7)}{\geq} M(\tau) - \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) \\ &\overset{(8)}{\geq} M(\tau) - \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) + M_n(\mathbf{t}) - M(\mathbf{t}) - \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) \\ &\overset{\text{Def. von } \mathbf{t}_0}{>} M(\tau) - \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) + M_n(\mathbf{t}) - M(\mathbf{t}_0) - \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) \\ &= M_n(\mathbf{t}) + \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)). \end{aligned}$$

Mit (4) folgt $M(\tau) > M(\mathbf{t}_0)$ und es gilt $M_n(\tau) > M_n(\mathbf{t})$. Des Weiteren sei $(\mathbf{t}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Q_I(\mathbf{t})$ für eine beliebiges $I \subseteq \{1, \ldots, q\}$ mit $\mathbf{t}_k \xrightarrow{k \to \infty} \mathbf{t}$. Dann existiert ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{t}_k\| \leq \frac{\|\mathbf{t} - \tau\| - \epsilon}{2}.$$

Somit folgt

$$\|\mathbf{t}_k - \tau\| \geq \|\mathbf{t} - \tau\| - \|\mathbf{t}_k - \mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{t} - \tau\| - \frac{\|\mathbf{t} - \tau\| - \epsilon}{2} = \frac{\|\mathbf{t} - \tau\|}{2} + \frac{\epsilon}{2} > \epsilon.$$

Somit gilt für alle $n \geq n_0$ und für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ mit $\|\mathbf{t} - \tau\| > \epsilon$:

$$\begin{aligned} M_n(\tau) &= \lim_{k \to \infty} M_n(\tau) \\ &\overset{(9)}{\geq} \lim_{k \to \infty} M_n(\mathbf{t}_k) + \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) \\ &= M_n(\mathbf{t} + 0_I) + \frac{1}{3}(M(\tau) - M(\mathbf{t}_0)) \\ &> M_n(\mathbf{t} + 0_I). \end{aligned}$$

Angenommen es existiert ein $n \geq n_0$ mit $\|\tau_n - \tau\| > \epsilon$, dann folgt

$$M_n(\tau) > \max_{I \subseteq \{1, \ldots, q\}} M_n(\tau_n + 0_I).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (2), $\tau_n \in Arg(M_n)$. Somit existiert für beliebiges $\epsilon > 0$ ein n_0 mit $\|\tau_n - \tau\| \leq \epsilon$. Das heißt, $\Omega_0 \subset \left\{w \in \Omega : \tau_n \xrightarrow{n \to \infty} \tau\right\}$, und es folgt die Behauptung wegen

$$P\left(\tau_n \xrightarrow{n \to \infty} \tau\right) \geq P(\Omega_0) = 1.$$

□

Für ein $d \in \mathbb{N}$ und $x \in D(\mathbb{R}^q)$ bezeichnen wir mit $x^{(d)}$ die auf $[-d, d]^q$ eingeschränkte Funktion, also ist $x^{(d)} \in D([-d, d]^q)$.

2.31 Satz. *Seien M und M_n, $n \in \mathbb{N}$ stochastische Prozesse über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit*

(1) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\mathbb{R}^q)$ *P-f.s.*

(2) $\tau_n \in arg(M_n)$ *P-f.s. und* $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}(\mathbb{R}^q)$ *-messbar für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\tau_n = O_P(1)$

(4) $M \in C(\mathbb{R}^q)$ *P-f.s.*

(5) $arg(M) = \{\tau\}$ *P-f.s.*

(6) $M_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} M^{(d)}$ *in* $(D([-d, d]^q), s_q)$ *für alle* $d \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau$ *in* $\mathbb{R}^q$.

Beweis: Der Beweis wird ähnlich zu Ferger (2006) geführt. Ohne Einschränkung gelten (1), (4)-(6) und $\tau_n \in arg(M_n)$ für alle $\omega \in \Omega$. Es sei F eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^q$. Dann folgt für alle $d \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_n \in F\} \subseteq \{\tau_n \in F \cap [-d, d]^q\} \cup \{\tau_n \notin [-d, d]^q\}.$$

Des Weiteren gilt

$$\{\tau_n \in F \cap [-d, d]^q\} \subseteq \left\{ \sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \geq \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \right\}.$$

Denn aus $'' <''$ folgte

$$M_n(\tau_n) \leq \sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) < \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \leq \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} M_n(\mathbf{t}) \stackrel{(2)}{=} M_n(\tau_n).$$

Wir betrachten für eine festes F und $d \in \mathbb{N}$ folgende Funktionen

$$g_1 : D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} \qquad g_1(x) := \sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} x(\mathbf{t})$$

$$g_2 : D[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} \qquad g_2(x) := \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} x(\mathbf{t}).$$

Mit Lemma 2.22 folgt die $\mathfrak{B}(D[\mathbf{a}, \mathbf{b}], s_q) - \mathfrak{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit der Funktionen g_1 und g_2. Ebenfalls folgt mit Lemma 2.22 sowie aus der Voraussetzung (4), dass die Pfade von M in der s_q-Stetigkeitsmenge der Funktionen g_1 und g_2 liegen. Mit Lemma 2.23 folgt, dass die Pfade von M in der s_q-Stetigkeitsmenge der Funktion $g_1 - g_2$ liegen. Mit dem Stetigkeitsatz 2.29 angewendet auf $g_1 - g_2$ folgt somit aus der Voraussetzung (6)

$$g_1\left(M_n^{(d)}\right) - g_2\left(M_n^{(d)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} g_1\left(M^{(d)}\right) - g_2\left(M^{(d)}\right) \text{ in } \mathbb{R}.$$

Mit der Voraussetzung (2) gilt $\{\omega \in \Omega : \tau_n \in F \cap [-d, d]^q\} \in \mathfrak{A}$. Aus den Voraussetzungen (4) und (5) sowie der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^q$ folgt die $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}(\mathbb{R}^q)$-Messbarkeit von τ. Mit dem Portmanteau Theorem, vergleiche zum Beispiel Gänssler und Stute (1977), Satz 8.4.9., S. 342., folgt, da $[0, \infty)$ abgeschlossenen:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P(\tau_n \in F \cap [-d, d]^q) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \geq \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M_n(\mathbf{t}) \in [0,\infty)\right) \\
&\le P\left(\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) \in [0,\infty)\right) \\
&= P\left(\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) \ge \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t})\right) \\
&\le P\left(\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) \ge \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}), \tau\in[-d,d]^q\right) + P\left(\tau\notin[-d,d]^q\right).
\end{aligned}
$$

Da F Abgeschlossen ist, folgt die Kompaktheit der Menge $F\cap[-d,d]^q$. Aus der Stetigkeit von M, Voraussetzung (4), existiert somit ein $\tilde{\tau}\in F\cap[-d,d]^q$ mit $M(\tilde{\tau}) = \sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t})$. Aus $\tau\in[-d,d]^q$ und $\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) \ge \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t})$ folgt

$$
M(\tau) = \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} M(\mathbf{t}) = \sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) = \sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) = M(\tilde{\tau}).
$$

Aus (5) folgt dann

$$
\left\{\sup_{\mathbf{t}\in F\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}) \ge \sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}^q\setminus F)\cap[-d,d]^q} M(\mathbf{t}), \tau\in[-d,d]^q\right\} \subseteq \left\{\tau\in F\cap[-d,d]^q\right\} \subseteq \{\tau\in F\}.
$$

Des Weiteren gilt $\bigcap_{d\in\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega : \tau(\omega)\notin[-d,d]^q\} = \emptyset$. Und es folgt mit der σ-Stetigkeit von P

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P(\tau_n\in F) &= \lim_{d\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(\tau_n\in F) \\
&\le \lim_{d\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(\tau_n\in F\cap[-d,d]^q\right) + \lim_{d\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(\tau_n\notin[-d,d]^q\right) \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{d\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(\tau_n\in F\cap[-d,d]^q\right) \\
&\le \lim_{d\to\infty} P(\tau\in F) + P\left(\tau\notin[-d,d]^q\right) = P(\tau\in F).
\end{aligned}
$$

Da dies für beliebige abgeschlossene Mengen $F\subset\mathbb{R}^q$ gilt, folgt mit dem Portmanteau Theorem die Behauptung. □

In Ferger (2005) wurde der Fall $q = 1$ behandelt, siehe auch Ferger (2004). Ersetzt man die Bedingung (6) durch

$$
(6') \qquad M_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} M^{(d)} \text{ in } \left(l^\infty\left([-d,d]^q\right), d_q\right) \text{ für alle } d\in\mathbb{N},
$$

wobei d_q die Supremumsmetrik sei, dann erhält man den Stetigkeitssatz für das Argmax-Funktional von van der Vaart und Wellner (1996), siehe Theorem 3.2.2 auf Seite 286. Der folgende Satz ist das Gegenstück zu Satz 2.31 für Prozesse mit Indexmenge $\mathbb{Z}^q$. Man beachte, dass hier sogar eine Grenzwertaussage für die Maximalstellenmengen hergeleitet wird. Überdies kann auf die Eindeutigkeitsvoraussetzung (5) in 2.31 verzichtet werden.

2.32 Satz. *Seien M und M_n, $n \in \mathbb{N}$ stochastische Prozesse über* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *mit*

(1) $\quad (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{R}\}$ *P-f.s.*

(2) $\quad \emptyset \neq \Gamma_n \subseteq Arg\,(M_n)$ *P-f.s. für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\quad \lim\limits_{d\to\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} P\left(\Gamma_n \nsubseteq [-d,d]^q\right) = 0$

(4) $\quad M \in \{x : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{R}\}$ *P-f.s.*

(5) $\quad \emptyset \neq \Gamma = Arg\,(M)$ *P-f.s.*

(6) $\quad M_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} M^{(d)}$ *in* $\mathbb{R}^{(2d+1)^q}$ *für alle* $d \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\limsup_{n\to\infty} P\left(\Gamma_n \cap F \neq \emptyset\right) \leq P\left(\Gamma \cap F \neq \emptyset\right) \quad \forall F \subset \mathbb{Z}^q$.

Beweis: siehe Ferger (2006). □

Man beachte, dass in der Voraussetzung (6) des letzten Satzes 2.32 nur "einfache" Verteilungskonvergenz im euklidischen Raum vorausgesetzt wird. Besitzt der Grenzprozess eine eindeutige Maximalstelle, dann folgt aus dem letzten Satz 2.32 mit dem Portmanteau Theorem Verteilungskonvergenz für jede Maximalstellenfolge. Als Grenzprozess erhalten wir bei den lokalen Alternativen einen Gaußprozess. Unter bestimmten Voraussetzungen besitzen diese Prozesse eine eindeutige Maximalstelle.

2.33 Satz (Lifshits)**.** *Es sei* $M = \left\{M(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d\right\}$ *ein stetiger Gaußprozess mit*

$$\mathsf{E}M(\mathbf{t}) \xrightarrow{\|\mathbf{t}\|\to\infty} -\infty$$
$$\mathsf{E}\left(M(\mathbf{s}) - M(\mathbf{t})\right)^2 \neq 0 \;\forall\; \mathbf{s} \neq \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Dann besitzt der Prozess M eine eindeutige Maximalstelle P-f.s..

Beweis: Folgt mithilfe eines Satzes von Lifshits (1982), oder vergleiche Theorem 1.1 auf Seite 72 in Ferger (1999). □

3 Change-Point-Schätzung mit U-Statistiken

Kommen wir nun zurück zum Change-Point Problem. Wir befinden uns in der Situation, wie in Abschnitt 1 beschrieben. Der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ für den Change-Point $\boldsymbol{\theta}$ wurde definiert durch

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = argmax\left(\left|\rho_n\left(\mathbf{t}\right)\right|,\ \mathbf{t} \in G_n\right).$$

Dabei ist ρ_n definiert durch

$$\rho_n\left(\mathbf{t}\right) = \begin{cases} \kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right) & \mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner war für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}$ die $(q+1)$-Stichproben-U-Statistik $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right)$ mit Kernfunktion h vom Grad $\mathbf{m} = (m_0, \ldots, m_q)$ definiert durch

$$U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right) := \prod_{i=0}^{q} \binom{[nt_{i+1}] - [nt_i]}{m_i}^{-1} \sum_{1 \le j_1^0 < \cdots < j_{m_0}^0 \le [nt_1]} \cdots \sum_{[nt_i] \le j_1^i < \cdots < j_{m_i}^i \le [nt_{i+1}]} \cdots \sum_{[nt_q]+1 \le j_1^q < \cdots < j_{m_q}^q \le n} h\left(X_{j_1^0,n}, \ldots, X_{j_{m_0}^0,n}, \ldots, X_{j_1^q,n}, \ldots, X_{j_{m_q}^q,n}\right).$$

Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung der Folge von Prozessen $\left(\rho_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\rho_n\left(\mathbf{t}\right) = \rho_n\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right)$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\left(\rho_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D\left(\mathbb{R}^q\right)$. Des Weiteren nimmt der Prozess ρ_n für festes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Werte an. Somit haben wir keine Messbarkeitsprobleme.
Die $(q+1)$-Stichproben-U-Statistiken $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\left(h\right)$ hat nicht nur *i.i.d.* Stichproben. Sie lässt sich allerdings als Summe über $(2q+1)$-Stichproben-U-Statistiken mit *i.i.d.* Stichproben schreiben. In Abhängigkeit der Lage von $\mathbf{t}$ zu $\boldsymbol{\theta}$ ergeben sich verschieden Zerlegungen.
Für $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_q) \in \left\{\mathbb{N}_0^{q+1} \middle| \sum_{i=0}^{q} z_i = q\right\}$ setze $z_0' = 0$ und $z_i' := \sum_{j=0}^{i-1} z_i$. Damit definiere folgende Teilmengen $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}} \subset H$ durch

$$H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}} := \left\{\mathbf{t} \in H \middle| t_i \le \theta_{z_i'+1} < \cdots < \theta_{z_i'+z_i} < t_{i+1} \quad 0 \le i \le q\right\}.$$

Das heißt z_i bzw. z_i' entspricht der Anzahl der Change-Points im Intervall $[t_i, t_{i+1})$ bzw. im Intervall $[0, t_i)$. Somit lässt sich die Menge H in $(q+1)!$ disjunkte Teilmengen zerlegen.

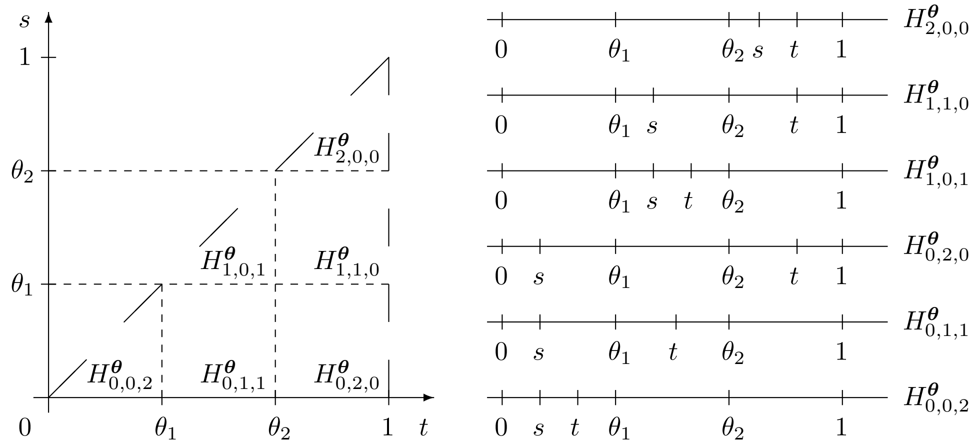


Abbildung 1: Im Fall $q = 2$ wird das offene Dreieck $\{0 < s < t < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ in 6 Teilmengen zerlegt.

Aufgrund der Übersichtlichkeit werden wir uns meistens auf den Fall $q = 2$ beschränken. Die Betrachtungen gehen für allgemeines q analog. Es gelte für Multinomialkoeffizienten die Konvention

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_l} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} k_i!} = 0 \quad \text{wenn } n < k_i \text{ für ein } 1 \le i \le l.$$

Für $0 < \theta_1 < s < t \le \theta_2 < 1$ und hinreichend grosses n lässt sich $U_{\mathbf{n}(s,t)}(h)$ auch schreiben als

$$\begin{aligned}
U_{\mathbf{n}(s,t)}(h) &= \binom{[ns]}{m_0}^{-1} \binom{[nt]-[ns]}{m_1}^{-1} \binom{n-[nt]}{m_2}^{-1} \sum_{1 \le j_{0,1} < \cdots < j_{0,m_0} \le [ns]} \\
&\quad \sum_{[ns]+1 \le j_{1,1} < \cdots < j_{1,m_1} \le [nt]} \; \sum_{[nt]+1 \le j_{2,1} < \cdots < j_{2,m_2} \le n} h\left(X_{j_{0,1},n}, \ldots, X_{j_{2,m_2},n}\right) \\
&= \binom{[ns]}{m_0}^{-1} \binom{[nt]-[ns]}{m_1}^{-1} \binom{n-[nt]}{m_2}^{-1} \\
&\quad \sum_{u=0}^{m_0} 1_{m_0-u \le [ns]-[n\theta_1]} \sum_{1 \le j_{0,1} < \cdots < j_{0,u} \le [n\theta_1]} \; \sum_{[n\theta_1]+1 \le j_{0,u+1} < \cdots < j_{0,m_0} \le [ns]} \; \sum_{[ns]+1 \le j_{1,1} < \cdots < j_{1,m_1} \le [nt]} \\
&\quad \sum_{v=0}^{m_2} 1_{v \le [n\theta_2]-[nt]} \sum_{[nt]+1 \le j_{2,1} < \cdots < j_{2,v} \le [n\theta_2]} \; \sum_{[n\theta_2]+1 \le j_{2,v+1} < \cdots < j_{2,m_2} \le n} h\left(X_{j_{0,1},n}, \ldots, X_{j_{2,m_2},n}\right) \\
&= \sum_{u=0}^{m_0} 1_{m_0-u \le [ns]-[n\theta_1]} \sum_{v=0}^{m_2} 1_{v \le [n\theta_2]-[nt]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} \\
&\quad \binom{[n\theta_1]}{u}^{-1} \binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}^{-1} \binom{[nt]-[ns]}{m_1}^{-1} \binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}^{-1} \binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}^{-1} \\
&\quad \sum_{1 \le j_{0,1} < \cdots < j_{0,u} \le [n\theta_1]} \; \sum_{[n\theta_1]+1 \le j_{0,u+1} < \cdots < j_{0,m_0} \le [ns]} \; \sum_{[ns]+1 \le j_{1,1} < \cdots < j_{1,m_1} \le [nt]} \\
&\quad \sum_{[nt]+1 \le j_{2,1} < \cdots < j_{2,v} \le [n\theta_2]} \; \sum_{[n\theta_2]+1 \le j_{2,v+1} < \cdots < j_{2,m_2} \le n} h\left(X_{j_{0,1},n}, \ldots, X_{j_{2,m_2},n}\right) \\
&= \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} U_{\mathbf{n}(\theta_1,s,t,\theta_2)}(h). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Dabei ist $U_{\mathbf{n}(\theta_1,s,t,\theta_2)}(h)$ eine 5-Stichproben U-Statistik mit Kernfunktion h vom
Grad $(u, m_0 - u, m_1, v, m_2 - v)$, deren Stichproben jeweils *i.i.d.* sind. Im allgemeinen Fall lässt sich für $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)$ jeweils auf den Mengen $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}$ eine solche Darstellung finden. Diese tauchen später in den Beweisen auf.

3.1 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$ und $q = 2$. Dann gilt für $(s,t) \in H_{(m_0,m_1,m_2),n}$*

$$\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(s,t)}(h) = \begin{cases} \sum_{u=0}^{m_2} \sum_{v=0}^{m_2-u} \frac{\binom{[n\theta_1]-[nt]}{u}\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-u-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} \mu_{(m_0+m_1+u,v,m_2-u-v),n} \\ \hfill 0 < s < t \leq \theta_1 < \theta_2 < 1 \\ \sum_{u=0}^{m_1} \sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]-[ns]}{u}\binom{[nt]-[n\theta_1]}{m_1-u}}{\binom{[nt]-[ns]}{m_1}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} \mu_{(m_0+u,m_1-u+v,m_2-v),n} \\ \hfill 0 < s \leq \theta_1 < t \leq \theta_2 < 1 \\ \sum_{u=0}^{m_1} \sum_{v=0}^{m_1-u} \frac{\binom{[n\theta_1]-[ns]}{u}\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{v}\binom{[nt]-[n\theta_2]}{m_1-u-v}}{\binom{[nt]-[ns]}{m_1}} \mu_{(m_0+u,v,m_1-u-v+m_2),n} \\ \hfill 0 < s \leq \theta_1 < \theta_2 < t \leq 1 \\ \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} \mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n} \\ \hfill 0 < \theta_1 < s < t \leq \theta_2 \leq 1 \\ \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_1} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[ns]}{v}\binom{[nt]-[n\theta_2]}{m_1-v}}{\binom{[nt]-[ns]}{m_1}} \mu_{(u,m_0-u+v,m_1-v+m_2),n} \\ \hfill 0 < \theta_1 < s \leq \theta_2 \leq t \leq 1 \\ \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_0-u} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{v}\binom{[ns]-[n\theta_2]}{m_1-u-v}}{\binom{[ns]}{m_0}} \mu_{(u,v,m_0-u-v+m_1+m_2),n} \\ \hfill 0 < \theta_1 < \theta_2 < s < t \leq 1. \end{cases}$$

Beweis: Wir führen den Beweis beispielhaft am Spezialfall $0 < \theta_1 < s < t < \theta_2 < 1$. Für die anderen Situationen geht es analog. Es gilt

$$\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(s,t)}(h) \overset{(3.1)}{=} \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}} \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,s,t,\theta_2)}(h).$$

Weiter gilt für festes u und v

$$\begin{aligned} \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,s,t,\theta_2)}(h) &= \binom{[n\theta_1]}{u}^{-1} \binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}^{-1} \binom{[nt]-[ns]}{m_1}^{-1} \binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}^{-1} \binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}^{-1} \\ &\quad \sum_{1 \leq j_{0,1} < \cdots < j_{0,u} \leq [n\theta_1]} \; \sum_{[n\theta_1]+1 \leq j_{0,u+1} < \cdots < j_{0,m_0} \leq [ns]} \; \sum_{[ns]+1 \leq j_{1,1} < \cdots < j_{1,m_1} \leq [nt]} \\ &\quad \sum_{[nt]+1 \leq j_{2,1} < \cdots < j_{2,v} \leq [n\theta_2]} \; \sum_{[n\theta_2]+1 \leq j_{2,v+1} < \cdots < j_{2,m_2} \leq n} \mathsf{E}h\left(X_{j_{0,1},n}, \ldots, X_{j_{2,m_2},n}\right) \\ &= \binom{[n\theta_1]}{u}^{-1} \binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}^{-1} \binom{[nt]-[ns]}{m_1}^{-1} \binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}^{-1} \binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}^{-1} \\ &\quad \sum_{1 \leq j_{0,1} < \cdots < j_{0,u} \leq [n\theta_1]} \; \sum_{[n\theta_1]+1 \leq j_{0,u+1} < \cdots < j_{0,m_0} \leq [ns]} \; \sum_{[ns]+1 \leq j_{1,1} < \cdots < j_{1,m_1} \leq [nt]} \\ &\quad \sum_{[nt]+1 \leq j_{2,1} < \cdots < j_{2,v} \leq [n\theta_2]} \; \sum_{[n\theta_2]+1 \leq j_{2,v+1} < \cdots < j_{2,m_2} \leq n} \mu_{(u,m_0-u,m_1,v,m_2-v),n} \\ &= \mu_{(u,m_0-u,m_1,v,m_2-v),n}. \end{aligned}$$

□

Eine explizite Darstellung von $\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)$ für beliebiges $q \in \mathbb{N}$ findet man im Anhang A.

3.1 Konsistenz

Für $\epsilon > 0$ werde betrachtet

$$\Delta_n(\epsilon) := P\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})| > \epsilon\right).$$

Nun bestimmen wir in Abhängigkeit von einem festen $n \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke für $\Delta_n(\epsilon)$. Dazu sei für $q \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$

$$a_n(p,q) := \begin{cases} n^{-(p-1)+(2-p)q} & 1 \le p < 2 \\ n^{-1}(\ln n)^q & p = 2 \\ n^{-\frac{1}{2}p} & 2 < p < \infty \end{cases} \quad \text{und} \quad a(p) := \begin{cases} p-1 & 1 \le p \le 2 \\ \frac{1}{2}p & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Man beachte, dass für $q < q'$ gilt

$$n^{-a(p)} = a_n(p,0) \le a_n(p,q) \le a_n(p,q').$$

3.2 Lemma. *Es sei $\epsilon > 0$ und es existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$. Dann existiert eine von p abhängende Konstante $C > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt*

$$\Delta_n(\epsilon) \le C M_p \epsilon^{-p} \kappa_n^p \; a_n(p,q).$$

Beweis: Der Beweis wird für den Spezialfall $q = 2$ geführt. Des Weiteren sei $\mathbf{m} \ge \mathbf{1}$. Sind einige $m_i = 0$, so vereinfacht sich der Beweis. Im folgenden sei $C > 0$ eine positive generische von p abhängende Konstante.
ρ_n und $\mathsf{E}\rho_n$ sind Treppenfunktionen mit den gleichen Sprungstellen, da die Abhängigkeit von $\mathbf{t}$ nur durch $[n\mathbf{t}]$ gegeben ist.

$$\begin{aligned}
&\Delta_n(\epsilon) = P\left(\sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} |\rho_n(s,t) - \mathsf{E}\rho_n(s,t)| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\max_{0\le k<l\le n} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > \epsilon\right) \\
&\le \quad P\left(\max_{0\le k<l\le[n\theta_1]} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\max_{0\le k\le[n\theta_1]<l\le[n\theta_2]} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\max_{0\le k\le[n\theta_1]<[n\theta_2]<l\le n} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\max_{[n\theta_1]<k<l\le[n\theta_2]} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\max_{[n\theta_1]<k\le[n\theta_2]<l\le n} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\max_{[n\theta_2]<k<l\le n} \left|\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right| > C\epsilon\right) =: \sum_{i=1}^{6} P_i.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die Technik Beispielhaft am Fall P_4 vorführen. Hierbei wird die 3-Stichproben-U-Statistik $U_{\mathbf{n}(s,t)}(h)$ in eine 5-Stichproben U-Statistik mit *i.i.d.* Stichproben zerlegt.
Für $[n\theta_1] < k < l \le [n\theta_2]$ und $\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \in H_{\mathbf{m},n}$ gilt

$$U_{\mathbf{n}\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)}(h) \overset{(3.1)}{=} \sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \; \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \; U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h).$$

Dabei ist $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h)$ eine 5-Stichproben-U-Statistik mit Kernfunktion h vom Grad $(u, m_0-u, m_1, v, m_2-v)$. Auf diese wenden wir die Hoeffding Zerlegung an.

$$\begin{aligned}
&U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) \\
&\overset{2.10}{=} \underbrace{\sum_{d_1=0}^{u}\sum_{d_2=0}^{m_0-u}\sum_{d_3=0}^{m_1}\sum_{d_4=0}^{v}\sum_{d_5=0}^{m_2-v}}_{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5>0} \binom{u}{d_1}\binom{m_0-u}{d_2}\binom{m_1}{d_3}\binom{v}{d_4}\binom{m_2-v}{d_5} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B} \binom{u}{d_1}\binom{m_0-u}{d_2}\binom{m_1}{d_3}\binom{v}{d_4}\binom{m_2-v}{d_5} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}),
\end{aligned}$$

wobei die Menge $B = B(u,v)$ für ein festes u und v definiert sei durch

$$B := \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^5 \middle| \, d_1 \le u,\ d_2 \le m_0-u,\ d_3 \le m_1, d_4 \le v,\ d_5 \le m_2 - v,\ \sum_{i=1}^{5} d_i > 0 \right\}.$$

Das heißt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ ist eine $\mathbf{d}$-degenererierte 5-Stichproben U-Statistik mit Kernfunktion $h_{\mathbf{d}}$ vom Grad $\mathbf{d}$. Nun wird P_4 damit zerlegt. Dazu wähle n so groß, dass $m_0 \le [n\theta_1]$ und $m_2 \le n - [n\theta_2]$ gilt.
Dann folgt

$$\begin{aligned}
P_4 &= P\left(\max_{[n\theta_1]<k<l\le[n\theta_2]} \left| \rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \right| > C\epsilon \right) \\
&= P\left(\max_{[n\theta_1]<k<l\le[n\theta_2]} \kappa_n w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) 1_{m_1\le l-k} \left| U_{\mathbf{n}\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)}(h) \right| > C\epsilon \right) \\
&= P\left(\max_{[n\theta_1]<k<l\le[n\theta_2]} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \left| \sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} 1_{m_1\le l-k} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) \right) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right) \\
&\le P\left(\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) 1_{m_1\le l-k} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \right. \\
&\qquad \left. \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right) \\
&\overset{2.10}{\le} P\left(\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) 1_{m_1\le l-k} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \right. \\
&\qquad \left. \left| \sum_{\mathbf{d}\in B} \binom{u}{d_1}\binom{m_0-u}{d_2}\binom{m_1}{d_3}\binom{v}{d_4}\binom{m_2-v}{d_5} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right) \\
&\overset{B.5}{\le} \sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\sum_{\mathbf{d}\in B} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \right. \\
&\qquad \left. \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right).
\end{aligned}$$

Für unterschiedliche $\mathbf{d} \in B$ werden die entsprechenden Summen abgeschätzt.

Wir betrachten für ein festes u und v folgende Zerlegung der Menge B.

$$\begin{aligned}
B = \quad & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 > 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 = 0,\ d_3 > 0,\ d_4 = 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 > 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 > 0,\ d_3 > 0,\ d_4 = 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 > 0,\ d_3 = 0,\ d_4 > 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 = 0,\ d_3 > 0,\ d_4 > 0\} \\
\cup & \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 > 0,\ d_3 > 0,\ d_4 > 0\} =: \bigcup_{i=1}^{8} B_i.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
P_4 \leq & \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \sum_{\mathbf{d} \in B} P \Bigg(\max_{[n\theta_1]+m_0-u \leq k < l \leq [n\theta_2]-v} 1_{m_1 \leq l-k} w\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \\
& \qquad \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \Bigg) \\
= & \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \sum_{i=1}^{8} \sum_{\mathbf{d} \in B_i} P \Bigg(\max_{[n\theta_1]+m_0-u \leq k < l \leq [n\theta_2]-v} 1_{m_1 \leq l-k} w\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \\
& \qquad \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \Bigg) \\
=: & \sum_{u=0}^{m_2} \sum_{v=0}^{m_2-u} \sum_{i=1}^{8} P_{4,i}.
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung der $P_{4,i}$ werden die Maximalungleichungen von Doob 2.2 bzw. von Chow 2.1 benutzt. Des Weiteren wird die Markovungleichung, vergleiche zum Beispiel Gänssler und Stute (1977), Lemma 1.18.1., S. 97, und eine Momentenungleichung für $\mathbf{d}$-degenerierte U-Statistiken 2.20 verwendet.
Für $\mathbf{d} \in B_1 = \{\mathbf{d} \in B|\, d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 0\}$ hängt die U-Statistik $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von k und l ab. Somit gilt

$$\begin{aligned}
P_{4,1} = & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} P \Bigg(\max_{[n\theta_1]+m_0-u \leq k < l \leq [n\theta_2]-v} 1_{m_1 \leq l-k} w\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \\
& \qquad \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \Bigg) \\
\leq & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} P \left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u \leq k < l \leq [n\theta_2]-v} 1_{m_1 \leq l-k} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right) \\
= & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} P \left(\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon \right) \qquad \text{für beliebige } k,\ l \text{ mit } [n\theta_1] + m_0 - u \leq k < l \leq [n\theta_2] - v \\
= & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} P \left(\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right|^p > C\kappa_n^{-p}\epsilon^p \right) \\
\overset{\text{Markov}}{\leq} & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \mathsf{E} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right|^p \qquad (3.3) \\
\overset{2.20}{\leq} & \sum_{\mathbf{d} \in B_1} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \mathsf{E} \left| h_{\mathbf{d}} \right|^p \left([n\theta_1]^{d_1} (k - [n\theta_1])^{d_2} (l-k)^{d_3} ([n\theta_2] - l)^{d_4} (n - [n\theta_2])^{d_5} \right)^{-a(p)}
\end{aligned}$$

$$\overset{2.6}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_1} \left([n\theta_1]^{d_1}\,(k-[n\theta_1])^{d_2}\,(l-k)^{d_3}\,([n\theta_2]-l)^{d_4}\,(n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)}$$

$$\overset{\text{Def. } B_1}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_1} n^{-a(p)}\ \text{, da } d_2=d_3=d_4=0 \text{ und } 1\leq d_1+d_5$$

$$\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.$$

Es sei $d\in B_2=\{\mathbf{d}\in B|\,d_2>0,\ d_3=d_4=0\}$. Aus $d_2\leq m_0-u$ und $[n\theta_1]\leq k$ folgt

$$\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \leq Cn^{-d_2}\binom{k-[n\theta_1]}{d_2}.$$

Des Weiteren hängt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von l ab und es folgt

$$\begin{aligned}
P_{4,2} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\Bigg(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k<l\leq[n\theta_2]-v} 1_{m_1\leq l-k}\, w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}}\frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \\
&\qquad\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\Bigg) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k<l\leq[n\theta_2]-v} 1_{m_1\leq l-k}\left|n^{-d_2}\binom{k-[n\theta_1]}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right) \\
&\overset{l=[n\theta_2]-v}{=} \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k\leq[n\theta_2]-v-m_1}\left|n^{-d_2}\binom{k-[n\theta_1]}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right) \\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k\leq[n\theta_2]-v-m_1}\left|\binom{k-[n\theta_1]}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > Cn^{d_2p}\kappa_n^{-p}\epsilon^p\right).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.19 folgt das $\binom{k'}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k'}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ für $m_0-u\leq k'\leq[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-m_1$ ein Martingal ist. Mit der Doobschen Ungleichung 2.2 folgt

$$\begin{aligned}
P_{4,2} &\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k\leq[n\theta_2]-v-m_1}\left|\binom{k-[n\theta_1]}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > Cn^{d_2p}\kappa_n^{-p}\epsilon^p\right) \\
&\overset{\text{Doob}}{\leq} \sum_{\mathbf{d}\in B_2} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-d_2p}\mathsf{E}\left|\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-m_1}{d_2}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_2-\frac{v-m_1}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p \\
&\leq C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_2}\mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_2-\frac{v-m_1}{n},\theta_2-\frac{v}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p \qquad (3.4)\\
&\overset{2.20}{\leq} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_2}\mathsf{E}\,|h_{\mathbf{d}}|^p\left([n\theta_1]^{d_1}\,([n\theta_2]-[n\theta_1]-v-m_1)^{d_2}\,m_1^{d_3}v^{d_4}\,(n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{2.6}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_2}\left([n\theta_1]^{d_1}\,([n\theta_2]-[n\theta_1]-v-m_1)^{d_2}\,m_1^{d_3}v^{d_4}\,(n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{\text{Def. } B_2}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_2}([n\theta_2]-[n\theta_1]-v-m_1)^{-a(p)} \\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{d}\in B_3=\{\mathbf{d}\in B|\,d_2=d_4=0,\ d_3>0\}$ gilt, dass $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nur von der Differenz $l-k$ abhängt. Des Weiteren gilt für die Gewichtsfunktion w für $0<s<t<1$

$$w(s,t)=s^{\alpha_0}(t-s)^{\alpha_1}(1-t)^{\alpha_2}\leq(t-s)^{\alpha_1}.$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
P_{4,3} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}}\frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)\\
&\le \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k}\left(\frac{l-k}{n}\right)^{\alpha_1}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)\\
&\overset{l'=l-k}{=} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l'+k\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l'}\left(\frac{l'}{n}\right)^{\alpha_1}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{k+l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)\\
&\overset{k=[n\theta_1]+m_0-u}{=} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{m_1\le l'\le[n\theta_2]-[n\theta_1]-m_0+u-v}\left(\frac{l'}{n}\right)^{\alpha_1}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)\\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{m_1\le k\le g}\frac{k^{\alpha_1 p}}{\binom{k}{d_3}}\left|\binom{k}{d_3}U_k\right|^p > C\kappa_n^{-p}\epsilon^p n^{\alpha_1 p}\right).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Wobei bei der letzten Gleichung

$$
\begin{aligned}
k &:= l'\\
g &:= [n\theta_2]-[n\theta_1]-m_0+u-v\\
U_k &:= U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+k}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)
\end{aligned}
$$

gesetzt wurde. Man beachte, dass für hinreichend große n positive Konstanten C_1 und C_2 mit $C_1 n < g < C_2 n$ existieren. Mit Lemma 2.19 folgt das $\binom{k}{d_3}U_k$ für $m_1\le k\le g$ ein Martingal ist. Des Weiteren folgt aus $\alpha_1\le 1\le d_3$ dass $\frac{k^{\alpha_1}}{\binom{k}{d_3}}$ monoton fallend in k ist. Somit kann die Chowschen Ungleichung 2.1 auf das Submartingal $\left|\binom{k}{d_3}U_k\right|^p$ mit der Folge $\frac{k^{\alpha_1 p}}{\binom{k}{d_3}^p}$ angewendet werden. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
P_{4,3} &\le \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{m_1\le k\le g}\frac{k^{\alpha_1 p}}{\binom{k}{d_3}}\left|\binom{k}{d_3}U_k\right|^p > C\kappa_n^{-p}\epsilon^p n^{\alpha_1 p}\right)\\
&\overset{\text{Chow}}{\le} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1}\left(\frac{k^{\alpha_1 p}}{\binom{k}{d_3}^p}-\frac{(k+1)^{\alpha_1 p}}{\binom{k+1}{d_3}^p}\right)\mathsf{E}\left|\binom{k}{d_3}U_k\right|^p+\frac{g^{\alpha_1 p}}{\binom{g}{d_3}^p}\mathsf{E}\left|\binom{g}{d_3}U_g\right|^p\right)\\
&\overset{B.1}{\le} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\sum_{\mathbf{d}\in B_3}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1} p\frac{k^{\alpha_1 p}}{\binom{k}{d_3}^p}\left(\frac{1-\alpha_1}{k}+\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{1}{k-d_3+i}\right)\mathsf{E}\left|\binom{k}{d_3}U_k\right|^p+\frac{g^{\alpha_1 p}}{\binom{g}{d_3}^p}\mathsf{E}\left|\binom{g}{d_3}U_g\right|^p\right)\\
&\le C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\sum_{\mathbf{d}\in B_3}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1} k^{\alpha_1 p-1}\left(1-\alpha_1+\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{k}{k-d_3+i}\right)\mathsf{E}\left|U_k\right|^p+g^{\alpha_1 p}\mathsf{E}\left|U_g\right|^p\right).
\end{aligned}
$$

Des Weiteren ist $f(x) := \sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{x}{x-d_3+i}$ monoton fallend da

$$
f'(x) = \sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{x-d_3+i-x}{(x-d_3+i)^2} = -\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{d_3-i}{(x-d_3+i)^2} < 0,
$$

und es folgt

$$
\left(1-\alpha_1+\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{k}{k-d_3+i}\right) \le \left(1-\alpha_1+\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{m_1}{m_1-d_3+i}\right) \le C.
$$

Ähnlich zu $P_{4,1}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|U_k\right|^p &= \mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+k}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p \\
&\overset{2.20}{\leq} C\mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\right|^p\left([n\theta_1]^{d_1}\left(m_0-u\right)^{d_2}k^{d_3}\left([n\theta_2]-[n\theta_1]-m_0+u-k\right)^{d_4}\left(n-[n\theta_2]\right)^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{2.6}{\leq} CM_p\left([n\theta_1]^{d_1}\left(m_0-u\right)^{d_2}k^{d_3}\left([n\theta_2]-[n\theta_1]-m_0+u-k\right)^{d_4}\left(n-[n\theta_2]\right)^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{\text{Def. } B_3}{\leq} CM_pk^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
P_{4,3} &\leq C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\sum_{\mathbf{d}\in B_3}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1}k^{\alpha_1 p-1}\left(1-\alpha_1+\sum_{i=1}^{d_3-1}\frac{k}{k-d_3+i}\right)\mathsf{E}\left|U_k\right|^p+g^{\alpha_1 p}\mathsf{E}\left|U_g\right|^p\right) \\
&\leq C\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\sum_{\mathbf{d}\in B_3}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1}k^{\alpha_1 p-1}\mathsf{E}\left|U_k\right|^p+g^{\alpha_1 p}\mathsf{E}\left|U_g\right|^p\right) \\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1}k^{\alpha_1 p-1-a(p)}+g^{\alpha_1 p-a(p)}\right).
\end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{2}<\alpha_1\leq 1$ folgt

$$-\left(\alpha_1 p-1-a\left(p\right)\right)=\left\{\begin{array}{rl} -\left(\alpha_1 p-1-\left(p-1\right)\right) & =\left(1-\alpha_1\right)p \\ -\left(\alpha_1 p-1-\frac{1}{2}p\right) & =-\left(\alpha_1-\frac{1}{2}\right)p+1\end{array}\right\}<1 \qquad \begin{array}{c}1\leq p\leq 2\\ 2<p<\infty.\end{array}$$

Und man erhält mit Lemma B.6

$$\begin{aligned}
P_{4,3} &\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\left(\sum_{k=m_1}^{g-1}k^{\alpha_1 p-1-a(p)}+g^{\alpha_1 p-a(p)}\right) \\
&\overset{B.6}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-\alpha_1 p}\left(\left(g-1\right)^{\alpha_1 p-1-a(p)+1}+g^{\alpha_1 p-a(p)}\right) \\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Es sei $d\in B_4=\left\{\mathbf{d}\in B|\,d_2=d_3=0,\ d_4>0\right\}$. Aus $d_4\leq v$ und $l\leq[n\theta_2]$ folgt

$$\frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}}\leq Cn^{-d_4}\binom{[n\theta_2]-l}{d_4}.$$

Des Weiteren hängt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)$ nicht von k ab und für $l'=[n\theta_1]-l$ folgt mit Lemma 2.19 das $\binom{l'}{d_3}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_2-\frac{l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)$ für $v\leq l'\leq[n\theta_2]-[n\theta_1]-m_0+u-m_1$ ein Martingal ist. Mit der Doobschen Ungleichung 2.2 folgt analog zur Abschätzung von $P_{4,2}$

$$P_{4,4}\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}. \tag{3.6}$$

Es sei $d\in B_5=\left\{\mathbf{d}\in B|\,d_2>0,\ d_3>0,\ d_4=0\right\}$. Es gilt für beliebige Mengen $A_{i,j}$ mit $i,j\in\mathbb{Z}$ und $A_{i,j}=\emptyset$ für $j-i<m_1$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k<l\leq[n\theta_2]-v}A_{k,l} &\overset{l'=l-k}{=}\bigcup_{l'=m_1}^{g}\ \bigcup_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-v-l'}A_{k,k+l'} \\
&\overset{k'=k-[n\theta_1]}{=}\bigcup_{l'=m_1}^{g}\ \bigcup_{k'=m_0-u}^{[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-l'}A_{[n\theta_1]+k',[n\theta_1]+k'+l'}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$P_{4,5} = \sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \right.$$
$$\left. \left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)$$
$$\le \sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k}\left|\binom{k-[n\theta_1]}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > Cn^{d_2}\kappa_n^{-1}\epsilon\right)$$
$$= \sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\max_{m_1\le l'<g}\ \max_{m_0-u\le k'<[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-l'}\left|\binom{k'}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k'}{n},\theta_1+\frac{k'+l'}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > Cn^{d_2}\kappa_n^{-1}\epsilon\right)$$
$$\le \sum_{\mathbf{d}\in B_5}\sum_{l'=m_1}^{g} P\left(\max_{m_0-u\le k'<[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-l'}\left|\binom{k'}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k'}{n},\theta_1+\frac{k'+l'}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > Cn^{d_2}\kappa_n^{-1}\epsilon\right).$$

Ähnlich folgt aufgrund der Definition von B_5 dass

$$\mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k'}{n},\theta_1+\frac{k'+l'}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p \le CM_p\left(k'l'\right)^{-a(p)}.$$

und somit folgt analog zur Abschätzung von $P_{4,3}$

$$P_{4,5} \le \sum_{\mathbf{d}\in B_5}\sum_{l'=m_1}^{g} P\left(\max_{m_0-u\le k'<[n\theta_2]-[n\theta_1]-v-l'}\left|\binom{k'}{d_2} U_{([n\theta_1],[n\theta_1]+k',[n\theta_1]+k'+l',[n\theta_2])}(h_{\mathbf{d}})\right| > Cn^{d_2}\kappa_n^{-1}\epsilon\right)$$
$$\overset{\text{Analog } P_{4,3}}{\le} \sum_{l'=m_1}^{g} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p\left([n\theta_2]-[n\theta_1]-v-l'\right)^{-a(p)} l'^{-a(p)}$$
$$\overset{B.6}{\le} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p\begin{cases}(g-m_1)^{-(2p-3)} & 1<p<2\\ (g-m_1)^{-1}\ln(g-m_1) & p=2\\ (g-m_1)^{-\frac{1}{2}p} & 2<p<\infty\end{cases}$$
$$\le CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,1).$$

Ähnlich zur Abschätzung von $P_{4,5}$ folgt

$$P_{4,6} \le CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,1)$$
$$P_{4,7} \le CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,1).$$

Für $\mathbf{d}\in B_8 = \{\mathbf{d}\in B|\, d_2>0,\ d_3>0,\ d_4>0\}$ lässt sich kein Martingal finden. Somit erhält man mit der Markovungleichung eine schwächere Abschätzung. Es gilt

$$P_{4,8} = \sum_{\mathbf{d}\in B_8} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\le k<l\le[n\theta_2]-v} 1_{m_1\le l-k} w\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \right.$$
$$\left. \left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\kappa_n^{-1}\epsilon\right)$$
$$\le \sum_{\mathbf{d}\in B_8}\sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v}\sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v} P\left(\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > C\kappa_n^{-p}\epsilon^p\right)$$
$$\overset{\text{Markov}}{\le} \sum_{\mathbf{d}\in B_8}\sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v}\sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p\mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p$$
$$\overset{2.20}{\le} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p\sum_{\mathbf{d}\in B_8}\sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v}\sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v}\mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\right|^p\left([n\theta_1]^{d_1}\left(k-[n\theta_1]\right)^{d_2}(l-k)^{d_3}\left([n\theta_2]-l\right)^{d_4}\left(n-[n\theta_2]\right)^{d_5}\right)^{-a(p)}$$

$$\overset{2.6}{\leq} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_8} \sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v} \sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v} M_p \left([n\theta_1]^{d_1} (k-[n\theta_1])^{d_2} (l-k)^{d_3} ([n\theta_2]-l)^{d_4} (n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)}$$

$$\overset{\text{Def. } B_8}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d}\in B_8} \sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v} \sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v} ((k-[n\theta_1])(l-k)([n\theta_2]-l))^{-a(p)} \tag{3.7}$$

$$\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v} (k-[n\theta_1])^{-a(p)} \sum_{l=m_1+k}^{[n\theta_2]-v} ((l-k)([n\theta_2]-l))^{-a(p)}$$

$$\overset{B.6}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \sum_{k=[n\theta_1]+m_0-u}^{[n\theta_2]-m_1-v} \begin{cases} (k-[n\theta_1])^{-(p-1)} ([n\theta_2]-v-m_1-k)^{-(2p-3)} & 1\leq p<2 \\ (k-[n\theta_1])^{-1} ([n\theta_2]-v-m_1-k)^{-1} \ln([[n\theta_2]-v-m_1-k) & p=2 \\ (k-[n\theta_1])^{-\frac{1}{2}p} ([[n\theta_2]-v-m_1-k)^{-\frac{1}{2}p} & 2<p<\infty \end{cases}$$

$$\overset{B.6}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \begin{cases} (g-m_1)^{-(3p-5)} & 1\leq p<2 \\ (\ln(g-m_1))^2 (g-m_1)^{-1} & p=2 \\ (g-m_1)^{-\frac{1}{2}p} & 2<p<\infty \end{cases}$$

$$\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,2).$$

Bei vorliegen von q Change-Points würde man das Lemma B.6 q-mal anwenden. Und man erhält dann als obere Schranke $CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,q)$. Zusammengefasst erhält man

$$P_4 \leq \sum_{u=0}^{m_2} \sum_{v=0}^{m_2-u} \sum_{i=1}^{8} P_{4,i} \leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p a_n(p,2).$$

P_1, ..., P_6 lassen sich in ähnlicher Form abschätzen und damit folgt die Behauptung. □

Für die $(q+1)$-Stichproben-U-Statistiken $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)$ erhält man eine zum Lemma 3.2 ähnliche Abschätzung. Für einen Vektor $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{q+1}$ definiere die Menge

$$H_{\boldsymbol{\beta}} := \{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q | \beta_i \leq t_{i+1}-t_i \text{ für } 0\leq i\leq q,\, t_0=0,\, t_{q+1}=1\}.$$

3.3 Lemma. *Es sei $\epsilon>0$ und es existiere ein $p\in[1,\infty)$ mit $M_p<\infty$. Des Weiteren sei $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{q+1}$ mit $\beta_i>0$, $0\leq i\leq q$. Dann existiert eine Konstante $C>0$ und ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\geq n_0$ gilt*

$$P\left(\sup_{\mathbf{t}\in H_{\boldsymbol{\beta}}} \left|U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - EU_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)\right| > \epsilon\right) \leq CM_p\epsilon^{-p}a_n(p,q).$$

Beweis: Es gilt nun

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{(s,t)\in H_\beta} \left|U_{\mathbf{n}(s,t)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(s,t)}(h)\right| > \epsilon\right) \\ &= P\left(\max_{0\leq k<l\leq n} 1_{[n\beta_0]\leq k}\, 1_{[n\beta_1]\leq l-k}\, 1_{[n\beta_2]\leq n-l} \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)}(h)\right| > \epsilon\right). \end{aligned}$$

Anstelle von Gleichung (3.5) aus dem Beweis von Lemma 3.2 erhält man nun für $P_{4,3} =$

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\theta_1]+m_0-u\leq k<l\leq[n\theta_2]-v} 1_{[n\beta_1]\leq l-k} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\right) \\ &\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\beta_1]\leq l'\leq g} \left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+l'}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > C\epsilon^p\right). \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.19 folgt das $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+g-\tilde{l}}{n},\theta_2\right)}$ für $0 \le \tilde{l} \le g - [n\beta_1]$ ein Martingal ist. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
P_{4,3} &\le \sum_{\mathbf{d}\in B_3} P\left(\max_{[n\beta_1]\le l'\le g} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+l'}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > C\epsilon^p\right) \\
&\overset{\text{Doob}}{\le} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} C\epsilon^{-p}\mathsf{E}\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{m_0-u}{n},\theta_1+\frac{m_0-u+l'}{n},\theta_2\right)}\right|^p \\
&\overset{2.20}{\le} C\epsilon^{-p} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} \mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\right|^p \left([n\theta_1]^{d_1}(m_0-u)^{d_2}[n\beta_1]^{d_3}(g+v+[n\beta_1])^{d_4}(n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{2.6}{\le} C\epsilon^{-p} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} M_p \left([n\theta_1]^{d_1}(m_0-u)^{d_2}[n\beta_1]^{d_3}(g+v+[n\beta_1])^{d_4}(n-[n\theta_2])^{d_5}\right)^{-a(p)} \\
&\overset{\text{Def. } B_3}{\le} CM_p\epsilon^{-p} \sum_{\mathbf{d}\in B_3} [n\beta_1]^{-a(p)} \qquad (3.8) \\
&\le CM_p\epsilon^{-p} n^{-a(p)}.
\end{aligned}
$$

Ähnliche Abschätzungen erhält man für die restlichen Terme bzw. geht der Beweis analog zum Lemma 3.2. □

Als nächstes betrachten wir die Grenzfunktion der Folge der Mittelwertfunktionen des Prozesses ρ_n.
Wir definieren im Fall $q = 2$ die deterministische Funktion $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$
r(s,t) := \begin{cases}
\sum_{u=0}^{m_2}\sum_{v=0}^{m_2-u} \binom{m_2}{u,v,m_2-u-v} \frac{(\theta_1-t)^u(\theta_2-\theta_1)^v(1-\theta_2)^{m_2-u-v}}{(1-t)^{m_2}} \mu_{m_0+m_1+u,v,m_2-u-v} & 0 \le s \le t \le \theta_1 < \theta_2 < 1 \\
\sum_{u=0}^{m_1}\sum_{v=0}^{m_2} \binom{m_1}{u} \frac{(\theta_1-s)^u(t-\theta_1)^{m_1-u}}{(t-s)^{m_1}} \binom{m_2}{v} \frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}} \mu_{m_0+u,m_1-u+v,m_2-v} & 0 \le s \le \theta_1 \le t \le \theta_2 < 1 \\
\sum_{u=0}^{m_1}\sum_{v=0}^{m_1-u} \binom{m_1}{u,v,m_1-u-v} \frac{(\theta_1-s)^u(\theta_2-\theta_1)^v(t-\theta_2)^{m_1-u-v}}{(t-s)^{m_1}} \mu_{m_0+u,v,m_1-u-v+m_2} & 0 \le s \le \theta_1 < \theta_2 \le t \le 1 \\
\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \binom{m_2}{v} \frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}} \mu_{u,m_0-u+m_1+v,m_2-v} & 0 < \theta_1 \le s \le t \le \theta_2 \le 1 \\
\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_1} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \binom{m_1}{v} \frac{(\theta_2-s)^v(t-\theta_2)^{m_1-v}}{(t-s)^{m_1}} \mu_{u,m_0-u+v,m_1-v+m_2} & 0 < \theta_1 \le s \le \theta_2 \le t \le 1 \\
\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_0-u} \binom{m_0}{u,v,m_0-u-v} \frac{\theta_1^u(\theta_2-\theta_1)^v(s-\theta_2)^{m_0-u-v}}{s^{m_0}} \mu_{u,v,m_0-u-v+m_1+m_2} & 0 < \theta_1 < \theta_2 \le s \le t \le 1 \\
0 & \text{sonst.}
\end{cases} \qquad (3.9)
$$

Eine explizite Darstellung für ein beliebiges $q \in \mathbb{N}$ der Funktion $r : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ ist im Anhang A angegeben.

3.4 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt

(1) r ist stetig auf H.

(2) $r(\theta_1, \dots, \theta_q) = \mu_{\mathbf{m}}$.

(3) r ist beschränkt.

(4) r ist differenzierbar auf dem Inneren jeder Teilmenge $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}$.

(5) Es existieren alle Richtungsableitungen von r im Punkt $\boldsymbol{\theta}$.

Beweis: Zur Stetigkeit (1) betrachte im Fall $q = 2$ zum Beispiel $\theta_1 \leq s$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t \to \theta_2 \\ t > \theta_2}} r(s,t) \\
&= \lim_{t \to \theta_2} \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_1} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \binom{m_1}{v} \frac{(\theta_2 - s)^v (t-\theta_2)^{m_1-v}}{(t-s)^{m_1}} \mu_{u,m_0-u+v,m_1-v+m_2} \\
&= \sum_{u=0}^{m_0} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \mu_{u,m_0-u+m_1,m_2},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t \to \theta_2 \\ t < \theta_2}} r(s,t) \\
&= \lim_{t \to \theta_2} \sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \binom{m_2}{v} \frac{(\theta_2 - t)^v (1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}} \mu_{u,m_0-u+m_1+v,m_2-v} \\
&= \sum_{u=0}^{m_0} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}} \mu_{u,m_0-u+m_1,m_2}.
\end{aligned}$$

Ähnliches kann man für die anderen Fälle zeigen. Die Behauptungen (2)-(5) folgen aus der Definition der Funktion r. □

Nun definieren wir die Funktion $\rho : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ als das Produkt aus r und w.

$$\rho(\mathbf{t}) := w(\mathbf{t})\, r(\mathbf{t}).$$

3.5 Bemerkung. Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt

(1) ρ ist stetig und beschränkt.

(2) $\rho(\mathbf{t}) = 0$ für $\mathbf{t} \notin H$.

(3) ρ ist differenzierbar auf dem Inneren jeder Teilmenge $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}$.

(4) Es existieren alle Richtungsableitungen von ρ im Punkt $\boldsymbol{\theta}$.

Die Richtungsableitungen spielen später bei der Driftfunktion des Grenzprozesses der Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Rolle. Dazu definiere für $1 \leq i \leq q$ folgende Vektoren $\mathbf{m_{i+}}, \mathbf{m_{i-}} \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{m_{i+}} &:= (m_0, \dots, m_{i-2}, m_{i-1} - 1, m_i + 1, m_{i+1}, \dots, m_q) \\
\mathbf{m_{i-}} &:= (m_0, \dots, m_{i-2}, m_{i-1} + 1, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_q).
\end{aligned}$$

Durch Nachrechnen erhält man folgende Ableitungen.

3.6 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt für $1 \leq i \leq q$ und alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{e_i}} \rho(\boldsymbol{\theta}) &= \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \right) w(\boldsymbol{\theta})\, \mu_{\mathbf{m}} + w(\boldsymbol{\theta}) \frac{m_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} \left(\mu_{\mathbf{m_{i+}}} - \mu_{\mathbf{m}} \right) \\
\partial_{-\mathbf{e_i}} \rho(\boldsymbol{\theta}) &= -\left(\frac{\alpha_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \right) w(\boldsymbol{\theta})\, \mu_{\mathbf{m}} + w(\boldsymbol{\theta}) \frac{m_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \left(\mu_{\mathbf{m_{i-}}} - \mu_{\mathbf{m}} \right).
\end{aligned}$$

Beweis: Es gilt für $\mathbf{t} \in H$

$$
\begin{aligned}
w(\mathbf{t}) &= \prod_{j=0}^{q} (t_{j+1} - t_j)^{\alpha_j} \\
\frac{\partial}{\partial t_i} w &= w(\mathbf{t}) \left(\frac{\alpha_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \\
\partial_{\mathbf{e_i}} w(\boldsymbol{\theta}) = -\partial_{-\mathbf{e_i}} w(\boldsymbol{\theta}) &= w(\boldsymbol{\theta}) \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \right).
\end{aligned}
$$

Des Weiteren zeigen wir es für r beispielhaft am Fall $q = 2$, $i = 1$. Für $0 < \theta_1 < s < t \leq \theta_2 < 1$ gilt

$$
r(s, \theta_2) = \sum_{u=0}^{m_0} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s - \theta_1)^{m_0 - u}}{s^{m_0}} \mu_{u, m_0 - u + m_1, m_2}.
$$

Und es folgt

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mathbf{e_1}} r(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1 +} \; r(s, \theta_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \sum_{u=0}^{m_0} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s - \theta_1)^{m_0 - u}}{s^{m_0}} \; \mu_{u, m_0 - u + m_1, m_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \frac{\theta_1^{m_0}}{s^{m_0}} \; \mu_{m_0, m_1, m_2} + \frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \sum_{u=0}^{m_0 - 1} \binom{m_0}{u} \frac{\theta_1^u (s - \theta_1)^{m_0 - u}}{s^{m_0}} \; \mu_{u, m_0 - u + m_1, m_2} \\
&= -m_0 \frac{\theta_1^{m_0}}{s^{m_0 + 1}} \; \mu_{m_0, m_1, m_2} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{m_0 - 1} \binom{m_0}{u} \theta_1^u \mu_{u, m_0 - u + m_1, m_2} \frac{(m_0 - u)(s - \theta_1)^{m_0 - u - 1} s^{m_0} - (s - \theta_1)^{m_0 - u} m_0 s^{m_0 - 1}}{s^{2 m_0}} |_{s = \theta_1} \\
&= -m_0 \frac{\theta_1^{m_0}}{s^{m_0 + 1}} \; \mu_{m_0, m_1, m_2} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{m_0 - 1} \binom{m_0}{u} \theta_1^u \mu_{u, m_0 - u + m_1, m_2} \frac{(m_0 - u)(s - \theta_1)^{m_0 - u - 1} s - (s - \theta_1)^{m_0 - u} m_1}{s^{m_0 + 1}} |_{s = \theta_1} \\
&= -m_0 \frac{1}{\theta_1} \; \mu_{m_0, m_1, m_2} + m_0 \mu_{m_0 - 1, 1 + m_1, m_2} \frac{1}{\theta_1} \\
&= \frac{m_0}{\theta_1 - \theta_0} \left(\mu_{\mathbf{m_{1+}}} - \mu_{\mathbf{m}} \right).
\end{aligned}
$$

Für $\partial_{-\mathbf{e_1}}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\partial_{-\mathbf{e_1}} r(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1 -} \; r(s, \theta_2) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \sum_{u=0}^{m_1} \binom{m_1}{u} \frac{(\theta_1 - s)^u (\theta_2 - \theta_1)^{m_1 - u}}{(\theta_2 - s)^{m_1}} \; \mu_{m_0 + u, m_1 - u, m_2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{m_1}}{(\theta_2 - s)^{m_1}} \; \mu_{\mathbf{m}} - \frac{\partial}{\partial s}|_{\theta_1} \; \sum_{u=1}^{m_1} \binom{m_1}{u} \frac{(\theta_1 - s)^u (\theta_2 - \theta_1)^{m_1 - u}}{(\theta_2 - s)^{m_1}} \; \mu_{m_0 + u, m_1 - u, m_2} \\
&= -m_1 \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \mu_{\mathbf{m}} + m_1 \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \mu_{m_0 + 1, m_1 - 1, m_2} \\
&= \frac{m_1}{\theta_2 - \theta_1} \left(\mu_{\mathbf{m_{1-}}} - \mu_{\mathbf{m}} \right).
\end{aligned}
$$

Für die anderen Fälle geht es analog. Man erhält für $1 \leq i \leq q$

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= (\partial_{\mathbf{e_i}}w(\boldsymbol{\theta}))\,r(\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{\mathbf{e_i}}r(\boldsymbol{\theta})\\ &= \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\right) w(\boldsymbol{\theta})\,\mu_{\mathbf{m}} + w(\boldsymbol{\theta})\,\frac{m_0}{\theta_1-\theta_0}\left(\mu_{\mathbf{m_{1+}}} - \mu_{\mathbf{m}}\right).\end{aligned}$$

Und es gilt

$$\begin{aligned}\partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= (-\partial_{\mathbf{e_i}}w(\boldsymbol{\theta}))\,r(\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{-\mathbf{e_i}}r(\boldsymbol{\theta})\\ &= -\left(\frac{\alpha_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} - \frac{\alpha_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\right) w(\boldsymbol{\theta})\,\mu_{\mathbf{m}} + w(\boldsymbol{\theta})\,\frac{m_1}{\theta_2-\theta_1}\left(\mu_{\mathbf{m_{1-}}} - \mu_{\mathbf{m}}\right).\end{aligned}$$

□

Wir können zeigen, dass die Folge der Prozesse $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Funktion ρ konvergiert. Dazu zeigen wir als Nächstes, dass die Folge der Mittelwertfunktionen gleichmäßig konvergiert.

3.7 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}}\left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n(t)}}(h) - r(\mathbf{t})\right| = 0.$$

Beweis: Die Menge H lässt sich in endlich viele Menge $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}$ zerlegen. Es genügt somit, für alle $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}} \subset H$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbf{t}\in H_z^{\boldsymbol{\theta}}\cap H_{\mathbf{m},n}}\left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n(t)}}(h) - r(\mathbf{t})\right| = 0$$

zu zeigen. Wir betrachten wieder Beispielhaft den Fall $q = 2$ und $0 < \theta_1 < s < t < \theta_2 < 1$. Dann bleibt zu zeigen

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{\theta_1<s<t<\theta_2}\left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(s,t)}(h) - r(s,t)\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{\theta_1<s<t<\theta_2}\Bigg|\kappa_n\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}}\,\frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}}\mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n}\\
&\quad -\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\binom{m_0}{u}\frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}}\binom{m_2}{v}\frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}}\mu_{u,m_0-u+m_1+v,m_2-v}\Bigg|\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{\theta_1<s<t<\theta_2}\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\Bigg|\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}}\,\frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}}\\
&\quad -\binom{m_0}{u}\frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}}\binom{m_2}{v}\frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}}\Bigg|\left|\kappa_n\mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n}\right|\\
&\quad +\binom{m_0}{u}\frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}}\binom{m_2}{v}\frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}}\left|\kappa_n\mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n} - \mu_{u,m_0-u+m_1+v,m_2-v}\right|\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{\theta_1<s<t<\theta_2}\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\Bigg|\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{[ns]-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{[ns]}{m_0}}\,\frac{\binom{[n\theta_2]-[nt]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[nt]}{m_2}}\\
&\quad -\binom{m_0}{u}\frac{\theta_1^u(s-\theta_1)^{m_0-u}}{s^{m_0}}\binom{m_2}{v}\frac{(\theta_2-t)^v(1-\theta_2)^{m_2-v}}{(1-t)^{m_2}}\Bigg|\,2\max_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^{q+1},\ \sum_{i=0}^q k_i=m}|\mu_{\mathbf{k}}|\\
&\quad +\lim_{n\to\infty}\left|\kappa_n\mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n} - \mu_{u,m_0-u+m_1+v,m_2-v}\right|\\
&= 0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Dreiecksungleichung sowie mit Lemma B.2. □

3.8 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |E\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| = 0.$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3.7 und der Tatsache dass w unabhängig von n, beschränkt, Lipschitz-stetig und Null für $\mathbf{t} \notin H$ ist. Zu $\mathbf{t} \in H \setminus H_{\mathbf{m},n}$ existiert ein $0 \le i \le q$ mit $[nt_{i+1}] - [nt_i] < m_i$. Und es folgt

$$w(\mathbf{t}) = \prod_{j=0}^{q} (t_{j+1} - t_j)^{\alpha_j} \le (t_{i+1} - t_i)^{\alpha_i} \le \left(\frac{1 + [nt_{i+1}] - [nt_i]}{n}\right)^{\alpha_i} < \left(\frac{m_i + 1}{n}\right)^{\alpha_i} < \left(\frac{m+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in H} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in H\setminus H_{\mathbf{m},n}} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| + \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in H\setminus H_{\mathbf{m},n}} |w(\mathbf{t})\, r(\mathbf{t})| + \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} \left|\kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - w(\mathbf{t})\, r(\mathbf{t})\right| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{t}\in H\setminus H_{\mathbf{m},n}} \left(\frac{m+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} |r(\mathbf{t})| + \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} \left|w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right)\left(\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - r(\mathbf{t})\right)\right| + \left|\left(w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) - w(\mathbf{t})\right) r(\mathbf{t})\right| \\
&\overset{r \text{ und } w \text{ Beschränkt}}{\le} \lim_{n\to\infty} C_1 n^{-\frac{1}{2}} + C_2 \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} \left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - r(\mathbf{t})\right| + C_3 \left|w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) - w(\mathbf{t})\right| \\
&\overset{w \text{ Lipschitz}}{\le} \lim_{n\to\infty} C_1 n^{-\frac{1}{2}} + C_2 \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} \left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - r(\mathbf{t})\right| + C_3 C_4 \left\|\frac{[n\mathbf{t}]}{n} - \mathbf{t}\right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} C_1 n^{-\frac{1}{2}} + C_2 \sup_{\mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}} \left|\kappa_n \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) - r(\mathbf{t})\right| + C_3 C_4 \frac{1}{n} \\
&\overset{3.7}{=} 0.
\end{aligned}$$

□

In Abhängigkeit von der Integrationsordnung p und den Eigenschaften der Folge $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert die Folge der Prozesse $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion ρ stochastisch bzw. P-f.s..

3.9 Satz. *Es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit $M_p < \infty$, dann gilt*

$$\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \begin{cases} P\text{-stochastisch, wenn} & \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0 \\ P\text{-f.s., wenn} & \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) < \infty. \end{cases}$$

Beweis: Aus Lemma 3.8 folgt, dass zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt

$$\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Und es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| > \epsilon\right) &\le \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})| + \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| > \epsilon\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})| + \frac{\epsilon}{2} > \epsilon\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Delta_n\left(\frac{\epsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{3.2}{\leq} \lim_{n\to\infty} CM_p \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{-p} \kappa_n^p \; a_n(p,q)$$
$$= 0.$$

Somit ist der erste Teil bewiesen. Der zweite Teil folgt ebenfalls mit Lemma 3.2 und dem ersten Borel-Cantelli-Lemma, vergleiche zum Beispiel Gänssler und Stute (1977), Bemerkung 1.16.7., S. 85. □

Mithilfe des Stetigkeitssatzes für das Argmax-Funktional bzgl. $f.s.$-Konvergenz 2.30 erhalten wir die Konsistenz des Schätzers.

1.1 Theorem. *Es existiere ein* $p \in [1,\infty)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es sei* $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. *Dann folgt*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \begin{cases} \text{P-stochastisch, wenn} & \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & = 0 \\ \text{P-f.s., wenn} & \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & < \infty. \end{cases}$$

Beweis: Wir möchten Satz 2.30 auf die Folge $(|\rho_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Funktion $|\rho|$ anwenden. Somit sind die Voraussetzungen (1) bis (6) zu prüfen.
Da $\rho_n(\mathbf{t}) = \rho_n\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right)$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\mathbb{R}^q)$. Also gilt (1).
Aus der Definition des Schätzers folgt $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \in arg(|\rho_n|) \subset Arg(|\rho_n|)$ ist. Somit gilt (2).
In 3.5 wurde die Stetigkeit der Funktion ρ bemerkt. Damit ist auch $|\rho|$ stetig und es gilt $|\rho| \in D(\mathbb{R}^q)$. Dass heisst, es ist (3) erfüllt.
Des Weiteren gilt nach Voraussetzung $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Da die Funktion $|\rho|$ stetig und Null auf $\mathbb{R}^q \setminus H$ ist, folgt (4).
Da $\{\mathbf{t} \in cl(H) \text{ mit } \|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\| \geq \epsilon\}$ eine kompakte Menge ist, folgt die Existenz für ein beliebiges $\epsilon > 0$ von

$$\max\{|\rho(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q \text{ mit } \|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\| \geq \epsilon\} = \max\{|\rho(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in cl(H) \text{ mit } \|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\| \geq \epsilon\}.$$

Also gilt (5).
Mit Lemma 3.9 folgt

$$\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\rho_n(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t})| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \begin{cases} \text{P-stochastisch, wenn} & \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & = 0 \\ \text{P-f.s., wenn} & \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & < \infty \end{cases}$$

und somit gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\, |\rho_n(\mathbf{t})| - |\rho(\mathbf{t})|\, | \xrightarrow{n\to\infty} 0 \begin{cases} \text{P-stochastisch, wenn} & \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & = 0 \\ \text{P-f.s., wenn} & \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) & < \infty. \end{cases}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.30 für $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) < \infty$ erfüllt und es folgt die Behauptung. Die stochastische Konvergenz folgt mithilfe eines Teilfolgenkriteriums. Dazu wähle man eine beliebige Teilfolge $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n'}\right\}_{n'\in\mathbb{N}}$ von $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aus der stochastischen Konvergenz von der Folge

$$f_n := \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q} |\, |\rho_n(\mathbf{t})| - |\rho(\mathbf{t})|\, |$$

gegen 0, folgt die Existenz einer Teilfolge $\{f_{n''}\}_{n''\in\mathbb{N}}$ von $\{f_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}}$, welche P-f.s. gegen 0 konvergiert. Aus dem ersten Teil folgt somit die P-f.s Konvergenz der Teilteilfolge $\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{n''}\right\}_{n''\in\mathbb{N}}$ gegen $\boldsymbol{\theta}$. Und somit gilt die Behauptung. □

3.2 Stochastische Beschränktheit

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von Theorem 1.2. Im folgenden erweist es sich als hilfreich, handhabbarere Schätzer mit ähnlichem asymptotischem Verhalten zu untersuchen. Dazu definiere den Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+$ durch

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ := argmax\left(\rho_n\left(\mathbf{t}\right),\ \ \mathbf{t} \in G_n\right).$$

Durch die Einführung des Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+$ vereinfacht sich später im Beweis von Lemma 3.15 der technische Aufwand.

3.10 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$ und es gelte $-\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(\mathbf{t}\right) < \rho\left(\boldsymbol{\theta}\right)$, dann existiert für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\epsilon_0 > 0$ mit*

$$P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) \leq 2\Delta_n\left(\epsilon_0\right).$$

Beweis: Da G_n eine endliche Menge ist folgt

$$\begin{aligned}
\left|\min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n\left(\mathbf{t}\right) - \min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho\left(\mathbf{t}\right)\right| &= \left|-\max_{\mathbf{t}\in G_n} -\mathsf{E}\rho_n\left(\mathbf{t}\right) - \left(-\max_{\mathbf{t}\in G_n} -\rho\left(\mathbf{t}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sup_{\mathbf{t}\in G_n} -\rho\left(\mathbf{t}\right) - \sup_{\mathbf{t}\in G_n} -\mathsf{E}\rho_n\left(\mathbf{t}\right)\right| \\
&\overset{B.3}{\leq} \sup_{\mathbf{t}\in G_n} \left|-\rho\left(\mathbf{t}\right) - \left(-\mathsf{E}\rho_n\left(\mathbf{t}\right)\right)\right| \\
&\leq \sup_{\mathbf{t}\in \mathbb{R}^q} \left|\mathsf{E}\rho_n\left(\mathbf{t}\right) - \rho\left(\mathbf{t}\right)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \text{ gemäß Lemma 3.8.}
\end{aligned}$$

Des Weiteren existiert ein $\mathbf{t}_0 = \left(t_{0,1}, \ldots, t_{0,q}\right) \in cl\left(H\right)$ mit $\rho\left(\mathbf{t}_0\right) = \inf_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(\mathbf{t}\right)$. Im folgenden konstruieren wir eine Folge $\left(\mathbf{t}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbf{t}_n = \left(t_{n,1}, \ldots, t_{n,q}\right) \in G_n$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_0$.
Für festes $n \in \mathbb{N}$ setze $t_{n,0} = 0$ und definiere rekursiv für $0 \leq i \leq q-1$

$$t_{n,i+1} := \begin{cases} t_{n,i} + \frac{m_i}{n} & \text{, wenn} \quad [nt_{0,i+1}] < m_i + [nt_{n,i}] \\ \frac{[nt_{0,i+1}]}{n} & \text{, wenn} \quad m_i + [nt_{n,i}] \leq [nt_{0,i+1}] \leq n - \sum_{j=i+1}^q m_j \\ \frac{n-\sum_{j=i+1}^q m_j}{n} & \text{, wenn } n - \sum_{j=i+1}^q m_j < [nt_{0,i+1}]. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq q$ folgt dann offensichtlich $[nt_{n,i+1}] - [nt_{n,i}] \geq m_i$ und somit $\mathbf{t}_n \in G_n$. Die Konvergenz erhält man durch Induktion bzgl. der Koordinaten. Es sei $\mathbf{t}_0 \in cl\left(H\right)$. Für $0 \leq i \leq q$ gilt dann $t_{0,i+1} - t_{0,i} \geq 0$. Wenn $t_{0,1} = 0$ ist, dann folgt $\lim_{n\to\infty} t_{n,1} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_0}{n} = 0 = t_{0,1}$. Wenn $0 < t_{0,1} < 1$ ist, existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ folgt $m_0 \leq [nt_{0,1}] \leq n - \sum_{j=1}^q m_j$. Somit folgt ebenfalls $\lim_{n\to\infty} t_{n,1} = t_{0,1}$. Für $t_{0,1} = 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{j=0}^q m_j}{n} = 1 = t_{0,1}.$$

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} t_{n,1} = t_{0,1}$ und somit folgt der Induktionsanfang. Den Induktionsschritt erhält man ähnlich zum Induktionsanfang. Es gelte also $\lim_{n\to\infty} t_{n,i} = t_{0,i}$ für ein $1 \leq i \leq q-1$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,i+1} = \lim_{n\to\infty} t_{n,i} + \frac{m_i}{n} = t_{0,i} = t_{0,i+1} \text{ , wenn } t_{0,i+1} = t_{0,i}.$$

$$\lim_{n\to\infty} t_{n,i+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{j=i+1}^q m_j}{n} = 1 = t_{0,i+1} \text{ , wenn } t_{0,i+1} = 1.$$

Falls $t_{0,i} < t_{0,i+1} < 1$ ist, existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ folgt

$$m_i + [nt_{n,i}] \leq m_i + 1 + [nt_{0,i}] \leq [nt_{0,i+1}] \leq n - \sum_{j=i+1}^q m_j.$$

Somit folgt ebenfalls $\lim_{n\to\infty} t_{n,i+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{[nt_{0,i+1}]}{n} = t_{0,i+1}$.
Damit gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_0$ und mit der Stetigkeit der Funktion ρ folgt

$$\left|\min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho(\mathbf{t}) - \inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t})\right| = \min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho(\mathbf{t}) - \inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) = \min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho(\mathbf{t}) - \rho(\mathbf{t}_0) \le \rho(\mathbf{t}_n) - \rho(\mathbf{t}_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es folgt

$$\left|\min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \inf_{\mathbf{t}\in cl(H)} \rho(\mathbf{t})\right| \le \left|\min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) - \min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho(\mathbf{t})\right| + \left|\min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho(\mathbf{t}) - \inf_{\mathbf{t}\in cl(H)} \rho(\mathbf{t})\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Für $\epsilon_0 := \frac{1}{4}\left(\rho(\boldsymbol{\theta}) + \inf_{\mathbf{t}\in cl(H)} \rho(\mathbf{t})\right)$ gilt nach Voraussetzung, dass $\epsilon_0 > 0$ ist und es folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) + \min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) + \lim_{n\to\infty}\min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) \overset{3.7}{=} \rho(\boldsymbol{\theta}) + \inf_{\mathbf{t}\in cl(H)} \rho(\mathbf{t}) = 4\epsilon_0.$$

Für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) + \min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) \ge 2\epsilon_0.$$

Mit Lemma B.4 folgt

$$\begin{aligned}
&P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \ne \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) = P\left(argmax\left(|\rho_n(\mathbf{t})|,\ \mathbf{t}\in G_n\right) \ne argmax\left(\rho_n(\mathbf{t}),\ \mathbf{t}\in G_n\right)\right)\\
&\le P\left(arg\left(|\rho_n|\right) \ne arg\left(\rho_n\right)\right)\\
&\overset{B.4}{\le} P\left(-\inf_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t}) \ge \max_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t})\right)\\
&\le P\left(-\inf_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t}) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right)\\
&= P\left(-\min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t}) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right)\\
&= P\left(-\min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t}) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta}), |\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta})| \le \epsilon_0\right) + P\left(-\min_{\mathbf{t}\in G_n} \rho_n(\mathbf{t}) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta}), |\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta})| > \epsilon_0\right)\\
&\le P\left(-\min_{\mathbf{t}\in G_n} \left(\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) + \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})\right) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta}), |\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta})| \le \epsilon_0\right) + P\left(|\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta})| > \epsilon_0\right)\\
&\le P\left(-\min_{\mathbf{t}\in G_n} \left(\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})\right) - \min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta}), |\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta})| \le \epsilon_0\right) + \Delta_n(\epsilon_0)\\
&\le P\left(\max_{\mathbf{t}\in G_n} -\left(\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})\right) \ge \rho_n(\boldsymbol{\theta}) + \min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}), \rho_n(\boldsymbol{\theta}) \ge \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \epsilon_0\right) + \Delta_n(\epsilon_0)\\
&\le P\left(\max_{\mathbf{t}\in G_n} |\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})| \ge \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \epsilon_0 + \min_{\mathbf{t}\in G_n} \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})\right) + \Delta_n(\epsilon_0)\\
&\le P\left(\max_{\mathbf{t}\in G_n} |\rho_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t})| \ge \epsilon_0\right) + \Delta_n(\epsilon_0)\\
&\le 2\Delta_n(\epsilon_0).
\end{aligned}$$

□

Um stochastische Beschränktheit zu zeigen, setzen wir voraus, dass $|\rho|$ an der Stelle $\boldsymbol{\theta}$ eine lokale "Spitze" besitzt. Wir sagen es gelte die Eigenschaft (P), wenn ein beliebig kleines $\delta > 0$ sowie eine positive Konstante $L = L(\delta)$ existieren, so dass entweder

$$
\begin{aligned}
(P+): &\qquad \rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t}) \geq L \|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\| \ \ \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \\
&\textit{oder} \\
(P-): &\qquad \rho(\mathbf{t}) - \rho(\boldsymbol{\theta}) \geq L \|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\| \ \ \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}
$$

erfüllt ist. $B_\delta(\boldsymbol{\theta})$ sei die offene Kugel um $\boldsymbol{\theta}$ mit Radius δ. Die Eigenschaft $(P+)$ steht für eine Spitze nach oben im Punkt $\boldsymbol{\theta}$ der Funktion ρ und $(P-)$ für eine Spitze nach unten. Zunächst werden einige Folgerungen bzgl. der Peakeigenschaft (P) hergeleitet.
Die Eigenschaft (P) kann mittels Richtungsableitungen charakterisiert werden. Zu beachten sei dabei, dass die Funktion ρ im Punkt $\boldsymbol{\theta}$ nicht differenzierbar ist, aber alle Richtungsableitungen existieren.

3.11 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt*

$$(P+) \iff \max_{1\leq i\leq q} \{\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}),\ \partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta})\} < 0.$$

Beweis: Aus $(P+)$ folgt für alle $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$,
dass $\rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t}) > 0$ ist. Somit sind alle Richtungsableitungen negativ und es folgt die Hinrichtung. Für die Rückrichtung setze

$$L := -\frac{1}{2} \max_{1\leq i\leq q} \{\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}),\ \partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta})\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $L > 0$. Für ein beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ mit $\|\mathbf{v}\| = 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \partial_{\mathbf{v}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i:\ v_i>0} v_i\ \partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{i:\ v_i<0} v_i\ \partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{i:\ v_i>0} |v_i|\,\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i:\ v_i<0} |v_i|\,\partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \\
&\leq -2L \sum_{i:\ v_i\neq 0} |v_i| \\
&\leq -2L.
\end{aligned}
$$

Aus der Existenz der Richtungsableitungen von ρ im Punkt $\boldsymbol{\theta}$ folgt, dass zu einen beliebigen $1 \leq i \leq q$ ein $\delta_i > 0$ und $\delta_{-i} > 0$ existiert, so dass für alle $\lambda < \delta_i$ bzw. $\lambda < \delta_{-i}$ gilt

$$
(2) \qquad \left| \frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} v_j \mathbf{e_j} + \lambda |v_i|\,\mathbf{e_i}\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} v_j \mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - |v_i|\,\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right| < \frac{L}{q}
$$

$$
\left| \frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} v_j \mathbf{e_j} + \lambda |v_i|\,(-\mathbf{e_i})\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} v_j \mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - |v_i|\,\partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right| < \frac{L}{q}
$$

Damit definiere

$$\delta := \min_{1\leq i\leq q} \{\delta_i, \delta_{-i}\}.$$

Für $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta})$ setze $\lambda := \|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t})}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|} &= -\frac{\rho(\boldsymbol{\theta} + (\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta})) - \rho(\boldsymbol{\theta})}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|} = -\frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \frac{\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\right) - \rho(\boldsymbol{\theta})}{\lambda} \\
&\overset{(1)}{\geq} -\frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \frac{\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\right) - \rho(\boldsymbol{\theta})}{\lambda} + \partial_{\frac{\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}} \rho(\boldsymbol{\theta}) + 2L \\
&= 2L - \sum_{i:\ t_i > \theta_i} \left(\frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - \frac{|t_i-\theta_i|}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right) \\
&\quad - \sum_{i:\ t_i < \theta_i} \left(\frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - \frac{|t_i-\theta_i|}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right) \\
&\geq 2L - \sum_{i:\ t_i > \theta_i} \left| \frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - \frac{|t_i-\theta_i|}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\partial_{\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right| \\
&\quad - \sum_{i:\ t_i < \theta_i} \left| \frac{\rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right) - \rho\left(\boldsymbol{\theta} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t_j-\theta_j}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\mathbf{e_j}\right)}{\lambda} - \frac{|t_i-\theta_i|}{\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|}\partial_{-\mathbf{e_i}}\rho(\boldsymbol{\theta}) \right| \\
&\overset{(2)}{\geq} 2L - \sum_{i:\ t_i \neq \theta_i} \frac{L}{q} \\
&\geq L.
\end{aligned}$$

Somit existiert ein $\delta > 0$ und eine positive Konstante $L > 0$, so dass die Eigenschaft $(P+)$ gilt. □

3.12 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$, $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$ und es gelte $(P+)$. Dann folgt*

$$-\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) < \rho(\boldsymbol{\theta}) \qquad \textit{und} \qquad arg(\rho) = \{\boldsymbol{\theta}\}.$$

Beweis: Aus $(P+)$ für die Funktion ρ folgt die Existenz eines beliebig kleinen $\delta > 0$ und einer positiven Konstante $L = L(\delta)$, so dass gilt

$$\rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t}) \geq L\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\| \ \ \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}).$$

Es folgt, dass $\rho(\boldsymbol{\theta}) > 0$ ist. Denn sonst gilt für $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \setminus \{\boldsymbol{\theta}\}$

$$|\rho(\boldsymbol{\theta})| = -\rho(\boldsymbol{\theta}) \leq -L\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\| - \rho(\mathbf{t}) < -\rho(\mathbf{t}) \leq |\rho(\mathbf{t})|.$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\boldsymbol{\theta}$ Maximalstelle von $|\rho|$ ist. Somit gilt für $\mathbf{t} \neq \boldsymbol{\theta}$

$$\rho(\mathbf{t}) \leq |\rho(\mathbf{t})| < |\rho(\boldsymbol{\theta})| = \rho(\boldsymbol{\theta}).$$

Aufgrund der Stetigkeit der Funktion ρ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\rho(\mathbf{t}) > 0$ für alle $\mathbf{t} \in B_\epsilon(\boldsymbol{\theta})$. Und es folgt

$$-\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) = \sup_{\mathbf{t}\in H} -\rho(\mathbf{t}) \leq \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^q\setminus B_\epsilon} |\rho(\mathbf{t})| < \rho(\boldsymbol{\theta}).$$

□

Viele Objekte in dieser Arbeit wie zum Beispiel der Prozess ρ_n, der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ oder die Funktion ρ sind von der Kernfunktion h abhängig. $\rho_n = \rho_n(h,\cdot)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h)$ oder $\rho = \rho(h,\cdot)$. Wenn nichts anderes angegeben ist, dann betrachten wir diese Objekte mit der Kernfunktion h.

3.13 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\rho_n(h,\cdot) &= -\rho_n(-h,\cdot)\\
\rho(h,\cdot) &= -\rho(-h,\cdot)\\
\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h)\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Für $\mathbf{t} \notin H_{\mathbf{m},n}$ gilt

$$\rho_n(h,\mathbf{t}) = 0 = -0 = -\rho_n(-h,\mathbf{t})\,.$$

Und für $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}$ gilt

$$\begin{aligned}
\rho_n(h,\mathbf{t}) &= \kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)\\
&= \kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) \prod_{i=0}^{q} \binom{[nt_{i+1}]-[nt_i]}{m_i}^{-1} \sum_{1\le j_1^0<\cdots<j_{m_0}^0\le[nt_1]} \cdots \sum_{[nt_q]+1\le j_1^q<\cdots<j_{m_q}^q\le n}\\
&\qquad h\left(X_{j_1^0,n},\ldots,X_{j_{m_0}^0,n},\ldots,X_{j_1^q,n},\ldots,X_{j_{m_q}^q,n}\right)\\
&= -\kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) \prod_{i=0}^{q} \binom{[nt_{i+1}]-[nt_i]}{m_i}^{-1} \sum_{1\le j_1^0<\cdots<j_{m_0}^0\le[nt_1]} \cdots \sum_{[nt_q]+1\le j_1^q<\cdots<j_{m_q}^q\le n}\\
&\qquad -h\left(X_{j_1^0,n},\ldots,X_{j_{m_0}^0,n},\ldots,X_{j_1^q,n},\ldots,X_{j_{m_q}^q,n}\right)\\
&= -\kappa_n w\left(\frac{[n\mathbf{t}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(-h)\\
&= -\rho_n(-h,\mathbf{t})\,.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.8 folgt

$$\rho(h,\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\rho_n(h,\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E} - \rho_n(-h,\mathbf{t}) = -\rho(-h,\mathbf{t})\,.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h) &= argmax\left(\left|\ \rho_n(\ h,\ \mathbf{t})\right|,\ \mathbf{t}\in G_n\right)\\
&= argmax\left(\left|-\rho_n(-h,\mathbf{t})\right|,\ \mathbf{t}\in G_n\right)\\
&= argmax\left(\left|\ \rho_n(-h,\ \mathbf{t})\right|,\ \mathbf{t}\in G_n\right) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h)\,.
\end{aligned}$$

□

3.14 Lemma. *Ist $M_1 < \infty$, dann gilt*

$$(P-)\ \textit{für}\ \rho(h,\cdot) \Longleftrightarrow (P+)\ \textit{für}\ \rho(-h,\cdot)\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(P-)\ \text{für}\ \rho(h,\cdot) &\Longleftrightarrow\ \rho(h,\mathbf{t}) - \rho(h,\boldsymbol{\theta}) \ge L\,\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|\ \ \forall\mathbf{t}\in B_\delta(\boldsymbol{\theta})\\
&\overset{3.13}{\Longleftrightarrow}\ \rho(-h,\boldsymbol{\theta}) - \rho(-h,\mathbf{t}) \ge L\,\|\mathbf{t}-\boldsymbol{\theta}\|\ \ \forall\mathbf{t}\in B_\delta(\boldsymbol{\theta}) \Longleftrightarrow (P+)\ \text{für}\ \rho(-h,\cdot)\,.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund des letzten Lemmas genügt es, ohne Einschränkung Aussagen für $(P+)$ zu zeigen.
Mit Martingalmethoden lässt sich eine Tailabschätzung für $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]$ beweisen. Die Abschätzungen ähneln denen vom Beweis von Lemma 3.2.

3.15 Lemma. *Es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte $(P+)$. Dann existiert eine positive Konstante C, so dass für alle $x > 0$ und schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) \leq CM_p L^{-p} \kappa_n^p \left(x^{-a(p)} + a_n(p,q)\right).$$

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für δ aus der Eigenschaft $(P+)$ gilt

$$\delta < \min_{0 \leq i \leq q} \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{3}.$$

Ferner können wir ohne Einschränkung die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^q$ wählen. Somit gilt für alle $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta})$ und $0 \leq i \leq q$

$$t_{i+1} - t_i > \theta_{i+1} - \delta - (\theta_i + \delta) = (\theta_{i+1} - \theta_i - 2\delta) > \delta.$$

Des Weiteren definiere

$$G_{n,x,\delta} := \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^q : x < \|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\| < n\delta\right\}.$$

Damit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$, für alle $\mathbf{k} \in G_{n,x,\delta}$ und für $0 \leq i \leq q$ gilt

$$m_i < n\delta < k_{i+1} - k_i. \tag{3.10}$$

Das heißt, mit $\boldsymbol{\delta} := (\delta, \ldots, \delta) \in \mathbb{R}^{q+1}$ ist $\frac{\mathbf{k}}{n} \in H_{\boldsymbol{\delta}}$. Aus $x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta$ und $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ \in G_n$ folgt, dass $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ \in G_{n,x,\delta}$ ist. Aus $\max_{\mathbf{k} \in G_{n,x,\delta}} \rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) < \rho_n(\boldsymbol{\theta})$ folgt $\rho_n\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) < \rho_n(\boldsymbol{\theta})$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ = argmax\left(\rho_n(\mathbf{t}),\ \mathbf{t} \in G_n\right)$. Daraus folgt

$$\left\{x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right\} \subseteq \left\{\max_{\mathbf{k} \in G_{n,x,\delta}} \rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \geq \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right\}.$$

Im folgenden schreiben wir für $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)$ auch $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}$. Man betrachte nun folgende Differenz

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathbf{n}}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta}) = \kappa_n w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} \\
&= \kappa_n \left(w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right)\right. \\
&\quad \left. - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} + w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} + w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right)\right) \\
&= \kappa_n \left(\left(w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right) + w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}\right. \\
&\quad \left. - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} + w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right) + w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}\right) \\
&= \kappa_n \left(w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right) + \kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} + \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}\right) \\
&\quad - \left(\kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} - \kappa_n w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right) \\
&= S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k}) - \delta_n(\mathbf{k}) \text{ mit} \\
&S_{n1}(\mathbf{k}) := \kappa_n \left(w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$S_{n2}(\mathbf{k}) := \kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)} - U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})} + \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}\right)$$

$$\delta_n(\mathbf{k}) := \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right).$$

Aus $(P+)$ für die Funktion ρ folgt die Existenz eines beliebig kleinen $\delta > 0$ und einer positiven Konstante $L = L(\delta)$, so dass gilt

$$\rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t}) \geq L\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\| \;\; \forall \mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}).$$

Damit gilt für alle $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta})$

$$\mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) = (\mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}))\frac{n}{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|}\frac{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{n} =: a_n\frac{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{n},$$

und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}))\frac{n}{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|} \overset{3.8}{=} \frac{\rho(\boldsymbol{\theta}) - \rho(\mathbf{t})}{\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta}\|} \overset{(P+)}{\geq} L.$$

Damit existiert ein n_1, so dass für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ sowie für alle $\mathbf{t} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta})$ gilt

$$\delta_n([n\mathbf{t}]) = \mathsf{E}\rho_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathsf{E}\rho_n(\mathbf{t}) = a_n\frac{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{n} > \frac{1}{2}L\frac{\|[n\mathbf{t}] - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{n}.$$

Und es folgt

$$\begin{aligned}
P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) &\leq P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \geq \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left(\rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) \geq 0\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} (S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k}) - \delta_n(\mathbf{k})) \geq 0\right).
\end{aligned}$$

Für diese Umformungen ist die Einführung des Schätzers $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+$ hilfreich. Würde man die letzten Umformungen mit dem Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ durchführen, erhält man

$$P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) \leq P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left|\rho_n\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)\right| \geq |\rho_n(\boldsymbol{\theta})|\right).$$

$$\begin{aligned}
&P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) \leq P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} (S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k}) - \delta_n(\mathbf{k})) \geq 0\right) \\
&\leq P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left(S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k}) - L\frac{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{2n}\right) > 0\right) \\
&\leq P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left(|S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k})| - L\frac{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}{2n}\right) > 0\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}|S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k})| - \frac{L}{2n}\right) > 0\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{1}{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}|S_{n1}(\mathbf{k}) + S_{n2}(\mathbf{k})| > \frac{L}{2n}\right) \\
&\overset{B.5}{\leq} P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}|S_{n1}(\mathbf{k})| > CL_n\right) + P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k} - [n\boldsymbol{\theta}]\|}|S_{n2}(\mathbf{k})| > CL\right) \quad =: \tilde{P}_n + \bar{P}_n.
\end{aligned}$$

Hierbei sei C wieder eine generische positive Konstante.

Aus der Lipschitzeigenschaft der Funktion w und mit Lemma 3.3 ergibt sich für $\tilde{P}_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n &= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k}-[n\boldsymbol{\theta}]\|} \left|S_{n1}(\mathbf{k})\right| > CL\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k}-[n\boldsymbol{\theta}]\|} \left|\kappa_n\left(w\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)-w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right)\right| > CL\right) \\
&\overset{w \text{ Lipschitz}}{\leq} P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k}-[n\boldsymbol{\theta}]\|}\frac{\|\mathbf{k}-[n\boldsymbol{\theta}]\|}{n} \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right| > CL\kappa_n^{-1}\right) \\
&= P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)}\right| > CL\kappa_n^{-1}\right) \\
&\overset{(3.10)}{\leq} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in H_{\boldsymbol{\delta}}} \left|U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right) \\
&\overset{3.3}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p a_n(p,q).
\end{aligned}$$

Weiter wird nun $\bar{P}_n$ betrachtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns hier auf den Fall $q=2$. Als Norm wählen wir die Maximumsnorm.

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_n = P\left(\max_{\mathbf{k}\in G_{n,x,\delta}} \frac{n}{\|\mathbf{k}-[n\boldsymbol{\theta}]\|} \left|S_{n2}(\mathbf{k})\right| > CL\right) \\
&\leq P\left(\max_{\substack{x<|k-[n\theta_1]|<n\delta \\ |k-[n\theta_1]|\geq|l-[n\theta_2]|}} \frac{n}{|k-[n\theta_1]|}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) + P\left(\max_{\substack{x<|l-[n\theta_2]|<n\delta \\ |k-[n\theta_1]|\leq|l-[n\theta_2]|}} \frac{n}{|l-[n\theta_2]|}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&=: P_n + \breve{P}_n
\end{aligned}$$

Für $|k-[n\theta_1]| \geq |[n\theta_2]-l|$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_n &= P\left(\max_{\substack{x<|k-[n\theta_1]|<n\delta \\ |k-[n\theta_1]|\geq|l-[n\theta_2]|}} \frac{n}{|k-[n\theta_1]|}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&\leq P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]-n\delta<k<[n\theta_1]-x \\ [n\theta_2]<l<[n\theta_2]+[n\theta_1]-k}} \frac{n}{[n\theta_1]-k}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&\quad + P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]-n\delta<k<[n\theta_1]-x \\ [n\theta_2]-([n\theta_1]-k)<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{[n\theta_1]-k}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&\quad + P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]<l<[n\theta_2]+k-[n\theta_1]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&\quad + P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right) \\
&=: P_{n1}+P_{n2}+P_{n3}+P_{n4}.
\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir die Technik beispielhaft an P_{n4} vorführen.

Analog zu (3.1) gilt für $[n\theta_1] < k < l < [n\theta_2]$

$$U_{(k,l-k,n-l)}(h) = \sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right)$$

$$U_{([n\theta_1],[n\theta_1]-[n\theta_2],n-[n\theta_2])}(h) = \sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u} \frac{\binom{k-[n\theta_1]}{u'}\binom{l-k}{v'}\binom{[n\theta_2]-l}{m_1-u'-v'}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right). \tag{3.11}$$

Dabei sind $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right)$ und $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right)$ jeweils 5-Stichproben U-Statistiken mit *i.i.d.*-Stichproben und Kernfunktion h vom Grad $(u, m_0-u, m_1, v, m_2-v)$
bzw. $(m_0, u', v', m_1-u'-v', m_2-v')$. Für $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h)$ schreiben wir manchmal auch kurz $U_{\dots}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
P_{n4} &= P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|S_{n2}(k,l)\right| > CL\right)\\
&= P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|\kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]}{n},\frac{[n\theta_2]}{n}\right)\left(U_{(k,l-k,n-l)}(h) - \mathsf{E}U_{(k,l-k,n-l)}(h)\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left. - U_{([n\theta_1],[n\theta_1]-[n\theta_2],n-[n\theta_2])}(h) + \mathsf{E}U_{([n\theta_1],[n\theta_1]-[n\theta_2],n-[n\theta_2])}(h)\right)\right| > CL\right)\\
&\leq P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|U_{(k,l-k,n-l)}(h) - \mathsf{E}U_{(k,l-k,n-l)}(h)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - U_{([n\theta_1],[n\theta_1]-[n\theta_2],n-[n\theta_2])}(h) + \mathsf{E}U_{([n\theta_1],[n\theta_1]-[n\theta_2],n-[n\theta_2])}(h)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}}\left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right) - \mathsf{E}U_{\dots}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - \sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u} \frac{\binom{k-[n\theta_1]}{u'}\binom{l-k}{v'}\binom{[n\theta_2]-l}{m_1-u'-v'}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right) - U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right)\right)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\overset{B.5}{\leq} \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}}\left|U_{\dots} - \mathsf{E}U_{\dots}\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\quad + P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-l}{m_2}} - \frac{\binom{l-k}{m_1}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\right|\left|U_{\dots} - \mathsf{E}U_{\dots}\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\quad + \underbrace{\sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u}}_{(u',v')\neq(0,m_1)} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{k-[n\theta_1]}{u'}\binom{l-k}{v'}\binom{[n\theta_2]-l}{m_1-u'-v'}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\left|U_{\dots} - \mathsf{E}U_{\dots}\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&=: \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P_{n4}(u,v) + \grave{P}_{n4} + \underbrace{\sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u}}_{(u',v')\neq(0,m_1)} P'_{n4}(u',v').
\end{aligned}$$

Wir betrachten wieder für ein festes u und v die Menge $B = B(u,v)$.

$$B = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^5 \middle| \, d_1 \leq u, \; d_2 \leq m_0 - u, \; d_3 \leq m_1, d_4 \leq v, \; d_5 \leq m_2 - v, \; \sum_{i=1}^{5} d_i > 0 \right\}.$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.2 folgt mit der Zerlegung (3.2)

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P_{n4}(u,v) &= \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P\Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \\
&\quad \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right) \right| > CL\kappa_n^{-1} \Bigg) \\
&\leq \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} \sum_{i=1}^{8} \sum_{\mathbf{d}\in B_i} P\Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \\
&\quad \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right) \right| > CL\kappa_n^{-1} \Bigg) \\
&=: \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} \sum_{i=1}^{8} P_{n4,i}.
\end{aligned}$$

Aus $k - [n\theta_1] \geq [n\theta_2] - l > 0$ und $(u,v) \neq (m_0, 0)$ folgt

$$\frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \leq C.$$

Für $\mathbf{d} \in B_1 = \{ \mathbf{d} \in B | \, d_2 = 0, \; d_3 = 0, \; d_4 = 0\}$ hängt die U-Statistik $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von k und l ab. Des Weiteren gelte die Konvention $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$. Analog zur Abschätzung von $P_{4,1}$ im Beweis 3.2 folgt

$$\begin{aligned}
P_{n4,1} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \\
&\qquad \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right) \right| > CL\kappa_n^{-1} \Bigg) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]-v}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right) \right| > CL\kappa_n^{-1} \Bigg) \\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\left(\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \quad \text{für beliebige } k,\, l \text{ mit } [n\theta_1] + m_0 - u \leq k < l \leq [n\theta_2] - v \\
&\overset{(3.3)}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p\kappa_n^p n^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Es sei $\mathbf{d} \in B_2 = \{\mathbf{d} \in B | \, d_2 > 0, \ d_3 = d_4 = 0\}$.

$$P_{n4,2} = \sum_{\mathbf{d} \in B_2} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right)$$

$$\leq \sum_{\mathbf{d} \in B_2} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-v}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right)$$

$$= \sum_{\mathbf{d} \in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right|^p > CL^p\kappa_n^{-p} \right)$$

für ein beliebiges l mit $[n\theta_2] - n\delta < l \leq [n\theta_2] - v$. Mit Lemma 2.19 folgt, dass $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\delta-\frac{k'}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ für $1 \leq k' \leq [n\delta]-[x]-1$ ein Martingal ist. Mit der Doobschen Ungleichung 2.2 folgt

$$P_{n4,2} \leq \sum_{\mathbf{d} \in B_2} P\left(\max_{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right|^p > CL^p\kappa_n^{-p} \right)$$

$$\overset{\text{Doob}}{\leq} \sum_{\mathbf{d} \in B_2} CL^{-p}\kappa_n^p \mathsf{E} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right|^p$$

$$\overset{2.20}{\leq} CL^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d} \in B_2} \mathsf{E}\,|h_{\mathbf{d}}|^p \left([n\theta_1]^{d_1} ([x]+1)^{d_2} (l-[x]-1)^{d_3} ([n\theta_2]-l)^{d_4} (n-[n\theta_2])^{d_5} \right)^{-a(p)}$$

$$\overset{2.6}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p \sum_{\mathbf{d} \in B_2} \left([n\theta_1]^{d_1} ([x]+1)^{d_2} (l-[x]-1)^{d_3} ([n\theta_2]-l)^{d_4} (n-[n\theta_2])^{d_5} \right)^{-a(p)}$$

$$\overset{\text{Def. } B_2}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p ([x]+1)^{-a(p)}$$

$$\leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p x^{-a(p)}.$$

Es ist $0 < x < [x]+1$, und da $-p+1 \leq 0$ für $1 \leq p \leq 2$ bzw. $-\frac{p}{2} < 0$ für $2 < p < \infty$ ist, gilt

$$([x]+1)^{-p+1} \leq x^{-p+1} \quad 1 \leq p \leq 2$$
$$([x]+1)^{-\frac{p}{2}} \leq x^{-\frac{p}{2}} \quad 2 < p < \infty.$$

Somit folgt die letzte Ungleichung.
Es sei $d \in B_3 = \{\mathbf{d} \in B | \, d_2 = d_4 = 0, \ d_3 > 0\}$. Dann hängt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nur von der Differenz $l-k$ ab. Da $l-k > n\delta$ gilt, folgt Analog zur Abschätzung von $P_{4,3}$ im Beweis von Lemma 3.3

$$P_{n4,3} \overset{(3.8)}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.$$

Es sei $d \in B_4 = \{\mathbf{d} \in B | \, d_2 = d_3 = 0, \ d_4 > 0\}$. Für $0 \leq u < m_0$ und $[n\theta_1] < k$ folgt

$$\frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \leq C.$$

Somit folgt analog zur Abschätzung von $P_{4,4}$ im Beweis von Lemma 3.2

$$P_{n4,4} \overset{(3.6)}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)} \quad 0 \leq u < m_0.$$

Für $u = m_0$ hängt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d})$ nicht von k ab, und es gilt

$$
\begin{aligned}
P_{n4,4} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-v}} n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{k-[n\theta_1]} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \\
&\overset{k=[n\theta_1]+[x]+1}{=} \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-v} n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-[x]-1} n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-[x]-1\leq l\leq[n\theta_2]-v} n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right).
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 2.19 folgt, dass $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d})$ für $[n\theta_2] - [n\delta] \leq l \leq [n\theta_2] - [x] - 1$ ein Martingal ist. Da $0 < v$ und $[x] + 1 \leq [n\theta_2] - l$ gilt

$$
n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} \leq Cn^{-v+1} \left([x]+1\right)^{-1} \left([n\theta_2]-l\right)^v \leq C \left(\frac{[n\theta_2]-l}{n} \right)^{v-1} \leq C
$$

und es folgt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-[x]-1} n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \right) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-[x]-1} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right|^p > CL^p\kappa_n^{-p} \right) \\
&\overset{\text{Doob}}{\leq} \sum_{\mathbf{d}\in B_4} CL^{-p}\kappa_n^p \mathsf{E} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \theta_2-\frac{[x]+1}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d}) \right| \\
&\overset{\text{Def. } B_4}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p \left([x]+1\right)^{-a(p)} \\
&\leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p x^{-a(p)}.
\end{aligned}
$$

Ebenfalls mit Lemma 2.19 folgt, dass $\binom{l'}{d_4} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \theta_1+\frac{[x]+1}{n}, \theta_2-\frac{l'}{n}, \theta_2\right)}(h_\mathbf{d})$ für $v \leq l' \leq [x] + 1$ ein Martingal ist. Da $0 < d_4 \leq v$ und $[n\theta_2] - l \leq [x] + 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
n^{-v+1} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1} &\leq Cn^{-v+1} \left([x]+1\right)^{-1} \left([n\theta_2]-l\right)^{v-d_4} \binom{[n\theta_2]-l}{d_4} \\
&\leq Cn^{-v+1} \left([x]+1\right)^{v-d_4-1} \binom{[n\theta_2]-l}{d_4} \\
&\leq C \left([x]+1\right)^{-d_4} \binom{[n\theta_2]-l}{d_4}.
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-[x]-1\leq l\leq[n\theta_2]-v} n^{-v+1}\frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}}{[x]+1}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{[x]+1}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|>CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\max_{[n\theta_2]-[x]-1\leq l\leq[n\theta_2]-v}\left([x]+1\right)^{-d_4p}\left|\binom{[n\theta_2]-l}{d_4}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{[x]+1}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p>CL^p\kappa_n^{-p}\right)\\
&\overset{\text{Doob}}{\leq}\sum_{\mathbf{d}\in B_4} CL^{-p}\kappa_n^p\left([x]+1\right)^{-d_4p}\left|\binom{[x]+l}{d_4}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{[x]+1}{n},\theta_2-\frac{x+1}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p\\
&\overset{\text{Def. } B_4}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p x^{-a(p)}.
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst erhält man

$$
P_{n4,4}\leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p\left(n^{-a(p)}+x^{-a(p)}\right).
$$

Es sei $d\in B_5=\{\mathbf{d}\in B|\, d_2>0,\ d_3>0,\ d_4=0\}$.

$$
\begin{aligned}
P_{n4,5}&=\sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}}\frac{n}{k-[n\theta_1]}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}}\frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}}\\
&\qquad\qquad\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|>CL\kappa_n^{-1}\Bigg)\\
&\leq P_{n4,5}=\sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]-v}}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|>CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\overset{l':=l-k}{=}\sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-n\delta-k<l'\leq[n\theta_2]-v-k}}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{k+l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p>CL^p\kappa_n^{-p}\right) \qquad (3.12)\\
&\leq\sum_{\mathbf{d}\in B_5}\sum_{k=[n\theta_1]+[x]+1}^{[n\theta_1]+[n\delta]} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta-k<l'\leq[n\theta_2]-v-k}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{k+l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p>CL^p\kappa_n^{-p}\right).
\end{aligned}
$$

Für festes k folgt mit Lemma 2.19, dass $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\theta_2-\frac{v+\tilde{l}}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)$ für $k\leq\tilde{l}\leq[n\delta]-v$ ein Martingal ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
P_{n4,5}&\leq\sum_{\mathbf{d}\in B_5}\sum_{k=[n\theta_1]+[x]+1}^{[n\theta_1]+[n\delta]} P\left(\max_{[n\theta_2]-n\delta-k<l'\leq[n\theta_2]-v-k}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{k+l'}{n},\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p>CL^p\kappa_n^{-p}\right)\\
&\overset{\text{Doob}}{\leq}\sum_{\mathbf{d}\in B_5}\sum_{k=[n\theta_1]+[x]+1}^{[n\theta_1]+[n\delta]} CL^{-p}\kappa_n^p\mathsf{E}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\theta_2-\delta,\theta_2\right)}\left(h_{\mathbf{d}}\right)\right|^p\\
&\overset{\text{Def. } B_5}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p\sum_{k=[n\theta_1]+[x]+1}^{[n\theta_1]+[n\delta]}\left(\left(k-[n\theta_1]\right)\left([n\theta_2]-n\delta-k\right)\right)^{-a(p)}\\
&\overset{B.6}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p\begin{cases}\left([n\delta]-[x]-1\right)^{-(2p-3)} & 1\leq p<2\\ \left([n\delta]-[x]-1\right)^{-1}\ln\left([n\delta]-[x]-1\right) & p=2\\ \left([n\delta]-[x]-1\right)^{-\frac{1}{2}p} & 2<p<\infty\end{cases}\\
&\leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p a_n\left(p,1\right).
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$P_{n4,6} \leq CM_p L^{-p} \kappa_n^p a_n (p,1)$$
$$P_{n4,7} \leq CM_p L^{-p} \kappa_n^p a_n (p,1).$$

Für $\mathbf{d} \in B_8 = \{\mathbf{d} \in B | \, d_2 > 0, \; d_3 > 0, \; d_4 > 0\}$ lässt sich kein Martingal finden. Somit erhält man mit der Markovungleichung eine schwächere Abschätzung. Analog zur Abschätzung von $P_{4,8}$ im Beweis von Lemma 3.2 folgt

$$\begin{aligned}
P_{n4,8} &= \sum_{\mathbf{d} \in B_8} P \Bigg(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta \\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k-[n\theta_1]}{m_0-u}}{\binom{k}{m_0}} \frac{\binom{[n\theta_2]-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-l}{m_2}} \\
&\qquad \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)} (h_{\mathbf{d}}) \right| > CL\kappa_n^{-1} \Bigg) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d} \in B_8} \sum_{k=[n\theta_1]+[x]+1}^{[n\theta_1]-[n\delta]} \sum_{l=[n\theta_2]-[n\delta]}^{[n\theta_2]-v} P\left(\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \theta_2\right)} (h_{\mathbf{d}}) \right|^p > CL^p \kappa_n^{-p} \right) \\
&\overset{(3.7)}{\leq} CM_p L^{-p} \kappa_n^p a_n (p,2).
\end{aligned}$$

Bei vorliegen von q Change-Points erhält man $CM_p L^{-p} \kappa_n^p a_n (p,q)$ als obere Schranke. Zusammengefasst erhält man

$$\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0} \sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P_{n4}(u,v) \leq CM_p L^{-p} \kappa_n^p \left(a_n (p,2) + x^{-a(p)} \right).$$

Auf ähnliche Art kann man $P'_{n4}(\tilde{u}, \tilde{v})$ abschätzen.

$$\underbrace{\sum_{u'=0}^{m_1} \sum_{v'=0}^{m_1-u}}_{(u',v')\neq(0,m_1)} P'_{n4}(u',v') \leq CM_p L^{-p} \kappa_n^p \left(a_n (p,2) + x^{-a(p)} \right).$$

Bleibt noch $\grave{P}_{n4}$ zu untersuchen. Dazu definiere für $u, o, m_u, m_o \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_{u,o}^{m_u,m_o} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_{u,o}^{m_u,m_o}(y) &:= \frac{1}{m_u!} \prod_{i=1}^{m_u} (y-u-m_u+i) \; \frac{1}{m_o!} \prod_{j=1}^{m_o} (o-y-m_o+j) \\
f_{u,o}^{m_u,m_o}(y)' &= f_{u,o}^{m_u,m_o}(y) \left(\sum_{i=1}^{m_u} \frac{1}{y-u-m_u+i} - \sum_{j=1}^{m_o} \frac{1}{o-y-m_o+j} \right).
\end{aligned}$$

Und für $0 \leq y \leq n$ gilt

$$f_{u,o}^{m_u,m_o}(y) \leq Cn^{m_u+m_o}.$$

Damit gilt für $[n\theta_1] < k < l \leq [n\theta_2]$ und $n\delta < l-k$

$$\begin{aligned}
&\frac{n^{1-m_0-m_1-m_2}}{k-[n\theta_1]} \left| \binom{[n\theta_1]}{m_0} \binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1} \binom{n-[n\theta_2]}{m_2} - \binom{k}{m_0} \binom{l-k}{m_1} \binom{n-l}{m_2} \right| \\
&\leq \frac{n^{1-m_0-m_1-m_2}}{k-[n\theta_1]} \left(\binom{[n\theta_1]}{m_0} \left| f_{[n\theta_1],n}^{m_1,m_2}([n\theta_2]) - f_{[n\theta_1],n}^{m_1,m_2}(l) \right| + \left| f_{0,l}^{m_0,m_1}([n\theta_1]) - f_{0,l}^{m_0,m_1}(k) \right| \binom{n-l}{m_2} \right) \\
&\leq C \left(n^{1-m_1-m_2} \frac{\left| f_{[n\theta_1],n}^{m_1,m_2}([n\theta_2]) - f_{[n\theta_1],n}^{m_1,m_2}(l) \right|}{|[n\theta_2]-l|} + n^{1-m_0-m_1} \frac{\left| f_{0,l}^{m_0,m_1}([n\theta_1]) - f_{0,l}^{m_0,m_1}(k) \right|}{|k-[n\theta_1]|} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{MWS}}{\leq} C\left(n^{1-m_1-m_2}\left|f_{[n\theta_1],n}^{m_1,m_2}(y)'\right| + n^{1-m_0-m_1}\left|f_{0,l}^{m_0,m_1}(z)'\right|\right) \quad \text{für} \quad \begin{matrix} l \leq y \leq [n\theta_2] \\ [n\theta_1] \leq z \leq k \end{matrix} \qquad (3.13)\\
&\leq C\left(\left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{n}{y-[n\theta_1]-m_1+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_2}\frac{n}{n-y-m_2+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_0}\frac{n}{z-m_0+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{n}{l-z-m_1+i}\right|\right)\\
&\leq C\left(\left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{n}{l-[n\theta_1]-m_1+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_2}\frac{n}{n-[n\theta_2]-m_2+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_0}\frac{n}{[n\theta_1]-m_0+i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{n}{l-k-m_1+i}\right|\right)\\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Und es folgt

$$
\begin{aligned}
\grave{P}_{n4} &= P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n}{k-[n\theta_1]}\left|\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{k}{m_0}}\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-l}{m_2}} - \frac{\binom{l-k}{m_1}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\right|\right.\\
&\qquad \left.\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-(k-[n\theta_1])<l\leq[n\theta_2]}} \frac{n^{1-m_0-m_1-m_2}}{k-[n\theta_1]}\left|\binom{[n\theta_1]}{m_0}\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2} - \binom{k}{m_0}\binom{l-k}{m_1}\binom{n-l}{m_2}\right|\right.\\
&\qquad \left.\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]}}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h)\right| > CL\kappa_n^{-1}\right) \qquad (3.14)\\
&\overset{\text{Hoeffding}}{\leq} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]}}\left|\sum_{\mathbf{d}\in B(m_0,0)} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > CL\kappa_n^{-1}\right)\\
&\overset{B.5}{\leq} \sum_{\mathbf{d}\in B(m_0,0)} P\left(\max_{\substack{[n\theta_1]+x<k<[n\theta_1]+n\delta\\ [n\theta_2]-n\delta<l\leq[n\theta_2]}}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > CL\kappa_n^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Wobei

$$
B(m_0,0) = \left\{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_0^5 \,\middle|\, d_1 \leq m_0,\ d_2 = 0,\ d_3 \leq m_1, d_4 = 0,\ d_5 \leq m_2,\ \sum_{i=1}^{5} d_i > 0\right\}.
$$

Dabei ist $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\frac{k}{n},\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ eine **d**-degenerierte U-Statistik, die nur von der Differenz $l-k$ abhängt. Wenn $d_3 = 0$ folgt analog zur Abschätzung von $P_{n4,1}$ bzw. $P_{4,1}$ im Beweis von Lemma 3.2

$$
\grave{P}_{n4} \overset{(3.3)}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.
$$

Da $l-k > n\delta$ folgt für $d_3 > 0$ analog zur Abschätzung von $P_{n4,3}$ bzw. $P_{4,3}$ im Beweis von Lemma 3.3

$$
\grave{P}_{n4} \overset{(3.8)}{\leq} CM_pL^{-p}\kappa_n^p n^{-a(p)}.
$$

Zusammengefasst erhält man

$$
P_{n4} \leq \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0)} P_{n4}(u,v) + \grave{P}_{n4} + \underbrace{\sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u}}_{(u',v')\neq(0,m_1)} P'_{n4}(u',v') \leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p\left(a_n(p,2) + x^{-a(p)}\right).
$$

Auf ähnliche Art lassen sich auch P_{n1}, P_{n2} und P_{n3} abschätzen. Es folgt

$$P_n \leq P_{n1} + P_{n2} + P_{n3} + P_{n4} \leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p \left(a_n(p,2) + x^{-a(p)}\right).$$

Analog gilt

$$\breve{P}_n \leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p \left(a_n(p,2) + x^{-a(p)}\right).$$

Letztendlich erhält man

$$P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) \leq \tilde{P}_n + P_n + \breve{P}_n \leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p \left(a_n(p,2) + x^{-a(p)}\right).$$

Für beliebiges $q \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$P\left(x < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) \leq CM_pL^{-p}\kappa_n^p \left(a_n(p,q) + x^{-a(p)}\right).$$

□

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$. Unter bestimmten Voraussetzungen können wir stochastische Beschränktheit für die Folge $\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen.

3.16 Lemma. *Es sei* $arg(\rho) = \{\boldsymbol{\theta}\}$ *und es gelte die Eigenschaft* $(P+)$. *Des Weiteren existiere ein* $p \in [1,\infty)$ *mit* $M_p < \infty$ *und eine Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$. *Wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p b_n^{a(p)} < C_1$$

für eine Konstante $C_1 > 0$, *dann folgt*

$$b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) = O_P(1).$$

Beweis: Analog zu Theorem 1.1 folgt

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \quad \text{P-stochastisch.}$$

Und es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\|b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(xb_n^{-1} < \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\| < n\delta\right) + P\left(n\delta \leq \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right\|\right) \\
&\overset{3.15}{\leq} \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\ CM_pL^{-p}\kappa_n^p\left(\left(xb_n^{-1}\right)^{-a(p)} + a_n(p,q)\right) + P\left(n\delta \leq \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - n\boldsymbol{\theta} + n\boldsymbol{\theta} - [n\boldsymbol{\theta}]\right\|\right) \\
&\overset{B.5}{\leq} \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\ CM_pL^{-p}\kappa_n^p\left(\left(xb_n^{-1}\right)^{-a(p)} + a_n(p,q)\right) + P\left(\frac{1}{2}n\delta \leq \left\|n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - n\boldsymbol{\theta}\right\|\right) + P\left(\frac{1}{2}n\delta \leq \|n\boldsymbol{\theta} - [n\boldsymbol{\theta}]\|\right) \\
&\leq \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\ CM_pL^{-p}\left(x^{-a(p)}\kappa_n^p b_n^{a(p)} + \kappa_n^p a_n(p,q)\right) + P\left(\frac{1}{2}\delta \leq \left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - \boldsymbol{\theta}\right\|\right) + P\left(\frac{1}{2}n\delta \leq 1\right) \\
&\leq \lim_{x\to\infty}\ CM_pL^{-p}x^{-a(p)}C_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Zur Anwendung der Stetigkeitssätze für das Argmax-Funktional 2.31 bzw. 2.32 benötigen wir nur das letzte Lemma. Unter diesen Voraussetzungen können wir nun auch Theorem 1.2 beweisen.

1.2 Theorem. *Es sei* $\arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Des Weiteren existiere ein* $p \in [1, \infty)$ *mit* $M_p < \infty$ *und eine Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$. *Wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \kappa_n^p b_n^{a(p)} < C_1$$

für eine Konstante $C_1 > 0$, *dann folgt*

$$b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) = O_P(1).$$

Beweis: (P) ist entweder $(P+)$ oder $(P-)$. Es wird zunächst der Fall $(P+)$ gezeigt. Der Fall $(P-)$ folgt dann daraus bei Benutzung der Kernfunktion $-h$.
Mit Lemma 3.12 sind die Voraussetzungen des Lemmas 3.10 erfüllt und es folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\|b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\|b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) + P\left(x < \left\|b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\leq \lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\|b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|\right) + P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\overset{3.16}{=} 0 + \limsup_{n\to\infty} P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\overset{3.10}{\leq} \limsup_{n\to\infty} 2\Delta_n(\epsilon_0)\\
&\overset{3.2}{\leq} \limsup_{n\to\infty} C_p M_p \epsilon_0^{-p} \kappa_n^p a_n(p,q)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung im Falle $P(+)$ bewiesen.
Für $(P-)$ folgt die Aussage mit dem ersten Teil bei Benutzung der Kernfunktion $-h$. Denn aus der Eigenschaft $(P-)$ für die Funktion $\rho(h)$ folgt mit Lemma 3.14 die Eigenschaft $(P+)$ für die Funktion $\rho(-h)$. Da $|\rho(-h)| = |\rho(h)|$, ist $\boldsymbol{\theta}$ auch die eindeutige Maximalstelle von $|\rho(-h)|$. Somit folgt aus dem ersten Teil dieses Beweises $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h) - [n\boldsymbol{\theta}]\right) = O_P(1)$. Mit Lemma 3.13 gilt $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h)$ und es folgt die Behauptung. □

3.3 Der reskalierte Prozess

Die Grundidee zur Untersuchung der Verteilungskonvergenz besteht in der Charakterisierung von $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)$ als Maximalstelle eines bzgl. des Prozesses ρ_n normalisierten reskalierten Prozesses. Mithilfe von Stetigkeitsätzen für das Argmax-Funktional wollen wir Aussagen über das Grenzverhalten der Folge $\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ treffen. Dazu betrachten wir eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>$ mit $nb_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Des Weiteren sei

$$H_{\mathbf{m},n}(b_n) := \left\{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q : \frac{[n\boldsymbol{\theta}] + \left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n} \in H_{\mathbf{m},n}\right\}.$$

Damit definiere eine Folge von stochastischen Prozessen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Z_n = \{Z_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ durch

$$Z_n(\mathbf{t}) := \begin{cases} nb_n\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) & \mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}(b_n) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.17 Lemma. *Es gilt* $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \in arg\left(Z_n\right)$.

Beweis: Da $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ = \operatorname{argmax}\left(\rho_n\left(\mathbf{t}\right),\ \mathbf{t} \in G_n\right)$ und $G_n \subset H_{\mathbf{m},n}$ folgt

$$\frac{[n\boldsymbol{\theta}] + \left[b_n^{-1} b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right]}{n} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ \in H_{\mathbf{m},n}.$$

Des Weiteren ist $\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n} \in G_n$ und es folgt für $\mathbf{t} \notin H_{\mathbf{m},n}\left(b_n\right)$

$$Z_n\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right) = nb_n\left(\rho_n\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) - \rho_n\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right) \geq nb_n\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right) - \rho_n\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right) = 0 > Z_n\left(\mathbf{t}\right).$$

Für $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}\left(b_n\right)$ gilt auch $\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n} \in G_n$. Aufgrund der Definition von $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+$ folgt

$$Z_n\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right) = nb_n\left(\rho_n\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) - \rho_n\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right) \geq nb_n\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}] + \left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right) - \rho_n\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right) = Z_n\left(\mathbf{t}\right).$$

Und somit gilt $Z_n\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right) \geq Z_n\left(\mathbf{t}\right)$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$. $\square$

Zur asymptotischen Untersuchung des Fehlervektors $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)$ ist es sinnvoll, sich mit den Maximalstellenmengen des Prozesses Z_n zu beschäftigen. Der Prozess Z_n und somit auch die Maximalstellenmengen hängen von der Kernfunktion h ab.

1.3 Satz. *Es existiere ein* $p \in [1, \infty)$ *mit* $M_p < \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n\left(p, q\right) = 0$. *Dann gilt*

$$(1) \qquad -\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(\mathbf{t}\right) < \rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) \implies \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\left(\ h\ ,\cdot\right)\right)\right) = 0$$

$$(2) \qquad -\sup_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(\mathbf{t}\right) > \rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) \implies \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\left(-h,\cdot\right)\right)\right) = 0.$$

Beweis: Die Aussage (1) gilt, da

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\right), \hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) + P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\right), \hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\leq \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\right)\right) + P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\overset{3.17}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right)\\
&\overset{3.10}{\leq} \lim_{n\to\infty} 2\Delta_n\left(\epsilon_0\right)\\
&\overset{3.2}{\leq} \lim_{n\to\infty} CM_p\epsilon_0^{-p} a_n\left(p, q\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der zweite Teil folgt aus (1) bei Verwendung der Kernfunktion $-h$. Aus $-\sup_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(h, \mathbf{t}\right) > \rho\left(h, \boldsymbol{\theta}\right)$ folgt

$$-\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(-h, \mathbf{t}\right) \overset{3.13}{=} -\inf_{\mathbf{t}\in H} -\rho\left(h, \mathbf{t}\right) = \sup_{\mathbf{t}\in H} \rho\left(h, \mathbf{t}\right) < -\rho\left(h, \boldsymbol{\theta}\right) \overset{3.13}{=} \rho\left(-h, \boldsymbol{\theta}\right).$$

Und man erhält

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\left(h\right) - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\left(-h,\cdot\right)\right)\right)\\
&\overset{3.13}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\left(-h\right) - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \notin arg\left(Z_n\left(-h,\cdot\right)\right)\right) \overset{(1)}{=} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Man beachte, dass sich der Prozess Z_n auch schreiben lässt als

$$
\begin{aligned}
Z_n(\mathbf{t}) &= nb_n\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)-\rho_n(\boldsymbol{\theta})\right)\\
&= nb_n\left(\kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)-\kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}(h)\right)\\
&= nb_n\kappa_n\left(w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)-w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)\\
&\quad+nb_n\kappa_n w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)-U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}(h)\right)\\
&=: w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(\tilde{Z}_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t})\right)+R_n(\mathbf{t})
\end{aligned}
$$

mit

$$
\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) := \begin{cases} nb_n\kappa_n\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)-U_{\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta})}(h)\right) & \mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}(b_n)\\ -17 & \text{sonst.}\end{cases}
$$

$$
R_n(\mathbf{t}) := \begin{cases} nb_n\kappa_n\left(w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)-w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)+w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) & \mathbf{t}\in H_{\mathbf{m},n}(b_n)\\ -17 & \text{sonst.}\end{cases}
$$

Ferner gilt offensichtlich $\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t})=\mathsf{E}R_n(\mathbf{t})$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass der Prozess Z_n stochastisch asymptotisch äquivalent zu einer Linearkombination von eindimensionalen Irrfahrten mit Drift ist.

3.18 Lemma. *Es sei $\epsilon>0$ und es existiere ein $p\in[1,\infty)$ mit $M_p<\infty$. Dann existiert für alle $d\in\mathbb{N}$ eine von p abhängende Konstante $C>0$ und ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n>n_0$ gilt*

$$
P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|R_n(\mathbf{t})-ER_n(\mathbf{t})\right|>\epsilon\right)\le CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p\ d^p\ a_n(p,q).
$$

Beweis: Definiere $\beta:=\min_{0\le i\le q}\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{3}$. Da $nb_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ geht, existiert für festes $d>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\ge n_0$ gilt

$$
\frac{d}{nb_n}+\frac{2+\max_{0\le i\le q}m_i}{n}\le\beta.
$$

Daraus folgt für alle $n>n_0$, $0\le i\le q$, $-d\le s\le d$ und $-d\le t\le d$

$$
\begin{aligned}
[n\theta_{i+1}]+\left[b_n^{-1}t\right]-\left([n\theta_i]+\left[b_n^{-1}s\right]\right) &> n\theta_{i+1}+b_n^{-1}t-n\theta_i+b_n^{-1}s-4\\
&= n(\theta_{i+1}-\theta_i)+b_n^{-1}(t-s)-4\\
&\ge 3n\beta-2b_n^{-1}d-4\\
&> n\beta+2\left(b_n^{-1}d+2\right)-2b_n^{-1}d-4>[n\beta]\ge m_i.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt mit $\boldsymbol{\beta} = (\beta, \dots, \beta) \in \mathbb{R}^{q+1}$ für $\mathbf{t} \in [-d,d]^q$ und $n > n_0$, dass $\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\mathbf{t} \in H_{\boldsymbol{\beta}} \subset H_{\mathbf{m},n}$. Somit können wir uns wieder auf eine Umgebung von $\boldsymbol{\theta}$ beschränken. Aus der Lipschitzstetigkeit der Funktion w sowie Lemma 3.3 folgt

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left|R_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}R_n(\mathbf{t})\right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left| nb_n\kappa_n \left(w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right) - w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\right)\left(U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)\right)\right| > \epsilon\right) \\
&\leq P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} Cnb_n\kappa_n \left\|\frac{\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right\| \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)\right| > \epsilon\right) \\
&\leq P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} Cnb_n\kappa_n \frac{b_n^{-1}d}{n} \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)\right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left|U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+\left[b_n^{-1}\mathbf{t}\right]}{n}\right)}(h)\right| > C\epsilon d^{-1}\kappa_n^{-1}\right) \\
&\leq P\left(\sup_{\mathbf{t}\in H_{\boldsymbol{\beta}}} \left|U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})} - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}\right| > C\epsilon d^{-1}\kappa_n^{-1}\right) \\
&\overset{3.3}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}d^p\ \kappa_n^p\ a_n(p,q).
\end{aligned}
$$

□

Die Grenzfunktion der Folge der Mittelwertfunktionen des Prozesses $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich aus Richtungsableitungen der Funktion ρ im Punkt $\boldsymbol{\theta}$. Wir definieren die deterministische Funktion $\phi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(\mathbf{t}) := \sum_{i=1}^{q} |t_i|\, \partial_{\operatorname{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}).$$

3.19 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Des Weiteren gelte $\sup_{-d\leq s\leq d}\left|b_n\left[b_n^{-1}s\right] - s\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $d \in \mathbb{N}$, dass*

$$\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left|EZ_n(\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{t})\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Beweis: Wir betrachten wieder den Spezialfall $q = 2$. Für beliebiges $q \in \mathbb{N}$ geht der Beweis analog.

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{-d\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq d}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) - \phi(s,t)\right| = \sup_{\substack{-d\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq d}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) - |s|\,\partial_{\operatorname{sgn}(s)\ \mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) - |t|\,\partial_{\operatorname{sgn}(t)\ \mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| \\
&\leq \sup_{\substack{-d\leq s\leq 0\\ 0\leq t\leq d}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) + s\partial_{-\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) - t\partial_{\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| + \sup_{\substack{-d\leq s\leq 0\\ -d\leq t\leq 0}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) + s\partial_{-\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) + t\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| \\
&\quad + \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ 0\leq t\leq d}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) - s\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) - t\partial_{\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| + \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left|\mathsf{E}Z_n(s,t) - s\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) + t\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| \\
&=: A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen dies beispielhaft für A_4. Mit dem $n_0 = n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 gilt für $0 \le k \le d$, $-d \le l \le 0$ und $n > n_0$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(\rho_n\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) \\
&= \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1+\frac{k}{n},\theta_2+\frac{l}{n}\right)}(h) - \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]}{n}\right) \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,\theta_2)}(h) \\
&= \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right)\left(\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1+\frac{k}{n},\theta_2+\frac{l}{n}\right)}(h) - \mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,\theta_2)}(h)\right) \\
&\quad + \kappa_n\left(w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]}{n}\right)\right)\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,\theta_2)}(h) \\
&\overset{3.1}{=} \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right)\left(\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]-l}{m_2}} \mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n} - \mu_{(m_0,m_1,m_2),n}\right) \\
&\quad + \kappa_n\left(w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]}{n}\right)\right)\mu_{(m_0,m_1,m_2),n} \\
&= \kappa_n k\ w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-l}{m_2}} \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} \\
&\quad + \kappa_n l\ w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-1}}{\binom{n-[n\theta_2]-l}{m_2}} \mu_{(m_0,m_1+1,m_2-1),n} \\
&\quad + \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right)\left(\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-l}{m_2}} - 1\right)\mu_{(m_0,m_1,m_2),n} \\
&\quad + \kappa_n\left(w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right)\right)\mu_{(m_0,m_1,m_2),n} \\
&\quad + \kappa_n\left(w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]}{n}\right)\right)\mu_{(m_0,m_1,m_2),n} \\
&\quad + \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+k}{n}, \frac{[n\theta_2]+l}{n}\right) \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{-l}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]-l}{m_2}} \mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n} \\
&=: \sum_{i=1}^{6} A_{4,1,n}(k,l)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) - t\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) \\
&= s\left(r(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{\mathbf{e_1}}\ w(\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right) - t\left(r(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{-\mathbf{e_2}}\ w(\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\,\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right) \\
&\overset{3.6}{=} s\left(\frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_1}\ w(x,\theta_2)\,\mu_{(m_0,m_1,m_2)} + w(\theta_1,\theta_2)\frac{m_0}{\theta_1}\left(\mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)} - \mu_{(m_0,m_1,m_2)}\right)\right) \\
&\quad + t\left(\frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_2}\ w(\theta_1,x)\,\mu_{(m_0,m_1,m_2)} - w(\theta_1,\theta_2)\frac{m_2}{1-\theta_2}\left(\mu_{(m_0,m_1+1,m_2-1)} - \mu_{(m_0,m_1,m_2)}\right)\right) \\
&= sw(\theta_1,\theta_2)\frac{m_0}{\theta_1}\mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)} - tw(\theta_1,\theta_2)\frac{m_2}{1-\theta_2}\mu_{(m_0,m_1+1,m_2-1)} \\
&\quad + w(\theta_1,\theta_2)\left(s\frac{m_0}{\theta_1} + t\frac{m_2}{1-\theta_2}\right)\mu_{(m_0,m_1,m_2)} + s\frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_1}\ w(x,\theta_2)\,\mu_{(m_0,m_1,m_2)} + t\frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_2}\ w(\theta_1,x)\,\mu_{(m_0,m_1,m_2)} \\
&=: \sum_{i=1}^{5} B_{4,i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_4 &= \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left|\mathsf{E} Z_n(s,t) - s\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) + t\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| \\
&= \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left|\mathsf{E} n b_n \left(\rho_n\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) - s\partial_{\mathbf{e_1}}\ \rho(\boldsymbol{\theta}) + t\partial_{-\mathbf{e_2}}\ \rho(\boldsymbol{\theta})\right| \\
&= \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| n b_n \sum_{i=1}^{6} A_{4,1,n}\left(\left[b_n^{-1}s\right], \left[b_n^{-1}t\right]\right) - \sum_{i=1}^{5} B_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{5} \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| n b_n A_{4,i,n}\left(\left[b_n^{-1}s\right], \left[b_n^{-1}t\right]\right) - B_{4,i}\right| + \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| n b_n A_{4,6,n}\left(\left[b_n^{-1}s\right], \left[b_n^{-1}t\right]\right)\right| \\
&:= \sum_{i=1}^{6} A_{4,i}.
\end{aligned}
$$

Da $\mu_{\mathbf{k}} = \lim_{n\to\infty} \kappa_n \mu_{\mathbf{k},n}$, folgt die Beschränktheit der Folge $(\kappa_n \mu_{\mathbf{k},n})_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^3$ mit $k_0 + k_1 + k_2 = m_0 + m_1 + m_2$. Des Weiteren gilt für alle $0 \le s \le d$ und $-d \le t \le 0$

$$
\max\left\{\left[b_n^{-1}s\right], -\left[b_n^{-1}t\right]\right\} \le \left[b_n^{-1}d\right] \le b_n^{-1}d.
$$

Es folgt mit der Beschränktheit der Funktion w

$$
\begin{aligned}
A_{4,6} = \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \Bigg| & n b_n \kappa_n w\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) \\
& \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{-\left[b_n^{-1}t\right]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} \mu_{(u,m_0-u+m_1+v,m_2-v),n}\Bigg| \\
\le C n b_n & \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{-\left[b_n^{-1}t\right]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} \\
\le C n b_n & \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{\left[b_n^{-1}d\right]}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} \frac{\binom{\left[b_n^{-1}d\right]}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}} \\
\le C n b_n & \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{\left[b_n^{-1}d\right]^{m_0-u+v}}{n^{m_0-u+v}} \\
\le C n b_n & \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{d^{m_0-u+v}}{(b_n n)^{m_0-u+v}} \\
\le C n b_n & \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \frac{d^2}{(b_n n)^2} \quad \text{da } 2 \le m_0 - u + v \text{ und } b_n n \xrightarrow{n\to\infty} \infty
\end{aligned}
$$

$$\le Cd^2 (b_n n)^{-1} \quad \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zunächst betrachten wir für $\left[b_n^{-1}s\right] > 0$

$$\sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} 1_{\left\{\left[b_n^{-1}s\right]>0\right\}} \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1}\right| \tag{3.15}$$

$$\le \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| \frac{n\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{n\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}}\right| + 1_{\left\{\left[b_n^{-1}s\right]>0\right\}} \left| \frac{n\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} - \frac{m_0}{\theta_1}\right|$$

$$\le \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \frac{n\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \left| \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}\right|$$

$$+ 1_{\left\{\left[b_n^{-1}s\right]>0\right\}} n \binom{[n\theta_1]}{m_0-1} \left| \frac{1}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} - \frac{1}{n\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}} \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} \frac{m_0}{\theta_1}\right|$$

$$\le \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} n^{m_2} \left| \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}\right| + 1_{\left\{\left[b_n^{-1}s\right]>0\right\}} n^{m_0} \left| \frac{1}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} - \frac{1}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} \frac{[n\theta_1]-m_0+1}{n\theta_1}\right|$$

$$= \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} n^{m_2} \left(\frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}} - \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}}\right) + n^{m_0} \left(\frac{1}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} - \frac{1}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}}\right)$$

$$= n^{m_2} \left(\frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}} - \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]+\left[b_n^{-1}d\right]}{m_2}}\right) + n^{m_0} \left(\frac{1}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} - \frac{1}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}d\right]}{m_0}}\right)$$

$$\overset{B.1}{\le} n^{m_2} \frac{1}{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}} \frac{\left[b_n^{-1}d\right]}{n-[n\theta_2]-m_2} + n^{m_0} \frac{1}{\binom{[n\theta_1]}{m_0}} \frac{\left[b_n^{-1}d\right]}{[n\theta_1]-m_0}$$

$$\le C\frac{2d}{nb_n}.$$

Damit folgt

$$A_{4,1} = \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| nb_n\kappa_n \left[b_n^{-1}s\right] \ w\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}}\right.$$

$$\left. \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - sw(\theta_1,\theta_2)\frac{m_0}{\theta_1}\mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right|$$

$$\le \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1}\right| \left| w\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \dots\right) \kappa_n \mu_{(\dots),n} b_n \left[b_n^{-1}s\right]\right|$$

$$+ \left| w\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) - w(\theta_1,\theta_2)\right| \left| \frac{m_0}{\theta_1}\kappa_n\mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} b_n \left[b_n^{-1}s\right]\right|$$

$$+ \left| \kappa_n\mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right| \left| \frac{m_0}{\theta_1} w(\theta_1,\theta_2)\, b_n \left[b_n^{-1}s\right]\right|$$

$$+ \left| b_n \left[b_n^{-1}s\right] - s\right| \left| \frac{m_0}{\theta_1} w(\theta_1,\theta_2)\, \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right|$$

$$\le \sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}} C_1 \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1}\right|$$

$$+ C_2 \left| w\left(\frac{[n\theta_1] + \left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2] - \left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) - w\left(\theta_1, \theta_2\right) \right|$$

$$+ C_3 \left|\kappa_n \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right| + C_4 \left|b_n \left[b_n^{-1}s\right] - s\right|$$

$$\overset{w \text{ Lipschitz}}{\leq} \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} C_1 \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1} \right|$$

$$+ C_2 \left\| \left(\frac{[n\theta_1] + \left[b_n^{-1}s\right]}{n} - \theta_1, \frac{[n\theta_2] - \left[b_n^{-1}t\right]}{n} - \theta_2\right) \right\|$$

$$+ C_3 \left|\kappa_n \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right| + C_4 \left|b_n \left[b_n^{-1}s\right] - s\right|$$

$$\leq \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} C_1 \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1} \right| + C_2 \frac{2d}{b_n n}$$

$$+ C_3 \left|\kappa_n \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right| + C_4 \left|b_n \left[b_n^{-1}s\right] - s\right|$$

$$\overset{(3.15)}{\leq} C_1 \frac{2d}{n b_n} + C_2 \frac{2d}{b_n n} + C_3 \left|\kappa_n \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2),n} - \mu_{(m_0-1,m_1+1,m_2)}\right| + \sup_{0\leq s\leq d} C_4 \left|b_n \left[b_n^{-1}s\right] - s\right|.$$

Für $\left[b_n^{-1}s\right] = 0$ kann man $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ setzen und damit ist die Ungleichung (3.15) anwendbar. Somit gilt $A_{4,2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und analog folgt $A_{4,2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $A_{4,3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Mit ähnlichen Methoden lassen sich $A_{4,4}$ und $A_{4,5}$ abschätzen. Es gilt zum Beispiel für $A_{4,4}$

$$A_{4,4} \leq \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| n b_n \kappa_n \left(w\left(\frac{[n\theta_1] + \left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2] - \left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2] - \left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right)\right)\right.$$

$$\left. \mu_{(m_0,m_1,m_2),n} - s \frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_1}\ w\left(x, \theta_2\right) \mu_{m_0,m_1,m_2} \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| \frac{w\left(\frac{[n\theta_1]+\left[b_n^{-1}s\right]}{n}, \frac{[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right) - w\left(\frac{[n\theta_1]}{n}, \frac{[n\theta_2]-\left[b_n^{-1}t\right]}{n}\right)}{\frac{s}{b_n n}} - \frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_1}\ w\left(x, \theta_2\right) \right| \left|s \kappa_n \mu_{(m_0,m_1,m_2),n}\right|$$

$$+ \left|\kappa_n \mu_{(m_0,m_1,m_2),n} - \mu_{m_0,m_1,m_2}\right| \left| s \frac{\partial}{\partial x}|_{\theta_1}\ w\left(x, \theta_2\right) \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Man erhält $A_4 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für A_1, A_2 und A_3 geht es analog. □

Der Prozess $\tilde{Z}_n$ erweist sich stochastisch asymptotisch äquivalent zu einer Linearkombination von eindimensionalen Irrfahrten. Dazu definiere für $0 \leq i \leq q$ und $n \in \mathbb{N}$ folgende messbare Abbildungen $R_{i,n} : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ durch

$$R_{i,n}\left(x\right) := \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1}, \ldots, y_{i-1,m_{i-1}}, x, y_{i,2}, \ldots, y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q} \prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_{l,n}\left(dy_{l,j}\right).$$

Damit definiere folgende stochastische Prozesse $Z_{i,n} = \{Z_{i,n}\left(t\right), t \in \mathbb{R}\}$ für $1 \leq i \leq q$ durch

$$Z_{i,n}\left(t\right) := b_n \kappa_n$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{-\left[b_n^{-1}t\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) & -b_n\left([n\theta_i] - [n\theta_{i-1}]\right) < t < 0 \\ -\sum\limits_{j=1}^{\left[b_n^{-1}t\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) & 0 \leq t < b_n\left([n\theta_{i+1}] - [n\theta_i]\right) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ein festes $1 \leq i \leq q$, $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $Z_{i,n}(t)$ eine Summe über *i.i.d.* Zufallsvariablen und $Z_{i,n}$ eine zweiseitige Irrfahrt. Für ein $d \in \mathbb{N}$ und $x \in D(\mathbb{R}^q)$ bezeichnen wir mit $x^{(d)}$ die auf $[-d,d]^q$ eingeschränkte Funktion, also ist $x^{(d)} \in D([-d,d]^q)$.

3.20 Bemerkung. Zu jedem $d \in \mathbb{N}$ existiert ein n_0, so dass für alle $n > n_0$

$$\left\{ Z_{i,n}^{(d)} \middle| 1 \leq i \leq q \right\} \text{ eine Menge von } q \text{ unabhängigen Zufallselementen ist.}$$

Beweis: Die Prozesse $Z_{i,n}^{(d)}$ hängen von den Zufallsvariablen $X_{j,n}$ mit $[n\theta_i] + \left[-b_n^{-1}d\right] \leq j \leq [n\theta_i] + \left[b_n^{-1}d\right]$ ab. Mit dem $n_0 = n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 folgt für alle $n > n_0$, $0 \leq i \leq q$

$$[n\theta_i] + \left[b_n^{-1}d\right] < [n\theta_{i+1}] + \left[-b_n^{-1}d\right].$$

Aus der Unabhängigkeit der $X_{j,n}$ für $1 \leq j \leq n$ folgt die Behauptung. □

Des Weiteren definiere für $n \in \mathbb{N}$ folgende stochastische Prozesse $\bar{Z}_n = \left\{\bar{Z}_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\right\}$ durch

$$\bar{Z}_n(\mathbf{t}) := \phi(\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i).$$

Als nächstes zeigen wir für alle $d \in \mathbb{N}$, dass $Z_n^{(d)} - \bar{Z}_n^{(d)} = o_P(1)$ im Sinne von

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left| Z_n^{(d)}(\mathbf{t}) - \bar{Z}_n^{(d)}(\mathbf{t}) \right| > \epsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

3.21 Lemma. *Es sei $\epsilon > 0$ und es existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$. Dann existiert für alle $d \in \mathbb{N}$ eine von p abhängende Konstante $C > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt*

$$P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q} \left| \tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - E\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - EZ_{i,n}(t_i) \right| > \epsilon\right) \leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p \left(n^{-a(p)} + (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,q)\right).$$

Beweis: Es folgen wieder Abschätzungen, die denen aus dem Beweis von Lemma 3.2 bzw. Lemma 3.15 ähneln, sich nicht übertragen lassen. Wir betrachten wieder den Spezialfall $q = 2$.

$$\begin{aligned}
&P\left(\sup_{\substack{-d\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq d}} \left| \tilde{Z}_n(s,t) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t) - (Z_{1,n}(s) - \mathsf{E}Z_{1,n}(s) + Z_{2,n}(t) - \mathsf{E}Z_{2,n}(t)) \right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{\substack{-d\leq s\leq 0\\ 0<t\leq d}} \left| \tilde{Z}_n(s,t) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t) - (Z_{1,n}(s) - \mathsf{E}Z_{1,n}(s) + Z_{2,n}(t) - \mathsf{E}Z_{2,n}(t)) \right| > \epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\sup_{\substack{-d\leq s\leq 0\\ -d\leq t\leq 0}} \left| \tilde{Z}_n(s,t) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t) - (Z_{1,n}(s) - \mathsf{E}Z_{1,n}(s) + Z_{2,n}(t) - \mathsf{E}Z_{2,n}(t)) \right| > \epsilon\right) \\
&\quad + P\left(\sup_{\substack{0<s\leq d\\ 0<t\leq d}} \left| \tilde{Z}_n(s,t) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t) - (Z_{1,n}(s) - \mathsf{E}Z_{1,n}(s) + Z_{2,n}(t) - \mathsf{E}Z_{2,n}(t)) \right| > \epsilon\right)
\end{aligned}$$

$$
+ P\left(\sup_{\substack{0<s\le d\\ -d\le t\le 0}}\left|\tilde{Z}_n(s,t)-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t)-\left(Z_{1,n}(s)-\mathsf{E}Z_{1,n}(s)+Z_{2,n}(t)-\mathsf{E}Z_{2,n}(t)\right)\right|>\epsilon\right)
$$
$$
=: Q_{n1}+Q_{n2}+Q_{n3}+Q_{n4}.
$$

Am Beispiel von Q_{n4} wird die Technik hier vorgestellt. Setze n_0 wie im Beweis von Lemma 3.18. Dann gilt für $\mathbf{t}\in[-d,d]^q$ und $n>n_0$, dass $\boldsymbol{\theta}+b_n^{-1}\mathbf{t}\in H_{\boldsymbol{\beta}}$. Für $0\le s\le d$ und $-d\le t\le 0$ gilt mit $k_s=\left[b_n^{-1}s\right]$ und $l_t=-\left[b_n^{-1}t\right]$

$$
Z_{1,n}(s) = -b_n\kappa_n\sum_{j=1}^{k_s}\quad\frac{m_1}{\theta_2-\theta_1}R_{1,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\frac{m_0}{\theta_1}R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)
$$
$$
Z_{2,n}(-t) = b_n\kappa_n\sum_{j=1}^{l_t}\frac{m_2}{1-\theta_2}R_{2,n}\left(X_{[n\theta_2]-j,n}\right)-\frac{m_1}{\theta_2-\theta_1}R_{1,n}\left(X_{[n\theta_2]-j,n}\right).
$$

Des Weiteren gilt $\boldsymbol{\theta}+b_n^{-1}\mathbf{t}\in H_{\boldsymbol{\beta}}\subset H_{\mathbf{m},n}$ und analog der Zerlegung (3.11) folgt

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_n(s,t)-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t)\\
&= nb_n\kappa_n\left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n}\right)}(h)-U_{\mathbf{n}(\theta_1,\theta_2)}(h)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n}\right)}(h)+\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\theta_1,\theta_2)}(h)\right)\\
&= b_n\kappa_n\left(\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\;\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u}\frac{\binom{k_s}{u'}\binom{[n\theta_2]-l_t-([n\theta_1]+k_s)}{v'}\binom{l_t}{m_1-u'-v'}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\left(U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dabei sind $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\bar{h}\right)$ und $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}\left(\tilde{h}\right)$ jeweils 5-Stichproben U-Statistiken mit *i.i.d.*-Stichproben und Kernfunktion h vom Grad (u,m_0-u,m_1,v,m_2-v) bzw. $(m_0,u',v',m_1-u'-v',m_2-v')$. Des Weiteren schreiben wir manchmal auch kurz

$$
\bar{U}(h) := U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h).
$$

Im folgenden sei C eine positive generische Konstante.

$$
Q_{n4} = P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}}\left|\tilde{Z}_n(s,t)-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(s,t)-\left(Z_{1,n}(s)-\mathsf{E}Z_{1,n}(s)+Z_{2,n}(t)-\mathsf{E}Z_{2,n}(t)\right)\right|>\epsilon\right)
$$
$$
\stackrel{B.5}{\le} P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}}\left|nb_n\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\;\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\bar{U}\left(\bar{h}\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)
$$
$$
+ P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\ -d\le t\le 0}}\left|nb_n\underbrace{\sum_{u'=0}^{m_1}\sum_{v'=0}^{m_1-u}}_{(u',v')\neq(0,m_1),(1,m_1-1),(0,m_1-1)}\frac{\binom{k_s}{u'}\binom{[n\theta_2]-l_t-[n\theta_1]-k_s}{v'}\binom{l_t}{m_1-u'-v'}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\bar{U}\left(\tilde{h}\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)
$$

$$+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\left(\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}-\frac{\binom{[n\theta_2]-l_t-[n\theta_1]-k_s}{m_1}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\right)\bar{U}(h)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\bar{U}(\bar{h})-b_n\sum_{j=1}^{k_s}\frac{m_0}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\mathsf{E}\ldots\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{l_t\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-1}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\bar{U}(\bar{h})-b_n\sum_{j=1}^{l_t}\frac{m_2}{1-\theta_2}\left(R_{2,n}\left(X_{[n\theta_1]-j,n}\right)-\mathsf{E}\ldots\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{k_s\binom{[n\theta_2]-l-[n\theta_1]-k_s}{m_1-1}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\bar{U}\left(\tilde{h}\right)-b_n\sum_{j=1}^{k_s}\frac{m_1}{\theta_2-\theta_1}\left(R_{1,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\mathsf{E}\ldots\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_2]-l_t-[n\theta_1]-k_s}{m_1-1}l_t}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\bar{U}\left(\tilde{h}\right)-b_n\sum_{j=1}^{l_t}\frac{m_1}{\theta_2-\theta_1}\left(R_{1,n}\left(X_{[n\theta_1]-j,n}\right)-\mathsf{E}\ldots\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$=:\sum_{i=1}^{7}\tilde{Q}_{n4,i}.$$

Wir betrachten wieder für ein festes u und v die Menge $B=B(u,v)$.

$$B=\left\{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_0^5\,\middle|\,d_1\le u,\ d_2\le m_0-u,\ d_3\le m_1,d_4\le v,\ d_5\le m_2-v,\ \sum_{i=1}^{5}d_i>0\right\}.$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.2 folgt mit der Zerlegung (3.2)

$$\tilde{Q}_{n4,1}=P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\bar{U}(\bar{h})\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$\overset{\text{Hoeffding}}{\le}P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\sum_{\mathbf{d}\in B}U(h_{\mathbf{d}})\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$\overset{B.5}{\le}\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\sum_{\mathbf{d}\in B}P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}U(h_{\mathbf{d}})\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\sum_{i=1}^{8}\sum_{\mathbf{d}\in B_i}P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}U(h_{\mathbf{d}})\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)$$

$$=:\underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\ne(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)}\sum_{i=1}^{8}Q_{n4,i}.$$

Aus $(u,v) \neq (m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)$ folgt $2 \leq m_0-u+v$. Da $b_n n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, gilt für $0 \leq s \leq d$ und $-d \leq t \leq 0$

$$\frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} \leq C\left(\frac{k_s}{n}\right)^{m_0-u}\left(\frac{l_t}{n}\right)^{v} \leq C\left(\frac{[b_n^{-1}d]}{n}\right)^{m_0-u+v} \leq C\left(\frac{d}{b_n n}\right)^2.$$

Für $\mathbf{d} \in B_1 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 0\}$ hängt die U-Statistik $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von s und t ab. Analog zur Abschätzung (3.3) im Beweis von Lemma 3.2 folgt

$$\begin{aligned}
Q_{n4,1} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n\left(\frac{d}{b_n n}\right)^2 U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B_1} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\frac{b_n n}{d^2}\right)\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\,(b_n n)^{-p}\,n^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Für $d \in B_2 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 > 0,\ d_3 = d_4 = 0\}$ hängt die U-Statistik $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von l_t ab. Analog zur Abschätzung (3.4) im Beweis von Lemma 3.2 folgt

$$\begin{aligned}
Q_{n4,2} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n\left(\frac{d}{b_n n}\right)^{m_0-u-d_2+v} n^{-d_2}\binom{k_s}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\qquad \text{für ein beliebiges } l \in \mathbb{N} \text{ mit } [n\theta_2]-[b_n^{-1}d] \leq l \leq [n\theta_2] \text{ gilt}\\
&= \sum_{\mathbf{d}\in B_2} P\left(\sup_{0\leq s\leq d} \left| nb_n\left(\frac{d}{b_n n}\right)^{m_0-u-d_2+v} n^{-d_2}\binom{k_s}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p > C\epsilon^p\kappa_n^{-p}\right)\\
&\overset{\text{Doob}}{\leq} \sum_{\mathbf{d}\in B_2} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \mathsf{E}\left| nb_n\left(\frac{d}{b_n n}\right)^{m_0-u-d_2+v} n^{-d_2}\binom{[b_n^{-1}d]}{d_2} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{[b_n^{-1}d]}{n},\theta_2-\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p\\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_2} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p d^{2p}(b_n n)^{-p}\, \mathsf{E}\left| U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{[b_n^{-1}d]}{n},\theta_2-\frac{l}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|^p\\
&\overset{2.20}{\leq} \sum_{\mathbf{d}\in B_2} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p d^{2p}(b_n n)^{-p}\, \mathsf{E}\left|h_{\mathbf{d}}\right|^p \left([n\theta_1]^{d_1}\left[b_n^{-1}d\right]^{d_2}\left([n\theta_2]-l-[n\theta_1]-\left[b_n^{-1}d\right]\right)^{d_3} l^{d_4}\left(n-[n\theta_2]\right)^{d_5}\right)^{-a(p)}\\
&\overset{\text{Def. } B_2}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\,(b_n n)^{-p}\left[b_n^{-1}d\right]^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Es sei $d \in B_3 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 = d_4 = 0,\ d_3 > 0\}$. Dann hängt $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nur von der Differenz $l_t - k_s$ ab. Aus der Definition von $n_0 = n_0(d)$ folgt $l_t - k_s > n\beta$. Analog zur Abschätzung von $P_{4,3}$ im Beweis von Lemma 3.3 folgt

$$Q_{n4,3} \overset{(3.8)}{\leq} CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} n^{-a(p)}.$$

Für $d \in B_4 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 = d_3 = 0, d_4 > 0\}$ hängt die U-Statistik $U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})$ nicht von k_s ab. Analog zur Abschätzung $Q_{n4,2}$ folgt

$$\begin{aligned}
Q_{n4,4} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right) \\
&\leq \sum_{\mathbf{d}\in B_4} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \left(\frac{d}{b_n n}\right)^{m_0-u+v-d_4} n^{-d_4}\binom{l_t}{d_4} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right) \\
&\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} \left[b_n^{-1} d\right]^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Es sei $d \in B_5 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 > 0,\ d_3 > 0,\ d_4 = 0\}$. Analog zur Abschätzung (3.12) im Beweis von Lemma 3.15 folgt

$$\begin{aligned}
Q_{n4,5} &= \sum_{\mathbf{d}\in B_5} P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \frac{\binom{[n\theta_1]}{u}\binom{k_s}{m_0-u}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{l_t}{v}\binom{n-[n\theta_2]}{m_2-v}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right| > C\epsilon\kappa_n^{-1}\right) \\
&\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,1).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
Q_{n4,6} &\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,1) \\
Q_{n4,7} &\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,1).
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{d} \in B_8 = \{\mathbf{d} \in B |\, d_2 > 0,\ d_3 > 0,\ d_4 > 0\}$ lässt sich kein Martingal finden. Somit erhält man mit der Markovungleichung eine schwächere Abschätzung. Analog zur Abschätzung von $P_{4,8}$ im Beweis von Lemma 3.2 folgt

$$Q_{n4,8} \overset{(3.7)}{\leq} CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2).$$

Für ein beliebiges $q \in \mathbb{N}$ erhält man als oberer Schranke $CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,q)$. Zusammengefasst erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n4,1} &\leq \underbrace{\sum_{u=0}^{m_0}\sum_{v=0}^{m_2}}_{(u,v)\neq(m_0,0),(m_0-1,0),(m_0,1)} \sum_{i=1}^{8} Q_{n4,i} \qquad (3.16)\\
&\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} \left(n^{-a(p)} + \left[b_n^{-1}d\right]^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,1) + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right) \\
&\leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} \left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).
\end{aligned}$$

Ähnlich folgt

$$\tilde{Q}_{n4,2} \leq CM_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p (b_n n)^{-p} \left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).$$

Analog zur Abschätzung 3.14 von $\grave{P}_{n4}$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n4,3} &= P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\left(\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\,\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}-\frac{\binom{[n\theta_2]-l_t-[n\theta_1]-k_s}{m_1}}{\binom{[n\theta_2]-[n\theta_1]}{m_1}}\right)\bar{U}(h)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\overset{(3.13)}{\le} P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}} nb_n\frac{\max\{k_s,l_t\}}{n}\left|\bar{U}(h)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\le P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}} nb_n\frac{b_n^{-1}d}{n}\left|\bar{U}(h)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&= P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h)-\mathsf{E}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}d^{-1}\right)\\
&\le CM_p\epsilon^{-p}d^p\kappa_n^p n^{-a(p)}.
\end{aligned}$$

Für $u=m_0-1$ und $v=0$ ergibt sich für die Menge $B=B(m_0-1,0)$

$$B(m_0-1,0)=\left\{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_0^5\,\middle|\,d_1\le m_0-1,\ d_2\le 1,\ d_3\le m_1, d_4=0,\ d_5\le m_2,\ \sum_{i=1}^5 d_i>0\right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n4,4} &= P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\,\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\bar{U}\left(\bar{h}\right)-b_n\sum_{j=1}^{k_s}\frac{m_0}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\mathsf{E}\dots\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\overset{2.10}{=} P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\,\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\sum_{\mathbf{d}\in B(m_0-1,0)}\binom{m_0-1}{d_1}\binom{1}{d_2}\binom{m_1}{d_3}\binom{0}{d_4}\binom{m_2}{d_5}\bar{U}(h_{\mathbf{d}})\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-b_n\sum_{j=1}^{k_s}\frac{m_0}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\mathsf{E}R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\le P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\,\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}\sum_{\mathbf{d}\in B(m_0-1,0)\setminus\{\mathbf{e_2}\}}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}})\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&\quad+P\left(\sup_{\substack{0\le s\le d\\-d\le t\le 0}}\left|nb_n\frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}}\,\frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}}U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{e_2}})\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-b_n\sum_{j=1}^{k_s}\frac{m_0}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)-\mathsf{E}R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)\right)\right|>C\epsilon\kappa_n^{-1}\right)\\
&:= \tilde{Q}_{n4,4,1}+\tilde{Q}_{n4,4,2}.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{d} \in B(m_0-1,0) \setminus \{\mathbf{e_2}\}$ gilt $1 \leq d_1 + d_3 + d_5$. Es folgt analog zur Abschätzung (3.16) von $\tilde{Q}_{n4,1}$

$$\tilde{Q}_{n4,4,1} = P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k}{\binom{[n\theta_1]+k}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l}{m_2}} \sum_{\mathbf{d}\in B(m_0-1,0)\setminus\{\mathbf{e_2}\}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{d}}) \right| > C\epsilon\kappa_n^{-1} \right)$$
$$\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p (b_n n)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).$$

Aufgrund der Definition von $h_{\mathbf{e_2}}$ und $R_{0,n}$ gilt für $1 \leq j < [n\theta_2] - [n\theta_1]$

$$R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right) - \mathsf{E}R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)$$
$$= \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(X_{[n\theta_1]+j,n}, y_{0,2},\ldots,y_{2,m_2}\right) \prod_{j_0=2}^{m_0} \nu_0(dy_{0,j_0}) \prod_{j_1=1}^{m_1} \nu_1(dy_{1,j_1}) \prod_{j_2=1}^{m_2} \nu_2(dy_{2,j_2})$$
$$- \mathsf{E}\int_{\mathfrak{X}^{m}} h\left(X_{[n\theta_1]+j,n}, y_{0,2},\ldots,y_{2,m_2}\right) \prod_{j_0=2}^{m_0} \nu_0(dy_{0,j_0}) \prod_{j_1=1}^{m_1} \nu_1(dy_{1,j_1}) \prod_{j_2=1}^{m_2} \nu_2(dy_{2,j_2})$$
$$\overset{\text{Symmetrie}}{=} \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1},\ldots,y_{0,m_0-1}, X_{[n\theta_1]+j,n}, y_{1,1},\ldots,y_{2,m_2}\right) \prod_{j_0=1}^{m_0-1} \nu_0(dy_{0,j_0}) \prod_{j_1=1}^{m_1} \nu_1(dy_{1,j_1}) \prod_{j_2=1}^{m_2} \nu_2(dy_{2,j_2})$$
$$- \mathsf{E}\int_{\mathfrak{X}^{m}} h\left(y_{0,1},\ldots,y_{0,m_0-1}, X_{[n\theta_1]+j,n}, y_{1,1},\ldots,y_{2,m_2}\right) \prod_{j_0=1}^{m_0-1} \nu_0(dy_{0,j_0}) \prod_{j_1=1}^{m_1} \nu_1(dy_{1,j_1}) \prod_{j_2=1}^{m_2} \nu_2(dy_{2,j_2})$$
$$= \int_{\mathfrak{X}^{m}} h\left(y_{0,1},\ldots,y_{0,m_0}, y_{1,1},\ldots,y_{1,m_1}, y_{2,1},\ldots,y_{2,m_2}\right)$$
$$\prod_{j_0=1}^{m_0-1} \nu_0(dy_{0,j_0}) \left(\delta_{X_{[n\theta_1]+j,n}}(dy_{0,m_0}) - \nu_1(dy_{0,m_0})\right) \prod_{j_1=1}^{m_1} \nu_1(dy_{1,j_1}) \prod_{j_2=1}^{m_2} \nu_2(dy_{2,j_2})$$
$$= \int_{\mathfrak{X}^{m}} h\left(y_{1,1},\ldots,y_{1,m_0-1}, y_{2,1}, y_{3,1},\ldots,y_{3,m_1}, y_{5,1},\ldots,y_{5,m_1}\right)$$
$$\left(\delta_{X_{[n\theta_1]+j,n}}(dy_{2,1}) - \nu_1(dy_{2,1})\right) \prod_{j_1=1}^{m_0-1} \nu_0(dy_{1,j_1}) \prod_{j_3=1}^{m_1} \nu_1(dy_{3,j_3}) \prod_{j_5=1}^{m_2} \nu_2(dy_{5,j_5})$$
$$= h_{(0,1,0,0,0)}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right).$$

Man beachte, das hier die Kernfunktion h vom Grad $(m_0-1,1,m_1,0,m_2)$ betrachtet wird. Diese Gleichung zeigt den Zusammenhang der Funktionen $R_{i,n}$ mit den Hajekprojektionen von U-Statistiken. Analog zur Abschätzung von $A_{4,2}$ im Beweis von Lemma 3.18 und zur Abschätzung von $Q_{n4,1}$ folgt

$$\tilde{Q}_{n4,4,2} = P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| nb_n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}k_s}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} U_{\mathbf{n}\left(\theta_1,\theta_1+\frac{k_s}{n},\theta_2-\frac{l_t}{n},\theta_2\right)}(h_{\mathbf{e_2}}) \right.\right.$$
$$\left.\left. -b_n \sum_{j=1}^{k_s} \frac{m_0}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right) - \mathsf{E}\ldots\right) \right| > C\epsilon\kappa_n^{-1} \right)$$
$$= P\left(\sup_{\substack{0\leq s\leq d\\ -d\leq t\leq 0}} \left| b_n \left(n \frac{\binom{[n\theta_1]}{m_0-1}}{\binom{[n\theta_1]+k_s}{m_0}} \frac{\binom{n-[n\theta_2]}{m_2}}{\binom{n-[n\theta_2]+l_t}{m_2}} - \frac{m_0}{\theta_1} \right) \sum_{j=1}^{k_s} h_{\mathbf{e_2}}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right) \right| > C\epsilon\kappa_n^{-1} \right)$$
$$\overset{(3.15)}{\leq} P\left(\sup_{0\leq s\leq d} b_n \frac{2d}{nb_n} \left| \sum_{j=1}^{k_s} h_{\mathbf{e_2}}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right) \right| > C\epsilon\kappa_n^{-1} \right)$$

$$\overset{\text{Doob}}{\leq} C\epsilon^{-p}\kappa_n^p \left(\frac{d}{n}\right)^p \mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{[b_n^{-1}d]} h_{\mathbf{e_2}}\left(X_{[n\theta_1]+j,n}\right)\right|^p$$
$$\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p \left(\frac{d}{n}\right)^p \left[b_n^{-1}d\right]^{p-a(p)}$$
$$\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p} \left[b_n^{-1}d\right]^{-a(p)}.$$

Und man erhält

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{n4,4} &\leq \tilde{Q}_{n4,4,1} + \tilde{Q}_{n4,4,2}\\ &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2) + \left[b_n^{-1}d\right]^{-a(p)}\right)\\ &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).\end{aligned}$$

Analog zur Abschätzung $Q_{n4,4}$ folgt

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{n4,5} &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right)\\ \tilde{Q}_{n4,6} &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right)\\ \tilde{Q}_{n4,7} &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p \left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned}Q_{n4} &\leq \sum_{i=1}^{7}\tilde{Q}_{n4,i}\\ &\leq CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p\left(d^{2p}\left(b_n n\right)^{-p}\left(n^{-a(p)} + a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right) + d^p n^{-a(p)}\right)\\ &\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\left(n^{-a(p)} + \left(b_n n\right)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,2)\right).\end{aligned}$$

Die Abschätzungen für Q_{n1}, Q_{n2} und Q_{n3} gehen analog. □

3.22 Lemma. *Es sei $\epsilon > 0$ und es existiere ein $p \in [1,\infty)$ mit $M_p < \infty$. Dann existiert für alle $d \in \mathbb{N}$ eine von p abhängende Konstante $C > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt*

$$P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|Z_n(\mathbf{t}) - EZ_n(\mathbf{t}) - \bar{Z}_n(\mathbf{t}) + E\bar{Z}_n(\mathbf{t})\right| > \epsilon\right)$$
$$\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\left(a_n(p,q) + \left(b_n n\right)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,q) + n^{-p}b_n^{a(p)}\right)$$

Beweis: Zunächst schauen wir uns den Supremumsabstand von $Z_{i,n}$ und $\mathsf{E}Z_{i,n}$ an. Es sei $n \geq n_0$ mit dem n_0 aus dem Beweis von Lemma 3.18. Dann betrachten wir für $1 \leq i \leq q$ und $\left[-b_n^{-1}d\right] \leq j \leq \left[b_n^{-1}d\right]$ folgende Zufallsgrößen

$$\begin{aligned}g_{i,j,n} := &\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\left(R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \mathsf{E}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right)\\ &- \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}\left(R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \mathsf{E}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right).\end{aligned}$$

Für ein festes $1 \leq i \leq q$ sind die Zufallsgrößen $g_{i,j,n}$ für $1 \leq j \leq d$ bzw. $-d \leq j \leq -1$ jeweils i.i.d..

Es gilt für $1 \leq i \leq q$ und $0 < j \leq [n\theta_{i+1}] - [n\theta_i]$ mit der Jensenungleichung

$$\mathsf{E}\left|R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p = \mathsf{E}\left|\int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1},\dots,y_{i-1,m_{i-1}},X_{[n\theta_i]+j,n},y_{i,2},\dots,y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q}\prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_{l,n}\left(dy_{l,j}\right)\right|^p$$

$$= \int_{\mathfrak{X}}\left|\int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1},\dots,y_{i-1,m_{i-1}},x,y_{i,2},\dots,y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q}\prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_{l,n}\left(dy_{l,j}\right)\right|^p \nu_{i,n}(dx)$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \int_{\mathfrak{X}}\int_{X^{m-1}} \left|h\left(y_{0,1},\dots,y_{i-1,m_{i-1}},x,y_{i,2},\dots,y_{q,m_q}\right)\right|^p \underbrace{\prod_{l=0}^{q}\prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_{l,n}\left(dy_{l,j}\right)\nu_{i,n}(dx)$$

$$\leq M_p.$$

Analog folgt für $1 \leq i \leq q$, $k \in \{i-1,i,i+1\}$ und $[n\theta_{i-i}] - [n\theta_i] < j < [n\theta_{i+1}] - [n\theta_i]$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left|R_{k,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p &\leq M_p\\ \left|\mathsf{E}R_{k,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p &\leq M_p.\end{aligned}$$

Und man erhält für $1 \leq i \leq q$ und $-d \leq j \leq d$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left|g_{i,j,n}\right|^p &= \mathsf{E}\Bigg|\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\left(R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \mathsf{E}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right)\\ &\qquad -\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}\left(R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \mathsf{E}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right)\Bigg|^p\\ &\leq 4^p\left(\mathsf{E}\left|\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p + \left|\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\mathsf{E}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p\right.\\ &\qquad\left. + \left|\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p + \left|\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}\mathsf{E}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)\right|^p\right)\\ &\leq 4^p M_p\left(2\left(\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\right)^p + 2\left(\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}\right)^p\right) \qquad (3.17)\\ &\leq CM_p.\end{aligned}$$

Im folgenden sei C eine positive generische Konstante. Es gilt für beliebiges $\epsilon > 0$ und für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

$$P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\sum_{i=1}^{q}\left|Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{q}\sup_{-d\leq t_i\leq d}\left|Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)$$

$$\overset{B.5}{\leq} \sum_{i=1}^{q} P\left(\sup_{-d\leq t_i\leq d}\left|Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{q} P\left(\sup_{-d\leq t_i\leq 0}\left|Z_{i,n}(t_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right|>C\epsilon\right)+P\left(\sup_{0\leq t_i\leq d}\left|Z_{i,n}(t_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right|>C\epsilon\right)\\
&=\sum_{i=1}^{q} P\left(\max_{1\leq k_i\leq\left[b_n^{-1}d\right]}\left|Z_{i,n}(-b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(-b_nk_i)\right|>C\epsilon\right)+P\left(\max_{1\leq k_i\leq\left[b_n^{-1}d\right]}\left|Z_{i,n}(b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(b_nk_i)\right|>C\epsilon\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]} P\left(\left|Z_{i,n}(-b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(-b_nk_i)\right|>C\epsilon\right)+P\left(\left|Z_{i,n}(b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(b_nk_i)\right|>C\epsilon\right)\\
&\overset{\text{Markov}}{\leq} \sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]} C\epsilon^{-p}\left(\mathsf{E}\left|Z_{i,n}(-b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(-b_nk_i)\right|^p+\left|Z_{i,n}(b_nk_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(b_nk_i)\right|^p\right)\\
&=C\epsilon^{-p}\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}\mathsf{E}\left|-b_n\kappa_n\sum_{j=1}^{k_i}\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)-\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)-\mathsf{E}Z_{i,n}(k_i)\right|^p\\
&\qquad\qquad+\mathsf{E}\left|b_n\kappa_n\sum_{j=1}^{k_i}\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right)-\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right)-\mathsf{E}Z_{i,n}(k_i)\right|^p\\
&=C\epsilon^{-p}b_n^p\kappa_n^p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}\mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{k_i}g_{i,j,n}\right|^p+\mathsf{E}\left|\sum_{j=1}^{k_i}g_{i,-j,n}\right|^p\\
&=C\epsilon^{-p}b_n^p\kappa_n^p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}k_i^p\left(\mathsf{E}\left|\frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i}g_{i,j,n}\right|^p+\mathsf{E}\left|\frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i}g_{i,-j,n}\right|^p\right)\\
&\overset{2.20}{\leq} C\epsilon^{-p}b_n^p\kappa_n^p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}k_i^{p-a(p)}\left(\mathsf{E}\left|g_{i,1,n}\right|^p+\mathsf{E}\left|g_{i,-1,n}\right|^p\right)\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}b_n^p\kappa_n^p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}k_i^{p-a(p)}\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}b_n^p\kappa_n^p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=1}^{\left[b_n^{-1}d\right]}\left[b_n^{-1}d\right]^{p-a(p)}\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}b_n^{a(p)}\kappa_n^p d^{1+p-a(p)}.
\end{aligned}
$$

Man erhält für beliebiges $\epsilon>0$ und schließlich alle $n\in\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|Z_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t})-\bar{Z}_n(\mathbf{t})+\mathsf{E}\bar{Z}_n(\mathbf{t})\right|>\epsilon\right)\\
&=P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(\tilde{Z}_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t})\right)+R_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t})-w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q}Z_{i,n}(t_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right|>\epsilon\right)\\
&\overset{B.5}{\leq} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\left(\tilde{Z}_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t})-\sum_{i=1}^{q}Z_{i,n}(t_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right)\right|>C\epsilon\right)\\
&\quad+P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\left(w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)-w(\boldsymbol{\theta})\right)\sum_{i=1}^{q}Z_{i,n}(t_i)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right|>C\epsilon\right)\\
&\quad+P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|R_n(\mathbf{t})-\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t})\right|>C\epsilon\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{w \text{ Lipschitz}}{\leq} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)\\
&\quad + P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n} - \boldsymbol{\theta}\right)\right|\left|\sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right) + P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}|R_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}R_n(\mathbf{t})| > C\epsilon\right)\\
&\leq P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon\right)\\
&\quad + P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i)\right| > C\epsilon n\right) + P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}|R_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}R_n(\mathbf{t})| > C\epsilon\right)\\
&\overset{3.21,\ 3.18}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\kappa_n^p\left(d^{2p}\left(n^{-a(p)} + (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,q)\right) + n^{-p}b_n^{a(p)}d^{1+p-a(p)} + d^p\ a_n(p,q)\right)\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\left(a_n(p,q) + (b_n n)^{-p} a_{\left[b_n^{-1}d\right]}(p,q) + n^{-p}b_n^{a(p)}\right).
\end{aligned}
$$

□

Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\bar{Z}_n(\mathbf{t})\right| = \sup_{\mathbf{k}\in[-d,d]^q}|\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{t})| \xrightarrow[n\to\infty]{3.19} 0.
$$

In Abhängigkeit von der Integrationsordnung p sowie der Konvergenzordnung der Folgen $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $Z_n^{(d)} - \bar{Z}_n^{(d)} = o_P(1)$ für alle $d \in \mathbb{N}$ im Sinne von

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|Z_n^{(d)}(\mathbf{t}) - \bar{Z}_n^{(d)}(\mathbf{t})\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0.
$$

Der uns interessierende Fehlervektor $b_n\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)$ ist stochastisch asymptotisch äquivalent zu einer Maximalstelle des Prozesses Z_n, vergleiche Lemma 3.10 und 3.17. Für den Prozess Z_n gilt für alle festen $d \in \mathbb{N}$ und gleichmäßig in $\mathbf{t} \in [-d,d]^q$

$$
\begin{aligned}
Z_n(\mathbf{t}) &= w\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]}{n}\right)\underbrace{\left(\tilde{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\tilde{Z}_n(\mathbf{t})\right)}_{\text{Lemma 3.21}} + \underbrace{R_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}R_n(\mathbf{t})}_{\text{Lemma 3.18}} + \underbrace{\mathsf{E}R_n(\mathbf{t})}_{\text{Lemma 3.19}}\\
&= w(\boldsymbol{\theta})\left(\sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(t_i) - \mathsf{E}Z_{i,n}(t_i) + o_P(1)\right) + o_P(1) + \phi + o(1).
\end{aligned}
$$

Um Stetigkeitssätze für das Argmax-Funktional anwenden zu können, genügt uns die Verteilungskonvergenz der auf kompakten Mengen eingeschränkten Prozesse $Z_n^{(d)}$. Diese sind stochastisch asymptotisch äquivalent zu einer Linearkombination von unabhängigen Prozessen.

4 Feste Alternativen

Ziel des Abschnitts sind die Beweise der Theoreme 1.6 und 1.7. Hier betrachten wir das asymptotische Verhalten des Schätzers unter der Bedingung, dass die Verteilungen $\nu_{i,n}$ nicht von n abhängen.
Es sei also $X_{1,1}, \dots, X_{n,n}$ ein Dreiecksschema von zeilenweise unabhängigen Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in einem messbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$. Die Anzahl der Verteilungswechsel $q \in \mathbb{N}$ sei bekannt. Das heißt, es existiere ein Vektor

$$\boldsymbol{\theta} \in H := \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q | \, 0 < t_1 < \dots < t_q < 1\},$$

sowie Maße ν_i für $0 \le i \le q$, so dass

$$P \circ X_{j,n}^{-1} = \nu_i \quad \text{für } [n\theta_i] < j \le [n\theta_{i+1}],\ 0 \le i \le q \text{ mit } \theta_0 = 0,\ \theta_{q+1} = 1.$$

Daraus folgt, dass die Integrale $\mu_{\mathbf{k},n}$ bzgl. der Kernfunktion h ebenfalls nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Somit können wir $\kappa_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen.

1.4 Folgerung. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es sei* $arg\left(|\rho|\right) = \{\boldsymbol{\theta}\}$*. Dann folgt*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \begin{cases} \text{P-stochastisch, falls} & 1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty \\ \text{P-f.s., falls} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Beweis: Folgt aus Theorem 1.1. Es bleibt, noch $\lim_{n\to\infty} a_n(p,q) = 0$ für $1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p,q) < \infty$ für $2 < p < \infty$ zu zeigen. Für $1 + \frac{q}{q+1} < p < 2$ gilt

$$-(p-1) + q(2-p) < -\left(1 + \frac{q}{q+1} - 1\right) + q\left(2 - 1 - \frac{q}{q+1}\right) = \frac{-q + q(q+1) - q^2}{q+1} = 0.$$

Und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{ll} n^{-(p-1)+q(2-p)} & 1 + \frac{q}{q+1} < p < 2 \\ n^{-\frac{1}{2}p} & 2 < p < \infty \end{array} \right\} = 0.$$

Für $p = 2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^2 a_n(2,q) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^q}{n} \overset{\text{L'Hospital}}{=} 0.$$

Die P-f.s.-Konvergenz folgt für $2 < p < \infty$, da dann ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $1 < \delta \le \frac{p}{2}$ existiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}p} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} < \infty.$$

□

Ähnlich folgt aus Theorem 1.2 stochastische Beschränktheit für den ganzzahligen Fehlervektor $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]$.

1.5 Folgerung. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P)*. Ferner sei* $arg\left(|\rho|\right) = \{\boldsymbol{\theta}\}$*, dann folgt*

$$n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] = O_P(1).$$

Beweis: Folgt aus Theorem 1.2 mit konstanter Folge $b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog zum Beweis der Folgerung 1.4 gilt $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0$ für $1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty$. Aus $b_n = \kappa_n = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p b_n^{a(p)} = 1$ und somit liefert Theorem 1.2 die Behauptung. □

Das nächste Ziel ist, die Konvergenz von der Folge der Prozesse Z_n gegen einen Prozess Z zu zeigen. Dieser erweist sich als Linearkombination von eindimensionalen unabhängigen Irrfahrten mit Drift. Für den Prozess $Z_n = \{Z_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_n(\mathbf{t}) &= \begin{cases} nb_n \left(\rho_n \left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+[b_n^{-1}\mathbf{t}]}{n} \right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta}) \right) & \mathbf{t} \in H_{\mathbf{m},n}(1) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n \left(\rho_n \left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}]+[\mathbf{t}]}{n} \right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta}) \right) & H_{\mathbf{m},n}(1) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= Z_n(\mathbf{k}) \qquad \text{für } \mathbf{k} = [\mathbf{t}] \in \mathbb{Z}^q. \end{aligned}$$

Da $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]$ ebenfalls in $\mathbb{Z}^q$ liegt, können wir uns im folgenden auf die Menge $\mathbb{Z}^q$ beschränken. Wir definieren für $1 \leq i \leq q$ die folgenden Prozesse

$$\dot{Z}_n := \{Z_n(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q\}, \qquad \dot{Z}_{i,n} := \{Z_{i,n}(l), l \in \mathbb{Z}\}.$$

Für $1 \leq i \leq q$ und $l \in \mathbb{Z}$ erhalten wir

$$Z_{i,n}(l) = \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{-l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) & -([n\theta_i]-[n\theta_{i-1}]) < l < 0 \\ -\sum_{j=1}^{l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) & 0 \leq l < [n\theta_{i+1}] - [n\theta_i] \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner hängen die Funktionen $R_{i,n}$ nicht von $n \in \mathbb{N}$ ab. Wir definieren für $0 \leq i \leq q$ folgende messbare Abbildungen $R_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ durch

$$R_i(x) := \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1}, \ldots, y_{i-1,m_{i-1}}, x, y_{i,2}, \ldots, y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q} \prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_l(dy_{l,j}).$$

Damit gilt $R_{i,n} = R_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren seien $\xi_{i,j}$ unabhängige Zufallselemente über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\xi_{i,j} \sim \nu_i$ für $0 \leq i \leq q$ und $j \in \mathbb{Z}$. In Analogie zu den Prozessen $Z_{i,n}$ definieren wir die Prozesse $Z_i = \{Z_i(l), l \in \mathbb{Z}\}$ für $1 \leq i \leq q$ durch

$$Z_i(l) := \begin{cases} \sum_{j=1}^{-l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(\xi_{i-1,-j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(\xi_{i-1,-j}) & l < 0 \\ 0 & l = 0 \\ -\sum_{j=1}^{l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(\xi_{i,j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(\xi_{i,j}) & l \geq 0. \end{cases}$$

Für ein festes $1 \leq i \leq q$ und festes $l \in \mathbb{Z}$ ist $Z_i(l)$ eine Summe über *i.i.d.* Zufallsvariablen und Z_i eine zweiseitige Irrfahrt. Des Weiteren ist

$$\{Z_i | 1 \leq i \leq q\} \text{ eine Menge von } q \text{ unabhängigen Zufallselementen.}$$

Es sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit dem $n_0 = n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 folgt für alle $n > n_0$ und $1 \leq i \leq q$, dass

$$\dot{Z}_{i,n}^{(d)} \stackrel{\mathscr{L}}{=} Z_i^{(d)}.$$

Der Prozess $Z = \{Z(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q\}$ wird definiert durch

$$Z(\mathbf{k}) := \phi(\mathbf{k}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(k_i) - \mathsf{E} Z_i(k_i).$$

Der Prozess Z und somit auch die Maximalstellenmenge von Z hängen von der Kernfunktion h ab, $Z = Z(h, \cdot)$.

4.1 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$. Dann gilt $arg(-Z(h,\cdot)) = arg(Z(-h,\cdot))$.*

Beweis: Es gilt für $0 \leq i \leq q$ und alle $x \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} R_i(h,x) &= \int_{\mathfrak{X}^{m-1}} h\left(y_{0,1}, \ldots, y_{i-1,m_{i-1}}, x, y_{i,2}, \ldots, y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q} \prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_l(dy_{l,j}) \\ &= -\int_{\mathfrak{X}^{m-1}} -h\left(y_{0,1}, \ldots, y_{i-1,m_{i-1}}, x, y_{i,2}, \ldots, y_{q,m_q}\right) \underbrace{\prod_{l=0}^{q} \prod_{j=1}^{m_l}}_{(l,j)\neq(i,1)} \nu_l(dy_{l,j}) = -R_i(-h,x). \end{aligned}$$

Es folgt für $1 \leq i \leq q$ und $l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Z_i(h,l) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{-l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(h,\xi_{i-1,-j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(h,\xi_{i-1,-j}) & l < 0 \\ 0 & l = 0 \\ -\sum_{j=1}^{l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(h,\xi_{i,j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(h,\xi_{i,j}) & l \geq 0 \end{cases} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -\sum_{j=1}^{-l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(-h,\xi_{i-1,-j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(-h,\xi_{i-1,-j}) & l < 0 \\ 0 & l = 0 \\ \sum_{j=1}^{l} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_i(-h,\xi_{i,j}) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1}(-h,\xi_{i,j}) & l \geq 0 \end{array} \right\} = -Z_i(-h,l). \end{aligned}$$

Somit gilt für $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q$

$$\begin{aligned} Z(h,\mathbf{k}) &= \phi(h,\mathbf{k}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(h,k_i) - \mathsf{E} Z_i(h,k_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} |k_i| \, \partial_{\operatorname{sgn}(k_i)\ \mathbf{e_i}}\, \rho(h,\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} -Z_i(-h,k_i) - \mathsf{E} - Z_i(-h,k_i) \\ &\overset{3.13}{=} \sum_{i=1}^{q} |k_i| \, \partial_{\operatorname{sgn}(k_i)\ \mathbf{e_i}} - \rho(-h,\boldsymbol{\theta}) - w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(-h,k_i) - \mathsf{E} Z_i(-h,k_i) \\ &= -\phi(-h,\mathbf{k}) - w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(-h,k_i) - \mathsf{E} Z_i(-h,k_i) = -Z(-h,\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Und man erhält

$$\begin{aligned} arg(Z(-h,\cdot)) &= \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q | \max_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^q} Z(-h,\mathbf{l}) = Z(-h,\mathbf{k}) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q | \max_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^q} -Z(h,\mathbf{l}) = -Z(h,\mathbf{k}) \right\} = arg(-Z(h,\cdot)). \end{aligned}$$

□

Insbesondere ist $arg(-Z)$ die Minimalstellenmenge des Prozesses Z.

4.2 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$ und es gelte $(P+)$. Dann folgt $arg(Z) \neq \emptyset$ P-f.s.*

Beweis: Der Prozess Z lässt sich Schreiben als

$$Z(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{q} |k_i| \, \partial_{\mathrm{sgn}(k_i)\ \mathbf{e_i}} \, \rho(\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta}) \left(Z_i(k_i) - \mathsf{E} Z_i(k_i) \right) =: \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{|k_i|} Y_{i,j}.$$

Für eine festes $1 \leq i \leq q$ sind die $Y_{i,j}$ für $j \in \mathbb{N}$ *i.i.d.*-Zufallsvariablen mit $\mathsf{E} Y_{i,j} = \partial_{\mathrm{sgn}(k_i)\ \mathbf{e_i}} \, \rho(\boldsymbol{\theta})$. Mit einer Charakterisierung der Eigenschaft $(P+)$ sowie dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt für $1 \leq i \leq q$

$$(P+) \text{ für } \rho \overset{3.11}{\Longrightarrow} \mathsf{E} Y_{i,j} < 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{|k_i|} Y_{i,j} \xrightarrow[P-f.s.]{|k_i| \to \infty} -\infty \Longrightarrow Z(\mathbf{k}) \xrightarrow[P-f.s.]{\|\mathbf{k}\| \to \infty} -\infty \Longrightarrow arg(Z) \neq \emptyset \text{ P-f.s.}$$

□

Um den Satz 2.32 anzuwenden, benötigen wir $\dot{Z}_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Z^{(d)}$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

4.3 Lemma. *Es existiere ein $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ mit $M_p < \infty$. Dann gilt für alle $d \in \mathbb{N}$*

$$\dot{Z}_n^{(d)} \xrightarrow{n \to \infty} Z^{(d)} \begin{cases} \textit{P-stochastisch, falls} & 1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty \\ \textit{P-f.s., falls} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Beweis: Mit dem $n_0 = n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 folgt für alle $n > n_0$ und $1 \leq i \leq q$, dass

$$\dot{Z}_{i,n}^{(d)} \overset{\mathscr{L}}{=} Z_i^{(d)}.$$

Daraus folgt für alle $n > n_0$ und alle $\mathbf{k} \in [-d,d]^q$

$$\begin{aligned} \{Z(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in [-d,d]^q\} &= \left\{ \phi(\mathbf{k}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_i(k_i) - \mathsf{E} Z_i(k_i) : \mathbf{k} \in [-d,d]^q \right\} \\ &\overset{\mathscr{L}}{=} \left\{ \phi(\mathbf{k}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}(k_i) - \mathsf{E} Z_{i,n}(k_i) : \mathbf{k} \in [-d,d]^q \right\} = \left\{ \bar{Z}_n(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in [-d,d]^q \right\}. \end{aligned}$$

Man erhält für beliebiges $\epsilon > 0$ und schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{\mathbf{k} \in [-d,d]^q} \left| \dot{Z}_n(\mathbf{k}) - \mathsf{E} \dot{Z}_n(\mathbf{k}) - Z(\mathbf{k}) + \mathsf{E} Z(\mathbf{k}) \right| > \epsilon \right) \\ &= P\left(\max_{\mathbf{k} \in [-d,d]^q} \left| Z_n(\mathbf{k}) - \mathsf{E} Z_n(\mathbf{k}) - \bar{Z}(\mathbf{k}) + \mathsf{E} \bar{Z}(\mathbf{k}) \right| > \epsilon \right) \\ &\leq P\left(\sup_{\mathbf{t} \in [-d,d]^q} \left| Z_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E} Z_n(\mathbf{t}) - \bar{Z}(\mathbf{t}) + \mathsf{E} \bar{Z}(\mathbf{t}) \right| > \epsilon \right) \\ &\overset{3.22}{\leq} C M_p \epsilon^{-p} d^{2p} \kappa_n^p \left(a_n(p,q) + (b_n n)^{-p} \left[b_n^{-1} d \right]^{-a_q(p)} + n^{-p} b_n^{a(p)} \right) \leq C M_p \epsilon^{-p} d^{2p} \ a_n(p,q). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für alle $d \in \mathbb{N}$, dass $\sup_{-d \leq k \leq d} \left| b_n \left[b_n^{-1} k \right] - k \right| = 0$, da wir uns auf das Gitter $\mathbb{Z}^q$ eingeschränkt haben. Somit ist Lemma 3.19 anwendbar und es folgt

$$\max_{\mathbf{k} \in [-d,d]^q} \left| \mathsf{E} \dot{Z}_n(\mathbf{k}) - \mathsf{E} Z(\mathbf{k}) \right| \leq \sup_{\mathbf{t} \in [-d,d]^q} \left| \mathsf{E} Z_n(\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{t}) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{3.19} 0.$$

Analog zum Beweis der Folgerung 1.4 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n(p,q) = 0$ für $1 + \frac{q}{q+1} < p < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p,q) < \infty$ für $2 < p < \infty$. Analog zum Beweis von Satz 3.9 folgt damit

$$\max_{\mathbf{k}\in[-d,d]^q} \left|\dot{Z}_n(\mathbf{k}) - \mathsf{E}\dot{Z}_n(\mathbf{k}) - Z(\mathbf{k}) + \mathsf{E}Z(\mathbf{k})\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \begin{cases} \text{P-stochastisch} & 1+\frac{q}{q+1} < p < \infty \\ \text{P-f.s.} & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Und somit folgt die Behauptung. □

Nun sind wir in der Lage, die Theoreme 1.6 und 1.7 zu bewiesen.

1.6 Theorem. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Ferner sei* $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. *Dann folgt*

$$(1) \qquad (P+) \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(Z_n(\ h\ ,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right) \leq P\left(arg(\ Z\ ) \cap F \neq \emptyset\right) \quad \forall F \subset \mathbb{Z}^q$$

$$(2) \qquad (P-) \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(Z_n(-h,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right) \leq P\left(arg(-Z) \cap F \neq \emptyset\right) \quad \forall F \subset \mathbb{Z}^q.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $(P+)$. Die Aussage folgt dann aus Lemma 2.32 angewendet auf die Folge von Prozessen $\left(\dot{Z}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Maximalstellenmengenfolge $\left(arg\left(\dot{Z}_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Somit sind, die Voraussetzungen (1) bis (6) des Satzes zu prüfen.
Aus der Definition von $\dot{Z}_n$ folgt (1).
Da $n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}] \in \mathbb{Z}^q$ folgt mit der konstanten Folge $b_n = 1$ aus Lemma 3.17, dass $arg\left(\dot{Z}_n\right) \neq \emptyset$ ist, also gilt (2).
Analog zum Beweis der Folgerung 1.4 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n(p,q) = 0$. Mit Lemma 3.12 folgt die Anwendbarkeit von Lemma 3.16 mit der konstanten Folge $b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Und es folgt (3), da

$$\lim_{d\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(\dot{Z}_n\right) \not\subseteq [-d,d]^q\right) \overset{3.17}{\leq} \lim_{d\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}] \notin [-d,d]^q\right) \overset{3.16}{=} 0.$$

Aus der Definition von Z folgt (4).
Aus Lemma 4.2 folgt $arg(Z) \neq \emptyset$. Somit gilt (5).
Da aus der stochastischen Konvergenz auch Verteilungskonvergenz folgt, gilt mit Lemma 4.3

$$\dot{Z}_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Z^{(d)} \text{ in } \mathbb{R}^{(2d+1)^q}\ \forall d \in \mathbb{N}.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.32 erfüllt und es folgt für alle $F \subset \mathbb{Z}^q$

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(arg(Z_n) \cap F \neq \emptyset\right) = \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(\dot{Z}_n\right) \cap F \neq \emptyset\right) \overset{2.32}{\leq} P\left(arg(Z) \cap F \neq \emptyset\right).$$

Im Fall $(P-)$ folgt die Aussage mit dem ersten Teil bei Benutzung der Kernfunktion $-h$. Da $|\rho(h,\cdot)| = |\rho(-h,\cdot)|$ ist $\boldsymbol{\theta}$ auch die eindeutige Maximalstelle von $|\rho(-h,\cdot)|$. Aus $(P-)$ für $\rho(h,\cdot)$ folgt mit Lemma 3.14 die Eigenschaft $(P+)$ für $\rho(-h,\cdot)$. Und somit gilt für alle $F \subset \mathbb{Z}^q$

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(Z_n(-h,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right) &= \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\left(\dot{Z}_n(-h,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right) \\ &\overset{(1)}{\leq} P\left(arg\left(Z(-h,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right) \overset{4.1}{=} P\left(arg\left(-Z(h,\cdot)\right) \cap F \neq \emptyset\right).\end{aligned}$$

□

Im Fall dass der Prozess Z eine eindeutige Maximal- bzw. Minimalstelle besitzt, erhalten wir sogar Verteilungskonvergenz.

1.7 Theorem. *Es existiere ein* $p \in \left(1 + \frac{q}{q+1}, \infty\right)$ *mit* $M_p < \infty$ *und es gelte die Eigenschaft* (P). *Ferner sei* $\boldsymbol{\theta}$ *die eindeutige Maximalstelle von* $|\rho|$. *Dann folgt*

$$(1) \qquad (P+) \text{ und } arg\,(\ Z\ ) = \left\{\tau_f^+\right\} \text{ P-f.s.} \implies n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_f^+ \quad \text{in } \mathbb{Z}^q$$

$$(2) \qquad (P-) \text{ und } arg\,(-Z) = \left\{\tau_f^-\right\} \text{ P-f.s.} \implies n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_f^- \quad \text{in } \mathbb{Z}^q.$$

Beweis: Dies folgt aus dem Theorem 1.6 mit dem Portmanteau Theorem. Wir betrachten zunächst den Fall $(P+)$. Analog zum Beweis der Folgerung 1.4 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n(p,q) = 0$. Aus $(P+)$ folgt mit Lemma 3.12 $-\inf_{\mathbf{t}\in H} \rho(\mathbf{t}) < \rho(\boldsymbol{\theta})$. Somit ist Satz 1.3 mit der konstanten Folge $b_n = 1$ anwendbar. Und es gilt für alle $F \subset \mathbb{Z}^q$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \in F\right) &= \limsup_{n\to\infty} P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \in F \cap arg\,(Z_n)\right) + P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \in F \setminus arg\,(Z_n)\right) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} P\left(arg\,(Z_n) \cap F \neq \emptyset\right) + P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] \notin arg\,(Z_n)\right) \\
&\overset{1.6,1.3}{\le} P\left(arg\,(Z) \cap F \neq \emptyset\right) \\
&= P\left(\tau_f^+ \in F\right).
\end{aligned}$$

Mit dem Portmanteau Theorem folgt (1). Im Fall $(P-)$ folgt die Behauptung mit dem ersten Teil bei Benutzung der Kernfunktion $-h$. Da $|\rho(h,\cdot)| = |\rho(-h,\cdot)|$ ist $\boldsymbol{\theta}$ auch die eindeutige Maximalstelle von $|\rho(-h,\cdot)|$. Aus $(P-)$ für $\rho(h,\cdot)$ folgt mit Lemma 3.14 die Eigenschaft $(P+)$ für $\rho(-h,\cdot)$. Des Weiteren gilt

$$arg\,(Z(-h,\cdot)) \overset{4.1}{=} arg\,(-Z(h,\cdot)) = \left\{\tau_f^-\right\}.$$

Es gilt für alle $F \subset \mathbb{Z}^q$ mit dem Portmanteau Theorem

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h) - [n\boldsymbol{\theta}] \in F\right) \overset{3.13}{=} \limsup_{n\to\infty} P\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h) - [n\boldsymbol{\theta}] \in F\right) \overset{\text{Portmanteau},(1)}{\le} P\left(\tau_f^- \in F\right).$$

□

Der folgende Satz zeigt, dass der Prozess Z in recht allgemeinen Situationen P-f.s. eine eindeutige Maximalstelle besitzt.

4.4 Satz. *Es sei* $M_1 < \infty$ *und es gelte* $(P+)$. *Ferner seien* $R_i(\xi_{i,1})$ *für* $0 \le i \le q$ *stetige Zufallsgrößen. Dann besitzt der Prozess* Z *eine eindeutige Maximalstelle P-f.s.*

Beweis: Da $R_i(\xi_{i,1})$ für $0 \le i \le q$ stetige Zufallsgrößen sind, ist $Z(\mathbf{k})$ ebenfalls eine stetige Zufallsgröße für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^q$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
&P\,(Z \text{ besitzt eine eindeutige Maximalstelle}) \\
&= 1 - P\left(\{arg\,(Z) = \emptyset\} \cup \{Z \text{ besitzt mindestens zwei Maximalstellen}\}\right) \\
&\ge 1 - P\left(arg\,(Z) = \emptyset\right) - P\,(Z \text{ besitzt mindestens zwei Maximalstellen}) \\
&\overset{4.2}{=} 1 - P\,(Z \text{ besitzt mindestens zwei Maximalstellen } \tau \text{ und } \sigma) \\
&\ge 1 - P\left(Z(\tau) = Z(\sigma)\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{\mathbf{k}\neq\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^q} \{\tau = \mathbf{k}, \sigma = \mathbf{l}, Z(\mathbf{k}) = Z(\mathbf{l})\}\right) \\
&\ge 1 - \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^q} P\left(\tau = \mathbf{k}, \sigma = \mathbf{l}, Z(\mathbf{k}) = Z(\mathbf{l})\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 1 - \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^q} P\left(Z\left(\mathbf{k}\right) - Z\left(\mathbf{l}\right) = 0\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit gilt, da auch $Z\left(\mathbf{k}\right) - Z\left(\mathbf{l}\right)$ eine stetige Zufallsgröße ist. $\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir das zweite Beispiel aus Abschnitt 1. Es seien ϵ_j für $j \in \mathbb{N}$ reellwertige zentrierte i.i.d Zufallsgrößen und $\delta \in \mathbb{R}$.

$$
X_{j,n} := \begin{cases} \epsilon_j & 1 \leq j \leq [n\theta_1] \\ \epsilon_j + \delta & [n\theta_1] < j \leq [n\theta_2] \\ \epsilon_j & [n\theta_2] < j \leq n. \end{cases}
$$

Des Weiteren fordern wir, dass ϵ_1 mindestens p-fach integrierbar ist mit $p > \frac{5}{3}$. Wir wählen $\mathbf{m} = (1,1,1)$ und $h\left(x,y,z\right) = x - 2y + z$. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass ein bekanntes $\beta > 0$ existiert, mit $\theta_i - \theta_{i-1} > \beta$ für $i \in \{1,2,3\}$. Somit können wir die Gewichtsfunktion konstant Eins wählen. Als Schätzer erhalten wir dann

$$
\left(\hat{\theta}_{1,n}, \hat{\theta}_{2,n}\right) := \underset{(s,t)\in\left\{\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \middle| k,l\in\mathbb{N} \text{ mit } n\beta<\min\{k,l-k,n-l\}\right\}}{\operatorname{argmax}} \left|\left(\overline{X}_{0,[ns]} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right) + \left(\overline{X}_{[nt],n} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right)\right|.
$$

Für die Integrale der Kernfunktion erhalten wir durch Nachrechnen

$$
\begin{aligned}
\mu_{1,1,1} &= 2\delta \\
-\mu_{2,1,0} = -\mu_{0,1,2} = \mu_{1,2,0} = \mu_{0,2,1} &= \delta \\
\mu_{3,0,0} = \mu_{0,3,0} = \mu_{0,0,3} = \mu_{2,0,1} = \mu_{1,0,2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Und somit ergibt sich durch Nachrechnen folgendes für die Funktion ρ, vergleiche (3.9).

$$
\rho\left(s,t\right) := \delta \begin{cases}
-\frac{\theta_2-\theta_1}{1-t} & 0 \leq s \leq t \leq \theta_1 < \theta_2 < 1 \\
\frac{t-\theta_1}{t-s} + \frac{t-\theta_1}{t-s}\frac{1-\theta_2}{1-t} - \frac{\theta_1-s}{t-s}\frac{\theta_2-t}{1-t} & 0 \leq s \leq \theta_1 \leq t \leq \theta_2 < 1 \\
2\frac{\theta_2-\theta_1}{t-s} & 0 \leq s \leq \theta_1 < \theta_2 \leq t \leq 1 \\
\frac{1-\theta_2}{1-t} + \frac{\theta_1}{s} & 0 < \theta_1 \leq s \leq t \leq \theta_2 \leq 1 \\
-\frac{s-\theta_1}{s}\frac{t-\theta_2}{t-s} + \frac{\theta_2-s}{t-s} + \frac{\theta_1}{s}\frac{\theta_2-s}{t-s} & 0 < \theta_1 \leq s \leq \theta_2 \leq t \leq 1 \\
-\frac{\theta_2-\theta_1}{s} & 0 < \theta_1 < \theta_2 \leq s \leq t \leq 1 \\
0 & \text{sonst.}
\end{cases}
$$

Da insbesondere jeder einzelne Bruch in der obigen Darstellung betragsmäßig echt kleiner Eins ist, folgt für alle $(s,t) \in H \setminus \{(\theta_1,\theta_2)\}$

$$
\rho\left(\theta_1,\theta_2\right) = 2\delta \begin{cases} > \rho\left(s,t\right) & \text{, falls } \delta > 0 \\ < \rho\left(s,t\right) & \text{, falls } \delta < 0. \end{cases}
$$

Des Weiteren folgt mit Lemma 3.6 oder durch Nachrechnen

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{e_1}}\rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= -\frac{\delta}{\theta_1} & \partial_{\mathbf{e_2}}\rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= -2\frac{\delta}{\theta_2-\theta_1} \\
\partial_{-\mathbf{e_1}}\rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= -2\frac{\delta}{\theta_2-\theta_1} & \partial_{-\mathbf{e_2}}\rho\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= -\frac{\delta}{1-\theta_2}.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit Lemma 3.11 folgt:

$$
\begin{aligned}
\delta > 0 &\implies (P+) \text{ und } arg\left(\ \rho\ \right) = \left\{(\theta_1,\theta_2)\right\}, \\
\delta < 0 &\implies (P-) \text{ und } arg\left(-\rho\right) = \left\{(\theta_1,\theta_2)\right\}.
\end{aligned}
$$

Für die Funktion R_0 ergibt sich

$$R_0\left(x\right)=\int_{\mathfrak{X}^2} h\left(x,y,z\right)\nu_1\left(dy\right)\nu_2\left(dz\right)=\int_{\mathfrak{X}^2} x-2y+z\ P_{\epsilon_1+\delta}\left(dy\right)P_{\epsilon_1}\left(dz\right)=x-2\delta.$$

Ähnlich erhält man

$$R_1\left(x\right)=-2x \quad \text{und} \quad R_2\left(x\right)=x-2\delta.$$

Des Weiteren seien $\xi_{i,j}$ für $i\in\{0,1,2\}$ und $j\in\mathbb{Z}$ zentrierte i.i.d. Zufallsvariablen mit $\xi_{i,j}\overset{\mathscr{L}}{=}\epsilon_1$. Somit ergibt sich für den Prozess Z

$$Z\left(k,l\right)=\begin{cases} \frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}k+\frac{\delta}{1-\theta_2}l-\sum_{j=1}^{-k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{0,-j}+\sum_{j=1}^{-l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{1,-j} & k<0,l<0\\ \frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}k-\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}l-\sum_{j=1}^{-k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{0,-j}-\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{2,j} & k<0,l\geq 0\\ -\frac{\delta}{\theta_1}k+\frac{\delta}{1-\theta_2}l+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{1,j}+\sum_{j=1}^{-l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{1,-j} & k\geq 0,l<0\\ -\frac{\delta}{\theta_1}k-\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}l+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{1,j}-\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{2,j} & k\geq 0,l\geq 0. \end{cases}$$

Es gilt für beliebige Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\underset{(s,t)\in\mathbb{R}^2}{\arg}\left(f\left(s\right)+g\left(t\right)\right)=\left\{\left(s,t\right)\in\mathbb{R}^2: s\in\arg f \text{ und } t\in\arg g\right\} \tag{4.1}$$

Für die Maximalstellen des Prozesses Z folgt

$$\begin{aligned} argZ=\underset{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}{\arg}\Bigg(&1_{k\geq 0}\left(-\frac{\delta}{\theta_1}k+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{1,j}\right)\\ &+1_{k<0}\left(\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}k-\sum_{j=1}^{-k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{0,-j}\right)\\ &+1_{l\geq 0}\left(-\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}l-\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{2,j}\right)\\ &+1_{l<0}\left(\frac{\delta}{1-\theta_2}l+\sum_{j=1}^{-l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{1,-j}\right)\Bigg)\\ \overset{(4.1)}{=}\Bigg\{&\left(k_0,l_0\right)\in\mathbb{Z}^2: k_0\in\underset{k\in\mathbb{Z}}{\arg}\left(1_{k\geq 0}\left(-\frac{\delta}{\theta_1}k+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{1,j}\right)\right.\\ &\left.+1_{k<0}\left(\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}k-\sum_{j=1}^{-k}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\xi_{0,-j}\right)\right) \text{ und}\\ &l_0\in\underset{l\in\mathbb{Z}}{\arg}\left(1_{l\geq 0}\left(-\frac{2\delta}{\theta_2-\theta_1}l-\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{2,j}\right)\right.\\ &\left.+1_{l<0}\left(\frac{\delta}{1-\theta_2}l+\sum_{j=1}^{-l}\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\xi_{1,-j}\right)\right)\Bigg\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ (k_0, l_0) \in \mathbb{Z}^2 : k_0 \in \arg_{k \in \mathbb{Z}} \left(1_{k \geq 0} \left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_1} \delta k + \sum_{j=1}^{k} \xi_{1,j} \right) + 1_{k<0} \left(\frac{2\theta_1}{\theta_2 + \theta_1} \delta k - \sum_{j=1}^{-k} \xi_{0,-j} \right) \right), \right.$$

$$\left. l_0 \in \arg_{l \in \mathbb{Z}} \left(1_{l \geq 0} \left(-\frac{2(1-\theta_2)}{1-\theta_2+1-\theta_1} \delta l - \sum_{j=1}^{l} \xi_{2,j} \right) + 1_{l<0} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{1-\theta_2+1-\theta_1} \delta l + \sum_{j=1}^{-l} \xi_{1,-j} \right) \right) \right\}.$$

Ist ϵ_1 eine stetig Zufallsgrösse, dann folgt mit Satz 4.4, dass der Prozess Z eine P-f.s. eindeutige Maximalstelle besitzt. Wenn wir voraussetzen, dass $\delta > 0$ ist und

$$\arg_{k \in \mathbb{Z}} \left(1_{k<0} \left(\frac{2\theta_1}{\theta_2 + \theta_1} \delta k - \sum_{j=1}^{-k} \xi_{0,-j} \right) + 1_{k \geq 0} \left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_1} \delta k + \sum_{j=1}^{k} \xi_{1,j} \right) \right) = \left\{ \tau_{f,1}^{+} \right\}$$

$$\arg_{l \in \mathbb{Z}} \left(1_{l<0} \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{1-\theta_2+1-\theta_1} \delta l + \sum_{j=1}^{-l} \xi_{1,-j} \right) + 1_{l \geq 0} \left(-\frac{2(1-\theta_2)}{1-\theta_2+1-\theta_1} \delta l - \sum_{j=1}^{l} \xi_{2,j} \right) \right) = \left\{ \tau_{f,2}^{+} \right\},$$

dann folgt

$$\left(n\hat{\theta}_{1,n} - [n\theta_1], n\hat{\theta}_{2,n} - [n\theta_2] \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathscr{L}} \left(\tau_{f,1}^{+}, \tau_{f,2}^{+} \right) \quad \text{in } \mathbb{Z}^2.$$

Wenn $\delta < 0$ ist und der Prozess Z eine eindeutige Minimalstelle $\left(\tau_{f,1}^{-}, \tau_{f,2}^{-} \right)$ P-f.s. besitzt, dann folgt

$$\left(n\hat{\theta}_{1,n} - [n\theta_1], n\hat{\theta}_{2,n} - [n\theta_2] \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathscr{L}} \left(\tau_{f,1}^{-}, \tau_{f,2}^{-} \right) \quad \text{in } \mathbb{Z}^2.$$

5 Lokale Alternativen

Auch unter den lokalen Alternativen sei die Anzahl der Verteilungswechsel $q \in \mathbb{N}$ bekannt. Hier betrachten wir für $0 \leq i \leq q$ Folgen von Maßen $(\nu_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass diese für $n \to \infty$ aufeinander zulaufen, $\nu_{i,n} \rightsquigarrow \nu$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir als Schätzer für den unbekannten Change-Point $\boldsymbol{\theta} \in H$ weiterhin Maximalstellen einer gewichteten $(q+1)$-Stichproben U-Statistik mit Kernfunktion h vom Grad $\mathbf{m}$.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n := argmax\left(\left|\rho_n\left(\mathbf{t}\right)\right|,\ \mathbf{t} \in G_n\right).$$

Damit der Schätzer die Verteilungswechsel noch erkennen kann, dürfen die Unterschiede der Verteilungen nicht zu schnell verschwinden. Diese Eigenschaft der Folgen von Maßen $\nu_{i,n}$ wird mit Hilfe von speziellen Integralen der Kernfunktion h charakterisiert. Dazu definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n := \left|\int\limits_{\mathfrak{X}^m} h\left(x_{0,1}, ..., x_{q,m_0}\right) \prod_{i=0}^{q} \prod_{j=1}^{m_i} \nu_{i,n}\left(dx_{i,j}\right)\right|.$$

Da $M_1 < \infty$, existieren für $n \in \mathbb{N}$ die Integrale λ_n. Des Weiteren wählen wir $\kappa_n := \lambda_n^{-1}$ und fordern für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ mit $\sum_{i=0}^{q} k_i = m$ die Existenz folgender Grenzwerte.

$$\mu_{\mathbf{k}} := \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\mathbf{k},n}}{\lambda_n}.$$

Es gilt dann zum Beispiel

$$\mu_{\mathbf{m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\mathbf{m},n}}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\mathbf{m},n}}{|\mu_{\mathbf{m},n}|} \in \{-1,\ 1\}.$$

Man beachte, wenn $\nu_{0,n} = \cdots = \nu_{q,n}$ und h gewisse Antisymmetrien besitzt, dann folgt $\lambda_n = 0$. Somit ist es sinnvoll die Konvergenzbedingung (C) für das aufeinander zulaufen der Verteilungen mit Hilfe der Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu definieren.

$$\text{Konvergenzbedingung } (C): \quad \begin{array}{rl} (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} & \subset \mathbb{R}_> \\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n & = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\lambda_n & = \infty \\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}\mu_{\mathbf{k},n} & \text{existiert für alle } \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^{q+1} \text{ mit } \sum_{i=0}^{q} k_i = m. \end{array}$$

Die vorletzte Bedingung stellt sicher, dass sich die Verteilungen nicht zu schnell annähern. Aus der letzten Bedingung folgt die Existenz der $\mu_{\mathbf{k}}$. Bei beschränkten Kernfunktionen h kann man an schwache Konvergenz der Maße denken.

Des Weiteren wird gefordert, dass gewisse Streuungen nicht zu sehr variieren. Dazu betrachten wir die Zufallsveriablen $g_{i,0,n}$ und $g_{i,1,n}$ aus dem Beweis von Lemma 3.22. Es gelte die Stabilitätsbedingung (S), wenn für $1 \leq i \leq q$ positive Zahlen $\sigma_{i,+}, \sigma_{i,-} \in \mathbb{R}_>$ existieren, für die gilt

$$\sigma_{i,+}^2 := \lim_{n\to\infty} \mathsf{Var}\ g_{i,1,n} \quad \text{ und } \quad \sigma_{i,-}^2 := \lim_{n\to\infty} \mathsf{Var}\ g_{i,0,n}.$$

Ist die Kernfunktion h beschränkt und konvergieren für $0 \leq i \leq q$ die Folgen von Maßen $(\nu_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen ein Maß ν, dann ist (S) zum Beispiel erfüllt.

Für $p > 2$ ergibt sich die Konsistenz des Schätzers.

1.8 Folgerung. *Es existiere ein $p \in (2, \infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C). Ferner sei $arg\left(|\rho|\right) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Dann folgt*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{n\to\infty} \boldsymbol{\theta} \quad \text{P-stochastisch.}$$

Beweis: Folgt aus Theorem 1.1. Denn es gilt für $2 < p < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-p} n^{-\frac{1}{2}p} \lim_{n\to\infty} \left(\lambda_n^2 n\right)^{-\frac{1}{2}p} \stackrel{(C)}{=} 0.$$

□

Ähnlich folgt aus Theorem 1.2 stochastische Beschränktheit für den skalierten Fehlervektor $n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right)$.

1.9 Folgerung. *Es existiere ein $p \in (2,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C) und (P). Ferner sei $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Dann folgt*

$$n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right) = O_P(1).$$

Beweis: Folgt aus Theorem 1.2 mit der Folge $b_n = \lambda_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Analog zum Beweis der Folgerung 1.8 gilt $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0$. Ferner gilt $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p b_n^{a(p)} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-p}\left(\lambda_n^2\right)^{-\frac{1}{2}p} = 1$. Und es folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\| n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right)\right\|\right) = \lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(x < \left\|\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}] + [n\boldsymbol{\theta}] - n\boldsymbol{\theta}\right)\right\|\right)\\
&\stackrel{B.5}{\leq} \lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{2}x < \left\|\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right\|\right) + P\left(\frac{1}{2}x < \left\|\lambda_n^2\left([n\boldsymbol{\theta}] - n\boldsymbol{\theta}\right)\right\|\right)\\
&\stackrel{1.2}{=} \lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{2}x < \lambda_n^2 \left\|[n\boldsymbol{\theta}] - n\boldsymbol{\theta}\right\|\right)\\
&\leq \lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{2}x < \lambda_n^2\right)\\
&\stackrel{(C)}{=} 0.
\end{aligned}$$

□

Als Grenzprozess Y der Folge der Prozesse $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man eine Linearkombination von unabhängigen zweiseitigen Brownschen Bewegungen mit Drift. Es seien W_i, $\tilde{W}_i$ für $1 \leq i \leq q$ unabhängige Brownsche Bewegungen und definiere damit folgende stochastische Prozesse $Y_i = \{Y_i(s), s \in \mathbb{R}\}$ für $1 \leq i \leq q$ durch

$$Y_i(s) := \begin{cases} \sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-s) & s < 0 \\ \sigma_{i,+}W_i(s) & s \geq 0. \end{cases}$$

Ähnlich zum Prozess Z definieren wir den Prozess $Y = \{Y(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ durch

$$Y(\mathbf{t}) := \phi(\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Y_i(t_i).$$

5.1 Lemma. *Es sei $M_1 < \infty$ und es gelte $(P+)$ und (S). Dann besitzt der Prozess Y eine eindeutige Maximalstelle P.-f.s..*

Beweis: Wir wollen Lemma 2.33 anwenden. Aufgrund der Definition von Y folgt, dass Y ein stetiger Gaußprozess ist. Mit Lemma 3.11 folgt

$$\mathsf{E}Y(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{q} |t_i|\, \partial_{\mathrm{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}}\, \rho(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\|\mathbf{t}\|\to\infty} -\infty.$$

Da Y_i und Y_j für $i \neq j$ unabhängige zweiseitige Brownsche Bewegungen sind, gilt für $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}Y(\mathbf{s})\,Y(\mathbf{t}) &= \mathsf{E}\left(\phi(\mathbf{s}) + w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} Y_i(s_i)\right)\left(\phi(\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} Y_i(t_i)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(\phi(\mathbf{s})\,\phi(\mathbf{t}) + \phi(\mathbf{s})\,w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} Y_i(t_i) + \phi(\mathbf{t})\,w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} Y_i(s_i) + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} Y_i(s_i)\,Y_j(t_j)\right) \\
&= \phi(\mathbf{s})\,\phi(\mathbf{t}) + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} \mathsf{E}Y_i(s_i)\,Y_i(t_i).
\end{aligned}$$

Und es folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left(Y(\mathbf{s}) - Y(\mathbf{t})\right)^2 &= \mathsf{E}\left(Y^2(\mathbf{s}) - 2Y(\mathbf{s})\,Y(\mathbf{t}) + Y^2(\mathbf{t})\right) \\
&= \phi^2(\mathbf{s}) + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} \mathsf{E}Y_i^2(s_i) - 2\left(\phi(\mathbf{s})\,\phi(\mathbf{t}) + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} \mathsf{E}Y_i(s_i)\,Y_i(t_i)\right) \\
&\quad + \phi^2(\mathbf{t}) + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} \mathsf{E}Y_i^2(t_i) \\
&= \left(\phi(\mathbf{s}) - \phi(\mathbf{t})\right)^2 + w^2(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{q} \mathsf{E}\left(Y_i(s_i) - Y_i(t_i)\right)^2.
\end{aligned}$$

Weiter betrachten wir $s_i \geq 0$ und $t_i \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(Y_i(s_i) - Y_i(t_i)\right)^2 \\
&= \mathsf{E}\left(\sigma_{i,+}W_i(s_i) - \sigma_{i,+}W_i(t_i)\right)^2 \\
&= \sigma_{i,+}^2\mathsf{E}\left(W_i(s_i) - W_i(t_i)\right)^2 \\
&= \sigma_{i,+}^2\left(\mathsf{E}W_i^2(s_i) - 2\mathsf{E}W_i(s_i)\,W_i(t_i) + \mathsf{E}W_i^2(t_i)\right) \\
&= \sigma_{i,+}^2\left(s_i - 2\min\{s_i, t_i\} + t_i\right).
\end{aligned}$$

Da W_i und $\tilde{W}_i$ unabhängig, folgt für $s_i \geq 0$ und $t_i < 0$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(Y_i(s_i) - Y_i(t_i)\right)^2 \\
&= \mathsf{E}\left(\sigma_{i,+}W_i(s_i) - \sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-t_i)\right)^2 \\
&= \sigma_{i,+}^2\mathsf{E}W_i^2(s_i) - 2\sigma_{i,+}\sigma_{i,-}\mathsf{E}W_i(s_i)\,\tilde{W}_i(-t_i) + \sigma_{i,-}^2\mathsf{E}\tilde{W}_i^2(-t_i) \\
&= \sigma_{i,+}^2 s_i - \sigma_{i,-}^2 t_i.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\mathsf{E}\left(Y_i(s_i) - Y_i(t_i)\right)^2 = \begin{cases} \sigma_{i,+}^2\left(s_i - 2\min\{s_i, t_i\} + t_i\right) & s_i \geq 0,\ t_i \geq 0 \\ \sigma_{i,+}^2 s_i - \sigma_{i,-}^2 t_i & s_i \geq 0,\ t_i < 0 \\ \sigma_{i,-}^2\left(-s_i - 2\min\{-s_i, -t_i\} - t_i\right) & s_i < 0,\ t_i < 0. \end{cases}$$

Aus der Bedingung (S) folgt $\sigma_{i,+} > 0$ und $\sigma_{i,-} > 0$. Aus $\mathsf{E}\left(Y(\mathbf{s}) - Y(\mathbf{t})\right)^2 = 0$ folgt, dass $\left(\phi(\mathbf{s}) - \phi(\mathbf{t})\right)^2 = 0$ und $\mathsf{E}\left(Y_i(s_i) - Y_i(t_i)\right)^2 = 0$ für $1 \leq i \leq q$. Daraus folgt $s_i = t_i$ für alle $1 \leq i \leq q$. Somit gilt für alle $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$, dass $\mathsf{E}\left(Y(\mathbf{s}) - Y(\mathbf{t})\right)^2 \neq 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.33 erfüllt und es folgt die Behauptung. □

Für den Prozess $Z_n = \{Z_n(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ mit der Folge $b_n = \lambda_n^2$ erhalten wir

$$Z_n(\mathbf{t}) = \begin{cases} n\lambda_n^2\left(\rho_n\left(\frac{[n\boldsymbol{\theta}] + \left[\lambda_n^{-2}\mathbf{t}\right]}{n}\right) - \rho_n(\boldsymbol{\theta})\right) & \frac{[n\boldsymbol{\theta}] + \left[\lambda_n^{-2}\mathbf{t}\right]}{n} \in H_{\mathbf{m},n} \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Des Weiteren ergibt sich für $1 \leq i \leq q$

$$Z_{i,n}(t) := \lambda_n \begin{cases} \sum_{j=1}^{-\left[\lambda_n^{-2}t\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) & -\lambda_n^2\left([n\theta_i]-[n\theta_{i-1}]\right) < t < 0 \\ -\sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}t\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) & 0 \leq t < \lambda_n^2\left([n\theta_{i+1}]-[n\theta_i]\right) \\ -17 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um Verteilungskonvergenz der Folge der Prozesse $\left(Z_{i,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zu erhalten, zeigen wir Straffheit und die Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen. Die Prozesse $Z_{i,n}$ ähneln dem Partialsummenprozess. Allerdings hängen die Zufallsvariablen $R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)$ über die summiert wird, noch von $n \in \mathbb{N}$ ab. Somit lässt sich der Satz von Donsker nicht anwenden.

5.2 Lemma. *Es existiere ein $p \in (2,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C). Dann gilt für $1 \leq i \leq q$ und für alle festen $d \in \mathbb{N}$, dass die Folge $\left(Z_{i,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ straff bzgl. des Skorokhodraumes $\left(D\left[-d,d\right], s_1\right)$ ist.*

Beweis: Die Aussage wird mit Satz 2.27 gezeigt. Dazu sind zwei Voraussetzungen zu zeigen. Zur Bedingung (i) aus dem Satz 2.27 sei $\eta > 0$. Zu den Zufallsgrößen $g_{i,-1,n}$ aus dem Beweis von Lemma 3.22 existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\left|g_{i,-1,n}\right|^p \overset{(3.17)}{\leq} CM_p.$$

Mit dem gewählten $\delta := \left(CM_p d^{\frac{1}{2}p}\eta^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|Z_{i,n}^{(d)}(-d) - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(-d)\right| > \delta\right) \\
&= P\left(\left|\lambda_n \sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}d\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]-j,n}\right) - \mathsf{E}Z_{i,n}(-d)\right| > \delta\right) \\
&= P\left(\left|\sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}d\right]} g_{i,-j,n}\right| > \delta\lambda_n^{-1}\right) \\
&\overset{\text{Markov}}{\leq} \delta^{-p}\lambda_n^p \left|\sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}d\right]} g_{i,-j,n}\right|^p \\
&= \delta^{-p}\lambda_n^p \left[\lambda_n^{-2}d\right]^p \left|\left[\lambda_n^{-2}d\right]^{-1} \sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}d\right]} g_{i,-j,n}\right|^p \\
&\overset{2.20}{\leq} \delta^{-p}\lambda_n^p \left[\lambda_n^{-2}d\right]^p \left|g_{i,-1,n}\right|^p \left[\lambda_n^{-2}d\right]^{-\frac{1}{2}p} \\
&\overset{3.17}{\leq} CM_p d^{\frac{1}{2}p}\delta^{-p} \\
&= \eta.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.28 wird (ii) gezeigt. Damit genügt es zu zeigen, dass zu jedem $\eta > 0$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $0 < \delta < 1$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sowie eine Zerlegung $-d = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = d$ mit $t_u - t_{u-1} \geq \delta$ für $2 \leq u \leq r-1$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{u=1}^{r} P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u} \left|Z_{i,n}^{(d)}(s) - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(s) - Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1}) + \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1})\right| > \epsilon\right) \leq \eta.$$

Für ein festes $1 \leq i \leq q$ sind die Zufallsgrößen $g_{i,j,n}$ für $1 \leq j \leq d$ bzw. $-d \leq j \leq -1$ jeweils i.i.d. und zentriert. Damit folgt für $1 \leq k < l \leq d$, dass $\frac{1}{l-k} \sum_{j=k+1}^{l} g_{i,j,n}$ eine degenerierte U-Statistik mit Martingaleigenschaften ist. Für $t_{u-1} \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u} \left|Z_{i,n}^{(d)}(s) - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(s) - Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1}) + \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1})\right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u} \left|-\lambda_n \sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}s\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(s)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\lambda_n \sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}t_{u-1}\right]} \frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i} R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) - \frac{m_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right) + \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1})\right| > \epsilon\right) \\
&= P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u} \left|\sum_{j=\left[\lambda_n^{-2}t_{u-1}\right]+1}^{\left[\lambda_n^{-2}s\right]} g_{i,j,n}\right| > \epsilon\lambda_n^{-1}\right) \\
&\overset{\text{Doob}}{\leq} C\epsilon^{-p}\lambda_n^p \mathsf{E}\left|\sum_{j=\left[\lambda_n^{-2}t_{u-1}\right]+1}^{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right]} g_{i,j,n}\right|^p \\
&\overset{2.20}{\leq} C\epsilon^{-p}\lambda_n^p \mathsf{E}\left|g_{i,1,n}\right|^p \left(\left[\lambda_n^{-2}t_u\right] - \left[\lambda_n^{-2}t_{u-1}\right]\right)^{\frac{1}{2}p} \\
&\overset{3.17}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}\lambda_n^p \left(\lambda_n^{-2}t_u - \lambda_n^{-2}t_{u-1} + 1\right)^{\frac{1}{2}p} \\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}\left(t_u - t_{u-1}\right)^{\frac{1}{2}p} \qquad \text{da } \lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Analog gilt für $t_u \leq 0$

$$P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u} \left|Z_{i,n}(s) - \mathsf{E}Z_{i,n}(s) - Z_{i,n}(t_{u-1}) + \mathsf{E}Z_{i,n}(t_{u-1})\right| > \epsilon\right) \leq CM_p\epsilon^{-p}\left(t_u - t_{u-1}\right)^{\frac{1}{2}p}.$$

Aus $p > 2$ folgt $\frac{1}{2} - p > 0$. Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ und $\eta > 0$ wähle $0 < \delta < 1$ mit

$$\begin{aligned}
\delta &< \left(\frac{(3\epsilon)^p\eta}{2dCM_p}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}-p}} \\
r &:= 2\left[d\delta^{-1}\right] \\
t_u &:= \left(u - \frac{1}{2}r\right)\delta \qquad 1 \leq u \leq r-1.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
t_r - t_{r-1} &= d - \left(r - 1 - \frac{1}{2}r\right)\delta = \delta + d - \frac{1}{2}r\delta = \delta + d - [d\delta^{-1}]\delta \leq \delta \\
t_u - t_{u-1} &= \left(u - \frac{1}{2}r\right)\delta - \left(u - 1 - \frac{1}{2}r\right)\delta = \delta \qquad \text{für } 2 \leq u \leq r-1 \\
t_1 - t_0 &= \left(1 - \frac{1}{2}r\right)\delta - (-d) \leq \delta.
\end{aligned}$$

Und es folgt

$$
\begin{aligned}
& P\left(w\left(Z_{i,n}^{(d)}-\mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)},\delta\right)>\epsilon\right) \\
& \overset{2.28}{\leq}\sum_{u=1}^{r}P\left(\sup_{t_{u-1}\leq s\leq t_u}\left|Z_{i,n}^{(d)}(s)-\mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(s)-Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1})+\mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}(t_{u-1})\right|>3\epsilon\right) \\
& \leq\sum_{u=1}^{r}CM_p(3\epsilon)^{-p}(t_u-t_{u-1})^{\frac{1}{2}p} \\
& \leq\sum_{u=1}^{r}CM_p(3\epsilon)^{-p}\delta^{\frac{1}{2}p} \\
& \leq 2\left[d\delta^{-1}\right]CM_p(3\epsilon)^{-p}\delta^{\frac{1}{2}p} \\
& \leq 2dCM_p(3\epsilon)^{-p}\delta^{\frac{1}{2}p-1} \\
& <\eta.
\end{aligned}
$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.27 erfüllt und es folgt die Behauptung. □

5.3 Lemma. *Es existiere ein $p\in(2,\infty)$ mit $M_p<\infty$ und es gelte (C) und (S). Dann gilt für $1\leq i\leq q$, für alle festen $d\in\mathbb{N}$ und für alle endlichen Teilmengen $\{t_1,\ldots,t_k\}\subset[-d,d]$*

$$
\left(Z_{i,n}(t_1)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_1),\ldots,Z_{i,n}(t_k)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_k)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}}\left(Y_i(t_1),\ldots,Y_i(t_k)\right).
$$

Beweis: Es seien $\{t_1,\ldots,t_k\}\subset[-d,d]$. Durch Umordnung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$
t_1<t_2<\cdots<t_l<0\leq t_{l+1}<\cdots<t_k.
$$

Aus der Definition der Prozesse $Z_{i,n}$ folgt für alle $(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^k$, dass $\sum_{u=1}^{l}a_u\left(Z_{i,n}(t_u)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_u)\right)$ und $\sum_{u=l+1}^{k}a_u\left(Z_{i,n}(t_u)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_u)\right)$ unabhängige Zufallsvariablen sind. Mit dem Cramer-Wold-Device, vergleiche zum Beispiel Gänssler und Stute (1977), Satz 8.7.6, Seite 357, gilt die Behauptung, wenn für alle $(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^k$ folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{l}a_u\left(Z_{i,n}(t_u)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_u)\right)&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}}\sum_{u=1}^{l}a_uY_i(t_u) \\
\sum_{u=l+1}^{k}a_u\left(Z_{i,n}(t_u)-\mathsf{E}Z_{i,n}(t_u)\right)&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}}\sum_{u=l+1}^{k}a_uY_i(t_u).
\end{aligned}
$$

Wir zeigen die Konvergenz für die zweite Summe. Für die erste Summe geht der Beweis analog. Aufgrund der Definition des Prozesses Y_i bzw. der Brownschen Bewegung folgt, dass $\sum_{u=l+1}^{k}a_uY_i(t_u)$ Normalverteilt ist. Mit der Version des zentralen Grenzwertsatzes für Zufallsvariablen wird die Aussage bewiesen. Mit $n_0=n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 folgt für alle $n>n_0$ und $0\leq t\leq d$

$$
Z_{i,n}(t)=-\lambda_n\sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}t\right]}\frac{m_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}R_{i,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right)-\frac{m_{i-1}}{\theta_i-\theta_{i-1}}R_{i-1,n}\left(X_{[n\theta_i]+j,n}\right).
$$

Da $\lambda_n^2n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ geht, existiert ein $n_1\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n>\max\{n_0,n_1\}$ folgt $\left[\lambda_n^{-2}t\right]\leq\frac{d}{\lambda_n^2n}n\leq n$. Mit den Zufallsgrößen $g_{i,j,n}$ aus dem Beweis von Lemma 3.22 definieren wir für $1\leq i\leq q$, $n\in\mathbb{N}$, $1\leq j\leq n$ und $l+1\leq u\leq k$ folgende Zufallsgrößen.

$$
\eta_{i,n,j}(t_u):=\begin{cases}-a_u\lambda_ng_{i,j,n} & 1\leq j\leq\left[\lambda_n^{-2}t_u\right]\\ 0 & \left[\lambda_n^{-2}t_u\right]<j\leq n.\end{cases}
$$

Damit gilt

$$\sum_{u=l+1}^{k} a_u \left(Z_{i,n}\left(t_u\right) - \mathsf{E}Z_{i,n}\left(t_u\right)\right) = \sum_{u=l+1}^{k} -a_u\lambda_n \sum_{j=1}^{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right]} g_{i,j,n} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{u=l+1}^{k} \eta_{i,n,j}\left(t_u\right) =: \sum_{j=1}^{n} \zeta_{j,n}.$$

Die $(\zeta_{j,n})_{1\leq j\leq n, n\in\mathbb{N}}$ bilden ein zweifach indiziertes Schema von zentrierten und zeilenweise unabhängigen Zufallselementen. Wenn für ein $\epsilon > 0$ gilt

$$\text{(Ljapunoff-Bedingung)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left|\zeta_{j,n}\right|^{2+\epsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und

$$\text{(Normierungsbedingung)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\ \zeta_{j,n}^2 \xrightarrow{n\to\infty} Var\left(\sum_{u=l+1}^{k} a_u Y_i\left(t_u\right)\right),$$

dann folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz die Behauptung. Da $2 < p < \infty$ ist $\epsilon = p - 2$ positiv. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left|\zeta_{j,n}\right|^{2+\epsilon} &= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left|\sum_{u=l+1}^{k} \eta_{i,n,j}\left(t_u\right)\right|^p \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} k^p \sum_{u=l+1}^{k} \mathsf{E}\left|\eta_{i,n,j}\left(t_u\right)\right|^p \\
&= k^p \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{j=1}^{[\lambda_n^{-2}t_u]} \mathsf{E}\left|a_u\lambda_n g_{i,j,n}\right|^p \\
&\overset{3.17}{\leq} k^p \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{j=1}^{[\lambda_n^{-2}t_u]} CM_p\lambda_n^p a_u^p \\
&\leq CM_p k^p \sum_{u=l+1}^{k} \lambda_n^p a_u^p [\lambda_n^{-2}t_u] \\
&\leq CM_p k^p \sum_{u=l+1}^{k} d\lambda_n^{p-2} \max_{l+1\leq u\leq k} a_u^p \leq \tilde{C}\lambda_n^\epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt, folgt die Gültigkeit der Ljapunoff-Bedingung. Nun zeigen wir die Normierungsbedingung. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathsf{E}Y_i\left(t\right) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
Var\left(\sum_{u=l+1}^{k} a_u Y_i\left(t_u\right)\right) &= \mathsf{E}\left(\sum_{u=l+1}^{k} a_u Y_i\left(t_u\right)\right)^2 \\
&= \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \mathsf{E}\left(Y_i\left(t_u\right) Y_i\left(t_v\right)\right) \\
&= \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \mathsf{E}\left(\sigma_{i,+}W_i\left(t_u\right)\sigma_{i,+}W_i\left(t_v\right)\right) \\
&= \sigma_{i,+}^2 \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \mathsf{E}\left(W_i\left(t_u\right) W_i\left(t_v\right)\right) \\
&= \sigma_{i,+}^2 \sum_{u=l+1}^{k} \sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \min\left\{t_u, t_v\right\}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\zeta_{j,n}^2 &= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left(\sum_{u=l+1}^{k} \eta_{i,n,j}(t_u)\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} \mathsf{E}\left(\eta_{i,n,j}(t_u)\,\eta_{i,n,j}(t_v)\right) \\
&= \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k}\sum_{j=1}^{\min\{[\lambda_n^{-2}t_u],[\lambda_n^{-2}t_v]\}} \mathsf{E}\left(\eta_{i,n,j}(t_u)\,\eta_{i,n,j}(t_v)\right) \\
&= \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k}\sum_{j=1}^{\min\{[\lambda_n^{-2}t_u],[\lambda_n^{-2}t_v]\}} \mathsf{E}\left(-a_u\lambda_n g_{i,j,n}(-a_v)\,\lambda_n g_{i,j,n}\right) \\
&= \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{\min\{[\lambda_n^{-2}t_u],[\lambda_n^{-2}t_v]\}} \mathsf{E}g_{i,j,n}^2 \\
&= \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{\min\{[\lambda_n^{-2}t_u],[\lambda_n^{-2}t_v]\}} \mathsf{E}g_{i,1,n}^2 \\
&= \mathsf{E}g_{i,1,n}^2 \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2 \min\left\{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right], \left[\lambda_n^{-2}t_v\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\zeta_{j,n}^2 - Var\left(\sum_{u=l+1}^{k} a_u Y_i(t_u)\right)\right| \\
&= \left|\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2 \min\left\{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right], \left[\lambda_n^{-2}t_v\right]\right\} - \sigma_{i,+}^2 \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \min\{t_u, t_v\}\right| \\
&\le \left|\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \left(\lambda_n^2 \min\left\{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right], \left[\lambda_n^{-2}t_v\right]\right\} - \min\{t_u, t_v\}\right)\right| \\
&\quad + \left|\left(\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 - \sigma_{i,+}^2\right) \sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \min\{t_u, t_v\}\right| \\
&\overset{3.17}{\le} CM_p \left|\sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \left(\lambda_n^2 \min\left\{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right], \left[\lambda_n^{-2}t_v\right]\right\} - \min\{t_u, t_v\}\right)\right| + \tilde{C}\left|\left(\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 - \sigma_{i,+}^2\right)\right| \\
&\le CM_p \left|\sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2 \left|\min\left\{\left[\lambda_n^{-2}t_u\right], \left[\lambda_n^{-2}t_v\right]\right\} - \lambda_n^{-2}\min\{t_u, t_v\}\right|\right| + \tilde{C}\left|\left(\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 - \sigma_{i,+}^2\right)\right| \\
&\le CM_p \left|\sum_{u=l+1}^{k}\sum_{v=l+1}^{k} a_u a_v \lambda_n^2\right| + \tilde{C}\left|\left(\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 - \sigma_{i,+}^2\right)\right| \\
&\le C\tilde{C}M_p\lambda_n^2 + \tilde{C}\left|\left(\mathsf{E}g_{i,1,n}^2 - \sigma_{i,+}^2\right)\right| \\
&= C\tilde{C}M_p\lambda_n^2 + \tilde{C}\left|\left(\mathsf{Var}\ g_{i,1,n} - \sigma_{i,+}^2\right)\right| \quad \text{, da } g_{i,1,n} \text{ zentriert} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ wegen } (C) \text{ und } (S).
\end{aligned}
$$

Somit ist die Normierungsbedingung erfüllt und es folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz die Behauptung. □

Um Lemma 2.31 anzuwenden, benötigen wir $Z_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Y^{(d)}$ im Skorokhodraum für alle $d \in \mathbb{N}$.

5.4 Lemma. *Es existiere ein $p \in (2,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C) und (S). Dann gilt für alle $d \in \mathbb{N}$*

$$Z_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Y^{(d)} \qquad \text{in } \left(D\left([-d,d]^q\right), s_q\right).$$

Beweis: Mit $n_0 = n_0(d)$ aus dem Beweis von Lemma 3.18 folgt für alle $n > n_0$ und für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&P\left(\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|Z_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}Z_n(\mathbf{t}) - \bar{Z}(\mathbf{t}) + \mathsf{E}\bar{Z}(\mathbf{t})\right| > \epsilon\right)\\
&\overset{3.22}{\leq} CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\kappa_n^p\left(a_n(p,q) + (b_n n)^{-p}\left[b_n^{-1}d\right]^{-a_q(p)} + n^{-p}b_n^{a(p)}\right)\\
&= CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\lambda_n^{-p}\left(n^{-\frac{1}{2}p} + \left(\lambda_n^2 n\right)^{-p}\left[\lambda_n^{-2}d\right]^{-\frac{1}{2}p} + n^{-p}\lambda_n^{\frac{1}{2}p}\right)\\
&\leq CM_p\epsilon^{-p}d^{2p}\left(\lambda_n^2 n\right)^{-\frac{1}{2}p} \xrightarrow[(C)]{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für alle $d \in \mathbb{N}$, dass

$$\sup_{-d\leq t\leq d}\left|b_n\left[b_n^{-1}t\right] - t\right| = \sup_{-d\leq t\leq d}\left|\lambda_n^2\left[\lambda_n^{-2}t\right] - t\right| = \sup_{-d\leq t\leq d}\lambda_n^2\left|\left[\lambda_n^{-2}t\right] - \lambda_n^{-2}t\right| \leq \lambda_n^2 \xrightarrow[(C)]{n\to\infty} 0.$$

Somit ist Lemma 3.19 anwendbar und es folgt

$$\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t}) - \mathsf{E}\bar{Z}_n(\mathbf{t})\right| = \sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|\mathsf{E}Z_n(\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{t})\right| \xrightarrow[n\to\infty]{3.19} 0.$$

Analog zum Beweis der Folgerung 1.8 gilt $\lim_{n\to\infty}\kappa_n^p a_n(p,q) = 0$. Analog zum Beweis von Lemma 3.9 folgt

$$\sup_{\mathbf{t}\in[-d,d]^q}\left|Z_n^{(d)}(\mathbf{t}) - \bar{Z}_n^{(d)}(\mathbf{t})\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{P-stochastisch.}$$

Mit den Lemmata 5.2 und 5.3 sind die Voraussetzungen von Lemma 2.25 erfüllt. Damit folgt für $1 \leq i \leq q$ und alle $d \in \mathbb{N}$

$$Z_{i,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Y_i^{(d)} \qquad \text{in } \left(D\left[-d,d\right], s_1\right).$$

Mit Bemerkung 3.20 sind für $n > n_0$ die Prozesse $Z_{i,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{i,n}^{(d)}$ für $1 \leq i \leq q$ unabhängig. Nach Konstruktion sind die Prozesse $Y_i^{(d)}$ ebenfalls für $1 \leq i \leq q$ unabhängig. Und es folgt

$$\left(Z_{1,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{1,n}^{(d)}, \ldots, Z_{q,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{q,n}^{(d)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \left(Y_1^{(d)}, \ldots, Y_q^{(d)}\right) \qquad \text{in } \left(D\left[-d,d\right], s_1\right)^q.$$

Des Weiteren betrachten wir die Abbildungen $S : \left(D\left[-d,d\right]\right)^q \to D\left([-d,d]^q\right)$ und $T_{\alpha,\beta} : \left(D\left([-d,d]^q\right)\right)^2 \to D\left([-d,d]^q\right)$ für beliebiges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dabei sei

$$\begin{aligned}
S(x_1,\ldots,x_q) &: [-d,d]^q \to \mathbb{R} & S(x_1,\ldots,x_q)(\mathbf{t}) &:= \sum_{i=1}^q x_i(t_i)\\
T_{\alpha,\beta}(y_1,y_2) &: [-d,d]^q \to \mathbb{R} & T_{\alpha,\beta}(y_1,y_2)(\mathbf{t}) &:= \alpha y_1(\mathbf{t}) + \beta y_2(\mathbf{t}).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.24 folgt, dass S stetig ist. Mit dem Stetigkeitssatz 2.29 folgt

$$S\left(Z_{1,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{1,n}^{(d)}, \ldots, Z_{q,n}^{(d)} - \mathsf{E}Z_{q,n}^{(d)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} S\left(Y_1^{(d)}, \ldots, Y_q^{(d)}\right) \qquad \text{in } \left(D\left([-d,d]^q\right), s_q\right).$$

Die Funktion ϕ und die Zahl $w(\boldsymbol{\theta})$ sind deterministisch und unabhängig von n. Aus der Stetigkeit der Funktion ϕ, folgt mit Lemma 2.23 die Stetigkeit von $T_{1,w(\boldsymbol{\theta})}$. Mit einer weiteren Anwendung des Stetigkeitssatzes 2.29 folgt

$$\begin{aligned}
Z_n^{(d)} &= \bar{Z}_n^{(d)} + o_P(1) \\
&= \phi^{(d)} + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Z_{i,n}^{(d)} - \mathsf{E} Z_{i,n}^{(d)} + o_P(1) \\
&= \phi^{(d)} + w(\boldsymbol{\theta}) S\left(Z_{1,n}^{(d)} - \mathsf{E} Z_{1,n}^{(d)}, \ldots, Z_{q,n}^{(d)} - \mathsf{E} Z_{q,n}^{(d)}\right) + o_P(1) \\
&= T_{1,w(\boldsymbol{\theta})}\left(\phi^{(d)}, S\left(Z_{1,n}^{(d)} - \mathsf{E} Z_{1,n}^{(d)}, \ldots, Z_{q,n}^{(d)} - \mathsf{E} Z_{q,n}^{(d)}\right)\right) + o_P(1) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} T_{1,w(\boldsymbol{\theta})}\left(\phi^{(d)}, S\left(Y_1^{(d)}, \ldots, Y_q^{(d)}\right)\right) \\
&= \phi^{(d)} + w(\boldsymbol{\theta}) S\left(Y_1^{(d)}, \ldots, Y_q^{(d)}\right) \\
&= \phi^{(d)} + w(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{q} Y_i^{(d)} \\
&= Y^{(d)} \quad \text{in } \left(D\left([-d,d]^q\right), s_q\right).
\end{aligned}$$

□

1.10 Theorem. *Es existiere ein $p \in (2,\infty)$ mit $M_p < \infty$ und es gelte (C), (P) und (S). Ferner sei $arg(|\rho|) = \{\boldsymbol{\theta}\}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad (P+) \Longrightarrow arg(\ Y\ ) = \left\{\tau_l^+\right\} \text{ P.-f.s. und } n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^+ \quad \text{in } \mathbb{R}^q. \\
&(2) \qquad (P-) \Longrightarrow arg(-Y) = \left\{\tau_l^-\right\} \text{ P.-f.s. und } n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^- \quad \text{in } \mathbb{R}^q.
\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis ist ähnlich zu denen von Theorem 1.6 und 1.7. Wir betrachten zunächst den Fall $(P+)$. Aus Lemma 5.1 folgt die Existenz einer P.-f.s. eindeutigen Maximalstelle τ_l^+ von Y. Die zweite Aussage folgt dann mit Lemma 2.31 angewendet auf die Folge von Prozessen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit sind die Voraussetzungen (1) bis (6) zu zeigen.
Aus der Definition der Prozesse Z_n folgt (1).
Als Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen wir $\left(\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Definition des Schätzers ist τ_n messbar. Mit $b_n = \lambda_n^2$ folgt aus dem Lemma 3.17 für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \in arg(Z_n)$. Somit ist auch (2) erfüllt.
Analog zum Beweis der Folgerung 1.8 gilt $\lim_{n\to\infty} \kappa_n^p a_n(p,q) = 0$. Mit Lemma 3.12 folgt die Anwendbarkeit von Lemma 3.16 und es gilt $\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) = O_P(1)$ also (3).
Da die Brownsche Bewegung stetige Pfade besitzt, folgt $Y \in C(\mathbb{R}^q)$ P-f.s. und es gilt (4).
Mit dem ersten Teil folgt $arg(Y) = \left\{\tau_l^+\right\}$ P.-f.s. und somit gilt (5).
Mit Lemma 5.4 folgt für alle $d \in \mathbb{N}$

$$Z_n^{(d)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} Y^{(d)} \quad \text{in } \left(D\left([-d,d]^q\right), s_q\right).$$

Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.31 erfüllt und es folgt

$$\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^+ \quad \text{in } \mathbb{R}^q.$$

Mit Lemma 3.12 sind die Voraussetzungen von Lemma 3.10 erfüllt und es gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\lambda_n^2\left(n\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - [n\boldsymbol{\theta}]\right) - n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}\right)\right\| > \epsilon\right)\\
&\le \lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+ - \hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right\| > \epsilon\left(\lambda_n^2 n\right)^{-1}\right) + P\left(\|n\boldsymbol{\theta} - [n\boldsymbol{\theta}]\| > \epsilon\lambda_n^{-2}\right)\\
&\le \lim_{n\to\infty} P\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_n^+\right) + P\left(\epsilon\lambda_n^{-2} < 1\right)\\
&\overset{3.10}{\le} \lim_{n\to\infty} 2\Delta_n\left(\epsilon_0\right) + P\left(\epsilon\lambda_n^{-2} < 1\right)\\
&\overset{3.2}{\le} \lim_{n\to\infty} 2CM_p\epsilon_0^{-p}\lambda_n^{-p}n^{-\frac{1}{2}p} + P\left(\epsilon\lambda_n^{-2} < 1\right)\\
&\overset{(C)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Cramer, vergleiche zum Beispiel Gänssler und Stute (1977), Satz 1.12.10., S. 68, folgt die Aussage (1). Im Fall $(P-)$ folgt die Behauptung mit dem ersten Teil bei Benutzung der Kernfunktion $-h$. Aus $(P-)$ für $\rho(h,\cdot)$ folgt mit Lemma 3.14 die Eigenschaft $(P+)$ für $\rho(-h,\cdot)$. Mit Lemma 5.1 folgt die Existenz einer P.-f.s. eindeutigen Maximalstelle τ_l^- von $Y(-h,\cdot)$. Aus dem ersten Teil folgt

$$n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(h) - \boldsymbol{\theta}\right) \overset{3.13}{=} n\lambda_n^2\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(-h) - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \tau_l^-$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
Y(-h,\mathbf{t}) &= \phi(-h,\mathbf{t}) + w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^q Y_i(t_i)\\
&= \sum_{i=1}^q |t_i|\,\partial_{\mathrm{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}}\rho(-h,\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^q \begin{cases} \sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-t_i) & t_i < 0\\ \sigma_{i,+}W_i(\ t_i\ ) & t_i \ge 0\end{cases}\\
&\overset{3.13}{=} \sum_{i=1}^q |t_i|\,\partial_{\mathrm{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}} - \rho(h,\boldsymbol{\theta}) + w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^q \begin{cases} \sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-t_i) & t_i < 0\\ \sigma_{i,+}W_i(\ t_i\ ) & t_i \ge 0\end{cases}\\
&\overset{\mathscr{L}}{=} -\sum_{i=1}^q |t_i|\,\partial_{\mathrm{sgn}(t_i)\ \mathbf{e_i}}\rho(h,\boldsymbol{\theta}) - w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^q \begin{cases} \sigma_{i,-}\tilde{W}_i(-t_i) & t_i < 0\\ \sigma_{i,+}W_i(\ t_i\ ) & t_i \ge 0\end{cases}\\
&= -\phi(h,\mathbf{t}) - w(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^q Y_i(t_i)\\
&= -Y(h,\mathbf{t}).
\end{aligned}$$

Und man erhält $Y\left(h,\tau_l^-\right) = -Y\left(-h,\tau_l^-\right) < -Y(-h,\mathbf{t}) = Y(h,\mathbf{t})$ für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q \setminus \left\{\tau_l^-\right\}$. Damit ist τ_l^- auch die P.-f.s. eindeutige Minimalstelle von $Y(h,\cdot)$ und es gilt die Behauptung. □

Auch hier möchten wir das Ergebnis am zweiten Beispiel aus Abschnitt 1 kurz demonstrieren. Es seien ϵ_j für $j \in \mathbb{N}$ reellwertige zentrierte i.i.d Zufallsgrößen und $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

$$X_{j,n} := \begin{cases} \epsilon_j & 1 \le j \le [n\theta_1]\\ \epsilon_j + \delta_n & [n\theta_1] < j \le [n\theta_2]\\ \epsilon_j & [n\theta_2] < j \le n.\end{cases}$$

Des Weiteren fordern wir, dass ϵ_1 mindestens p-fach integrierbar mit $p > 2$ ist und bezeichnen mit σ^2 die Varianz von ϵ_1. Wir wählen wieder $\mathbf{m} = (1,1,1)$ und $h(x,y,z) = x - 2y + z$. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass ein bekanntes $\beta > 0$ existiert, mit $\theta_i - \theta_{i-1} > \beta$ für $i \in \{1,2,3\}$. Somit können wir die Gewichtsfunktion konstant Eins wählen. Als Schätzer erhalten wir dann

$$\left(\hat{\theta}_{1,n}, \hat{\theta}_{2,n}\right) := \underset{(s,t)\in\left\{\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\middle| k,l\in\mathbb{N} \text{ mit } n\beta<\min\{k,l-k,n-l\}\right\}}{\operatorname{argmax}} \left|\left(\overline{X}_{0,[ns]} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right) + \left(\overline{X}_{[nt],n} - \overline{X}_{[ns],[nt]}\right)\right|.$$

Für die Folge $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte

$$(|\delta_n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_>, \qquad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,|\delta_n| = \infty.$$

Wir erhalten durch eine einfache Rechnung $\lambda_n = 2\,|\delta_n|$. Die Existenz der Integrale $\mu_{\mathbf{k}}$ folgt hierbei, wenn wir annehmen, dass ein n_0 mit $\delta_n < 0$ für alle $n \geq n_0$ oder $\delta_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ existiert. Wenn $\delta_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} \mu_{1,1,1} &= 1 \\ -\mu_{2,1,0} = -\mu_{0,1,2} = \mu_{1,2,0} = \mu_{0,2,1} &= \frac{1}{2} \\ \mu_{3,0,0} = \mu_{0,3,0} = \mu_{0,0,3} = \mu_{2,0,1} = \mu_{1,0,2} &= 0. \end{aligned}$$

Und es ergibt sich für die Funktion ρ, vergleiche mit (3.9).

$$\rho(s,t) := \frac{1}{2} \begin{cases} -\frac{\theta_2-\theta_1}{1-t} & 0 \leq s \leq t \leq \theta_1 < \theta_2 < 1 \\ \frac{t-\theta_1}{t-s} + \frac{t-\theta_1}{t-s}\,\frac{1-\theta_2}{1-t} - \frac{\theta_1-s}{t-s}\,\frac{\theta_2-t}{1-t} & 0 \leq s \leq \theta_1 \leq t \leq \theta_2 < 1 \\ 2\frac{\theta_2-\theta_1}{t-s} & 0 \leq s \leq \theta_1 < \theta_2 \leq t \leq 1 \\ \frac{1-\theta_2}{1-t} + \frac{\theta_1}{s} & 0 < \theta_1 \leq s \leq t \leq \theta_2 \leq 1 \\ -\frac{s-\theta_1}{s}\,\frac{t-\theta_2}{t-s} + \frac{\theta_2-s}{t-s} + \frac{\theta_1}{s}\,\frac{\theta_2-s}{t-s} & 0 < \theta_1 \leq s \leq \theta_2 \leq t \leq 1 \\ -\frac{\theta_2-\theta_1}{s} & 0 < \theta_1 < \theta_2 \leq s \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da insbesondere jeder einzelne Bruch in der obigen Darstellung betragsmäßig echt kleiner Eins ist, folgt für alle $(s,t) \in H \setminus \{(\theta_1,\theta_2)\}$

$$\rho(\theta_1,\theta_2) = 1 > \rho(s,t).$$

Des Weiteren folgt mit Lemma 3.6 oder durch Nachrechnen

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{e_1}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2\theta_1} & \partial_{\mathbf{e_2}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{\theta_2-\theta_1} \\ \partial_{-\mathbf{e_1}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{\theta_2-\theta_1} & \partial_{-\mathbf{e_2}}\rho(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2(1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 3.11 folgt:

$$\delta_n > 0 \text{ für schließlich alle } n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow (P+) \text{ und } arg\,(\,\rho\,) = \{(\theta_1,\theta_2)\}.$$

Für die Funktionen $R_{i,n}$ ergibt sich

$$R_{0,n}(x) = x - 2\delta_n, \qquad R_{1,n}(x) = -2x, \qquad R_{2,n}(x) = x - 2\delta_n.$$

Zur Gültigkeit der Stabilitätsbedingung (S) betrachte zum Beispiel

$$\begin{aligned} \sigma_{1,+}^2 &:= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(g_{1,n}\left(X_{[n\theta_2]}\right)\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\left(R_{1,n}\left(X_{[n\theta_2],n}\right) - \mathsf{E}R_{1,n}\left(X_{[n\theta_2],n}\right)\right) - \frac{1}{\theta_1}\left(R_{0,n}\left(X_{[n\theta_2],n}\right) - \mathsf{E}R_{0,n}\left(X_{[n\theta_2],n}\right)\right)\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\left(-2X_{[n\theta_2],n} - 2\mathsf{E}X_{[n\theta_2],n}\right) - \frac{1}{\theta_1}\left(X_{[n\theta_2],n} - 2\delta_n - \mathsf{E}\left(X_{[n\theta_2],n} - 2\delta_n\right)\right)\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(-\frac{2}{\theta_2-\theta_1}\epsilon_{[n\theta_2]} - \frac{1}{\theta_1}\epsilon_{[n\theta_2]}\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\epsilon_{[n\theta_2]}^2 \\
&= \left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)^2 \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Ähnlich folgt

$$
\sigma_{1,-}^2 = \left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)^2 \sigma^2, \qquad \sigma_{2,+}^2 = \sigma_{2,-}^2 = \left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)^2 \sigma^2.
$$

Somit ergibt sich für den Prozess Y

$$
Y(s,t) = \begin{cases}
\frac{1}{\theta_2-\theta_1}s+\frac{1}{2(1-\theta_2)}t+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma\tilde{W}_1(-s)+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\sigma\tilde{W}_2(-t) & s<0, t<0 \\
\frac{1}{\theta_2-\theta_1}s-\frac{1}{\theta_2-\theta_1}t+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma\tilde{W}_1(-s)+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\sigma W_2(\ t\ ) & s<0, t\geq 0 \\
-\frac{1}{2\theta_1}s+\frac{1}{2(1-\theta_2)}t+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma W_1(\ s\ )+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\sigma\tilde{W}_2(-t) & s\geq 0, t<0 \\
-\frac{1}{2\theta_1}s-\frac{1}{\theta_2-\theta_1}t+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma W_1(\ s\ )+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{1-\theta_2}\right)\sigma W_2(\ t\ ) & s\geq 0, t\geq 0.
\end{cases}
$$

Des Weiteren gilt, dass der Prozess Y eine eindeutige Maximalstelle $\left(\tau_{l,1}^+, \tau_{l,2}^+\right)$ P-f.s. besitzt. Aufgrund der Gleichung (4.1) gilt

$$
\begin{aligned}
\left\{\tau_{l,1}^+\right\} &= \arg_{s\in\mathbb{R}} \left(1_{s<0}\left(\frac{1}{\theta_2-\theta_1}s+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma\tilde{W}_1(-s)\right)\right. \\
&\qquad \left. +1_{s\geq 0}\left(-\frac{1}{2\theta_1}s+\left(\frac{2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{1}{\theta_1}\right)\sigma W_1(\ s\ )\right)\right) \\
&= \arg_{s\in\mathbb{R}} \left(1_{s<0}\left(\sigma^{-1}\frac{\theta_1}{\theta_2+\theta_1}s+\tilde{W}_1(-s)\right)+1_{s\geq 0}\left(-\sigma^{-1}\frac{\theta_2-\theta_1}{2(\theta_2+\theta_1)}s+W_1(\ s\ )\right)\right).
\end{aligned}
$$

Bzw. gilt

$$
\left\{\tau_{l,2}^+\right\} = \arg_{t\in\mathbb{R}} \left(1_{t<0}\left(\sigma^{-1}\frac{\theta_2-\theta_1}{2(1-\theta_2+1-\theta_1)}t+\tilde{W}_2(-t)\right)+1_{t\geq 0}\left(-\sigma^{-1}\frac{1-\theta_2}{1-\theta_2+1-\theta_1}t+W_2(\ t\ )\right)\right).
$$

Das heißt, wenn wir annehmen, dass ein n_0 mit $\delta_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ existiert, dann folgt

$$
\left(4\delta_n^2 n\left(\hat{\theta}_{1,n}-\theta_1\right), 4\delta_n^2 n\left(\hat{\theta}_{2,n}-\theta_2\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \left(\tau_{l,1}^+, \tau_{l,2}^+\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.
$$

Und wenn wir annehmen, dass ein n_0 mit $\delta_n < 0$ für alle $n \geq n_0$ existiert, dann folgt die Eigenschaft $(P-)$ und $arg\,(\ -\rho\ ) = \{(\theta_1, \theta_2)\}$. Des Weiteren folgt, dass der Prozess Y eine eindeutige Minimalstelle $\left(\tau_{l,1}^-, \tau_{l,2}^-\right)$ besitzt. Wir erhalten

$$
\left(4\delta_n^2 n\left(\hat{\theta}_{1,n}-\theta_1\right), 4\delta_n^2 n\left(\hat{\theta}_{2,n}-\theta_2\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \left(\tau_{l,1}^-, \tau_{l,2}^-\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.
$$

A Mittelwertfunktionen

In diesem Abschnitt möchten wir für ein allgemeines $q \in \mathbb{N}$ eine Darstellung der Mittelwertfunktion $\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\cdot)}(h)$ und der Funktion r angeben. Für $q = 2$ siehe Lemma 3.1. Es sei an die Zerlegung der Menge H in $(q+1)!$ disjunkte Teilmengen erinnert. Für $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_q) \in \left\{ \mathbb{N}_0^{q+1} \middle| \sum_{i=0}^{q} z_i = q \right\}$ setze $z_0' = 0$ und $z_i' := \sum_{j=0}^{i-1} z_i$. Damit definiere folgende Teilmengen $H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}} \subset H$ durch

$$H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}} := \left\{ \mathbf{t} \in H \middle| \, t_i \leq \theta_{z_i'+1} < \dots < \theta_{z_i'+z_i} < t_{i+1} \quad 0 \leq i \leq q \right\}.$$

Das heißt z_i bzw. z_i' entspricht der Anzahl der Change-Points im Intervall $[t_i, t_{i+1})$ bzw. im Intervall $[0, t_i)$. Die $(q+1)$-Stichproben-U-Statistiken $U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h)$ lässt sich als Summe über $(2q+1)$-Stichproben-U-Statistiken mit *i.i.d.* Stichproben schreiben. Für $q = 2$ und $(s,t) \in H_{1,0,1}^{\theta_1,\theta_2}$ siehe (3.1). Damit gilt für ein allgemeines $q \in \mathbb{N}$ und für $\mathbf{t} \in H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\mathsf{E}U_{\mathbf{n}(\mathbf{t})}(h) = \sum \left(\prod_{i=0}^{q} \frac{\binom{[n\theta_{z_i'+1}]-[nt_i]}{k_{i,0}} \left(\prod_{j=1}^{z_i-1} \binom{[n\theta_{z_i'+j+1}]-[n\theta_{z_i'+j}]}{k_{i,j}} \right) \binom{[nt_{i+1}]-[n\theta_{z_i'+z_i}]}{k_{i,z_i}}}{\binom{[nt_{i+1}]-[nt_i]}{m_i}} \right) \mu_{\mathbf{l},n},$$

wobei über alle Vektoren $\mathbf{k} = \left(k_{0,0}, \dots, k_{0,z_0}, \dots, k_{q,0}, \dots, k_{q,z_q}\right) \in \mathbb{N}_0^{\sum_{i=0}^{q}(z_i+1)}$ mit $\sum_{j=0}^{z_i} k_{i,j} = m_i$ für alle $0 \leq i \leq q$ summiert wird. Der Vektor $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{k}) \in \mathbb{N}_0^{q+1}$ sei dabei für $0 \leq i' \leq q$ definiert durch

$$l_{i'} := \begin{cases} k_{i-1,z_{i-1}} + k_{i,0} & \text{, wenn } i' = z_i' \text{ für ein } 0 \leq i \leq q \\ k_{i,j} & \text{, wenn } i' = z_i' + j \text{ für ein } 0 \leq i \leq q \text{ und } 0 < j < z_i. \end{cases}$$

Für die deterministische Funktion r ergibt sich für $\mathbf{t} \in cl\left(H_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\theta}}\right)$:

$$r(\mathbf{t}) = \sum \left(\prod_{i=0}^{q} \binom{m_i}{k_{i,0}, \dots, k_{i,q}}^{-1} \frac{\left(\theta_{z_i'+1} - t_i\right)^{k_{i,0}} \left(\prod_{j=1}^{z_i-1} \left(\theta_{z_i'+j+1} - \theta_{z_i'+j}\right)^{k_{i,j}} \right) \left(t_{i+1} - \theta_{z_i'+z_i}\right)^{k_{i,z_i}}}{\left(t_{i+1} - t_i\right)^{m_i}} \right) \mu_{\mathbf{l}},$$

wobei ebenfalls über alle Vektoren $\mathbf{k} = \left(k_{0,0}, \dots, k_{0,z_0}, \dots, k_{q,0}, \dots, k_{q,z_q}\right) \in \mathbb{N}_0^{\sum_{i=0}^{q}(z_i+1)}$ mit $\sum_{j=0}^{z_i} k_{i,j} = m_i$ für alle $0 \leq i \leq q$ summiert wird.

B Technische Hilfssätze

B.1 Lemma. *Es seien $p, \alpha \in \mathbb{R}$ und $d, k, l \in \mathbb{N}$ mit $p > 0$ und $0 \leq \alpha \leq 1 \leq d \leq k$. Dann gilt*

$$\frac{k^{\alpha p}}{\binom{k}{d}^p} - \frac{(k+l)^{\alpha p}}{\binom{k+1}{d}^p} \leq pl \frac{k^{\alpha p}}{\binom{k}{d}^p} \left(\frac{1-\alpha}{k} + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{k-d+i} \right).$$

Beweis: Ist $x > d$, so gilt für die Funktion

$$f(x) := \left(d! x^{\alpha} \prod_{i=1}^{d} (x - d + i) \right)^p$$

$$f'(x) := pf(x) \left(\frac{\alpha}{x} - \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x-d+i} \right) = -pf(x) \left(\frac{1-\alpha}{x} + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{x-d+i} \right) < 0$$

$$f''(x) := f(x)\left(p^2\left(\frac{1-\alpha}{x}+\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{x-d+i}\right)^2+p\left(\frac{1-\alpha}{x^2}+\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{(x-d+i)^2}\right)\right)>0.$$

Daraus folgt, dass die Funktionen f und $|f'|$ monoton fallend sind. Zusammen mit dem Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned}
\frac{k^{\alpha p}}{\binom{k}{d}^p}-\frac{(k+l)^{\alpha p}}{\binom{k+l}{d}^p} &= l\frac{f(k)-f(k+1)}{l}\\
&\overset{\text{Monotonie } f}{=} l\frac{|f(k)-f(k+1)|}{|k-(k+l)|}\\
&\overset{MWS}{\le} l\,|f'(x)| \quad \text{für ein spezielles x mit } k<x<k+1\\
&\overset{\text{Monotonie } f'}{\le} -lf'(k)\\
&= pl\frac{k^{\alpha p}}{\binom{k}{d}^p}\left(\frac{1-\alpha}{k}+\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{k-d+i}\right).
\end{aligned}$$

□

B.2 Lemma. *Für $k\in\mathbb{N}$ existiert eine positive von n unabhängige Konstante C mit*

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{t^k}{k!}\right|\le\frac{C}{n}.$$

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion über k geführt und es sei $[nt]>k$.
Induktionsanfang:

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-0}\binom{[nt]}{0}-\frac{t^0}{0!}\right|=0 \qquad k=0$$

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-1}\binom{[nt]}{1}-\frac{t^1}{1!}\right|=\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{[nt]-nt}{n}\right|\le\frac{1}{n} \qquad k=1.$$

Induktionsbehauptung: Für k gilt

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{t^k}{k!}\right|\le\frac{C}{n}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-(k+1)}\binom{[nt]}{k+1}-\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right|\\
&=\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-(k+1)}\frac{[nt]\dots([nt]-k)}{(k+1)!}-\frac{t}{k+1}\frac{t^k}{k!}\right|\\
&=\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{[nt]-k}{n(k+1)}n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{t}{k+1}\frac{t^k}{k!}\right|\\
&=\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{[nt]-k}{n(k+1)}n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{[nt]-k}{n(k+1)}\frac{t^k}{k!}+\frac{[nt]-k}{n(k+1)}\frac{t^k}{k!}-\frac{t}{k+1}\frac{t^k}{k!}\right|\\
&\le\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{[nt]-k}{n(k+1)}\left(n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{t^k}{k!}\right)\right|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\left(\frac{[nt]-k}{n(k+1)}-\frac{t}{k+1}\right)\frac{t^k}{k!}\right|\\
&\le\sup_{0\le t\le 1}\left|n^{-k}\binom{[nt]}{k}-\frac{t^k}{k!}\right|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{[nt]-k-nt}{n(k+1)}\frac{t^k}{k!}\right|
\end{aligned}$$

$$\le \frac{C}{n} + \sup_{0\le t\le 1} \left| \frac{1}{n} \frac{t^k}{k!} \right|$$
$$= \frac{C + \frac{1}{k!}}{n}.$$

□

B.3 Lemma. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^q$ sowie f und g beschränkte Funktionen von M in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\left| \sup_{\mathbf{t}\in M} f(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{t}\in M} g(\mathbf{t}) \right| \le \sup_{\mathbf{t}\in M} |f(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t})| \ .$$

Beweis: Aufgrund der Beschränktheit der Funktionen existieren die Suprema. Wegen der Symmetrie der Beträge sei ohne Einschränkung $\sup_{\mathbf{t}\in M} f(\mathbf{t}) \ge \sup_{\mathbf{s}\in M} g(\mathbf{s})$, dann folgt

$$\left| \sup_{\mathbf{t}\in M} f(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{s}\in M} g(\mathbf{t}) \right| = \sup_{\mathbf{t}\in M} f(\mathbf{t}) - \sup_{\mathbf{s}\in M} g(\mathbf{s}) \le \sup_{\mathbf{t}\in M} f(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t}) \le \sup_{\mathbf{t}\in M} |f(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t})| \ .$$

□

B.4 Lemma. *Sei $T \subset \mathbb{R}^q$ und $f : T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit mindestens einer Maximalstelle und es soll für ein $t_0 \in T$ gelten, dass $-\inf_{t\in T} f(t) < f(t_0)$. Dann ist die Menge der Maximalstellen von f gleich der von $|f|$.*

Beweis: In Ferger (1995), Lemma 5.3, S. 83. wurde der Fall $T \subset \mathbb{R}$ gezeigt. Dieser Beweis lässt sich direkt auf $T \subset \mathbb{R}^q$ übertragen. □

B.5 Lemma. *Für die Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ sowie für $\epsilon > 0$ gilt:*

$$\left\{ \sum_{i=1}^n X_i > \epsilon \right\} \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ X_i > \frac{\epsilon}{n} \right\} \ .$$

B.6 Lemma. *Es seien k, m, n, $u \in \mathbb{N}$ mit $k + u \le n - m$ und $\tilde{C}$ eine Konstante mit $u + m \le \tilde{C}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ für die gilt*

$$\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} \le C \begin{cases} (n-m-k-u)^{-a-b+1} & a < 1, b < 1 \\ \ln(n-m-k-u) & a = 0, b = 1 \text{ oder } a = 1, b = 0 \\ (n-m-k-u)^{-1} \ln(n-m-k-u) & a = b = 1 \\ (n-m-k-u)^{-\min\{a,b\}} & a > 1 \text{ oder } b > 1. \end{cases}$$

Beweis: Setze für $a + b > 0$

$$f(x) := (x-k)^{-a} (n-x)^{-b}$$
$$M := \frac{bk + an}{a+b}.$$

Damit gilt

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{-a}{x-k} + \frac{b}{n-x} \right) \begin{cases} < 0 & k + u \le x < M \\ = 0 & x = M \\ > 0 & M < x \le n - m. \end{cases}$$

Im folgenden sei C eine positive generische Konstante. Aus der Monotonie von f folgt

$$\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} \le C \left(f(k+u) + \int_{k+u}^{[M]} f(x)\, dx + \int_{[M]}^{n-m} f(x)\, dx + f(n-m) \right).$$

Für $a > 1$ folgt $-a+1<0$ und es gilt mit der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{k+u}^{[M]} f(x)\,dx &= \int_{k+u}^{[M]} (x-k)^{-a}(n-x)^{-b}\,dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|(x-k)^{-a}\right\|_{L^1[k+u,[M]]}\left\|(n-x)^{-b}\right\|_{L^\infty[k+u,[M]]} \\
&= \left(\int_{k+u}^{[M]} (x-k)^{-a}\,dx\right)\sup_{k+u\leq x\leq [M]}\left|(n-x)^{-b}\right| \\
&= \left(|_{k+u}^{[M]}\frac{1}{-a+1}(x-k)^{-a+1}\right)(n-[M])^{-b} \\
&= \frac{1}{-a+1}\left(([M]-k)^{-a+1}-u^{-a+1}\right)(n-[M])^{-b} \\
&\leq \frac{-1}{-a+1}u^{-a+1}(n-[M])^{-b} \\
&\leq C\left(n-\frac{bk+an}{a+b}\right)^{-b} \\
&\leq C\left(\frac{b(n-k)}{a+b}\right)^{-b} \\
&\leq C(n-k)^{-b}.
\end{aligned}$$

Analog folgt für $b>1$, dass $-b+1<0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[M]}^{n-m} f(x)\,dx &= \int_{[M]}^{n-m} (x-k)^{-a}(n-x)^{-b}\,dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|(x-k)^{-a}\right\|_{L^\infty[[M],n-m]}\left\|(n-x)^{-b}\right\|_{L^1[[M],n-m]} \\
&= ([M]-k)^{-a}\,\frac{-1}{-b+1}\left(m^{-b+1}-(n-[M])^{-b+1}\right) \\
&\leq ([M]-k)^{-a}\,\frac{-1}{-b+1}m^{-b+1} \\
&\leq C(n-k)^{-a}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für $a>1$ und $b>1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=k+u}^{n-m}(l-k)^{-a}(n-l)^{-b} \leq C\left(f(k+u)+\int_{k+u}^{[M]} f(x)\,dx+\int_{[M]}^{n-m} f(x)\,dx+f(n-m)\right) \\
&\leq C\left(u^{-a}(n-k-u)^{-b}+(n-k)^{-b}+(n-k)^{-a}+(n-m-k)^{-a}m^{-b}\right) \\
&\leq C(n-m-k-u)^{-\min\{a,b\}}.
\end{aligned}$$

Aus $u+m\leq\tilde{C}$ folgt die Existenz einer positiven Konstanten C, so dass für alle $k+u\leq l\leq n-m$ gilt

$$\begin{aligned}
(l-k) &\leq C(n-m-k-u) \\
(n-l) &\leq C(n-m-k-u).
\end{aligned}$$

Es sei nun $a > 1$ und $b \leq 1$. Dann existiert ein $\tilde{b}$ mit $1 < \tilde{b} < a$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} &= \sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-\tilde{b}} (n-l)^{\tilde{b}-b} \\
&\leq C (n-m-k-u)^{\tilde{b}-b} \sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-\tilde{b}} \\
&\leq C (n-m-k-u)^{\tilde{b}-b} (n-m-k-u)^{-\min\{a,\tilde{b}\}} \\
&= C (n-m-k-u)^{-b} .
\end{aligned}$$

Analog folgt für $a \leq 1$ und $b > 1$

$$\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} \leq C (n-m-k-u)^{-a} .$$

Und man erhält für $a > 1$ oder $b > 1$ die Behauptung. Für $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ folgt ähnlich

$$\begin{aligned}
\int_{k+u}^{[M]} f(x)\,dx &\leq \frac{1}{-a+1} \left(([M]-k)^{-a+1} - u^{-a+1} \right) (n-[M])^{-b} \\
&\leq \frac{1}{-a+1} ([M]-k)^{-a+1} (n-[M])^{-b} && \leq C (n-k)^{-a-b+1} \\
\int_{[M]}^{n-m} f(x)\,dx &\leq ([M]-k)^{-a} \frac{-1}{-b+1} \left(m^{-b+1} - (n-[M])^{-b+1} \right) \\
&\leq ([M]-k)^{-a} \frac{1}{-b+1} (n-[M])^{-b+1} && \leq C (n-k)^{-a-b+1} .
\end{aligned}$$

Und man erhält für $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} \leq C \left(f(k+u) + \int_{k+u}^{[M]} f(x)\,dx + \int_{[M]}^{n-m} f(x)\,dx + f(n-m) \right) \\
&\leq C \left(u^{-a} (n-k-u)^{-b} + (n-k)^{-a-b+1} + (n-k)^{-a-b+1} + (n-m-k)^{-a} m^{-b} \right) \\
&\leq C (n-m-k-u)^{-a-b+1} .
\end{aligned}$$

Es sei nun $a < 1$ und $b < 1$. Dann existieren ein $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ mit $\max\{a, 0\} < \tilde{a} < 1$ und $\max\{b, 0\} < \tilde{b} < 1$. Insgesamt erhält man nun für $a < 1$ und $b < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-a} (n-l)^{-b} &= \sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-\tilde{a}} (n-l)^{-\tilde{b}} (l-k)^{\tilde{a}-a} (n-l)^{\tilde{b}-b} \\
&\leq (n-m-k-u)^{\tilde{a}-a+\tilde{b}-b} \sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-\tilde{a}} (n-l)^{-\tilde{b}} \\
&\leq C (n-m-k-u)^{\tilde{a}-a+\tilde{b}-b} (n-m-k-u)^{-\tilde{a}-\tilde{b}+1} \\
&= C (n-m-k-u)^{-a-b+1} .
\end{aligned}$$

Es sei $a = 1$ und $b = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k+u}^{n-m} \frac{1}{l-k} &\leq \frac{1}{u} + \int_{k+u}^{n-m} \frac{1}{x-k} dx \\
&= \frac{1}{u} + \ln(l-k)\,|_{k+u}^{n-m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{u} + \ln\left(\frac{n-m-k}{u}\right) \\
&\le C \ln\left(n-m-k-u\right).
\end{aligned}
$$

Analog gilt für $a = 0$ und $b = 1$

$$\sum_{l=k+u}^{n-m} \frac{1}{n-l} \le C \ln\left(n-m-k-u\right).$$

Wenn $a = b = 1$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{k+u}^{[M]} f(x)\,dx &= \int_{k+u}^{[M]} (x-k)^{-1}(n-x)^{-1}\,dx \\
&= |_{k+u}^{[M]} \frac{1}{n-k} \ln \frac{x-k}{n-x} \\
&= \frac{1}{n-k}\left(\ln \frac{[M]-k}{n-[M]} - \ln \frac{u}{n-k-u}\right) \\
&= \frac{1}{n-k} \ln \frac{[M]-k}{n-[M]} \frac{n-k-u}{u} \\
&\le C \frac{1}{n-k} \ln\left(n-k-u\right) \\
&\le C \frac{1}{n-k-u} \ln\left(n-k-u\right) \\
\int_{[M]}^{n-m} f(x)\,dx &\le C \frac{1}{n-k-m} \ln\left(n-k-m\right)
\end{aligned}
$$

und es folgt

$$\sum_{l=k+u}^{n-m} (l-k)^{-1}(n-l)^{-1} \le C \frac{1}{n-m-k-u} \ln\left(n-m-k-u\right).$$

$\square$

B.7 Lemma. *Für reelle Zahlen a_i, b_i mit $1 \le i \le n$ gilt:*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_k \le n} \prod_{j=1}^{k} a_{l_j} \prod_{j \in \{1,\ldots,n\}/\{l_1,\ldots,l_k\}} b_j + \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Beweis: Induktion über n. Es sei $n = 1$. Dann gilt

$$a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_k \le 1} \prod_{j=1}^{k} a_{l_j} \prod_{j \in \{1,\ldots,1\}/\{l_1,\ldots,l_k\}} b_j + b_1.$$

Es gelte nun die Induktionsvoraussetzung für $n-1$.

$$\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_i) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_k \le n-1} \prod_{j=1}^{k} a_{l_j} \prod_{j \in \{1,\ldots,n-1\}/\{l_1,\ldots,l_k\}} b_j + \prod_{i=1}^{n-1} b_i.$$

Und es folgt

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = (a_n+b_n)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_i)\\
&= (a_n+b_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j+\prod_{i=1}^{n-1}b_i\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}a_n\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)+a_n\prod_{i=1}^{n-1}b_i\\
&\quad+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}b_n\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)+\prod_{i=1}^{n}b_i\\
&\overset{\tilde{k}=k+1}{=}\left(\sum_{\tilde{k}=2}^{n}\sum_{1\le l_1<\dots<l_{\tilde{k}-1}\le n-1}a_n\prod_{j=1}^{\tilde{k}-1}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_{\tilde{k}-1}\}}b_j\right)+a_n\prod_{i=1}^{n-1}b_i\\
&\quad+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}b_n\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)+\prod_{i=1}^{n}b_i\\
&= \left(\sum_{k=2}^{n-1}\left(\sum_{1\le l_1<\dots<l_{k-1}\le n-1}a_n\prod_{j=1}^{k-1}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_{k-1}\}}b_j\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}b_n\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n-1\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)\right)\\
&\quad+a_n\prod_{j=1}^{n-1}a_j+a_n\prod_{i=1}^{n-1}b_j+b_n\sum_{l_1=1}^{n-1}a_{l_1}\prod_{j=1\ ,j\neq l_1}^{n-1}b_j+\prod_{i=1}^{n}b_i\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\left(\sum_{1\le l_1<\dots<l_{k-1}\le n-1,l_k=n}\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)+\left(\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n-1}\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)\\
&\quad+\prod_{j=1}^{n}a_j+\sum_{l_1=1}^{n}a_{l_1}\prod_{j=1\ ,j\neq l_1}^{n}b_j+\prod_{i=1}^{n}b_i\\
&= \left(\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n}\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j\right)+\prod_{j=1}^{n}a_j+\sum_{l_1=1}^{n}a_{l_1}\prod_{j=1\ ,j\neq l_1}^{n}b_j+\prod_{i=1}^{n}b_i\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le l_1<\dots<l_k\le n}\prod_{j=1}^{k}a_{l_j}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}/\{l_1,\dots,l_k\}}b_j+\prod_{i=1}^{n}b_i.
\end{aligned}
$$

$\square$

C Literatur

[1] J. Antoch, M. Huskova, D. Jaruskova (1999), *Change Point Detection*, 5th ERS IASC Summer School, Spetses (Griechenland)

[2] S. Antoni (2004), *Exponential-Ungleichungen für U-Statistiken mit beschränkten Kern*, Diplomarbeit, Universität Dresden

[3] P.J. Bickel, M.J. Wichura (1971), *Convergence Criteria for Multiparameter Stochastic Processes and some Application*, The Annals of Mathematica Statistics, Vol 42, No 5, 1656-1670

[4] P. Billingsley (1968), *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York

[5] B.E. Brodsky, B.S. Darkhovsky (1993), *Nonparametric Methods in Change-Point Problems*, Kluwer Academic Publishers

[6] B.E. Brodsky, B.S. Darkhovsky (2000), *Non-parametric statistical diagnosis. Problems and methods.*, Kluwer Academic Publishers

[7] T.C. Christofides, R.J. Serfling (1990), *Maximal inequalities and convergence results for generalized U-statistics*, J. Statist. Planning Inference 24, 271-286

[8] T.C. Christofides, R.J. Serfling (1990), *Maximal inequalities for multidimensionally indexed submartingale arrays*, Ann. Probab. 18, 630-641

[9] M. Csörgö, L. Horvath (1993), *Limit Theorems in Change-Point Analysis*, Physica-Verlag Heidelberg

[10] M. Döring (2004), *Asymptotisches Verhalten der Maximalstellen von Differenzen von U-Statistiken bei Vorliegen eines Change Points*, Diplomarbeit, Universität Dresden

[11] D. Ferger (1994), *Change-point estimators in case of small disorders*, J. Statist. Planning Inference 40, 33-49

[12] D. Ferger (1995), *Change-point estimators based on weighted empirical processes with application to the two sample problem in general measurable spaces* Habilitationsschrift, Universität Gießen

[13] D. Ferger (1999), *On the uniqueness of maximizers of Markov-Gaussian processes*, Statistics & Probability Letters 45, pp. 71-77

[14] D. Ferger (2001), *Exponential and polynomial tailbounds for change-point estimators*, J. Statist. Planning Inference 92, 73-109

[15] D. Ferger (2004), *A continuous mapping theorem for the argmax-functional in the non-unique case*, Statistica Neerlandica, Vol. 58, nr. 1, pp. 83-96

[16] D. Ferger (2005), *Stochastische Prozesse mit Strukturbrüchen I*, Vorlesung, TU Dresden

[17] D. Ferger (2006), *On the sets of maximizing points of stochastic processes and their distributional convergence in the Painlevé-Kuratowski space*, Manuskript, Vortrag, Frankfurter Stochastiktage

[18] P. Gänssler und W. Stute (1977), *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, Heidelberg

[19] J. Jacod, A.N. Shiryaev (2000), *Limit Theorems for Stochastic Process*, Springer Verlag, Heidelberg

[20] V.S. Koroljuk, Yu.V. Borovskich (1994), *Theory of U-Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London

[21] A.J. Lee (1990), *U-Statistics, Theory and Practice*, Marcel Dekker Inc, New York and Basel

[22] M.A. Lifshits (1999), *On the absolute continuity of distribution of functionals of random processes*, Theoty Probab. Appl. 27, pp. 600-607

[23] G. Neuhaus (1971), *On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter*, The Annals of Mathematica Statistics, Vol 42, No 4, 1285-1295

[24] M. Orasch (2004), *Using U-statistics Based Processes to Detect Multiple Change-points*, American Mathematical Society, Fields Institute Communication 44, 315-334

[25] Aad W. van der Vaart, Jon A. Wellner (1996), *Weak Convergence and Empirical Processes*, Springer

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die vorgelegte Dissertation wurde am Institut für Mathematische Stochastik der Technischen Universität Dresden unter der wissenschaftlichen Betreuung von Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. D. Ferger angefertigt.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der TU Dresden vom 20. März 2000 an.

Dresden, den 08. Januar 2007 gez. Maik Döring