

Zur Differentialgeometrie zweiparametrischer Geradenmengen im KLEINSchen Modell

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

von

Marco Hamann

geboren am 25. Januar 1972 in Leipzig

Gutachter: Prof. Dr. G. Weiß, TU Dresden
Prof. Dr. H. Stachel, TU Wien
Prof. Dr. G. Stamou, Aristoteles Universität Thessaloniki

Eingereicht am: 10.11.2004

Tag der Disputation: 11.01.2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
A Themenstellung	1
B Eingliederung der Themenstellung in bisherige Untersuchungen	2
C Ergebnisse	3
D Vereinbarungen	6
1 Voraussetzungen und Grundlagen	7
1.1 Grundlagen für die Betrachtungen im Linienraum	7
1.2 Die Gruppe $PGL(\Pi^3)$ und ihre Untergruppen unter der KLEINSchen Abbildung	10
1.2.1 Kollineationen und Korrelationen der Gruppe $PGL(\Pi^3)$	10
1.2.2 Affinitäten	11
1.2.3 Ähnlichkeiten	12
1.2.4 Bewegungen	12
2 Zur differentialgeometrischen Behandlung der Geradenkongruenzen	14
2.1 Geradenmannigfaltigkeiten im KLEINSchen Modell	14
2.2 Die Umgebung 1. Ordnung einer C^r -Kongruenz	15
2.2.1 Projektivgeometrische Begriffe	16
2.2.2 Affingometrische Begriffe	22
2.2.3 Ähnlichkeitsgeometrische Begriffe	23
2.2.4 Bewegungsgeometrische Begriffe	27
3 Konstruktion einer Fundamentalmenge in Π^5	31
3.1 Konstruktion einer Basis in Π^5	31
3.2 Möglichkeiten der Auszeichnung von „Einheitspunkten“ auf den SANNIA-Tangenten	33
3.3 Einheitspunkte auf den anderen Simplexkanten	35
3.4 Projektive Koordinatenskalen auf den Simplexkanten	37
4 Ableitungsgleichungen, Integrabilitätsbedingungen für S-normierte C^r-Kongruenzen	39
4.1 Ableitungsgleichungen	39
4.2 Integrabilitätsbedingungen	49
4.3 Invarianten bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$	58
5 Lokale Theorie der C^r-Kongruenzen unter Benutzung CAYLEY- KLEINScher Maßbestimmungen	67
5.1 Zum Begriff eines CAYLEY- KLEIN Raumes, Überlegungen im KLEINSchen Modell	67
5.2 Über 2-Flächen $P(U)$ und Flächenkurven in CAYLEY- KLEIN Räumen	70
5.3 Erste Grundformen für $P(U)$ aus CAYLEY- KLEINScher Sicht	71
5.4 GAUSS-Ableitungsgleichungen und CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art	75
5.5 Zweite Grundformen für $P(U)$ aus CAYLEY- KLEINScher Sicht	82
5.5.1 Totalkonjugierte und Orthogonalität in CAYLEY- KLEIN Räumen und ihre Anwendungen im KLEINSchen Modell	82
5.5.2 Zweite Grundformen	89
5.6 Krümmungsmaße, WEINGARTEN-Abbildungen für $P(U)$	93
6 Schlussbemerkungen und Ausblicke	99

Literaturverzeichnis	102
Abbildungsverzeichnis	105
Sachverzeichnis	106
Danksagung	
Erklärung	

Einleitung

A Themenstellung

Mit diesem Kapitel soll der Leser einen Überblick über den zu behandelnden Gegenstand erhalten und mit dem zentralen Anliegen der Arbeit vertraut gemacht werden.

Wie der Titel dieser Arbeit „Zur Differentialgeometrie zweiparametrischer Geradenmengen im KLEINSchen Bild“ verrät, sollen Geradenkongruenzen des dreidimensionalen Raumes^{*)} differentialgeometrisch untersucht werden. Das Wort „Geradenkongruenzen“ steht dabei für zweiparametrische C^1 -Geradenmannigfaltigkeiten. Daneben lassen sich auch einparametrische - (Regelflächen) sowie dreiparametrische Geradenmannigfaltigkeiten (Geradenkomplexe) in der vierparametrischen Geradenmenge \mathfrak{G} des projektiv abgeschlossenen euklidischen 3-Raumes Π_e^3 betrachten. Werden orientierte Geraden verwendet, so spricht man von *Speeren* bzw. *Strahlen*, wobei dann für zwei- bzw. dreiparametrische solcher Strahlenmengen auch die Bezeichnungen *Strahlensysteme* bzw. *-komplexe* üblich sind.

Geradenkongruenzen werden seit der Mitte des 19. Jahrhunderts vom differentialgeometrischen Standpunkt systematisch untersucht. Eine erste umfassende Theorie der Strahlensysteme des euklidischen Dreiraumes stammt von E. KUMMER und wurde im Jahr 1860 unter dem Titel „Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme“ [KUM] veröffentlicht. Unter den jüngeren Arbeiten sind vor allem die von S. P. FINIKOW [FIN], R. KOCH [KOC] und N. K. STEPHANIDIS [STE] zu nennen.

Die Behandlung der Strahlkongruenzen des dreidimensionalen euklidischen Raumes steht dabei im engen Zusammenhang zur Theorie der 2-Flächen im \mathbb{R}^3 . Eine Strahlkongruenz wird durch ein an eine Leitfläche Φ gebundenes Vektorfeld V festgelegt. Die Geraden der zugehörigen Geradenkongruenz sind also die durch Feldvektoren aufgespannten eindimensionalen Nebenklassen durch die entsprechenden Punkte von Φ . Mit Geradenkongruenzen (Strahlkongruenzen) lassen sich geometrisch ausgezeichnete Flächen verbinden. Für eine weitgehend koordinatenfreie Behandlung der Geradenkongruenzen im Sinne einer „natürlichen Geometrie“ dieser Gebilde wird üblicherweise die so genannte Mittenfläche der Kongruenz als Leitfläche herangezogen.

Die Untersuchungen von Geradenkongruenzen wurden stimuliert durch die geometrische Optik, wie etwa das *Theorem von MALUS und DUPIN* zeigt:

“If the lines of a normal congruence^{**}) (..) are reflected [or refracted] in a smooth surface (..), then the set (..) of reflected [or refracted] lines is again a normal congruence.” [POT], S. 446

Nach J. PLÜCKER lassen sich Geraden in gleicher Weise als Grundelemente eines Geradenraumes auffassen wie die Punkte in einem Punktraum^{***}). Unter Beachtung dieser Überlegung scheint die Frage nach „kürzesten“ bzw. „kleinsten“ *Geradenmannigfaltigkeiten* in der vierparametrischen Geradenmenge \mathfrak{G} des reellen projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes Π_e^3 interessant und sinnvoll. Dahinter verbergen sich gewisse

*) genauer C^1 -Geradenkongruenzen des projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes Π_e^3

***) Bei einer Normalenkongruenz ist das sie festlegende Feld V das Normalenfeld von Φ .

****) Diese Aussage bildet die Grundlage der von J. PLÜCKER verfassten Abhandlung „*Neue Geometrie des Raumes*“ (1868), welche die Entwicklung der Liniengeometrie maßgebend beeinflusst hat.

Analogiebildungen in der Liniengeometrie, die der klassischen Differentialgeometrie entstammen. In gleicher Weise wie Raumkurven im dreidimensionalen (Punkt-)Raum lassen sich Regelflächen als einparametrische Mannigfaltigkeiten untersuchen; die Geradenkongruenzen bilden hierbei das liniengeometrische Analogon der Flächen des dreidimensionalen (Punkt-)Raumes. Die Wörter „*Kürzeste*“ und „*Kleinste*“ stellen im Geradenraum einen Bezug zu den *Geraden* bzw. *Geodätischen* und *Minimalflächen* in der Differentialgeometrie her. Sie sind sicherlich an Maßbegriffe gebunden, die zu minimieren sind.

Nun gestatten diese Fragestellungen in der Liniengeometrie eine anschauliche Interpretation, sobald man ein Punktmodell des Geradenraumes \mathfrak{G} von Π_e^3 vorliegen hat. Regelflächen lassen sich darin als Kurven, Geradenkongruenzen als zweidimensionale Flächen und Geradenkomplexe als dreidimensionale Räume auffassen. Die vierparametrische Geradenmenge \mathfrak{G} des reellen projektiven dreidimensionalen Raumes Π^3 ist in diesem Modell eine Quadrik vom Index 2 in einem reellen projektiven fünfdimensionalen Raum Π^5 , die so genannte *KLEINSche Hyperquadrik* M_4^2 . Der Modellwechsel wird durch die *KLEINSche Abbildung* Γ vollzogen. Beiträge zur euklidischen Liniengeometrie, insbesondere auch zur euklidischen Differentialgeometrie der Regelflächen unter Verwendung dieser Auffassung entwickelten H. BRAUNER in [BRA2] und G. WEISS in [WEI2], [WEI3].

In der metrischen Liniengeometrie erweist sich eine nach E. STUDY benannte Auffassung des Geradenraumes als zweckmäßig. Unter Verwendung der *STUDYSchen Abbildung* werden Speere des euklidischen 3-Raumes auf Punkte der Einheitssphäre eines dual erweiterten euklidischen Raumes über dem Ring der dualen Zahlen über \mathbb{R} abgebildet. W. HAACK und W. BLASCHKE behandeln unter diesem Modellwechsel in [HAA1] und [BLA] die euklidische Differentialgeometrie der Regelflächen, Strahlensysteme und (-komplexe). Die differentialgeometrische Behandlung in diesem eleganten Modell ist allerdings insofern nicht konsistent, als dass die Parametrisierungen stets über \mathbb{R} erfolgen, insbesondere algebraische Aussagen noch die komplexe Erweiterung nach \mathbb{C} erfordern. Für Strahlkongruenzen bietet es sich natürlich an, die beiden unabhängigen Parameter (u^1, u^2) der Kongruenz ebenfalls als duale Zahl $d \in \mathbb{D}$ aufzufassen und die Kongruenzen so in Analogie zur GAUSSSchen Zahlenebene als eindimensionale Gebilde über \mathbb{D} aufzufassen. Eine solche Behandlung scheint in der Literatur noch nicht systematisch durchgeführt worden zu sein.

Wir ziehen im Folgenden die nur im Reellen bleibende Behandlung im KLEINSchen Modell vor, einerseits, weil dabei funktionentheoretische Überlegungen entfallen, andererseits, weil die Analogien zur klassischen m -Flächentheorie n -dimensionaler nichteuklidischer Räume stärker hervortreten.

B Eingliederung der Themenstellung in bisherige Untersuchungen

Die Frage nach „*minimalen*“ C^r -Geradenmannigfaltigkeiten des Π_e^3 ist von G. WEISS für den einparametrischen Fall untersucht worden [WEI5]. Er zeichnet im KLEINSchen Modell „*kürzeste Regelflächen*“ als gerade Linien bzw. jene Kurven auf M_4^2 aus, deren Schmiegebene in jedem Punkt der Kurve die Flächennormale von M_4^2 enthält. Eine „*innere*“ Kennzeichnung unter Verwendung eines „*Bogenlängenbegriffs*“ fand dabei keine Beachtung, da aufgrund der komplizierten metrischen Struktur des Modellraumes mehrere „*natürliche Parameter*“ ausgezeichnet sind.

Bemerkenswert ist aber, dass die sich im Urraum ergebenden Geradenmengen die Geradenbündel sowie Wendelflächen sind, also Geradengebilde, deren Trägermenge als Punktmenge aufgefasst ebenfalls Minimalflächeneigenschaft in Π_c^3 besitzt, vgl. [WEI5]. Daneben finden Wendelflächen und Geradenbündel auf der STUDYSchen Sphäre gerade eine Kennzeichnung als (reeller) Äquator.

Die Behandlung höherdimensionaler Analoga minimaler C^r -Geradenmannigfaltigkeiten im KLEINSchen Modell stellt sich als Aufgabe anschließender Untersuchungen und ist durch G. WEISS im Rahmen des vorliegenden Dissertationsvorhabens angeregt worden. Die Auszeichnung von kleinsten C^r -Geradenkongruenzen wird das zentrale Anliegen der vorliegenden Arbeit darstellen. Minimale C^r -Geradenkomplexe sind nicht Gegenstand dieser Dissertation.

B. ODEHNAL kennzeichnet in [ODE] „*Minimalkongruenzen*“ über einen anderen Zugang: Betrachtet werden Geradenkongruenzen im dreidimensionalen elliptischen und euklidischen Raum. Ihnen wird vermöge der sphärisch-kinematischen Abbildung ein „linkes“ und „rechtes“ Gebiet auf der euklidischen Einheitskugel zugeordnet. Eine anschließende stereographische Projektion bildet diese in die GAUSSsche Zahlenebene ab. Die Geradenkongruenzen lassen sich dann als Erzeugnis jener Abbildungen auffassen, welche diese „Punktfelder“ koppelt.

Der Autor bezeichnet jene Kongruenzen als minimal, deren erzeugende Abbildung Energie minimierend ist. Mit diesem Vorgehen ergeben sich neben den *isotropen Kongruenzen* im dreidimensionalen euklidischen Raum noch die Normalkongruenzen einer einparametrischen Familie von Drehflächen als Minimalkongruenzen in obiger Auffassung.

Es sei erwähnt, dass die Frage nach *minimalen Strahlkomplexen* von W. HAACK in [HAA2] behandelt wird. Dabei wird unter Benutzung des STUDYSchen Ansatzes gefordert, dass ein gewisses Integral

$$\iiint \sqrt{|\bar{g}_{jk}|} |du^1 du^2 du^3$$

minimiert wird. Die Größen \bar{g}_{jk} stammen dabei von einer gewissen quadratischen Differentialform in der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. Der Autor nennt Komplexe mit der geforderten Eigenschaft in Anlehnung an die Minimalflächen in der klassischen Flächentheorie „*Minimalkomplexe*“.

C Ergebnisse

Mögliche Herangehensweisen zur Behandlung kleinster Geradenkongruenzen werden jetzt aufgezeigt.

Ausgehend vom ERLANGER PROGRAMM (F. KLEIN, 1872) übertragen wir im ersten Kapitel die Strukturen der Ähnlichkeitsgruppe und Bewegungsgruppe des dreidimensionalen projektiven Raumes Π^3 ins KLEINSche Modell. Dabei zeigt sich, dass neben M_4^2 durch Übertragung der euklidischen Struktur ein weiterer, in der komplexen Erweiterung existierender quadratischer Hyperkegel N_4^2 fest bleibt, so dass die KLEINSche Transformierte $PGL(\Pi^5, M_4^2, N_4^2)$ der

Ähnlichkeitsgruppe von Π_e^3 ein von M_4^2 und N_4^2 aufgespanntes Büschel $\{V_4^2(c)\}^*$ von Hyperquadriken des Π^5 als Ganzes fest lässt. Die KLEINSche Transformierte $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$ der Bewegungsgruppe lässt hingegen die Hyperquadriken des Büschels einzeln fest. Insbesondere lassen sich hierdurch geometrische Begriffsbildungen aus dem Geradenraum, so etwa der gegenüber der Bewegungsgruppe des euklidischen 3-Raumes invariante Begriff „Schraubparameter c “ ins KLEINSche Modell übertragen (Kapitel 2).

Im dritten Kapitel konstruieren wir auf der Grundlage der übertragenen Gruppenstrukturen für eine große Klasse von C^r -Geradenkongruenzen des Π_e^3 zu jeder Kongruenzgeraden ein *Begleitsimplex* in Π^5 , wobei $r \geq 1$ genügt. Die Kongruenzen dieser Klasse, zusammen mit dem System von Begleitsimplices werden im Folgenden *S-normiert* genannt. Des Weiteren werden Möglichkeiten der Auszeichnung von *Einheitspunkten* auf den Simplexkanten diskutiert.

Durch die Polarsysteme von M_4^2 und N_4^2 sind zwei wesentliche quadratische Differentialformen ausgezeichnet, die im zu $\Pi(\mathbb{R}^6)$ zugehörigen sechsdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^6 „kanonische“ Produktbildungen erlauben. Mit ihrer Hilfe werden im vierten Kapitel unter Verwendung eines Differentialformenkalküls *Ableitungsgleichungen* für *S-normierte* C^r -Geradenkongruenzen konstruiert. Geeignete „Drehungen“ des Simplex gestatten die Frage nach Invarianten einer C^r -Kongruenz. In diesem Zusammenhang kennzeichnen wir mögliche „*Flächenelemente*“ für *S-normierte* C^r -Geradenkongruenzen.

Die Theorie der *CAYLEY-KLEIN Räume* entwickelt O. GIERING in [GIE]. Das Hyperquadrikenbüschel $\{V_4^2(c)\}$ gestattet bestimmte Bildungen von *Absolutfiguren* im Π^5 . Unter Verwendung dieser Absolutfiguren lassen sich für *S-normierte* C^r -Kongruenzen differentialgeometrische Begriffe bilden. Im fünften Kapitel erzeugen wir derart *erste* und *zweite Grundformen*, *WEINGARTEN-Abbildungen* sowie *Normalkrümmungen* für *S-normierte* C^r -Kongruenzen bezüglich der Absolutfiguren.

Letztere gestatten gegenüber dem Büschel $\{V_4^2(c)\}$ ausgezeichnete *Krümmungsbegriffe* für die „*mittlere Krümmung*“ und „*GAUSSsche Krümmung*“. Dabei erlaubt die eher komplizierte Struktur des maßgebenden Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(c)\}$ mehrere Begriffsbildungen, die durch möglichst geometrische Überlegungen begründet werden.

Als *kleinste Kongruenzen* („*Minimalkongruenzen*“) bezeichnen wir in Anlehnung an die klassische Flächentheorie schließlich jene Kongruenzen, die sich durch verschwindende mittlere Krümmung auszeichnen.

Von den Ergebnissen in der vorliegenden Arbeit sind genannt:

- Es wird für eine große Klasse von C^r -Geradenkongruenzen des dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raumes Π_e^3 , die im Folgenden *S-normiert* genannt sind, im KLEINSchen Modell (also für eine 2-Fläche in der KLEINSchen Hyperquadrik) mit jedem Punkt ein nur von 1. Differentiationsordnung abhängiger Begleitsimplex verknüpft. Des Weiteren werden Möglichkeiten der Auszeichnung von *Einheitspunkten* auf den Simplexkanten diskutiert.

*) Wir verwenden im Weiteren $c \in \mathbb{R} \cup \infty$ als Büschelparameter in $\{V_4^2(c)\}$.

- Es werden mit Hilfe eines Differentialformenkalküls Ableitungsgleichungen für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen gegeben^{*)} sowie Integrabilitätsbedingungen ausgearbeitet. Dabei genügt $r \geq 3$.
- Es werden für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen Invarianten bezüglich der KLEINSchen Transformierten $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$ der Bewegungsgruppe konstruiert, die sich aus den Ableitungsgleichungen unter einer geeigneten projektiven „Drehung“ des Begleit-simplex ergeben. In diesem Zusammenhang kennzeichnen wir mögliche „Flächenelemente“ für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen. Ihre Verknüpfungen gestatten die Deutung einer Reihe von differentialgeometrischen Eigenschaften einer S -normierten C^r -Kongruenz im KLEINSchen Modell.
- Durch Anwenden CAYLEY- KLEINScher Maßbestimmungen im (erweiterten) KLEINSchen Bild geben wir für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen des Π_e^3 erste (flächentheoretische) Grundformen an, die auf M_4^2 eine gewisse projektive Büschelmetrik induzieren. Diese sind „bewegungsgeometrische“ Begriffsbildungen. Die aus den *Fundamentalgrößen erster Ordnung* gebildeten Matrizen gestatten die Kennzeichnung von geometrischen Begriffsbildungen für „Flächenelemente“.
- Wir konstruieren für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen des Π_e^3 im KLEINSchen Bild *GAUSSsche Ableitungsgleichungen* gegenüber dem maßgebenden Büschel $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$ ^{**)} und geben dafür die *CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art* Γ_{jk}^α an.
- Für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen des Π_e^3 geben wir im KLEINSchen Bild gegenüber gewissen Absolutfiguren einen sinnvollen Orthogonalitätsbegriff an, der sich in Π_e^3 ähnlichkeitsgeometrisch deuten lässt. Daneben erklären wir den Begriff einer *Tangentialprojektion*.
- Gegenüber einer ausgezeichneten Flächennormale geben wir bezüglich $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$ zweite (flächentheoretische) Grundformen für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen des Π_e^3 im KLEINSchen Bild an. Diese sind „bewegungsgeometrische“ Begriffsbildungen und gestatten die Auszeichnung von *Schmiegrichtungen*, die mit den bereits projektiv-geometrisch ausgezeichneten torsalen Richtungen in der Kongruenz übereinstimmen.
- Unter Verwendung der nur zum Teil vom Büschelparameter \mathcal{E} von $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$ unabhängigen ersten und zweiten Grundformen konstruieren wir *WEINGARTEN-Abbildungen* sowie Krümmungsbegriffe für S -normierte C^r -Kongruenzen des Π_e^3 im KLEINSchen Bild. Bezüglich konstruierter *mittlerer Krümmungsmaße* ${}^{(\mathcal{E})}H$ bzw. ${}^{(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})}H$ mit beliebigen $\mathcal{E} \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}$ lassen sich *torsale*- und *Normalkongruenzen* als C^r -Kongruenzen mit verschwindendem ${}^{(\mathcal{E})}H = 0$ bzw. ${}^{(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})}H = 0$ kennzeichnen.

*) vgl. [SOR]

***) Es erweist sich an dieser Stelle als günstig, anstelle c den Parameter \mathcal{E} mit $\mathcal{E} = -1/c$ zu verwenden.

D Vereinbarungen

Abbildungen werden durch alle Kapitel fortlaufend nummeriert. Dagegen werden Definition, Sätze, Bemerkungen, Beispiele und Anmerkungen in jedem Kapitel neu beginnend gezählt. Sofern es notwendig erscheint, wird bei Bezugnahmen auf vorausgehende Überlegungen beispielsweise neben dem Verweis auf eine Satznummer auch das Kapitel angegeben. Bemerkenswerte Formeln, Gleichungen und Ergebnisse sind fortlaufend nummeriert. Dabei gibt die erste Ziffer das Kapitel an.

Eine Gerade des dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen Raumes Π^3 lässt sich durch ein geordnetes homogenes Koordinatensechstupel

$$(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})\mathbb{R} =: (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)\mathbb{R}$$

beschreiben. Es heißt *PLÜCKER-Koordinatensechstupel*. Die in den Arbeiten von H. BRAUNER [BRA2], G. WEISS [WEI3] und O. GIERING [GIE] angeregte partitionierte Schreibweise werden wir im Folgenden verwenden und schreiben das Koordinatensechstupel zusammengefasst zu einem ersten und zweiten PLÜCKER-Koordinatentripel Fraktur in der Form $(p, \bar{p})\mathbb{R}$. Des Weiteren bezeichnen die Zeiger j, k, l, \dots natürliche Zahlen.

1 Voraussetzungen und Grundlagen

In diesem Abschnitt werden Grundlagen aus der projektiven Geometrie und Liniengeometrie, dort insbesondere aus der Theorie der Geradenkongruenzen bereitgestellt, soweit sie in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Wir folgen dabei im Wesentlichen den Darstellungen in [Wei1].

1.1 Grundlagen für die Betrachtungen im Linienraum

Wir starten im reellen projektiven dreidimensionalen Raum Π^3 , seinem arithmetischen Modell $\Pi(\mathbb{R}^4)$ und seinen Unterräumen $u\Pi^3$. Mit $\{P\}$ sei darin die Menge einpunktiger Unterräume, mit \mathfrak{P}_g Geraden als Menge kollinearere Punkte und mit \mathfrak{P}_E Ebenen als Menge koplanarer Punkte bezeichnet.

Verwenden wir in $\Pi(\mathbb{R}^4)$ die kanonische Basis $\{P_j : j = 0, \dots, 3\}$ mit $P_j = \mathbb{R}(\delta_{j0}, \delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3})$ als Koordinatenbasis, so berechnet sich etwa die Ebene $\pi_0 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ der Seitenfläche des Koordinatentetraeders zu $x_0 = 0$. Wird diese als Kopunkt P_0^* im zu Π^3 dualen projektiven Raum Π^{3*} aufgefasst, so liefern P_k^* darin die zu $\{P_j : j = 0, \dots, 3\}$ adjungierte Basis $\{P_k^* : k = 0, \dots, 3\}$.

Jeder Punkt P schreibt sich in diesem Koordinatensystem $P = \mathbb{R}(p_0, p)$ mit $p_0 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^3$ und $(p_0, p) \neq (0, O)$. Eine Ebene Q^* wird dargestellt durch $Q^* = (q_0, q)\mathbb{R}$, wobei $q_0 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}^3$ sowie $(q_0, q) \neq (0, O)$ gelten. Für die Inzidenz von Punkt und Ebene ergibt sich die kanonische Bilinearform in \mathbb{R}^4 . Es gilt:

$$P \text{ inzidiert mit } Q^*, \text{ kurz: } P \perp Q^* \leftrightarrow p_0 \cdot q_0^* + p \circ q = 0.$$

Eine bijektive Abbildung $\kappa: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P} \subset \Pi(\mathbb{R}^4)$, welche (nicht) kollineare Punkte in (nicht) kollineare Punkte überführt, heißt *Kollineation* und wird durch proportionale (4×4) -Matrizen koordinatisiert. Eine Kollineation $\delta^*: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}^*$ bzw. $\delta: \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}$ in den Dualraum nennt man *korrelative Abbildung*, im regulären Fall *Korrelation*.

Liegt ein Punkt P in der zum Punkt Q gehörenden Ebene Q^{δ^*} , kurz $P \in Q^{\delta^*}$, so heißt er in *konjugierter Lage* zum Punkt Q bezüglich δ^* . Liegt P in der ihm durch δ^* zugeordneten Ebene P^{δ^*} , d.h. gilt $P \in P^{\delta^*}$, so heißt P *selbstkonjugiert* bezüglich δ^* . Wir betrachten infolge Abbildungen δ bzw. δ^* , bei denen die konjugierte Lage eine symmetrische Relation ist. Diese nennt man *Polaritäten*. Es können hierbei zwei Arten unterschieden werden:

- (1) $\forall P \in \Pi^3$ gilt: $P \in P^{\delta^*}$; diese Polaritäten heißen *Nullpolaritäten*.
- (2) Es existiert mindestens ein Punkt Q , für den nicht gilt: $Q \in Q^{\delta^*}$; diese Polaritäten werden analog *Nichtnullpolaritäten* genannt.

Bemerkung 1:

Bekanntlich wird eine Nullpolarität γ bzw. γ^* durch die Äquivalenzklasse proportionaler, schiefsymmetrischer, (nichttrivialer) reeller (4×4) -Matrizen der folgenden Bauart beschrieben:

$$\mathcal{S}_4(\gamma)\mathbb{R} := \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathcal{S}_4(\gamma^*)\mathbb{R} := (q_{jk}^*)\mathbb{R} \text{ mit } (q_{jk}^* = -q_{kj}^*),$$

wogegen sich eine Nichtnullpolarität γ bzw. γ^* durch die Äquivalenzklasse einander proportionaler symmetrischer (4×4) -Matrizen $T_4(\gamma)$ bzw. $T_4(\gamma^*)$ beschreiben lässt.

Die Determinante der zu einer Nullpolarität γ gehörenden Matrix $\mathcal{S}_4(\gamma)$ berechnet sich zu $\det(\mathcal{S}_4(\gamma)) = (q_{01}q_{23} + q_{02}q_{31} + q_{03}q_{12})^2$. Genau für die (nichttrivial) *singulären* Nullpolaritäten verschwindet dieser und es gilt:

$$q_{01}q_{23} + q_{02}q_{31} + q_{03}q_{12} = 0. \quad (1.1)$$

Damit beschreibt (1.1) eine quadratische Hypervarietät in $\Pi(\mathbb{R}^6)$, deren sämtliche Punkte als Bilder singulärer Nullpolaritäten aufzufassen sind. Wir betrachten infolge die Mengen aller Nullpolaritäten $\gamma^* : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}^*$ bzw. $\gamma : \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}$ und zeichnen gewisse Paare aus.

Definition 1:

(γ, γ^*) heißt ein *Gewinde*, genau dann wenn $\gamma\gamma^* = id_{\mathfrak{P}^*}$ bzw. $\gamma^*\gamma = id_{\mathfrak{P}}$.

(γ, γ^*) heißt ein *Gebüsch*, genau dann wenn $\ker \gamma^* = \text{im } \gamma$.

Bemerkung 2:

Sind zwei Nullpolaritäten γ, γ^* adjungiert und regulär, so gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{01}^* & q_{02}^* & q_{03}^* \\ -q_{01}^* & 0 & q_{12}^* & -q_{31}^* \\ -q_{02}^* & -q_{12}^* & 0 & q_{23}^* \\ -q_{03}^* & q_{31}^* & -q_{23}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = id_{\mathfrak{P}^*}$$

und somit:

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \mathbb{R} = \frac{1}{\det(\dots)} \begin{pmatrix} 0 & q_{01}^* & q_{02}^* & q_{03}^* \\ -q_{01}^* & 0 & q_{12}^* & -q_{31}^* \\ -q_{02}^* & -q_{12}^* & 0 & q_{23}^* \\ -q_{03}^* & q_{31}^* & -q_{23}^* & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Zwei nichttriviale singuläre*) Nullpolaritäten γ , γ^* heißen adjungiert, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{01}^* & q_{02}^* & q_{03}^* \\ -q_{01}^* & 0 & q_{12}^* & -q_{31}^* \\ -q_{02}^* & -q_{12}^* & 0 & q_{23}^* \\ -q_{03}^* & q_{31}^* & -q_{23}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen ergibt sich folgende Relation in den Matrixkomponenten:

$$q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{23} : q_{31} : q_{12} = q_{23}^* : q_{31}^* : q_{12}^* : q_{01}^* : q_{02}^* : q_{03}^* \quad (1.2)$$

Aus obiger Konstruktion ist erkennbar, dass Gewinde gerade die Paare regulärer adjungierter Nullpolaritäten, während Gebüsche die Paare singulärer adjungierter Nullpolaritäten sind. Gewinde und Gebüsche sind bereits durch einen Vertreter der sie festlegenden Paare bestimmt.

Für eine singuläre Nullpolarität γ gilt: $\text{Rg}(S_4(\gamma)) = 2$; $\text{im}(\gamma)$ bzw. $\text{ker}(\gamma)$ beschreiben die Achse g_γ des zu γ gehörenden Gebüsches als Punktreihe bzw. Ebenenbüschel. Man erhält auf diese Weise eine Bijektion der Geradenmenge des Π^3 auf die Menge aller Gebüsche bzw. auf die Menge singulärer Nullpolaritäten bzw. auf die Menge der Punkte der durch Gleichung (1.1) beschriebenen Hypervarietät.

Die Komponenten q_{jk}^* der zur singulären Nullpolarität γ^* gehörenden Matrix $S_4(\gamma^*)$ sind durch zwei beliebige verschiedene Ausnahmepunkte X und Y von γ^* bis auf einen nicht verschwindenden Faktor eindeutig bestimmt. Sie ergeben sich aus den sechs wesentlich zu unterscheidenden Unterdeterminanten der aus den Koordinatentupeln beider Ausnahmepunkte von γ^* gebildeten zweireihigen Matrix. Genauer gelten mit (1.2):

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \text{ sowie } q_{jk} = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix}; \quad j, k = 0, \dots, 3.$$

Wir erklären nun für Nullpolaritäten γ_1 , γ_2 eine Linearkombination wie folgt:

$$\alpha \gamma_1 + \beta \gamma_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jeder festen Ebene werden dabei die Punkte einer Punktreihe, aufgespannt durch $\alpha \gamma_1$ und $\beta \gamma_2$, zugeordnet. Analog lässt sich durch

$$\alpha \gamma_1^* + \beta \gamma_2^*, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

einem Punkt ein Ebenenbüschel zuordnen, welches durch $\alpha \gamma_1^*$ und $\beta \gamma_2^*$ aufgespannt wird. Es erscheint nunmehr möglich und sinnvoll, $\{\gamma\}$ bzw. $\{\gamma^*\}$ als Punktmengen und die bildbaren Linearkombinationen als Geraden eines projektiven fünfdimensionalen Raumes aufzufassen. Gerade die singulären Nullpolaritäten bilden dort die durch (1.1) beschriebene, im Folgenden mit M_4^2 bezeichnete quadratische Hypervarietät.

*) im Folgenden kurz „singulär“ genannt

Definition 2:

Das Paar (Γ, Γ^*) der beiden Abbildungen $\Gamma: \{\gamma\} \rightarrow \mathfrak{P} \subset \Pi^5$ und $\Gamma^*: \{\gamma^*\} \rightarrow \mathfrak{P}^* \subset \Pi^5$ mit $(S_4(\gamma)\mathbb{R})\Gamma = (q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{23}, q_{31}, q_{12})\mathbb{R}$ und $(S_4(\gamma^*)\mathbb{R})\Gamma^* = \mathbb{R}(q_{01}^*, q_{02}^*, q_{03}^*, q_{23}^*, q_{31}^*, q_{12}^*)$ heißt *erweiterte KLEINSche Abbildung*.

Bemerkung 3:

Die Koordinatentupel $(q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{23}, q_{31}, q_{12})\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}(q_{01}^*, q_{02}^*, q_{03}^*, q_{23}^*, q_{31}^*, q_{12}^*)$ werden *PLÜCKERSche Linien-* bzw. *Achsenkoordinaten* genannt. In dieser Arbeit sollen diese der Verständlichkeit und Übersichtlichkeit zu Koordinatentripelpaaren $(q, \bar{q})\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}(p^*, \bar{p}^*)$ zusammengefasst werden; eine Schreibweise, die u. a. durch H. BRAUNER angeregt wurde.

Die Identifikationen von $\{\gamma\}\Gamma$ als Punktmenge \mathfrak{P} und von $\{\gamma^*\}\Gamma$ als Hyperebenenmenge \mathfrak{P}^* des Raumes Π^5 erlauben die Verwendung der natürlichen Inzidenzrelation in Π^5 zur Beschreibung des Polarsystems μ der M_4^2 . Inzidieren in Π^5 ein Punkt $(q, \bar{q})\mathbb{R}$ und eine Hyperebene $\mathbb{R}(p^*, \bar{p}^*)$, so verschwindet die in ihren Koordinaten gebildete kanonische Bilinearform des \mathbb{R}^6 zu $qp^* + \bar{q}\bar{p}^* = 0$. Speziell für die KLEINSchen Bilder der Paare adjungierter singulärer Nullpolaritäten gilt wegen (1.1) und (1.2):

$$qp^* + \bar{q}\bar{p}^* = q\bar{q} + \bar{q}q = 2q\bar{q} = 2q^*\bar{q}^* = 0. \quad (1.3)$$

Diese Identitäten (1.3) beschreiben die Punkt- bzw. Hyperebenenmenge von M_4^2 , die im Folgenden *KLEINSche Hyperquadratik* genannt wird. Die Identitäten (1.3) heißen *PLÜCKER-Identitäten*.

1.2 Die Gruppe $PGL(\Pi^3)$ und ihre Untergruppen unter der KLEINSchen Abbildung

In diesem Abschnitt werden wir ausgehend von der reellen projektiven Gruppe $PGL(\Pi^3)$ deren Untergruppen studieren und untersuchen, welche Transformationen durch sie in der Menge der Nullpolaritäten einerseits und vermöge der erweiterten KLEINSchen Abbildung in Π^5 andererseits induziert werden. Ausführliche Darstellungen hierzu findet man in [WEI3].

1.2.1 Kollineationen und Korrelationen der Gruppe $PGL(\Pi^3)$

Betrachten wir eine Kollineation $\kappa \in PGL(\Pi^3)$ mit $\kappa: \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P} \subset \Pi^3$. Wie im vorangehenden Abschnitt bereits erwähnt, lässt sich κ durch eine Äquivalenzklasse proportionaler (4×4) -Matrizen beschreiben. Aus der Definition und ihren Eigenschaften folgt, dass (kollineare) Punkte wieder in (kollineare) Punkte und Ebenen wieder in Ebenen abgebildet werden. In der Menge $\{\gamma\}$ bzw. $\{\gamma^*\}$ der Nullpolaritäten werden dadurch Abbildungen $\hat{\kappa}$ und $\hat{\kappa}^*$ induziert, welche singuläre (reguläre) Nullpolaritäten wieder in singuläre (reguläre) Nullpolaritäten abbilden und weiter Inzidenzen, Nichtinzidenzen sowie Linearkombinationen erhalten. Vermöge der KLEINSchen Abbildung werden hierbei Kollineationen $\tilde{\kappa} = \Gamma^{-1}\hat{\kappa}\Gamma$ und $\tilde{\kappa}^* = \Gamma^{*-1}\hat{\kappa}^*\Gamma^*$ in Π^5 erzeugt, welche M_4^2 fest lassen.

Umgekehrt wird durch jede Kollineation $\tilde{\kappa}$ in Π^5 , die M_4^2 fest lässt, eine Bijektion κ im Unterraumverband von Π^3 erzeugt, da $\tilde{\kappa}$ strukturverträglich auf M_4^2 operiert. Dabei werden in Π^3 Punkte wieder in Punkte, Ebenen wieder in Ebenen übergeführt und Inzidenzen und Nichtinzidenzen erhalten, d. h. auch κ operiert strukturverträglich in Π^3 , ist also eine Kollineation.

Ebenso induziert eine Korrelation $\delta \in {}_ePGL(\Pi^3)$ eine Korrelation $\tilde{\delta} \in {}_ePGL(\Pi^5)$, die jedem Punkt der M_4^2 eine (Tangential-)Hyperebene von M_4^2 zuordnet und umgekehrt. Dabei kann $\tilde{\delta}$ wegen (1.2) stets als Produkt einer Kollineation $\tilde{\kappa}$ und der Polarität μ von M_4^2 geschrieben werden. Somit gilt, dass $PGL(\Pi^3)$ bzw. ${}_ePGL(\Pi^3)$ im Raum der Nullpolaritäten eine Gruppe erzeugt, die vermittelt durch die KLEINSche Abbildung isomorph zu $PGL(\Pi^5, M_4^2)$ bzw. ${}_ePGL(\Pi^5, M_4^2)$ ist. Es gilt $PGL(\Pi^3) \cong PGL(\Pi^5, M_4^2)$ bzw. ${}_ePGL(\Pi^3) \cong {}_ePGL(\Pi^5, M_4^2)$.

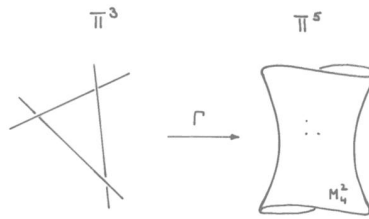


Abb. 1: Übertragung der projektiven Gruppe ins KLEINSche Modell

1.2.2 Affinitäten

Wir zeichnen nun in Π^3 eine Ebene ω als „Fernebene“ aus und betrachten infolge Kollineationen, welche ω festlassen. Damit erklären wir einen projektiv abgeschlossenen affinen Raum Π_a^3 und schränken die projektive Gruppe auf die Untergruppe $PGL(\Pi^3, \omega)$ der ω fixierenden Kollineationen, also die Affinitäten ein. In der Menge der Nullpolaritäten zeichnet man auf diese Weise diejenigen Nullpolaritäten aus, für welche $\text{im } \gamma \in \omega$ gilt. Setzt man $\omega = (1, O)\mathbb{R}$, so folgt für eine allgemeine Ebene $Q^* = (q_0, q)\mathbb{R}$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^3$ mit

$$(1, O) \begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix} = 0$$

die Kennzeichnung der hierdurch ausgezeichneten Nullpolaritäten γ zu: $q_{01} = q_{02} = q_{03} = 0$. Diese Teilmenge besteht demnach aus singulären Nullpolaritäten und bildet einen zweidimensionalen Raum \mathfrak{S}_ω . Jede Affinität $\kappa \in PGL(\Pi^3, \omega)$ erzeugt somit Abbildungen $\hat{\kappa}$ und $\hat{\kappa}^*$ in der Menge der Nullpolaritäten, welche \mathfrak{S}_ω festlassen. Vermöge der KLEINSchen Abbildung sind hierdurch Kollineationen $\tilde{\kappa}$ und $\tilde{\kappa}^*$ in Π^5 bestimmt, die auf M_4^2 zusätzlich einen gewissen zweidimensionalen Raum P_ω^2 mit $P_\omega^2 = \{\gamma\Gamma = (q, \bar{q})\mathbb{R} \in \Pi^5 : q = O, \bar{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}\}$ festlassen. Er ist das KLEINSche Bild des Ferngeradenfeldes und wird im Folgenden *Fernunterraum* genannt. Es gilt $PGL(\Pi^3, \omega) \cong PGL(\Pi^5, M_4^2, P_\omega^2)$.

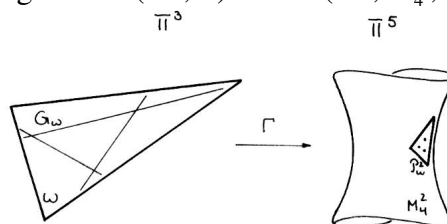


Abb. 2: Übertragung der affinen Gruppe ins KLEINSche Modell

1.2.3 Ähnlichkeiten

Wir versehen den projektiv abgeschlossenen affinen Raum zusätzlich mit einer Orthogonalitätsstruktur. Dazu geben wir eine singuläre Polarität $\delta: \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}$ vor, die jede eigentliche Ebene von Π_a^3 auf den Fernpunkt ihrer orthogonalen Richtung abbildet. Sie besitzt in ω eine elliptische Spurpolarität $\delta^\perp: \mathfrak{G}_\omega \rightarrow \mathfrak{P}_\omega$. Diese Spurpolarität δ^\perp wird üblicherweise „absolute Polarität“ des mit Π_e^3 bezeichneten projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum genannt. Die Gruppe wird dabei zur euklidischen Ähnlichkeitsgruppe $PGL(\Pi^3, \omega, \delta^\perp)$ spezifiziert.

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass δ^\perp in der komplexen Erweiterung $\Pi^3(\mathbb{C})$ von $\Pi^3(\mathbb{R})$ das Polarsystem eines „absoluten Kegelschnittes“ c^\perp als Menge der bezüglich δ^\perp selbstkonjugierten Punkte beschreibt (über \mathbb{R} ist dieser Kegelschnitt „nullteilig“, also leer). Es erleichtert die Formulierungen, wenn man die (stets reellen) Polaritäten auch als Polaritäten gegebenfalls nullteiliger Quadriken auffasst. Zum besseren Verständnis werden die folgenden Aussagen über \mathbb{C} getroffen. Die KLEINSche Abbildung wird aus diesem Grunde komplex erweitert. Wir gehen analog dem vorangehenden Abschnitt vor und kennzeichnen in der Menge der Nullpolaritäten diejenigen, für welche $\omega \gamma \in c^\perp$ gilt.

Vermöge $\delta: \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}$ mit $\alpha \in \mathfrak{P}^* \mapsto A_\alpha \in \omega$ und $\alpha \perp XA_\alpha$ wird δ^\perp in ω durch die Einheitsmatrix koordinatisiert. Es folgt mit obigen Bezeichnungen:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ -q_{01} & 0 & q_{12} & -q_{31} \\ -q_{02} & -q_{12} & 0 & q_{23} \\ -q_{03} & q_{31} & -q_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 = 0 \text{ bzw. } q^2 = 0. \tag{1.4}$$

Bezeichnet man die Menge der KLEINSchen Bilder aller (1.4) erfüllenden Nullpolaritäten mit $N_4^2 = \{(q, \bar{q}) \in \Pi^5 : q^2 = 0\}$, so gilt $PGL(\Pi^3, \omega, \delta^\perp) \cong PGL(\Pi^5, M_4^2, P_\omega^2, N_4^2)$.

N_4^2 stellt in Π^5 einen (über \mathbb{R} nullteiligen) quadratischen Hyperkegel mit dem zweidimensionalen reellen Spitzenraum $P_\omega^2 \subset M_4^2$ dar. M_4^2 und N_4^2 spannen zusammen ein Büschel $[M_4^2, N_4^2]$ von Hyperquadriken auf, in welchem N_4^2 die einzige singuläre Hyperquadrik ist.

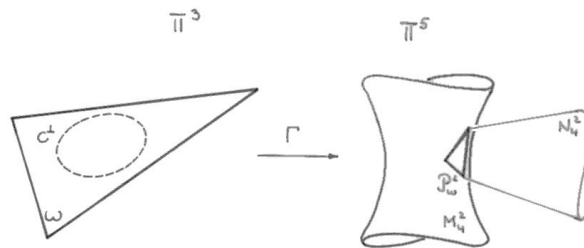


Abb. 3: Übertragung der Ähnlichkeitsgruppe ins KLEINSche Modell

1.2.4 Bewegungen

Von besonderem Interesse ist für uns die KLEINSche Transformierte der euklidischen Bewegungsgruppe. Hierfür sei in Π_e^3 weiter eine Längenmessung d eingeführt und die Untergruppe $PGL(\Pi^3, \omega, \delta^\perp, c)$ betrachtet. Eine Abbildung $\kappa \in PGL(\Pi^3, \omega, \delta^\perp, c)$ heißt *Bewegung*. Die Größe c bezeichnet darin den Parameter der zu einem Gewinde gehörenden Schraubung, der *Schraubparameter* (*Gewindeparameter*) heißt.

In PLÜCKER-Koordinaten berechnet sich der Gewindeparameter c_γ eines Gewindes (γ, γ^*) mit $\gamma\Gamma = (q, \bar{q})\mathbb{R}$ nach

$$c_\gamma = \frac{q\bar{q}}{q^2} \quad *) \quad (1.5)$$

$$=: \frac{(Q, Q)_\mu}{2(Q, Q)_\nu}, \quad **) \quad (1.6)$$

woraus die Gleichung $0 = q\bar{q} - cq^2$ einer Hyperquadrik $V_4^2(c)$ des Büschels $[M_4^2, N_4^2]$ folgt. Damit stellt $V_4^2(c) \setminus P_\omega^2$ die KLEINSche Bildpunktmenge aller Gewinde dar, die denselben Gewindeparameter c besitzen. Speziell ergeben sich die Zuordnungen $c=0 \mapsto M_4^2$ und $c=\infty \mapsto N_4^2$. Hieraus ist erkennbar, dass die euklidische Bewegungsgruppe Kollineationen in Π^5 erzeugt, welche jede Hyperquadrik $V_4^2(c)$ des Büschels $[M_4^2, N_4^2]$, gebildet durch $\{(\gamma, \gamma^*)\Gamma : c_\gamma = c_0 \text{ fest}\}$, fest lassen. Die erzeugte Gruppe ist eine Untergruppe von $PGL(\Pi^5, M_4^2)$ und es gilt:

$$PGL(\Pi^3, \omega, \delta^\perp, c) \cong PGL(\Pi^5, M_4^2, P_\omega^2, N_4^2, V_4^2(c)) \text{ bzw. } PGL(\Pi^5, V_4^2(c)).$$

*) vgl. [BRA2]

**) Die Schreibweise orientiert sich daran, dass die zu den Polarsystemen von M_4^2 und N_4^2 gehörenden Bilinearformen im zu $\Pi(\mathbb{R}^6)$ gehörenden sechsdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^6 innere Produkte erklären (siehe auch Einleitungskapitel).

2 Zur differentialgeometrischen Behandlung der Geradenkongruenzen

2.1 Geradenmannigfaltigkeiten im KLEINSchen Modell

Die Menge \mathfrak{G} aller Geraden des dreidimensionalen *projektiven* Raumes Π^3 ist vierparametrig und erlaubt vermöge der KLEINSchen Abbildung eine Deutung als eine vierdimensionale Hyperquadrik M_4^2 , eingebettet in einen fünfdimensionalen projektiven Raum Π^5 . In \mathfrak{G} lassen sich gewisse Teilmengen auszeichnen, die unter dem Modellwechsel wie folgt beschrieben werden können.

- a) Eine einparametrig Geradenmenge $\{g(t) \subset \mathfrak{G} : t \in I\}$, deren KLEINSches Bild $g(I)\Gamma =: P(I)$ eine Kurve auf M_4^2 ist, heißt *Regelfläche*.

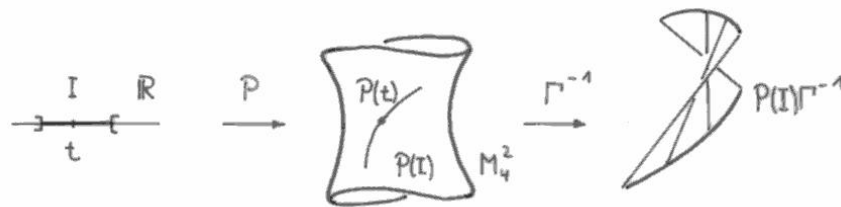


Abb. 4: Regelfläche

- b) Eine zweiparametrig Geradenmenge $\{g(u) \subset \mathfrak{G} : u = (u^1, u^2) \in U\}$, deren KLEINSches Bild $g(U)\Gamma =: P(U)$ eine 2-Fläche auf M_4^2 ist, heißt *Geradenkongruenz*.

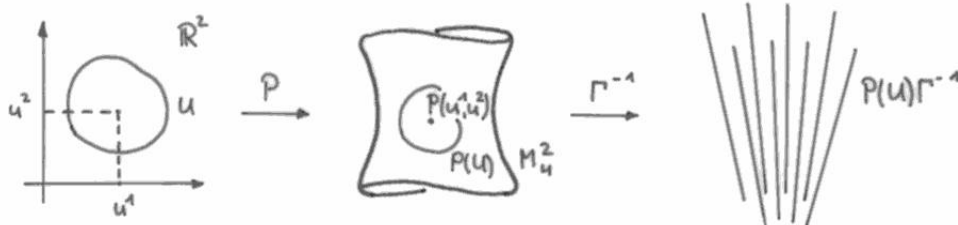


Abb. 5: Geradenkongruenz

Gilt $P(I) \subset P(U)$, so nennen wir die Regelfläche eine *Regelfläche der Kongruenz* (kurz: *Kongruenzregelfläche*).

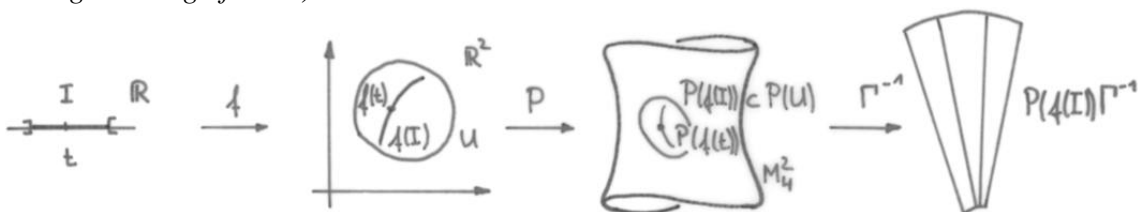


Abb. 6: Kongruenzregelfläche

- c) Eine dreiparametrig Geradenmenge $\{g(w) \subset \mathfrak{G} : w = (w^1, w^2, w^3) \in W\}$, deren KLEINSches Bild ein dreidimensionaler Raum $g(W)\Gamma =: P(W)$ auf M_4^2 ist, heißt *Geradenkomplex*.

Bemerkung 1:

Der Begriff „2-Fläche“ (analog „Kurve“ und „ m -Fläche“ in Π^n) wird im fünfdimensionalen projektiven Raum Π^5 betrachtet. Er ist an eine Abbildung $P:U \rightarrow \Pi^5$ mit $u_0 \in U \mapsto P(u_0)$ gebunden, welche aus einer C^r -Abbildung $p:U \rightarrow \mathbb{R}^6$ und anschließender Äquivalenzklassenbildung ($r:\mathbb{R}^6 \rightarrow u^1\mathbb{R}^6$) entsteht. Gilt $\text{Rg}(p(u))=1$ überall in U , so heißt $P(U) \subset \Pi^5$ eine 2-Fläche oder kurz Fläche in Π^5 .

Dies gibt Anlass zu folgender

Definition 1:

- a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ mit $t \in I$ ein offenes Intervall und $p:I \rightarrow \mathbb{R}^6$ mit $t \mapsto p(t) = (p(t), \bar{p}(t))$ und $(p(t), \bar{p}(t)) \neq (O, O) \quad \forall t \in I$ eine C^r -Abbildung, für welche gilt: $p(t)\bar{p}(t) = 0$. Dann heißt die Abbildung $P:I \rightarrow \Pi^5$ mit $t_0 \in I \mapsto P(t_0) = (p(t_0), \bar{p}(t_0))\mathbb{R}$ eine C^r -Regelfläche.
- b) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $u = (u^1, u^2) \in U$ ein offenes Intervall und $p:U \rightarrow \mathbb{R}^6$ mit $u \mapsto p(u) = (p(u), \bar{p}(u))$ sowie $(p(u), \bar{p}(u)) \neq (O, O) \quad \forall u \in U$ eine C^r -Abbildung, für welche gilt: $p(u)\bar{p}(u) = 0$. Dann heißt die Abbildung $P:U \rightarrow \Pi^5$ mit $u_0 \in U \mapsto P(u_0) = (p(u_0), \bar{p}(u_0))\mathbb{R}$ eine C^r -Geradenkongruenz (C^r -Kongruenz).
- c) Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ mit $w = (w^1, w^2, w^3) \in W$ ein offenes Intervall und $p:W \rightarrow \mathbb{R}^6$ mit $w \mapsto p(w) = (p(w), \bar{p}(w))$ sowie $(p(w), \bar{p}(w)) \neq (O, O) \quad \forall w \in W$ eine C^r -Abbildung, für welche gilt: $p(w)\bar{p}(w) = 0$. Dann heißt die Abbildung $P:W \rightarrow \Pi^5$ mit $w_0 \in W \mapsto P(w_0) = (p(w_0), \bar{p}(w_0))\mathbb{R}$ ein C^r -Geradenkomplex.

2.2 Die Umgebung 1. Ordnung einer C^r -Kongruenz

Im Folgenden unterziehen wir speziell C^r -Geradenkongruenzen aus Π^3 differentialgeometrischen Fragestellungen. Ziel ist es, einen Überblick über die Eigenschaften erster Differentiationsordnung einer Geradenkongruenz zu erhalten. Ausführliche Darstellungen hierzu findet man in [FIN] und [HOS], welche KUMMERS Kalkül verwenden.

Nachfolgend soll eine Untersuchung der Geradenkongruenzen des dreidimensionalen Raumes erfolgen, die auf der KLEINSchen Auffassung des Geradenraumes aufbaut. Ausführliche Betrachtungen auf der Grundlage des KLEINSchen Übertragungsprinzips*) findet man hierzu in [WEI3]. Man lese auch vergleichend in [SOR] und [SCH].

Unter Nutzung dieses Modellwechsels werden wir die Differentialgeometrie der Geradenkongruenzen des Π^3 als Differentialgeometrie der zweidimensionalen 2-Flächen auf der KLEINSchen Hyperquadratik in Π^5 behandeln. Hierbei werden (*differential*-)geometrische Begriffe, welche eine C^r -Kongruenz kennzeichnen, vorgestellt.

*) vgl. [WEI1], S.10: „Das Kleinsche Übertragungsprinzip beschreibt historisch gesehen die Übertragung der (...) reichhaltigen Struktur eines projektiven Raumes auf die Menge der Nullpolaritäten (...).“

Bemerkung 2:

a) Die Begriffsbildung fordert die Invarianz von $P(U)$ gegenüber *zulässigen Umnormungen* σ . Darunter verstehen sich gewisse C^r -Abbildungen $\sigma:U \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$, für welche $\forall u \in U: \bar{p}(u) := \sigma(u) p(u)$ und $\bar{P}(u) = (\sigma(u) p(u))\mathbb{R} = (p(u))\mathbb{R} = P(u)$ gelten. $\bar{P}(U)$ und $P(U)$ beschreiben dieselben Flächen.

Daneben werden Flächen hauptsächlich als Punktmenge betrachtet, d.h. durch ihren Träger repräsentiert. Die Begriffsbildung darf deshalb nicht von *zulässigen Parameterwechseln* f abhängen, die durch bijektive C^r -Abbildungen $f:U' \rightarrow U$ mit $\partial u^k / \partial u'^j =: u_j^k$ und $u_1^1 u_2^2 - u_2^1 u_1^2 \neq 0$ (JACOBI-Determinante von f), also C^r -Diffeomorphismen beschrieben sind.

b) Nach F. KLEIN ist Geometrie die Invariantentheorie einer Gruppe. In dieser Hinsicht unterliegen die zu konstruierenden Begriffe der Forderung, invariant bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5)$ bzw. gegenüber Untergruppen dieser zu sein. Wir unterscheiden schließlich in folgender

Definition 2:

Ein *projektiv- (affin-, ähnlichkeits-, bewegungs-) geometrischer Begriff* beschreibt genau dann eine geometrische Eigenschaft der C^r -Kongruenz, wenn er invariant ist unter:

a) C^r -Diffeomorphismen

b) Umnormungen

c) Kollineationen κ mit

- projektivgeometrisch: $\kappa \in PGL(\Pi^5, M_4^2)$;
- affingeometrisch: $\kappa \in PGL(\Pi^5, M_4^2, P_\omega^2)$;
- ähnlichkeitsgeometrisch: $\kappa \in PGL(\Pi^5, M_4^2, N_4^2)$;
- bewegungsgeometrisch: $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$.

2.2.1 Projektivgeometrische Begriffe**Definition 3:**

Eine C^r -Geradenkongruenz heißt *regulär* an der Stelle $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$, wenn gilt: $\text{Rg}(P(u_0), P_{,1}(u_0), P_{,2}(u_0)) = 3$, andernfalls *singulär*. Eine C^r -Kongruenz heißt *regulär*, wenn $\text{Rg}(P(u), P_{,1}(u), P_{,2}(u)) = 3$ für alle $u \in U$ gilt.

Bemerkung 3:

Die Ausdrücke $P_{,j}$ mit $j=1,2$ stellen die „partiellen Ableitungen“ $\partial P / \partial u^j$ der Funktion $P = (p, \bar{p}):U \rightarrow \Pi^5$ dar. Dabei differenzieren wir zunächst $p = (p, \bar{p}):U \rightarrow \mathbb{R}^6 \setminus \{O\}$ und gelangen durch anschließende Faserung (wenn nicht anders vereinbart: Standardfaserung) zum „Differenzieren“ der Abbildung $P = (p, \bar{p}):U \rightarrow \Pi^5$. Analog lassen sich so „Ableitungspunkt“ und „Tangente“ erhalten.

Bekanntlich gilt

Satz 1 (vgl. [BRA2], [SOR], [WEI1]):

Regularität und Singularität sind projektive geometrische Begriffe der C^r -Kongruenz.

Zum Beweis ist die Invarianz der genannten Begriffe gemäß Definition 2 nachzuweisen und werde hier als Muster des Nachweises einer geometrischen Eigenschaft vorgeführt.

a) Sei $f : U' \rightarrow U$ ein C^r -Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$u^1 = u^1(u'^1, u'^2), u^2 = u^2(u'^1, u'^2) \text{ bzw. } u'^1 = u'^1(u^1, u^2), u'^2 = u'^2(u^1, u^2).$$

Somit folgt mit

$$a_{,j}^k := \frac{\partial u^k}{\partial u'^j} \quad (j, k = 1, 2) \text{ sowie}$$

$$(P \circ f)_{,1'} := \frac{\partial P}{\partial u'^1} = P_{,1} a_{,1}^1 + P_{,2} a_{,1}^2 \quad \text{und} \quad (P \circ f)_{,2'} := \frac{\partial P}{\partial u'^2} = P_{,1} a_{,2}^1 + P_{,2} a_{,2}^2$$

an einer beliebigen Stelle u_0 :

$$\text{Rg}(P(u_0), P_{,1}(u_0), P_{,2}(u_0)) = \text{Rg}((P \circ f)(u'_0), (P \circ f)_{,1'}(u'_0), (P \circ f)_{,2'}(u'_0)),$$

da sich der Rang einer Matrix unter elementaren Umformungen nicht ändert.

b) Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$ eine C^r -Abbildung. Dann gilt:

$$\bar{p}(u) = \sigma(u)p(u) \text{ sowie } \bar{P}_{,1} = \sigma_{,1} P + \sigma P_{,1} \text{ und } \bar{P}_{,2} = \sigma_{,2} P + \sigma P_{,2}.$$

Somit folgt an einer Stelle u_0 mit gleicher Begründung wie in (a):

$$\text{Rg}(P(u_0), P_{,1}(u_0), P_{,2}(u_0)) = \text{Rg}(\bar{P}(u_0), \bar{P}_{,1}(u_0), \bar{P}_{,2}(u_0)).$$

c) Sei $\kappa \in PGL(\Pi^5, M_4^2)$ eine Kollineation. Nach analogem Vorgehen folgt in \mathbb{R}^6 die Beziehung $(\kappa \circ p)_{,j} = \kappa \circ p_{,j}$, wonach sich mit $\text{Rg}(p, p_{,1}, p_{,2}) = \text{Rg}(P, P_{,1}, P_{,2})$ nunmehr ergibt:

$$\text{Rg}(P(u_0), P_{,1}(u_0), P_{,2}(u_0)) = \text{Rg}((P\kappa)(u_0), (P\kappa)_{,1}(u_0), (P\kappa)_{,2}(u_0)).$$

□

Bemerkung 4:

Aus Definition 3 ist zu entnehmen, dass Regularität und Singularität über den Rang einer Matrix erklärt sind. Da die Determinante $\det(P(u), P_{,1}(u), P_{,2}(u))$ dieser Matrix eine stetige Funktion ist, folgt aus der Regularität einer C^r -Kongruenz in $u_0 \in U$ die Regularität in einer Umgebung $U_0 \subset U$.

Anmerkung 1 (vgl. [BRA2]):

- a) Ist $P(u_0)\Gamma^{-1} =: P_0\Gamma^{-1}$ eine reguläre Kongruenzgerade, für welche also $\text{Rg}(P, P_{,1}, P_{,2}) = 3$ gilt und $\Phi = (\Gamma^{-1} \circ P \circ f)(I)$ eine Kongruenzregel­fläche durch $P_0\Gamma^{-1}$, wobei gilt: $f(I)$ ist in u_0 regulär, also $(\dot{u}^1, \dot{u}^2) \neq (0, 0)$, so ist $P_0\Gamma^{-1}$ eine reguläre Erzeugende der Kongruenzregel­fläche Φ .
- b) Ist $P(u_0)\Gamma^{-1} =: P_0\Gamma^{-1}$ eine singuläre Kongruenzgerade, für die also $\text{Rg}(P, P_{,1}, P_{,2}) < 3$ gilt und $\Phi = (\Gamma^{-1} \circ P \circ f)(I)$ eine Kongruenzregel­fläche durch $P_0\Gamma^{-1}$, so gilt: Ist $f(I)$ in u_0 regulär, so ist $P_0\Gamma^{-1}$ eine singuläre Erzeugende der Kongruenzregel­fläche Φ .
- c) Sei $P(U)$ eine reguläre C^r -Kongruenz, dann bestimmt P als C^r -Immersion eines Gebietes U der (u^1, u^2) -Ebene in $M_4^2 \subset \Pi^5$ ein reguläres Parameterliniennetz mit $u^j = u_0^j = \text{const}$. Jede Parameterlinie $P(u^1(I), u_0^2)$ bzw. $P(u_0^1, u^2(I))$ ist KLEINSches Bild einer speziellen regulären Kongruenzregel­fläche $P(u^1(I), u_0^2)\Gamma^{-1}$ bzw. $P(u_0^1, u^2(I))\Gamma^{-1}$, im Folgenden auch *Parameterregel­fläche der C^r -Kongruenz $P(U)$* genannt.

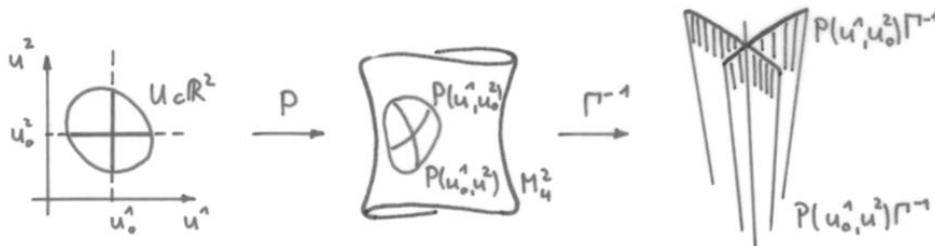


Abb. 7: Parameterregel­flächen

Definition 4:

Sei die C^r -Kongruenz in $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U$ regulär. So heißt $T^2(u_0) = P(u_0) \vee P_{,1}(u_0) \vee P_{,2}(u_0)$ die *Tangentialebene* an $P(U)$ in $P(u_0)$.

Satz 2 (vgl. [SOR])

Die Tangentialebene $T^2(u_0)$ an $P(U)$ in $P(u_0)$ ist ein projektivgeometrischer Begriff der C^r -Kongruenz.

(Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 1 zu führen.)

Bemerkung 5:

Aus den PLÜCKER-Identitäten (1.3) folgen für C^r -Kongruenzen wegen

$$(P(u), P(u))_\mu = ((p(u), \bar{p}(u)), (p(u), \bar{p}(u)))_\mu := p(u)\bar{p}(u) + \bar{p}(u)p(u) = 0 \quad \forall u \in U$$

die Identitäten:

$$(P(u), P_{,j}(u))_\mu = 0 \quad \text{mit } j=1,2 \text{ und } u \in U$$

und allgemein:

$$\frac{\partial^k (P(u), P(u))_\mu}{\partial u^{j_1} \dots \partial u^{j_k}} = 0 \quad \text{mit } j_1, \dots, j_k = 1,2 \text{ und } k \leq r \text{ sowie } u \in U. \tag{2.1}$$

Es folgt damit $T_{P(u)}^2 \subset P(u)\mu$, d. h. die Tangentialebene an $P(U)$ in $P(u)$ ist in der tangential an M_4^2 liegenden Polarhyperebene von $P(u)$ enthalten.

Anmerkung 2 (vgl. [BRA1]):

Sei $P(u_0)\Gamma^{-1} =: P_0\Gamma^{-1}$ eine reguläre Kongruenzgerade der Kongruenz $P(U)$ und weiter $\Phi = (\Gamma^{-1} \circ P \circ f)(I)$ eine reguläre Kongruenzregelfläche durch $P_0\Gamma^{-1}$. Dann ist mit $(\dot{u}^1 : \dot{u}^2)$ eine Richtung in der Tangentialebene $T_{P_0}^2$ des Flächenpunktes $P_0 \in M_4^2$ erklärt. Sie bestimmt eine Tangente $P^1 \subset T_{P_0}^2$, welche gleichzeitig Tangente an die KLEINSche Bildkurve der Kongruenzregelfläche $\Phi = (\Gamma^{-1} \circ P \circ f)(I)$ ist. Kongruenzregelflächen durch $P_0\Gamma^{-1}$, deren KLEINSche Bildkurve in P_0 die gemeinsame Tangente $P^1 \subset T_{P_0}^2$ besitzen, berühren einander in $P_0\Gamma^{-1}$ von 1. Ordnung (vgl. [KOC]). Sie besitzen in $P_0\Gamma^{-1}$ dasselbe Tangentennetz (vgl. auch Anmerkung 3).

Kongruenzgeraden lassen sich projektivgeometrisch klassifizieren. Hierfür untersuchen wir die spezielle Lage von $T^2(u_0) =: T_{P_0}^2$ in Bezug auf M_4^2 . Der Schnitt von M_4^2 mit einer Tangentialebene von M_4^2 ist eine ausgeartete Kurve 2. Ordnung (ausgearteter Kegelschnitt), also ein Geradenpaar (über \mathbb{C}), eine Doppelgerade oder die auf M_4^2 liegende Tangentialebene selbst.

Dieser Schnitt wird wie folgt konstruiert: Die Spurpolarität $\hat{\mu}$ bezüglich M_4^2 in $T_{P_0}^2$ ordnet jedem Punkt $Q \in T_{P_0}^2$ mit $Q \neq P_0$ eine Gerade $Q\hat{\mu}$ zu. Aufgrund der symmetrischen Relation der Konjugiertheit gilt sicher $P_0 \perp Q\hat{\mu}$. Die Spurpolarität $\hat{\mu}$ induziert somit eine Involution im Geradenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ (Tangentenbüschel). Vollständig auf M_4^2 liegende Tangenten dieses Büschels können als selbstkonjugierte Geraden dieser Involution beschrieben werden und heißen im Folgenden *torsale* Tangenten (ebenso *torsale Richtungen*).

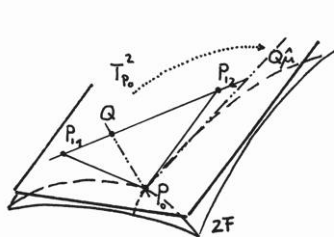


Abb. 8: Involution konjugierter Flächentangenten

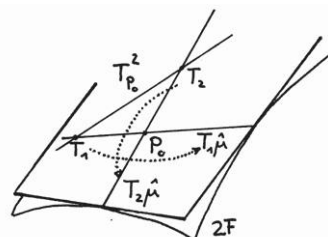


Abb. 9: Selbstkonjugierte Geraden der Involution

Der analytische Ansatz zur Beschreibung der Involution im Geradenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$ lautet: $Q \perp Q \hat{\mu} \leftrightarrow Q \hat{\mu} Q = 0$. Damit ergibt sich unter Verwendung der konjugierten Lage der Punkte $P_{,1}$ (bzw. $P_{,2}$) und P_0 für einen beliebig gewählten Punkt $Q \in T_{P_0}^2$ mit $Q = r P_0 + s P_{,1} + t P_{,2}$ und $(r, s, t) \neq (0, 0, 0)$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & (r \bar{p}_0 + s \bar{p}_{,1} + t \bar{p}_{,2}, r p_0 + s p_{,1} + t p_{,2}) (r p_0 + s p_{,1} + t p_{,2}, r \bar{p}_0 + s \bar{p}_{,1} + t \bar{p}_{,2}) \\ &= 2(r^2 p \bar{p} + s^2 p_{,1} \bar{p}_{,1} + t^2 p_{,2} \bar{p}_{,2} + rs(\bar{p}_0 p_{,1} + p_0 \bar{p}_{,1}) + rt(\bar{p}_0 p_{,2} + p_0 \bar{p}_{,2}) + st(\bar{p}_{,1} p_{,2} + p_{,1} \bar{p}_{,2})) \\ &= 2(s^2 p_{,1} \bar{p}_{,1} + t^2 p_{,2} \bar{p}_{,2} + st(\bar{p}_{,1} p_{,2} + p_{,1} \bar{p}_{,2})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wird darin $(\bar{p}_{,j} p_{,k} + p_{,j} \bar{p}_{,k}) =: (P_{,j}, P_{,k})_{\mu} =: 2 g_{jk}$, $j, k = 1, 2$ gesetzt, so lässt sich unter Verwendung von $\dot{P}_0 = P_{,1} \dot{u}_1 + P_{,2} \dot{u}_2$ schreiben:

$$„II“ := g_{11} (\dot{u}_1)^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} (\dot{u}_2)^2. \quad (2.2)$$

Diese quadratische Form II beschreibt die Involution konjugierter Flächentangenten. Sie verschwindet gerade für die torsalen Richtungen.

Definition 5:

Die in (2.2) beschriebene quadratische Form heißt II . *Grundform der C^r -Kongruenz.*

Unterscheidet man zwischen regulärem und singulärem $\hat{\mu}$, so lassen sich unter Verwendung von (2.2) die folgenden Fälle unterscheiden. Ist die Spulpolarität $\hat{\mu}$ regulär, so folgt für die aus den g_{jk} gebildeten (bis auf Proportionalitäten bestimmten) Matrizen (g_{jk}) :

$$(g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } \text{Rg}(g_{jk}) = 2.$$

Mithin sind möglich:

- (1) P_0 heißt *hyperbolische* Kongruenzgerade, genau dann wenn genau zwei reelle torsale Richtungen existieren. Hierfür gilt in (2.2) $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 < 0$.
- (2) P_0 heißt *elliptische* Kongruenzgerade, genau dann wenn über \mathbb{R} keine torsalen Richtungen existieren. Über \mathbb{C} existiert ein konjugiert komplexes Lösungspaar. Als Kriterium hierfür liefert (2.2) $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$.

Ist hingegen die Spulpolarität $\hat{\mu}$ ausgeartet, so folgt: $\text{Rg}(g_{jk}) < 2$. Wir unterscheiden dabei:

- (3) Man nennt P_0 eine *parabolische* Kongruenzgerade, genau dann wenn nicht alle Geraden selbstkonjugiert sind. Es gilt $\text{Rg}(g_{jk}) = 1$.
- (4) Gilt $\text{Rg}(g_{jk}) = 0 \Leftrightarrow g_{jk} = 0 \quad \forall j, k = 1, 2$, so sind alle Geraden selbstkonjugiert und P_0 heißt eine *torsale* Kongruenzgerade.

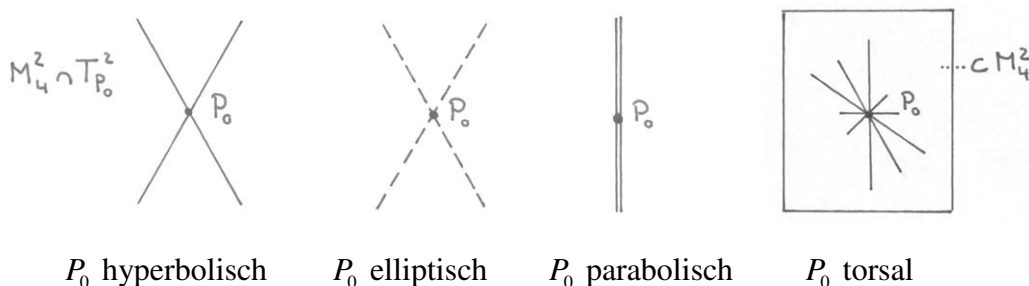


Abb. 10: Projektivgeometrische Klassifikation einer Kongruenzgeraden

Bemerkung 6:

Sicher sind die Begriffe hyperbolische-, elliptische-, parabolische- und torsale Kongruenzgerade projektivgeometrische Begriffe einer C^r -Kongruenz, da der Typus der II. Grundform der C^r -Kongruenz ein projektivgeometrischer Begriff ist.

Bemerkung 7 und Beispiel:

Die torsalen Richtungen in $T_{P_0}^2$ entsprechen in Π^3 den Torsalrichtungen der C^r -Geradenkongruenz $P(U)$ in P_0 , welche die Richtungen der (in $P_0\Gamma^{-1}$) *torsalen Regelflächen*^{*)} festlegen. Ist P_0 beispielsweise eine hyperbolische Kongruenzgerade, so bilden die „torsalen Punktreihen“ verschränkte Büschel mit gemeinsamer Büschelgerade $P_0\Gamma^{-1}$. Die Büschelscheitel nennt man *Brennpunkte*, die Trägerebenen der Büschel heißen *Brennebenen* der Kongruenzgerade P_0 . Ist die C^r -Geradenkongruenz $P(U)$ ein Geradenfeld bzw. Geraden-

^{*)} Eine Flächenkurve, deren Tangenten sämtlich auf M_4^2 liegen, heißt torsale Regelfläche.

bündel, so liegt ihr KLEINSches Bild vollständig auf M_4^2 (vgl. Abschnitt 1.1). Für einen Flächenpunkt $P(u)$ mit $u \in U$ gilt $T_{P(u)}^2 = T_{P_0}^2 \subset M_4^2$. Damit ist jede Kongruenzgerade torsal und $P(U)$ enthält ausschließlich torsale C^r -Kongruenzregel­flächen.

Anmerkung 3:

Aus der Liniengeometrie ist bekannt, dass jede Gerade $P^1 \subset T_{P_0}^2$ des Tangentenbüschels um P_0 als Tangente an die KLEINSche Bildkurve einer Kongruenzregel­fläche $\Phi = (\Gamma^{-1} \circ P \circ f)(I)$ im Raum der Nullpolaritäten ein Büschel linearer Komplexe*) bestimmt. Je nachdem, ob P^1 vollständig auf M_4^2 liegt, ist hierbei ein Büschel von Gebüschen bzw. ein Komplexbüschel aus Gewinden und dem einzigen Gebüsch mit P_0 als zugehörigen KLEINSchen Bildpunkt beschrieben. Im zweiten Fall sprechen wir auch von einem *parabolischen Komplexbüschel*.

Die Träger dieser Büschel, d. h. die Menge der jedem Komplex des Büschels gemeinsamen Geraden stellt dabei das Tangentennetz an die Kongruenzregel­fläche entlang der Kongruenzgerade $P_0\Gamma^{-1}$ dar. Dabei sind zu unterscheiden:

- (1) Gilt $P^1 \subset T_{P_0}^2$, so besteht der Träger aus einem Geradenfeld und einem Geradenbündel.
- (2) Gilt $P^1 \not\subset T_{P_0}^2$, so bildet der Träger ein *parabolisches Tangentennetz*. Hierfür konstruiert man eine Berührprojektivität $\gamma_{P_0} | \mathfrak{G}_{P_0} : \mathfrak{G}_{P_0} \rightarrow \mathfrak{P}_{P_0}$, die durch Einschränkung der Nullpolarität γ_{P_0} mit $\gamma_{P_0}\Gamma = \dot{P} \in P^1 \setminus \{P_0\}$ auf die Kongruenzgerade $P_0\Gamma^{-1}$ entsteht.

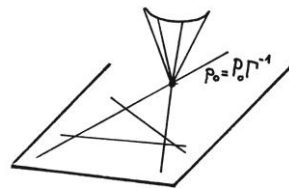


Abb. 11: Geradenfeld und -bündel

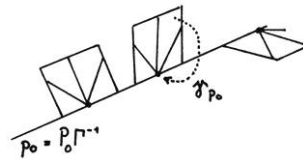


Abb. 12: Berührprojektivität

2.2.2 Affingeometrische Begriffe

Zur Konstruktion affingeometrischer Begriffe betrachten wir zunächst das Geradenfeld in der uneigentlichen Ebene ω von Π_a^3 und unterscheiden nach Kapitel 1, Definition 2 in folgender

Definition 6:

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet und $P(U)$ eine C^r -Geradenkongruenz. Eine Kongruenzgerade $P_0 := P(u_0) = (\wp(u_0), \bar{\wp}(u_0))\mathbb{R}$ mit $u_0 \in U$ heißt *uneigentliche Erzeugende (Fernerzeugende)* der Kongruenz, genau dann wenn gilt: $\wp(u_0) = O$, umgekehrt *eigentliche Erzeugende* der Kongruenz. Für uneigentliche Kongruenzgeraden ergibt sich damit die Lagebeziehung $P_0 \in P_\omega^2 \subset M_4^2$.

Bemerkung 8:

Der Begriff der Fernerzeugenden hängt nach Definition 6 von der Lage eines Punktes auf M_4^2 bezüglich des Fernunterraumes P_ω^2 ab. Er ist daher sicherlich ein affingeometrischer Begriff.

*) „Linearer (Geraden-) Komplex“ vereinigt beide Begriffe „Gewinde“ und „Gebüsch“.

Affingeometrische Begriffe einer regulären Kongruenzgeraden P_0 von erster Differentiationsordnung lassen sich weiter durch die gegenseitige Lage von Tangentialebene $T_{P_0}^2$ in P_0 und dem Fernunterraum P_ω^2 konstruieren. Nach dem Dimensionssatz für projektive Räume ist $T_{P_0}^2 \cap P_\omega^2 = \emptyset$ möglich, d. h. $T_{P_0}^2$ und P_ω^2 haben keinen Punkt gemeinsam. Gilt hingegen die Beziehung $T_{P_0}^2 \cap P_\omega^2 \neq \emptyset$, so folgt für P_0 und die Ableitungspunkte $P_{,1}(u_0)$, $P_{,2}(u_0)$ eine Beziehung in ihren ersten PLÜCKER-Koordinatentripeln. Hierfür sei formal $\mathfrak{p}(u_0) =: \mathfrak{p}_0(u_0)$ gesetzt.

$$\begin{aligned} T_{P_0}^2 \cap P_\omega^2 \neq \emptyset &\leftrightarrow \lambda_1 \mathfrak{p}_{,1}(u_0) + \lambda_2 \mathfrak{p}_{,2}(u_0) + \lambda_3 \mathfrak{p}_{,3}(u_0) = O, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0) \\ &\leftrightarrow \text{Rg}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_{,1}, \mathfrak{p}_{,2}) < 3 \\ &\leftrightarrow \det(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_{,1}, \mathfrak{p}_{,2}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ist P_0 eigentliche (reguläre) Kongruenzgerade, so beschreibt die verschwindende Determinante (2.3) gerade eine zylindrische Kongruenzgerade. Dies gibt Anlass zu folgender

Definition 7:

Eine eigentliche (reguläre) Kongruenzgerade P_0 heißt *zylindrisch* genau dann wenn gilt: $T_{P_0}^2 \cap P_\omega^2 \neq \emptyset$; umgekehrt heißt eine eigentliche (reguläre) Kongruenzgerade P_0 *nichtzylindrisch* genau dann wenn gilt: $T_{P_0}^2 \cap P_\omega^2 = \emptyset$.

Gilt $T_{P(u)}^2 \cap P_\omega^2 \neq \emptyset$ für alle $u \in U$, so nennen wir die C^r -Kongruenz *nichtzylindrisch*.

Bemerkung 9:

Nutzen wir die Argumentation in Bemerkung 4, so folgt auf analoge Weise für eine nichtzylindrische Kongruenzgerade $P(u_0)$ mit $u_0 \in U$, dass die C^r -Kongruenz in einer Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 nichtzylindrisch ist.

Satz 3 (vgl. [SOR], ohne Beweis):

Der Begriff einer zylindrischen Kongruenzgeraden ist ein geometrischer Begriff im Sinne der affinen Geometrie.

Nachfolgend werden wir torsale sowie zylindrische Kongruenzen von den Betrachtungen ausschließen. Wir werden also C^r -Geradenkongruenzen in der Umgebung einer eigentlichen, regulären, nichttorsalen, nichtzylindrischen Kongruenzgeraden $P(u_0)$ betrachten. Die C^r -Kongruenz besteht dann in einer passenden Umgebung von $P(u_0)$ ausschließlich aus solchen Geraden (vgl. Bemerkungen 4 und 9).

2.2.3 Ähnlichkeitsgeometrische Begriffe

Ähnlichkeitsgeometrische Begriffe 1. Differentiationsordnung einer Kongruenzgeraden P_0 hängen sicherlich von der Tangentialebene $T_{P_0}^2$ in P_0 sowie von dem in der komplexen Erweiterung existierenden Hyperkegel N_4^2 ab. Sein Polarsystem ν leitet sich aus der Beziehung (1.4) ab. Genauer gilt:

$$(P, P)_\nu = ((\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})\mathbb{R}, (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})\mathbb{R})_\nu := \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^2. \quad (2.4)$$

Hieraus ergibt sich die folgende Bilinearform:

$$(P, Q)_\nu = ((p, \bar{p})\mathbb{R}, (q, \bar{q})\mathbb{R})_\nu = pq. \quad (2.5)$$

Es ist sofort einsichtig, dass das Polarsystem ν von N_4^2 singularär ist. Die Ausnahmemenge von ν ist P_ω^2 . Da hier jedoch nur eigentliche, nichtzylindrische (reguläre) C^r -Geradenkongruenzen betrachtet werden, ist die Spurpolarität $\hat{\nu}$ von ν in T^2 regulär.

Wir nutzen im Folgenden diese Spurpolarität $\hat{\nu}$ in $T_{P_0}^2$, um im Tangentenbündel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ eine Involution zu beschreiben. Dafür ist zunächst die Polare $P_0\hat{\nu} = P_0\nu \cap T_{P_0}^2$ bezüglich $\hat{\nu}$ zu bilden. Jedem Punkt $Q \in P_0\hat{\nu}$ wird unter $\hat{\nu}$ seine Polare $Q\hat{\nu}$ zugeordnet, wobei diese aufgrund der symmetrischen Relation der Konjugiertheit mit P_0 inzidiert. Es gilt $P_0 \perp Q\hat{\nu}$. Die Spurpolarität $\hat{\nu}$ induziert somit eine Involution im Tangentenbündel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$, die üblicherweise *Rechtwinkelinvolution* genannt wird (vgl. Abs. 1.2.3).

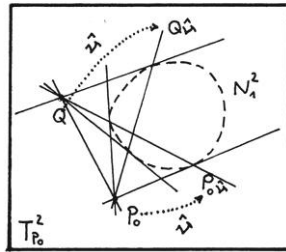


Abb. 13: Rechtwinkelinvolution

Für den analytischen Ansatz wählen wir die Ableitungspunkte $P_{,1}$ und $P_{,2}$ auf $P_0\hat{\nu}$, was durch geeignete Normierung der Koordinatenmatrizen sicherlich erreicht werden kann. Die Involution im Bündel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ beschreibt sich mit $\dot{P}_0 = P_{,1}\dot{u}_1 + P_{,2}\dot{u}_2$ durch nachstehende (bis auf Proportionalitäten bestimmte) Matrix:

$$\begin{pmatrix} (P_{,1}, P_{,1})_\nu & (P_{,1}, P_{,2})_\nu \\ (P_{,2}, P_{,1})_\nu & (P_{,2}, P_{,2})_\nu \end{pmatrix} \mathbb{R}$$

Setzen wir zur vereinfachten Schreibweise $(P_{,j}, P_{,k})_\nu =: e_{jk}$ ($j, k = 1, 2$),^{*)} so ergibt sich:

$$(e_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Für die zugehörige quadratische Form gilt:

$$„I“ := e_{11}(\dot{u}_1)^2 + 2e_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + e_{22}(\dot{u}_2)^2. \quad (2.7)$$

Definition 8:

Die in (2.7) beschriebene quadratische Form heißt *I*. *Grundform* der (regulären, nichtzylindrischen) C^r -Kongruenz.

^{*)} Die Bezeichnungen e_{jk} und g_{jk} für die Koeffizienten der beiden Grundformen stimmen mit den Bezeichnungen in [SOR] überein.

Bemerkung 10:

Die erste Grundform ist kein affingometrischer Begriff. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass Parameterwechsel und Umnormungen die Koeffizienten der quadratischen Form i. Allg. nicht invariant lassen.

Bemerkung 11:

Die durch (2.6) beschriebene Involution im Tangentenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ ist sicherlich elliptisch, da andernfalls ein Punkt $Q \in P_0 \hat{v} \subset T_{P_0}^2$ existiert, welcher bezüglich ν selbstkonjugiert ist, d. h. mit seiner Polhyperebene $Q\nu$ inzidiert. Für diesen Punkt gilt dann: $Q \in N_4^2$ und $Q\nu$ liegt tangential zu N_4^2 . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Tatsache, dass N_4^2 über \mathbb{R} ein nullteiliger quadratischer Hyperkegel ist.

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass zwei verschiedene Involutionen im gleichen Grundgebilde entweder kein oder genau ein gemeinsames Paar von Elementen besitzen. Ist eine der beiden Involutionen elliptisch, so existiert stets ein gemeinsames Paar. Wir suchen nachfolgend das gemeinsame Tangentenpaar der Involution konjugierter Flächentangenten und der (elliptischen) Rechtwinkelinvolution.

Der analytische Ansatz führt zu einem verallgemeinerten „Eigenwert- Eigenrichtung-“ Problem. Es bezeichnen a, b die projektiven Parameter auf der Geraden $P^1 := P_0 \hat{v}$ und weiter $x := (a, b)$ und $x' := (a', b')$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \left((g_{jk})_{j,k} - \lambda (e_{jk})_{j,k} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow \det \left((g_{jk})_{j,k} - \lambda \cdot (e_{jk})_{j,k} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Determinante (2.8) liefert zwei zu unterscheidende Fälle:

- (1) Sind die quadratischen Formen an einer Stelle $u_0 \in U$ zueinander proportional, d. h. gilt $(g_{jk})_{j,k}(u_0) = \lambda (e_{jk})_{j,k}(u_0)$, so stimmen beide Involutionen an dieser Stelle überein. P_0 besitzt dann den Charakter eines Nabelpunktes. Wir nennen die zugehörige Kongruenzgerade eine *Nabelerzeugende*.
- (2) Sind die quadratischen Formen in $u_0 \in U$ nicht zueinander proportional, gilt also $(g_{jk})_{j,k}(u_0) \neq \lambda (e_{jk})_{j,k}(u_0)$, so sind beide Involutionen dort verschieden und besitzen ein gemeinsames Paar $s_1 = (a_{s_1}, b_{s_1})$, $s_2 = (a_{s_2}, b_{s_2})$. Dieses Paar liegt harmonisch zu den torsalen Richtungen $t_1 = (a_{t_1}, b_{t_1})$, $t_2 = (a_{t_2}, b_{t_2})$ und passt in die Rechtwinkelinvolution. Wir nennen es das *Rechtwinkelpaar*.

Die projektiven Koordinatenpaare s_1 und s_2 beschreiben Richtungen im Tangentenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$; diese heißen *SANNIA-Richtungen*. Das zugehörige Tangentenpaar nennen wir *SANNIA-Tangentenpaar*. Ist P_0 elliptische oder hyperbolische Kongruenzgerade, so bestimmt jede SANNIA-Tangente S_j^1 ($j=1,2$) mit $S_j^1 \notin M_4^2$ in Π_e^3 ein parabolisches Komplexbüschel. Die Träger dieser Büschel heißen *SANNIA-(Tangenten-)Netze* der C^1 -Kongruenz.

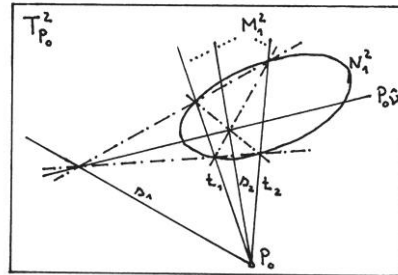


Abb. 14: SANNIA-Richtungen

Bemerkung 12:

In [SCH] beschreibt der Autor einen geschickten Weg zur Bestimmung der SANNIA-Richtungen. In unserer Bezeichnung lautet der Ansatz:

$$(a g_{11} + b g_{12}) : (a g_{12} + b g_{22}) = (a e_{11} + b e_{12}) : (a e_{12} + b e_{22}),$$

woraus sich die folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung der SANNIA-Richtungen nach kurzer Rechnung ergibt:

$$a^2(g_{11} e_{12} - e_{11} g_{12}) + ab(g_{11} e_{22} - e_{11} g_{22}) + b^2(g_{12} e_{22} - e_{12} g_{22}) = 0.$$

Bemerkung 13:

Für parabolische Kongruenzgeraden fällt eine SANNIA-Richtung mit der einzigen torsalen Richtung zusammen (O. B. d. A. $S_1^1 \subset M_4^2$); die zweite ist die $\hat{\nu}$ -konjugierte Richtung zur einzigen torsalen Richtung ($S_2^1 \notin M_4^2$).

Durch das SANNIA-Tangentenpaar können wir neben der Involution konjugierter Flächentangenten und der Rechtwinkelinvolution eine weitere Involution im Tangentenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$ konstruieren, welche die SANNIA-Tangenten als Fixgeraden besitzt. Wir bestimmen das gemeinsame Paar von SANNIA-Involution und Rechtwinkelinvolution und nennen sie im Hinblick auf das definierende Merkmal *SANNIA-Involution*. Ein analoges Vorgehen liefert dabei die *KUMMER-Richtungen* bzw. *KUMMER-Tangenten*, wobei der analytische Ansatz dem in (2.8) und Bemerkung 12 gleich und hier nicht aufgezeigt werden soll.

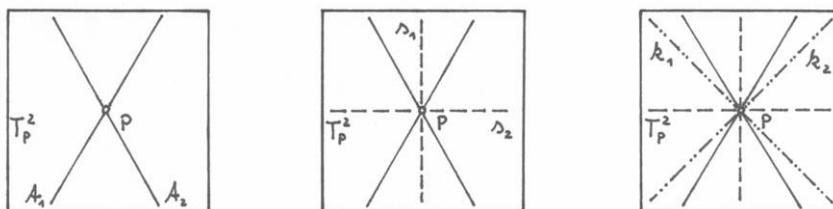


Abb. 15: torsale Richtungen, SANNIA-Richtungen, KUMMER-Richtungen

Bemerkung 14:

Da die Rechtwinkelinvolution elliptisch ist, sind die KUMMER-Tangenten sicher reell und verschieden. Sie liegen nach Definition harmonisch zu den SANNIA-Tangenten und erfüllen die Orthogonalitätsbedingung. Sie sind also die „Winkelsymmetralen“ zu den SANNIA-Tangenten.

Bemerkung 15 (vgl. [WEI2]):

Mit Hilfe der Polarsysteme μ und ν der Hyperquadriken M_4^2 und N_4^2 im Büschel $[M_4^2, N_4^2]$ lässt sich ein *Normalenfeld* in Π^5 ähnlichkeitsgeometrisch auszeichnen. Jedem Punkt $Q \in \Pi^5 \setminus P_\omega^2$, insbesondere auch jedem Punkt $Q \in M_4^2 \setminus P_\omega^2$ kann dabei ein Punkt $Q\mu\nu \in P_\omega^2$ eindeutig zugeordnet werden. Der analytische Ansatz liefert:

$$Q\mu\nu = ((q, \bar{q})\mathbb{R})\mu\nu = (\mathbb{R}(\bar{q}, q))\nu = (O, q)\mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Die Punkte Q und $Q\mu\nu$ spannen eine Gerade $Q^1 = (Q \vee Q\mu\nu) \subset \Pi^5$ auf, die P_ω^2 in $Q\mu\nu$ schneidet. Jedem Punkt $R \in Q^1$ wird dabei der gleiche Punkt $R\mu\nu = Q\mu\nu$ zugeordnet, wie eine einfache Rechnung zeigt. Aus der Liniengeometrie ist bekannt, dass die Achse $p = P\Gamma^{-1}$ eines linearen Komplexes (γ, γ^*) mit $\gamma\Gamma = Q \in Q^1 \subset \Pi^5$ reziproke Polare zur absoluten Polaren $q = (Q\mu\nu)\Gamma^{-1}$ des Nullpunktes der Fernebene ω in Π_ω^3 ist. $P \in M_4^2$ kann als Restschnitt der Verbindungsgerade $Q^1 = Q \vee Q\mu\nu$ mit M_4^2 konstruiert werden. Analytisch ergibt sich für $P \in M_4^2$:

$$P = \left(p, \bar{p} - \frac{p\bar{p}}{p^2} p \right) \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Im Urraum beschreibt die Verbindungsgerade Q^1 ein koaxiales Büschel von linearen Komplexen, dessen Träger das hyperbolische Geradennetz mit den Netzachsen p und q bildet. Für Menge aller Netzgeraden g gilt dabei:

- (1) g trifft p orthogonal bzw.
- (2) g gehört dem Geradenbüschel in ω mit dem Fernpunkt $U_p \in p$ als Träger an.

Wir nennen dieses Geradennetz ein *Orthogonalnetz* und verwenden die Gerade Q^1 im KLEINSchen Bildraum im Folgenden als $\mu\nu$ -*Normale* (von Q bezüglich μ und ν). Insbesondere soll der Punkt $P\mu\nu \in P_\omega^2$ zu $P \in M_4^2$ nachfolgend als *Normalenpunkt* (bezüglich N_4^2) bezeichnet werden.

Es sei weiterhin bemerkt, dass der *Normalenpunkt* $P\mu\nu$ zu $P \in M_4^2$ ausschließlich mit Hilfe der Polarsysteme konstruiert wird, d. h. dieser ist genau wie der (Flächen-)Punkt $P \in M_4^2$ unabhängig von einer gegebenen Parametrisierung.

2.2.4 Bewegungsgeometrische Begriffe

Wir beschreiten den im Abschnitt 2.2 eingeschlagenen Weg weiter und betrachten den Gewindeparameter von speziellen Punkten auf zuvor ausgezeichneten Tangenten von $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$ in $T_{P_0}^2$ mit $P_0 \in M_4^2$, da bewegungsgeometrische Begriffe erster Ordnung sicherlich mit dem Gewindeparameter verknüpft sind.

Wie im Abs. 2.2.2 vorausgesetzt, sei $P(U)$ eine reguläre, nichtzylindrische und fernerzeugendenfreie C^r -Geradenkongruenz und weiter P^1 eine (zunächst) beliebige Tangente des Büschels $\mathfrak{B}_{P_0, T_0^2}$ in $T_{P_0}^2$ an $P_0 \in P(U) \subset M_4^2$. O. B. d. A. spezifizieren wir die in Abs. 2.2.3 verwendete Parametrisierung der C^r -Kongruenz $P(U)$ durch die Forderungen:

- (1) $P_{,1}$ und $P_{,2}$ sind $\hat{\mu}$ -konjugiert, d. h. $(P_{,1}, P_{,2})_{\mu} = 0$.
- (2) $P_{,1}$ und $P_{,2}$ liegen $\hat{\nu}$ -konjugiert zu P_0 , d. h. $(P_0, P_{,1})_{\nu} = (P_0, P_{,2})_{\nu} = 0$.

Bemerkung 16:

Zur Erinnerung sei noch einmal bemerkt, dass die Ableitungspunkte $P_{,1}$ und $P_{,2}$ in $T_{P_0}^2 \subset P_0\mu$ liegen, woraus zwangsläufig die zu P_0 $\hat{\mu}$ -konjugierte Lage folgt. Daher gilt sicherlich auch $(P_0, P_{,1})_{\mu} = (P_0, P_{,2})_{\mu} = 0$.

Sei (γ_Q, γ_Q^*) ein Gewinde mit $\gamma_Q\Gamma = Q$ und der Koordinatendarstellung $Q = (q, \bar{q})\mathbb{R} \in P^1$. Setzen wir die Koordinatenmatrix $R = (r, \bar{r})\mathbb{R}$ für einen beliebigen aber fest gewählten Punkt $R \in (P_{,1} \vee P_{,2})$, so besitzt Q die Darstellung $Q = kP_0 + R$ mit $k \in \mathbb{R}$ und es ergibt sich für den Gewindeparameterwert c_Q die nachstehende Gleichung:

$$c_Q = \frac{(Q, Q)_{\mu}}{2(Q, Q)_{\nu}} \text{ beziehungsweise } c_Q = \frac{q\bar{q}}{q^2}.$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} c_Q &= \frac{(kP_0 + R, kP_0 + R)_{\mu}}{2(kP_0 + R, kP_0 + R)_{\nu}} \\ &= \frac{k^2(P_0, P_0)_{\mu} + 2k(P_0, R)_{\mu} + (R, R)_{\mu}}{2(k^2(P_0, P_0)_{\nu} + 2k(P_0, R)_{\nu} + (R, R)_{\nu})} \\ &= \frac{k(p_0 \bar{r} + r \bar{p}_0) + r \bar{r}}{k^2 p_0^2 + 2k p_0 r + r^2} = c_Q(k). \end{aligned}$$

Der extremale Gewindeparameterwert berechnet sich unter der notwendigen Bedingung $\dot{c}_Q(k) = 0$ zu:

$$c_{Q,extr.} = \frac{p_0^2 r \bar{r}}{(p_0 \times r)^2} = \frac{p_0^2 r \bar{r}}{p_0^2 r^2 - (p_0 r)^2} = \frac{r \bar{r}}{r^2} = c_R. \quad (2.11)$$

Der Parameterwert $c_{Q,extr.} = c_R$ heißt *Drall* des parabolischen Netzes zu $P^1\Gamma^{-1}$ und ist durch den Gewindeparameter c_R des zu R gehörenden Gewindes (γ_R, γ_R^*) bestimmt, wobei R auf $P_0\hat{\nu}$ liegt, sich also in $\hat{\nu}$ -konjugierter Lage zu P_0 befindet.

Natürlich erhebt sich nun die Frage, ob die zuvor ähnlichkeitsgeometrisch ausgezeichneten SANNIA-Netze bezüglich des zugehörigen Drallwertes bewegungsgeometrische Eigenschaften besitzen.

Satz 4 (vgl. [SCH]):

Sei P_0 eine Kongruenzgerade von $P(U)$. Dann besitzen gerade die SANNIA-Netze extremalen Drall im Büschel parabolischer Netze um $P_0\Gamma^{-1}$.

Beweis:

Wir untersuchen den Drall aller parabolischen Netze um $P_0\Gamma^{-1}$ und betrachten hierfür die Tangenten des Büschels $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$.

In unserer Parametrisierung setzen wir $l := ab^{-1}$ mit $b \neq 0$ und damit $R = lP_{,1} + P_{,2}$. Für die Drallformel ergibt sich unter Verwendung obiger Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} c_{Drall}(l) &= \frac{p_0^2 (l p_{,1} + p_{,2})(l \bar{p}_{,1} + \bar{p}_{,2})}{(p_0 \times (l p_{,1} + p_{,2}))^2} = \frac{p_0^2 (l^2 p_{,1} \bar{p}_{,1} + p_{,2} \bar{p}_{,2})}{(p_0 \times (l p_{,1} + p_{,2}))^2} \\ &= \frac{p_0^2 (l^2 g_{11} + g_{22})}{p_0^2 (l p_{,1} + p_{,2})^2 - ((l p_{,1} + p_{,2}) p_0)^2} = \frac{p_0^2 (l^2 g_{11} + g_{22})}{p_0^2 (l^2 e_{11} + 2l e_{12} + e_{22})} \\ &= \frac{l^2 g_{11} + g_{22}}{l^2 e_{11} + 2l e_{12} + e_{22}}. \end{aligned}$$

Unter der notwendigen Bedingung $\dot{c}_{Drall}(l) = 0$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{Drall}(l) &= 2 \frac{l g_{11} (l^2 e_{11} + 2l e_{12} + e_{22}) - (l e_{11} + e_{12})(l^2 g_{11} + g_{22})}{(l^2 e_{11} + 2l e_{12} + e_{22})^2} = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= l g_{11} (l^2 e_{11} + 2l e_{12} + e_{22}) - (l e_{11} + e_{12})(l^2 g_{11} + g_{22}) \\ \Leftrightarrow 0 &= l^2 g_{11} e_{12} + l (g_{11} e_{22} - g_{22} e_{11}) - e_{12} g_{22}. \end{aligned}$$

Hiermit sind gerade die SANNIA-Richtungen beschrieben. Auf den analytischen Nachweis der hinreichenden Bedingung $\ddot{c}_{Drall}(l) \neq 0$ kann mit Verweis verzichtet werden, dass die hier reellen und verschiedenen Lösungen von $\dot{c}_{Drall}(l)$ sicherlich $\ddot{c}_{Drall}(l) = 0$ ausschließen. \square

Bemerkung 17:

Wir ziehen an dieser Stelle einen Vergleich zur klassischen Theorie der Flächen im reellen dreidimensionalen Raum und erkennen, dass die SANNIA-Dralle für eine Geradenkongruenz sicherlich eine analoge Bedeutung besitzen wie die Hauptkrümmungen einer gewöhnlichen 2-Fläche des \mathbb{R}^3 .

Bemerkung 18:

Jede Tangente P^1 des Büschels $\mathfrak{G}_{P_0, T_0^2}$ verschieden von den torsalen Tangenten berührt neben M_4^2 eine weitere Hyperquadrik $V_4^2(c)$ des Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(c)\}$. Bildet man den Schnitt von $\{V_4^2(c)\}$ mit P^1 , so sind die Berührungspunkte gerade die Fixpunkte einer auf P^1 ausgeschnittenen DESARGUES-Involution.

Der Parameter des von P_0 verschiedenen Berührungspunktes auf P^1 stimmt dabei mit dem Drall des durch P^1 bestimmten parabolischen Netzes überein. Der Drall eines parabolischen (Tangenten-)Netzes an die Kongruenzgerade $P_0\Gamma^{-1}$ in Richtung P^1 entspricht also im KLEIN-schen Modell dem Parameter des von P_0 verschiedenen Berührungspunktes von P^1 mit der von M_4^2 verschiedenen Hyperquadrik $V_4^2(c)$.

Dies motiviert im Hinblick auf die Zielsetzung im Kapitel 3 die folgende

Definition 9:

Sei $P(U)$ eine reguläre, nichtzylindrische und fernerzeugendenfreie C^r -Geradenkongruenz und weiter $P_0 \in P(U)$ eine Kongruenzgerade. Die Punkte S_1 und S_2 in $T_{P_0}^2$ heißen *SANNIA-Punkte* zu P_0 wenn gilt:

- (1) S_1 und S_2 sind $\hat{\mu}$ -konjugiert, d. h. $(S_1, S_2)_\mu = 0$.
- (2) Die Punkte P_0 , S_1 und S_2 liegen paarweise $\hat{\nu}$ -konjugiert, d. h. es gelten $(S_1, S_2)_\nu = 0$ sowie $(P_0, S_1)_\nu = (P_0, S_2)_\nu = 0$.

3 Konstruktion einer Fundamentalmenge in Π^5

3.1 Konstruktion einer Basis in Π^5

Es sei $P(U)$ eine reguläre nichtzylindrische C^r -Geradenkongruenz und $P_0 \in P(U)$ eine Kongruenzgerade. Die Tangentialebene $T_{P_0}^2$ von $P(U)$ in P_0 sei durch $T_{P_0}^2 = P_0 \vee P_{,1} \vee P_{,2}$ aufgespannt. Wir wählen die Ableitungspunkte $P_{,1}$ und $P_{,2}$ derart, dass beide mit den SANNIA-Punkten S_1 und S_2 auf den SANNIA-Tangenten S_1^1 und S_2^1 zusammen fallen.

Nach Definition 9 im Kapitel 2 bilden die Punkte P_0 , $P_{,1}$ und $P_{,2}$ die Eckpunkte eines bezüglich $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ gemeinsamen Poldreiecks in $T_{P_0}^2$. Wir verwenden P_0 , $P_{,1}$ und $P_{,2}$ als eine Basis in $T_{P_0}^2$ und formulieren die folgende

Definition 1:

Sei $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine reguläre nichtzylindrische Geradenkongruenz und $P(u) \in P(U)$ mit $u \in U$ eine Kongruenzgerade. Gilt:

- a) $(P(u), P_{,1}(u))_\nu = (P(u), P_{,2}(u))_\nu = (P_{,1}(u), P_{,2}(u))_\nu = 0 \quad \forall u \in U;$
- b) $(P(u), P_{,1}(u))_\mu = (P(u), P_{,2}(u))_\mu = (P_{,1}(u), P_{,2}(u))_\mu = 0 \quad \forall u \in U;$
- c) $(P(u), P(u))_\nu = 1 \quad \forall u \in U$ („Normierung“ der Koordinatenmatrizen bezüglich ν).

Dann nennen wir $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine *SANNIA-normierte* (kurz *S-normierte**) C^r -Geradenkongruenz und $P(u)$ eine *SANNIA-normierte Kongruenzgerade*.

Bemerkung 1:

Die zu μ und ν gehörenden Bilinearformen (vgl. (1.3), (1.4), (2.5)) definieren im zu Π^5 gehörenden Vektorraum \mathbb{R}^6 zwei „innere Produkte“. Die in Definition 1 verwendete „Normierung“ entspricht im \mathbb{R}^6 der durch das „ ν -Produkt“ erklärten „ ν -Norm“. In dieser Hinsicht ähnelt die vorgenommene Wahl der Ableitungspunkte sowie die Normierung der Koordinatenmatrizen zu $P(u)$ bezüglich ν Vorgehensweisen in der Kurven- und Flächentheorie des (reellen) dreidimensionalen Raumes.

Wegen der Voraussetzung, $P:U \rightarrow \Pi^5$ sei eine nichtzylindrische Kongruenz, gilt sicher $T_{P(u)}^2 \cap P_\omega^2 = \emptyset$ für alle $u \in U$. Nach Dimensionssatz folgt dann $T_{P(u)}^2 \vee P_\omega^2 = \Pi^5$. Mit dieser Überlegung werden wir die in $T_{P(u)}^2$ ausgezeichnete Basis zu einer Basis in Π^5 erweitern und verwenden hierfür erneut die Polarsysteme μ und ν . Wir ordnen den Punkten $P(u)$, $P_{,1}(u)$ und $P_{,2}(u)$ durch die bereits in Abschnitt 2.3.2 verwendete Abbildung $\kappa := \mu\nu$ die in P_ω^2 liegenden Punkte $P_3(u)$, $P_4(u)$ und $P_5(u)$ eindeutig zu. Dabei gilt unter Verwendung partitionierter Koordinatenmatrizen:

$$\begin{aligned}
 P_3(u) &:= P(u)\mu\nu = (O, \mathfrak{p}(u))\mathbb{R} \\
 P_4(u) &:= P_{,1}(u)\mu\nu = (O, \mathfrak{p}_{,1}(u))\mathbb{R} \\
 P_5(u) &:= P_{,2}(u)\mu\nu = (O, \mathfrak{p}_{,2}(u))\mathbb{R}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

*) Damit wird der in der Einleitung verwendete Begriff „S-normiert“ motiviert.

Bemerkung 2:

Wir polarisieren die Punkte P , $P_{,1}$ und $P_{,2}$ des bezüglich $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ gemeinsamen Poldreiecks in T_P^2 an μ und erhalten durch den Schnitt mit P_ω^2 die drei „Ferngeraden“ a , b und c mit $a := P\mu \cap P_\omega^2$, $b := P_{,1}\mu \cap P_\omega^2$ und $c := P_{,2}\mu \cap P_\omega^2$.

Polarisieren wir nun bezüglich μ die durch die Seiten des Poldreiecks verlaufenden SANNIA-Tangenten S_j^1 mit $j=1,2$ und weiter die Polare $P\hat{\nu}$ zu P , so erhalten wir die 3-Räume $S_j^3 := S_j^1\mu$ sowie den 3-Raum $P^3 := (P\hat{\nu})\mu$. Es ergeben sich die Beziehungen $S_1^3 \supset S_2^1 \ni P_{,2}$ und $S_2^3 \supset S_1^1 \ni P_{,1}$. Da andererseits $S_1^1\mu \subset P_{,1}\mu$ und $S_2^1\mu \subset P_{,2}\mu$ gelten, berühren S_1^3 und S_2^3 nach Dimensionssatz den Fernunterraum P_ω^2 entlang b und c . Die Berührungspunkte $B := S_1^3 \cap P_\omega^2$ bzw. $C := S_2^3 \cap P_\omega^2$ sind dabei Pole zu c bzw. b bezüglich der Spurpolarität $\tilde{\nu}$ von ν in P_ω^2 , welche KLEINSches Bild der absoluten Polarität δ^\perp in $\omega \subset \Pi_e^3$ ist.

Bedenken wir außerdem, dass sich $P_{,1}$ bzw. $P_{,2}$ in zu P μ -konjugierter Lage befinden, so gilt $S_j^3 \subset P\mu$. Die Punkte B und C inzidieren demnach mit der Gerade a . Der Pol A zu a bezüglich $\tilde{\nu}$ ist aufgrund der symmetrischen Relation der konjugierten Lage durch den Schnitt von b und c bestimmt.

Sicher ist die Spurpolarität $\tilde{\nu}$ in P_ω^2 elliptisch, so dass die im reellen Ausschnitt existierenden Punkte A , B und C nicht selbstkonjugiert sind. Sie bilden somit in P_ω^2 ein (nicht ausgeartetes) Poldreieck bezüglich $\tilde{\nu}$.

Wir erkennen im Vergleich mit den zuvor konstruierten Punkten P_3 , P_4 und P_5 , dass beide Punktetripel identisch sind. Die nicht kollineare Lage der Punkte P_3 , P_4 und P_5 folgt darüber hinaus bereits aus den Darstellungen der Koordinatenmatrizen und der Forderung $\det(p(u), p_{,1}(u), p_{,2}(u)) \neq 0$ für nichtzylindrische C^r -Kongruenzen.

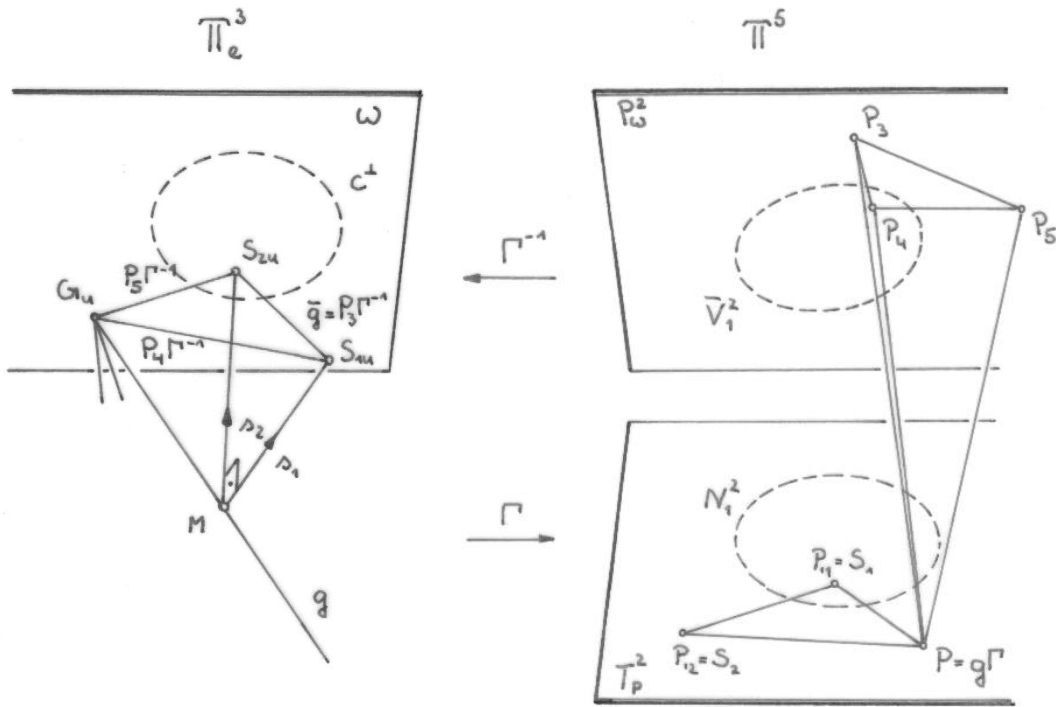


Abb. 16: Begleitbasis einer C^r -Kongruenz

Definition 2:

Sei $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine SANNIA-normierte C^r -Geradenkongruenz und $P(u)$ mit $u \in U$ eine Kongruenzgerade. Dann heißt die Menge $\{P(u), P_{,1}(u), P_{,2}(u), P_{,3}(u), P_{,4}(u), P_{,5}(u)\}$ ein *Begleit-simplex* der C^r -Kongruenz an der Stelle u .

Bemerkung 3:

Die Koordinatendarstellung der Begleitbasis an der Stelle u ergibt sich unter Verwendung partitionierter Koordinatenmatrizen zu:

$$\begin{aligned}
 P(u) &= (p(u), \bar{p}(u))\mathbb{R} & P_3(u) &:= P(u)\mu\nu = (O, p(u))\mathbb{R} \\
 P_{,1}(u) &= (p_{,1}(u), \bar{p}_{,1}(u))\mathbb{R} & P_4(u) &:= P_{,1}(u)\mu\nu = (O, p_{,1}(u))\mathbb{R} \\
 P_{,2}(u) &= (p_{,2}(u), \bar{p}_{,2}(u))\mathbb{R} & P_5(u) &:= P_{,2}(u)\mu\nu = (O, p_{,2}(u))\mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Möglichkeiten der Auszeichnung von „Einheitspunkten“ auf den SANNIA-Tangenten

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass durch Hinzunahme eines „fremden“ Punktes zu einer Basis aus $(n+1)$ projektiv unabhängigen Punkten eine *Fundamentalmenge* in Π^n , also ein projektives Koordinatensystem erklärt werden kann. Der Begriff „fremd“ meint dabei, dass je $(n+1)$ der $(n+2)$ Punkte einen nicht ausgearteten $(n+1)$ - Simplex bilden. Der hinzugenommene Punkt darf somit nicht in den Facetten des Basissimplex gewählt werden. Weiter ist die Angabe einer Fundamentalmenge durch einen Basissimplex und einen fremden *Einheitspunkt* äquivalent zu ihrer Angabe durch den Basissimplex und der Angabe von jeweils einem Einheitspunkt auf den Simplexkanten.

Wir werden die Konstruktion einer Fundamentalmenge in Π^5 in dieser Hinsicht verstehen und ausgehend von der im vorangegangenen Abschnitt konstruierten Begleitbasis im Folgenden Möglichkeiten der kanonischen Auszeichnung von Einheitspunkten auf den Simplexkanten diskutieren. Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich (wenn nicht anders vereinbart) auf eine feste Stelle u_0 des Gebietes U .

a) Auf den SANNIA-Tangenten S_j^1 lassen sich mit Hilfe der Polarsysteme μ und ν Spurinversionen $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ konstruieren, von denen $\hat{\nu}$ sicherlich elliptisch und $\hat{\mu}$ ausgeartet (Rang 1) ist. Dadurch existiert ein gemeinsames Punktepaar beider Inversionen, das in Kapitel 2, Definition 9 benannte SANNIA-Punktepaar. Dieses fällt sicher mit den Punkten P_0 und $P_{,j}$ auf S_j^1 zusammen.

Das KUMMER-Punktepaar ist als gemeinsames Punktepaar der SANNIA-Involution $\hat{\sigma}$ und $\hat{\nu}$ sicher reell und verschieden. Es liegt aufgrund seiner Konstruktion konjugiert bezüglich $\hat{\nu}$ und harmonisch zu den Punkten P und $P_{,j}$. Wir verwenden einen zu Bemerkung 12, Kapitel 2 analogen analytischen Ansatz und schreiben etwa $Q \in S_1^1$ mit $Q = aP_0 + bP_{,1}$ und den projektiven Parametern $(a, b) \neq (0, 0)$.

Dann berechnet sich das KUMMER-Punktpaar^{*)}:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow a : b = \pm \sqrt{e_{11}}.$$

$$K_1 = \pm \sqrt{e_{11}} P_0 + P_{s_1}. \quad (3.3)$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass dieses Punktpaar tatsächlich die beschriebenen Eigenschaften besitzt. Für den Parameter des KUMMER-Punktpaares ergibt sich in diesem Fall:

$$\begin{aligned} c_{(K_1)} &= \frac{(K_1, K_1)_\mu}{2(K_1, K_1)_\nu} \\ &= \frac{(\pm \sqrt{e_{11}} P_0 + P_{s_1}, \pm \sqrt{e_{11}} P_0 + P_{s_1})_\mu}{2(\pm \sqrt{e_{11}} P_0 + P_{s_1}, \pm \sqrt{e_{11}} P_0 + P_{s_1})_\nu} \\ &= \frac{g_{11}}{2e_{11}} \\ &= \frac{1}{2}(c_{(P_0)} + c_{(P_{s_1})}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Das KUMMER-Punktpaar K_1 wird demnach durch eine bestimmte Hyperquadrik $V_4^2(c_{(K_1)})$ des Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(c)\}$ aus der SANNIA-Tangente S_1^1 herausgeschnitten. Entsprechendes gilt für das KUMMER-Punktpaar K_2 auf S_2^1 .

b) Wir nutzen den letzten Gedanken zur Auszeichnung weiterer Einheitspunkte. Diese lassen sich auf den SANNIA-Tangenten kanonisch durch ihren Schnitt mit einer (weiteren) ausgezeichneten Hyperquadrik $V_4^2(c_{(E)})$ des Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(c)\}$ zum Parameterwert $c_{(E)} = (\pm)1$ konstruieren. Die Natürlichkeit der Erzeugung tritt dabei in der Ähnlichkeit zu jenen affinen Geometrien hervor, in denen die Einheitstrecke über den Schnitt mit einem (zentralsymmetrischen) Eichbereich erhalten wird. Für den Fall der gewöhnlichen euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes \mathbb{E}^3 ist dies beispielsweise der Schnitt mit einer „Einheitssphäre“; in unserem Fall könnte die „Einheitshyperquadrik“ $V_4^2(c_{(E)})$ als ein (nicht zentralsymmetrischer) Eichbereich verwendet werden.

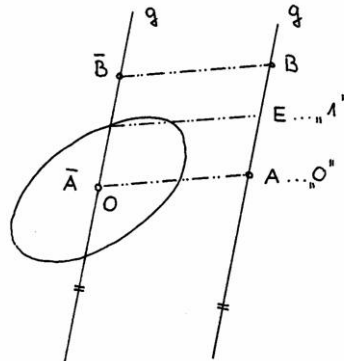


Abb. 17: Zur Konstruktion einer Einheitstrecke (mit zentralsymmetrischem Eichbereich)

^{*)} Auf die Zeiger \pm an den Punktbezeichnungen zur Unterscheidung der Punkte verzichten wir der Übersichtlichkeit halber.

Für den Parameterwert $c_{(E)}$ dieser Punkte E auf den SANNIA-Tangenten gilt dabei:

$$\begin{aligned} c_{(E)} &= \frac{(E, E)_\mu}{2(E, E)_\nu} = 1 \\ &= \frac{(aP_0 + bP_{\cdot 1}, aP_0 + bP_{\cdot 1})_\mu}{2(aP_0 + bP_{\cdot 1}, aP_0 + bP_{\cdot 1})_\nu} = \frac{b^2 g_{11}}{a^2 + b^2 e_{11}} \\ &\leftrightarrow a : b = \pm \sqrt{g_{11} - e_{11}}, \end{aligned}$$

so dass sich die Punkte E schreiben^{*)}:

$$E_1 = \pm \sqrt{g_{11} - e_{11}} P_0 + P_{\cdot 1}. \tag{3.5}$$

Bemerkung 4:

Durch die Auszeichnung von Einheitspunkten E_{0k} mit $E_{0k} := E_k$ ($k=1,2$) auf den SANNIA-Tangenten (die Zeiger werden Anlehnung an die Notation in der projektiven Geometrie geschrieben) ist das Dreieck $P_0P_{\cdot 1}P_{\cdot 2}$ zu einem ebenen (nichtentarteten) Viereck ausbaubar. Das Vorgehen zur Konstruktion von \bar{E} sowie von E_{12} auf der Kante $P_{\cdot 1}P_{\cdot 2}$ ist in Abb. 18 beschrieben.

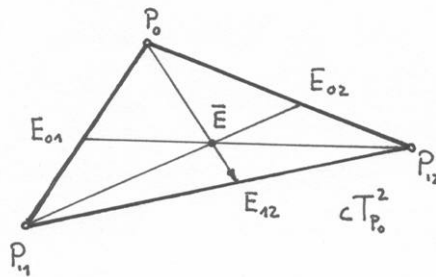


Abb. 18: Zur Konstruktion des Einheitspunktes E_{12}

3.3 Einheitspunkte auf den anderen Simplexkanten

Für die Festlegung eines Einheitspunktes auf der $\mu\nu$ -Normale zu $P_0 \in M_4^2$ bietet sich ein zu b) analoges Vorgehen an. Wir bestimmen den Schnitt von P_0P_3 mit der Einheitshyperquadrik $V_4^2(c_{(E)})$. Analog berechnet sich:

$$\begin{aligned} c_Q &= \frac{(Q, Q)_\mu}{2(Q, Q)_\nu} = \frac{(P_0 + rP_3, P_0 + rP_3)_\mu}{2(P_0 + rP_3, P_0 + rP_3)_\nu} = r = 1 \\ E_{03} &= P_0 + P_3 = (p_0, \bar{p}_0 + p_0) \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Für die Konstruktion der Einheitspunkte auf den übrigen Simplexkanten gehen wir von den Einheitspunkten E_{01} , E_{02} und E_{12} aus. Mit Hilfe der Abbildung $\kappa := \mu\nu$ ordnen wir diesen die in P_ω^2 liegenden Punkte $E_{34} := E_{01}\mu\nu$ auf P_3P_4 , $E_{35} := E_{02}\mu\nu$ auf P_3P_5 und $E_{45} := E_{12}\mu\nu$ auf P_4P_5 zu. Wählen wir speziell die KUMMER-Punkte, so gleicht das Ergebnis dem, wenn in P_ω^2 die zu den Punktepaaren (P_k, P_l) mit $k, l = 3, 4, 5$ und $k \neq l$ harmonischen und in der elliptischen Spurrpolarität $\tilde{\nu}$ -konjugierten Punktepaare aufgesucht werden.

^{*)} Auf die Zeiger \pm an den Punktbezeichnungen verzichten wir erneut.

Der Ansatz (2.9) liefert die Koordinatendarstellung dieser Punktepaare.

a) über KUMMER-Punkte:

$$\begin{aligned} E_{34} &= E_{01}\mu\nu = (O, \pm\sqrt{e_{11}} p_0 + p_{11})\mathbb{R} \\ E_{35} &= E_{02}\mu\nu = (O, \pm\sqrt{e_{22}} p_0 + p_{22})\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

b) über Schnitt mit der Einheitshyperquadrik $V_4^2(c_{(E)})$:

$$\begin{aligned} E_{34} &= E_{01}\mu\nu = (O, \pm\sqrt{g_{11} - e_{11}} p_0 + p_{11})\mathbb{R} \\ E_{35} &= E_{02}\mu\nu = (O, \pm\sqrt{g_{22} - e_{22}} p_0 + p_{22})\mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Auszeichnung von Einheitspunkten auf anderen Simplexkanten erfolgt nun (schrittweise) nach zu Bemerkung 4 analogem Vorgehen. Wir führen dies am Beispiel der Auszeichnung von E_{04} auf der Kante P_0P_4 exemplarisch durch. Hierfür betrachten wir das Dreieck $P_0P_4P_3$ und verwenden als Einheitspunkte auf den Seiten die in (3.6) und (3.7) konstruierten Punkte. Die Geraden $(P_0 \vee E_{34})$ und $(P_4 \vee E_{03})$ schreiben sich mit den projektiven Parametern $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ mit $(r, s) \neq (0, 0)$ bzw. $(w, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $(w, x) \neq (0, 0)$ zu:

$$(P_0 \vee E_{34}) := r P_0 + s E_{34} \quad \text{und} \quad (P_4 \vee E_{03}) := w P_4 + x E_{03}.$$

Der Schnitt beider Geraden ergibt den Punkt:

$$\begin{aligned} L &:= (P_0 \vee E_{34}) \cap (P_4 \vee E_{03}) \\ &= (r(p_0, \bar{p}_0) + s(O, \pm\sqrt{e_{11}} p_0 + p_{11}))\mathbb{R} = (w(O, p_{11}) + x(p_0, \bar{p}_0 + p_0))\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Schreiben wir L in den Koordinaten $L := (l, \bar{l})\mathbb{R}$, so gelten für diese:

$$\begin{aligned} l \dots r p_0 &= x p_0 \\ \bar{l} \dots r \bar{p}_0 + s(\pm\sqrt{e_{11}} p_0 + p_{11}) &= w p_{11} + x(\bar{p}_0 + p_0). \end{aligned}$$

Eine kleine Rechnung ergibt die Koordinatendarstellung des Punktes L :

$$\begin{aligned} L &= (\pm\sqrt{e_{11}} p_0, \pm\sqrt{e_{11}} (p_0 + \bar{p}_0) + p_{11})\mathbb{R} \\ L &= (p_0, p_0 + \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} p_{11})\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich nach gleicher Vorgehensweise der Punkt M auf $(P_0 \vee P_4)$ durch den Schnitt der Geraden $(P_0 \vee P_4)$ und $(P_3 \vee L)$. Er fällt sicher nicht mit einem der Punkte P_0 und P_4 zusammen und ist durch Vorgabe von E_{03} und E_{34} eindeutig festgelegt. Aufgrund seiner Konstruktion kann der Punkt M nachfolgend als Einheitspunkt E_{34} auf der Simplexkante $(P_0 \vee P_4)$ verwendet werden. Seine Koordinatendarstellung ergibt sich zu

$$E_{04} := M = (p_0, \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} p_{11})\mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Bemerkung 5:

Der Einheitspunkt E_{05} auf der Simplexkante P_0P_5 ergibt sich analog zu $E_{05} := N = (p_0, \bar{p}_0 \pm (1/\sqrt{e_{22}})p_{12})\mathbb{R}$. Das im Abschnitt 3.3 unter b) beschriebene Verfahren zur Konstruktion von Einheitspunkten lässt sich hier nicht anwenden, da die Geraden $(P_0 \vee P_4)$ und $(P_0 \vee P_5)$ zur Gänze auf M_4^2 liegen, wie die folgende Rechnung exemplarisch zeigt:

$$\begin{aligned} c_Q &= \frac{(P_0 + rP_4, P_0 + rP_4)_\mu}{2(P_0 + rP_4, P_0 + rP_4)_\nu} \\ &= \frac{1(P_0, P_0)_\mu + 2r(P_0, P_4)_\mu + r^2(P_4, P_4)_\mu}{2(P_0, P_0)_\nu + 2r(P_0, P_4)_\nu + r^2(P_4, P_4)_\nu} \\ c_Q &= \frac{p_0\bar{p}_0 + rp_0p_{11} + r^2(O p_{11})}{p_0^2 + 2rp_0O + r^2O^2} = 0 \quad \forall Q \in (P_0 \vee P_4). \end{aligned}$$

Bemerkung 6:

Zusammenfassend sind die auf den Geraden $(P_0 \vee P_j)$ mit $j=1, \dots, 5$ konstruierten Einheitspunkte(-paare), ausgehend von den KUMMER-Punktepaaren auf den SANNIA-Tangenten, dargestellt. Die Koordinatendarstellungen der jeweiligen Punkte in den Punktepaaren unterscheiden sich (bis auf E_{03}) jeweils um ein Signum. Sie passen somit in eine gewisse Homologie auf $(P_0 \vee P_j)$ mit P_0 als Zentrum und seiner Hyperebene $P_0\nu$ als Achse der Homologie. Sie lassen sich demnach als „ E_{0j} “ und „ $-E_{0j}$ “ auf $(P_0 \vee P_j)$ deuten.

$$\begin{aligned} E_{01} &= (p_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{11}}}p_{11}, \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{11}}}\bar{p}_{11})\mathbb{R} & E_{04} &= (p_0, \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{11}}}p_{11})\mathbb{R} \\ E_{02} &= (p_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{22}}}p_{12}, \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{22}}}\bar{p}_{12})\mathbb{R} & E_{05} &= (p_0, \bar{p}_0 \pm \frac{1}{\sqrt{e_{22}}}p_{12})\mathbb{R}. \\ E_{03} &= (p_0, \bar{p}_0 + p_0)\mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.4 Projektive Koordinatenskalen auf den Simplexkanten

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass sich die Menge aller Punkte einer reellen projektiven Punktreihe eindeutig auf die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} zuzüglich des Elementes ∞ abbilden lässt. Auf diese Weise lässt sich jedem Punkt dieser Punktreihe eine (inhomogene) projektive Koordinate zuschreiben. Aus der im Abschnitt 1.1 erklärten Linearkombination für Nullpolaritäten lässt sich die bereits verwendete Darstellung von Punkten einer Punktreihe in Π^5 ableiten. Die darin auftretenden projektiven Parameter können wie folgt zur Konstruktion von Koordinaten in einer Punktreihe verwendet werden.

Wir betrachten die Punktreihen auf $(P_0 \vee P_j)$ mit $j=1, \dots, 5$. Sie gestatten gewiss eine Darstellung der Form

$$Q = rP_0 + sP_j \text{ mit } (r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

Normiert man die Koordinatenmatrizen der Punkte P_0 und P_j geeignet, so lässt sich sicher eine Darstellung der Form

$$Q = \tilde{P}_0 + t \tilde{P}_j \text{ mit } t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

angeben. In diesem Sinn schreiben wir $(P_0 \vee P_1)$ in folgender Form:

$$Q = \tilde{P}_0 + t \tilde{P}_j = (p_0, \bar{p}_0) + t \left(\frac{p_{j1}}{\sqrt{e_{11}}}, \frac{\bar{p}_{j1}}{\sqrt{e_{11}}} \right),$$

so dass für den Wert $t=0$ der Punkt P_0 , für $t=1$ einer der beiden KUMMER-Punkte E auf $(P_0 \vee P_1)$ und für $t=\infty$ der Punkt P_1 in dieser projektiven Koordinatenskala erhalten wird. Den Parameter t heißt üblicherweise *projektive Koordinate* in dieser Skala.

Wir verfahren mit den restlichen Simplexkanten $(P_0 \vee P_j)$ entsprechend und erhalten auf diese Weise ein projektives Koordinatensystem in $\Pi(\mathbb{R}^6)$.

4 Ableitungsgleichungen, Integrabilitätsbedingungen für S -normierte C^r -Kongruenzen

4.1 Ableitungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir *Ableitungsgleichungen* für S -normierte C^r -Kongruenzen ($r \geq 3$) konstruieren. Eine sich hieran anschließende Frage nach einem Hauptsatz für C^r -Kongruenzen wird von H. SORGER in [SOR] betrachtet und soll hier keine Beachtung finden. Vielmehr werden wir diesen Weg gehen, um Invarianten einer C^r -Kongruenz bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$ zu finden, die sich hinsichtlich des in der Einleitung formulierten zentralen Anliegen dieser Arbeit verwenden lassen.

E. KUMMER verwendet im dreidimensionalen euklidischen Raum zwei quadratische Formen, um einfache Bestimmungsstücke einer C^r -Kongruenz wie Brennpunkte, Grenzlagen der Striktionspunkte, Mittenpunkte u. a. zu bestimmen. Diesen Formen haften allerdings gewisse Schwierigkeiten an. So sind sie beispielsweise abhängig von der Wahl einer Leitfläche der Kongruenz.

Zur Bestimmung regulärer C^r -Kongruenzen bietet es sich an, die Bewegung eines mit der Kongruenzgerade verbundenen Begleitbeines zu untersuchen. Wir starten dabei im KLEINschen Modell und betrachten einen Punkt $P_0 \subset P(U)$ auf M_4^2 als KLEINsches Bild der Kongruenzgerade p_0 und verheften mit P_0 einen Begleitsimplex (vgl. Abs. 3.1).

Um die differentielle Verrückung dieses Begleitbeines zu konstruieren, verwenden wir einen Differentialformenkalkül. Dabei erweist es sich als günstig, dass wir ein Punktmodell des Geradenraumes verwenden. Wir befreien uns damit von der im dreidimensionalen euklidischen Raum notwendigen Betrachtung eines Anfangspunktes auf der Kongruenzgerade, in dem das Begleitbein angesteckt wird und beziehen uns auf die Kongruenz als solche.

Daneben finden sich Darstellungen zu diesem Gegenstand im dreidimensionalen euklidischen Raum bei S. P. FINIKOW in [FIN] und J. HOSCHEK in [HOS].

Zunächst führen wir erforderliche Definitionen und Eigenschaften zu Differentialformen aus und folge dabei im Wesentlichen den Darstellungen in [SOR].

Definition 1:

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega: U \times (\mathbb{R}^n)^p &\rightarrow \mathbb{R} \quad (U \subset \mathbb{R}^n) \\ (x; \xi_1, \dots, \xi_p) &\mapsto (x; \xi_1, \dots, \xi_p) \end{aligned}$$

heißt *Differentialform*, wenn sie in ξ_1, \dots, ξ_p für festes x linear und alternierend ist und wenn sie für festes ξ_1, \dots, ξ_p eine C^r -Funktion auf U ist.

Bemerkung 1:

Wir verwenden hier speziell Differentialformen mit $p = 1, 2$, also $\omega: U(\subset \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma: U(\subset \mathbb{R}^2) \times (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere schreiben sich die beiden Differentialformen $du^k: U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k = 1, 2$:

$$(u; (du^1, du^2)) \mapsto du^1 \text{ und } (u; (du^1, du^2)) \mapsto du^2.$$

Diese Differentialformen sind sicher linear unabhängig für alle $u \in U$ und bilden eine Basis im 2-dimensionalen^{*)} Vektorraum $\Omega_1^{(r)}(U)$ aller C^r -Differentialformen ω bezüglich punktwiser Addition und Multiplikation.

Definition und Bemerkung 2:

Sei für zwei Differentialformen $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_1^{(r)}(U)$ ein „äußeres Produkt“ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2) &\in \Omega_2^{(r)}(U) \\ (u; \xi_1, \xi_2) &\mapsto (\omega_1 \wedge \omega_2)(u; \xi_1, \xi_2) := \omega_1(u; \xi_1)\omega_2(u; \xi_2) - \omega_1(u; \xi_2)\omega_2(u; \xi_1). \end{aligned}$$

Der Begriff $(\omega_1 \wedge \omega_2)$ soll dabei die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2) &= -(\omega_2 \wedge \omega_1) && \text{Antikommutativität,} \\ (k\omega_1 \wedge \omega_2) &= k(\omega_1 \wedge \omega_2) && \text{Homogenität,} \\ ((\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3) &= (\omega_1 \wedge \omega_3) + (\omega_2 \wedge \omega_3) && \text{Additivität.} \end{aligned}$$

Aus der Eigenschaft, dass die Differentialformen du^1 und du^2 eine Basis von $\Omega_1^{(r)}(U)$ bilden, folgt, dass $(du^1 \wedge du^2)$ eine Basis des 1-dimensionalen^{**)} Vektorraumes $\Omega_2^{(r)}(U)$ bildet.

Definition 3:

Sei $p: U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine C^r -Abbildung.

$$\begin{aligned} \underbrace{dp}_{:= p_{,j} du^j} &: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

heißt „Differential“ von p .

Bemerkung 3:

Gilt $s = 1$, so ist das Differential von p eine Differentialform aus $\Omega_1^{(r)}(U)$.

^{*)} genauer $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ -dimensionaler Vektorraum (vgl. [SOR])

^{**)} genauer $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ -dimensionaler Vektorraum (vgl. [SOR])

Definition 4:

Sei $\omega \in \Omega_1^{(r)}(U)$, $u \in \mathbb{R}^2$, $r \geq 1$.

$$d\omega: U \times (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d\omega(u; \xi_1, \xi_2) := \omega_1(u; \xi_1)\xi_2 - \omega_2(u; \xi_2)\xi_1$$

heißt „äußeres Differential“ von ω mit $d\omega \in \Omega_1^{(r-1)}(U)$.

Bemerkung 4:

Für das äußere Differential gelten die folgenden drei wichtigen Rechenregeln:

- (1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_1^{(r)}(U)$
- (2) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$ für $f \in C^r(U)$, $\omega \in \Omega_1^{(r)}(U)$
- (3) $d(d\omega) = 0$ für $\omega \in C^r(U)$ oder $\omega \in \Omega_1^{(r)}(U)$.

Wir verbinden nun mit jedem Punkt $P_0 \in P(U)$ ein Begleitsimplex und setzen für die Simplexecken $P_j := P_j(u)$ mit $j = 0, \dots, 5$. Die Differentiale dP_j der Funktionen P_j schreiben sich dann:

$$dP_j = P_{j,1} du^1 + P_{j,2} du^2, \quad 0 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 5.$$

Da die Punkte P_j eine Basis des Π^5 bilden, lassen sich $(P_j)_{,1}$ und $(P_j)_{,2}$ durch eine Linearkombination der P_j schreiben. Damit ergeben sich schrittweise:

$$\begin{aligned} dP_j &= (\lambda_j^k P_k) du^1 + (t_j^k P_k) du^2 \\ dP_j &= (\lambda_j^k du^1 + t_j^k du^2) P_k =: \omega_j^k P_k, \quad 0 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 5. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Koeffizienten ω_j^k sind dabei lineare Beziehungen in den Differentialen der Parameter u^m mit $m = 1, 2$.

Definition 5:

Die Gleichungen (4.1) heißen *Ableitungsgleichungen* der C^r -Geradenkongruenz bezüglich der Begleitbasis (3.2).

Zur Bestimmung der Differentialformen ω_j^k schließen wir uns dem prinzipiellen Vorgehen in [SOR] an und wählen den Ansatz:

$$(P_j, P_k) = h_{jk}, \quad 0 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 5. \tag{4.2}$$

Die Differentiale der Produktbildungen (4.2) berechnen sich unter Verwendung der Ableitungsgleichungen (4.1):

$$\begin{aligned}
 dh_{jk} &= d(P_j, P_k) \\
 &= (dP_j, P_k) + (P_j, dP_k) \\
 &= (\omega_j^i P_i, P_k) + (P_j, \omega_k^i P_i) \\
 &= \omega_j^i (P_i, P_k) + \omega_k^i (P_j, P_i) \\
 dh_{jk} &= \omega_j^i h_{ik} + \omega_k^i h_{ji}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hierbei sind (4.2) durch die Polarsysteme μ und ν von M_4^2 und N_4^2 gegeben (vgl. Bemerkung 1 in Kapitel 3). Wir schreiben genauer:

$$\left. \begin{aligned}
 (P_j(u), P_k(u))_\mu &= h_{jk}^\mu(u) \\
 (P_j(u), P_k(u))_\nu &= h_{jk}^\nu(u)
 \end{aligned} \right\}, \quad u \in U, \quad 0 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 5. \tag{4.4}$$

Aus den speziellen Lagebeziehungen der Punkte P_j ergeben sich die h_{jk}^μ und h_{jk}^ν nach folgender Tabelle. Die darin enthaltenen Gleichungen sind an beliebiger Stelle $u \in U$ betrachtet und mit (4.5) bezeichnet.

		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 0, \dots, 5$	$j = 0$	$(P_0, P_0)_\mu = 0 \quad =: h_{00}^\mu$ $(P_0, P_1)_\mu = 0 \quad =: h_{01}^\mu$ $(P_0, P_2)_\mu = 0 \quad =: h_{02}^\mu$ $(P_0, P_3)_\mu = 1 \quad =: h_{03}^\mu$ $(P_0, P_4)_\mu = 0 \quad =: h_{04}^\mu$ $(P_0, P_5)_\mu = 0 \quad =: h_{05}^\mu$	$(P_0, P_0)_\nu = 1 \quad =: h_{00}^\nu$ $(P_0, P_1)_\nu = 0 \quad =: h_{01}^\nu$ $(P_0, P_2)_\nu = 0 \quad =: h_{02}^\nu$ $(P_0, P_3)_\nu = 0 \quad =: h_{03}^\nu$ $(P_0, P_4)_\nu = 0 \quad =: h_{04}^\nu$ $(P_0, P_5)_\nu = 0 \quad =: h_{05}^\nu$
	$j = 1$	$(P_1, P_0)_\mu = 0 \quad =: h_{10}^\mu = h_{01}^\mu$ $(P_1, P_1)_\mu = 2g_{11} \quad =: h_{11}^\mu$ $(P_1, P_2)_\mu = 0 \quad =: h_{12}^\mu$ $(P_1, P_3)_\mu = 0 \quad =: h_{13}^\mu$ $(P_1, P_4)_\mu = e_{11} \quad =: h_{14}^\mu$ $(P_1, P_5)_\mu = 0 \quad =: h_{15}^\mu$	$(P_1, P_0)_\nu = 0 \quad =: h_{10}^\nu = h_{01}^\nu$ $(P_1, P_1)_\nu = e_{11} \quad =: h_{11}^\nu$ $(P_1, P_2)_\nu = 0 \quad =: h_{12}^\nu$ $(P_1, P_3)_\nu = 0 \quad =: h_{13}^\nu$ $(P_1, P_4)_\nu = 0 \quad =: h_{14}^\nu$ $(P_1, P_5)_\nu = 0 \quad =: h_{15}^\nu$
	$j = 2$	$(P_2, P_0)_\mu = 0 \quad =: h_{20}^\mu = h_{02}^\mu$ $(P_2, P_1)_\mu = 0 \quad =: h_{21}^\mu = h_{12}^\mu$ $(P_2, P_2)_\mu = 2g_{22} \quad =: h_{22}^\mu$ $(P_2, P_3)_\mu = 0 \quad =: h_{23}^\mu$ $(P_2, P_4)_\mu = 0 \quad =: h_{24}^\mu$ $(P_2, P_5)_\mu = e_{22} \quad =: h_{25}^\mu$	$(P_2, P_0)_\nu = 0 \quad =: h_{20}^\nu = h_{02}^\nu$ $(P_2, P_1)_\nu = 0 \quad =: h_{21}^\nu = h_{12}^\nu$ $(P_2, P_2)_\nu = e_{22} \quad =: h_{22}^\nu$ $(P_2, P_3)_\nu = 0 \quad =: h_{23}^\nu$ $(P_2, P_4)_\nu = 0 \quad =: h_{24}^\nu$ $(P_2, P_5)_\nu = 0 \quad =: h_{25}^\nu$
	$j = 3$	$(P_3, P_0)_\mu = 1 \quad =: h_{30}^\mu = h_{03}^\mu$ $(P_3, P_1)_\mu = 0 \quad =: h_{31}^\mu = h_{13}^\mu$ $(P_3, P_2)_\mu = 0 \quad =: h_{32}^\mu = h_{23}^\mu$ $(P_3, P_3)_\mu = 0 \quad =: h_{33}^\mu$ $(P_3, P_4)_\mu = 0 \quad =: h_{34}^\mu$ $(P_3, P_5)_\mu = 0 \quad =: h_{35}^\mu$	—
	$j = 4$	$(P_4, P_0)_\mu = 0 \quad =: h_{40}^\mu = h_{04}^\mu$ $(P_4, P_1)_\mu = e_{11} \quad =: h_{41}^\mu = h_{14}^\mu$ $(P_4, P_2)_\mu = 0 \quad =: h_{42}^\mu = h_{24}^\mu$ $(P_4, P_3)_\mu = 0 \quad =: h_{43}^\mu = h_{34}^\mu$ $(P_4, P_4)_\mu = 0 \quad =: h_{44}^\mu$ $(P_4, P_5)_\mu = 0 \quad =: h_{45}^\mu$	—
	$j = 5$	$(P_5, P_0)_\mu = 0 \quad =: h_{50}^\mu = h_{05}^\mu$ $(P_5, P_1)_\mu = 0 \quad =: h_{51}^\mu = h_{15}^\mu$ $(P_5, P_2)_\mu = e_{22} \quad =: h_{52}^\mu = h_{25}^\mu$ $(P_5, P_3)_\mu = 0 \quad =: h_{53}^\mu = h_{35}^\mu$ $(P_5, P_4)_\mu = 0 \quad =: h_{54}^\mu = h_{45}^\mu$ $(P_5, P_5)_\mu = 0 \quad =: h_{55}^\mu$	—

Damit ergeben sich 36 wesentlich voneinander verschiedene Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten ω_j^k , die nachfolgend aufgeführt sind und mit (4.6) bezeichnen werden.

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 0$	$j = 0$	$dh_{00}^\mu = 2\omega_0^i h_{i0}^\mu$ $dh_{00}^\mu = 2\omega_0^3 h_{03}^\mu$ $0 = 2\omega_0^3$	$dh_{00}^\nu = 2\omega_0^j h_{i0}^\nu$ $dh_{00}^\nu = 2\omega_0^0 h_{00}^\nu$ $0 = 2\omega_0^0$
	$j = 1$	$dh_{10}^\mu = \omega_1^i h_{i0}^\mu + \omega_0^j h_{1i}^\mu$ $dh_{10}^\mu = \omega_1^3 h_{30}^\mu + \omega_0^1 h_{11}^\mu + \omega_0^4 h_{14}^\mu$ $0 = \omega_1^3 + \omega_0^1 2g_{11} + \omega_0^4 e_{11}$	$dh_{10}^\nu = \omega_1^i h_{i0}^\nu + \omega_0^j h_{1i}^\nu$ $dh_{10}^\nu = \omega_1^0 h_{00}^\nu + \omega_0^1 h_{11}^\nu$ $0 = \omega_1^0 + \omega_0^1 e_{11}$
	$j = 2$	$dh_{20}^\mu = \omega_2^i h_{i0}^\mu + \omega_0^j h_{2i}^\mu$ $0 = \omega_2^3 + \omega_0^2 2g_{22} + \omega_0^5 e_{22}$	$dh_{20}^\nu = \omega_2^i h_{i0}^\nu + \omega_0^j h_{2i}^\nu$ $0 = \omega_2^0 + \omega_0^2 e_{22}$
	$j = 3$	$dh_{30}^\mu = \omega_3^i h_{i0}^\mu + \omega_0^j h_{3i}^\mu$ $0 = \omega_3^3 + \omega_0^0$	$dh_{30}^\nu = \omega_3^i h_{i0}^\nu + \omega_0^j h_{3i}^\nu$ $0 = \omega_3^0$
	$j = 4$	$dh_{40}^\mu = \omega_4^i h_{i0}^\mu + \omega_0^j h_{4i}^\mu$ $0 = \omega_4^3 + \omega_0^1 e_{11}$	$dh_{40}^\nu = \omega_4^i h_{i0}^\nu + \omega_0^j h_{4i}^\nu$ $0 = \omega_4^0$
	$j = 5$	$dh_{50}^\mu = \omega_5^i h_{i0}^\mu + \omega_0^j h_{5i}^\mu$ $0 = \omega_5^3 + \omega_0^2 e_{22}$	$dh_{50}^\nu = \omega_5^i h_{i0}^\nu + \omega_0^j h_{5i}^\nu$ $0 = \omega_5^0$

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 1$	$j = 0$	$\hat{=} k = 0, j = 1$	
	$j = 1$	$dh_{11}^\mu = 2\omega_1^i h_{1i}^\mu$ $dh_{11}^\mu = 2\omega_1^1 h_{11}^\mu + 2\omega_1^4 h_{14}^\mu$ $dg_{11} = 2\omega_1^1 g_{11} + \omega_1^4 e_{11}$	$dh_{11}^\nu = 2\omega_1^i h_{1i}^\nu$ $dh_{11}^\nu = 2\omega_1^1 h_{11}^\nu$ $de_{11} = 2\omega_1^1 e_{11}$
	$j = 2$	$dh_{21}^\mu = \omega_2^i h_{1i}^\mu + \omega_1^i h_{2i}^\mu$ $dh_{21}^\mu = \omega_2^1 h_{11}^\mu + \omega_2^4 h_{41}^\mu + \omega_1^2 h_{22}^\mu + \omega_1^5 h_{25}^\mu$ $0 = 2\omega_2^1 g_{11} + \omega_2^4 e_{11} + 2\omega_1^2 g_{22} + \omega_1^5 e_{22}$	$dh_{21}^\nu = \omega_2^i h_{1i}^\nu + \omega_1^i h_{2i}^\nu$ $dh_{21}^\nu = 2\omega_2^1 h_{11}^\nu + \omega_1^2 h_{22}^\nu$ $0 = \omega_2^1 e_{11} + \omega_1^2 e_{22}$
	$j = 3$	$dh_{31}^\mu = \omega_3^i h_{1i}^\mu + \omega_1^i h_{3i}^\mu$ $dh_{31}^\mu = \omega_3^1 h_{11}^\mu + \omega_3^4 h_{41}^\mu + \omega_1^0 h_{30}^\mu$ $0 = 2\omega_3^1 g_{11} + \omega_3^4 e_{11} + \omega_1^0$	$dh_{31}^\nu = \omega_3^i h_{1i}^\nu + \omega_1^i h_{3i}^\nu$ $dh_{31}^\nu = \omega_3^1 h_{11}^\nu$ $0 = \omega_3^1 e_{11}$
	$j = 4$	$dh_{41}^\mu = \omega_4^i h_{1i}^\mu + \omega_1^i h_{4i}^\mu$ $dh_{41}^\mu = \omega_4^1 h_{11}^\mu + \omega_4^4 h_{41}^\mu + \omega_1^1 h_{41}^\mu$ $de_{11} = 2\omega_4^1 g_{11} + \omega_4^4 e_{11} + \omega_1^1 e_{11}$	$dh_{41}^\nu = \omega_4^i h_{1i}^\nu + \omega_1^i h_{4i}^\nu$ $dh_{41}^\nu = \omega_4^1 h_{11}^\nu$ $0 = \omega_4^1 e_{11}$
	$j = 5$	$dh_{51}^\mu = \omega_5^i h_{1i}^\mu + \omega_1^i h_{5i}^\mu$ $dh_{51}^\mu = \omega_5^1 h_{11}^\mu + \omega_5^4 h_{41}^\mu + \omega_1^2 h_{52}^\mu$ $0 = 2\omega_5^1 g_{11} + \omega_5^4 e_{11} + \omega_1^2 e_{22}$	$dh_{51}^\nu = \omega_5^i h_{1i}^\nu + \omega_1^i h_{5i}^\nu$ $dh_{51}^\nu = \omega_5^1 h_{11}^\nu$ $0 = \omega_5^1 e_{11}$

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 2$	$j = 0$	$\hat{=} j = 2, k = 0$	
	$j = 1$	$\hat{=} j = 2, k = 1$	
	$j = 2$	$dh_{22}^\mu = 2\omega_2^i h_{2i}^\mu$ $dh_{22}^\mu = 2\omega_2^2 h_{22}^\mu + 2\omega_2^5 h_{25}^\mu$ $dg_{22} = 2\omega_2^2 g_{22} + \omega_2^5 e_{22}$	$dh_{22}^\nu = 2\omega_2^i h_{2i}^\nu$ $dh_{22}^\nu = 2\omega_2^2 h_{22}^\nu$ $de_{22} = 2\omega_2^2 e_{22}$
	$j = 3$	$dh_{32}^\mu = \omega_3^i h_{i2}^\mu + \omega_2^i h_{3i}^\mu$ $dh_{32}^\mu = \omega_3^2 h_{22}^\mu + \omega_3^5 h_{52}^\mu + h_{30}^\mu \omega_2^0$ $0 = 2\omega_3^2 g_{22} + \omega_3^5 e_{22} + \omega_2^0$	$dh_{32}^\nu = \omega_3^i h_{i2}^\nu + \omega_2^i h_{3i}^\nu$ $dh_{32}^\nu = \omega_3^2 h_{22}^\nu$ $0 = \omega_3^2 e_{22}$
	$j = 4$	$dh_{42}^\mu = \omega_4^i h_{i2}^\mu + \omega_2^i h_{4i}^\mu$ $dh_{42}^\mu = \omega_4^2 h_{22}^\mu + \omega_4^5 h_{52}^\mu + \omega_2^1 h_{41}^\mu$ $0 = 2\omega_4^2 g_{22} + \omega_4^5 e_{22} + \omega_2^1 e_{11}$	$dh_{42}^\nu = \omega_4^i h_{i2}^\nu + \omega_2^i h_{4i}^\nu$ $dh_{42}^\nu = \omega_4^2 h_{22}^\nu$ $0 = \omega_4^2 e_{22}$
	$j = 5$	$dh_{52}^\mu = \omega_5^i h_{i2}^\mu + \omega_2^i h_{5i}^\mu$ $dh_{52}^\mu = \omega_5^2 h_{22}^\mu + \omega_5^5 h_{52}^\mu + \omega_2^2 h_{52}^\mu$ $de_{22} = 2\omega_5^2 g_{22} + \omega_5^5 e_{22} + \omega_2^2 e_{22}$	$dh_{52}^\mu = \omega_5^i h_{i2}^\mu + \omega_2^i h_{5i}^\mu$ $dh_{52}^\nu = \omega_5^2 h_{22}^\nu$ $0 = \omega_5^2 e_{22}$

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 3$	$j = 0$	$\hat{=} j = 3, k = 0$	
	$j = 1$	$\hat{=} j = 3, k = 1$	
	$j = 2$	$\hat{=} j = 3, k = 2$	
	$j = 3$	$dh_{33}^\mu = 2\omega_3^i h_{3i}^\mu$ $dh_{33}^\mu = 2\omega_3^2 h_{30}^\mu$ $0 = 2\omega_3^0$	_____
	$j = 4$	$dh_{43}^\mu = \omega_4^i h_{i3}^\mu + \omega_3^i h_{4i}^\mu$ $dh_{43}^\mu = \omega_4^0 h_{03}^\mu + \omega_3^1 h_{41}^\mu$ $0 = \omega_4^0 + \omega_3^1 e_{11}$	_____
	$j = 5$	$dh_{53}^\mu = \omega_5^i h_{i3}^\mu + \omega_3^i h_{5i}^\mu$ $dh_{53}^\mu = \omega_5^0 h_{03}^\mu + \omega_3^2 h_{52}^\mu$ $0 = \omega_5^0 + \omega_3^2 e_{22}$	_____

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 4$	$j = 0$	$\hat{=} j = 4, k = 0$	
	$j = 1$	$\hat{=} j = 4, k = 1$	
	$j = 2$	$\hat{=} j = 4, k = 2$	
	$j = 3$	$\hat{=} j = 4, k = 3$	
	$j = 4$	$dh_{44}^\mu = 2\omega_4^i h_{4i}^\mu$ $dh_{44}^\mu = 2\omega_4^1 h_{41}^\mu$ $0 = 2\omega_4^1 e_{11}$	_____
	$j = 5$	$dh_{54}^\mu = \omega_5^i h_{i4}^\mu + \omega_4^i h_{5i}^\mu$ $dh_{54}^\mu = \omega_5^1 h_{14}^\mu + \omega_4^2 h_{52}^\mu$ $0 = \omega_5^1 e_{11} + \omega_4^2 e_{22}$	_____

$i = 0, \dots, 5$		μ -Anteil	ν -Anteil
$k = 5$	$j = 0$	$\hat{=} j = 4, k = 0$	
	$j = 1$	$\hat{=} j = 4, k = 1$	
	$j = 2$	$\hat{=} j = 4, k = 2$	
	$j = 3$	$\hat{=} j = 4, k = 3$	
	$j = 4$	$\hat{=} j = 4, k = 4$	
	$j = 5$	$dh_{55}^\mu = 2\omega_5^i h_{5i}^\mu$ $dh_{55}^\mu = 2\omega_5^2 h_{52}^\mu$ $0 = 2\omega_5^2 e_{22}$	_____

Beachten wir weiter, dass von einer S -normierten C^r -Kongruenz ausgegangen wird, so schreibt sich das Differential dP_0 in der nachfolgend aufgeführten Form, aus der sich die Koeffizienten ω_0^k direkt ablesen lassen.

$$dP_0 = du^1 P_1 + du^2 P_2 \quad \dots \quad \{\omega_0^k\} = \{0, du^1, du^2, 0, 0, 0\} \quad (4.7)$$

Bemerkung 5:

Die SANNIA-Parameter schreiben sich unter Verwendung der Notationen in (4.5) in der Form:

$$c_1 = \frac{g_{11}}{e_{11}} \quad \text{beziehungsweise} \quad c_2 = \frac{g_{22}}{e_{22}}.$$

Dann ergeben sich die folgenden Differentiale:

$$\begin{aligned} dc_1 &= d\left(\frac{g_{11}}{e_{11}}\right) & dc_2 &= d\left(\frac{g_{22}}{e_{22}}\right) \\ & \text{bzw.} & & \\ dc_1 &= \frac{e_{11} dg_{11} - g_{11} de_{11}}{(e_{11})^2} & dc_2 &= \frac{e_{22} dg_{22} - g_{22} de_{22}}{(e_{22})^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (4.6), (4.7) und (4.8) ergibt sich die Koeffizientenmatrix $(\omega_j^k)_{\substack{0 \leq j \leq 5 \\ 0 \leq k \leq 5}}$ der Ableitungsgleichungen.

$$(\omega_j^k)_{\substack{0 \leq j \leq 5 \\ 0 \leq k \leq 5}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & du^1 & du^2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_{11} du^1 & \frac{de_{11}}{2e_{11}} & \omega_1^2 & -2g_{11} du^1 & dc_1 & \omega_1^5 \\ -e_{22} du^2 & -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 & \frac{de_2}{2e_2} & -2g_{22} du^2 & -\frac{e_{22}}{e_{11}} (\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1) \omega_1^2) & dc_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & du^1 & du^2 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{11} du^1 & \frac{de_{11}}{2e_{11}} & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{22} du^2 & -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 & \frac{de_{22}}{2e_{22}} \end{array} \right) \quad (4.9)$$

Bemerkung 6:

Die Matrix (4.9) zu den Ableitungsgleichungen ist bis auf die Matricelemente ω_1^2 und ω_1^5 vollständig bestimmt. Im Vergleich der einzelnen Matricelemente ist erkennbar, dass die „linke obere“ (3×3) - Teilmatrix mit der „rechten unteren“ (3×3) - Teilmatrix übereinstimmt. Dies lässt sich leicht einsehen, da aufgrund der speziellen Bauart (der Koordinatenmatrizen) der Punkte P_3 , P_4 und P_5 sicherlich gilt:

$$\omega_m^n = \omega_{m+3}^{n+3}, \quad 0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 2.$$

Mit gleicher Begründung folgt, dass die „linke untere“ (3×3) - Teilmatrix die Nullmatrix O ist.

4.2 Integrabilitätsbedingungen

Im Folgenden bestimmen wir die verbleibenden Koeffizienten ω_1^2 sowie ω_1^5 und verwenden hierfür die Eigenschaft, dass das äußere Differential eines vollständigen Differentials gleich Null ist. Durch wiederholtes Einsetzen der Ableitungsgleichungen erhalten wir schrittweise:

$$\begin{aligned} d(dP_j) &= 0, \quad 0 \leq j \leq 5 \\ 0 &= d(\omega_j^k P_k) \\ 0 &= dP_k \wedge \omega_j^k + P_k d\omega_j^k \\ 0 &= (\omega_k^i P_i) \wedge \omega_j^k + P_k d\omega_j^k \\ 0 &= (\omega_k^i \wedge \omega_j^k) P_i + P_k d\omega_j^k. \end{aligned}$$

Vertauschen wir nun die Indizes i und k in den Summanden $(\omega_k^i \wedge \omega_j^k) P_i$, so ergeben sich die nachstehenden Gleichungen, die den *Strukturgleichungen* im euklidischen dreidimensionalen Raum entsprechen.

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_i^k \wedge \omega_j^i) P_k + P_k d\omega_j^k \\ 0 &= P_k \left((\omega_i^k \wedge \omega_j^i) + d\omega_j^k \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Da $\{P_k\}$ mit $0 \leq k \leq 5$ nach Abschnitt 3.1 ein Begleitsimplex im Π^5 bildet, folgt hieraus:

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_i^k \wedge \omega_j^i) + d\omega_j^k \\ d\omega_j^k &= \omega_j^i \wedge \omega_i^k, \quad 0 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq k \leq 5. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Bemerkung 7:

Setzt man die Elemente der Koeffizientenmatrix (4.9) ein, so ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen, die wir mit (4.12) bezeichnen.

$j=0, \quad 0 \leq k \leq 5:$

$$\begin{aligned} d\omega_0^0 &= 0 \\ &= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^0) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^0) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^0) \\ &\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^0) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^0) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^0) \\ &= du^1 \wedge (-e_{11} du^1) + (du^2 \wedge (-e_{22} du^2)) + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_0^1 &= 0 \\ &= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^1) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^1) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^1) \\ &\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^1) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^1) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^1) \\ &= du^1 \wedge \frac{de_{11}}{2e_{11}} + du^2 \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_0^2 &= 0 \\
&= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^2) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^2) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^2) \\
&\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^2) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^2) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^2) \\
&= du^1 \wedge \omega_1^2 + du^2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_0^3 &= 0 \\
&= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^3) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^3) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^3) \\
&\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^3) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^3) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^3) \\
&= du^1 \wedge -2g_{11}du^1 + du^2 \wedge -2g_{22}du^2 + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_0^4 &= 0 \\
&= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^4) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^4) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^4) \\
&\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^4) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^4) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^4) \\
&= du^1 \wedge dc_1 + du^2 \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_0^5 &= 0 \\
&= (\omega_0^0 \wedge \omega_0^5) + (\omega_0^1 \wedge \omega_1^5) + (\omega_0^2 \wedge \omega_2^5) \\
&\quad + (\omega_0^3 \wedge \omega_3^5) + (\omega_0^4 \wedge \omega_4^5) + (\omega_0^5 \wedge \omega_5^5) \\
&= du^1 \wedge \omega_1^5 + du^2 \wedge dc_2 + 0
\end{aligned}$$

$j=1, 0 \leq k \leq 5:$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^0 &= d(-e_{11}du^1) \\
&= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^0) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^0) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^0) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^0) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^0) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^0) \\
&= \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge (-e_{11}du^1) + \omega_1^2 \wedge (-e_{22}du^2) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^1 &= d\left(\frac{de_{11}}{2e_{11}}\right) \\
&= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^1) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^1) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^1) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^1) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^1) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^1) \\
&= -e_{11}du^1 \wedge du^1 + \omega_1^2 \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^2 &= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^2) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^2) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^2) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^2) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^2) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^2) \\
&= -e_{11} du^1 \wedge du^2 + \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge \omega_1^2 + \omega_1^2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^3 &= d(-2g_{11} du^1) \\
&= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^3) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^3) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^3) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^3) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^3) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^3) \\
&= \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge (-2g_{11} du^1) + \omega_1^2 \wedge (-2g_{22} du^2) + dc_1 \wedge (-e_{11} du^1) + \omega_1^5 \wedge (-e_{22} du^2) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^4 &= 0 \\
&= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^4) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^4) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^4) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^4) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^4) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^4) \\
&= \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge (dc_1) + \omega_1^2 \wedge \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}} (\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2) \right) \\
&\quad - 2g_{11} du^1 \wedge du^1 + dc_1 \wedge \left(\frac{de_{11}}{2e_{11}} \right) + \omega_1^5 \wedge \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 \right) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_1^5 &= (\omega_1^0 \wedge \omega_0^5) + (\omega_1^1 \wedge \omega_1^5) + (\omega_1^2 \wedge \omega_2^5) \\
&\quad + (\omega_1^3 \wedge \omega_3^5) + (\omega_1^4 \wedge \omega_4^5) + (\omega_1^5 \wedge \omega_5^5) \\
&= \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge \omega_1^5 + \omega_1^2 \wedge dc_2 - 2g_{11} du^1 \wedge du^2 + dc_1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1^5 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0
\end{aligned}$$

$j = 2, 0 \leq k \leq 5:$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^0 &= d(-e_{22} du^2) \\
&= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^0) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^0) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^0) \\
&\quad + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^0) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^0) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^0) \\
&= -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 \wedge (-e_{11} du^1) + \frac{de_{22}}{2e_{22}} \wedge (-e_{22} du^2) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^1 &= d\left(-\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 \right) \\
&= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^1) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^1) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^1) \\
&\quad + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^1) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^1) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^1) \\
&= -e_{22} du^2 \wedge du^1 + -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 \wedge \left(-\frac{de_{11}}{2e_{11}} \right) + \left(-\frac{de_{22}}{2e_{22}} \right) \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^2 &= d\left(\frac{de_{11}}{2e_{11}}\right) \\
&= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^2) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^2) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^2) \\
&\quad + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^2) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^2) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^2) \\
&= -e_{22}du^2 \wedge du^2 + \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2\right) \wedge \omega_1^2 + \frac{de_{22}}{2e_{22}} \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^3 &= d(-2g_{22}du^2) \\
&= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^3) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^3) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^3) \\
&\quad + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^3) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^3) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^3) \\
&= -\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2 \wedge (-2g_{11}du^1) + \frac{de_{22}}{2e_{22}} \wedge (-2g_{22}du^2) \\
&\quad + \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)\right) \wedge (-e_{11}du^1) + dc_2 \wedge (-e_{22}du^2) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^4 &= d\left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)\right) \\
&= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^4) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^4) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^4) \\
&\quad + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^4) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^4) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^4) \\
&= -\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2 \wedge (dc_1) + \frac{de_{22}}{2e_{22}} \wedge \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)\right) \\
&\quad - 2g_{22}du^2 \wedge du^1 + \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)\right) \wedge \left(\frac{de_{11}}{2e_{11}}\right) + dc_2 \wedge \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2\right) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_2^5 &= (\omega_2^0 \wedge \omega_0^5) + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^5) + (\omega_2^2 \wedge \omega_2^5) + (\omega_2^3 \wedge \omega_3^5) + (\omega_2^4 \wedge \omega_4^5) + (\omega_2^5 \wedge \omega_5^5) \\
&= -\frac{e_{22}}{e_{11}}\omega_1^2 \wedge \omega_1^5 + \frac{de_{22}}{2e_{22}} \wedge dc_2 - 2g_{22}du^2 \wedge du^2 \\
&\quad + \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)\right) \wedge \omega_1^2 + dc_2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$j=3, 0 \leq k \leq 5:$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^0 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^0) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^0) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^0) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^0) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^0) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^1 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^1) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^1) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^1) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^1) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^1) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^2 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^2) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^2) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^2) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^2) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^2) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^3 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^3) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^3) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^3) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^3) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^3) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^3) \\
&= du^1 \wedge (-e_{11} du^1) + du^2 \wedge (-e_{22} du^2) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^4 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^4) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^4) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^4) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^4) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^4) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^4) \\
&= du^1 \wedge \left(\frac{de_{11}}{2e_{11}} \right) + du^2 \wedge \left(-\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2 \right) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^5 &= 0 \\
&= (\omega_3^0 \wedge \omega_0^5) + (\omega_3^1 \wedge \omega_1^5) + (\omega_3^2 \wedge \omega_2^5) \\
&\quad + (\omega_3^3 \wedge \omega_3^5) + (\omega_3^4 \wedge \omega_4^5) + (\omega_3^5 \wedge \omega_5^5) \\
&= du^1 \wedge \omega_1^2 + du^2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} + 0
\end{aligned}$$

Bemerkung 8:

An den Gleichungen (4.12) für $j=3$ und $0 \leq k \leq 5$ sowie an der speziellen Gestalt der Koeffizientenmatrix (4.9) erkennen wir, dass die Gleichungen für $3 \leq j \leq 5$ entweder nur triviale Lösungen $0=0$ gestatten oder es gilt, dass die Gleichungen $3 \leq j \leq 5$ und $3 \leq k \leq 5$ mit den entsprechenden Gleichungen $0 \leq j \leq 2$ und $0 \leq k \leq 2$ überein stimmen. Wir verzichten daher auf die weitere Darstellung der Gleichungen (4.12) und betrachten im Weiteren nur die Gleichungen $0 \leq j \leq 2$ und $0 \leq k \leq 5$.

Bemerkung 9:

Bei der Auswertung der Gleichungen (4.12) fällt sofort auf, dass nur 6 der 18 Gleichungen wesentlich sind. Genauer sind dies die Gleichungen $j=0$ mit $k=1, 2, 4$ oder 5 und $j=1$ mit $k=2$ oder 5 . Alle anderen gestatten entweder die Lösung $0=0$ oder sind von den zuvor genannten Gleichungen linear abhängig (vgl. [SOR]). Aufgrund dessen betrachten wir infolge nur diese 6 Gleichungen.

Zur Berechnung der Differentialform ω_1^2 verwenden wir die Gleichungen:

$$j=0, k=1: 0 = du^1 \wedge \frac{de_{11}}{2e_{11}} + du^2 \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}} \omega_1^2$$

wobei:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge du^2 &= du^1 \wedge -\frac{e_{11}}{e_{22}} \frac{de_{11}}{2e_{11}} \\ \omega_1^2 \wedge du^2 &= du^1 \wedge -\frac{e_{11}}{e_{22}} \frac{e_{11'1} du^1 + e_{11'2} du^2}{2e_{11}} \\ \omega_1^2 \wedge du^2 &= (du^1 \wedge du^2) \left(-\frac{e_{11'2}}{2e_{22}} \right) \end{aligned}$$

und

$$j=0, k=2: 0 = du^1 \wedge \omega_1^2 + du^2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge du^1 &= du^2 \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} \\ \omega_1^2 \wedge du^1 &= du^2 \wedge \frac{e_{22'1} du^1 + e_{22'2} du^2}{2e_{22}} \\ \omega_1^2 \wedge du^1 &= (du^2 \wedge du^1) \left(\frac{e_{22'1}}{2e_{22}} \right). \end{aligned}$$

Es ergibt sich so eine Darstellung für die Differentialform ω_1^2 zu:

$$\omega_1^2 = \frac{e_{22'1} du^2 - e_{11'2} du^1}{2e_{22}} = \frac{\begin{vmatrix} e_{22'1} & du^1 \\ e_{11'2} & du^2 \end{vmatrix}}{2e_{22}}. \quad (4.13)$$

Analog berechnet sich die Differentialform ω_1^5 aus den Gleichungen

$$j=0, k=4: 0 = du^1 \wedge dc_1 + du^2 \wedge -\frac{e_{22}}{e_{11}}(\omega_1^5 + 2(c_2 - c_1)\omega_1^2)$$

$$\omega_1^5 \wedge du^2 = \frac{e_{11}}{e_{22}} \left(dc_1 \wedge du^1 - 2\frac{e_{22}}{e_{11}}(c_2 - c_1)\omega_1^2 \wedge du^2 \right)$$

$$\omega_1^5 \wedge du^2 = \frac{e_{11}}{e_{22}} \left((c_{1,1} du^1 + c_{1,2} du^2) \wedge du^1 - 2\frac{e_{22}}{e_{11}}(c_2 - c_1) \frac{e_{22,1} du^2 - e_{11,2} du^1}{2e_{22}} \wedge du^2 \right)$$

$$\omega_1^5 \wedge du^2 = \left(-c_{1,2} \frac{e_{11}}{e_{22}} + (c_2 - c_1) \frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right) (du^1 \wedge du^2)$$

$$j=0, k=5: 0 = du^1 \wedge \omega_1^5 + du^2 \wedge dc_2$$

$$\omega_1^5 \wedge du^1 = du^2 \wedge dc_2$$

$$\omega_1^5 \wedge du^1 = du^2 \wedge (c_{2,1} du^1 + c_{2,2} du^2)$$

$$\omega_1^5 \wedge du^1 = c_{2,1} (du^2 \wedge du^1)$$

und damit ω_1^5 zu:

$$\omega_1^5 = \left(-c_{1,2} \frac{e_{11}}{e_{22}} + (c_2 - c_1) \frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right) du^1 + c_{2,1} du^2. \quad (4.14)$$

Betrachten wir abschließend $j=1$ mit $k=2$ aus den Gleichungen (4.12) und setzen die Darstellungen von ω_1^2 und ω_1^5 aus (4.13) und (4.14) ein, so ergeben sich:

$$j=1, k=2:$$

$$\begin{aligned} & d \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2 \right) \\ &= -e_{11} du^1 \wedge du^2 + \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2 \right) + \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2 \right) \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} \end{aligned}$$

linke Seite:

$$\begin{aligned}
&= d\left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}}\right) \wedge du^1 + 0 + d\left(\frac{e_{22,1}}{2e_{22}}\right) \wedge du^2 + 0 \\
&= \frac{-d(e_{11,2})e_{22} + de_{22}e_{11,2}}{2e_{22}^2} \wedge du^1 + \frac{d(e_{22,1})e_{22} - de_{22}e_{22,1}}{2e_{22}^2} \wedge du^2 \\
&= \left(-d(e_{11,2}) \wedge du^1\right)e_{22} + (de_{22} \wedge du^1)e_{11,2} + (d(e_{22,1}) \wedge du^2)e_{22} - (de_{22} \wedge du^2)e_{22,1} \frac{1}{2e_{22}^2} \\
&= \left(de_{22} \wedge (e_{11,2} du^1 - e_{22,1} du^2) - (d(e_{11,2}) \wedge du^1)e_{22} + (d(e_{22,1}) \wedge du^2)e_{22}\right) \frac{1}{2e_{22}^2} \\
&= \left(de_{22} \wedge (e_{11,2} du^1 - e_{22,1} du^2) - (e_{11,2} du^1 + e_{11,22} du^2) \wedge du^1 e_{22}\right) \frac{1}{2e_{22}^2} \\
&\quad + \left((e_{22,1} du^1 + e_{22,12} du^2) \wedge du^2 e_{22}\right) \frac{1}{2e_{22}^2} \\
&= \left((e_{22,1} du^1 + e_{22,2} du^2) \wedge (e_{11,2} du^1 - e_{22,1} du^2) - e_{22} e_{11,22} (du^2 \wedge du^1) + e_{22} e_{22,1} (du^1 \wedge du^2)\right) \frac{1}{2e_{22}^2} \\
&= \left((-e_{11,2} e_{22,2} - e_{22,1}^2)(du^1 \wedge du^2) + (e_{22} e_{22,1} + e_{22} e_{11,22})(du^1 \wedge du^2)\right) \frac{1}{2e_{22}^2}.
\end{aligned}$$

rechte Seite:

$$\begin{aligned}
&= -e_{11}(du^1 \wedge du^2) + \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2\right) + \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2\right) \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}} \\
&= \frac{1}{4e_{22}^2} (-e_{11,2} du^1 + e_{22,1} du^2) \wedge de_{22} + \frac{1}{4e_{11}e_{22}} de_{11} \wedge (e_{22,1} du^2 - e_{11,2} du^1) - e_{11}(du^1 \wedge du^2) \\
&= \frac{1}{4e_{22}^2} (-e_{11,2} du^1 + e_{22,1} du^2) \wedge de_{22} + \frac{1}{4e_{11}e_{22}} (e_{11,1} du^1 + e_{11,2} du^2) \wedge (e_{22,1} du^2 - e_{11,2} du^1) \\
&\quad - e_{11}(du^1 \wedge du^2) \\
&= \frac{1}{4e_{22}^2} (-e_{11,2} du^1 + e_{22,1} du^2) \wedge (e_{22,1} du^1 + e_{22,2} du^2) + \frac{1}{4e_{11}e_{22}} (e_{11,1}e_{22,1} + e_{11,2}^2)(du^1 \wedge du^2) \\
&\quad - e_{11}(du^1 \wedge du^2) \\
&= \frac{1}{4e_{22}^2} (-e_{22,1}^2 - e_{11,2}e_{22,2})(du^1 \wedge du^2) + \frac{1}{4e_{11}e_{22}} (e_{11,1}e_{22,1} + e_{11,2}^2 - 4e_{11}^2e_{22})(du^1 \wedge du^2).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich von linker und rechter Seite ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= (-e_{11,2} e_{22,2} - e_{22,1}^2 + e_{22} e_{22,11} + e_{22} e_{11,22}) \frac{1}{2e_{22}^2} + (e_{22,1}^2 + e_{11,2} e_{22,2}) \frac{1}{4e_{22}^2} \\
&\quad - (e_{11,1} e_{22,1} + e_{11,2}^2 - 4e_{11}^2 e_{22}) \frac{1}{4e_{11} e_{22}} \\
0 &= 2e_{11} e_{22} e_{22,11} + 2e_{11} e_{22} e_{11,22} - e_{11} e_{11,2} e_{22,2} - e_{22} e_{11,1} e_{22,1} - e_{11} e_{22,1}^2 - e_{22} e_{11,2}^2 + 4e_{11}^2 e_{22}^2 \\
&\quad \updownarrow \\
0 &= e_{11} \left(\left(\frac{e_{22,1}}{e_{11}} \right)_{,1} + \left(\frac{e_{11,2}}{e_{11}} \right)_{,2} \right) + e_{22} \left(\left(\frac{e_{22,1}}{e_{22}} \right)_{,1} + \left(\frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right)_{,2} \right) + 4e_{11} e_{22}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Analog gilt für $j=1$, $k=5$:

$$\begin{aligned}
& d \left(\left(-c_{1,2} \frac{e_{11}}{e_{22}} + (c_2 - c_1) \frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right) du^1 + c_{2,1} du^2 \right) \\
&= \frac{de_{11}}{2e_{11}} \wedge \left(\left(-c_{1,2} \frac{e_{11}}{e_{22}} + (c_2 - c_1) \frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right) du^1 + c_{2,1} du^2 \right) \\
&\quad + \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2 \right) \wedge dc_2 - 2g_{11} du^1 \wedge du^2 + dc_1 \wedge \left(-\frac{e_{11,2}}{2e_{22}} du^1 + \frac{e_{22,1}}{2e_{22}} du^2 \right) \\
&\quad + \left(\left(-c_{1,2} \frac{e_{11}}{e_{22}} + (c_2 - c_1) \frac{e_{11,2}}{e_{22}} \right) du^1 + c_{2,1} du^2 \right) \wedge \frac{de_{22}}{2e_{22}}.
\end{aligned}$$

Mit gleichem Rechenmuster erhalten wir nach einer etwas mühsamen Rechnung:

$$\begin{aligned}
0 &= 2e_{11}^2 e_{22}^2 (g_{11,22} + g_{22,11}) - 2e_{11}^2 e_{22} e_{22,1} g_{22,1} - 2e_{11} e_{22}^2 e_{11,2} g_{11,2} - e_{11}^2 e_{22} e_{22,2} g_{11,2} - e_{11} e_{22}^2 e_{11,1} g_{22,1} \\
&\quad - e_{11}^2 e_{22} e_{11,2} g_{22,2} - e_{11} e_{22}^2 e_{22,1} g_{11,1} + e_{22}^2 e_{11,2}^2 g_{11} + e_{11}^2 e_{22,1}^2 g_{22} + e_{22}^2 e_{11,1} e_{22,1} g_{11} + e_{11}^2 e_{11,2} e_{22,2} g_{22} \\
&\quad + 4g_{11} e_{11}^2 e_{22}^3 + 4g_{22} e_{11}^3 e_{22}^2 \\
&\quad \updownarrow \\
0 &= e_{11} \left(\left(\frac{g_{22,1}}{e_{11}} \right)_{,1} + \left(\frac{g_{11,2}}{e_{11}} \right)_{,2} \right) + e_{22} \left(\left(\frac{g_{22,1}}{e_{22}} \right)_{,1} + \left(\frac{g_{11,2}}{e_{22}} \right)_{,2} \right) \\
&\quad - e_{11,2} (c_{1,2} + c_{2,2}) - e_{22,1} (c_{1,1} + c_{2,1}) + 4e_{11} e_{22} (c_1 + c_2). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Bemerkung 10:

Die Gleichungen (4.15) und (4.16) übernehmen die Rolle der Integrabilitätsbedingungen für S -normierte C^r -Geradenkongruenzen. Während in den Bestimmungsgleichungen (4.6) für die Differentialformen C^2 -Stetigkeit für die e_{ii} und g_{jj} vorauszusetzen war, muss für diese in den Gleichungen (4.12) mindestens $r \geq 3$ gefordert werden.

4.3 Invarianten bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$

Zur Untersuchung von Bewegungsinvarianten einer Geradenkongruenz wird man im Allgemeinen die Leitfläche und das mit einer Kongruenzgerade verbundene begleitende Bein einer orthogonalen Transformation unterziehen. Diese Frage behandeln S. P. FINIKOW in [FIN], J. HOSCHEK in [HOS] und R. KOCH in [KOC], wobei Letzterer die Willkür der verwendeten Leitfläche durch Wahl der ausgezeichneten Mittenfläche beseitigt. Es werden hierbei jene Bewegungen des Begleitbeins betrachtet, welche die Lage der Kongruenzgerade nicht verändern, im Wesentlichen also Drehungen um die Kongruenzgerade, mit der das Begleitbein verknüpft ist und Schiebungen entlang dieser.

Wir schließen uns diesem Weg prinzipiell an, bleiben jedoch im KLEINSchen Modell und fragen nach Invarianten von S -normierten C^r -Geradenkongruenzen bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$. Dabei betrachten wir geeignete projektive Transformationen, welche, angewendet auf die Ecken P_j , $0 \leq j \leq 5$ des Begleitsimplex, gewisse projektive „Drehungen“ bewirken, ohne die Lage des KLEINSchen Bildpunktes P_0 einer Kongruenzgerade p_0 zu verändern. Hierfür sind einige Überlegungen zusammengestellt.

- Die Tangenten $P^1 \subset T_{P_0}^2$ beschreiben in $\Pi_{(e)}^3$ entweder parabolische Komplexbüschel, deren Träger parabolische Tangentennetze an die Kongruenzgerade in dieser Richtung bilden, oder ein Büschel von Gebüschchen, dessen Träger aus einem Geradenbündel und Geradenfeld besteht (vgl. Abs. 2.2.1).
- Der von $P_0 \in M_4^2$ verschiedene SANNIA-Punkt S auf einer Tangente $P^1 \subset \mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ ist Berührungspunkt einer weiteren Hyperquadrik $V_4^2(c)$, deren Parameterwert c den Drall der p_0 enthaltenden Kongruenzregelflächen in dieser Richtung angibt. Die Punkte S sind \hat{v} -konjugiert zu P_0 , liegen demnach auf der \hat{v} -Polaren $P_0\hat{v}$ zu P_0 .
- Die SANNIA-Tangenten S_j^1 , $j=1,2$ mit $S_j^1 \notin M_4^2$ für elliptische und hyperbolische Kongruenzgeraden geben die „Hauptdrallrichtungen“ der Kongruenz an; sie sind in der Rechtwinkelinvolution im Tangentenbüschel $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$ miteinander gekoppelt (siehe Abschnitt 2.2.3).

Die Simplexecken P_j mit $j=0,1,2$ sind demnach so zu transformieren^{*)}, dass $P_0 = \bar{P}_0$ fest bleibt. Damit gilt insbesondere auch $P_0\mu = \bar{P}_0\mu$ und $P_0\hat{v} = \bar{P}_0\hat{v}$. Die Simplexecken \bar{P}_1 und \bar{P}_2 stellen sich als Linearkombination von P_1 und P_2 dar und inzidieren jeweils mit jenen Tangenten des Büschels $\mathfrak{G}_{P_0, T_{P_0}^2}$, welche in der Rechtwinkelinvolution gekoppelt sind.

Für den analytischen Ansatz bezeichnen a , b erneut die projektiven Parameter auf der Geraden $P_0\hat{v}$. Der Punkt $\bar{P}_1 \in P_0\hat{v}$ gestattet dann eine Darstellung $\bar{P}_1 = aP_1 + bP_2$. Die Lage von \bar{P}_2 berechnet sich hieraus unter Verwendung der Gleichungen (4.5) nach:

$$0 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m}{n} = -\frac{b e_{11}}{a e_{22}}.$$

^{*)} Transformierte Punkte werden wir infolge mit einem Querstrich versehen.

Es gilt demnach für die Transformation der Begleitsimplexecken P_0 , P_1 und P_2 :

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b\frac{e_{22}}{e_{11}} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Bemerkung 11:

Wählen wir im Ansatz (4.17) insbesondere $\frac{a}{b} = \pm\sqrt{e_{22}/e_{11}}$, so drehen sich die SANNIA-Tangenten S_j^1 auf die KUMMER-Tangenten K_j^1 , wobei mit $j=1,2$ gesetzt ist.

Aufgrund der speziellen Bauart des Begleitsimplex sowie (3.2) lässt sich die Transformationsmatrix in (4.17) für das gesamte Simplex ausbauen. Die Transformationsgleichungen lassen sich dann in der Form $\bar{P}_j := \beta_j^k P_k$ schreiben, wobei die Transformationsmatrizen $\mathbf{B} = (\beta_j^k)$ mit $j, k = 0, \dots, 5$ nachfolgend dargestellt sind. Im Vergleich der jeweiligen Matrixelemente ist unmittelbar erkennbar, dass die „linke obere“ (3×3)-Teilmatrix mit der „rechten unteren“ (3×3)-Teilmatrix übereinstimmt. Außerdem bestehen „linke untere“ und „rechte obere“ Teilmatrix nur aus „Nulleinträgen“.

$$\mathbf{B} := (\beta_j^k)_{\substack{0, \dots, 5 \\ 0, \dots, 5}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b\frac{e_{22}}{e_{11}} & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b\frac{e_{22}}{e_{11}} & a \end{array} \right); \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 12:

Um die sich anschließenden Überlegungen und Berechnungen nicht unnötig zu komplizieren, stellen wir für Matrixelemente a und b in \mathbf{B} die Forderung $a^2 + b^2 = 1$ auf. Verlangen wir außerdem $(P_1, P_1)_\nu = e_{11} = e_{22} = (P_2, P_2)_\nu$, was durch gewisse Umnormungen oder einen Parameterwechsel in \mathbb{R}^6 möglich ist, so lassen sich die zur Transformation gehörenden Matrizen \mathbf{B} in der folgenden Form darstellen:

$$\mathbf{B} := (\beta_j^k)_{\substack{0, \dots, 5 \\ 0, \dots, 5}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{array} \right), \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (4.18)$$

Die Ableitungsgleichungen (4.1) bezüglich des neuen Begleitsimplex $\{\bar{P}_j; j=0, \dots, 5\}$ schreiben sich in der Form $d\bar{P}_j = \bar{\omega}_j^k \bar{P}_k$, wobei $j, k=0, \dots, 5$ gilt. Wir berechnen im Folgenden die Differentialformen $\bar{\omega}_j^k$ und drücken diese in den ω_j^k aus.

$j=0$:

$$I \dots d\bar{P}_0 = \bar{\omega}_0^1 \bar{P}_1 + \bar{\omega}_0^2 \bar{P}_2 = dP_0$$

$$II \dots dP_0 = \omega_0^1 P_1 + \omega_0^2 P_2$$

Ersetzen wir in der ersten Gleichung mit Hilfe von (4.17) und führen anschließend einen Koeffizientenvergleich zwischen beiden Gleichungen durch, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} I \dots d\bar{P}_0 &= \bar{\omega}_0^1 \bar{P}_1 + \bar{\omega}_0^2 \bar{P}_2 \\ &= \bar{\omega}_0^1 (aP_1 + bP_2) + \bar{\omega}_0^2 (-bP_1 + aP_2) \\ &= (a\bar{\omega}_0^1 - b\bar{\omega}_0^2)P_1 + (b\bar{\omega}_0^1 + a\bar{\omega}_0^2)P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= a\bar{\omega}_0^1 - b\bar{\omega}_0^2 & \bar{\omega}_0^1 &= a\omega_0^1 + b\omega_0^2 \\ \omega_0^2 &= b\bar{\omega}_0^1 + a\bar{\omega}_0^2 & \bar{\omega}_0^2 &= -b\omega_0^1 + a\omega_0^2. \end{aligned}$$

Analog ist mit den restlichen $\bar{\omega}_j^k$ zu verfahren. Die so konstruierten Gleichungen zur Bestimmung der $\bar{\omega}_j^k$ bezeichnen wir mit (4.19).

$j=1$:

$$\begin{aligned} d\bar{P}_1 &= \bar{\omega}_1^0 \bar{P}_0 + \bar{\omega}_1^1 \bar{P}_1 + \bar{\omega}_1^2 \bar{P}_2 + \bar{\omega}_1^3 \bar{P}_3 + \bar{\omega}_1^4 \bar{P}_4 + \bar{\omega}_1^5 \bar{P}_5 \\ &= \bar{\omega}_1^0 P_0 + \bar{\omega}_1^1 (aP_1 + bP_2) + \bar{\omega}_1^2 (-bP_1 + aP_2) + \bar{\omega}_1^3 P_3 + \bar{\omega}_1^4 (aP_4 + bP_5) + \bar{\omega}_1^5 (-bP_4 + aP_5) \\ &= \bar{\omega}_1^0 P_0 + (a\bar{\omega}_1^1 - b\bar{\omega}_1^2)P_1 + (b\bar{\omega}_1^1 + a\bar{\omega}_1^2)P_2 + \bar{\omega}_1^3 P_3 + (a\bar{\omega}_1^4 - b\bar{\omega}_1^5)P_4 + (b\bar{\omega}_1^4 + a\bar{\omega}_1^5)P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{P}_1 &= a dP_1 + da P_1 + b dP_2 + db P_2 \\ &= a(\omega_1^0 P_0 + \omega_1^1 P_1 + \omega_1^2 P_2 + \omega_1^3 P_3 + \omega_1^4 P_4 + \omega_1^5 P_5) + da P_1 \\ &\quad + b(\omega_2^0 P_0 + \omega_2^1 P_1 + \omega_2^2 P_2 + \omega_2^3 P_3 + \omega_2^4 P_4 + \omega_2^5 P_5) + db P_2 \\ &= (a\omega_1^0 + b\omega_2^0)P_0 + (a\omega_1^1 + b\omega_2^1 + da)P_1 + (a\omega_1^2 + b\omega_2^2 + db)P_2 \\ &\quad + (a\omega_1^3 + b\omega_2^3)P_3 + (a\omega_1^4 + b\omega_2^4)P_4 + (a\omega_1^5 + b\omega_2^5)P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^0 &= a\omega_1^0 + b\omega_2^0 & \bar{\omega}_1^0 &= a\omega_1^0 + b\omega_2^0 \\ a\bar{\omega}_1^1 - b\bar{\omega}_1^2 &= a\omega_1^1 + b\omega_2^1 + da & \bar{\omega}_1^1 &= a^2\omega_1^1 + a da + b db + ab(\omega_2^1 + \omega_1^2) + b^2\omega_2^2 \\ b\bar{\omega}_1^1 + a\bar{\omega}_1^2 &= a\omega_1^2 + b\omega_2^2 + db & \bar{\omega}_1^2 &= a^2\omega_1^2 + a db - b da + ab(\omega_2^2 - \omega_1^1) - b^2\omega_2^1 \\ \bar{\omega}_1^3 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^3 & \bar{\omega}_1^3 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^3 \\ a\bar{\omega}_1^4 - b\bar{\omega}_1^5 &= a\omega_1^4 + b\omega_2^4 & \bar{\omega}_1^4 &= a^2\omega_1^4 + ab(\omega_2^4 + \omega_1^5) + b^2\omega_2^5 \\ b\bar{\omega}_1^4 + a\bar{\omega}_1^5 &= a\omega_1^5 + b\omega_2^5 & \bar{\omega}_1^5 &= a^2\omega_1^5 + ab(\omega_2^5 - \omega_1^4) - b^2\omega_2^4 \end{aligned}$$

$j = 2$:

$$\begin{aligned} d\bar{P}_2 &= \bar{\omega}_2^0 \bar{P}_0 + \bar{\omega}_2^1 \bar{P}_1 + \bar{\omega}_2^2 \bar{P}_2 + \bar{\omega}_2^3 \bar{P}_3 + \bar{\omega}_2^4 \bar{P}_4 + \bar{\omega}_2^5 \bar{P}_5 \\ &= \bar{\omega}_2^0 P_0 + \bar{\omega}_2^1 (a P_1 + b P_2) + \bar{\omega}_2^2 (-b P_1 + a P_2) + \bar{\omega}_2^3 P_3 + \bar{\omega}_2^4 (a P_4 + b P_5) + \bar{\omega}_2^5 (-b P_4 + a P_5) \\ &= \bar{\omega}_2^0 P_0 + (a \bar{\omega}_2^1 - b \bar{\omega}_2^2) P_1 + (b \bar{\omega}_2^1 + a \bar{\omega}_2^2) P_2 + \bar{\omega}_2^3 P_3 + (a \bar{\omega}_2^4 - b \bar{\omega}_2^5) P_4 + (b \bar{\omega}_2^4 + a \bar{\omega}_2^5) P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{P}_2 &= -b dP_1 - db P_1 + a dP_2 + da P_2 \\ &= -b(\omega_1^0 P_0 + \omega_1^1 P_1 + \omega_1^2 P_2 + \omega_1^3 P_3 + \omega_1^4 P_4 + \omega_1^5 P_5) - db P_1 \\ &\quad + a(\omega_2^0 P_0 + \omega_2^1 P_1 + \omega_2^2 P_2 + \omega_2^3 P_3 + \omega_2^4 P_4 + \omega_2^5 P_5) + da P_2 \\ &= (a \omega_2^0 - b \omega_1^0) P_0 + (a \omega_2^1 - b \omega_1^1 - db) P_1 + (a \omega_2^2 - b \omega_1^2 + da) P_2 \\ &\quad + (a \omega_2^3 - b \omega_1^3) P_3 + (a \omega_2^4 - b \omega_1^4) P_4 + (a \omega_2^5 - b \omega_1^5) P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2^0 &= a \omega_2^0 - b \omega_1^0 & \bar{\omega}_2^0 &= a \omega_2^0 - b \omega_1^0 \\ a \bar{\omega}_2^1 - b \bar{\omega}_2^2 &= a \omega_2^1 - b \omega_1^1 - db & \bar{\omega}_2^1 &= a^2 \omega_2^1 + ab(\omega_2^2 - \omega_1^1) - b^2 \omega_1^2 + b da - a db \\ b \bar{\omega}_2^1 + a \bar{\omega}_2^2 &= a \omega_2^2 - b \omega_1^2 + da & \bar{\omega}_2^2 &= a^2 \omega_2^2 - ab(\omega_2^1 + \omega_1^2) + b^2 \omega_1^1 + b db + a da \\ \bar{\omega}_2^3 &= a \omega_2^3 - b \omega_1^3 & \bar{\omega}_2^3 &= a \omega_2^3 - b \omega_1^3 \\ a \bar{\omega}_2^4 - b \bar{\omega}_2^5 &= a \omega_2^4 - b \omega_1^4 & \bar{\omega}_2^4 &= a^2 \omega_2^4 + ab(\omega_2^5 - \omega_1^4) - b^2 \omega_1^5 \\ b \bar{\omega}_2^4 + a \bar{\omega}_2^5 &= a \omega_2^5 - b \omega_1^5 & \bar{\omega}_2^5 &= b^2 \omega_1^4 - ab(\omega_2^4 + \omega_1^5) + a^2 \omega_2^5 \end{aligned}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} d\bar{P}_3 &= \bar{\omega}_3^4 \bar{P}_4 + \bar{\omega}_3^5 \bar{P}_5 = dP_3 \\ &= \bar{\omega}_3^4 (a P_4 + b P_5) + \bar{\omega}_3^5 (-b P_4 + a P_5) \\ &= (a \bar{\omega}_3^4 - b \bar{\omega}_3^5) P_4 + (b \bar{\omega}_3^4 + a \bar{\omega}_3^5) P_5 \end{aligned}$$

$$dP_3 = \omega_3^4 P_4 + \omega_3^5 P_5$$

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= a \bar{\omega}_3^4 - b \bar{\omega}_3^5 & \bar{\omega}_3^4 &= a \omega_3^4 + b \omega_3^5 \\ \omega_3^5 &= b \bar{\omega}_3^4 + a \bar{\omega}_3^5 & \bar{\omega}_3^5 &= -b \omega_3^4 + a \omega_3^5 \end{aligned}$$

$j = 4$:

$$\begin{aligned} d\bar{P}_4 &= \bar{\omega}_4^3 \bar{P}_3 + \bar{\omega}_4^4 \bar{P}_4 + \bar{\omega}_4^5 \bar{P}_5 \\ &= \bar{\omega}_4^3 P_3 + \bar{\omega}_4^4 (a P_4 + b P_5) + \bar{\omega}_4^5 (-b P_4 + a P_5) \\ &= \bar{\omega}_4^3 P_3 + (a \bar{\omega}_4^4 - b \bar{\omega}_4^5) P_4 + (b \bar{\omega}_4^4 + a \bar{\omega}_4^5) P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{P}_4 &= a dP_4 + da P_4 + b dP_5 + db P_5 \\ &= a(\omega_4^3 P_3 + \omega_4^4 P_4 + \omega_4^5 P_5) + da P_4 \\ &\quad + b(\omega_5^3 P_3 + \omega_5^4 P_4 + \omega_5^5 P_5) + db P_5 \\ &= (a \omega_4^3 + b \omega_5^3) P_3 + (a \omega_4^4 + b \omega_5^4 + da) P_4 + (a \omega_4^5 + b \omega_5^5 + db) P_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_4^3 &= a \omega_4^3 + b \omega_5^3 & \bar{\omega}_4^3 &= a \omega_4^3 + b \omega_5^3 \\
a \bar{\omega}_4^4 - b \bar{\omega}_4^5 &= a \omega_4^4 + b \omega_5^4 + da & \bar{\omega}_4^4 &= a^2 \omega_4^4 + ab(\omega_5^4 + \omega_4^5) + b^2 \omega_5^5 + a da + b db \\
b \bar{\omega}_4^4 + a \bar{\omega}_4^5 &= a \omega_4^5 + b \omega_5^5 + db & \bar{\omega}_4^5 &= a^2 \omega_4^5 + ab(\omega_5^5 - \omega_4^4) - b^2 \omega_5^4 - b da + a db
\end{aligned}$$

$j = 5$:

$$\begin{aligned}
d\bar{P}_5 &= \bar{\omega}_5^3 \bar{P}_3 + \bar{\omega}_5^4 \bar{P}_4 + \bar{\omega}_5^5 \bar{P}_5 \\
&= \bar{\omega}_5^3 P_3 + \bar{\omega}_5^4 (a P_4 + b P_5) + \bar{\omega}_5^5 (-b P_4 + a P_5) \\
&= \bar{\omega}_5^3 P_3 + (a \bar{\omega}_5^4 - b \bar{\omega}_5^5) P_4 + (b \bar{\omega}_5^4 + a \bar{\omega}_5^5) P_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\bar{P}_5 &= -b dP_4 - db P_4 + a dP_5 + da P_5 \\
&= -b(\omega_4^3 P_3 + \omega_4^4 P_4 + \omega_4^5 P_5) - db P_4 \\
&\quad + a(\omega_5^3 P_3 + \omega_5^4 P_4 + \omega_5^5 P_5) + da P_5 \\
&= (-b \omega_4^3 + a \omega_5^3) P_3 + (-b \omega_4^4 + a \omega_5^4 - db) P_4 + (-b \omega_4^5 + a \omega_5^5 + da) P_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_5^3 &= -b \omega_4^3 + a \omega_5^3 & \bar{\omega}_5^3 &= -b \omega_4^3 + a \omega_5^3 \\
a \bar{\omega}_5^4 - b \bar{\omega}_5^5 &= -b \omega_4^4 + a \omega_5^4 - db & \bar{\omega}_5^4 &= a^2 \omega_5^4 + ab(\omega_5^5 - \omega_4^4) - b^2 \omega_4^5 + b da - a db \\
b \bar{\omega}_5^4 + a \bar{\omega}_5^5 &= -b \omega_4^5 + a \omega_5^5 + da & \bar{\omega}_5^5 &= a^2 \omega_5^5 - ab(\omega_4^5 + \omega_5^4) + b^2 \omega_4^4 + a da + b db
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4.19) erkennen wir, dass die Differentialformen ω_j^k unter den Transformationen des Begleitsimplexes im Allgemeinen nicht invariant bleiben. Durch Kombination der ω_j^k lassen sich jedoch Invarianten der C^r -Kongruenz finden. Wir geben diese nachfolgend an und bezeichnen sie mit (4.20).

$$\begin{aligned}
(\bar{\omega}_0^1)^2 + (\bar{\omega}_0^2)^2 &= (a \omega_0^1 + b \omega_0^2)^2 + (-b \omega_0^1 + a \omega_0^2)^2 \\
&= a^2 (\omega_0^1)^2 + b^2 (\omega_0^2)^2 + 2ab \omega_0^1 \omega_0^2 + b^2 (\omega_0^1)^2 + a^2 (\omega_0^2)^2 - 2ab \omega_0^1 \omega_0^2 \\
&= (a^2 + b^2) \left((\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 \right) \\
&= \left((\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 \right) \\
(I) &:= (du^1)^2 + (du^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\omega}_1^0)^2 + (\bar{\omega}_2^0)^2 &= (\omega_1^0)^2 + (\omega_2^0)^2 \\
(II) &:= (e_{11} du^1)^2 + (e_{22} du^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\omega}_1^3)^2 + (\bar{\omega}_2^3)^2 &= (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2 \\
(III) &:= (2g_{11} du^1)^2 + (2g_{22} du^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2 &= a^2 (\omega_1^1 + \omega_2^2) + b^2 (\omega_1^1 + \omega_2^2) + 2(ad a + b db) \\ &= (a^2 + b^2)(\omega_1^1 + \omega_2^2) + d(a^2 + b^2) \\ &= \omega_1^1 + \omega_2^2\end{aligned}$$

$$(IV) := \frac{de_{11}}{2e_{11}} + \frac{de_{22}}{2e_{22}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^1 &= (\omega_1^2 - \omega_2^1) + 2(ad b - b da) \\ d(\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^1) &= d(\omega_1^2 - \omega_2^1) + 2d(ad b - b da) \\ &= d(\omega_1^2 - \omega_2^1)\end{aligned}$$

$$(V) := d \left(\frac{\begin{pmatrix} e_{22,1} & du^1 \\ e_{11,2} & du^2 \end{pmatrix}}{2e_{22}} \left(1 + \frac{e_{22}}{e_{11}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^4 + \bar{\omega}_2^5 &= (a^2 + b^2)(\omega_1^4 + \omega_2^5) + ab(\omega_2^4 + \omega_1^5) - ab(\omega_2^4 + \omega_1^5) \\ &= \omega_1^4 + \omega_2^5\end{aligned}$$

$$(VI) := dc_1 + dc_2 = d(c_1 + c_2)$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2^4 - \bar{\omega}_1^5 &= (a^2 + b^2)(\omega_2^4 - \omega_1^5) + ab(\omega_2^5 - \omega_1^4) - ab(\omega_2^5 - \omega_1^4) \\ &= \omega_2^4 - \omega_1^5\end{aligned}$$

$$(VII) := - \left(\left(1 + \frac{e_{22}}{e_{11}} \right) \omega_1^5 + 2 \frac{e_{22}}{e_{11}} (c_2 - c_1) \omega_1^2 \right)$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1^0 \bar{\omega}_1^3 - \bar{\omega}_2^0 \bar{\omega}_2^3 &= (a \omega_1^0 + b \omega_2^0)(a \omega_1^3 + b \omega_2^3) + (a \omega_2^0 - b \omega_1^0)(a \omega_2^3 - b \omega_1^3) \\ &= (a^2 + b^2) \omega_1^0 \omega_1^3 + (ab - ba) \omega_1^0 \omega_2^3 + (ba - ab) \omega_2^0 \omega_1^3 + (b^2 + a^2) \omega_2^0 \omega_2^3 \\ &= \omega_1^0 \omega_1^3 + \omega_2^0 \omega_2^3\end{aligned}$$

$$(VIII) := 2e_{11} g_{11} (du^1)^2 + 2e_{22} g_{22} (du^2)^2$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2^0 \bar{\omega}_1^3 - \bar{\omega}_1^0 \bar{\omega}_2^3 &= (a \omega_2^0 - b \omega_1^0)(a \omega_1^3 + b \omega_2^3) - (a \omega_1^0 + b \omega_2^0)(a \omega_2^3 - b \omega_1^3) \\ &= (a^2 + b^2) \omega_2^0 \omega_1^3 + (ab - ba) \omega_2^0 \omega_2^3 + (-ba + ab) \omega_1^0 \omega_1^3 + (-b^2 - a^2) \omega_1^0 \omega_2^3 \\ &= \omega_2^0 \omega_1^3 - \omega_1^0 \omega_2^3\end{aligned}$$

$$(IX) := 2(e_{22} g_{11} + e_{11} g_{22}) du^1 du^2$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_0^1 \wedge \bar{\omega}_0^2 &= (a \omega_0^1 + b \omega_0^2) \wedge (-b \omega_0^1 + a \omega_0^2) \\ &= a^2 (\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) + b^2 (\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) \\ &= (a^2 + b^2) (\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) \\ &= \omega_0^1 \wedge \omega_0^2\end{aligned}$$

$$(X) := (du^1 \wedge du^2)$$

$$\bar{\omega}_1^0 \wedge \bar{\omega}_2^0 = \omega_1^0 \wedge \omega_2^0$$

$$(XI) := e_{11}e_{22}(du^1 \wedge du^2)$$

$$\bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3$$

$$(XII) := 4g_{11}g_{22}(du^1 \wedge du^2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^0 \wedge \bar{\omega}_2^3 + \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^0 &= (a\omega_1^0 + b\omega_2^0) \wedge (a\omega_2^3 - b\omega_1^3) + (a\omega_1^3 + b\omega_2^3) \wedge (a\omega_2^0 - b\omega_1^0) \\ &= (a^2 + b^2)(\omega_1^0 \wedge \omega_2^3) + (ab - ab)(\omega_1^0 \wedge \omega_1^3) \\ &\quad + (ba - ba)(\omega_2^0 \wedge \omega_2^3) + (a^2 + b^2)(\omega_1^3 \wedge \omega_2^0) \\ &= \omega_1^0 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^0 \\ (XIII) &:= 2(e_{11}g_{22} + e_{22}g_{11})(du^1 \wedge du^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^0 \wedge \bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}_2^0 \wedge \bar{\omega}_2^3 &= (a\omega_1^0 + b\omega_2^0) \wedge (a\omega_1^3 + b\omega_2^3) + (a\omega_2^0 - b\omega_1^0) \wedge (a\omega_2^3 - b\omega_1^3) \\ &= (a^2 + b^2)(\omega_1^0 \wedge \omega_1^3) + (ab - ab)(\omega_2^0 \wedge \omega_1^3) \\ &\quad + (ba - ba)(\omega_1^0 \wedge \omega_2^3) + (a^2 + b^2)(\omega_2^0 \wedge \omega_2^3) \\ &= \omega_1^0 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^0 \wedge \omega_2^3 \\ (XIV) &:= 2e_{11}g_{11}(du^1 \wedge du^1) + 2e_{22}g_{22}(du^2 \wedge du^2) = 0 \text{ (trivialer Fall)} \end{aligned}$$

Bemerkung 13:

In Anbetracht der speziellen Gestalt der Matrix (4.9) lassen sich aus den Gleichungen (4.19) Invarianten auch in dem Fall gewinnen, in denen sich die in den Gleichungen auftretenden Matrixelemente ω_m^n vollständig durch ω_{m+3}^{n+3} mit $\omega_{m+3}^{n+3} = \omega_m^n$ und $0 \leq m \leq 2$, $0 \leq n \leq 2$ ersetzen lassen. Wir verzichten jedoch auf ihre Darstellung, da die Rechnungen keine wesentlich neuen Ergebnisse liefern.

Die Invarianten in (4.20) gestatten eine Reihe geometrischer Deutungen, von denen an dieser Stelle vor allem jene anzusprechen sind, welche in der C^r -Geradenkongruenz gewisse „Dichtemaße“ beschreiben.

Die Quotienten $(XIII)/(XI)$ bzw. $(XII)/(XI)$ ergeben, wie eine einfache Rechnung zeigt, bis auf Koeffizienten genau die Summe bzw. das Produkt der Hauptdralle c_1 und c_2 . Da die Größen c_1 und c_2 bewegungsgeometrische Begriffe einer Kongruenzgerade p_0 sind, besitzen sicher auch $c_1 + c_2$ und $c_1 c_2$ geometrische Bedeutung. In Analogie zur klassischen Theorie der Flächen vereinbaren wir

Definition 6:

Sei $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und $P_0 \in P(U)$ eine Kongruenzgerade. Dann bezeichnen die Größen $2h := c_1 + c_2$ die *mittlere Krümmung* und $k := c_1 c_2$ die *GAUSSsche Krümmung* der Geradenkongruenz in P_0 .

Bemerkung 14:

Für torsale C^r -Kongruenzen verschwinden mittlere - und GAUSSsche Krümmung zu Null, während parabolische C^r -Kongruenzen durch verschwindendes GAUSSsches Krümmungsmaß bei nicht verschwindender mittlerer Krümmung gekennzeichnet sind.

Gilt an allen Stellen u des Parametergebietes $U \subset \mathbb{R}^2$ die Identität $h=0$, so erfüllen die Kongruenzgeraden eine *Normalenkongruenz*. Diese C^r -Kongruenzen sind dadurch gekennzeichnet, dass (an jeder Stelle des Parametergebietes) die torsalen Richtungen $\hat{\nu}$ -konjugiert sind, also von einer Orthogonalität stammen. Normalenkongruenzen bilden somit in der Theorie der Kongruenzen das Analogon zu den zweidimensionalen Flächen verschwindender mittlerer Krümmung in der Flächentheorie. Ein Beispiel hierfür sind die Normalen einer regulären C^2 -Fläche, welche eine C^1 -Normalenkongruenz erfüllen.

Definition 7:

Sei $P:U \rightarrow \Pi^5$ mit $u \in U \mapsto P(u) = (\mathfrak{p}(u), \bar{\mathfrak{p}}(u))\mathbb{R}$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz. Wir nennen die Abbildung $S_{sph}:U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $u \in U \mapsto \mathfrak{p}(u)$ das *sphärische Bild* der C^r -Geradenkongruenz P .

Bemerkung 15:

Die Fundamentalgrößen der ersten (flächentheoretischen) Grundform des sphärischen Bildes ergeben sich unmittelbar aus der ersten Grundform (2.7) der Kongruenz. Für S -normierte C^r -Kongruenzen gilt unter Verwendung der Schreibweise in (4.5):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{p}(u))_{,1} &=: \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_1^2 &= e_{11} \\ (\mathfrak{p}(u))_{,2} &=: \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_2^2 &= e_{22} \quad (\nu\text{-Produkt}). \\ & & \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Für das Bogenelementquadrat des sphärischen Bildes folgt somit:

$$ds^2 = e_{11} (du^1)^2 + e_{22} (du^2)^2,$$

was sich mit Hilfe der Invarianten (4.20) unter der getroffenen Normierungsvereinbarung zu $ds^2 = \sqrt{(I)(II)}$ schreibt. Das Flächenelement des sphärischen Bildes schreibt sich indes:

$$dO = \sqrt{e_{11}e_{22}} (du^1 \wedge du^2) \text{ bzw. } dO = \sqrt{(X)(XI)}.$$

Bei entsprechender Umdeutung der Produkte $e_{jj} := (P_j, P_j)_\nu$ mit $j=1,2$ in Π^5 erlaubt dO darüber hinaus eine weitere Interpretation als Flächenelement einer die Fläche $P(U)$ begleitenden Fernfläche $P_3(U) \subset P_\omega^2$.

Unter Verwendung des von E. KUMMER eingeführten Dichtemaßes (vgl. [BLA]) erscheint eine weitere Deutung obiger Invarianten sinnvoll. Es bezeichne hierfür dO^* ein Flächenelement um einen Punkt r auf der Kongruenzgerade p senkrecht zu dieser und ρ den Abstand von r zum Mittelpunkt m des Kongruenzstrahls. Wir betrachten alle Kongruenzstrahlen durch dieses Flächenelement und mit dO das zugehörige Flächenelement des sphärischen Bildes.

Der Quotient dO/dO^* ergibt sich zu

$$\frac{dO}{dO^*} = \frac{1}{c_1 c_2 + \rho^2},$$

und bezeichnet die *Dichte* der Geradenkongruenz an der Stelle r . Insbesondere folgt für die Dichte der Geradenkongruenz im Mittelpunkt m der Kongruenzgerade die Beziehung:

$$\frac{dO}{dO^*} = \frac{1}{c_1 c_2}.$$

Die Größe dO^* mit $dO^* = c_1 c_2 dO$ beziehungsweise $dO^* = ((XII)/4(XI))dO$ stellt also gerade das Flächenelement der Mittenfläche dar.

Daneben lassen sich einige Aussagen zur Theorie der Kongruenzen im Großen ins KLEINSche Modell übersetzen.

Bekanntermaßen berechnet sich die *Öffnung* l der äußersten Kongruenzregel­fläche einer C^r -Kongruenz durch das Gebietsintegral

$$l = \iint_U 2h dO,$$

wobei $2h$ und dO wie oben das mittlere Krümmungsmaß bzw. das Flächenelement des sphärischen Bildes der Kongruenz darstellen. Die Öffnung l der äußersten Kongruenzregel­fläche einer C^r -Kongruenz ist sicher ein bewegungsgeometrischer Begriff. Sie schreibt sich unter Verwendung der Invarianten (4.20) in der Form

$$l = \iint_U ((XIII)/(XI)) dO.$$

Die Bildung $((XIII)/(XI))dO$ lässt sich analog als ein gewisses infinitesimales *Öffnungs­element* deuten.

Die Invarianten (X) , (XI) , (XII) und $(XIII)$ sowie geeignete Verknüpfungen dieser gestatten im KLEINSchen Modell ferner eine Deutung als zu $P(U)$ einer S -normierten C^r -Kongruenz gehörende Flächenelemente. Eine sich anschließende Aufgabe könnte sein, Begriffe für das Flächenelement auf $P(U)$ zu konstruieren, die diese Invarianten oder zumindest einige dieser enthalten. Zu vermuten ist hierbei, dass diese Begriffsbildungen für $P(U)$ gewisse „Dichtemaße“ für die C^r -Geradenkongruenz in Π_e^3 beschreiben.

5 Lokale Theorie der C^r -Kongruenzen unter Benutzung CAYLEY- KLEINScher Maßbestimmungen

Die (lokale) Theorie der C^r -Kongruenzen $P:U \rightarrow \Pi^5$ des projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes Π_e^3 lässt sich im KLEINSchen Modell als (lokale) Theorie der 2-Flächen $P(U)$ auf der KLEINSchen Hyperquadrik M_4^2 bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$ betrachten.

Von diesem Übertragungsprinzip ausgehend konstruieren wir in diesem Kapitel (gemäß dem Vorgehen in CAYLEY- KLEIN Räumen) unter Verwendung von Absolutfiguren gewisse Maßbestimmungen für die KLEINSchen Bilder $P(U)$ der C^r -Kongruenzen des Π_e^3 . Hierauf gestützt werden lokale Aussagen zur Theorie dieser 2-Flächen formuliert. Dabei wird der Anspruch weniger im Aufbau einer umfassenden Theorie der m -Flächen liegen. Vielmehr werden wir bereits vorhandene Aussagen über C^r -Kongruenzen verwenden und neu deuten.

Ausführliche Betrachtungen zur Kurven- und Hyperflächentheorie in CAYLEY- KLEINSchen Räumen finden sich bei O. GIERING in [GIE]. Über die m -Flächentheorie n -dimensionaler Räume schreibt beispielsweise H. BRAUNER in [BRA1].

5.1 Zum Begriff eines CAYLEY- KLEIN Raumes, Überlegungen im KLEINSchen Modell

Wir stellen uns auf den Standpunkt von FELIX KLEIN und betrachten Geometrie als *Invariantentheorie einer Gruppe* [ERLANGER PROGRAMM (1872)]. Die Gruppe der Bewegungen des projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes Π_e^3 erzeugt im fünfdimensionalen projektiven Raum Π^5 jene Gruppe von Kollineationen, welche jede Hyperquadrik $V_4^2(c)$ des Büschels $\{V_4^2(c)\}$ einzeln fest lassen.

Wir wählen zunächst in Π^5 eine (beliebige) Hyperquadrik $V_4^2(\tilde{c})$ des Büschels $\{V_4^2(c)\}$ als Absolutfigur, betrachten also die Untergruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(\tilde{c})) \subset PGL(\Pi^5, V_4^2(c))$ derjenigen Kollineationen κ , welche $V_4^2(\tilde{c})$ als Ganzes festlassen^{*)}. Für $\tilde{c} = 0$ ergibt sich dabei gerade die KLEINSche Transformierte der projektiven Gruppe $PGL(\Pi^3)$.

Durch ihre Auszeichnung lassen sich in Π^5 projektive Metriken induzieren. Wir erhalten so eine „Obergeometrie“ der projektiven Geometrie, welche *CAYLEY- KLEIN Geometrie* genannt wird. Den zugehörigen Raum nennt man üblicherweise einen *CAYLEY- KLEIN Raum*.

Definition 1 (vergleiche [GIE]):

Ein *CAYLEY- KLEIN Raum* ist ein projektiver Raum Π^n ($n \geq 1$) mit einer Absolutfigur F im (gegebenenfalls komplex erweiterten) $\hat{\Pi}^n$, welche aus der absteigenden Folge

$$Q_{r_0 q_0}^{n-1} \supset A^n \supset Q_{r_1 q_1}^{n-1} \supset A^{n-1} \supset \dots \supset A^{n-p+1} \supset Q_{r_{p-1} q_{p-1}}^{n-p+1} \supset A^{n-p} \supset Q_{r_p q_p}^{n-p-1}$$

besteht, wobei $Q_{r_0 q_0}^{n-1} \dots Q_{r_{p-1} q_{p-1}}^{n-p+1}$ kegelige Ordnungsquadriken, $A^n \dots A^{n-p}$ ihre Spitzenräume und $Q_{r_p q_p}^{n-p-1}$ eine nichtentartete Ordnungsquadrik bezeichnen.

^{*)} Ein analoges Vorgehen ist aus der projektiven Geometrie im $(\Pi^n, PGL(\Pi^n))$ bekannt, die durch Auszeichnung einer Hyperebene u zur affinen Geometrie $(\bar{A}^n, PGL(\Pi^n, u))$ spezifiziert werden kann.

Die Indizes r_i und q_i geben dabei *Rang* und *Index* der Quadriken an. Der Zeiger $n_i - 1$ bezeichnet hingegen die Dimension der Quadrik.

Bemerkung 1:

Die Hyperquadriken $V_4^2(c)$ des Büschels $\{V_4^2(c)\}$ sind für $c \in \mathbb{R}$ ausnahmslos reguläre, also nichtentartete Hyperquadriken. Die einzige singuläre (kegelige) Hyperquadrik N_4^2 in diesem Büschel besitzt den Parameterwert $c = \infty$ und existiert nur in der komplexen Erweiterung. Ihr reeller zweidimensionaler Spitzenraum P_ω^2 liegt auf jeder Hyperquadrik des Büschels. In P_ω^2 existiert über \mathbb{C} ein (nichtentarteter) Kegelschnitt \bar{V}_1^2 , der von der absoluten Polarität in der Fernebene $\omega \subset \Pi^3$ stammt.

Damit lässt sich über Absolutfiguren $F^{(c)}, c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in Π^5 wie folgt verfügen.

$$\begin{aligned} F^{(c)} &:= V_4^2(c) \text{ für } c \in \mathbb{R} \text{ bzw.} \\ F^{(\infty)} &:= N_4^2 \supset P_\omega^2 \supset \bar{V}_1^2 \text{ für } c = \infty. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wir nennen die Quadriken $V_4^2(c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ sowie \bar{V}_1^2 *Absolutquadriken*, N_4^2 einen *Absolutkegel* und P_ω^2 eine *Absolutebene*. Alle Punkte $P \in \Pi^5 \setminus F$ nennt man üblicherweise *eigentliche Punkte*, sonst *uneigentliche (Fern-) Punkte*.

Verwendet man $F^{(c)}$ mit $c \in \mathbb{R}$ als Absolutfigur, also eine beliebige reguläre Hyperquadrik $V_4^2(c)$ des Büschels, so heißt der Raum Π^5 *nichtentartet* (hyperbolisch), im Fall der Absolutfigur $F^{(\infty)}$ *einfach entartet* (quasielliptisch).

Bemerkung 2:

Wir werden von Definition 1 gemäß unserer Überlegungen des Öfteren derart abweichen, dass wir in Π^5 das Hyperquadrikenbüschel $\{V_4^2(c)\}$ als Absolutfigur F auszeichnen. Wir können demnach die Vereinigung aller Absolutfiguren (5.1) betrachten. Genauer soll gelten:

$$\{V_4^2(c) : c \in \mathbb{R} \cup \infty, c \neq 0\} \text{ bzw. } \{V_4^2(\varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon = -1/c\}.*)$$

Dabei erscheint der Ausschluss von M_4^2 in F nicht wesentlich, da sicherlich gilt:

$$PGL(\Pi^5, V_4^2(c)) = PGL(\Pi^5, V_4^2(\hat{c})); \quad c \in \mathbb{R}, \hat{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bezogen auf das im Kapitel 3 eingeführte projektive Koordinatensystem besitzt die kegelige Ordnungsquadratik N_4^2 die Koordinatendarstellung $(\mathfrak{p}^T E_0 \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^2 = 0$ (5.2a), wobei E_0 die dreireihige Einheitsmatrix bezeichnet. N_4^2 ist in diesem Koordinatensystem somit in der Normalform gegeben. Für den Spitzenraum P_ω^2 gelten die Gleichungen $\mathfrak{p} = O$, während die nichtentartete Quadrik \bar{V}_1^2 durch $(\bar{\mathfrak{p}}^T E_1 \bar{\mathfrak{p}}) = \bar{\mathfrak{p}}^2 = 0$ (5.2b) gegeben ist. E_1 bezeichnet auch hier die dreireihige Einheitsmatrix. Damit ist über die Darstellung der Absolutfigur $F^{(0)} := N_4^2 \supset P_\omega^2 \supset \bar{V}_1^2$ verfügt.

*) Im Folgenden erweist sich die Verwendung des Parameterwertes ε als negatives Reziprokes des Schraubparameters c als günstig. Wenn nicht anders vereinbart, verwenden wir nachfolgend diesen.

Für $\varepsilon \neq 0$ ist die Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ bezogen auf das verwendete projektive Koordinatensystem nicht in Normalform gegeben. Sie schreibt sich:

$$(\bar{p}, \bar{p})^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} (\bar{p}, \bar{p}) = 0, \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

In Π^5 lassen sich die (homogenen) Koordinatenmatrizen $(q, \bar{q}) \mathbb{R}$ von nicht in der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ liegenden Punkten Q bezüglich dieser Absolutfigur *normieren*. Für $Q \in M_4^2 \setminus P_\omega^2$ und $\varepsilon \neq 0$ ergibt sich etwa

$$(q, \bar{q})^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} (q, \bar{q}) = q^2 + \varepsilon q \bar{q} = q^2 = 1.$$

Gilt $\varepsilon = 0$, so lautet die *Normierungsbedingung* für $Q \in M_4^2 \setminus P_\omega^2$ bezüglich $F^{(0)}$:

$$q^T \mathbf{E}_0 q = q^2 = 1.$$

Bemerkung 3:

Analog lassen sich Punkte $Q \in P_\omega^2 \setminus \bar{V}_1^2$ mit $q = O$ bezüglich \bar{V}_1^2 (also kommend von der Absolutfigur $F^{(0)}$) durch die Bedingung $\bar{q}^T \mathbf{E}_1 \bar{q} = \bar{q}^2 = 1$ normieren. Über die Normierung der reellen (homogenen) Koordinatenmatrizen für Punkte $Q \in M_4^2 \setminus P_\omega^2$ bzw. $Q \in P_\omega^2 \setminus \bar{V}_1^2$ lässt sich damit auch durch CAYLEY- KLEINSche Betrachtungsweisen verfügen.

Satz 1:

Es sei q eine beliebige Gerade in Π_e^3 sowie $Q = q\Gamma$ ihr KLEINSches Bild. Gilt $Q \in M_4^2 \setminus P_\omega^2$, so lassen sich die projektiven Koordinatenmatrizen $(q, \bar{q}) \mathbb{R}$ des Punktes Q durch $q^2 = 1$ normieren. Diese Normierungsbedingung ist nicht abhängig von der speziellen Wahl der maßgebenden Hyperquadrik $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$), lässt sich also bezüglich des Büschels $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ gebildet auffassen. Die Koordinatenmatrix (q, \bar{q}) des Punktes Q ist hierdurch eindeutig bestimmt. Sie stimmt mit der in Definition 1 im Abschnitt 3.1 getroffenen Normierungsvereinbarung überein.

Für die projektiven Koordinatenmatrizen $(q, \bar{q}) \mathbb{R}$ zu $Q \in P_\omega^2 \setminus \bar{V}_1^2$, also zu KLEINSchen Bildern von Fernerzeugenden lässt sich hingegen eine Normierungsbedingung bezüglich \bar{V}_1^2 durch $\bar{q}^2 = 1$ angeben. Die Koordinatenmatrix (q, \bar{q}) des Punktes Q ist hierdurch wiederum eindeutig bestimmt.

Die auf diesem Weg normierten Koordinaten nennen wir *WEIERSTRASS-Koordinaten*.

5.2 Über 2-Flächen $P(U)$ und Flächenkurven in CAYLEY- KLEIN Räumen

Für die nachfolgenden Überlegungen erscheint es sinnvoll, die im Kapitel 2 eingeführten und verwendeten differentialgeometrischen Begriffe (hauptsächlich im Zusammenhang mit einer 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$, auf ihr liegender Flächenkurven sowie der Tangential 2-Ebene) in CAYLEY- KLEIN Räumen zu betrachten. Naturgemäß bleiben hierbei insbesondere projektiv-geometrische Begriffe von der speziellen Struktur eines der gewählten CAYLEY-KLEIN Räume unberührt.

Definition 2:

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet und u^j mit $j=1,2$ in $u=(u^1, u^2) \in U$ ein Flächenparameter. Sei außerdem mit $P:U \rightarrow (\Pi^5, PGL(\Pi^5, F^{(\varepsilon)}))$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine C^r -Einbettung von U in den CAYLEY- KLEIN Raum gegeben. Die Punktmenge $P(U) \subset (\Pi^5, PGL(\Pi^5, F^{(\varepsilon)}))$ heißt dann *einfache 2-Fläche*.

Bemerkung 4:

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich die KLEINSchen Bilder $P(U) \subset M_4^2$ zu S -normierten C^r -Kongruenzen. Andere (einfache) 2-Flächen sollen nicht untersucht werden. Die Koordinatenmatrizen jedes Punktes $P(u) \in P(U)$ haben somit die PLÜCKER-Identität (1.3) zu erfüllen. Im Folgenden beschreiben wir die Punkte $P(u)$ durch WEIERSTRASS-Koordinaten. Hierdurch entfallen Umnormungsfragen.

Definition 3 (vergleiche [GIE]):

Eine Teilmenge $P(I)$ einer 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ eines CAYLEY- KLEIN Raumes heißt eine *Flächenkurve*, wenn ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f:I \rightarrow U$ mit $t \mapsto u^j(t)$ existieren, so dass $(\dot{u}^1(t), \dot{u}^2(t)) \neq (0,0)$ und $P(f(I)) \subset P(U)$ eine Kurve ist.

Flächenkurven einer 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ mit den Parametrisierungen

$$(\mathfrak{p}(t, u_0^2), \bar{\mathfrak{p}}(t, u_0^2)) \text{ bzw. } (\mathfrak{p}(u_0^1, t), \bar{\mathfrak{p}}(u_0^1, t)),$$

wobei $u_0^j = \text{const.}$ mit $j=1,2$ und $t \in I$ gelten, heißen *j-Parameterkurven* in $P(U)$.

Darüber hinaus lassen sich Begriffe wie die der *Tangenten* an Flächenkurven, der *Tangentialebene* an die 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ sowie der (tangential liegenden) *Polarhyperebene* an M_4^2 in einem Punkt $P \in M_4^2$ aus den vorangegangenen Abschnitten unproblematisch übertragen. Im Hinblick auf Aussagen aus Bemerkung 1 in diesem Abschnitt vereinbaren wir noch folgende

Definition 5 (vergleiche [GIE]):

Eine 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ eines CAYLEY- KLEIN Raumes heißt eine *eigentliche 2-Fläche*, wenn sie nur eigentliche Punkte enthält.

5.3 Erste Grundformen für $P(U)$ aus CAYLEY- KLEINScher Sicht

Wir versehen den Raum Π^5 mit einer Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) und betrachten ihn im Sinne der Bemerkungen 1 und 2 als einen gewissen CAYLEY- KLEIN Raum. Mit $P(U) \subset M_4^2$ sei eine eigentliche 2-Fläche betrachtet, die durch eine bezüglich der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ normierte Darstellung gemäß Satz 1 beschrieben ist. Weiterhin sei mit $P(f(I)) \subset P(U)$ eine über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Flächenkurve gegeben. Die Tangenten an $P(f(I)) \subset P(U)$ seien Passanten beziehungsweise Sekanten von $V_4^2(\varepsilon)$ (vgl. Abschnitt 2.2.2)*).

Für die betrachtete Flächenkurve $P(f(I)) \subset P(U)$ lässt sich eine invariante Parametrisierung angeben, die durch die Absolutquadrik $V_4^2(\varepsilon)$ erzeugt wird.

Satz 2:

Sei $P(U) \subset M_4^2$ eine 2-Fläche und $P(f(I)) \subset P(U)$ eine Flächenkurve, die der Bedingung

$$\varepsilon \neq 0: \left| \frac{dP^T}{ds} {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \frac{dP^T}{ds} \right| = 1^{**}) \quad \text{beziehungsweise}$$

$$\varepsilon = 0: \frac{d\mathfrak{p}}{ds} \mathbf{E}_0 \frac{d\mathfrak{p}}{ds} = 1$$

genügt. Dann bezeichnet

$$\varepsilon \neq 0: s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{|\dot{P}(t)^T {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \dot{P}(t)|} dt \quad \text{beziehungsweise}$$

$$\varepsilon = 0: s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\mathfrak{p}}(t)^T \mathbf{E}_0 \dot{\mathfrak{p}}(t)} dt \quad (5.4)$$

einen gegenüber $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$ und gleichsinnigen Parametertransformationen invarianten Parameter s . Die Bildung s wird üblicherweise „natürlicher Parameter“ genannt und bezeichnet die „Bogenlänge“ der Flächenkurve $P(f(I))$ (bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$) im Intervall $[t_0, t_1] \subset I$. Sie ist ein bewegungsgeometrischer Begriff im Sinne von Abschnitt 2.2.4.

Beweis:

Für die Invarianz von s bezüglich $PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$ betrachten wir eine Kollineation κ aus $PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$, wobei $P(t) = \mathbf{A}P^*(t)$ mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_6 \mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix} \mathbb{R} \dots \mathbf{A}_{00} = (a^*, b^*, c^*), \det(\mathbf{A}_{00}) = 1 \dots \mathbf{B} = (h^* \times a^*, h^* \times b^*, h^* \times c^*)$$

gelten***).

*) Die von uns betrachteten 2-Flächen $P(U) \subset M_4^2$ besitzen als KLEINSche Bilder von S -normierbaren C^r -Kongruenzen laut Voraussetzung diese Eigenschaften.

**) Um die Lesbarkeit der nachstehenden Gleichungen zu verbessern, verwenden (falls nicht anders vereinbart) für $\varepsilon \neq 0$ die Punktbezeichnung P anstelle der Koordinatenmatrizen $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})$.

***) Eine Übersetzung der Bewegungen des projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes ins KLEINSche Bild nimmt G. WEISS in [WEI3] vor. Die konkrete Gestalt der die Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$ beschreibenden Matrizen \mathbf{A} wird darin beschrieben. Hierauf werden wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Dann folgen für $\dot{P}(t) = \Delta \dot{P}^*(t)$ sowie für ein beliebiges aber fest gewähltes $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \dot{P}(t)^T {}^{(\varepsilon)}E \dot{P}(t) \right| &= \left| (\Delta \dot{P}^*(t))^T {}^{(\varepsilon)}E (\Delta \dot{P}^*(t)) \right| = \left| \dot{P}^*(t)^T \Delta^T {}^{(\varepsilon)}E \Delta \dot{P}^*(t) \right| = \left| \dot{P}^*(t)^T {}^{(\varepsilon)}E \dot{P}^*(t) \right| \\ \Delta^T {}^{(\varepsilon)}E \Delta &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{00}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathbf{A}_{00} + \varepsilon \mathbf{B} & \varepsilon \mathbf{A}_{00} \\ \varepsilon \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} + \varepsilon (\mathbf{A}_{00}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{00}) & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= {}^{(\varepsilon)}E. \end{aligned}$$

Für die Invarianz gegenüber einer Parametertransformation betrachten wir einen Parameterwechsel $t = \phi(t^*)$ mit $\phi'(t^*) > 0 \quad \forall t^* \in J$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon \neq 0: \quad s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left| \dot{P}(t)^T {}^{(\varepsilon)}E \dot{P}(t) \right|} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left| \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right)^T {}^{(\varepsilon)}E \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right) \right| \left(\frac{dt^*}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dt^*}{dt} \right| \sqrt{\left| \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right)^T {}^{(\varepsilon)}E \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right) \right|} dt \\ &= \int_{t_0^*}^{t_1^*} \sqrt{\left| \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right)^T {}^{(\varepsilon)}E \left(\frac{dP(\phi(t^*))}{dt^*} \right) \right|} dt^*. \end{aligned}$$

Ganz analog lässt sich der Beweis für $\varepsilon = 0$ führen. □

Bemerkung 5:

Der Beweis für den Fall $\varepsilon = 0$ ist hier nur formal separat zu führen. Die Darstellung der gegenüber dem Absolutkegel N_4^2 gebildeten Bogenlänge s ergibt sich bereits als Sonderfall der Darstellung bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$. Hierfür ist lediglich $\varepsilon \neq 0$ um den Fall $\varepsilon = 0$ zu erweitern. Der bezüglich des Absolutkegels N_4^2 gebildete Bogenlängenbegriff entspricht darüber hinaus dem von G. WEISS in [WEI2] verwendeten *normierten Parameter*.

Für die folgenden Überlegungen unterscheiden wir zunächst nicht zwischen den konkreten Wahlmöglichkeiten der Absolutfiguren $F^{(\varepsilon)}$ und erweitern die Darstellung der Matrizen ${}^{(\varepsilon)}E$ um den Fall $\varepsilon = 0$. Nach (5.2) und (5.3) stellt dies für die KLEINSchen Bilder S -normierbarer C^r -Kongruenzen keine Einschränkung dar.

Das *Bogenelement* ds einer Flächenkurve $P(f(I)) \subset P(U)$ lässt sich dann bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ in der Form $(^{(\varepsilon)}ds)^2 = |dP^T \ ^{(\varepsilon)}E dP|$ angeben. Verwenden wir s als natürlichen Parameter, so erhält das Bogenelementquadrat die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} (^{(\varepsilon)}ds)^2 &= |(P_{,j} du^j)^T \ ^{(\varepsilon)}E (P_{,k} du^k)| \quad \text{beziehungsweise} \\ (^{(\varepsilon)}ds)^2 &= |^{(\varepsilon)}g_{jk} du^j du^k| \quad j, k = 1, 2; \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die bezüglich Absolutfiguren gebildeten Bogenelemente erzeugen quadratische Differentialformen $|^{(\varepsilon)}g_{jk} du^j du^k|$. Die Betragszeichen können im Fall einer positiven Differentialform $^{(\varepsilon)}g_{jk} du^j du^k$ weggelassen werden. Mithin ergibt sich der folgende

Satz 3:

Die in Satz 2 bezüglich der Absolutquadriken (des Absolutkegels) $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) erklärten Bogenlängenbegriffe erzeugen quadratische Differentialformen:

$$^{(\varepsilon)}I = |^{(\varepsilon)}g_{jk} du^j du^k| := |(P_{,j} \ ^{(\varepsilon)}E P_{,k}) du^j du^k| \quad j, k = 1, 2; \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

welche die Abstandsmetrik auf der 2-Fläche $P(U)$ regeln und *erste Grundformen bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$* ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) genannt werden. Die Koeffizienten $^{(\varepsilon)}g_{jk}$ nennen wir *Fundamentalgrößen 1. Ordnung bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$* ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Sie sind sicher symmetrisch in den unteren Indizes.

Die ersten Grundformen $^{(\varepsilon)}I$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) lassen sich für die 2-Fläche $P(U)$ nach (5.6) leicht berechnen. Ist $P(U)$ in S -normierter Darstellung gegeben, so schreiben sich die Fundamentalgrößen 1. Ordnung $^{(\varepsilon)}g_{jk}$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) unter Verwendung von (4.5) und (5.3):

$$^{(\varepsilon)}g_{11} = e_{11} + \varepsilon g_{11} \quad ^{(\varepsilon)}g_{22} = e_{22} + \varepsilon g_{22} \quad ^{(\varepsilon)}g_{12} = ^{(\varepsilon)}g_{21} = 0. \quad (5.7)$$

Die ersten Grundformen $^{(\varepsilon)}I$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) besitzen dann die Darstellung:

$$^{(\varepsilon)}I = |(e_{11} + \varepsilon g_{11})(du^1)^2 + (e_{22} + \varepsilon g_{22})(du^2)^2|. \quad (5.8)$$

Bemerkung 6:

Die eingeführten Abstandsmetriken sind über die Polarsysteme der maßgebenden Absolutquadriken (des maßgebenden Absolutkegels) definiert, die im zu Π^5 gehörenden sechsdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^6 „innere Produkte“ erklären (vgl. Bemerkung 1 im Abschnitt 3.1). Diese induzieren durch Einschränkung innere Produkte im zur Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ an die 2-Fläche $P(U)$ gehörenden dreidimensionalen Untervektorraum.

Das Setzen der Betragszeichen in (5.6) erfolgt in Anlehnung an (5.4) und ist in gewisser Weise willkürlich; denkbar ist außerdem eine Darstellung:

$$^{(\varepsilon)}I = |\varepsilon ||g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2| + e_{11}(du^1)^2 + e_{22}(du^2)^2. \quad (5.8a)$$

Die Fundamentalgrößen $^{(\varepsilon)}g_{jk}$ sind, wie sich analog zum Beweis von Satz 2 zeigen lässt, invariant gegenüber $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$.

Um das Verhalten der ${}^{(\varepsilon)}g_{jk}$ unter (zulässigen) Parametertransformationen zu untersuchen, betrachten wir einen Parameterwechsel $\varphi: U^* \rightarrow U$ mit $(u^1, u^2) \in U$ und $(u^{1*}, u^{2*}) \in U^*$ sowie $(u^1, u^2) = \varphi(u^{1*}, u^{2*})$. Die Abbildungen φ seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Für die JACOBI-Determinante J_φ gelte im offenen Gebiet U^* :

$$J_\varphi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u^{1*}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{1*}} \\ \frac{\partial u^1}{\partial u^{2*}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{2*}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir vereinbaren $a_{,j}^k := \partial u^k / \partial u^{j*}$ mit $j, k = 1, 2$. Dann folgen die Darstellungen:

$$du^k = a_{,j}^k du^{j*}, \quad \frac{\partial P}{\partial u^{j*}} = P_{,k} a_{,j}^{k*}$$

Die Fundamentalgrößen ${}^{(\varepsilon)}g_{jk}^*$ transformieren sich nach:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}g_{jk}^* &= \left(\frac{\partial P^T}{\partial u^{j*}} \quad {}^{(\varepsilon)}E \quad \frac{\partial P^T}{\partial u^{k*}} \right) = \left((P_{,l} a_{,j}^l)^T \quad {}^{(\varepsilon)}E \quad (P_{,m} a_{,k}^m) \right) \\ &= \left(P_{,l} \quad {}^{(\varepsilon)}E \quad P_{,m} \right) a_{,j}^l a_{,k}^m \\ &= {}^{(\varepsilon)}g_{lm} a_{,j}^l a_{,k}^m; \quad l, m = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die ersten Grundformen ${}^{(\varepsilon)}I^*$ berechnen sich mit (5.9) zu:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}I^* &= \left| {}^{(\varepsilon)}g_{jk}^* du^{j*} du^{k*} \right| = \left| {}^{(\varepsilon)}g_{lm} a_{,j}^l a_{,k}^m du^{j*} du^{k*} \right| \\ &= \left| {}^{(\varepsilon)}g_{lm} du^l du^m \right|. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Mit diesen Überlegungen formulieren wir den folgenden

Satz 4:

Es seien mit $P: U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und mit der 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben. Dann gilt für ein beliebig gewähltes $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}$:

- Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung ${}^{(\hat{\varepsilon})}g_{jk}$ ($j, k = 1, 2$) (bezüglich $V_4^2(\hat{\varepsilon})$) transformieren sich unter zulässigen Parametertransformationen in der Form (5.9). Sie sind invariant gegenüber Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\hat{\varepsilon}))$.
- Die ersten Grundformen ${}^{(\hat{\varepsilon})}I$ bezüglich $V_4^2(\hat{\varepsilon})$ sind invariant gegenüber Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\hat{\varepsilon}))$ und zulässigen Parametertransformationen. Sie sind bewegungsgeometrische Begriffsbildungen im Sinne von Abschnitt 2.2.4.

*) Summiert wird gemäß der EINSTEINSchen Summenkonvention über gleiche obere und untere Indizes.

Die Determinanten $\det({}^{(\varepsilon)}g_{jk})$ der aus den Fundamentalgrößen 1. Ordnung (bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)) gebildeten Matrizen berechnen sich unter Verwendung von (5.7):

$$\begin{aligned} \det({}^{(\varepsilon)}g_{jk}) &= \det \begin{pmatrix} e_{11} + \varepsilon g_{11} & 0 \\ 0 & e_{22} + \varepsilon g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon^2 g_{11} g_{22} + \varepsilon (g_{11} e_{22} + e_{11} g_{22}) + e_{11} e_{22}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Unter einer zulässigen Parametertransformation verändern sie sich nach:

$$\begin{aligned} \det({}^{(\varepsilon)}g_{jk}^*) &= \det({}^{(\varepsilon)}g_{lm} a_{,j}^l a_{,k}^m) \\ &= \det({}^{(\varepsilon)}g_{lm})(J_\varphi)^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.4 GAUSS-Ableitungsgleichungen und CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art

Betrachtet werden wie zuvor die KLEINSchen Bilder zu S -normierten C^r -Kongruenzen. Wir konstruieren in diesem Abschnitt zu diesen die aus der Flächentheorie bekannten *GAUSSschen Ableitungsgleichungen*. Wir verwenden einen Ansatz aus der inneren Geometrie und schreiben die zweiten Ableitungen der normierten Koordinatenmatrix des Flächenpunktes P als Linearkombination der Koordinatenmatrizen der Begleitsimplexecken P, P_1, \dots, P_5 . Die Schreibweise in partitionierten Koordinatenmatrizen erweist sich dabei als günstig.

$$(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})_{,jk}^T = \lambda_{jk} (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})^T + \Gamma_{jk}^\alpha (\mathfrak{p}_{,\alpha}, \bar{\mathfrak{p}}_{,\alpha})^T + H_{jk} (O, \mathfrak{p})^T + H_{jk}^\beta (O, \mathfrak{p}_{,\beta})^T; \quad j, k, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.13)$$

Die Koeffizienten Γ_{jk}^α ($\alpha, j, k = 1, 2$) der tangentialen Komponenten in (5.13) nennen wir in Analogie zur klassischen Flächentheorie *CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art*. Wir werden zeigen, dass sie sich allein durch die Fundamentalgrößen 1. Ordnung ${}^{(0)}g_{jk}$ ($j, k = 1, 2$) bezüglich N_4^2 (sowie ihrer Ableitungen) ausdrücken lassen.

Definition 6:

Die Koeffizienten Γ_{jk}^α ($\alpha, j, k = 1, 2$) in (5.13) heißen *CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art*.

Zur Bestimmung der Koeffizienten in (5.13) wählen wir zunächst die absteigende Folge $F^{(0)} := N_4^2 \supset P_\omega^2 \supset \bar{V}_1^2$ als Absolutfigur, betrachten demnach Π^5 als einen einfach entarteten CAYLEY- KLEIN Raum. Des Weiteren stellen wir (5.13) in partitionierter Schreibweise dar.

$$\mathfrak{p}_{,jk}^T = \lambda_{jk} \mathfrak{p}^T + \Gamma_{jk}^\alpha \mathfrak{p}_{,\alpha}^T \quad (5.13a)$$

$$\bar{\mathfrak{p}}_{,jk}^T = \lambda_{jk} \bar{\mathfrak{p}}^T + \Gamma_{jk}^\alpha \bar{\mathfrak{p}}_{,\alpha}^T + H_{jk} \mathfrak{p}^T + H_{jk}^\beta \mathfrak{p}_{,\beta}^T \quad (5.13b)$$

Wir multiplizieren zunächst linke und rechte Seite der ersten Gleichung von (5.13a) mit $\mathbf{E}_0 \mathfrak{p}$.

$$(\mathfrak{p}_{,jk}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}) = {}^{(0)}\lambda_{jk} (\mathfrak{p}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}) + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha (\mathfrak{p}_{,\alpha}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die (verschwindenden) Ausdrücke $(\mathfrak{p}_{,\alpha}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p})$ beschreiben gerade die $\hat{\nu}$ -konjugierte Lage des Punktes P zu den Ecken P_α , während $(\mathfrak{p}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p})$ aufgrund der Normierung gleich Eins gesetzt wird. Somit ergeben sich die Koeffizienten ${}^{(0)}\lambda_{jk}$ in der Gestalt:

$${}^{(0)}\lambda_{jk} = \mathfrak{p}_{,jk}^T \mathfrak{p}.$$

Die Koeffizienten ${}^{(0)}\lambda_{jk}$ können demnach durch partielles Ableiten der Gleichung $\mathfrak{p}^T \mathfrak{p} = 1$ berechnet werden und schreiben sich unter Verwendung von (4.5):

$${}^{(0)}\lambda_{jk} = \begin{cases} -e_{11} & j = k = 1 \\ -e_{22} & j = k = 2. \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

Um die CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art bezüglich $F^{(0)}$ zu ermitteln, leiten wir zunächst die Größen ${}^{(0)}g_{jk}$ der ersten Grundform bezüglich $F^{(0)}$ partiell ab. Unter zyklischer Vertauschung ergeben sich:

$$\begin{aligned} -{}^{(0)}g_{jk,l} &= -(\mathfrak{p}_{,jl}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,k}) - (\mathfrak{p}_{,j}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,kl}) \\ {}^{(0)}g_{kl,j} &= (\mathfrak{p}_{,kj}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,l}) + (\mathfrak{p}_{,k}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,lj}) \quad j, k, l = 1, 2. \\ {}^{(0)}g_{lj,k} &= (\mathfrak{p}_{,lk}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,j}) + (\mathfrak{p}_{,l}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,jk}) \end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichungen führt auf die folgende

Definition 7:

Die Größen

$${}^{(0)}\Gamma_{jkl} := \frac{1}{2} \left(({}^{(0)}g_{lj,k}) + ({}^{(0)}g_{kl,j}) - ({}^{(0)}g_{jk,l}) \right) = \mathfrak{p}_{,jk}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,l} \quad (5.14)$$

mit $j, k, l = 1, 2$ heißen *CHRISTOFFEL-Symbole 1. Art* bezüglich $F^{(0)}$.

Bemerkung 7:

Die CHRISTOFFEL-Symbole 1. Art ${}^{(0)}\Gamma_{jkl}$ sind sicherlich symmetrisch in den Indizes j und k . Sie berechnen sich in den (Ableitungen der -) Fundamentalgrößen 1. Ordnung ${}^{(0)}g_{jk}$ nach:

$${}^{(0)}\Gamma_{jkl} = {}^{(0)}\Gamma_{kjl} = \begin{cases} \frac{1}{2} e_{11,1} & (j, k, l) = (1, 1, 1) \\ \frac{1}{2} e_{11,2} & (j, k, l) = (1, 2, 1), (2, 1, 1) \\ -\frac{1}{2} e_{11,2} & (j, k, l) = (1, 1, 2) \\ \frac{1}{2} e_{22,1} & (j, k, l) = (1, 2, 2), (2, 1, 2) \\ -\frac{1}{2} e_{22,1} & (j, k, l) = (2, 2, 1) \\ \frac{1}{2} e_{22,2} & (j, k, l) = (2, 2, 2) \end{cases}. \quad (5.15)$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole 1. Art ${}^{(0)}\Gamma_{jkl}$ (bezüglich $F^{(0)}$) sind nach Satz 4 sicherlich invariant gegenüber Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\mathcal{E}))$, jedoch nicht invariant unter zulässigen Parametertransformationen.

Wir ersetzen in (5.14) $\mathfrak{p}_{,jk}^T$ durch die rechte Seite der Gleichung (5.13a) und erhalten unter Beachtung der (paarweise) $\hat{\nu}$ -konjugierten Lage der Punkte P , $P_{,1}$ und $P_{,2}$ skalare Gleichungen für die Bestimmung der CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art bezüglich $F^{(0)}$:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\Gamma_{jkl} &= \left({}^{(0)}\lambda_{jk} \mathfrak{p}^T + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^1 \mathfrak{p}_{,1}^T + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^2 \mathfrak{p}_{,2}^T \right) \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,l} \\ &= {}^{(0)}\lambda_{jk} \mathbf{0} + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^1 (\mathfrak{p}_{,1}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,l}) + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^2 (\mathfrak{p}_{,2}^T \mathbf{E}_0 \mathfrak{p}_{,l}) \\ &= {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha {}^{(0)}g_{\alpha l}. \end{aligned}$$

Mit (5.15) folgt damit unmittelbar die Berechnung der ${}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha$ in den (Ableitungen der -) Fundamentalgrößen 1. Ordnung ${}^{(0)}g_{jk}$:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 &= \frac{e_{11;1}}{2e_{11}} & {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 &= -\frac{e_{11;2}}{2e_{22}} \\ {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 &= {}^{(0)}\Gamma_{21}^1 = \frac{e_{11;2}}{2e_{11}} & {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 &= {}^{(0)}\Gamma_{21}^2 = \frac{e_{22;1}}{2e_{22}} \\ {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 &= -\frac{e_{22;1}}{2e_{11}} & {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 &= \frac{e_{22;2}}{2e_{22}}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Bemerkung 8:

Aus den Darstellungen (5.16) lässt sich sofort erkennen, dass die CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art ${}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha$ symmetrisch in beiden unteren Indizes sind. Sie sind nach Satz 4 sicherlich invariant gegenüber Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\mathcal{E}))$, jedoch nicht invariant unter zulässigen Parametertransformationen.

Bemerkung 9:

Werden anstelle von Geradenkongruenzen 3- parametrische - bzw. 4- parametrische C^r -Geradenmannigfaltigkeiten im KLEINSchen Modell betrachtet, so sind für die Berechnung der CHRISTOFFEL-Symbole im Rahmen einer lokalen (Hyper-)Flächentheorie im vorliegenden einfach ausgearteten CAYLEY- KLEIN Raum auch jene Richtungen in der Tangential(hyper-)ebene zu betrachten, in denen die entsprechenden Tangenten die Absolutquadrik N_4^2 in ihrem Spitzenraum P_ω^2 treffen.

Die im Spitzenraum liegenden Begleitsimplexecken P_k sollen konjugiert bezüglich der Absolutquadrik \bar{V}_1^2 in P_ω^2 liegen. Ihr Polarsystem $\nu_\omega (= \bar{\nu})$ liefert einen dem vorliegenden entsprechenden Ansatz zur Bestimmung der CHRISTOFFEL-Symbole, der dann zusätzlich zu verwenden ist.

Für die Berechnung der Koeffizienten ${}^{(0)}H_{jk}$ in (5.13) multiplizieren wir schließlich mit $E_1 p$. Unter Beachtung der (paarweise) ν_ω -konjugierten Lage der Punkte P_3 , P_4 und P_5 in P_ω^2 berechnen sich die ${}^{(0)}H_{jk}$ zu:

$$\begin{aligned} \left(\bar{p}_{,jk}^T E_1 p\right) &= {}^{(0)}\lambda_{jk} \left(\bar{p}^T E_1 p\right) + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha \left(\bar{p}_{,\alpha}^T E_1 p\right) + {}^{(0)}H_{jk}^0 \left(p^T E_1 p\right) \\ {}^{(0)}H_{jk} &= \left(\bar{p}_{,jk}^T E_1 p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha \left(\bar{p}_{,\alpha}^T E_1 p\right). \end{aligned}$$

Formen wir unter Verwendung der PLÜCKER-Identitäten (1.3) sowie der durch partielle Ableitung aus ihr gebildeten Identitäten (2.1) um und setzen die rechten Seiten von (5.13) wiederholt ein, so ergeben sich die Größen ${}^{(0)}H_{jk}$ in der folgenden Form (5.17):

$$\begin{aligned} {}^{(0)}H_{11} &= \left(\bar{p}_{,11}^T E_1 p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^\alpha \left(\bar{p}_{,\alpha}^T E_1 p\right) \\ &= \left(\bar{p}_{,11}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= \left(-2p_{,1}\bar{p}_{,1} - \bar{p}p_{,11}^T\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{11} - \bar{p}^T \left(-e_{11} p + {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 p_{,1} + {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 p_{,2}\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{11} - e_{11} 0 + {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p - \bar{p}_{,1}^T p\right) + {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p - \bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{11} \\ {}^{(0)}H_{22} &= \left(\bar{p}_{,22}^T E_1 p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^\alpha \left(\bar{p}_{,\alpha}^T E_1 p\right) \\ &= \left(\bar{p}_{,22}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= \left(-2p_{,2}\bar{p}_{,2} - \bar{p}p_{,22}^T\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{22} - \bar{p}^T \left(-e_{22} p + {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 p_{,1} + {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 p_{,2}\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{22} - e_{11} 0 + {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p - \bar{p}_{,1}^T p\right) + {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p - \bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -2g_{22} \\ {}^{(0)}H_{12} &= \left(\bar{p}_{,12}^T E_1 p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^\alpha \left(\bar{p}_{,\alpha}^T E_1 p\right) \\ &= \left(\bar{p}_{,12}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= \left(-p_{,12}^T \bar{p}\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= -\bar{p}^T \left({}^{(0)}\Gamma_{12}^1 p_{,1} + {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 p_{,2}\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p\right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{p}_{,1}^T p - \bar{p}_{,1}^T p\right) + {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{p}_{,2}^T p - \bar{p}_{,2}^T p\right) \\ &= 0 \\ {}^{(0)}H_{21} &= {}^{(0)}H_{12}. \end{aligned}$$

Bemerkung 10:

Die Koeffizienten ${}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}$ von P_3 in (5.13) (bezüglich der Absolutfigur $F^{(0)}$) stimmen mit den Größen der zweiten Grundform (2.2) in der Theorie der C^r -Kongruenzen überein. Die zugehörige Matrix schreibt sich:

$${}^{(0)}\mathbf{H}_{jk} \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} = \begin{pmatrix} -2g_{11} & 0 \\ 0 & -2g_{22} \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten ${}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^\beta$, ($\beta=1,2$) multiplizieren wir (5.13b) mit $\mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta$ und verfahren nach obigem Muster. Die Bestimmungsgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\mathfrak{p}}_{jk}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) &= {}^{(0)}\lambda_{jk} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) + {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,\alpha}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) + {}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^\delta \left(\mathfrak{p}_{,\delta}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) \quad (\delta=0,1,2) \\ {}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^\beta &= \frac{1}{\left(\mathfrak{p}_{,\beta}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right)} \left(\left(\bar{\mathfrak{p}}_{jk}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) - {}^{(0)}\lambda_{jk} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) - {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,\alpha}^T \mathbf{E}_1 \mathfrak{p}_\beta \right) \right). \end{aligned}$$

Formen wir wiederholt um, so besitzen die Größen ${}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^\beta$ ($\beta=1,2$) die nachstehenden Darstellungen (5.18):

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\mathbf{H}_{11}^1 &= \frac{1}{e_{11}} \left(\left(\bar{\mathfrak{p}}_{11}^T \mathfrak{p}_1 \right) + e_{11} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{e_{11}} \left(g_{11,1} - \bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \left(-e_{11} \mathfrak{p} + {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \mathfrak{p}_2 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{e_{11}} \left(e_{11} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= c_{1,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\mathbf{H}_{12}^1 &= \frac{1}{e_{11}} \left(\left(\bar{\mathfrak{p}}_{12}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{e_{11}} \left(g_{11,1} - \bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \left({}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \mathfrak{p}_2 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= c_{1,2} \quad (= {}^{(0)}\mathbf{H}_{21}^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\mathbf{H}_{22}^1 &= \frac{1}{e_{11}} \left(\left(\bar{\mathfrak{p}}_{22}^T \mathfrak{p}_1 \right) + e_{22} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{e_{11}} \left(-g_{22,1} - \bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \left(-e_{22} \mathfrak{p} + {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \mathfrak{p}_2 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{e_{11}} \left(e_{22} \left(\bar{\mathfrak{p}}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,1}^T \mathfrak{p}_1 \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\bar{\mathfrak{p}}_{,2}^T \mathfrak{p}_1 \right) \right) \\ &= \frac{e_{22,1} g_{11} - g_{22,1} e_{11}}{e_{11}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}\mathbf{H}_{11}^2 &= \frac{1}{e_{22}} \left(\left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \bar{\mathfrak{p}}_2 \end{smallmatrix} \right) + e_{11} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{1}{e_{22}} \left(g_{11,2} - \bar{\mathfrak{p}}_2^T (-e_{11} \mathfrak{p} + {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \mathfrak{p}_2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{e_{22}} \left(e_{11} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{11}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{e_{11,2} g_{22} - e_{22} g_{11,2}}{e_{22}^2} \\
{}^{(0)}\mathbf{H}_{12}^2 &= \frac{1}{e_{22}} \left(\left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \bar{\mathfrak{p}}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{1}{e_{11}} \left(g_{22,1} - \bar{\mathfrak{p}}_2^T ({}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \mathfrak{p}_2) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{12}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= c_{2,1} (= {}^{(0)}\mathbf{H}_{21}^2) \\
{}^{(0)}\mathbf{H}_{22}^2 &= \frac{1}{e_{22}} \left(\left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \bar{\mathfrak{p}}_2 \end{smallmatrix} \right) + e_{22} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{1}{e_{22}} \left(g_{22,2} - \bar{\mathfrak{p}}_2^T (-e_{22} \mathfrak{p} + {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \mathfrak{p}_1 + {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \mathfrak{p}_2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{e_{22}} \left(e_{22} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^1 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_1^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) - {}^{(0)}\Gamma_{22}^2 \left(\begin{smallmatrix} \bar{\mathfrak{p}}_2^T \\ \mathfrak{p}_2 \end{smallmatrix} \right) \right) \\
&= c_{2,2}.
\end{aligned}$$

Die mit ${}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^\beta$ ($\beta=1,2$) gebildeten Matrizen schreiben sich in folgender Form:

$$\begin{aligned}
{}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^1 \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} &= \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{1,2} & \frac{e_{22,1} g_{11} - g_{22,1} e_{11}}{e_{11}^2} \end{pmatrix} \\
{}^{(0)}\mathbf{H}_{jk}^2 \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} &= \begin{pmatrix} \frac{e_{11,2} g_{22} - g_{11,2} e_{22}}{e_{22}^2} & c_{2,1} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir wählen nun als Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ eine beliebige reguläre Hyperquadrik $V_4^2(\mathcal{E})$ aus dem Hyperquadrikenbüschel $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$, betrachten Π^5 demnach als einen nichtentarteten CAYLEY-KLEIN Raum. Es gilt:

$$F^{(\varepsilon)} := V_4^2(\mathcal{E}) \text{ mit } \mathcal{E} = -1/c, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon \neq 0.$$

Die Größen ${}^{(\varepsilon)}\Gamma_{jkl}$, ${}^{(\varepsilon)}\Gamma_{jk}^\alpha$ sollen wiederum CHRISTOFFEL-Symbole 1. - und 2. Art bezeichnen, jeweils bezogen auf die Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$. Zur besseren Unterscheidung versehen wir sie zunächst mit dem Zeiger ε .

Die Koeffizienten ${}^{(\varepsilon)}\lambda_{jk}$, ${}^{(\varepsilon)}\Gamma_{jk}^\alpha$, ${}^{(\varepsilon)}H_{jk}$ und ${}^{(\varepsilon)}H_{jk}^\beta$ sowie die Größen ${}^{(\varepsilon)}\Gamma_{jkl}$ in den Ableitungsgleichungen (5.13) lassen sich analog bestimmen. Hierzu sind die Gleichungen nacheinander mit ${}^{(\varepsilon)}E(p_\alpha, \bar{p}_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$), ${}^{(\varepsilon)}E(O, p)$ und ${}^{(\varepsilon)}E(O, p_\beta)$ ($\beta = 1, 2$) zu multiplizieren, wobei die Matrix ${}^{(\varepsilon)}E$ die Darstellung (5.3) besitzt. Es ergeben sich die folgenden bemerkenswerten Ergebnisse:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}\lambda_{jk} &= {}^{(0)}\lambda_{jk} =: \lambda_{jk} & {}^{(\varepsilon)}H_{jk} &= {}^{(0)}H_{jk} =: H_{jk} \\ {}^{(\varepsilon)}\Gamma_{jk}^\alpha &= {}^{(0)}\Gamma_{jk}^\alpha =: \Gamma_{jk}^\alpha & {}^{(\varepsilon)}H_{jk}^\beta &= {}^{(0)}H_{jk}^\beta =: H_{jk}^\beta. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Satz 5:

Es seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und mit der 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben.

- Die Größen λ_{jk} , H_{jk} und H_{jk}^β sowie die CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art Γ_{jk}^α hängen nicht von der speziellen Wahl der maßgebenden Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ab. Sie lassen sich damit gegenüber dem maßgebenden Büschel $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ gebildet auffassen.
- Die GAUSS-Ableitungsgleichungen für $P(U)$ schreiben sich in der Form (5.13), wobei die CHRISTOFFEL-Symbole 2. Art Γ_{jk}^α durch die Gleichungen (5.16), die Größen H_{jk} und H_{jk}^β in den Darstellungen (5.17) und (5.18) gegeben sind. Sie hängen nicht von der speziellen Wahl der maßgebenden Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ab. Sie lassen sich damit gegenüber dem maßgebenden Büschel $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ gebildet auffassen.

Bemerkung 11:

Die Größen (5.19) lassen sich weiterhin durch Koeffizientenvergleich aus den Ableitungsgleichungen (4.1) mit (4.9), (4.13) und (4.14) entnehmen.

5.5 Zweite Grundformen für $P(U)$ aus CAYLEY- KLEINScher Sicht

In der Theorie der Flächen kennzeichnet die zweite Fundamentalform einer regulären Fläche die Art ihrer Einbettung in den umgebenden Raum. Sie beschreibt den Tangentialanteil der Richtungsableitung eines Normalenfeldes längs eines Tangentialfeldes.

In den anschließenden Abschnitten diskutieren wir einen „natürlichen“ Orthogonalitätsbegriff für k -Ebenen ($k < n-1$) in $(\Pi^5, \bigcup F^{(\varepsilon)} (\varepsilon \in \mathbb{R}))$, der durch das maßgebende Hyperquadrikenbündel $\{V_4^2(\varepsilon)\}^*$ erzeugt wird. Unser Ziel wird es sein, unter Zuhilfenahme dieses Begriffes das bereits ähnlichkeitsgeometrisch ausgezeichnete *Normalenfeld* in Π^5 aus CAYLEY- KLEINScher Sicht zu begründen sowie einen *Normalenraum* für die KLEINSchen Bilder S -normierter C^r -Kongruenzen bezüglich $\bigcup F^{(\varepsilon)} (\varepsilon \in \mathbb{R})$ zu konstruieren.

Grundlegende Definitionen und Sätze zur Betrachtungsweise in CAYLEY- KLEIN Räumen sind in [GIE] dargestellt und werden hier zitiert.

5.5.1 Totalkonjugierte und Orthogonalität in CAYLEY- KLEIN Räumen und ihre Anwendungen im KLEINSchen Modell

Die k -Ebenen eines CAYLEY- KLEIN Raumes lassen sich nach ihrer Lage zu den Absolutebenen klassifizieren. Wir vereinbaren in folgender

Definition 8 (vergleiche [GIE]):

Eine k -Ebene T^k eines CAYLEY- KLEIN Raumes $(\Pi^n, F = Q_{r_0 q_0}^{n-1} \supset A^{n_1} \supset \dots \supset A^{n_\rho} \supset Q_{r_\rho q_\rho}^{n_\rho-1})$ mit $T^k \not\subset F$ heißt *regulär* (bezüglich F), wenn gilt:

- a) $T^k \cap A^{n_1} = \emptyset$,
- b) $T^k \cap A^{n_\sigma} \neq \emptyset$ mit $T^k \cup A^{n_\sigma} = \Pi^n$ und $T^k \cap A^{n_{\sigma+1}} = \emptyset$ ($0 < \sigma < \rho$),
- c) $T^k \cap A^{n_\rho} \neq \emptyset$ mit $T^k \cup A^{n_\rho} = \Pi^n$.

Andernfalls heißt T^k *singulär* (bezüglich F).

Bemerkung 12:

Wir wenden Definition 7 auf die Räume $(\Pi^5, F^{(\varepsilon)} (\varepsilon \in \mathbb{R}))$ an. Für $\varepsilon \neq 0$ existieren ausschließlich reguläre k -Ebenen T^k mit $T^k \not\subset F^{(\varepsilon)}$, da $A^{n_\sigma} = \emptyset$ ($0 < \sigma \leq \rho$) gilt. Für $\varepsilon = 0$ heißen alle k -Ebenen T^k mit $T^k \not\subset F^{(0)}$ singulär, für die $T^k \cap P_\omega^2 \neq \emptyset$ gilt. Insbesondere sind alle Treffgeraden von P_ω^2 singuläre Geraden.

Ist $P(U) \subset M_4^2$ das KLEINSche Bild einer S -normierten C^r -Geradenkongruenz $P:U \rightarrow \Pi^5$, so ist die Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ in einem Flächenpunkt $P(u) \subset P(U)$ regulär bezüglich $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$, da $T^k \cap A^{n_1} = \emptyset$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt. Damit sind sicher auch die Flächentangenten $T^1 \subset T_{P(u)}^2$ reguläre Geraden.

*) Die Angabe gegenüber dem maßgebenden Absolutbündel soll hierbei lediglich das prinzipielle Vorgehen im KLEINSchen Modell verdeutlichen. Sie wird in den folgenden Abschnitten präzisiert.

Definition 9 (vergleiche [GIE]):

Die *Totalkonjugierte* \bar{T} einer regulären k -Ebene T^k bezüglich der Absolutfigur F eines CAYLEY- KLEIN Raumes $(\Pi^n, F = Q_{r_0 q_0}^{n-1} \supset A^{n_1} \supset \dots \supset A^{n_\rho} \supset Q_{r_\rho q_\rho}^{n_\rho-1})$ ist die Konjugierte von $T^k \cap A^{n_\sigma}$ in Bezug auf $Q_{r_\sigma q_\sigma}^{n_\sigma-1}$, falls T^k die Lage $T^k \cap A^{n_\sigma} \neq \emptyset$ mit $T^k \vee A^{n_\sigma} = \Pi^n$ und $0 \leq \sigma \leq \rho$ sowie $T^k \cap A^{n_{\sigma+1}} = \emptyset$ ($0 \leq \sigma < \rho$) bezüglich F besitzt*).

Bemerkung 13:

Die Totalkonjugierten ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}$ der Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ in einem Punkt $P(u)$ der 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ sind bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) zu bilden, da laut Voraussetzung $T_{P(u)}^2 \cap A^{n_1} = \emptyset$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt.

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass die Totalkonjugierte einer k -Ebene bezüglich einer (kegeligen) Quadrik Q^{n-1} die Dimension $n-k-1$ besitzt sowie deren Spitze enthält. Die Dimension der Totalkonjugierten ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}$ zu $T_{P(u)}^2$ stimmt daher mit der Dimension des zu $T_{P(u)}^2$ dualen projektiven Unterraumes überein. Wir schreiben deshalb im Weiteren ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ statt ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}$. In diesem Sinne ist die Totalkonjugierte ${}^{(0)}\bar{T}_{P(u)}^2$ von $T_{P(u)}^2$ (laut Voraussetzung $T_{P(u)}^2 \cap P_\omega^2 = \emptyset$ für alle $u \in U$) bezüglich N_4^2 durch den Fernunterraum P_ω^2 gegeben. Die Totalkonjugierte ${}^{(0)}\bar{T}_{P(u)}^2$ ist somit nach Definition 8 singulär. Im Fall $\varepsilon \neq 0$ ist ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ regulär, falls ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 \not\subset F^{(\varepsilon)}$ gilt.

Die Totalkonjugierte ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ zu $T_{P(u)}^2$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ergibt sich durch den Schnitt der Polarhyperebenen zu drei linear unabhängigen Punkten $Q_m \in T_{P(u)}^2$ ($m=1,2,3$). Wir wählen im Folgenden den Flächenpunkt $P(u)$, beschrieben durch WEIERSTRASS- Koordinaten, sowie die ebenfalls ausgezeichneten Punkte P_j ($j=1,2$) (S -normierte Darstellung).

Für die Polarhyperebenen bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ ergeben sich daraus die Darstellungen:

$$\begin{aligned} P^* &= {}^{(\varepsilon)}EP = \mathbb{R}(p + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}, \frac{\varepsilon}{2}p) \\ P_{j_1}^* &= {}^{(\varepsilon)}EP_{j_1} = \mathbb{R}(p_{j_1} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}_{j_1}, \frac{\varepsilon}{2}p_{j_1}) \quad \text{beziehungsweise} \\ P_{j_2}^* &= {}^{(\varepsilon)}EP_{j_2} = \mathbb{R}(p_{j_2} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}_{j_2}, \frac{\varepsilon}{2}p_{j_2}) \\ P^* : 0 &= px + \frac{\varepsilon}{2}(\bar{p}x + p\bar{x}) \\ P_{j_1}^* : 0 &= p_{j_1}x + \frac{\varepsilon}{2}(\bar{p}_{j_1}x + p_{j_1}\bar{x}) \\ P_{j_2}^* : 0 &= p_{j_2}x + \frac{\varepsilon}{2}(\bar{p}_{j_2}x + p_{j_2}\bar{x}), \end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei die Punkte $X \in P^*$ ($P_{j_1}^*, P_{j_2}^*$) mit $X = (x, \bar{x})\mathbb{R}$ in partitionierten PLÜCKER-Koordinaten geschrieben werden. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (5.20) stellt die Totalkonjugierte ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) dar. Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich so die Koordinatendarstellung von ${}^{(0)}\bar{T}_{P(u)}^2 = P_\omega^2$.

*) Für $\sigma = 0$ schreiben wir $n_0 = n$ und $A^{n_0} = \Pi^n$. Damit gelten $T^k \cap A^{n_0} = T^k$ und $T^k \vee A^{n_0} = \Pi^n$.

Die Hyperebenenkoordinaten (ebenfalls in partitionierter Schreibweise) schreiben sich unter Verwendung der PLÜCKER-Koordinatentripel zu P , $P_{,1}$ und $P_{,2}$ in der Form:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}\eta &= \mathfrak{p} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}, & {}^{(\varepsilon)}\bar{\eta} &= \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p} \\ {}^{(\varepsilon)}\eta_1 &= \mathfrak{p}_{,1} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}_{,1}, & {}^{(\varepsilon)}\bar{\eta}_1 &= \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p}_{,1} \\ {}^{(\varepsilon)}\eta_2 &= \mathfrak{p}_{,2} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}_{,2}, & {}^{(\varepsilon)}\bar{\eta}_2 &= \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p}_{,2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Eine Orthogonalität in CAYLEY- KLEIN Räumen regelt folgende grundlegende

Definition 10 (vergleiche [GIE]):

Gegeben sei ein CAYLEY- KLEIN Raum (Π^n, F) mit der Absolutfigur F und weiter zwei reguläre Ebenen T^k und R^l mit ihren Totalkonjugierten \bar{T}^{n-k-1} und \bar{R}^{n-l-1} bezüglich F . Die Ebenen T^k und R^l heißen zueinander *orthogonal*, wenn die folgenden *Orthogonalitätsbedingungen* erfüllt sind:

$$T^k \cap \bar{R}^{n-l-1} \neq \emptyset \text{ und } R^l \cap \bar{T}^{n-k-1} \neq \emptyset. \quad (5.22)$$

Hieraus ergeben sich Folgerungen für die orthogonale Lage einer Geraden R^1 zur Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ (allgemein k -Ebene T^k), die den Begriff eines *Lotes/* einer *Normalen* N^1 auf $T_{P(u)}^2$ (allgemein auf die k -Ebene T^k) und damit die in der Differentialgeometrie bedeutsame *Tangentialprojektion* tpr auf $T_{P(u)}^2$ motivieren. Denn setzt man in den Orthogonalitätsbedingungen (5.22) $l=1$, so ist die Bedingung $T^k \cap \bar{R}^{n-2} \neq \emptyset$ für $k > 1$ nach dem Dimensionssatz für projektive Unterräume stets erfüllt, also insbesondere auch $T_{P(u)}^2 \cap \bar{R}^{n-2} \neq \emptyset$.

Mit dieser Überlegung formulieren wir den leicht zu bestätigenden

Satz 6 (vergleiche [GIE]):

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Ist $P(U) \subset M_4^2$ das KLEINSche Bild einer S -normierten C^r -Geradenkongruenz $P:U \rightarrow \Pi^5$, so heißt eine Gerade R^1 zur Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ (zur regulären k -Ebene T^k ($k > 1$)) genau dann orthogonal bezüglich $F^{(\varepsilon)}$, wenn ihr Schnitt mit der Totalkonjugierten ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ zu $T_{P(u)}^2$ (mit ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}^{4-k}$ zu T^k ($k > 1$)) bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ nicht die leere Menge ergibt.

$$\begin{aligned} R^1 \perp T_{P(u)}^2 &\leftrightarrow R^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 \neq \emptyset \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}) \text{ beziehungsweise} \\ R^1 \perp T^k &\leftrightarrow R^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}^{4-k} \neq \emptyset \quad (k > 1, \varepsilon \in \mathbb{R})^*) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bemerkung 14:

Gilt für die Lagebeziehung einer Geraden R^1 zur Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ die Bedingung (5.23) für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so heißt R^1 (entsprechend Bemerkung 2) orthogonal zu $T_{P(u)}^2$ bezüglich $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).

*) Der allgemeine Fall schließt beispielsweise den regulären Tangential 3-Raum an 3-Flächen $P(W) \subset M_4^2$ in $P(w)$ ein, die KLEINSche Bilder gewisser Geradenkomplexe sind.

Gilt neben der Bedingung (5.23) weiter $R^1 \cap T_{P(u)}^2 \neq \emptyset$ (allgemein $R^1 \cap T^k \neq \emptyset$), so heißt Gerade R^1 eine *Normale* auf $T_{P(u)}^2$ (allgemein T^k). Dies gibt Anlass zu folgendem

Satz 7:

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Ist mit $P(U) \subset M_4^2$ das KLEINSche Bild einer S -normierten C^r -Geradenkongruenz $P:U \rightarrow \Pi^5$ bezeichnet, so heißt die Gerade N^1 eine *Normale* auf $T_{P(u)}^2$ (allgemein auf der regulären k -Ebene T^k) bezüglich $F^{(\varepsilon)}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} N^1 \cap T_{P(u)}^2 \neq \emptyset, \quad N^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 \neq \emptyset \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}) \text{ oder allgemein} \\ N^1 \cap T^k \neq \emptyset, \quad N^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}^{4-k} \neq \emptyset \quad (k > 1, \varepsilon \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dabei heißt der Schnittpunkt $L^0 := N^1 \cap T_{P(u)}^2$ (allgemein $L^0 := N^1 \cap T^k$) (nach Dimensionssatz) *Normalenfußpunkt* von N^1 .^{*)}

Bemerkung 15:

Wir nennen nach Definition 7 die Normale N^1 für $\varepsilon \neq 0$ eine *reguläre Normale* auf $T_{P(u)}^2$ (bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \neq 0$)), im Fall $\varepsilon = 0$ eine *singuläre Normale* auf $T_{P(u)}^2$ (bezüglich $F^{(0)}$). Sind die Bedingungen (5.24), welche Lage und Orthogonalität einer Geraden N^1 in Bezug zur Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ festlegen, für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ erfüllt, so lässt sich N^1 (entsprechend Bemerkung 2) als Normale auf $T_{P(u)}^2$ bezüglich $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$, also gewissermaßen bezüglich des maßgebenden Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ auffassen.

Nach Satz 7 sind die Normalen N^1 auf $T_{P(u)}^2$ gerade die gemeinsamen Treffgeraden von $T_{P(u)}^2$ und ihrer Totalkonjugierten. Um einen sinnvollen Begriff einer *Flächennormalen* für $P(U) \subset M_4^2$ (in einem Flächenpunkt $P(u)$) gegenüber $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$ zu erhalten, ist zu untersuchen, ob Geraden $N^1(u)$ mit

$$N^1(u) \subset \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \left(P(u) \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 \right)$$

existieren. Wir wählen hierzu für $N^1(u)$ eine (bezüglich N_4^2 gewählte) Darstellung $N^1(u) = P(u) \vee Q$ mit $Q \in P_\omega^2$ und untersuchen den Schnitt $N^1(u) \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$.

Unter Verwendung von (5.20) zur Beschreibung der Totalkonjugierten ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ und (3.2) für den Fernunterraum P_ω^2 ergibt sich das nachfolgende bemerkenswerte Ergebnis. Für beliebige $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} R &= P + kQ \\ &= P + k\tilde{a}P_3 + k\tilde{b}P_4 + k\tilde{c}P_5 \\ &= P + aP_3 + bP_4 + cP_5 \\ &= (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} + a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_1 + c\mathfrak{p}_2) \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

^{*)} Der allgemeine Fall für k -Ebenen wird im Weiteren nicht mehr genannt.

Aufgrund der Konjugiertheitsbedingungen für die Punkte P , P_3 , P_4 , P_5 sowie R berechnen sich die Koeffizienten gemäß:

$$\begin{aligned} 0 &= p\bar{p} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}p + \frac{\varepsilon}{2}p(\bar{p} + a\bar{p} + b\bar{p}_1 + c\bar{p}_2) \\ &= 1 + a\frac{\varepsilon}{2} \\ 0 &= p_1\bar{p} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}_1p + \frac{\varepsilon}{2}p_1(\bar{p} + a\bar{p} + b\bar{p}_1 + c\bar{p}_2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(\bar{p}_1p + p_1\bar{p}) + b\frac{\varepsilon}{2}e_{11} \\ &= b\frac{\varepsilon}{2}e_{11} \\ 0 &= p_2\bar{p} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{p}_2p + \frac{\varepsilon}{2}p_2(\bar{p} + a\bar{p} + b\bar{p}_1 + c\bar{p}_2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(\bar{p}_2p + p_2\bar{p}) + c\frac{\varepsilon}{2}e_{22} \\ &= c\frac{\varepsilon}{2}e_{22} \end{aligned}$$

zu $a = -2/\varepsilon$ ($\varepsilon \neq 0$), $b = 0$ und $c = 0$.

Die Punkte R sind die Schnitte der gegenüber $F^{(0)}$ gewählten Flächennormale $(P(u) \vee P_3(u))$ mit ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$. Diese Flächennormale fällt mit der bereits im Abschnitt 2.2.3 ähnlichkeitsgeometrisch ausgezeichneten $\mu\nu$ -Normalen zusammen. Der Normalen 3-Raum $(P(u) \vee P_\omega^2)$ bezüglich der Absolutfigur $F^{(0)}$ schneidet die Normalen 3-Räume $(P(u) \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) längs $(P(u) \vee P_3(u))$.

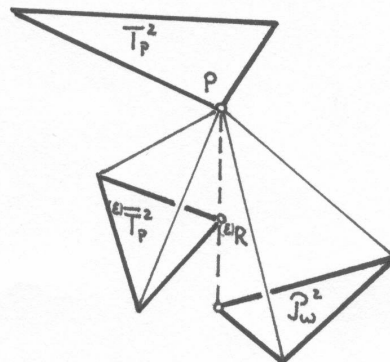


Abb. 19: Normalen 3-Räume bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)

Satz 8:

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit der Absolutfigur $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$. Es seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Kongruenz sowie mit $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben. $T_{P(u)}^2$ bezeichne die Tangentialebene in einem (beliebigen) Flächenpunkt $P(u)$.

Die Normalen 3-Räume $(P(u) \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) schneiden einander entlang der Gerade $N^1 = P(u) \vee P_3(u)$. Diese besitzt die Darstellungen $N^1 = P(u) \vee {}^{(\varepsilon)}R(u)$, wobei die Punkte ${}^{(\varepsilon)}R(u) \in {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ jeweils die Pole zur Tangentialhyperebene $P(u)\mu$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ sind und die normierten Koordinatendarstellungen ${}^{(\varepsilon)}R(u) = (p(u), \bar{p}(u) - \frac{2}{\varepsilon}p(u))$ besitzen.

Die Gerade N^1 ist die einzige (geeignete) Flächennormale in $P(u) \in P(U)$ bezüglich F . Sie stimmt mit der im Abschnitt 2.2.3 ähnlichkeitsgeometrisch ausgezeichneten $\mu\nu$ -Normalen überein.

Mit Hilfe des Begriffes einer *Normalen* N^1 auf $T_{P(u)}^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) lässt sich ferner die *Tangentialprojektion* tpr in einen gewissen Raum $(\Pi^5, \cup F^{(\varepsilon)})$ mit $\varepsilon \in I \subset \mathbb{R}$ übersetzen. Wir wollen sie hier als Normalprojektion in die Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ eines Flächenpunktes $P(u)$ der 2-Fläche $P(U) \subset M_4^2$ auffassen. Dabei bleibt zu untersuchen, ob zu beliebigem $Q \in \Pi^5$ mit $Q \notin T_{P(u)}^2$ und $Q \notin {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) genau eine Gerade N_Q^1 gefunden werden kann, welche im Sinne von Satz 7 eine Normale auf $T_{P(u)}^2$ (bezüglich $F^{(\varepsilon)}$) durch Q darstellt. Außerdem ist zu prüfen, ob diese gemäß Bemerkung 15 Normale gegenüber $F^{(\varepsilon)} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ ist.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit schließen wir uns weitestgehend den Ausführungen in [GIE] an, betrachten also einen CAYLEY- KLEIN Raum $(\Pi^5, F^{(\varepsilon)})$ und darin eine (beliebige) Normale N_Q^1 durch Q bezüglich $F^{(\varepsilon)}$. Ihre Schnitte mit den Ebenen $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ seien mit $L^0 = N_Q^1 \cap T_{P(u)}^2$ (Normalenfußpunkt) und $M^0 = N_Q^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ bezeichnet. Es existiert dann zu beliebigem Q genau eine Normale N_Q^1 bezüglich $F^{(\varepsilon)}$, wenn die Verbindungsgeraden aus $Q \vee T_{P(u)}^2$ der Forderung

$$\text{Dim}[(Q \vee T_{P(u)}^2) \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2] = 0$$

genügen. Nach Anwendung des Dimensionssatzes für projektive Unterräume ergibt sich:

$$\text{Dim}[(Q \vee T_{P(u)}^2) \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2] = 5.$$

Aufgrund der Lagebeziehung $Q \in L^0 \vee M^0$ folgen nun $Q \in (T_{P(u)}^2 \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2)$ und schließlich $Q \vee T_{P(u)}^2 \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 = T_{P(u)}^2 \vee {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$. Die Eindeutigkeit der Normalen N_Q^1 durch Q bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ist somit an die windschiefe Lage der Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ und ihrer Totalkonjugierten ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ geknüpft.

Unter Verwendung von (3.2) zur Beschreibung der Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ und (5.20) für ihre Totalkonjugierte ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ergibt sich für beliebige $u \in U$:

$$\begin{aligned} R &= aP + bP_{,1} + cP_{,2} \\ &= (a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}, a\bar{\mathfrak{p}} + b\bar{\mathfrak{p}}_{,1} + c\bar{\mathfrak{p}}_{,2})\mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$0 = \mathfrak{p}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p}(a\bar{\mathfrak{p}} + b\bar{\mathfrak{p}}_{,1} + c\bar{\mathfrak{p}}_{,2}) = a$$

$$0 = \mathfrak{p}_{,1}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}_{,1}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p}_{,1}(a\bar{\mathfrak{p}} + b\bar{\mathfrak{p}}_{,1} + c\bar{\mathfrak{p}}_{,2}) = b(e_{11} + \varepsilon g_{11})$$

$$0 = \mathfrak{p}_{,2}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\bar{\mathfrak{p}}_{,2}(a\mathfrak{p} + b\mathfrak{p}_{,1} + c\mathfrak{p}_{,2}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{p}_{,2}(a\bar{\mathfrak{p}} + b\bar{\mathfrak{p}}_{,1} + c\bar{\mathfrak{p}}_{,2}) = c(e_{22} + \varepsilon g_{22})$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad b = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_1\} \quad (\varepsilon_1 := -1/c_1), \quad c = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_2\} \quad (\varepsilon_2 := -1/c_2).$$

Die Notwendigkeit des Ausschlusses der Absolutquadriken $V_4^2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \neq \varepsilon_j, j=1,2$) in der Frage der Eindeutigkeit scheint nicht weiter verwunderlich, da aufgrund der speziellen Gestalt des Begleitsimplex $T_{P(u)}^2 \cap {}^{(\varepsilon_j)}\bar{T}_{P(u)}^2 \neq \emptyset$ (im Gegensatz hierzu $T_{P(u)}^2 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 = \emptyset$ für $\varepsilon \neq \varepsilon_j$) gilt.

Wir können damit folgendes Ergebnis formulieren:

Zu jedem Punkt $Q \in \Pi^5$ mit $Q \notin T_{P(u)}^2$ und $Q \notin {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ existiert bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq \varepsilon_j$, $j=1,2$) genau eine eindeutige Treffgerade N_Q^1 von $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ durch Q .

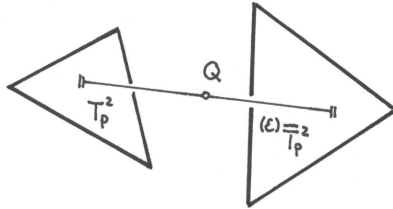


Abb. 20: windschiefe Lage von $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ in Π^5

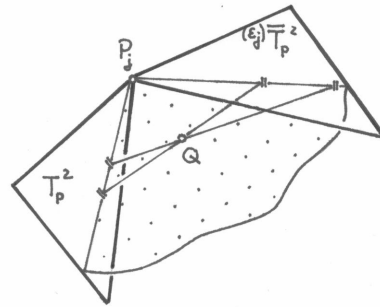


Abb. 21: nicht windschiefe Lage von $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon_j)}\bar{T}_{P(u)}^2$ in Π^5

Analog der Herleitung zu Satz 8 lässt sich (mit Bemerkung 15 in Kapitel 2) ferner zeigen, dass diese zu Q (bezüglich beliebiger $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq \varepsilon_j$, $j=1,2$)) gehörenden Normalen N_Q^1 zusammenfallen und mit der $\mu\nu$ -Normalen übereinstimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} R^1 &= P \vee P\mu\nu \\ R^0 &= P + a P\mu\nu \\ &= (p, \bar{p} + a p)\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^1 &= P_{,j} \vee P_{,j}\mu\nu \\ S^0 &= P_{,j} + b P_{,j}\mu\nu \\ &= (p_{,j}, \bar{p}_{,j} + b p_{,j})\mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 &\neq \emptyset \\ 0 &= p p + \frac{\varepsilon}{2} \bar{p} p + \frac{\varepsilon}{2} p (\bar{p} + a p) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} a \\ 0 &= p_{,j} p + \frac{\varepsilon}{2} \bar{p}_{,j} p + \frac{\varepsilon}{2} p_{,j} (\bar{p} + a p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^1 \cap {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2 &\neq \emptyset \\ 0 &= p p_{,j} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{p} p_{,j} + \frac{\varepsilon}{2} p (\bar{p}_{,j} + b p_{,j}) \\ 0 &= p_{,k} p_{,j} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{p}_{,k} p_{,j} + \frac{\varepsilon}{2} p_{,k} (\bar{p}_{,j} + b p_{,j}) \\ &= \begin{cases} e_{jj} (1 + b \frac{\varepsilon}{2}) + \varepsilon g_{jj} & j = k \\ 0 & j \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $j=1,2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gesetzt werden. Hierbei ist im Allgemeinen $\varepsilon \neq \varepsilon_j$ zu fordern, wie eine kleine Rechnung zeigt. Aus diesen Überlegungen folgt der nachstehende

Satz 9:

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$, wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq \varepsilon_j$ mit $\varepsilon_j = -1/c_j$ ($j=1,2$) gelten. Es seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Kongruenz sowie mit $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben. $T_{P(u)}^2$ bezeichne die Tangentialebene in einem (beliebigen) Flächenpunkt $P(u) \in P(U)$.

Zu jedem Punkt $Q \in \Pi^5$ mit $Q \notin T_{P(u)}^2$ und $Q \notin {}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ existiert bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ genau eine Normale N_Q^1 auf $T_{P(u)}^2$ durch Q . Diese stimmt für jede Wahl ε mit der im Abschnitt 2.2.3 ähnlichkeitsgeometrisch ausgezeichneten $\mu\nu$ -Normale überein. Die $\mu\nu$ -Normale gestattet damit eine Deutung ihrer Bildung durch das maßgebende Hyperquadrikenbüschel. Der Normalenfußpunkt $L^0 = N_Q^1 \cap T_{P(u)}^2$ heißt die *Normalprojektion* von Q in die Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ (*Tangentialprojektion* von Q in $T_{P(u)}^2$) bezüglich $F^{(\varepsilon)}$.)

*) Der Begriff einer „Parallelität“ soll hiervon unberührt bleiben.

5.5.2 Zweite Grundformen

Für S -normierbare C^r -Kongruenzen $P:U \rightarrow \Pi^5$ und ihre KLEINSchen Bilder $P(U) \subset M_4^2$ gestattet das in der Theorie der Kongruenzen ausgezeichnete $\mu\nu$ - (Flächen-)Normalenfeld in Π^5 eine Deutung im Sinne CAYLEY- KLEINScher Betrachtungen als einziges Flächennormalenfeld an $P(U)$ bezüglich $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).

Die Punkte ${}^{(\varepsilon)}R$ auf einer Flächennormale $N^1 = P \vee {}^{(\varepsilon)}R$ im Flächenpunkt P sind gerade die Pole der Tangentialhyperebene $P(u)\mu$ bezüglich $V_4^2(\varepsilon)$ und unabhängig von der speziellen Parametrisierung der 2-Fläche (vgl. Satz 8). Wir betrachten im Folgenden die quadratische Differentialform $(dP^T {}^{(\varepsilon)}E d{}^{(\varepsilon)}R)^*$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und nennen sie *zweite (flächentheoretische) Grundform für $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$* .

Definition 11:

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) im Sinne von Bemerkung 1 und 2. Weiter seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ sowie $P(U)$ eine S -normierte C^r -Kongruenz und ihr KLEINSches Bild gegeben. Die quadratische Differentialform

$${}^{(\varepsilon)}II = -(dP^T {}^{(\varepsilon)}E d{}^{(\varepsilon)}R) = -(P_{,j}^T {}^{(\varepsilon)}E {}^{(\varepsilon)}R_{,k}) du^j du^k, \quad j, k = 1, 2 \quad (5.25)$$

heißt *zweite (flächentheoretische) Grundform für $P(U) \subset M_4^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$* .

Zur Berechnung der auftretenden Koeffizienten betrachten wir zunächst die Absolutfigur $F^{(0)} = N_4^2 \supset P_\phi^2 \supset \bar{V}_1^2$. Da ${}^{(0)}R = P_3$ die Darstellung ${}^{(0)}R = (\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}})\mathbb{R} = (O, \mathfrak{p})\mathbb{R}$ besitzt, ist sicher $(d\bar{\mathfrak{p}}^T E_1 d\mathfrak{p})$ zu bilden. Für S -normierte C^r -Kongruenzen schreibt sich die zweite Grundform ${}^{(0)}II$ unter Ausnutzung der Schreibweise in (4.5):

$${}^{(0)}II = -g_{11} (du^1)^2 - g_{22} (du^2)^2, \quad (5.26)$$

wobei der Koeffizient des gemischten Gliedes wegen S -Normiertheit verschwindet.

Bemerkung 16 und Definition 12:

Die Koeffizienten in (5.26) ähneln den Größen der zweiten Fundamentalform in der Theorie der Kongruenzen und lassen darüber hinaus einen Vergleich mit den Koeffizienten (5.17) in den GAUSS-Ableitungsgleichungen zu.

Wir nennen sie *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von $P(U)$ bezüglich $F^{(0)}$* und bezeichnen sie mit ${}^{(0)}h_{jk}$ ($j, k = 1, 2$).

Wählen wir als Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ eine beliebige reguläre Hyperquadrik $V_4^2(\varepsilon)$ aus dem Hyperquadrikenbüschel $\{V_4^2(\varepsilon)\}$, so besitzt ${}^{(\varepsilon)}R$ die Darstellung ${}^{(\varepsilon)}R(u) = (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} - \frac{2}{\varepsilon}\mathfrak{p})\mathbb{R}$. Die zweite Grundform schreibt sich in diesem Fall $((\mathfrak{p}_j, \bar{\mathfrak{p}}_j)^T {}^{(\varepsilon)}E (\mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{p}}_k - \frac{2}{\varepsilon}\mathfrak{p}_k)) du^j du^k$, wobei $j, k = 1, 2$ gesetzt ist.

^{*} Um die Lesbarkeit zu erhöhen, schreiben wir gelegentlich die Punktbezeichnung P anstelle der Koordinatenmatrizen $(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}})$.

Die auftretenden Koeffizienten berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1)^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1 - \frac{2}{\varepsilon} \mathfrak{p}_1) &= -(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1)^T (\mathfrak{p}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\mathfrak{p}}_1 - \mathfrak{p}_1, \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{p}_1) \\ &= -\varepsilon g_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1)^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2 - \frac{2}{\varepsilon} \mathfrak{p}_2) &= -(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1)^T (\mathfrak{p}_2 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\mathfrak{p}}_2 - \mathfrak{p}_2, \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{p}_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2)^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}(\mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{p}}_1 - \frac{2}{\varepsilon} \mathfrak{p}_1) &= -(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2)^T (\mathfrak{p}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\mathfrak{p}}_1 - \mathfrak{p}_1, \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{p}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2)^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2 - \frac{2}{\varepsilon} \mathfrak{p}_2) &= -(\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2)^T (\mathfrak{p}_2 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\mathfrak{p}}_2 - \mathfrak{p}_2, \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{p}_2) \\ &= -\varepsilon g_{22}. \end{aligned}$$

Damit besitzt die zweite (flächentheoretische) Grundform für $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \neq 0$) folgende Gestalt:

$${}^{(\varepsilon)}II = -\varepsilon g_{11} (du^1)^2 - \varepsilon g_{22} (du^2)^2. \quad (5.27)$$

Bemerkung 17 und Definition 13:

Die (flächentheoretischen) zweiten Grundformen ${}^{(\varepsilon)}II$ ($\varepsilon \neq 0$) und ${}^{(0)}II$ für $P(U) \subset M_4^2$ sind zueinander sowie zur zweiten Grundform (2.7) in der Theorie der Kongruenzen direkt proportional.

Die Koeffizienten in (5.27) stimmen bis auf einen durch den Büschelparameter ε bestimmten Faktor mit den Koeffizienten (5.17) in den GAUSS-Ableitungsgleichungen (5.13) überein.

Wir nennen sie *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von $P(U) \subset M_4^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$* ($\varepsilon \neq 0$) und bezeichnen sie mit ${}^{(\varepsilon)}h_{jk}$ ($j, k = 1, 2$).

Bemerkung 18:

Die Fundamentalgrößen ${}^{(\varepsilon)}h_{jk}$ ($j, k = 1, 2; \varepsilon \neq 0$) von $P(U) \subset M_4^2$ lassen sich in der Form

$${}^{(\varepsilon)}h_{jk} = -(\mathfrak{p}_{,jk}, \bar{\mathfrak{p}}_{,jk})^T \cdot {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}(\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} - \frac{2}{\varepsilon} \mathfrak{p})$$

schreiben, wie sich unter Ausnutzung der GAUSS-Ableitungsgleichungen zeigen lässt. Diese Darstellungsmöglichkeit, die bereits aus der klassischen Differentialgeometrie bekannt ist, besteht jedoch für $\varepsilon = 0$ nicht notwendig. Der Leser vergleiche hierfür mit den Gleichungen (5.17).

Satz 10:

Es seien mit $P: U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Kongruenz sowie mit $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben. Die zweite Grundform ${}^{(\varepsilon)}II$ von $P(U) \subset M_4^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ist invariant gegenüber Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$ und gleichsinnigen Parametertransformationen.

Beweis:

Für den Nachweis der Invarianz der zweiten Grundform ${}^{(\varepsilon)}II$ von $P(U) \subset M_4^2$ bezüglich der Gruppe $PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$ betrachten wir eine Kollineation $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$, wobei $Q = \Delta Q^*$ mit $Q, Q^* \in V_4^2(c)$ ($c \in \mathbb{R}$) und

$$\Delta = T_6 \mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix} \mathbb{R} \dots \mathbf{A}_{00} = (a^*, b^*, c^*), \det(\mathbf{A}_{00}) = 1 \dots \mathbf{B} = (h^* \times a^*, h^* \times b^*, h^* \times c^*)$$

gelten.

Damit folgen $dQ = \Delta dQ^*$ sowie für $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} -(\mathbf{d}P^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \mathbf{d} \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{R}) &= \mathbf{d}(\Delta P^*)^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \mathbf{d}(\Delta {}^{(\varepsilon)}\mathbf{R}^*) \\ &= (\Delta \mathbf{d}P^*)^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} (\Delta \mathbf{d} \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{R}^*) \\ &= (\mathbf{d}P^*)^T \Delta^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \Delta (\mathbf{d} \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{R}^*) \\ &= (\mathbf{d}P^*)^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} (\mathbf{d} \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{R}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^T \quad {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \Delta &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{00} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{00}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathbf{A}_{00} + \varepsilon \mathbf{B} & \varepsilon \mathbf{A}_{00} \\ \varepsilon \mathbf{A}_{00} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{A}_{00}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{00}) & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbf{E} & \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \\ &= {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Um das Verhalten von ${}^{(\varepsilon)}II$ unter (gleichsinnigen) Parametertransformationen zu untersuchen, betrachten wir einen Parameterwechsel $\varphi: U^* \rightarrow U$ mit $(u^1, u^2) \in U$ und $(u^{1*}, u^{2*}) \in U^*$ sowie $(u^1, u^2) = \varphi(u^{1*}, u^{2*})$. Die Abbildungen φ seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Für die JACOBI-Determinante J_φ gelte im offenen Gebiet U^* :

$$J_\varphi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u^{1*}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{1*}} \\ \frac{\partial u^1}{\partial u^{2*}} & \frac{\partial u^2}{\partial u^{2*}} \end{pmatrix} > 0.$$

Wir vereinbaren $a_{,j}^k := \partial u^k / \partial u^{j*}$ mit $j, k = 1, 2$. Dann folgen die Darstellungen:

$$du^k = a_{,j}^k du^{j*}, \quad \frac{\partial P}{\partial u^{j*}} = P_{,k} a_{,j}^{k*}$$

*) Summiert wird gemäß der EINSTEINSchen Summenkonvention über gleiche obere und untere Indizes.

Die Fundamentalgrößen ${}^{(\varepsilon)}h_{jk}^*$ transformieren sich:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}h_{jk}^* &= \left(\frac{\partial P^T}{\partial u^{j^*}} {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} \frac{\partial {}^{(\varepsilon)}R^T}{\partial u^{k^*}} \right) = \left((P_{,l} a_{,j}^l)^T {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} ({}^{(\varepsilon)}R_{,m} a_{,k}^m) \right) \\ &= \left(P_{,l} {}^{(\varepsilon)}\mathbf{E} ({}^{(\varepsilon)}R_{,m}) \right) a_{,j}^l a_{,k}^m \\ &= {}^{(\varepsilon)}h_{lm} a_{,j}^l a_{,k}^m; \quad l, m = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die zweite Grundform ${}^{(\varepsilon)}II^*$ schreibt sich damit:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}II^* &= {}^{(\varepsilon)}h_{jk}^* du^{j^*} du^{k^*} = {}^{(\varepsilon)}h_{lm} a_{,j}^l a_{,k}^m du^{j^*} du^{k^*} \\ &= {}^{(\varepsilon)}h_{lm} du^l du^m. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Analog lässt sich der Beweis für $\varepsilon = 0$ führen. □

Mit Hilfe der zu einer quadratischen Differentialform (5.26) bzw. (5.27) zugehörigen Bilinearform lässt sich in gewohnter Weise eine Involution konjugierter Flächentangenten in $T_{P(u)}^2$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) erklären. Das Verschwinden der zweiten Grundform bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ für Flächenkurven $P(f(I)) \subset P(U)$ durch $P(u)$ zeichnet dabei die selbstkonjugierten Flächentangenten bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ aus. Wir nennen die zugehörigen Flächenkurven durch $P(u)$ *Schmieglinien von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$* . Es gilt folgender

Satz 11:

Es seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Kongruenz sowie mit $P(U) \subset M_4^2$ ihr KLEINSches Bild gegeben. Die Schmieglinien von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ sind invariant gegenüber der Wahl der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Sie lassen sich demnach gegenüber $F = \bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$), also gewissermaßen bezüglich des maßgebenden Hyperquadrikenbüschels $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ konstruiert auffassen.

Die Schmieglinien stimmen mit den KLEINSchen Bildern der torsalen Kongruenzregelflächen überein, die durch das Verschwinden der zweiten Grundform der C^r -Kongruenz projektiv-geometrisch ausgezeichnet sind (vgl. Abschnitt 2.2.1).

Beweis:

Der Beweis folgt sofort aus dem Vergleich der konkreten Darstellungen bezüglich der Absolutfiguren $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) konstruierten zweiten Grundformen (5.26) und (5.27) untereinander sowie mit (2.2) für C^r -Kongruenzen.

5.6 Krümmungsmaße, WEINGARTEN-Abbildungen für $P(U)$

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten mit Hilfe der Absolutfiguren $F^{(\varepsilon)}$ erste und zweite Grundformen für $P(U)$ erzeugt und diskutiert haben, scheint es natürlich, Normalkrümmungsbegriffe in Analogie zur Vorgehensweise in der klassischen Flächentheorie zu konstruieren. Dabei ist nach (5.6) zu erwarten, dass diese ebenfalls gegenüber $F^{(\varepsilon)}$ zu bilden sind.

Definition 14:

Wir betrachten den projektiven Raum Π^5 , versehen mit einer Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Es seien mit $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und mit $P(U)$ ihr KLEINSches Bild gegeben. Mit $P(u) \in P(U)$ wird ein beliebiger Flächenpunkt betrachtet. Der Quotient:

$${}^{(\varepsilon)}K^n(u; du^1, du^2) := \frac{{}^{(\varepsilon)}II(u; du^1, du^2)}{{}^{(\varepsilon)}I(u; du^1, du^2)} \quad (5.30)$$

von der zweiten und ersten Grundform von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ an $(u; du^1, du^2)$ heißt die *Normalkrümmung von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ zu $(u; du^1, du^2)$* .

An der Stelle u ist ihr Wert lediglich abhängig vom Verhältnis $du^1:du^2$, also der Richtung in der Tangentialebene. Wir sprechen daher von der Normalkrümmung von $P(U)$ in $P(u)$ zur Richtung (du^1, du^2) (bezüglich $F^{(\varepsilon)}$).

Die ersten und zweiten Grundformen für $P(U)$ sind bewegungsgeometrische Begriffe (vgl. Satz 4 und Satz 10). Hieraus folgt sicherlich die Invarianz der neuen Bildung (unter gleichsinnigen) Parametertransformationen und Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$. Sie ist somit ein (unter gleichsinnigen Parametertransformationen) bewegungsgeometrischer Begriff nach Abschnitt 2.2.4. Es gilt somit der folgende

Satz 12:

Die Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n(u; du^1, du^2)$ ist invariant gegenüber gleichsinnigen Parametertransformationen und Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$. Sie ist ein (unter gleichsinnigen Parametertransformationen) bewegungsgeometrischer Begriff nach Abschnitt 2.2.4.

Für $\varepsilon = 0$ besitzt die Normalkrümmung ${}^{(0)}K^n$ einer S -normierten C^r -Kongruenz in $(u; du^1, du^2)$ die Darstellung:

$${}^{(0)}K^n(u; du^1, du^2) = \frac{{}^{(0)}II(u; du^1, du^2)}{{}^{(0)}I(u; du^1, du^2)} = -\frac{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2}{e_{11}(du^1)^2 + e_{22}(du^2)^2}. \quad (5.31)$$

Für die torsalen Richtungen nimmt ${}^{(0)}K^n$ erwartungsgemäß den Wert 0 an, in den SANNIA-Richtungen (KUMMER-Richtungen) jeweils die Werte $-c_1$ und $-c_2$ ($-\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$). Zur Bestimmung der Extremalwerte von ${}^{(0)}K^n$ setzen wir zunächst $\lambda := du^1/du^2$ bzw. $\tilde{\lambda} = du^2/du^1$.

*) Im Sinne von Bemerkung 6 betrachten wir ${}^{(\varepsilon)}I$ im Gegensatz zu den Darstellungen (5.6), (5.8), (5.8a) (zunächst) unter Wegfall der Betragszeichen, was sich für die nachfolgenden Rechnungen als günstig erweist.

Es ergeben sich:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}K^n &= -\frac{g_{11}\lambda^2 + g_{22}}{e_{11}\lambda^2 + e_{22}} \\ ({}^{(0)}K^n)' &= -\frac{2\lambda g_{11}(e_{11}\lambda^2 + e_{22}) - 2\lambda e_{11}(g_{11}\lambda^2 + g_{22})}{(e_{11}\lambda^2 + e_{22})^2} \\ &= -\frac{2\lambda(g_{11}e_{22} - e_{11}g_{22})}{(e_{11}\lambda^2 + e_{22})^2} \\ ({}^{(0)}K^n)' &= 0 \Leftrightarrow \\ 0 &= 2\lambda(g_{11}e_{22} - g_{22}e_{11}) \\ ({}^{(0)}K^n)'' &= -\frac{2(g_{11}e_{22} - e_{11}g_{22})(e_{11}\lambda^2 + e_{22})^2 - 8\lambda^2 e_{11}(e_{11}\lambda^2 + e_{22})(g_{11}e_{22} - e_{11}g_{22})}{(e_{11}\lambda^2 + e_{22})^4} \\ ({}^{(0)}K^n)'' &= -\frac{2(g_{11}e_{22} - e_{11}g_{22})}{(e_{11}\lambda^2 + e_{22})^4}((e_{11}\lambda^2 + e_{22})^2 - 4\lambda^2 e_{11}(e_{11}\lambda^2 + e_{22})). \end{aligned}$$

Schließen wir die isotropen - (speziell die torsalen -) Kongruenzen aus, so werden Extremalwerte von ${}^{(0)}K^n$ für die Richtungen $\lambda = 0$ ($\tilde{\lambda} = 0$) angenommen, also genau für die SANNIA-Richtungen.

Für $\varepsilon \neq 0$ besitzt die Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$ einer S -normierten C^r -Kongruenz in $(u; du^1, du^2)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}K^n(u; du^1, du^2) &= \frac{{}^{(\varepsilon)}\Pi(u; du^1, du^2)}{{}^{(\varepsilon)}I(u; du^1, du^2)} \\ &= -\frac{\varepsilon g_{11}(du^1)^2 + \varepsilon g_{22}(du^2)^2}{(\varepsilon g_{11} + e_{11})(du^1)^2 + (\varepsilon g_{22} + e_{22})(du^2)^2}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$ nimmt in den torsalen Richtungen den Wert 0 an. In den SANNIA-Richtungen (KUMMER-) besitzen die Normalkrümmungswerte die Darstellungen

$$\begin{aligned} &-\frac{\varepsilon g_{jj}}{\varepsilon g_{jj} + e_{jj}} \quad (j=1,2) \text{ in den SANNIA-Richtungen beziehungsweise} \\ &-\frac{\varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11})}{2e_{11}e_{22} + \varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11})} \text{ in den KUMMER-Richtungen.} \end{aligned}$$

Schließen wir erneut isotrope - (speziell torsale -) Kongruenzen aus, so ergeben sich die Extremalwerte von ${}^{(\varepsilon)}K^n$ wieder genau für die SANNIA-Richtungen, wie eine analoge Rechnung zeigt.

Bemerkung 19:

Für jede Wahl der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) stellen die SANNIA-Richtungen die Richtungen extremaler Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$ dar; sie lassen sich demnach bezüglich $\cup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) konstruiert auffassen. Die im Abschnitt 2.2.4 als Richtungen extremalen Dralls erklärten SANNIA-Richtungen erfahren so mit Hilfe CAYLEY- KLEINScher Maßbestimmungen zusätzliche Interpretationsmöglichkeiten.*

Die Werte der Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$ nach (5.30), im Besonderen ihre Extremalwerte, hängen im Allgemeinen von der Wahl der Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ab.

Die WEINGARTEN-Abbildungen einer Fläche Φ sind bekanntlich lineare C^s -Endomorphismen erster Ordnung des Tangentialvektorraumes $T_u\Phi$ von Φ . Sie sind selbstadjungiert auf $T_u\Phi$ bezüglich der 1. Grundform I der Fläche Φ .

Wir suchen hier nach linearen C^s -Selbstabbildungen L der Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ an $P(U)$ in $P(u)$ mit vergleichbaren Eigenschaften und bezeichnen sie entsprechend als WEINGARTEN-Abbildungen von $P(U)$. Der analytische Ansatz ergibt dabei:

$$L: T_{P(u)}^2 \rightarrow T_{P(u)}^2 \quad (5.33)$$

$$aP_{,1} + bP_{,2} \mapsto L(aP_{,1} + bP_{,2}) = (h_1^1 a + h_1^2 b)P_{,1} + (h_2^1 a + h_2^2 b)P_{,2}$$

$$\begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^1 a + h_1^2 b \\ h_2^1 a + h_2^2 b \end{pmatrix},$$

$${}^{(\varepsilon)}II(Q, R) = {}^{(\varepsilon)}I(L(Q), R) = {}^{(\varepsilon)}I(L(R), Q) = {}^{(\varepsilon)}II(R, Q) \quad Q, R \in T_{P(u)}^2.$$

Mithin berechnen sich die Matrixelemente h_j^k in der L beschreibenden Matrix für S -normierte C^r -Kongruenzen mit den Gleichungen (5.7), (5.26) und (5.27) nach:

$$\left({}^{(\varepsilon)}h_j^k \right)_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} = \begin{pmatrix} {}^{(\varepsilon)}h_1^1 & {}^{(\varepsilon)}h_1^2 \\ {}^{(\varepsilon)}h_2^1 & {}^{(\varepsilon)}h_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det({}^{(\varepsilon)}g_{lm})} \begin{pmatrix} {}^{(\varepsilon)}h_{11} & {}^{(\varepsilon)}h_{12} \\ {}^{(\varepsilon)}h_{21} & {}^{(\varepsilon)}h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{(\varepsilon)}g^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(\varepsilon)}g^{22} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Sie sind sicherlich von der konkreten Wahl der Absolutfigur abhängig, was die Bezeichnungen ${}^{(\varepsilon)}L$ und ${}^{(\varepsilon)}h_j^k$ rechtfertigt.

Definition 15:

Es seien $P: U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und $P(U)$ ihr KLEINSches Bild. Die lineare C^s -Selbstabbildung ${}^{(\varepsilon)}L$ der Tangentialebene $T_{P(u)}^2$ von $P(U)$ in der Darstellung (5.33) mit (5.34) heißt WEINGARTEN-Abbildung von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$.

Bemerkung 20:

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich (unter den Voraussetzungen ${}^{(0)}h_{12} = {}^{(0)}h_{21} = 0$) die folgende Darstellung:

$$\left({}^{(0)}h_j^k \right)_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} = \begin{pmatrix} -c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

*) Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn in (5.30) gemäß Bemerkung 6 ${}^{(\varepsilon)}I$ in der Form (5.8) bzw. (5.8a) verwendet wird.

Die „Eigenwerte“ der WEINGARTEN-Abbildung ${}^{(0)}L$ sind durch den Ansatz

$$L(aP_{,1} + bP_{,2}) = k(aP_{,1} + bP_{,2})$$

bestimmt und entsprechen bis auf ein Signum gerade den Hauptdrallen der C^r -Kongruenz. Sie stimmen darüber hinaus mit den Extremalwerten der Normalkrümmung ${}^{(0)}K^n$ überein. Die zugehörigen „Eigenrichtungen“ von ${}^{(0)}L$ sind durch die SANNIA-Richtungen gegeben.

Für $\varepsilon \neq 0$ besitzt die entsprechende Abbildung ${}^{(\varepsilon)}L$ die Darstellung:

$${}^{(\varepsilon)}h_j^k \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon g_{11}}{\varepsilon g_{11} + e_{11}} & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon g_{22}}{\varepsilon g_{22} + e_{22}} \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Die „Eigenwerte“ von ${}^{(\varepsilon)}L$ gleichen den Extremalwerten der Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$. Die zugehörigen „Eigenrichtungen“ sind erneut identisch mit den SANNIA-Richtungen.

Nach Bemerkung 20 lassen sich die Extremalwerte der Normalkrümmungsbildungen ${}^{(\varepsilon)}K^n$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) in (5.30) in Anlehnung an Bildungen in der Flächentheorie als *Hauptkrümmungen* ${}^{(\varepsilon)}k_j$ ($j=1,2$) von $P(U)$ (in $P(u)$) bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ auffassen. Die SANNIA-Richtungen entsprechen ferner den *Hauptkrümmungsrichtungen* (in $P(u)$ bezüglich $\cup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)).

Im Anschluss an diese Begriffsbildungen lassen sich für $P(U)$ wichtige *Krümmungsbegriffe* konstruieren.

Definition 16:

Es seien $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Kongruenz und $P(U)$ ihr KLEINSches Bild. Die Abbildung ${}^{(\varepsilon)}L$ bezeichne die WEINGARTEN-Abbildung von $P(U)$ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$, die durch die entsprechende Matrix in (5.34) beschrieben wird. Die Funktionen ${}^{(\varepsilon)}H: P(U) \rightarrow \mathbb{R}$ und ${}^{(\varepsilon)}K: P(U) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$${}^{(\varepsilon)}H := \frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^{(\varepsilon)}h_j^k \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}}) = \frac{1}{2} ({}^{(\varepsilon)}k_1 + {}^{(\varepsilon)}k_2) \quad \text{und} \quad {}^{(\varepsilon)}K := \det({}^{(\varepsilon)}h_j^k \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}}) = {}^{(\varepsilon)}k_1 {}^{(\varepsilon)}k_2 \quad (5.37)$$

heißen „mittlere Krümmung“ und „GAUSSsche Krümmung“ bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ von $P(U)$ (an der Stelle $u \in U$).

Bemerkung 21:

Die so erklärten Krümmungen lassen sich darüber hinaus mit Hilfe der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung von $P(U)$ konstruieren. Genauer gilt mit (5.34) und (5.37):

$${}^{(\varepsilon)}H := \frac{1}{2} \frac{{}^{(\varepsilon)}g_{11} {}^{(\varepsilon)}h_{22} + {}^{(\varepsilon)}g_{22} {}^{(\varepsilon)}h_{11}}{\det({}^{(\varepsilon)}g_{jk} \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} \quad \text{und} \quad {}^{(\varepsilon)}K := \frac{\det({}^{(\varepsilon)}h_{jk} \Big|_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})}{\det({}^{(\varepsilon)}g_{lm} \Big|_{\substack{l=1,2 \\ m=1,2}})}.$$

Wählen wir speziell die Absolutfigur $F^{(0)}$, so ergeben sich mit den Gleichungen (5.7) und (5.26):

$${}^{(0)}H = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2) \text{ sowie } {}^{(0)}K = c_1 c_2.$$

Die Krümmungswerte stimmen dabei mit den Werten der ersten und zweiten Krümmung in der Kongruenzentheorie überein (vergleiche Abschnitt 4.3). Für eine beliebige Absolutfigur $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \neq 0$) folgen hingegen die Darstellungen:

$${}^{(\varepsilon)}H := -\frac{\varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11}) + 2\varepsilon^2 g_{11}g_{22}}{2(\varepsilon g_{11} + e_{11})(\varepsilon g_{22} + e_{22})} \text{ und } {}^{(\varepsilon)}K := \frac{\varepsilon^2 g_{11}g_{22}}{(\varepsilon g_{11} + e_{11})(\varepsilon g_{22} + e_{22})}. \quad (5.38)$$

Wir fragen nun nach jenen C^r -Kongruenzen, für welche ${}^{(\varepsilon)}H = 0$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt und nennen sie im Falle ihrer Existenz C^r -Kongruenzen mit verschwindender mittlerer Krümmung bezüglich $\cup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$). Diese entsprechen dann den Minimalflächen in der Flächentheorie, was die Bezeichnung „kleinste-“ oder „Minimal-“ C^r -Kongruenzen rechtfertigt. Aus den Darstellungen in Bemerkung 21 ergeben sich für

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0: \quad & {}^{(0)}H = 0 \leftrightarrow \\ & 0 = c_1 + c_2 \\ \varepsilon \neq 0: \quad & {}^{(\varepsilon)}H = 0 \leftrightarrow \\ & 0 = (g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11}) + 2\varepsilon g_{11}g_{22} \\ & 0 = c_1 + c_2 + 2\varepsilon c_1 c_2 \\ & \wedge \varepsilon \neq \varepsilon_j \quad (j=1,2). \end{aligned}$$

Dies ist für alle $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ genau dann erfüllt, wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt, also gerade für die torsalen Kongruenzen.

Bemerkung 22:

Definieren wir die Hauptkrümmungen ${}^{(\varepsilon)}k_j$ als Extremalwerte der Normalkrümmung ${}^{(\varepsilon)}K^n$, wobei die erste Grundform ${}^{(\varepsilon)}I$ (gemäß Bemerkung 6) in der Form (5.8) verwendet wird, so erhalten wir für die mittlere Krümmung (bezüglich ${}^{(\varepsilon)}F$) gemäß (5.37):

$${}^{(\varepsilon)}H = -\varepsilon \frac{g_{11}|\varepsilon g_{22} + e_{22}| + g_{22}|\varepsilon g_{11} + e_{11}|}{2|\varepsilon g_{11} + e_{11}||\varepsilon g_{22} + e_{22}|}. \quad (5.38a)$$

Die Forderung ${}^{(\varepsilon)}H = 0$ ist für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ genau dann erfüllt, wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt, also erneut für die torsalen Kongruenzen. Wird ${}^{(\varepsilon)}I$ hingegen in der Form (5.8a) verwendet, so berechnet sich die mittlere Krümmung (bezüglich ${}^{(\varepsilon)}F$) gemäß (5.37):

$$\begin{aligned} {}^{(\varepsilon)}H &= -\varepsilon \frac{g_{11}(|\varepsilon g_{22}| + e_{22}) + g_{22}(|\varepsilon g_{11}| + e_{11})}{2(|\varepsilon g_{11}| + e_{11})(|\varepsilon g_{22}| + e_{22})} \\ &= -\varepsilon \frac{g_{11}|\varepsilon g_{22}| + g_{22}|\varepsilon g_{11}| + (g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11})}{2(|\varepsilon g_{11}| + e_{11})(|\varepsilon g_{22}| + e_{22})}. \end{aligned} \quad (5.38b)$$

Eine kleine Rechnung zeigt, dass die Forderung ${}^{(\varepsilon)}H = 0$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ genau dann erfüllt ist, wenn $c_1 = c_2 = 0$ bzw. $c_1 = -c_2 (\neq 0)$ gelten. Neben den torsalen Kongruenzen sind so die Normalenkongruenzen durch verschwindende mittlere Krümmung ausgezeichnet.

Satz 13:

Es seien $P:U \rightarrow \Pi^5$ eine S -normierte C^r -Geradenkongruenz und $P(U)$ ihr KLEINSches Bild. $P(U)$ heißt genau dann „kleinste“ C^r -Geradenkongruenz, wenn ${}^{(\varepsilon)}H = 0$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt.

Bezüglich der Bildungen (5.38) und (5.38a) sind torsale Kongruenzen die einzigen Kongruenzen mit $H = 0$ gegenüber $\bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$). Bezüglich der Bildung (5.38b) sind neben den torsalen Kongruenzen auch die Normalenkongruenzen durch verschwindende mittlere Krümmung gegenüber $\bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ausgezeichnet.

Die Darstellungen (5.6) der ersten Grundformen zeigen, dass durch das maßgebende Hyperquadrikenbüschel $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ eine gewisse Büschelmetrik auf $P(U)$ induziert wird. Im Folgenden diskutieren wir den Gedanken einer bezüglich $\bigcup F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) „einheitlichen Normierung“ von ${}^{(\varepsilon)}II$ zu $P(u)$ in Richtung (du^1, du^2) . Wir weichen von der Begriffsbildung der Normalkrümmung in (5.30) derart ab, dass wir die Quotienten:

$${}^{(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})}K^n(u; du^1, du^2) := \frac{{}^{(\varepsilon)}II(u; du^1, du^2)}{{}^{(\tilde{\varepsilon})}I(u; du^1, du^2)} \quad (5.39)$$

betrachten, wobei ${}^{(\tilde{\varepsilon})}I(u; du^1, du^2)$ eine beliebige, jedoch für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fest gewählte erste Grundform zu $P(U)$ in (5.6) ist.

Die Betrachtungen in diesem Abschnitt lassen sich hiermit analog durchführen. Unter den C^r -Kongruenzen lassen sich die torsalen Kongruenzen als jene Kongruenzen auszeichnen, für welche ${}^{(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})}H = 0$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gelten. Als „kleinste“ Kongruenzen bezüglich ${}^{(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})}H = 0$ ($\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \tilde{\varepsilon} = 0$) ergeben sich zusätzlich die Normalenkongruenzen.

Bemerkung 23:

Die Wahl von ${}^{(\tilde{\varepsilon})}I(u; du^1, du^2) := {}^{(0)}I(u; du^1, du^2)$ für die Normalkrümmungsbildung (5.39) erscheint unter dem Gesichtspunkt, dass

$${}^{(0)}I(u; du^1, du^2) = \frac{1}{2} \left({}^{(\varepsilon)}I(u; du^1, du^2) + {}^{(-\varepsilon)}I(u; du^1, du^2) \right)^* \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

gesetzt werden kann, sinnvoll. Daneben beschreibt ${}^{(0)}I$ gerade das Bogenelementquadrat des sphärischen Bildes der C^r -Kongruenz (vgl. Bemerkung 15, Kapitel 4), besitzt demnach geometrische Bedeutung.

^{*}) Diese Darstellung folgt sofort aus (5.6).

6 Schlussbemerkungen und Ausblicke

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die differentialgeometrische Behandlung von C^r -Geradenkongruenzen des projektiv abgeschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raumes Π_e^3 im KLEINSchen Modell. Vermittelt durch diesen Modellwechsel scheint eine „natürliche“ Behandlung der Geradenkongruenzen im Linienraum denkbar.

Maßgebliches Anliegen war dabei die Auszeichnung von gewissen „kleinsten“ C^r -Kongruenzen („Minimalkongruenzen“). Wie zu Beginn bemerkt, scheint diese Frage im KLEINSchen Modell sinnvoll, da wir hier ein Punktmodell des Geradenraumes \mathfrak{G} von Π_e^3 vorliegen haben und sich Geradenkongruenzen darin als zweidimensionale Flächen auffassen lassen. Das Wort „Minimalkongruenzen“ wurde in diesem Zusammenhang in gewissem Bezug zu den Minimalflächen in der klassischen Differentialgeometrie gesehen.

In Analogie zur Auszeichnung von Minimalflächen in der klassischen Differentialgeometrie wurde zunächst versucht, infinitesimale „Flächenelemente“ für reguläre, nichtzylindrische, fernerzeugendenfreie Geradenkongruenzen zu konstruieren. Unter Verwendung eines Differentialformenkalküls konnte die differentielle Verrückung eines mit der Kongruenz verbundenen Begleitsimplexes studiert werden.

Analog zur klassischen Vorgehensweise erbrachte eine geeignete Transformation des Begleitsimplex die Möglichkeit der Kennzeichnung von Invarianten bezüglich $PGL(\Pi^5, V_4^2(\mathcal{E}))$, von denen einige sowohl Deutungen im Rahmen der Theorie der C^r -Kongruenzen des Π_e^3 als auch in Π^5 als Flächenelemente gestatten. Die Kennzeichnung eines natürlichen Oberflächenbegriffs unter Verwendung einer geeigneten Kombination dieser gestaltet sich hierbei schwierig.

Ein anderer Ansatz erscheint bemerkenswert. Die euklidische Bewegungsgruppe erzeugt Kollineationen in Π^5 , welche die Hyperquadriken $V_4^2(\mathcal{E})$ des Büschels $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$ einzeln fest lassen. Bezüglich dieses Hyperquadrikenbüschels in Π^5 lassen sich gewisse differentialgeometrische Begriffsbildungen für die im KLEINSchen Modell betrachteten C^r -Kongruenzen durchführen. Beispielsweise ist es gelungen, für diese gegenüber $\{V_4^2(\mathcal{E})\}$ GAUSSsche Ableitungsgleichungen zu entwickeln.

Darüber hinaus erlauben bezüglich dieses Hyperquadrikenbüschels gebildete Krümmungsbegriffe eine Auszeichnung von C^r -Kongruenzen mit verschwindender „mittlerer Krümmung“, welche in Anlehnung an die Begriffsbildung in der Flächentheorie Minimalkongruenzen genannt werden sollen. Zu bemerken ist allerdings, dass die eher komplizierte Struktur des maßgebenden Hyperquadrikenbüschels in Π^5 mehrere Begriffsbildungen für die mittlere Krümmung erlaubt, die durch möglichst geometrische Überlegungen zu begründen sind.

Noch ausständig sind die Auszeichnung eines Flächenelementes und seine Deutung als ein gewisses „Dichtemaß“ in Π_e^3 . Interessant erscheint dabei die Frage, ob die C^r -Kongruenzen mit verschwindendem mittleren Krümmungsmaß auch ein bezüglich dem Flächeninhaltsmaß extremales Verhalten aufzeigen. Neben den Überlegungen im vierten Kapitel seien hier weitere zur (möglichen) Konstruktion eines Flächenelementes aufgezeigt.

- a) Bezüglich einer beliebigen Hyperquadrik $V_4^2(\varepsilon)$ aus dem Büschel $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ gestattet die Determinante zur Matrix aus den Fundamentalgrößen der ersten Grundform einer C^r -Geradenkongruenz die Auszeichnung eines Flächenelementes bezüglich dieser Hyperquadrik. Wir schreiben für S -normierte C^r -Kongruenzen und $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} dA^{(\varepsilon)} &= \sqrt{\left| \det(({}^{(\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} \right| du^1 du^2} \\ &= \sqrt{\left| (\varepsilon^2 g_{11}g_{22} + \varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11}) + e_{11}e_{22}) \right| (du^1 \wedge du^2)}. \end{aligned}$$

Mit Satz 1 und Satz 4 in Kapitel 5 sowie den Darstellungen (5.11) und (5.12) sind die Bildungen $dA^{(\varepsilon)}$ sicherlich invariant unter zulässigen Parametertransformationen und Kollineationen $\kappa \in PGL(\Pi^5, V_4^2(\varepsilon))$; sie sind damit bewegungsgeometrische Begriffe im Sinne von Abs. 2.2.4.

Zu bemerken ist außerdem, dass im Radikanten gerade die (mit dem Parameter ε gewichteten) Flächenelemente stehen, die sich aus den Invarianten (4.20) ergeben.

- b) Von einem bezüglich des gesamten Büschels $\{V_4^2(\varepsilon)\}$ gebildeten Flächenelementbegriff ist zusätzlich eine gewisse „Invarianz“ gegenüber der Wahl des Büschelparameters ε zu fordern. In diesem Sinne ließen sich geeignete Verknüpfungen der Determinanten $\det(({}^{(\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})$ angeben wie etwa:

$$\begin{aligned} d\bar{A}^{(\varepsilon)} &= \sqrt{\left| \det(({}^{(0)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} + \frac{1}{2} (\det(({}^{(\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} - \det(({}^{(-\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} \right| (du^1 \wedge du^2)} \\ &= \sqrt{\left| e_{11}e_{22} + \varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11}) \right| (du^1 \wedge du^2)} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} d\hat{A}^{(\varepsilon)} &= \sqrt{\left| \frac{1}{2} (\det(({}^{(\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} + \det(({}^{(-\varepsilon)}g_{jk})_{\substack{j=1,2 \\ k=1,2}})} \right| (du^1 \wedge du^2)} \\ &= \sqrt{\left| e_{11}e_{22} + \varepsilon(g_{11}g_{22}) \right| (du^1 \wedge du^2)}, \end{aligned}$$

die sich zumindest invariant gegenüber der Auswahl $\pm\varepsilon$ erweisen. Dabei nimmt beispielsweise $d\bar{A}^{(\varepsilon)}$ für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein Minimum an, wenn der Ausdruck $\varepsilon(g_{11}e_{22} + g_{22}e_{11})$ verschwindet. Dies ist gerade für die gegenüber $({}^{(\varepsilon)}H = 0$ und $({}^{(\varepsilon, \bar{\varepsilon})}H = 0$ ausgezeichneten torsalen Kongruenzen und Normalenkongruenzen erfüllt.

Aus der Analogiebildung zur elementaren Differentialgeometrie der Flächen schließt sich weiter die Frage nach einem verallgemeinerten Randwert- Problem an (LAGRANGE 1760, PLATEAU 1866). Übersetzt in die Liniengeometrie könnte sie wie folgt formuliert werden:

Gegeben sei eine geschlossene einfache Regelfläche, die stückweise C^1 -stetig ist. Gesucht sind „minimale“ Geradenkongruenzen, die das „Innere“ dieser geschlossenen Regelfläche ausfüllen, das heißt diese Regelfläche als Rand besitzen (vgl. [ODE]).

Eine andere Auffassung des Geradenraumes vertritt das nach E. STUDY benannte Übertragungsprinzip, welches bereits in der Einleitung beschrieben wurde. Eine Behandlung minimaler C^r -Geradenmannigfaltigkeiten, speziell von C^r -Geradenkongruenzen in diesem Modell scheint lohnenswert und bietet sich als Aufgabe für weitere Betrachtungen an.

Wie zu Beginn der Arbeit beschrieben, untersucht W. HAACK unter Verwendung des STUDYSchen Ansatzes die Frage nach jenen Strahlenkomplexen, die ein gewisses Integral minimieren und nennt sie in Anlehnung an die Minimalflächen in der klassischen Flächentheorie „*Minimalkomplexe*“. Interessant scheint die Frage, ob diese im KLEINSchen Modell ebenfalls eine gewisse Minimalitätseigenschaft erfüllen. In der Literatur habe ich hierüber noch keine Aussagen gefunden.

Literaturverzeichnis

- [BLA] BLASCHKE, W. (1924):
Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Elementare Differentialgeometrie. Verlag von Julius Springer, Berlin.
- [BRA1] BRAUNER, H. (1981):
Differentialgeometrie. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig.
- [BRA2] BRAUNER, H. (1971/ 72):
Vorlesung Liniengeometrie. Scriptum zur Vorlesung.
- [BRA3] BRAUNER, H. (1968/69):
Differentialgeometrie. Teil A, Scriptum zur Vorlesung, Universität Stuttgart, Mathematisches Institut B.
- [BRA4] BRAUNER, H. (1976):
Geometrie projektiver Räume II. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Mannheim- Wien- Zürich.
- [FIN] FINIKOW, S. P. (1959):
Theorie der Kongruenzen. Akademie- Verlag Berlin, Berlin (1. Auflage Moskau 1950).
- [GIE] GIERING, O. (1982):
Vorlesungen über höhere Geometrie. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig.
- [GRA] GRAY, A. (1994):
Differentialgeometrie: klassische Theorie in moderner Darstellung. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford.
- [GRO] GROSCHE, G. (1957):
Projektive Geometrie. Teil I und II, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [HAA1] HAACK, W. (1948):
Differentialgeometrie. Teil II, Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hannover.
- [HAA2] HAACK, W. (1936):
Differentialgeometrie der Strahlkomplexe IV. Mathematische Zeitschrift, Verlag von Julius Springer, Berlin.
- [HLA] HLAVATY, V. (1945):
Differentielle Liniengeometrie. P. Noordhoff N V.- Groningen- Batavia.

- [HOS] HOSCHEK, J. (1971):
Liniengeometrie. Hochschulscripten 733/a/b, Bibliographisches Institut, Zürich.
- [JOS] JOST, J. (1994):
Differentialgeometrie und Minimalflächen. Springer Verlag, Berlin.
- [KLE] KLEIN, F. (1926):
Vorlesungen über höhere Geometrie. J. Springer Verlag (Nachdruck, 3. Auflage), Berlin.
- [KLI1] KLIX, W. D. (1970):
Ein Beitrag zur Übertragung der euklidischen Liniengeometrie auf die Kleinsche Hyperquadrik des P_5 . in: Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden, 19 Heft 6, TU Dresden.
- [KOC] KOCH, R. (1981):
Zur Geometrie der zweiten Grundform der Geradenkongruenzen des \mathbb{E}^3 . Veranderingen van de Koninklijke Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België, Klasse der Wetenschappen, Jaargang 43, Nr. 162, Paleis der Academiën, Brussel.
- [KRU] KRUPPA, E. (1957):
Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer Verlag, Berlin.
- [KUM] KUMMER, E. (1860):
Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme. in: J. reine angew. Mathematik. 57.
- [ODE] ODEHNAL, B.(2003):
Geometric Optimization Methods for Line Congruences. Dissertation, eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für technische Naturwissenschaften und Informatik, Wien.
- [POT] POTTMANN, H.; WALLNER, J.(2001):
Computational Line Geometry. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [SAC] SACHS, H. (1979):
Lineare Geradenkomplexe im einfachen isotropen Raum. Glasnik Mathematicki, vol. 14 (34), S. 325- 344, München.
- [SCH] SCHMID, K. (1979):
Umgebung 1. Ordnung einer regulären Kongruenzgeraden. Seminarvortrag, gehalten am 1. Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien, Wien.

- [SOR] SORGER, H. (1981):
Der Hauptsatz der Theorie der Geradenkongruenzen. Ausarbeitung eines Seminarvortrages, gehalten am 1. Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien, Wien.
- [STE1] STEPHANIDIS, N. K. (1991):
Über die Dritte Quadratische Differentialform eines Normalensystems. Journal of Geometry, Vol. 41, Basel.
- [STE2] STEPHANIDIS, N. K. (1990):
Über die III-Hauptflächen eines Strahlensystems. Österreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch- naturwissenschaftliche Klasse, Sonderdruck aus Sitzungsberichte, Abt II, 199. Bd., Heft 1-3, Wien.
- [STE3] STEPHANIDIS, N. K. (1989):
Über eine invariante Differentialform für Strahlensysteme. Österreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch- naturwissenschaftliche Klasse, Sonderdruck aus Sitzungsberichte, Abt II, 198. Bd., Heft 4-7, Wien.
- [WEI1] WEISS, G. (1991):
Vorlesungen aus Liniengeometrie. unveröffentlichtes Skriptum.
- [WEI2] WEISS, G. (1983):
Zur euklidischen Differentialgeometrie der Regelflächen. Resultate der Mathematik, Vol. 6, Birkhäuser Verlag.
- [WEI3] WEISS, G. (1979):
Zur euklidischen Liniengeometrie I-III. Sonderdruck aus den Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften Mathematisch- naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II, 187. Bd., 8. bis 10. Heft, Wien.
- [WEI4] WEISS, G. (o.J.):
Vorlesung aus projektiver Geometrie. unveröffentlichtes Skriptum.
- [WEI5] WEISS, G. (o.J.):
Kürzeste Regelflächen. Ausarbeitung eines Vortrages.

Abbildungsverzeichnis

(Kapitel 1)

1	Übertragung der projektiven Gruppe ins KLEINSche Modell	11
2	Übertragung der affinen Gruppe ins KLEINSche Modell	11
3	Übertragung der Ähnlichkeitsgruppe ins KLEINSche Modell	12

(Kapitel 2)

4	Regelfläche	14
5	Geradenkongruenz	14
6	Kongruenzregelfläche	14
7	Parameterregelflächen	18
8	Involution konjugierter Flächentangenten	19
9	Selbstkonjugierte Geraden der Involution	19
10	Projektivgeometrische Klassifikation einer Kongruenzgeraden	21
11	Geradenfeld und -bündel	22
12	Berührprojektivität	22
13	Rechtwinkelinvolution	24
14	SANNIA-Richtungen	26
15	torsale Richtungen, SANNIA-Richtungen, KUMMER-Richtungen	26

(Kapitel 3)

16	Begleitbasis einer C^r -Kongruenz	32
17	Zur Konstruktion einer Einheitsstrecke (mit zentralsymmetrischem Eichbereich)	34
18	Zur Konstruktion des Einheitspunktes E_{12}	35

(Kapitel 5)

19	Normalen 3-Räume bezüglich $F^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)	86
20	windschiefe Lage von $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon)}\bar{T}_{P(u)}^2$ in Π^5	88
21	nicht windschiefe Lage von $T_{P(u)}^2$ und ${}^{(\varepsilon_j)}\bar{T}_{P(u)}^2$ in Π^5	88

Sachverzeichnis

A

Abbildung
 korrelative 7
Ableitungsgleichungen 41
Absolutfigur 67
Affinität 11

B

Basis
 adjungierte 7
 kanonische 7
begleitende Fernfläche 65
Begleitsimplex 33
Bilinearform 7

C

CAYLEY- KLEIN Raum 67
CHRISTOFFEL-Symbole
 erster Art 76
 zweiter Art 75

D

DESARGUES-Involution 29
Dichte 66
Differential
 äußeres 41
Differentialform 39, 40
Drall 28

E

Einheitspunkt 33
entartet
 einfach - 68
 nicht- 68

F

Ferngeradenfeld 11
Fernunterraum 11
Fundamentalgrößen
 erster Ordnung 73
 zweiter Ordnung 89
Fundamentalmenge 33

G

GAUSSsche Ableitungsgleichungen 75
GAUSSsche Krümmung 64, 96
Gebüsch 8

geometrischer Begriff 16
 projektiv- 17
Geradenkomplex 14, 15
Geradenkongruenz 14, 15
 Kongruenzregelfläche 14
 nichtzylindrische - 23
 Normalen- 98
 Parameterregelfläche der - 18
 reguläre 16
 torsale 98
Gewinde 8
Gewindeparameter 12
Grundformen
 erste 73
 zweite 89
Gruppe
 Ähnlichkeits- 12
 Bewegungs- 12
 projektive 10

H

Hauptkrümmung 96, 97
Hauptkrümmungsrichtung 96
Hyperkegel 12
Hyperquadrik
 Einheits- 34

I

Involution
 konjugierter Flächentangenten 20
 Rechtwinkel- 24
Inzidenz 7

K

KLEINSche Abbildung 10
KLEINSches Übertragungsprinzip 15
Kollineation 7, 11
Komplexbüschel
 parabolisches 22
Kongruenzgerade
 Brennebenen der 21
 Brennpunkte der 21
 eigentliche 22
 elliptische 21
 hyperbolische 21
 Nabelerzeugende 25
 nichtzylindrische 23

Kongruenzgerade
 parabolische 21
 torsale 21
 uneigentliche 22
 zylindrische 23
 konjugiert 7
 selbst- 7
 Korrelation 7, 11
 KUMMER
 -Punkte 33
 -Richtungen 26
 -Tangenten 26

M

mittlere Krümmung 64, 96, 97

N

natürlicher Parameter 71
 Normale 85
 reguläre 85
 singuläre 85
 Normalen 3- Raum 86
 Normalen
 -feld 27
 -fußpunkt 85
 -kongruenz 1, 65
 -punkt 27
 Normalkrümmung 93

O

Orthogonalnetz 27

P

PLÜCKER
 -Identitäten 10
 -Koordinaten 10
 -Normierung 69
 Polarität 7
 absolute 12
 Nichtnull- 7
 Null- 7
 reguläre 9
 singuläre 9
 Spur- 12
 Produkt
 äußeres 40

R

Raum
 affiner 11
 Regelfläche 14, 15
 Öffnung einer 66

Regelflächen
 torsale 21
 regulär
 k -Ebene 82
 Richtungen
 torsale 19, 21

S

SANNIA
 -Dralle 29
 -Netze 26
 -Punkte 30
 -Richtungen 26
 -Tangentenpaar 26
 Schmieglinien 92
 sphärisches Bild 65
 Strukturgleichungen 49

T

Tangentennetz
 parabolisches 22
 Tangentialebene 18
 Tangentialprojektion 88
 Totalkonjugierte 83

W

WEIERSTRASS-Koordinaten 69
 WEINGARTEN-Abbildung 95

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr. G. Weiß für den Anstoß und die ausgezeichnete Betreuung meines Dissertationsvorhabens bedanken. Die gemeinsamen Gespräche waren stets konstruktiv und anregend zugleich.

Herrn Prof. Dr. U. Brehm möchte ich für seine stete Bereitschaft zu gemeinsamen Gesprächen danken, in denen er ein hilfreicher Zuhörer war und mit unterstützenden Vorschlägen zur Seite stand.

Mein besonderer Dank richtet sich auch an Prof. Dr. H. Stachel und Prof. Dr. G. Stamou für die spontane Bereitschaft, für die vorliegende Arbeit als Gutachter aufzutreten.

Frau Ing. H. Mettke möchte ich ebenso herzlich danken. Ohne ihr Engagement und ihre tatkräftige Unterstützung bei der technischen Anfertigung der Arbeit wäre die vorliegende Form nicht möglich gewesen.

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Erklärung

Die Dissertation mit dem Thema „Zur Differentialgeometrie zweiparametrischer Geradenmengen im KLEINSchen Modell“ wurde an der Technischen Universität Dresden an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften im Institut für Geometrie unter der Betreuung von Prof. Dr. G. Weiß angefertigt.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften in der Fassung vom 20.03.2000 an.

Dresden, den

Unterschrift: