

# Dissipationsintegralverfahren für turbulente Grenzschichten

Habilitationsschrift  
Zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur habitatus (Dr.-Ing. habil.)

vorgelegt der

Fakultät Maschinenwesen  
der Technischen Universität Dresden

von

Herrn Dr.-Ing. M. Buschmann  
geb. am 02.11.1961 in Dresden

Gutachter:

1. Herr Prof. Dr.-Ing. habil. R. Vollheim  
Institut für Strömungsmechanik, Fakultät Maschinenwesen, TU Dresden
2. Herr Prof. Dr.-Ing. R. Grundmann  
Institut für Luft- und Raumfahrt, Fakultät Maschinenwesen, TU Dresden
3. Herr Prof. Dr.-Ing. habil. H. Herwig  
Arbeitsbereich 6-08 Technische Thermodynamik, TU Hamburg-Harburg
4. Herr Prof. Dr.-Ing. habil. K. Bühler  
Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik, FH Offenburg

Eingereicht am 10. Februar 2002

Verteidigt am 27. Juni 2003

## Kurzfassung

Mit dieser Arbeit wird eine ausführliche Studie zu den Dissipationsintegralverfahren der Grenzschichttheorie vorgelegt. Im Vergleich zu anderen Grenzschichtverfahren bestehen die generellen Vorteile der Integralverfahren in ihrer Robustheit, ihrer hohen Praktikabilität sowie den im Sinne der aufzuwendenden Computerkapazität geringen Kosten. Ein spezieller Vorteil der Dissipationsintegralverfahren ist, dass das komplette Schubspannungsprofil der Grenzschicht berücksichtigt wird. Diese Vorteile sind zugleich die Motivation der vorliegenden Arbeit. Ziel ist es, ein Dissipationsintegralverfahren für dreidimensionale Grenzschichten zu entwickeln und zu erproben. Die günstigen Eigenschaften der Integralverfahren sollen dabei erhalten bleiben und um die Verwendung verbesserter Geschwindigkeitsprofile ergänzt werden.

Ausgangspunkt der Arbeit ist eine Literaturanalyse, welche aufzeigt, dass Integralverfahren weit verbreitet sind und für vielfältige Typen von Grenzschichten Anwendung finden.

Ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen wird über die Grenzschichtgleichungen die allgemeine Form der Dissipationsintegralgleichungen hergeleitet. Auf der Basis dieser Gleichungen werden Berechnungsalgorithmen für zwei- und dreidimensionale Grenzschichten entworfen und ausführlich diskutiert. Über eine entsprechende Ableitung der Dissipationsintegrale aus der Grenzschichtgleichung wird die Vorgeschichte der Grenzschicht und damit deren Nichtäquilibriumsscharakter erfasst. Drei Kombinationen von Haupt- und Querströmungsprofil werden für den dreidimensionalen Fall ausgewählt und algorithmisch umgesetzt. Die Algorithmen für zweidimensionale Grenzschichten beruhen auf einem Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung.

Die zur Komplettierung der Berechnungsalgorithmen benötigten Parameterzusammenhänge werden aus expliziten Geschwindigkeitsprofilen gewonnen. Hierzu werden beruhend auf dem Zweischichtenmodell turbulenter Grenzschichten Geschwindigkeitsprofile turbulenter Grenzschichten diskutiert. Ausführlich werden alternative Geschwindigkeitsprofile für kanonische turbulente Plattengrenzschichten im Hinblick auf ihre Anwendung in Dissipationsintegralverfahren untersucht. Es wird festgestellt, dass weder das logarithmische Gesetz noch das innere Potenzgesetz im gesamten Bereich der Überlappungszone gültig ist. Für Dissipationsintegralverfahren ergibt sich damit, dass das logarithmische Gesetz im Verbund mit einer geeigneten Wakekomponente das zu favorisierende Geschwindigkeitsprofil für die zweidimensionale Grenzschichtrechnung darstellt. Eine ausführliche Diskussion der Ansätze von Geschwindigkeitsprofilen ist insbesondere für Dissipationsintegralverfahren von großer Bedeutung, da aus diesen Profilen die für die Dissipationsintegrale benötigten Schubspannungsverteilungen direkt gewonnen werden.

Dem Aufbau der Algorithmen schließen sich ausführliche Testrechnungen sowie eine Bewertung der Verfahren an. Es wird festgestellt, dass Dissipationsintegralverfahren für dreidimensionale Grenzschichten mit gutem Erfolg angewandt werden können. Im zweidimensionalen Fall sind Dissipationsintegralverfahren vielen Zweigleichungsmodellen (z. B.  $k$ ,  $\varepsilon$ -Modell) überlegen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Teil 1 :</b>	<b>Einleitung</b>	1
1	Einleitung	1
1.1	Berechnung turbulenter Grenzschichten mit Integralverfahren	1
1.2	Integralverfahren - Stand der Entwicklung	3
<b>Teil 2 :</b>	<b>Die beschreibenden Differentialgleichungen</b>	5
2.1	Die Grenzschichtgleichungen für den dreidimensionalen Fall	5
2.2	Generelle Form der Integralgleichungen	7
2.2.1	Integrale Impuls- und Energiebilanzen	9
2.2.2	Darstellung in Stromlinienkoordinaten	12
2.3	Zu den Eigenschaften der Integralgleichungen	14
2.3.1	Analyse nach D. F. Myring	15
2.3.2	Analyse nach J. Cousteix und R. Houdeville	17
2.3.3	Schlussfolgerungen für Berechnungsverfahren dreidimensionaler Grenzschichten	21
2.3.4	Analogie zu Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale instationäre Grenzschichten	22
<b>Teil 3 :</b>	<b>Geschwindigkeitsprofile</b>	25
3.1	Zweidimensionale turbulente Grenzschichten	25
3.1.1	Theoretische Grundlagen	25
3.1.2	Konkrete Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofile der zweidimensionalen turbulenten Grenzschicht	29
3.2	Dreidimensionale Grenzschichten	31
3.2.1	Theoretische Grundlagen	31
3.2.2	Konkrete Geschwindigkeitsprofile für Haupt- und Querströmung der dreidimensionalen turbulenten Grenzschichten	34
3.3	Zum Dissipationsintegral	37
3.4	Alternative Geschwindigkeitsprofile	41
3.4.1	Ähnlichkeitstheoretische Grundlagen	41
3.4.2	Vergleich von logarithmischem Gesetz und innerem Potenzgesetz für kanonische turbulente Grenzschichten	44
3.4.3	Die Methode der bezogenen Differenzen	47
3.4.4	Ergebnisse der Analyse	49
3.4.5	Schlussfolgerungen	57

<b>Teil 4 :</b>	<b>Algorithmen</b>	59
4.1	Gleichungssysteme für zweidimensionale Grenzschichtrechnungen	59
4.2	Gleichungssysteme für dreidimensionale Grenzschichtrechnungen	61
4.2.1	Gleichungssystem für Profilsatz 1 / Verfahren NM	64
4.2.1	Gleichungssystem für Profilsatz 2 und Profilsatz 3 / Verfahren CLM und CLJ	64
<b>Teil 5 :</b>	<b>Testrechnungen</b>	68
5.1	Zweidimensionale Testfälle	68
5.1.1	Bewertung der zweidimensionalen Verfahren	69
5.1.2	Ausgewählte Testbeispiele	71
5.2	Dreidimensionale Testfälle	77
5.2.1	Testbeispiel I - Dreidimensionale Grenzschicht vor einem senkrecht auf einer ebenen Wand stehenden Zylinder mit Nachlaufkörper nach R. Dechow, K.-O. Felsch	77
5.2.2	Testbeispiel II - Dreidimensionale Grenzschicht vor einem senkrecht Bewertung der dreidimensionalen Verfahren	80
5.2.3	<b>Zusammenfassung</b>	82
<b>Teil 6 :</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	83
<b>Teil 7 :</b>		85
<b>Anlagen :</b>		
Anhang 1	Integralverfahren zur Berechnung zwei- und dreidimensionaler Grenzschichten	89
Anhang 2.1	Zur Herleitung der dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen	94
Anhang 2.2	Zur Herleitung der generellen Form der Integralgleichungen	102
Anhang 2.3	Formelverzeichnisse für die Integralgleichungen	105
Anhang 2.4	Zur Analyse des Differentialgleichungssystems	111
Anhang 3	Dissipationsintegral für zweidimensionale turbulente Grenzschichten	113
Anhang 4	Zu den Parameterzusammenhängen dreidimensionaler Grenzschichten	114
Anhang 5.1	Berechnungsergebnisse für Testfall I	118
Anhang 5.2	Berechnungsergebnisse für Testfall II	130
Anhang 5.3	Versuchsaufbau und Berechnungsergebnisse für Testfall II	142

## Verzeichnis der häufig verwendeten Symbole

$B, H, P$	Formparameter
$B', P'$	Gradienten der Formparameter
$c_D$	Dissipationsintegral
$c_f$	lokaler Wandschubspannungsbeiwert
$C$	Parameter des logarithmischen Gesetzes bzw. des Potenzgesetzes
$FD$	bezogene Differenz der Geschwindigkeit $u^+$
$h_1, h_2$	Metrikkoeffizienten
$k$	Exponent der Gewichtsfunktionen
$K_\tau$	Kármánzahl
$p$	Druck
$Re$	Reynoldszahl
$s, n, z$	Stromlinienkoordinaten
$S$	dimensionslose Geschwindigkeit am Grenzschichttrand
$t$	Zeit
$u, v, w$	Geschwindigkeiten
$u_e$	Geschwindigkeit am Grenzschichttrand
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$V(g)$	Voges-Parameter zur Bewertung zweidimensionalen Grenzschichtberechnungen
$w(\eta)$	Wakefunktion
$W(c_f)$	Wilcox-Parameter zur Bewertung zweidimensionalen Grenzschichtberechnungen
$X, Y, Z$	kartesische Koordinaten einer Körperoberfläche
$x, y, z$	Koordinaten (orthogonal, $x$ und $y$ krummlinig)
$z^+$	dimensionslose Koordinate in wandnormaler Richtung
$\alpha$	Exponent des Potenzgesetzes
$\beta$	Clouserparameter
$\beta_0$	Verwindungswinkel
$\beta_{FG}$	Strömungswinkel
$\beta_{FGA}$	Winkel zwischen den wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\delta_1, \delta_2, \delta_3$	Verdrängungs-, Impulsverlust- und Energieverlustdicke der zweidimensionalen Grenzschicht
$\delta_{i,j}, \Delta_{i,j}$	integrale Dicken im $x, y$ -Koordinatensystem der dreidimensionalen Grenzschichten
$\eta$	dimensionslose Koordinate in wandnormaler Richtung
$\kappa$	Kármán Konstante
$\lambda$	Winkel zwischen den Richtungen der $x$ - und der $s$ -Koordinate
$\nu$	kinematische Viskosität
$\Pi$	Ähnlichkeitskennzahl
$\pi$	Wakeparameter
$\rho$	Dichte
$\tau$	turbulente Schubspannung
$\vartheta_{i,j}, \Theta_{i,j}$	integrale Dicken im Stromlinienkoordinatensystem
$\xi, \psi, \zeta$	Parameter des turbulenten Schubspannungsprofils

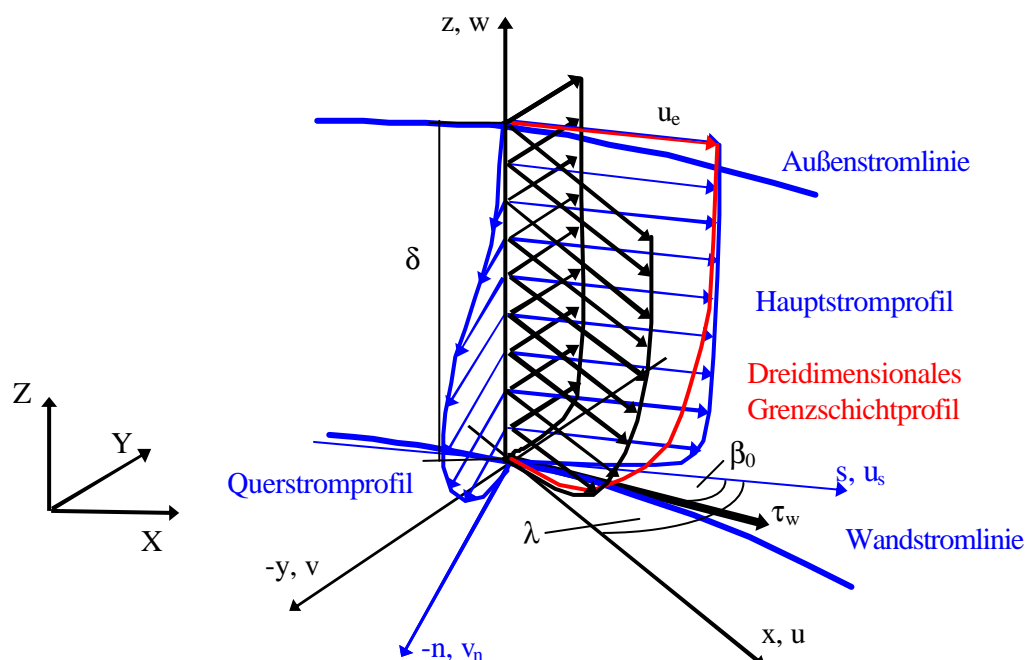
## Verzeichnis der häufig verwendeten Indizes

e	Grenzschichtrand
FA	Strömungswinkel
FGA	Winkel zwischen den Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten
log	bezüglich logarithmischem Gesetz
Pow	bezüglich Potenzgesetz
Ref	Bezugsgrößen
s, n	entsprechend der Richtung der Stromlinienkoordinaten
w	Wand
x, y	entsprechend der Richtungen im x, y-Koordinatensystem
$\delta$	Grenzschichtrand
$\infty$	unendlich
'	Schwankungsgrößen

## Verzeichnis der häufig verwendeten Abkürzungen

A1	Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten
A2	Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten
CLM	Dissipationsintegralverfahren auf Basis des Coles-Profiles mit Wakekomponente nach Lewkowicz und des Magerschen Ansatzes
CLJ	Dissipationsintegralverfahren auf Basis des Coles-Profiles mit Wakekomponente nach Lewkowicz und des Johnston Ansatzes
NM	Dissipationsintegralverfahren auf Basis des 1/n-tel Potenzgesetz und des Magerschen Ansatzes

## Zu den Koordinatensysteme



# 1 Einleitung

Neben der experimentellen Erkundung rückt die Berechnung turbulenter Strömungen immer mehr in den Vordergrund der aktuellen Strömungsmechanik. Sowohl globale strömungstechnische Eigenschaften eines Bauteils wie Druckverlust- und Auftriebsbeiwert als auch einzelner Strömungsphänomene wie Grenzschichten, Nachlaufgebiete, Ablösung und Wiederanlegen sind dabei von Interesse. Oft genügt es dabei jedoch nicht nur Experimente auszuwerten. Strömungsberechnungen können hier eine wertvolle Ergänzung sein. Die vorliegende Arbeit möchte in diesem Sinne einen Beitrag zur Berechnung turbulenter Grenzschichten leisten.

## 1.1 Berechnung turbulenter Grenzschichten mit Integralverfahren

Generell gestaltet sich die Berechnung turbulenter Strömungen als kompliziert. Ursache hierfür ist letztlich die komplexe Natur der Turbulenz selbst. Eigenschaften und Erscheinungen der turbulenten Bewegung wie Dreidimensionalität, Instationarität, die Existenz kohärenter Strukturen und inkohärenter Turbulenz, Fluktuationen in einem breiten Spektrum von Zeitskalen und anderes erschweren das Verständnis. Eine hinreichend klare Theorie, welche das turbulente Fließen beschreibt, steht daher noch aus.

Einzig die direkte numerische Simulation (DNS) bietet prinzipiell die Möglichkeit, die Dynamik aller Skalen einer turbulenten Strömung zu erfassen. Alle anderen Methoden benötigen eine Turbulenzmodellierung beziehungsweise den Methoden entsprechende Approximationen. Eine Übersicht der Verfahren zur Berechnung turbulenter Strömungen, turbulente Grenzschichten eingeschlossen, gibt Bild 1.1. Neben dem Modellierungsaufwand sind für die Bewertung dieser Methoden die Kosten (erforderliche Computerkapazität, Rechenzeit etc.), welche bei der Berechnung entstehen, von Bedeutung. Nach J. H. Ferziger (1997) wachsen die Kosten um jeweils ca. eine Größenordnung von Methode zu Methode entsprechend der Reihung in Bild 1.1. Problemstellung und die zu dessen Lösung zur Verfügung stehenden Ressourcen bestimmen daher, welche Methode zur Bearbeitung herangezogen wird.

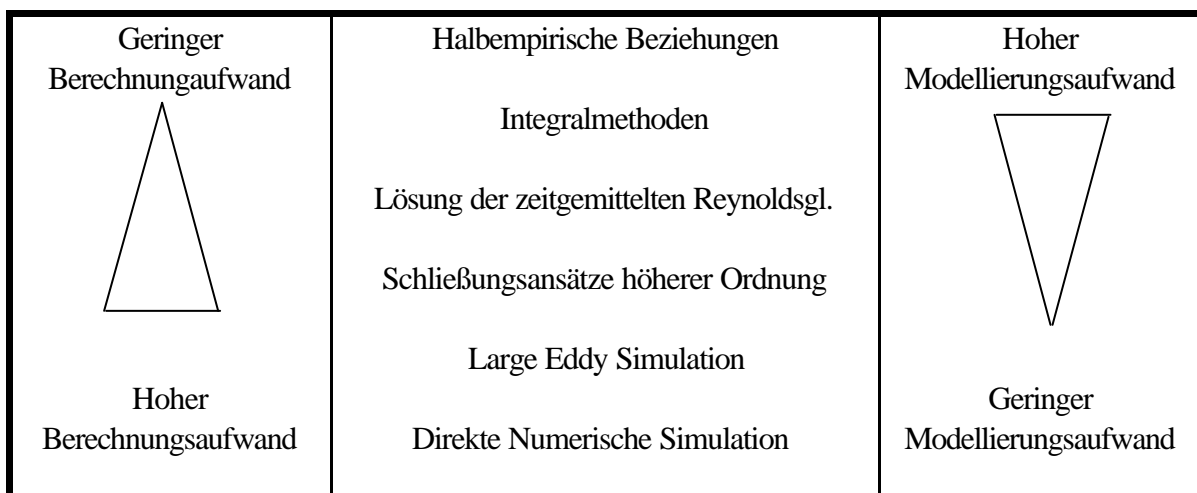


Bild 1.1 : Berechnungsmethoden für turbulente Strömungen, turbulente Grenzschichten eingeschlossen

Die in Bild 1.1 aufgelisteten Verfahren sind für die Berechnung turbulenter Grenzschichten nicht in gleichem Maße geeignet. So sind zum Beispiel die halbempirischen Beziehungen nicht hinreichend genau, um die Entwicklung einer Grenzschicht unter dem Einfluss eines sich ändernden Druckgradienten zu beschreiben. Direkte numerische Simulationen hingegen bedürfen eines für praktische Anwendungen nicht zu rechtfertigenden Aufwandes an Computerleistung und sind bezüglich der realisierbaren Reynoldszahlen beschränkt. Ähnliches gilt für Large Eddy Simulationen (LES). Eine weite Verbreitung haben Verfahren, welche auf den zeitgemittelten Reynoldsgleichungen (RANS) beruhen, und die Zonenmethoden gefunden. Schwerpunkt dieser Arbeit sind Integralverfahren für turbulente Grenzschichten. Sie können als Komponente zur Beschreibung der Grenzschicht in Zonenverfahren Verwendung finden und sind bezüglich der Genauigkeit zumindest im zweidimensionalen Fall mit den RANS-Verfahren vergleichbar (Kap. 5.1.1). Übersichten zu den unterschiedlichen Berechnungsmöglichkeiten turbulenter Grenzschichten finden sich zum Beispiel in den Arbeiten von H. H. Fernholz, E. Krause (1982) sowie H. Schlichting, K. Gersten (1997).

Die vorliegende Arbeit folgt im Wesentlichen dem von K. Gersten und H. Herwig (1992) skizzierten Weg zur Lösung eines physikalischen Problems (Bild 1.2). Das mathematisch-physikalische Modell - die generalisierte Form der Dissipationsintegralverfahren für dreidimensionale Grenzschichten - wird zunächst aus den Reynoldsgleichungen abgeleitet. Unter Berücksichtigung asymptotischer Ansätze werden die zum Aufbau von Berechnungsalgorithmen erforderlichen Grenzschichtprofile diskutiert und ausgewählt. Anschließend erfolgt die rechen-technische Aufbereitung der Verfahren. Die Verifikation der Dissipationsintegralverfahren mittels Testrechnungen schließt die Arbeit ab.

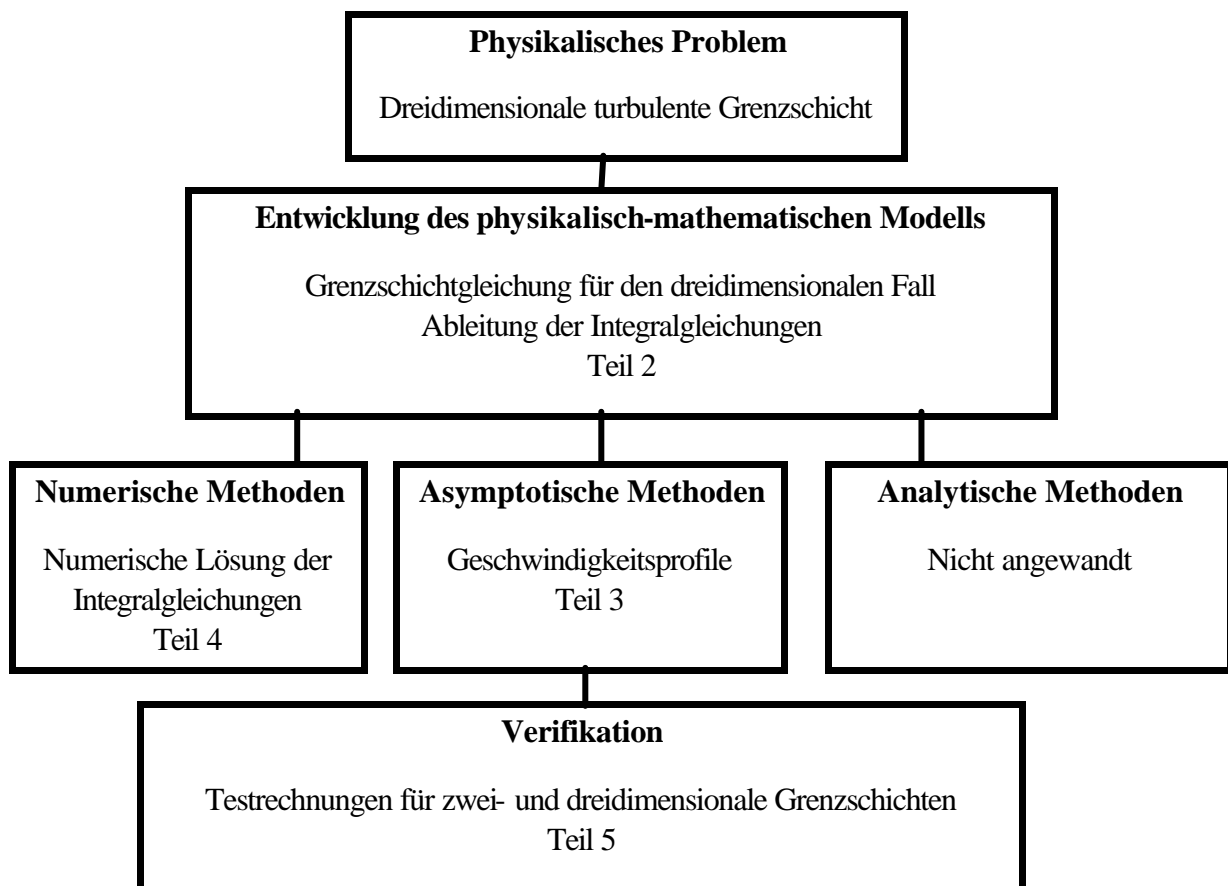


Bild 1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit



## 1.2 Integralverfahren - Stand der Entwicklung

Wie bereits einleitend festgestellt wurde, handelt es sich bei den Integralmethoden um Grenzschichtberechnungsverfahren mit vergleichsweise geringem Aufwand bezüglich Turbulenzmodellierung und Numerik. Praktische Anwendungen und vergleichende Untersuchungen zeigen jedoch immer wieder deren Konkurrenzfähigkeit zu anderen Methoden der Grenzschichtberechnung (z. B. J. P. Gostelow et al. 1994; J. P. Johnston, 1998).

Bei Integralverfahren handelt es sich um Näherungsverfahren zur Berechnung von Grenzschichten. Namensgebend für diese Verfahren ist ihre Herleitung. Ausgangspunkt sind generell die Grenzschichtgleichungen, welche über der wandnormalen Koordinate integriert werden. Im zweidimensionalen Fall werden dabei aus der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung gewöhnliche Differentialgleichungen gewonnen. Bei dreidimensionalen Grenzschichten bleibt der partielle Charakter der Differentialgleichungen erhalten. Die in diesen Gleichungen auftretenden Integrale können durch so genannte Integraldicken ersetzt werden. Zum Aufbau von Berechnungsverfahren sind zusätzliche halbempirische Beziehungen bzw. explizite Grenzschichtprofile erforderlich.

Die Anwendbarkeit von Integralverfahren erstreckt sich über fast alle Typen von Grenzschichten mit technischer Bedeutung. Oft sind Integralverfahren Teil der komplexeren Zonenmethoden. So sind zum Beispiel in Berechnungsmodellen für die Fahrzeugumströmung neben Modellen für das reibungsfreie Fernfeld und die Nachlaufströmung Integralverfahren für die Grenzschichtrechnung eingebunden. (M. S. Kim 1993). Ähnliches gilt für Verfahren zur Auslegung von Turbomaschinen (U. Kus, J. Chauvin, 1995). Infolge ihrer Schnelligkeit und ihrer Praktikabilität finden sie oft Anwendung bei Optimierungsaufgaben, so zum Beispiel für Tragflügel (H. Köster, G. Wichmann, 1996).

Integralverfahren für Grenzschichten unter dem Einfluss besonderer Randbedingungen wurden bereits früh bekannt. So wurden Algorithmen mit Berücksichtigung der Wandkrümmung (R. M. C. So, 1975) beziehungsweise des Turbulenzgrades der Außenströmung (J. H. Horlock, R. L. Evans, 1975) entwickelt. Eine Vielzahl von Integralverfahren wurde für spezielle Grenzschichttypen abgeleitet. Hier sind beispielhaft zu nennen :

- Grenzschichten mit Ausblasung (M. Oljaca, J. Sucec, 1997)
- transitionale Grenzschichten (J. P. Gostelow et al. 1994) und
- Grenzschichten unter Zweiphasenprallstrahlen (J. Mikielewicz, 1997).

Bei der Analyse von Integralverfahren ist auf die Trennung von mathematischen und physikalischen Fragestellungen zu achten (M. Buschmann, 1992). Geschieht dies nicht, so ist die Gefahr von Fehlschlüssen gegeben. So findet sich in der Literatur die Feststellung, dass die Wirkung der in direkten Integralverfahren nicht berücksichtigten Normalspannungen die Ursache für deren Versagen bei Annäherung an den Ablösepunkt sei (z. B. M. S. Kim, 1993). Inverse Verfahren, welche die Normalspannungen ebenfalls nicht berücksichtigen (z. B. J. Klauer, 1989), zeigen jedoch in Ablösenähe sehr gute Ergebnisse. Offensichtlich ist die mathematische Eigenschaft des singulären Verhaltens direkter Verfahren die Ursache für deren Abweichungen in Ablösenähe (Kap. 2.3).

Methoden zur Verbesserung der mathematischen als auch der physikalischen Eigenschaften von Integralverfahren sind von den Algorithmen für zweidimensionale Grenzschichten bekannt. Die

mathematischen Eigenschaften von Integralverfahren können zum Beispiel durch

- (a) inverse Formulierungen (z. B. J. Klauer, 1989) und
- (b) Doppelintegralverfahren (bisher nur für laminare Grenzschichten, J. Sucec, 1994)

verbessert. Eine Weiterentwicklung der physikalischen Modellierung ist unter anderem durch

- (c) Berücksichtigung der Vorgeschichte (z. B. K.-O. Felsch, 1968) und
- (d) Nutzung universeller Geschwindigkeitsprofile für die Ableitung des Satzes halbempirischer Hilfsgleichungen (W. Bolte, 1980; M. Buschmann 1996)

zu erreicht. Nicht alle dieser Methoden (insbesondere b) sind auf Integralverfahren für dreidimensionale Grenzschichten anwendbar. Andere wie zum Beispiel Methode (d) sind unumgänglich.

Im Anhang 1.1 sind aktuelle Integralverfahren zur Berechnung zwei- und dreidimensionaler Grenzschichten analysiert. Mehr als bei den zitierten Veröffentlichungen zu zweidimensionalen ist in den Arbeiten zu dreidimensionalen Grenzschichten der praktisch maschinenbauliche, anwendungsorientierte Aspekt der Verfahren zu spüren. Diese Verfahren sind meist Module von komplexen Nachrechnungs- beziehungsweise Auslegungsalgorithmen für Turbomaschinen sowie durch- und umströmte Bauteile. Die Grenzschichtberechnung ist oft mit einer Berechnung der reibungsfreien Außenströmung gekoppelt. Die Grenzschichtverfahren sind damit Teil eines Zwei-Zonen-Modells.

In Anhang 1.1 wird eine Klassifikation der Verfahren entsprechend der gelösten integralen Bilanzgleichungen vorgenommen, die sich an die von M. Jischa (1982) eingeführte Einordnung anlehnt. Die Benennung der Klassen erfolgt nach der jeweils zweiten neben der integralen Impulsbilanz gelösten Bilanzgleichung. Zusätzlich werden die Verfahren als direkte oder inverse Verfahren gekennzeichnet.

Tabelle 1.2.1 : Klassifizierung von Integralverfahren

Klasse	Bilanzgleichungen
Impulsverfahren	Integrale Impulsbilanzen
Entrainmentverfahren	Integrale Impulsbilanzen Entrainmentgleichung
Dissipationsintegralverfahren	Integrale Impulsbilanzen Integrale Energiebilanzen (zusätzlich im turbulenten Fall : integrale Bilanz der kinetischen Turbulenzenergie möglich)
Impulsmomentenverfahren	Integrale Impulsbilanzen Integrale Impulsmomentengleichungen

## 2 Die beschreibenden Differentialgleichungen

L. Prandtl zeigte im Jahre 1904 mit seinem Vortrag „Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung“, dass die Strömung im Umfeld eines Körpers in eine Reibungsschicht und ein reibungsfreies Fernfeld unterteilt werden kann. Dieses Konzept fand zunächst seinen Niederschlag in der so genannten Prandtlschen Grenzschichtgleichung für zweidimensionale Grenzschichten. Die Erweiterung auf dreidimensionale Grenzschichten ist möglich. Sie bildet die Grundlage für die hier behandelten Integralverfahren.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf inkompressible turbulente dreidimensionale Grenzschichten. Prinzipiell ist damit die Modellierung inkompressibler dreidimensionaler laminarer Grenzschichten eingeschlossen, da sich die beschreibenden Differentialgleichungen unabhängig vom Fließen darstellen.

### 2.1 Die Grenzschichtgleichungen für den dreidimensionalen Fall

Die Herleitung der beschreibenden Differentialgleichungen dreidimensionaler Grenzschichten findet ihren Ausgangspunkt in den Navier-Stokesschen-Gleichungen. In Vektorschreibweise lauten diese Gleichungen für inkompressible Strömung in kartesischen Koordinaten entsprechend (2.1.1). Durch Einführung der Reynoldsschen Zerlegung und Zeitmittelung folgen die Reynoldsgleichungen (2.1.2).

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \mu \Delta \mathbf{U} \quad (2.1.1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial Z} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Y}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial Z} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial Z} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial Y} \quad (2.1.2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial Y} + \nu \Delta \bar{w} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial Z} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial Y}$$

Für die Beschreibung einer Grenzschicht auf einem dreidimensionalen Körper mit gekrümmter Kontur wird auf dessen Oberfläche ein kartesisches Koordinatensystem aufgespannt. Die Koordinaten X und Y liegen dabei auf der Körperoberfläche und Z bildet die wandnormale Koordinate.

Für die Ableitung der Grenzschichtgleichungen werden die Größenordnungen der einzelnen Terme aus (2.1.2) abgeschätzt (Anhang 2.1 Gl. A 2.1.1 bis A 2.1.33). Die Glieder der Reynoldsschen Gleichungen können jetzt entsprechend ihrer Größenordnung geordnet werden. Es werden Terme erster, zweiter und dritter Ordnung im Bezug auf die Gradienten der Grenzschichtdicke unterschieden (Anhang 2.1 Tabellen A 2.1.1 bis A 2.1.3). Zur Vereinfachung werden die zeitunabhängigen Geschwindigkeiten im weiteren ohne Überstreichung geschrieben.

$$\text{Erster Ordnung} \quad \text{Term} \sim \frac{\partial \delta}{\partial X}, \text{ Term} \sim \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (2.1.3)$$

$$\text{Zweiter Ordnung} \quad \text{Term} \sim \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2, \text{ Term} \sim \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2, \text{ Term} \sim \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Dritter Ordnung} \quad \text{Term} &\sim \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^3, \text{ Term} \sim \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^3, \\ &\text{Term} \sim \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \delta}{\partial Y}, \text{ Term} \sim \frac{\partial \delta}{\partial X} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Werden die Glieder erster Ordnung zusammengefasst und die Glieder höherer Ordnung als im Vergleich zu diesen klein und damit vernachlässigbar angesehen, so folgen die gesuchten Grenzschichtgleichungen. (2.1.6 und 2.1.8). Die Integration von (2.1.7) über der wandnormalen Koordinate Z und eine anschließende Differentiation bezüglich der Koordinaten X beziehungsweise Y ermöglicht die Substitution der Druckterme in Gl. (2.1.6) und (2.1.8) (siehe auch Tabellen A 2.1.4 und A 2.1.5 im Anhang 2.1).

$$u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Z} + w \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + v \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial Z} \quad (2.1.6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} + v \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial Z} \quad (2.1.7)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial X} + v \frac{\partial w}{\partial Z} + w \frac{\partial w}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} + v \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Z} \quad (2.1.8)$$

Unter (2.1.12 bis 14) sind die endgültigen Grenzschichtgleichungen sowie die Kontinuitätsgleichung für ein orthogonales krummliniges Koordinatensystem x, y und z angeschrieben. Die Koordinaten dieses Koordinatensystems sind mit den Koordinaten des bisher verwendeten kartesischen Koordinaten X, Y und Z über die Metrik-Koeffizienten verknüpft (2.1.9, 11). Die Metrik-Koeffizienten sind selbst im Allgemeinen Funktionen von x und y.

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \quad (2.1.9)$$

$$h_2^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \quad (2.1.10)$$

$$h_3 = 1 \quad (2.1.11)$$

## 2.2 Generelle Form der Integralgleichungen

Die allgemeine Form der Dissipationsintegralgleichungen wird aus der Kontinuitätsgleichung sowie aus den Impulsbilanzen für dreidimensionale Grenzschichten in differentieller Form hergeleitet. Molekularer und turbulenter Schubspannungsanteil werden dazu in effektiven Schubspannungen zusammengefasst (2.1.15 - 16). Die folgende Darstellung gilt damit sowohl für laminare als auch für turbulente Grenzschichten. Es sei angemerkt, dass die hier für den inkompressiblen Fall vorgestellte Untersuchung problemlos auf kompressible Grenzschichten erweiterbar ist.

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - v^2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} + u v \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{h_1} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - u^2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} + u v \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{h_2} \frac{\partial p_\infty}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\partial(h_2 u)}{\partial x} + \frac{\partial(h_1 v)}{\partial y} + h_1 h_2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1.14)$$

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial z} - \rho \overline{u'v'} \quad (2.1.15)$$

$$\tau_y = \mu \frac{\partial v}{\partial z} - \rho \overline{u'w'} \quad (2.1.16)$$

Die Randbedingungen an der Wand bzw. am Grenzschichtrand lauten :

$$z = 0 \quad : \quad u = v = w = 0 \quad (2.1.17)$$

$$z = \delta \quad : \quad u = u_e(x, y) \quad ; \quad v = v_e(x, y) \quad (2.1.18)$$

Die Ableitung des Satzes der Integralgleichungen erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden die Impulsbilanzen (2.1.12) und (2.1.13) mit Gewichtsfunktionen multipliziert. Anschließend erfolgt eine Integration über der wandnormalen Koordinate. Die Integrationsgrenzen sind die Wand  $z = 0$  und der Grenzschichtrand  $z = \delta$ . Die wandnormale Geschwindigkeitskomponente  $w$  in (2.1.12) und (2.1.13) wird mittels der Kontinuitätsgleichung (2.1.14) ersetzt. Die Kontinuitätsgleichung wird hierzu ebenfalls mit Gewichtsfunktionen multipliziert. Ziel dieser Prozedur ist die Ableitung von mathematisch einfacher handhabbaren Differentialgleichungen.

Die Gewichtsfunktionen, welche hier Verwendung finden, werden in allgemeiner Form entsprechend (2.2.1) geschrieben. Bereits K. Wieghardt hatte im Jahre 1948 die Gewichtsfunktion  $u(x)$  zur Herleitung eines Integralverfahrens benutzt. Sein Ziel war es dabei, eine Bilanzgleichung für die

mechanische Energie abzuleiten. Gleichung (2.2.1) stellt eine generalisierte Form dieser Gewichtsfunktion dar. Aus physikalischer Sicht ist es sinnvoll, die betrachtete Impulsbilanz und die in die Gewichtsfunktion einfließende Geschwindigkeits-komponente so zu wählen, dass sie der gleichen Koordinatenrichtung angehören. Prinzipiell ist es möglich, die Potenzen  $k$  und  $m$  gebrochen, negativ oder positiv zu wählen. In Hinblick auf die noch abzuleitenden integralen Grenzschichtdicken ist es jedoch physikalisch sinnvoll, ganze positive Zahlen für die Potenzen zu wählen.

$$G = f(k, m) * u(x, y)^k * v(x, y)^m \quad (2.2.1)$$

Von Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten ist seit längerem bekannt, dass Gleichungen mit kleinen Exponenten der Gewichtsfunktionen den höchsten physikalischen Aussagewert besitzen (D. Geropp, 1963; A. Walz, 1966). Es wird davon ausgegangen, dass dies auch für Integralverfahren dreidimensionaler Grenzschichten gilt. Beim Aufbau entsprechender Verfahren werden zuerst die integralen Gleichungen für  $k = 0$  sowie  $m = 0$  und dann die Gleichungen für  $k = 1$  sowie  $m = 1$  Verwendung finden. Aus praktischen Gründen wird daher im weiteren auf eine Unterscheidung zwischen  $k$  und  $m$  verzichtet und  $k$  generell gleich  $m$  gesetzt. Tabelle 2.2.1 gibt die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Gewichtsfunktionen an.

Tabelle 2.2.1 : Gewichtsfunktionen für Kontinuitätsgleichung und Impulsbilanzen

	x-Richtung	y-Richtung
Kontinuitätsgleichung	$\frac{u^{(k+1)}}{(k+1)}$	$\frac{v^{(k+1)}}{(k+1)}$
Impulsbilanz	$u^k$	$v^k$

Nach umfangreichen Umformungen folgt die allgemeine Form der Integralgleichungen für krummlinige Koordinaten (2.2.2, 3). Einige wesentliche Schritte dieser Herleitung sind in Anhang 2.2 dargestellt. In Gleichung (2.2.2) sind die Terme für den zweidimensionalen Fall doppelt unterstrichen. Die Variablen  $f_k$ ,  $m_k$ ,  $l_k$ ,  $g_k$  und  $q_k$  auf der linken Seite von (2.2.2) sowie  $s_k$ ,  $r_k$ ,  $p_k$ ,  $n_k$  und  $t_k$  auf der linken Seite von (2.2.3) stellen integrale Grenzschichtdicken dar. Für  $k = 1$  stellen die jeweils rechten Seiten der Gleichungen die Dissipationsintegrale dar. Physikalisch beschreiben diese Terme die der Grenzschicht entzogene und in Wärme umgewandelte mechanische Energie. Für  $k = 0$  sind die rechten Seiten identisch mit den bekannten Wandschubspannungsbeiwerten.

Generelle Form der Integralgleichung in x-Richtung

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{\frac{1}{h_1} \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial m_k}{\partial y}}} + f_k \left[ \underline{\underline{\frac{1}{h_1} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x}}} \right] + m_k \left[ \frac{1}{h_2} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{(k+2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\
& + l_k \left[ \frac{1}{h_2} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} - \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) + \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) \right] \\
& + \underline{\underline{g_k \frac{1}{h_1} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - q_k \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x}}} = \underline{\underline{\frac{(k+1)}{\rho} \frac{1}{u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz}}
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Generelle Form der Integralgleichung in y-Richtung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1} \frac{\partial s_k}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial r_k}{\partial y} + s_k \left[ \frac{1}{h_1} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{(k+2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] + r_k \left[ \frac{1}{h_2} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\
& + p_k \left[ \frac{1}{h_1} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial v_\delta}{\partial y} - \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) + \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) \right] \\
& + n_k \frac{1}{h_2} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial v_\delta}{\partial y} - t_k \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{(k+1)}{\rho} \frac{1}{u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{v}{u_e} \right)^k \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

### 2.2.1 Integrale Impuls- und Energiebilanzen

Für  $k = 0$  bzw.  $k = 1$  folgen die integralen Impuls- und Energiebilanzen in x-Richtung (2.2.4 bzw. 2.2.6) und in y-Richtung (2.2.5 bzw. 2.2.7). Auch in diesen Gleichungen werden die Terme des zweidimensionalen Falls durch doppelte Unterstreichung gekennzeichnet.

Impulsbilanz in x-Richtung

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{\frac{1}{h_1} \frac{\partial \delta_{11}}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \delta_{12}}{\partial y}}} + \delta_{11} \left[ \underline{\underline{\frac{1}{h_1} \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x}}} \right] + \delta_{12} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\
& + \delta_2 \left[ \frac{1}{h_2} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \delta_1 \frac{1}{h_1} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \delta_{22} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{c_{fx}}{2} \quad (2.2.4)$$

Impulsbilanz in y-Richtung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \delta_{21}}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \delta_{22}}{\partial y} + \delta_{21} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] + \delta_{22} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\ + \delta_1 \left[ \frac{1}{h_1} \frac{1}{u_e} \frac{\partial v_\delta}{\partial x} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) \right] \\ + \delta_2 \frac{1}{h_2} \frac{1}{u_e} \frac{\partial v_\delta}{\partial y} - \delta_{11} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{c_{fy}}{2} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Energiebilanz in x-Richtung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Delta_{11}}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Delta_{12}}{\partial y} + \Delta_{11} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] + \Delta_{12} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\ + \Delta_2 \left[ \frac{1}{h_2} \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) \right] \\ - \Delta_3 \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{2}{\rho u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{u}{u_e} \right) \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Energiebilanz in y-Richtung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Delta_{21}}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Delta_{22}}{\partial y} + \Delta_{21} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{3}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] + \Delta_{22} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] \\ - \Delta_2 \left[ \frac{1}{h_1} \frac{2}{u_e} \frac{\partial v_\delta}{\partial x} - \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) \right] \\ - \Delta_4 \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{2}{\rho u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{v}{u_e} \right) \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.2.7)$$



Die in diesen Beziehungen auftretenden integralen Grenzschichtdicken sind in Anhang 2.3 (Tafeln 1 und 2) ausführlich dargestellt. Unter diesen Größen finden sich auch die von Integralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten bekannten integralen Dicken  $\vartheta_1$  (Verdrängungsdicke),  $\vartheta_{11}$  (Impulsverlustdicke) und  $\Theta_{11}$  (Energieverlustdicke). In Anlehnung an den in der internationalen Literatur gebräuchlichen Begriff der „Kreuzprodukt“-Impulsverlustdicke werden die „Kreuzprodukt“-Energieverlustdicken eingeführt. Die Unterscheidung zwischen den beiden möglichen dieser integralen Dicken erfolgt mehr oder minder willkürlich mit den Worten erste und zweite.

Tabelle 2.2.2 : Definitionen der "Kreuzprodukt"-Energieverlustdicke

Erste "Kreuzprodukt"- Energieverlustdicke	Zweite "Kreuzprodukt"- Energieverlustdicke
Allgemeine Form der integralen Grenzschichtdicken	
$m_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$q_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$
Terme, welche in der integralen Energiebilanz ( $k = 1$ ) geschrieben in beliebigen krummlinigen orthogonalen Koordinaten, auftreten.	
$\Delta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right] dz$	$\Delta_3 = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$
Terme, welche in der integralen Energiebilanz ( $k = 1$ ) geschrieben in Stromlinienkoordinaten, auftreten.	
$\Theta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 \right] dz$	$\Theta_{21} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$

## 2.2.2 Darstellung in Stromlinienkoordinaten

Der Aufbau von Dissipationsintegralverfahren für turbulente Grenzschichten mit Querströmung verlangt Aussagen über die Komponenten des Geschwindigkeitsprofils. Es ist sinnvoll, solche Profile zu wählen, welche eine experimentelle bzw. numerische (DNS) Bestätigung erfahren haben. Eine umfassende Darstellung und Analyse solcher Profile findet sich in M. S. Ölcmen, R. L. Simpson (1992). Die von den Autoren aufgezählten Profile sind häufig in Stromlinienkoordinaten formuliert. Sollen Profile dieser Form Eingang in das Berechnungsverfahren finden, ist eine Transformation aller bisher eingeführten Gleichungen und Grenzschichtgrößen in das Stromlinienkoordinatensystem erforderlich. Eine Transformation der Integralgleichungen in Stromlinienkoordinaten vereinfacht zudem die mathematische Analyse des Differentialgleichungssystems (Kap. 2.3).

Die Geschwindigkeitskomponenten des  $x, y$ -Koordinatensystems ( $u$  und  $v$ ) sind mit denen des Stromlinienkoordinatensystems ( $s, n$ -Koordinatensystem mit  $u_s$  und  $v_n$ ) über die in Tabelle 2.2.3 zusammengefassten Relationen verknüpft.

Unter Verwendung der Definitionen der Integralgrößen (Anhang 2.3 Tafel 1 und 2) sowie der Definitionen von Wandschubspannungsbeiwerten und Dissipationsintegralen folgen mit den Relationen aus Tabelle 2.2.3 die Beziehungen zwischen den Grenzschichtgrößen der beiden betrachteten Koordinatensysteme (Anhang 2.3 Tafel 5). Es ist festzustellen, dass sich die Grenzschichtgrößen des  $x, y$ -Koordinatensystems generell als Funktionen von Integralgrößen im  $s, n$ -Koordinatensystem und dem Winkel  $\lambda$  zwischen  $x$ - und  $s$ -Koordinate darstellen lassen. Die integralen Grenzschichtdicken im Stromlinienkoordinatensystem sind in den Tafeln 3 und 4 des Anhangs 2.3 zusammengefasst.

Tabelle 2.2.3 : Relationen der Geschwindigkeitskomponenten im  $x, y$  - Koordinatensystem und im  $s, n$  - Koordinatensystem (Stromlinienkoordinaten)

$u = u_s \cos[\lambda] - v_n \sin[\lambda]$	$u_s = u \cos[\lambda]$
$v = u_s \sin[\lambda] + v_n \cos[\lambda]$	$v_n = v \cos[\lambda]$

Die Transformation der Integralgleichungen (2.2.4 - 2.2.7) erfolgt mit Hilfe der Beziehungen (2.2.8) und (2.2.9). Diese Beziehungen werden aus den von P. D. Smith (1982) angegebenen Transformationsregeln für den Übergang aus dem Stromlinienkoordinatensystem in das  $x, y$ -Koordinatensystem (2.2.10) und (2.2.11) abgeleitet. Die Integralgleichungen für Impuls und Energie in Stromlinienkoordinaten sind unter (2.2.12 - 2.2.15) geschrieben. Es wird Identität der hier abgeleiteten Integralgleichungen des Impulses mit entsprechenden in der Literatur angegebenen Gleichungen festgestellt (z. B. D. F. Myring, 1970, P. D. Smith, 1982). Auch hier sind die Terme des zweidimensionalen Falls doppelt unterstrichen.

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} = \text{Cos}[\lambda] \frac{\partial}{\partial s} - \text{Sin}[\lambda] \frac{\partial}{\partial n} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} = \text{Sin}[\lambda] \frac{\partial}{\partial s} + \text{Cos}[\lambda] \frac{\partial}{\partial n} \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \text{Cos}[\lambda] \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} + \text{Sin}[\lambda] \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\text{Sin}[\lambda] \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} + \text{Cos}[\lambda] \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.2.11)$$

Integrale Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial n} + \vartheta_{11} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] + \vartheta_{12} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} - \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] + \\ & \vartheta_2 \left[ \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] + \vartheta_1 \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} - \vartheta_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{c_{fs}}{2} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Integrale Impulsbilanz in Querströmungsrichtung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{22}}{\partial n} + \vartheta_{21} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{2}{h_{12}} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] + \vartheta_{22} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] - \\ & \vartheta_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} - \vartheta_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} = \frac{c_{fn}}{2} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Integrale Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Theta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \Theta_{12}}{\partial n} + \Theta_{11} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] + \Theta_{12} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{3}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \\ & \vartheta_2 \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] - \Theta_{21} \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{2}{\rho u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \frac{\partial \tau_s}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

## Integrale Energiebilanz in Querströmungsrichtung

$$\frac{\partial \Theta_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \Theta_{22}}{\partial n} + \Theta_{21} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{3}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] + \Theta_{22} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] +$$

$$\vartheta_2 \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} - \Theta_4 \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} = \frac{2}{\rho u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \frac{\partial \tau_n}{\partial z} dz \quad (2.2.15)$$

### 2.3 Zu den Eigenschaften der Integralgleichungen

Betrachtet man die in der Literatur beschriebenen Integralverfahren für dreidimensionale turbulente Grenzschichten (z. B. D. H. W. Stock, 1977; P. D. Smith, 1982; M. T. Karimipanah, E. Olsson, 1992; B. Mughal, M. Drela, 1993) so ist festzustellen, dass bei diesen Verfahren die Haupteigenschaften der Strömung durch drei Gleichungen hinreichend beschrieben werden. Es wird davon ausgegangen, dass dies auch für entsprechende Dissipationsintegralverfahren gilt. In den folgenden Analysen werden daher jeweils drei Gleichungen berücksichtigt. Das bedeutet nicht, dass in einem Integralverfahren vier oder mehr Integralbilanzen Verwendung finden können, wenn dies die Zahl der Unbekannten erfordert.

Von Integralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten ist bekannt, dass die Integralgleichungen mit den niedrigsten Potenzen der Gewichtsfunktion ( $k = 0, 1$ ) den höchsten Aussagewert besitzen (D. Geropp, 1963; A. Walz, 1966). Diese Gleichungen sind daher auch für den Aufbau von Integralverfahren zu favorisieren. Für Dissipationsintegralverfahren für dreidimensionale Grenzschichten wird geschlussfolgert, dass ein solches Verfahren die zwei integralen Impulsbilanzen sowie eine integrale Energiebilanz enthalten sollte. Aus mathematischer Sicht ist dabei keine der beiden integralen Energiebilanzen zu bevorzugen. Beide Gleichungen hängen gleichermaßen von den in das Modell eingegebenen Schließungsannahmen (Geschwindigkeitsprofile) ab, so dass aus physikalischer Sicht ebenfalls keiner Gleichung der Vorzug gegeben werden kann. Für die hier durchgeführte Analyse wird daher die integrale Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung (2.2.14) herangezogen.

Aus Sicht der praktischen Anwendung ist es nicht zu empfehlen, mit Stromlinienkoordinaten zu arbeiten. Für eine Analyse der mathematischen Eigenschaften des Gleichungssystems ist es jedoch vorteilhaft dieses in Stromlinienkoordinaten zu transformieren. Die Analyse des Systems von Differentialgleichungen folgt einmal der von D. F. Myring (1970) und zum anderen der von J. Cousteix, R. Houdeville (1981) jeweils für das Entrainmentverfahren vorgeschlagenen Methode. Beide Ansätze zielen auf die Bestimmung von Charakteristiken ab. Hierfür ist die konkrete Form der Terme der Wandschubspannungsbeiwerte, des Dissipationsintegrals und der druckgradientenabhängigen Glieder ohne Bedeutung. Sie werden in den Termen  $A_i$  zusammengefasst (2.3.1 bis 2.3.3).

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial n} = A_1 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{22}}{\partial n} = A_2 \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \Theta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \Theta_{12}}{\partial n} = A_3 \quad (2.3.3)$$

In allgemeiner Form lauten diese Gleichungen :

$$a_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial x} + b_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial y} + c_i = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{array} \right\} \quad (2.3.4)$$

Es sind Parameterkurven  $x(\sigma)$  und  $y(\sigma)$  gesucht, so dass Differentialgleichungen, welche nur von  $\sigma$  abhängen, gefunden werden. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz solcher Charakteristiken ist die Erfüllung von (2.3.5).

$$|a_{ij} y_\sigma - b_{ij} x_\sigma| = 0 \quad (2.3.5)$$

Gleichung (2.3.5) entspricht einer algebraischen Gleichung vom Grad  $n$  für die Variable

$$\chi = \frac{dy}{dx} = \frac{y_\sigma}{x_\sigma} \quad (2.3.6)$$

Wobei die Variable  $\chi$  ist die Tangente des Winkels zwischen Charakteristik und  $x$ -Achse ist.

### 2.3.1 Analyse nach D. F. Myring

Der Betrachtungsweise von D. F. Myring liegt die Annahme zugrunde, dass das Hauptströmungsprofil in einfachster Form durch ein Potenzgesetz der Form (2.3.7) und das Querströmungsprofil durch den Magerschen Ansatz (2.3.8) beschrieben werden. Mit diesen Geschwindigkeitsprofilen gelingt eine Reduktion der Unbekannten in (2.3.1-3) auf  $H = \vartheta_1 / \vartheta_{11}$ ,  $\vartheta_{11}$  und  $\vartheta_{21}$ . Weiterhin werden die Formparameterfunktionen  $P_{ij}(H)$  und  $B_{ij}(H)$  sowie deren Ableitungen nach  $H$   $P'_{ij}(H)$  und  $B'_{ij}(H)$  eingeführt (siehe Anhang 2.4). Einsetzen dieser Funktionen in (2.3.1-3) und umformen liefert das betrachtete Gleichungssystem in der Form (2.3.9) bis (2.3.11).

$$\frac{u}{u_\delta} = \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/n} \quad (2.3.7)$$

$$\frac{v}{u_\delta} = \frac{u}{u_\delta} \tan[\beta_0] \left( 1 - \frac{z}{\delta} \right)^2 \quad (2.3.8)$$

Integrale Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + \vartheta_{21} P'_{12}(H) \frac{\partial H}{\partial n} + P_{12}(H) \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} = A_1 \quad (2.3.9)$$

Integrale Impulsbilanz in Querströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial s} + P'_{22}(H) \frac{\vartheta_{21}^2}{\vartheta_{11}} \frac{\partial H}{\partial n} + P_{22}(H) \frac{2 \vartheta_{21}}{\vartheta_{11}} \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} - P_{22}(H) \frac{\vartheta_{21}^2}{\vartheta_{11}^2} \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial n} = A \quad (2.3.10)$$

Integrale Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{B_{11}(H)}{P_{22}(H)} \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} - B_{12}(H) \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} + \frac{\vartheta_{11}}{P_{22}(H)} \left[ B'_{11}(H) + \frac{B_{11}(H) P'_{22}(H)}{P_{22}(H)} \right] \frac{\partial H}{\partial s} - \vartheta_{21} B'_{12}(H) \frac{\partial H}{\partial n} = A_3 \quad (2.3.11)$$

Aus (2.3.9 - 11) folgt mit (2.3.5) für  $\chi_M$  (Index M für D. F. Myring) eine kubische Gleichung (2.3.12).

$$\begin{aligned} & \chi_M^3 \left[ \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)} \right]^3 \left[ P_{22}(H) B'_{11}(H) - P'_{22}(H) B_{11}(H) \right] + \\ & \chi_M^2 \left[ \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)} \right]^2 \left[ P'_{12}(H) B_{11}(H) - P_{22}(H) B'_{12}(H) + 2 \left( P'_{22}(H) B_{11}(H) - P_{22}(H) B'_{11}(H) \right) \right] + \\ & \chi_M \left[ \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)} \right] \left[ P_{12}(H) B'_{11}(H) - P'_{22}(H) B_{12}(H) + 2 \left( P_{22}(H) B'_{12}(H) - P'_{12}(H) B_{11}(H) \right) \right] + \\ & \left[ P'_{12}(H) B_{12}(H) - P_{12}(H) B'_{12}(H) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Gleichung (2.3.12) wird durch Zerlegung in Linearfaktoren gelöst. Tatsächlich wird die Lösung in der Form

$$\chi_M * \left[ \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)} \right] = \chi_M^* = f(H) \quad (2.3.13)$$

gefunden. Auf eine Angabe der Funktion  $f(H)$  wird aus Gründen der Übersichtlichkeit hier verzichtet. Berechnete Werte dieser Funktion zeigt Bild 2.3.1. Es wird festgestellt, dass alle drei Wurzeln positiv und verschieden von Null sind. Das Gleichungssystem ist daher hyperbolisch.

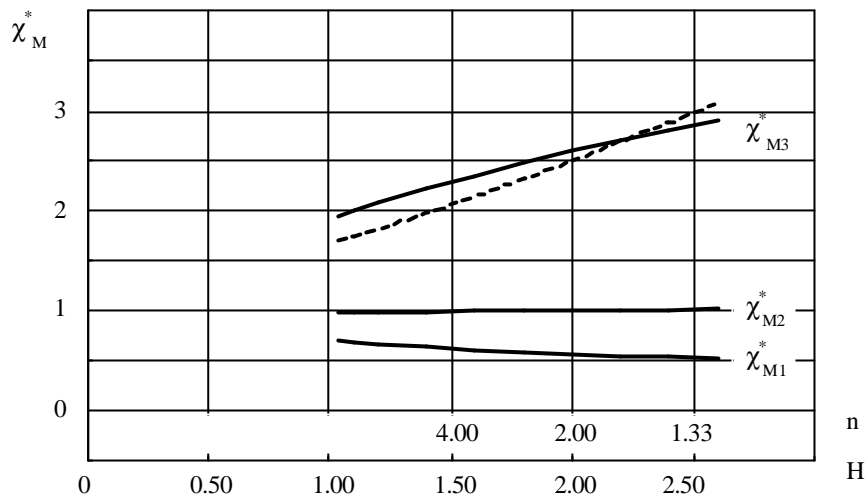


Bild 2.3.1 : Charakteristiken des Differentialgleichungssystems aufgetragen über dem Formparameter H beziehungsweise dem Exponenten n

strichlierte Kurve : 
$$\text{Tan}[\beta] \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)}$$

In Bild 2.3.1 kann die Richtung der Abszisse als die Richtung der Stromlinie am Grenzschichttrand verstanden werden. Die ebenfalls im Bild eingetragene Funktion

$$\text{Tan}[\lambda] \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{21}} \frac{1}{P_{22}(H)} = g(H) \quad (2.3.14)$$

stellt die Richtung der Wandstromlinie dar. Die Charakteristiken  $\chi_1^*$  und  $\chi_2^*$  liegen zwischen Richtung der Wandstromlinie und Richtung der Stromlinie am Grenzschichttrand. Die Charakteristik  $\chi_3^*$  deckt sich in etwa mit der Richtung der Wandstromlinie.

### 2.3.2 Analyse nach J. Cousteix und R. Houdeville

J. Cousteix und R. Houdeville gehen in ihrer Arbeit davon aus, dass zwischen den Geschwindigkeitsprofilen in Haupt- und Querströmung eine lineare Beziehung der Form (2.3.15) besteht. Die Größe C ist eine Funktion der Koordinaten s und n.

$$\frac{v_n}{u_e} = C \left[ 1 - \frac{u_s}{u_e} \right] \quad (2.3.15)$$

Um (2.3.15) zu überprüfen wurden neun Profile der Grenzschichtmessung vor einem Hindernis nach K.-O. Felsch et al. (1983) ausgewertet (siehe Bilde 2.3.2.1). Ein linearer Zusammenhang ist im Bereich zwischen  $0.3 \dots 0.4 < u / u_e < 1$  festzustellen. Schätzt man unter Zuhilfenahme des 1/7-Potenzgesetz als Profilansatz der Hauptströmungsrichtung die Werte der wandnormalen Koordinate hierfür ab, so findet man einen Bereich von  $0.02 \dots 0.16 < y / \delta < 1$ . Dies scheint hinreichend um Beziehung (2.3.15) als Arbeitshypothese zu akzeptieren. Direkt an der Wand gilt sie jedoch infolge

$$\left( \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_e} \right)_{z=0} = \left( \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}_e} \right)_{z=0} = 0 \quad (2.3.16)$$

nicht.

Mit (2.3.15) gelingt eine Reduktion der unbekannt integralen Dicken in (2.3.1 - 3) auf  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_{11}$  und  $\Delta_{11}$  (Gl. 2.3.17 bis 2.3.19). Gleichzeitig wird mit C eine neue Variable eingeführt. Die Formparameter, welche zur Substitution herangezogen werden, sind in Tafel 2 des Anhanges 2.4 zusammengefasst.

Zur Lösung von (2.3.17) bis (2.3.19) ist eine weitere Beziehung erforderlich. Es wird ein Formparameterzusammenhang der Form (2.3.20) sowie dessen Ableitungen eingeführt. Die für die Reynoldszahl verwendete integrale Grenzschichtdicke wird dabei nicht weiter spezifiziert.

Integrale Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + C \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} - C \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial n} + \vartheta_{11} [H - 1] \frac{\partial C}{\partial n} = A_1 \quad (2.3.17)$$

Integrale Impulsbilanz in Querströmungsrichtung

$$-C \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} - \vartheta_{11} \frac{\partial C}{\partial s} - C^2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} + C^2 \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial n} - 2 \vartheta_{11} [H - 1] C \frac{\partial C}{\partial n} = A_2 \quad (2.3.18)$$

Integrale Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \Delta_{11}}{\partial s} + C \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} + C \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial n} - C \frac{\partial \Delta_{11}}{\partial n} + \vartheta_{11} \left[ H + 1 - \frac{\Delta_{11}}{\vartheta_{11}} \right] \frac{\partial C}{\partial n} = A_3 \quad (2.3.19)$$

$$\frac{\Delta_{11}}{\vartheta_{11}} = f(H, Re_{\vartheta_x}) \quad ; \quad f_H = \frac{\partial f(H, Re_{\vartheta_x})}{\partial H} \quad ; \quad f_{Re} = \frac{\partial f(H, Re_{\vartheta_x})}{\partial Re_{\vartheta_x}} \quad (2.3.20)$$

Aus (2.3.17) bis (2.3.19) folgt die kubische Gleichung (2.3.21) für  $\chi_C$  (Index C für J. Cousteix, R. Houdeville). Tatsächlich werden die Lösung in der Form (2.3.22) gefunden. Sie sind unter (2.3.23) bis (2.3.25) angegeben. Alle drei Lösungen sind reell sowie von Null verschieden. Dieses Ergebnis bestätigt die Aussage aus Kapitel 2.3.1 bezüglich der Hyperbolizität des Gleichungssystems (2.3.1 - 3). Zudem wird festgestellt, dass  $\chi_{C1}^*$  identisch mit der Wurzel  $\lambda_2$ , welche J. Cousteix und R. Houdeville für das Gleichungssystem des Entrainmentverfahrens fanden, ist. Da sich Entrainmentverfahren und Dissipationsintegral-verfahren nur um eine Gleichung unterscheiden, erscheint die Gleichartigkeit der Eigenschaften der Verfahren plausibel.



$$\begin{aligned} & \chi_C^3 C^3 \left[ 2 - f - f_H - 2 H + f H + 2 f_H H - f_H H^2 - f_{Re} Re_{\partial x} + f_{Re} H Re_{\partial x} \right] + \\ & \chi_C^2 C^2 \left[ 3 - 2 f - 3 f_H - H + f H + 4 f_H H - f_H H^2 - 2 f_{Re} Re_{\partial x} + f_{Re} H Re_{\partial x} \right] + \\ & \chi_C C \left[ 1 - f - 3 f_H + 2 f_H H - f_{Re} Re_{\partial x} \right] - f_H = 0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

$$\chi_C^* = \chi_C C \quad (2.3.22)$$

$$\chi_{C1}^* = \frac{1}{H - 1} \quad (2.3.23)$$

$$\chi_{C2}^* = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_2 f_H}}{2 a_2} \quad (2.3.24)$$

$$\chi_{C3}^* = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_2 f_H}}{2 a_2} \quad (2.3.25)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - f - 2 f_H + f_H H - f_{Re} Re_{\partial x} \\ a_2 &= -2 + f + f_H - f_H H + f_{Re} Re_{\partial x} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

$$\text{Tan}[\beta_0] = \frac{C(H - 1)}{(1 - \gamma H)} \quad (2.3.27)$$

$$\text{Tan}[\beta_0] = \frac{1}{\chi_{Ci}} \quad (2.3.28)$$

In ihrer Arbeit führen J. Cousteix und R. Houdeville eine Relation zur Bestimmung von  $\beta_0$  an (2.3.27). Der Wert des Koeffizient  $\gamma$  wird von den Autoren mit 0.438 angegeben. Die Richtung der Wandstromlinie fällt mit der Richtungen einer der Charakteristiken zusammen, wenn die unter (2.3.28) angegeben Identität gilt. Um zu prüfen, ob eine der Wurzeln (2.3.23-25) diese Bedingung erfüllt, muss der Formparameterzusammenhang (2.3.20) spezifiziert werden. Wird das 1/n-tel Potenzgesetz für das Geschwindigkeitsprofil der Hauptströmung herangezogen, so kann die Identität (2.3.28) bezüglich  $\gamma_i = \gamma_i(H)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ausgewertet werden. Bereits J. Cousteix und R. Houdeville stellten fest, dass  $\chi_{C1}^*$  diese Identität nicht erfüllt. Eigene Rechnungen zeigen, dass  $\chi_{C3}^*$  negative Werte für  $\gamma_3(H)$  liefern. Die Funktion  $\gamma_2(H)$  zeigt Bild 2.3.2. Zum Vergleich sind im Bild die Werte

- $\gamma_4 = 0.438$  - von J. Cousteix, R. Houdeville abgeleiteter Wert in (2.3.27),
- $\gamma_5 = 0.383$  - von J. Cousteix, R. Houdeville mit einer entsprechenden Analyse für das Entrainmentverfahren abgeleiteter Wert für die von ihnen gefundene Wurzel  $\lambda_1$  und
- $\gamma_6 = 0.493$  -  $\gamma_6 = \gamma_4 + (\gamma_4 - \gamma_5)$  eingetragen.

Der Wert  $\gamma_6$  weicht von  $\gamma_4$  in positiver Richtung eben so viel ab wie  $\gamma_5$  von  $\gamma_4$  in negativer Richtung. Die Werte  $\gamma_5$  und  $\gamma_6$  stellen somit ein Toleranzband dar, in welchem sich die Funktion  $\gamma_3(H)$  befinden sollte. Tatsächlich ist dies über einen breiten Bereich des Formparameters H (bzw. der Potenz 1/n) der Fall.

Die vorliegende Analyse bestätigt auch hier die Aussage des Ansatzes nach D. F. Myring, dass eine der Charakteristiken mit der Wandstromlinie übereinstimmt. Die Richtungen der zwei verbleibenden Charakteristiken liegen zwischen Richtungen der Wand- und der Außenstromlinie (Bild 2.3.3).

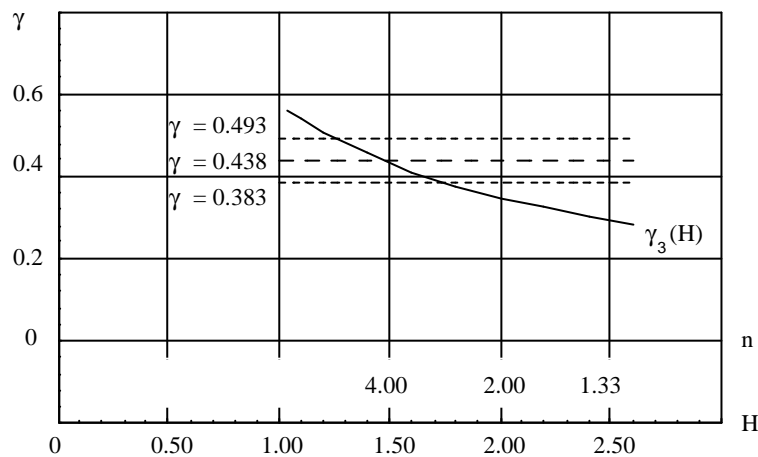


Bild 2.3.2 : Darstellung der Funktion  $\gamma_3(H)$

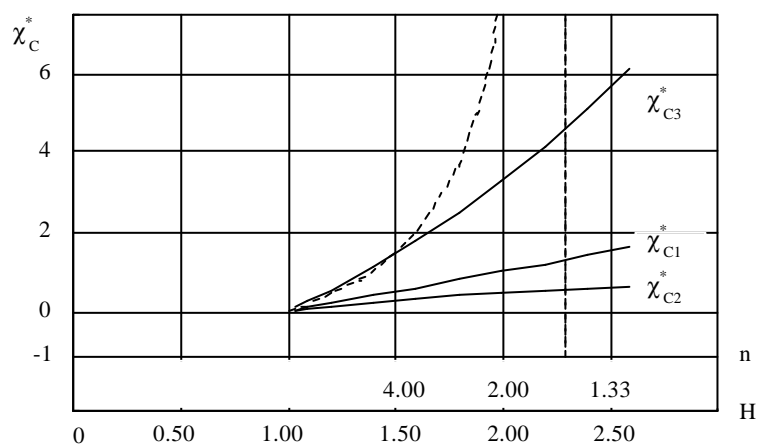


Bild 2.3.3 : Charakteristiken des Differentialgleichungssystems aufgetragen über dem Formparameter H beziehungsweise dem Exponenten n

### 2.3.3 Schlussfolgerungen für Berechnungsverfahren dreidimensionaler Grenzschichten

Im Unterschied zur zweidimensionalen Grenzschicht existiert in dreidimensionalen Grenzschichten neben dem Einfluss aus Richtung der Hauptströmung auch eine Wirkung quer zu dieser Richtung. Ein betrachteter Punkt in der Grenzschicht ist damit durch einen stromauf von ihm gelegenen Keil beeinflusst. Unter dem physikalischen Einflussgebiet soll daher das Gebiet verstanden werden, aus welchem Fluid an den betrachteten Ort zuströmen kann. Es wird vorausgesetzt, dass die diffusiven Prozesse in der Grenzschicht vernachlässigt werden können. Die Seiten dieses Keils werden durch die Stromlinien am Grenzschichttrand (identisch mit der Richtung von  $u_e$ ) und die Richtung der Wandschubspannung  $\tau_w$  gebildet. Das physikalische Einflussgebiet ergibt sich damit direkt aus dem Verwindungswinkel  $\beta_0$ .

Die in den Kapiteln 2.3.1 und 2.3.2 gefundene Lage der Charakteristiken zwischen Hauptströmungsrichtung und Richtung der Wandstromlinie bestätigt obige Betrachtung. In Bild 2.3.4 ist das Einflussgebiet auf einen betrachteten Punkt in einer dreidimensionalen Grenzschicht dargestellt. Für die praktische Integration ist zu berücksichtigen, dass das physikalische Einflussgebiet vollständig im numerischen liegt. Dieses Kriterium ist auch als Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL-Bedingung) bekannt.

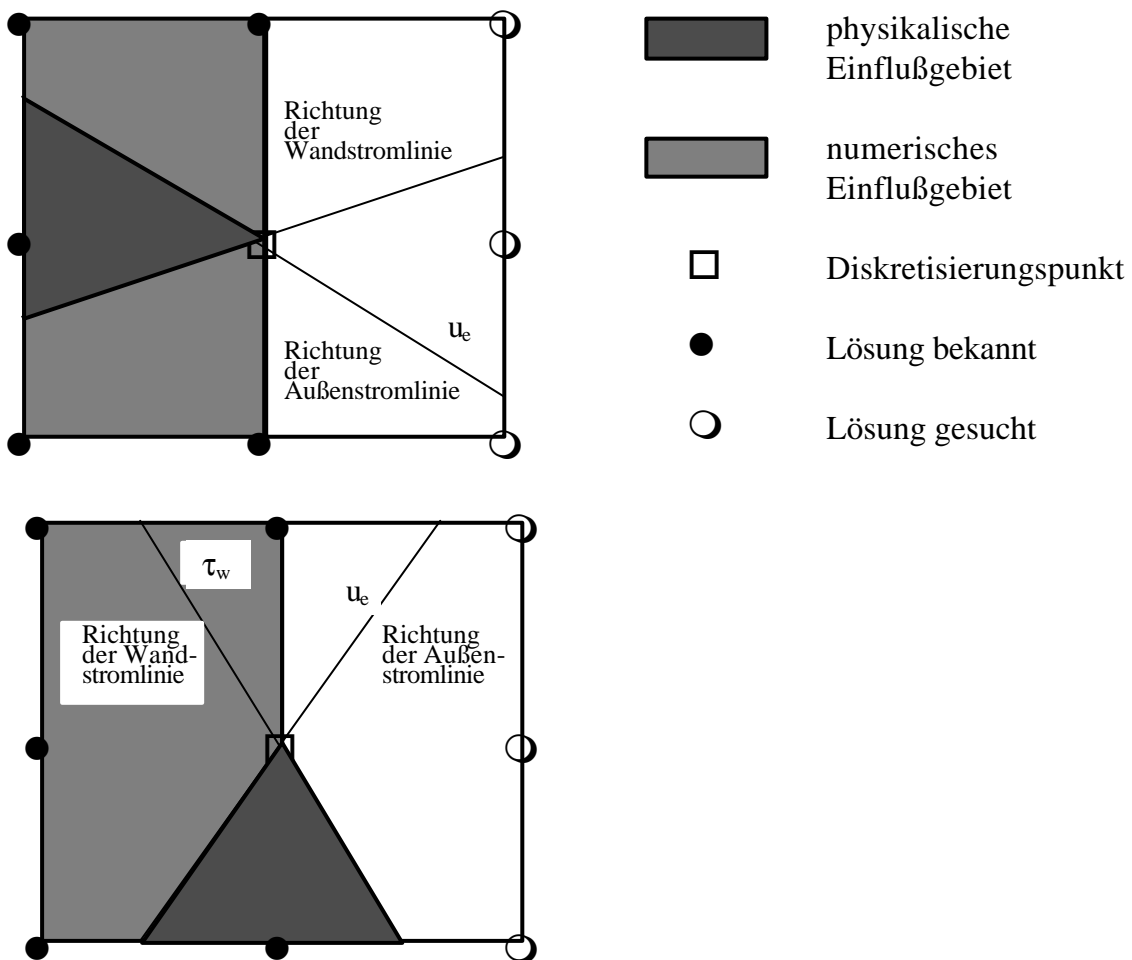


Bild 2.3.4 : Einflussgebiete in dreidimensionalen Grenzschichten  
oben : CFL-Bedingung erfüllt  
unten : CFL-Bedingung verletzt

### 2.3.4 Analogie zu Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale instationäre Grenzschichten

Für eine tief greifende Analyse der Eigenschaften von Dissipationsintegralverfahren ist es sinnvoll, das stationäre dreidimensionale mit dem instationären zweidimensionalen Verfahren zu vergleichen. Zuerst werden hierzu die für das letztere Verfahren benötigten partiellen Differentialgleichungen unter (2.3.29) bis (2.3.30) angeschrieben. Sie folgen aus der von E. Truckenbrodt (1972) angegebenen allgemeinen Form der instationären Integralgleichung zweidimensionaler Grenzschichten.

Integrale instationäre Impulsbilanz

$$\frac{1}{u_\delta^2} \left[ \frac{\partial(u_\delta \delta_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_\delta^2 \delta_2)}{\partial x} \right] + \frac{\delta_1}{u_\delta} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \frac{c_f}{2} \quad (2.3.29)$$

Integrale instationäre Energiebilanz

$$\frac{1}{u_\delta^3} \left[ \frac{\partial(u_\delta^2 \delta_2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_\delta^3 \delta_3)}{\partial x} \right] + \frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} = c_D \quad (2.3.30)$$

Es wird angemerkt, dass die Zeitabhängigkeit der integralen Dicken  $\delta_1$  und  $\delta_2$  eine Folge der Instationarität der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand  $u_\delta(x, t)$  ist. Die zeitliche Mittelung, welche bereits bei der Herleitung der Reynoldsschen Gleichungen erfolgte, kann auf diesem Weg nicht rückgängig gemacht werden.

Dissipationsintegralverfahren für stationäre Grenzschichten, wie sie von vielen Autoren (siehe z. B. M. Buschmann, 1996) entwickelt wurden, sind ein Sonderfall des hier betrachteten instationären Ansatzes. Die Eigenschaften, welche für das Gleichungssystem (2.3.29-30) gefunden werden, sind daher ebenfalls Eigenschaften des zweidimensionalen stationären Falls.

Nach Ausdifferenzieren und Zusammenfassen der druckgradientenabhängigen Terme, des Wandschubspannungsbeiwertes und des Dissipationsintegrals in den Termen  $A_1$  folgt das Gleichungssystem (2.3.31 - 32).

Integrale instationäre Impulsbilanz

$$\frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{\partial \delta_2}{\partial x} = A_1 \quad (2.3.31)$$

Integrale instationäre Energiebilanz

$$\frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + \frac{\partial \delta_3}{\partial x} = A_2 \quad (2.3.32)$$

Zur Reduktion der Zahl der Unbekannten in (2.3.31 - 32) werden ein Formparameterzusammenhang und dessen Ableitungen eingeführt (2.3.33). Im Unterschied zu (2.3.20) kann jedoch die Reynoldszahl mit  $Re_{\delta_2}$  festgelegt werden. Nach Einsetzen und Ordnen lautet das betrachtete Gleichungssystem damit entsprechend (2.3.34 - 35). Mit der reduzierten Variablen  $\chi^*$  (2.3.36) wird die charakteristische Gleichung (2.3.37) gefunden. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichungen sind unter (2.3.38-39) angegeben.

$$H_{32} = f(H_{12}, Re_{\delta_2}) \quad ; \quad f_H = \frac{\partial f(H_{12}, Re_{\delta_2})}{\partial H_{12}} \quad ; \quad f_{Re} = \frac{\partial f(H_{12}, Re_{\delta_2})}{\partial Re_{\delta_2}} \quad (2.3.33)$$

Integrale instationäre Impulsbilanz

$$\frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{\partial \delta_2}{\partial x} = A_1 \quad (2.3.34)$$

Integrale instationäre Energiebilanz

$$\frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + [-H_{12} f_H + Re_{\delta_2} f_{Re} + H_{32}] \frac{\partial \delta_2}{\partial x} = A_2 \quad (2.3.35)$$

$$\chi^* = \frac{1}{u_\delta} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (2.3.36)$$

$$\chi^{*2} + \chi^* [1 + H_{12} f_H - Re_{\delta_2} f_{Re} - H_{32}] - f_H = 0 \quad (2.3.37)$$

$$\chi_1^* = -\frac{1}{2} [1 + H_{12} f_H - Re_{\delta_2} f_{Re} - H_{32}] + \sqrt{\frac{1}{4} [1 + H_{12} f_H - Re_{\delta_2} f_{Re} - H_{32}]^2 - f_H} \quad (2.3.38)$$

$$\chi_2^* = -\frac{1}{2} [1 + H_{12} f_H - Re_{\delta_2} f_{Re} - H_{32}] - \sqrt{\frac{1}{4} [1 + H_{12} f_H - Re_{\delta_2} f_{Re} - H_{32}]^2 - f_H} \quad (2.3.38)$$

Für die drei Reynoldszahlen  $Re_{\delta_2} = 10^4, 10^5$  und  $10^6$  werden die Wurzeln  $\chi_1^*$  und  $\chi_2^*$  mit Hilfe der von M. Buschmann (1996) angegebenen Beziehung für  $H_{32} = f(H_{12}, Re_{\delta_2})$  bestimmt (Bild 2.3.5 - 6). Für  $H_{12} > 1$  werden folgende Schlussfolgerungen gezogen.

(1) Da beide Wurzeln immer reell und verschieden voneinander sind, ist das System hyperbolisch.

(2) Eine der beiden Wurzeln  $\chi_2^*$  wechselt ihr Vorzeichen bei  $H_{12,\chi} = f(Re_{\delta_2})$ . Der Wert  $H_{12,\chi}$  ist durch die Bedingung  $f_H = 0$ , was gleichbedeutend mit  $c_f = 0$  und damit dem Ort der Ablösung

ist, charakterisiert. Es gilt die Identität  $H_{12,\chi} = H_{12,Abl}$ . In Bild 2.3.7 wurde die berechnete Funktion  $H_{12,Abl} = f(Re_{\delta 2})$  eingetragen. Eine Bestätigung dieser Kurve wird mit dem experimentell bestimmten Wert  $H_{12, Abl}$  nach R. L. Simpson et al. (1981) gefunden.

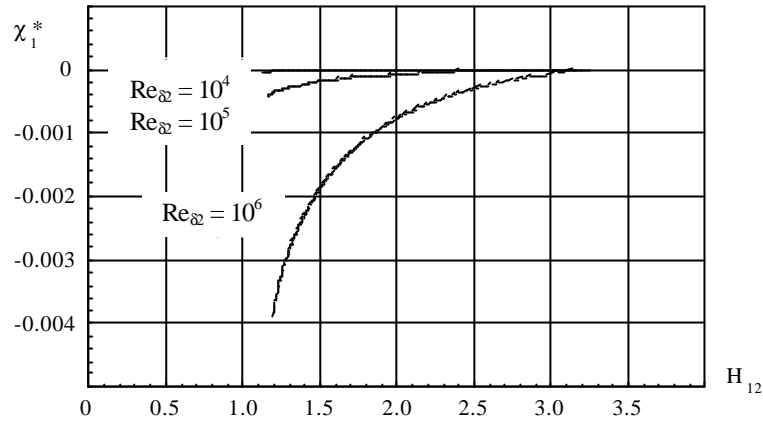


Bild 2.3.5 : Wurzel  $\chi_1^*$  für drei verschiedene Reynoldszahlen

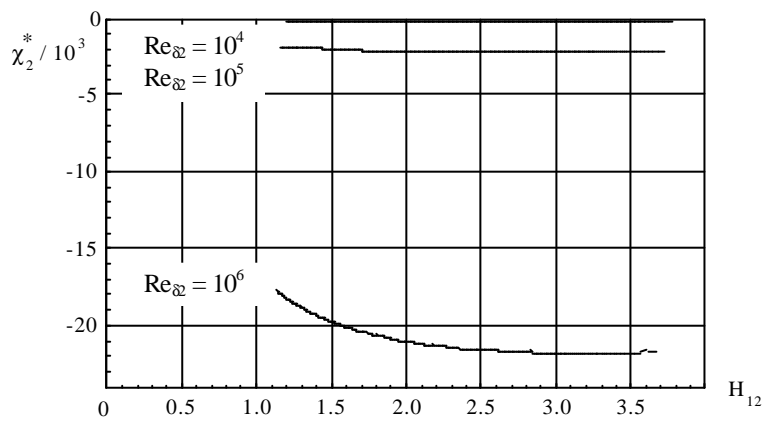


Bild 2.3.6 : Wurzel  $\chi_2^*$  für drei verschiedene Reynoldszahlen

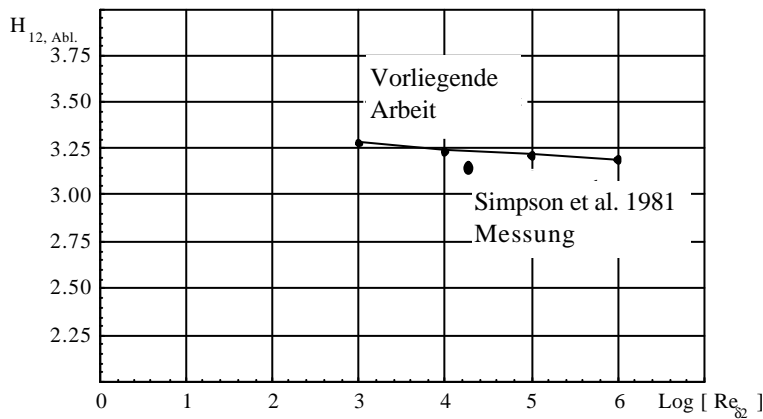


Bild 2.3.7 : Formparameter  $H_{12,Abl} = f(Re_{\delta 2})$

### 3 Geschwindigkeitsprofile

Entsprechend der Theorie der Integralverfahren können turbulente Grenzschichten mit Hilfe eines Satzes endlich vieler integraler Bilanzgleichungen berechnet werden. Zur Lösung dieses Satzes sind Parameterbeziehungen zwischen den integralen Dicken, den Wandschubspannungsbeiwerten sowie den Dissipationsintegralen, welche in den Bilanzgleichungen auftreten, erforderlich. Prinzipiell sind zwei Wege zur Herleitung dieser Zusammenhänge zu unterscheiden. Einerseits werden Parameterzusammenhänge durch Auswertung experimentell bestimmter Datenbasen als halbempirische Beziehungen abgeleitet. Dieser Weg kommt vielfach für zweidimensionale Verfahren zur Anwendung. Für dreidimensionale Grenzschichten scheint er ob der hohen Zahl notwendiger Basisdaten kaum realistisch. Es sind daher nur vergleichsweise wenige halbempirische Parameterzusammenhänge für dreidimensionale turbulente Grenzschichten bekannt. Die zweite Vorgehensweise stützt sich auf die Auswertung von analytisch formulierten Geschwindigkeitsprofilen in Haupt- beziehungsweise in Haupt- und Querströmungsrichtung. Insbesondere für den dreidimensionalen Fall ist dieser Methode infolge ihrer höheren Universalität der Vorzug zu geben.

Eine ausführliche Diskussion der Ansätze von Geschwindigkeitsprofilen ist insbesondere für Dissipationsintegralverfahren von großer Bedeutung da aus diesen Profilen die für die Dissipationsintegrale benötigten Schubspannungsverteilungen direkt gewonnen werden.

#### 3.1 Zweidimensionale turbulente Grenzschichten

Unter zweidimensionalen turbulenten Grenzschichten sollen solche Reibungsschichten verstanden werden, deren zeitgemittelte Querkomponente gleich Null ist. Alle anderen Eigenschaften turbulenter Grenzschichten bleiben erhalten.

##### 3.1.1 Theoretische Grundlagen

Die allgemeinen Grenzschichtgleichungen in entdimensionierter Form (siehe Anhang 2.1) vereinfachen sich im zweidimensionalen Fall entsprechend (3.1.1 a, b).

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left( -\frac{\overline{u'v'}}{u_{\text{Ref}}^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) \quad (3.1.1 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (3.1.1 \text{ b})$$

$$\text{mit } \text{Re} = \frac{u_{\text{Ref}} l_{\text{Ref}}}{\nu} ; \hat{u} = \frac{u}{u_{\text{Ref}}} ; \hat{v} = \frac{v}{u_{\text{Ref}}} ; \hat{x} = \frac{x}{l_{\text{Ref}}} ; \hat{z} = \frac{z}{l_{\text{Ref}}} \quad (3.1.1 \text{ c})$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen lauten :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad \hat{u}(\hat{x}, \hat{z}=0) = 0 \quad \hat{v}(\hat{x}, \hat{z}=0) = 0 \quad \hat{u}(\hat{x}, \hat{z} \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \quad (3.1.2 \text{ a, b})$$

Für  $Re \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (3.1.1 a), dass die molekulare Impulsübertragung verschwindend klein gegenüber der turbulenten Impulsübertragung infolge Trägheitswirkungen ist (3.1.3 a). Dies gilt in der Außenzone turbulenter Grenzschichten. Zur Erfüllung der Haftbedingung muss hingegen in Wandnähe die molekulare Zähigkeit berücksichtigt werden. Aus (3.1.2 b) folgt damit für die innere Zone Gleichung (3.1.3 b). Bild 3.1.1 zeigt schematisch den Aufbau der Grenzschicht aus innerer und äußerer Zone.

$$\begin{array}{l} \text{Außenzone der} \\ \text{Grenzschicht} \end{array} \quad \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left( -\frac{\overline{u'v'}}{u_{\text{Ref}}^2} \right) \quad (3.1.3 \text{ a})$$

$$\begin{array}{l} \text{innere Zone der} \\ \text{Grenzschicht} \end{array} \quad 0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left( -\frac{\overline{u'v'}}{u_{\text{Ref}}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) \quad (3.1.3 \text{ b})$$

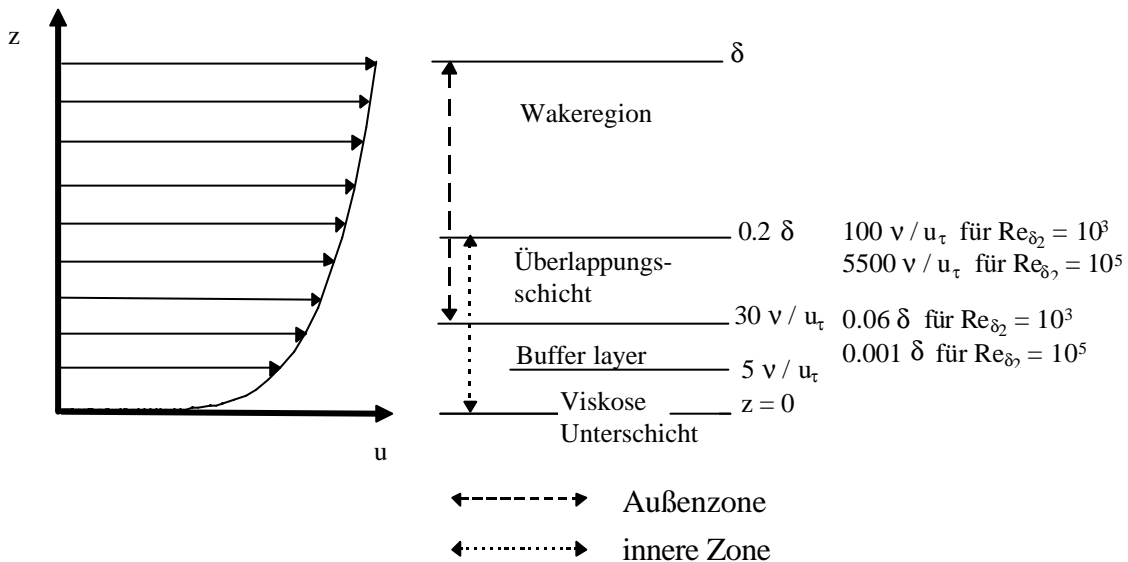


Bild 3.1.1 : Schematische Darstellung der Zonen einer turbulenten Plattengrenzschicht (nach M. Gad-el-Hak, P. R. Bandyopadhyay, 1994)

Eine komplette Selbstähnlichkeit, wie von laminaren Grenzschichten her bekannt (z. B. Blasiusche Reihe, Falkner-Skan-Lösung, siehe H. Schlichting, K. Gersten 1997), wird im turbulenten Fall nicht gefunden. Es kann jedoch nach Ähnlichkeitsgesetzen für die innere, von der molekularen Zähigkeit dominierte Region und die Außenzone separat gesucht werden. Diese Vorgehensweise entspricht dem klassischen Ansatz nach C. B. Millikan (1938). Zuerst wurde die innere Zone der zweidimensionalen turbulenten Grenzschicht jedoch von Th. von Kármán (1930) und von L. Prandtl (1932) bezüglich Ähnlichkeitslösungen untersucht.

Die charakteristische Längenskala der inneren Zone wird mit  $\hat{l} = \nu / u_\tau$  definiert. Dabei ist  $u_\tau$  die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $\sqrt{\tau_w / \rho}$ . Der charakteristische Längenmaßstab  $\Delta$  der äußeren Zone ist in der inneren Zone von vernachlässigbarem Einfluss.

Nach R. Panton (2000) werden für Geschwindigkeits- und Scherspannungsverteilung der inneren Region der Plattengrenzschicht die folgenden Poincaré-Entwicklungen geschrieben.



$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = f(z^+, K_\tau) \sim f_0(z^+) + g_1(K_\tau) * f_1(z^+) + \dots \quad (3.1.4)$$

$$\overline{\frac{u'v'}{u_\tau^2}} = k(z^+, K_\tau) \sim k_0(z^+) + l_1(K_\tau) * k_1(z^+) + \dots \quad \text{mit} \quad K_\tau = \frac{u_\tau \Delta}{\nu} \quad (3.1.5)$$

Als charakteristischer Längenmaßstab der Außenregion wird mit  $\Delta$  ein Maß für die Grenzschichtdicke gewählt. Mit dem dimensionslosen Wandabstand

$$\eta = z / \Delta \quad (3.1.6)$$

lauten die entsprechenden Poincaré-Entwicklungen der Außenregion

$$\frac{u}{u_\delta} = F(\eta, K_\tau) \sim F_0(\eta) + G_1(K_\tau) * F_1(\eta) + \dots \quad (3.1.7)$$

$$\overline{\frac{u'v'}{u_\tau^2}} = K(z^+, K_\tau) \sim K_0(z^+) + L_1(K_\tau) * K_1(z^+) + \dots \quad (3.1.8)$$

In den Gleichungen (3.1.4-8) stellt  $K_\tau$  die Kármánzahl dar. Diese Ähnlichkeitskennzahl ist im strengen Sinn keine Reynoldszahl sondern ein Ähnlichkeitssimplex, der die charakteristische Länge der äußeren Zone  $\Delta$  zur charakteristischen Länge der inneren Zone  $\nu/u_\tau$  ins Verhältnis setzt. Für große aber endliche Reynoldszahl ist zu erwarten, dass die Poincaré-Entwicklungen für innere und äußere Region überlappen. In dieser Überlappungszone entsprechen die Beziehungen (3.1.4, 5) für  $z^+ \rightarrow \infty$  den Gleichungen (3.1.7, 8) für  $\eta \rightarrow 0$ . Es gilt

$$l^* \ll z \ll \Delta \quad (3.1.9)$$

In der Überlappungsregion ist der normierte Geschwindigkeitsgradient der inneren und der äußeren Zone gleich groß und konstant.

$$GR = \frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.1.10)$$

Es folgt aus (3.1.4) 
$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = z^+ f_0'(z^+) + g_1(K_\tau) z^+ f_1'(z^+) + \dots \quad (3.1.11)$$

und aus (3.1.7) 
$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_\delta}{u_\tau} \eta F_0'(\eta) + \frac{u_\delta}{u_\tau} G_1(K_\tau) \eta F_1'(\eta) + \dots \quad (3.1.12)$$

beziehungsweise durch gleichsetzen

$$z^+ f_0'(z^+) + g_1(K_\tau) z^+ f_1'(z^+) + \dots = \frac{u_\delta}{u_\tau} \eta F_0'(\eta) + \frac{u_\delta}{u_\tau} G_1(K_\tau) \eta F_1'(\eta) + \dots \quad (3.1.13)$$

Damit beide Seiten dieser Gleichung von gleicher Größenordnung sind, muss gelten

$$F_0' = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_0 = \text{const.} (= 1) \quad (3.1.14)$$

Weiterhin folgt aus der Tatsache, dass weder  $f_0$  noch  $F_1$  Funktionen der Kármánzahl sind, dass  $\kappa$  eine Konstante ist. Mit (3.1.10) ergibt sich für die innere Zone die Lösung erster Ordnung

$$z^+ f_0'(z^+) = \frac{1}{\kappa} \quad f_0(z^+) = \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C_{\log} \quad \text{für } z^+ \rightarrow \infty \quad (3.1.15)$$

Für die Außenzone gilt mit  $G_1 = u_\tau / u_\delta$  (aus Bilanz der kinetischen Energie, siehe R. Panton 2000)

$$\eta F_1'(\eta) = \frac{1}{\kappa} \quad F_1(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln[\eta] + C_{a,\log} \quad \text{für } \eta \rightarrow 0 \quad (3.1.16)$$

Das logarithmische Verhalten der Geschwindigkeitsverteilung in der Überlappungszone kann damit als äußere Asymptote der inneren Zone für  $z^+ \rightarrow \infty$  beziehungsweise als innere Asymptote der Außenzone für  $\eta \rightarrow 0$  verstanden werden (siehe z. B. G. L. Mellor, 1972). Die Außenzone wird von Trägheitseffekten dominiert. Die Wirkung der molekularen Zähigkeit wird über die Kopplung an die innere Zone in sie hineingetragen.

Das so genannte Außengesetz folgt aus (3.1.7) und (3.1.16)

$$\frac{u_\delta - u}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln[\eta] + C_{a,\log} \quad (3.1.17)$$

Ein Geschwindigkeitsprofil, das für alle  $z$  gültig ist, wird durch Addition von (3.1.15) und (3.1.16) gefunden. Der doppelt vorhandene gemeinsame Anteil (Index  $ge$ ) wird subtrahiert.

$$\frac{u(z)}{u_\tau} = f_0(z^+) + \frac{u_\delta}{u_\tau} \left\{ F_1(\eta) - F_1(\eta)_{ge} \right\} \quad (3.1.18)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.1.8) ist die Wakekomponente des Profils

$$w(\eta) = F_1(\eta) - F_1(\eta)_{ge} \quad (3.1.19)$$

Zusammengefasst ergeben die beiden letzten Beziehungen das bekannte Geschwindigkeitsprofil turbulenter zweidimensionaler Plattengrenzschichten.

$$\frac{u(z)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C + w(\eta) , \quad \eta = \frac{z^+}{K_\tau} \quad (3.1.20)$$

Gleichung (3.1.20) ist eine generelle Formulierung des Geschwindigkeitsprofils und zeigt dessen Abhängigkeit erster Ordnung von der Kármánzahl  $K_\tau$ . Sie gilt im strengen Sinne nur für Plattengrenzschichten. Für Grenzschichten mit Druckgradienten kann dessen Wirkung auf die innere

Zone in erster Näherung vernachlässigt werden. Sein Einfluss auf die Außenzone wird durch eine Wakekomponente der Form  $w(\eta, \pi)$  berücksichtigt. Der Wakeparameter  $\pi$  ist dann eine Funktion des Druckgradienten.

### 3.1.2 Konkrete Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofile der zweidimensionalen turbulenten Grenzschicht

Mit (3.1.20) liegt ein bezüglich seiner Struktur weithin akzeptiertes Geschwindigkeitsprofil für die turbulente zweidimensionale Grenzschicht vor. Die Konstanten  $\kappa$  und  $C$  konnten bisher nur aus Experimenten bestimmt werden. Dies ist offenbar auch die Ursache, warum selbst für den Fall der druckgradientenfreien Plattengrenzschicht und der Rohrströmung teilweise sehr unterschiedliche Werte in der Literatur zu finden sind (Tabelle 3.1.1). In Anlehnung an Standardwerke der Grenzschichttheorie (K. Gersten, H. Herwig, 1992; H. Schlichting, K. Gersten 1997) werden für die vorliegende Arbeit für zweidimensionale Grenzschichten  $\kappa = 0.41$  und  $C = 5.0$  gewählt.

Tabelle 3.1.1 : Konstanten des logarithmischen Gesetzes

Autor	$Re_{\delta_2}$	$\kappa$	$C$
Rohrströmung M. V. Zagarola et al. (1997)	1876 - $1.77 \cdot 10^6$	0.436	6.130
Grenzschicht D. Coles (1956)		0.390 bis 0.410	5.000
Plattengrenzschicht H. Osaka et al. (1998)	860 - 6200	0.410	4.900
Plattengrenzschicht J. Österlund et al. (1999)	6000 - 27000	0.384	4.080

Die Wakekomponente (3.1.19) wurde erstmals von D. Coles (1956) analysiert und in Form einer trigonometrischen Funktion beschrieben. Nachteil dieser ursprünglichen Wakefunktion ist, dass sie die Bedingung  $\partial u / \partial y = 0$  am Grenzschichttrand nicht korrekt wiedergibt. A. K. Lewkowicz behob mit seiner 1982 veröffentlichten Wakefunktion (3.1.21) diese Einschränkung. Die Variable  $\pi$  ist der Wakparameter. Er zeigt den Einfluss der Druckgradienten auf die Außenzone der Grenzschicht an und kann als Basisvariable des Grenzschichtprofils verstanden werden. Seine Entwicklung längs des Laufweges ist Ergebnis der Grenzschichtrechnung.

$$w(\eta, \pi) = 2 \eta^2 (3 - 2 \eta) - \frac{1}{\pi} \eta^2 (1 - \eta)(1 - 2 \eta) \quad (3.1.21)$$

Wird das Geschwindigkeitsprofil (3.1.20, 21) in die Grenzschichtgleichung (3.1.1 a) eingesetzt, so folgt eine Beziehung für die Schubspannungsverteilung (A. E. Perry et al., 1994).

$$\frac{\tau}{\tau_w} = f_1(\eta, \pi, S) + f_2(\eta, \pi, S) \delta \frac{d\pi}{dx} + f_3(\eta, \pi, S) \frac{\delta}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} \quad (3.1.22)$$

Die Terme  $f_1(\eta, \pi, S)$ ,  $f_2(\eta, \pi, S)$  und  $f_3(\eta, \pi, S)$  sind sehr umfangreich. Sie werden daher hier nicht explizit angegeben. Es sei jedoch angemerkt, dass diese Funktionen nur Terme, welche den mit der Grenzschichtdicke normierten Wandabstand in logarithmischer Form beziehungsweise als Potenzen aufweisen, enthalten. Diese Eigenschaft ist letztlich auf den Charakter der Wakefunktion nach A. K. Lewkowicz zurückzuführen. Sie ist ebenfalls Grundlage für die analytische Integrabilität, welche zum Dissipationsintegral führt (Kap. 3.3). Entsprechend (3.1.22) wird die Schubspannungsverteilung aus drei Komponenten berechnet. Der erste Term liefert allein gesehen die Schubspannungsverteilung einer Plattengrenzschicht mit Äquilibrium Charakter. Der zweite Term koppelt die Schubspannungsverteilung sowohl an die Variablen des Geschwindigkeitsprofils als auch an deren Gradienten. Dieser Term beinhaltet eine Aussage über den Nichtäquilibrium Charakter der Grenzschicht. Er wird negativ wenn der Gradient des Wakeparameters positiv ist. Für den Fall einer Äquilibrium Grenzschicht wird dieser Term Null. Der dritte Term erfasst den Einfluss des Druckgradienten der Außenströmung auf die Schubspannungsverteilung.

Bild 3.1.2 zeigt einen Vergleich zwischen den Messwerten von  $\overline{u'v'}/u_\tau^2$  für die verzögerte Grenzschicht APG 10 nach I. Marusciz (1991) und Beziehung (3.1.22). Es wird eine gute Übereinstimmung beobachtet. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass die viskose Spannung, welche nur in Wandnähe von Bedeutung ist, vernachlässigt wurde.

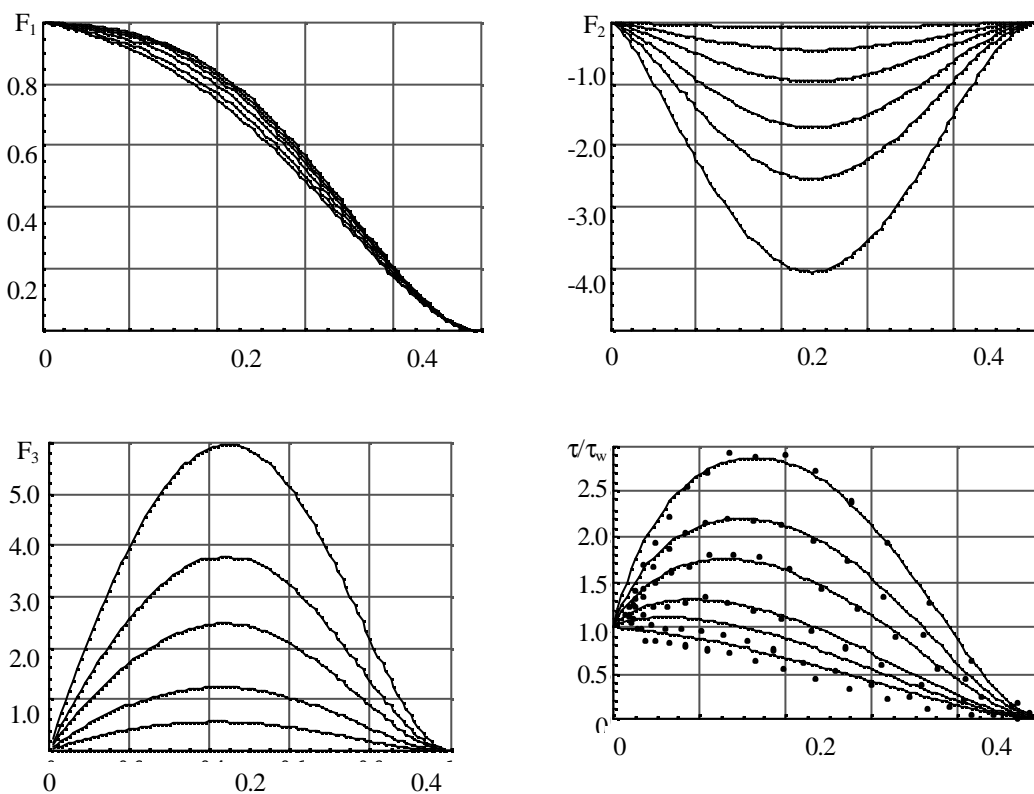


Bild 3.1.2 Glieder der Schubspannungsverteilung 3.1.22 für die verzögerte Grenzschicht APG 10 nach I. Marusciz (1991)

Links oben :  $F_1 = f_1(\eta, \pi_{\text{exp}}, S_{\text{exp}})$

rechts oben :  $F_2 = f_2(\eta, \pi_{\text{exp}}, S_{\text{exp}}) * \delta_{\text{exp}} * d \pi_{\text{exp}} / d x$

Links unten :  $F_3 = f_3(\eta, \pi_{\text{exp}}, S_{\text{exp}}) * (\delta_{\text{exp}} / u_{\delta_{\text{exp}}}) * d \pi_{\text{exp}} / d x$

Rechts unten : Vergleich Experiment (Symbole) und Rechnung Gl. (3.1.22)

## 3.2 Dreidimensionale Grenzschichten

Trotz ihrer großen praktischen Bedeutung für den Turbomaschinenbau, die Flugzeug- und Fahrzeugumströmung sowie andere Durch- und Umströmsituationen ist das physikalische Verständnis sowie die Modellierung dreidimensionaler turbulenter Grenzschichten weit weniger fortgeschritten als für den zweidimensionalen Fall. Infolge der Verwundenheit dreidimensionaler Profile ist deren Beschreibung deutlich komplexer und komplizierter. Empirische und halbempirische Ansätze spielen daher bei der Beschreibung noch immer eine große Rolle. Dies gilt insbesondere für das Querstromprofil. Ausführliche Diskussionen zu dreidimensionalen Grenzschichtprofilen sind in den Arbeiten von M. S. Ölcmen et al. (1992) und J. P. Johnston et al. (1996) zu finden.

### 3.2.1 Theoretische Grundlagen

Wie die asymptotischen Ansätze von U. Goldstein, E. Reshotko (1984) sowie von A. T. Degani et al. (1993) zeigen, kann die dreidimensionale turbulente Grenzschicht ebenfalls in eine innere und eine äußere Zone unterteilt werden. Die innere Zone wird in erster Näherung von der in Richtung der Wandstromlinien orientierten Wandschubspannung

$$\tau_w = \sqrt{\tau_{w,x}^2 + \tau_{w,y}^2} \quad (3.2.1)$$

geprägt.

Bei der Diskussion dreidimensionaler turbulenter Grenzschichten sind drei Winkel von Interesse. Dies ist zum Ersten der Strömungswinkel  $\beta_{FA}(\eta)$ . Er zeigt die Dreidimensionalität der Grenzschicht an. Der zweite Winkel  $\beta_{FGA}(\eta)$  wird aus den Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten in wandnormaler Richtung gebildet. Der dritte Winkel  $\beta_{SSA}(\eta)$  gibt die Richtung der Komponente der Scherspannung in einer zur Wand parallelen Ebene in Bezug auf die Außenstromlinie an. Sind die Winkel  $\beta_{FA}(\eta)$  und  $\beta_{FGA}(\eta)$  gleich, so spricht man von kollateraler Strömung. Im Fall gleicher  $\beta_{FGA}(\eta)$  und  $\beta_{SSA}(\eta)$  ist die Wirbelzähigkeit isotrop.

$$\beta_{FA}(\eta) = \text{ArcTan}[v / u] \quad (3.2.2)$$

$$\beta_{FGA}(\eta) = \text{ArcTan}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) / \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad (3.2.3)$$

$$\beta_{SSA}(\eta) = \text{ArcTan}\left[-\overline{v'w'} / -\overline{u'w'}\right] \quad (3.2.4)$$

Der Winkel zwischen Wandschubspannung und Stromlinie am Grenzschichttrand wird Verwindungswinkel  $\beta_0$  genannt. Es gilt

$$\lim_{z^+ \rightarrow 0} (\beta_{FGA}) = \tan[\beta_0] = \frac{\tau_{w,y}}{\tau_{w,x}} = \lim_{z^+ \rightarrow 0} \left( \frac{\partial v^+ / \partial z^+}{\partial u^+ / \partial z^+} \right) \quad (3.2.5)$$

In erster Näherung sind die Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor beziehungsweise Vektor der Schubspannung innerhalb der inneren Zone und der Stromlinie am Grenzschichttrand konstant und gleich dem Verwindungswinkel. Die Strömung wird hier als kollateral beziehungsweise koplanar bezeichnet. Näherungen höherer Ordnung und neuere experimenteller Untersuchungen (J. M. Bruns et al., 1999) zeigen jedoch, dass die innere Zone nicht generell als kollateral zu bezeichnen ist. Dies war in der Analyse von U. Goldstein, E. Reshotko (1984) geschlossen worden. Im Rahmen der Integralverfahren und einer ingenieurmäßigen Applikation erscheint die Annahme der Gleichgerichtetheit von Geschwindigkeits- und Schubspannungsvektor innerhalb der inneren Zone jedoch zweckmäßig und hinreichend exakt.

A. T. Degani et al. (1993) konnten weiterhin zeigen, dass die Komponenten der Gesamtschubspannung innerhalb der inneren Zone konstant in Richtung und Wert über der wandnormalen Koordinate sind. Analog dem Ansatz für zweidimensionale Grenzschichten wird daher geschrieben

$$\sqrt{u^{+2} + v^{+2}} = f(z^+) \quad (3.2.6)$$

$$\text{mit} \quad u^+ = \cos(\beta_0) * f(z^+) \quad v^+ = \sin(\beta_0) * f(z^+) \quad (3.2.7)$$

Für die Überlappungsschicht gilt wiederum die Konstanz des normierten Gradienten.

$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial (\sqrt{u^2 + v^2})}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.2.8)$$

Einsetzen von (3.2.6) in (3.2.8) und Integration liefert für die Funktion  $f(z^+)$

$$f(z^+) = \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C \quad \text{für} \quad z^+ \rightarrow \infty \quad (3.2.9)$$

$$\text{sowie} \quad u^+ = \cos(\beta_0) * \left( \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C \right) \quad (3.2.10 \text{ a})$$

$$\text{und} \quad v^+ = \sin(\beta_0) * \left( \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C \right) \quad (3.2.10 \text{ b})$$

$$\text{bzw.} \quad v^+ = u^+ \tan[\beta_0] \quad (3.2.11)$$

Die Beziehungen (3.2.9 - 11) sagen aus, dass das Geschwindigkeitsprofil in der Ebene, welche die Richtung der Wandschubspannung und die wandnormale Koordinate aufspannen, identisch mit dem zweidimensionalen Profil ist. Die gesamte Profilverwindung erfolgt damit in der Außenzone der Grenzschicht. Der Zusammenhang (3.2.10 a) entspricht dem bereits 1960 von J. P. Johnston vorgeschlagenen Profilansatz. Die Kármánsche Konstante  $\kappa$  kann zu 0.41 und die Konstante C zu 5.0 gewählt werden (A. T. Degani et al. 1993).

Es sei angemerkt, dass bereits im Jahre 1945 L. Prandtl eine lineare Abhängigkeit des Querstromprofils vom Tangens des Verwindungswinkels  $\beta_0$  formulierte. Allerdings wurden in diesem Ansatz äußere Variablen als Bezugsgrößen verwendet. Im weiteren wird die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Stromlinien am Grenzschichttrand betrachtet. Für diese Komponente lautet die Poincaré-Entwicklung der Außenzone

$$\frac{u}{u_\delta} = F(\eta, K_\tau) \sim F_0(\eta) + \cos(\beta_0) G_1(K_\tau) F_1(\eta) + \dots \quad (3.2.12)$$

Für den Fall eines verschwindenden Verwindungswinkels geht (3.2.12) in die entsprechende Beziehung der zweidimensionalen Grenzschicht über (3.1.7).

Zur Kopplung der beiden Grenzschichtzonen muss wiederum die äußere Asymptote der inneren Zone (3.2.6) für  $\bar{z} \rightarrow \infty$  mit der inneren Asymptote der Außenzone (3.2.12) für  $\eta \rightarrow 0$  zur Deckung kommen. Die Kopplungsbedingung wird in Form des normierten Gradienten

$$\frac{z}{u_{\tau,x}} \frac{\partial(\cos(\beta_0) \sqrt{u^2 + v^2})}{\partial z} = \frac{z}{\cos(\beta_0) u_\tau} \frac{\partial(u)}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.2.13)$$

gefunden. Aus (3.2.13) folgt mit (3.2.12)

$$\frac{z}{\cos(\beta_0) u_\tau} \frac{\partial(u)}{\partial z} = \frac{1}{\cos(\beta_0)} \frac{u_\delta}{u_\tau} \eta F_0'(\eta) + \frac{u_\delta}{u_\tau} \eta G_1(K_\tau) F_1'(\eta) + \dots \quad (3.2.14)$$

Analog zur Herleitung des Außengesetzes zweidimensionaler Grenzschichten gilt

$$F_0' = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_0 = \text{const.} (= 1) \quad \text{und} \quad G_1 = \frac{u_\tau}{u_\delta} \quad (3.2.15)$$

Damit folgt aus (3.2.13) mit (3.2.14) für die Defektfunktion  $F_1(\eta)$

$$F_1(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln[\eta] + C_{a,\log} \quad (3.2.16)$$

Substitution von (3.2.16) in (3.1.12) und Umformen liefert ein Außengesetz für die in Richtung der Stromlinie am Grenzschichttrand orientierte Geschwindigkeitskomponente (3.2.17). Weiterhin gilt die Kopplung zur Querkomponente (3.2.11), aus welcher durch Einsetzen von (3.2.17) die Beziehung (3.2.18) folgt.

$$\frac{u - u_\delta}{u_\tau} = \cos(\beta_0) \left( \frac{1}{\kappa} \ln[\eta] + C_{a,\log} \right) \quad \text{für} \quad \eta \rightarrow 0 \quad (3.2.17)$$

$$\frac{v}{u_\tau} = \frac{u_\delta}{u_\tau} \tan[\beta_0] + \sin(\beta_0) \left[ \frac{1}{\kappa} \ln[\eta] + C_{a,\log} \right] \quad (3.2.18)$$

Sowohl Haupt- als auch Querstromkomponente zeigen eine logarithmische Verteilung im Überlappungsbereich. Die Hauptströmungskomponente verhält sich vergleichbar der Geschwindigkeitsverteilung zweidimensionaler Grenzschichten. Es wird damit bis zu einem gewissen Grade auch erklärlich, warum die Verwendung zweidimensionaler Profile in anderen Integralverfahren (z. B. Entrainmentverfahren) für dreidimensionale Grenzschichten oft erfolgreich ist.

### 3.2.2 Konkrete Geschwindigkeitsprofile für Haupt- und Querströmung der dreidimensionalen turbulenten Grenzschichten

Werden gemessene Verteilungen von Hauptströmungsprofilen mit Hilfe der Prandtlschen Koordinaten  $y^+$  und  $u^+$  in halblogarithmischer Darstellung aufgetragen, so wird oft ein den zweidimensionalen Grenzschichten ähnlicher Verlauf gefunden. Ausgehend von der Wand bilden sich viskose Unterschicht, Buffer-Layer, logarithmischer Bereich und Wakebereich (Außenbereich) aus. Insbesondere die Existenz von logarithmischem Bereich und Wakebereich wird durch die asymptotischen Analysen von A. T. Degani et al. (1993) zur Struktur dreidimensionaler turbulenter Grenzschichten gestützt. Es ist nahe liegend, die Anwendung der für zweidimensionale Grenzschichten weit verbreiteten Beziehungen auf den dreidimensionalen Fall auszudehnen. Verglichen mit dem zweidimensionalen Fall erweist sich die Wahl geeigneter Geschwindigkeitsprofile für dreidimensionale turbulente Grenzschichten dennoch als deutlich komplizierter. Ursache ist die höhere Komplexität dieses Grenzschichttyps. Generell muss daher festgestellt werden, dass die Universalität der in der Literatur bisher formulierten Profile für dreidimensionale geringer ist als für zweidimensionale Grenzschichten ist.

In vergleichbaren Arbeiten, welche das Entrainmentverfahren nutzen (siehe z. B. H. W. Stock, 1977), wird für die Hauptströmung das zweiparametrische Geschwindigkeitsprofil nach D. Coles (3.2.19) verwendet. Durch Subtraktion des Geschwindigkeitswertes am Grenzschichttrand kann aus ihm das Außengesetz abgeleitet werden (3.2.20).

$$\frac{u(z)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln[z^+] + C + \frac{1}{\kappa} w(\pi, \eta) \quad (3.2.19)$$

$$\frac{u(z) - u_\delta}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln[\eta] + w(\pi, \eta) - w(\pi, 1) \right\} \quad (3.2.20)$$

Bereits bei der Analyse der Eigenschaften der Integralgleichungen (Kap. 2.4) wurde ein Potenzansatz für das Hauptströmungsprofil verwendet. Alternativ zu (3.2.19) wird daher auch das Potenzprofil (3.2.21) für die Hauptströmung Verwendung finden. Der Exponent  $1/n$  wird als variabel und Funktion der lokalen Grenzschichtgrößen verstanden.

$$\frac{u}{u_\delta} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad (3.2.21)$$

Bereits M. S. Ölcmen und R. L. Simpson (1992) stellten fest, dass die Querstromkomponente mit keinem der von ihnen untersuchten Ansätze in jedem Fall gleichermaßen gut beschrieben werden kann. Generell schlussfolgerten sie jedoch, dass wenn eine Entscheidung bezüglich eines



Querstromprofiles zu fällen ist und dies ist für Integralverfahren immer gegeben, so sollte diese zu Gunsten des Ansatzes von A. Mager (1951) ausfallen. Basierend auf dieser Analyse wird im folgenden der Ansatz von A. Mager favorisiert.

Den Erkenntnissen von A. T. Degani et al. (1993) folgend, wird alternativ der Ansatz für das Querstromprofil nach J. P. Johnston (1960) betrachtet. Analog dem Begriff Mager - Profil wird dieser Ansatz als Johnston - Profil bezeichnet.

Das Mager - Profil hat die Form

$$\frac{v}{u_\delta} = \tan(\beta_0(s, n)) \frac{u}{u_\delta} \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2 \quad (3.2.22)$$

Es greift die Prandtlsche Idee der linearen Abhängigkeit des Querstromprofiles vom Tangens des Verwindungswinkels auf. Im Gegensatz zum Johnston - Profil ist es jedoch rein empirisch. Das Profil gilt für kleine und moderate Werte von  $\tan(\beta_0)$ . Bereits in der Originalarbeit von A. Mager wurde die Anwendbarkeit für ein Intervall von  $0.216 < \tan(\beta_0) < 0.670$  ( $12.2^\circ < \beta_0 < 33.8^\circ$ ) getestet.

J. P. Johnston (1960) hatte durch die Auftragung experimentell bestimmter Geschwindigkeits-profile in Form eines Hodographen erkannt, dass für weite Bereiche des Profiles der Zusammenhang zwischen Haupt- und Querstromprofil linear ist (siehe hierzu Bild 3.2.1). Er unterteilte das Querstromprofil in innere und äußere Zone und gab die folgenden Beziehungen an.

$$\text{Innere Zone} \quad \frac{v}{u_\delta} = \frac{u}{u_\delta} \tan[\beta_0] \quad (3.2.23)$$

$$\text{Äußere Zone} \quad \frac{v}{u_\delta} = B(c_f, \beta_0) \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) \quad (3.2.24)$$

J. P. Johnston konnte zeigen, dass die Vernachlässigung der inneren Zone im Rahmen eines Integralverfahrens akzeptabel ist. Praktisch realisierte Integralverfahren (z. B. Entrainment-verfahren nach H. W. Stock, 1977) zeigen, dass auch mit dieser Vereinfachung eine gute Übereinstimmung von Rechnung und Experiment erzielt wird.

Für einen Vergleich von Mager - und Johnston - Profil werden die Gradienten  $\partial u / \partial z$  und  $\partial u / \partial z$  bestimmt. Aus den Profilen und den genannten Gradienten folgen entsprechend der Definitionen (3.2.2) und (3.2.3) der Strömungswinkel  $\beta_{FA}$  und Winkel zwischen den Gradienten der Geschwindigkeitsverteilungen  $\beta_{FGA}$  (siehe Tabelle 3.2.1). Generell ist festzustellen, dass das Mager - Profil in keinem Grenzschichtbereich kollateral ist. Der Ansatz nach J. P. Johnston zeigt nur für die innere Zone kollaterales Verhalten. Dementsprechend dreht sich beim Mager - Profil der Geschwindigkeitsvektor über der gesamten Grenzschicht-dicke. Beim Johnston - Profil ist nur in der äußeren Zone eine Drehung zugelassen.

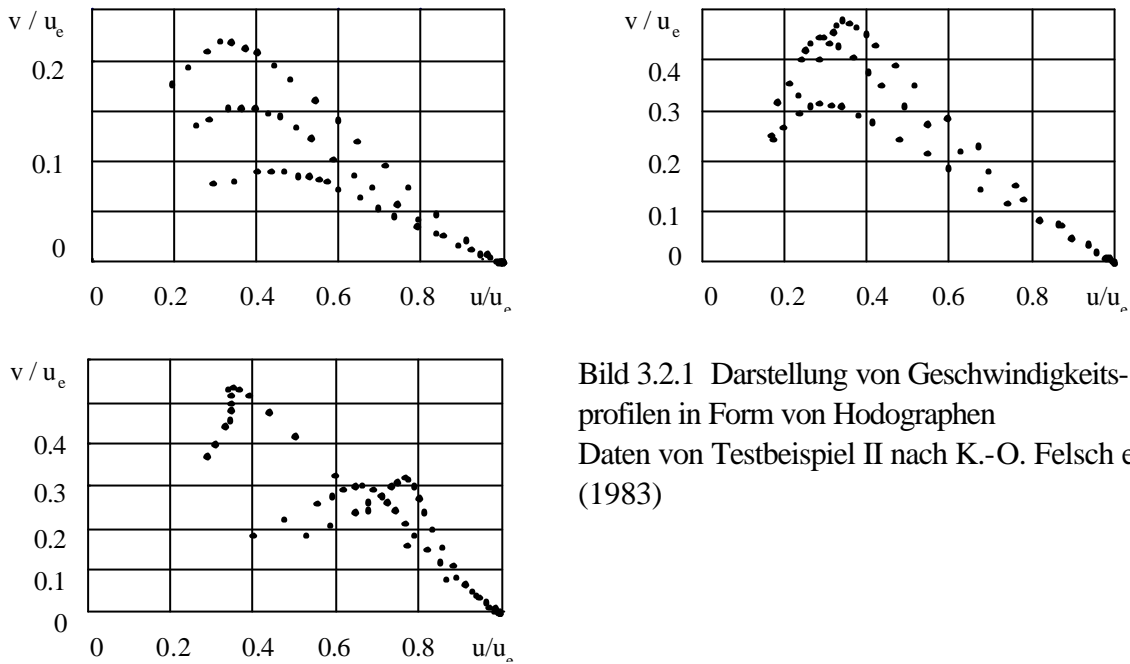


Bild 3.2.1 Darstellung von Geschwindigkeitsprofilen in Form von Hodographen  
Daten von Testbeispiel II nach K.-O. Felsch et al. (1983)

Tabelle 3.2.1 Winkel der Querstromprofile nach Mager und Johnston

	Strömungswinkel $\beta_{FA}$	Winkel zwischen den wandnormalen Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten $\beta_{FGA}$
Mager - Profil	$\arctan\left[\tan[\beta_0](1-\eta)^2\right]$	$\arctan\left[\frac{v}{u} - \frac{2v}{(1-\eta)} \frac{1}{\partial u / \partial \eta}\right]$
Johnston - Profil innere Zone	$\beta_0$	$\beta_0$
Johnston - Profil äußere Zone	$\arctan\left[A\left(\frac{u_\delta}{u} - 1\right)\right]$	$\arctan[-A]$

### 3.3 Zum Dissipationsintegral

Im Gegensatz zu vergleichbaren Integralverfahren (siehe Tabelle 1.2.1) berücksichtigen Dissipationsintegralmethoden das turbulente Fließen über der gesamten Grenzschichtdicke. Ausdruck findet dies in den Dissipationsintegralen, in welche die Schubspannungsprofile eingehen. Für die Algorithmen ergibt sich daraus die Notwendigkeit, die turbulente Schubspannung zu modellieren. Prinzipiell stehen hierzu verschiedene Methoden zur Verfügung (siehe z. B. H. Schlichting, K. Gersten, 1997). Eine weitere Möglichkeit, die Schubspannungsverteilungen direkt aus den Grenzschichtgleichungen mit Hilfe der Geschwindigkeitsprofile zu bestimmen, wurde von W. Hauke (1978) für dreidimensionale Grenzschichten diskutiert. Für den zweidimensionalen Fall wurde diese Idee von W. Bolte (1982) und von M. Buschmann (1996) beruhend auf der Arbeit von A. E. Perry et al. (1994), (Kap. 3.1.2) angewandt.

Betrachtet man die Grenzschichtgleichungen (2.1.12, 13), so ist festzustellen, dass nach Eliminierung von Druck und wandnormaler Geschwindigkeitskomponente vier Unbekannte verbleiben. Diese vier Unbekannten - zwei Geschwindigkeiten und zwei turbulente Schubspannungen - reduzieren sich auf zwei, wenn zwei Gleichungen zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile zum Gleichungssystem (2.1.12, 13) hinzugenommen werden. Dieses Gleichungssystem kann nun nach den Schubspannungen aufgelöst werden.

Bereits in Kapitel 4 wurde festgestellt, dass drei Integralgleichungen hinreichend zum Aufbau eines Dissipationsintegralverfahrens sind. Da neben den integralen Impulsbilanzen als dritte Gleichung die integrale Energiebilanz in Richtung der  $x$ -Koordinate zur Anwendung kommt (siehe Kap. 4.2), wird hier nur die Ableitung der turbulenten Schubspannung in Richtung der  $x$ -Koordinate angegeben. In äquivalenter Form kann jedoch auch die Schubspannungs-verteilung in Richtung der  $y$ -Komponente ermittelt werden.

Nach Umformen und Entdimensionieren von (2.1.12) folgt als Bestimmungsgleichung der turbulenten Schubspannung in  $x$ -Richtung Gleichung (3.3.25). Fasst man die Koeffizienten, welche vor den eckigen Klammern der Zeilen drei und vier von (3.3.25) stehen, zusammen, so werden zwei Clouserparameter (3.3.26, 27) gefunden. Für laminare Grenzschichten finden diese Parameter des Druckgradienten ihre physikalische Entsprechung in der Hagenzahl. Ein weiterer Clouserparameter (3.3.28) wird mit der fünften Zeile von (3.3.25) gefunden.

Prinzipiell ist festzustellen, dass sowohl die mathematischen Eigenschaften (Integrabilität) als auch die physikalischen Eigenschaften (Parameterabhängigkeit) der Schubspannungsverteilung von den entsprechenden Eigenschaften der Geschwindigkeitsprofile bestimmt werden. Betrachtet man die Schubspannungsverteilung (3.3.25) näher, so finden sich drei Gruppen von Termen. Die erste Gruppe beinhaltet Integrale der Geschwindigkeitskomponenten (erste und zweite Zeile von 3.3.25 jeweils dritter Term). In der zweiten Gruppe sind Terme zu finden, die Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten berücksichtigen (erste und zweite Zeile von 3.3.25, jeweils erster und zweiter Term). In der dritten Gruppe werden alle Terme der dritten und vierten Zeile sowie der erste Term der fünften Zeile von (3.3.25) zusammengefasst. Für die Wand ( $\eta = 0$ ) werden alle Terme der rechten Seite von Gl. (3.3.25) Null bis auf  $\tau_{wx} / \tau_w$ .

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\delta}{\tau_w/\frac{\rho}{2}u_e^2} \left[ \underbrace{\left( \frac{u}{u_e} \right) \int_0^\eta \frac{\partial(u/u_e)}{\partial x} d\eta - \frac{1}{h_1} \int_0^\eta \frac{\partial(u/u_e)^2}{\partial x} d\eta + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_0^\eta \left( \left( \frac{v}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right)^2 \right) d\eta} \right] \\
& -\frac{2\delta}{\tau_w/\frac{\rho}{2}u_e^2} \left[ \left( \frac{u}{u_e} \right) \int_0^\eta \frac{\partial(v/u_e)}{\partial y} d\eta - \frac{1}{h_2} \int_0^\eta \frac{\partial(uv/u_e^2)}{\partial y} d\eta - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \int_0^\eta \left( \frac{uv}{u_e^2} - \left( \frac{u_\delta v_\delta}{u_e^2} \right) \right) d\eta \right] \\
& -\rho\delta \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ \underbrace{\left( \frac{u}{u_e} \right) \int_0^\eta \left( \frac{u}{u_e} \right) d\eta - \frac{2}{h_1} \int_0^\eta \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 d\eta} \right] \\
& -\rho\delta \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial y} \left[ \left( \frac{u}{u_e} \right) \int_0^\eta \left( \frac{v}{u_e} \right) d\eta - \frac{2}{h_2} \int_0^\eta \left( \frac{uv}{u_e^2} \right) d\eta \right] \\
& -\rho\delta\eta \frac{u_e}{\tau_w} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{u_\delta}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{v_\delta}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \right] + \frac{\tau_{wx}}{\tau_w} = \frac{\tau_x}{\tau_w}
\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Clouserparameter

$$\beta_x = -\rho\delta_1 \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad -\rho\delta \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \beta_x \frac{\delta}{\delta_1} \tag{3.3.26}$$

$$\beta_y = -\rho\delta_1 \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial y} = \frac{\delta_1}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad -\rho\delta \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial y} = \beta_y \frac{\delta}{\delta_1} \tag{3.3.27}$$

$$\beta = -\rho\delta \frac{u_e}{\tau_w} \frac{\partial u_e}{\partial y} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{u_\delta}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} + \frac{1}{h_2} \frac{v_\delta}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \right] \tag{3.3.28}$$

Die erste und zweite Gruppe von Termen sind für die Diskussion der Eigenschaften der Schubspannungsverteilung von besonderem Interesse. Über die erste Gruppe fließen die Parameter der Geschwindigkeitsprofile direkt in die Schubspannung ein. Dies ist gleichbedeutend mit einer Abhängigkeit von den lokalen Parametern (z. B. Wandschubspannungsbeiwert, Grenzschichtdicke, Verwindungswinkel etc.) der Grenzschicht. Diese Gruppe entspricht dem ersten Term in (3.1.22). Die Terme der zweiten Gruppe liefern eine Abhängigkeit der Schubspannungsverteilung von den Gradienten der Parameter der Geschwindigkeitsverteilungen. Diese Abhängigkeit ist als Einfluss stromauf liegender

Ereignisse zu verstehen. Vergleichbar den zweidimensionalen Grenzschichten ist hier von einem Nichtäquilibrium zu sprechen (zweiter Term in 3.1.22). Der Nichtäquilibriumsscharakter wird sowohl über die Wandlung des Hauptströmungsprofils als auch des Querströmungsprofils in die Schubspannungsverteilung getragen. Die dritte Gruppe erfasst die Abhängigkeit der Schubspannungsverteilung vom Druckgradienten.

Zur Erläuterung der oben gegebenen Ausführungen werden die Geschwindigkeitsverteilungen nach Coles / Lewkowicz (3.1.20, 21) für das Hauptströmungsprofil und nach Mager (3.3.22) für das Querströmungsprofil als Ausgangspunkt genommen. Diese Geschwindigkeitsverteilungen sind über die Beziehungen aus Tabelle 2.2.3 mit den Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung verknüpft. Neben dem Winkel  $\lambda$  zwischen der x-Koordinate und der Richtung der Außenstromlinie s finden sich die vier Basisvariablen  $\delta$ ,  $\pi$ ,  $\beta_0$  und S sowie deren Ableitungen in der Schubspannungsverteilung (3.3.25). Mit den Abkürzungen (3.3.29 - 32) wird die Schubspannung  $\tau_x / \tau_w$  dann in der unter (3.3.33) angegebenen Form geschrieben. Eine Abhängigkeit vom Gradienten  $\partial \beta_0 / \partial x$  besteht nicht, da das Querstromprofil in keinem Term mit Gradienten in x-Richtung in der Schubspannungsverteilung (3.3.25) steht.

$$S = \frac{u_e}{u_\tau} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \quad (3.3.29)$$

$$\zeta_x = \delta S \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad ; \quad \zeta_y = \delta S \frac{\partial \pi}{\partial y} \quad (3.3.30)$$

$$\psi_y = \delta S \frac{1}{\cos^2[\beta_0]} \frac{\partial \beta_0}{\partial y} \quad (3.3.31)$$

$$\xi_x = \delta S \frac{\partial S}{\partial x} \quad ; \quad \xi_y = \delta S \frac{\partial S}{\partial y} \quad (3.3.32)$$

$$\frac{\tau_x}{\tau_w} = f\left(\underline{\eta}, \underline{\pi}, \underline{S}, \beta_0, \underline{\beta}_x, \beta_y, \underline{\zeta}_x, \zeta_y, \psi_y, \underline{\xi}_x, \xi_y, h_1, h_2, \lambda\right) \quad (3.3.33)$$

Das Dissipationsintegral  $c_{Dx}$  folgt per Definition aus dem Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung und dem wandnormalen Gradienten der Schubspannungsverteilung (3.3.25). Aus (2.2.2) folgt mit  $k = 1$  :

$$c_{Dx} = \frac{2}{\rho} \frac{1}{u_e^2} \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \frac{\partial(\tau_x / \tau_w)}{\partial \eta} d\eta \quad (3.3.34)$$

Ausgehend von der Schubspannungsverteilung und der Geschwindigkeitsverteilung in x-Richtung (3.1.20 - 22) hat es die Form (3.3.35). Es verfügt über die gleichen Eigenschaften bezüglich der Abhängigkeit von den Basisvariable und deren Gradienten. Das Dissipationsintegral spiegelt damit ebenfalls den Nichtäquilibriumsscharakter der Grenzschicht wieder.

$$\underline{c_{Dx}} = f\left(\underline{\pi}, \underline{S}, \beta_0, \underline{\beta_x}, \beta_y, \underline{\zeta_x}, \zeta_y, \psi_y, \underline{\xi_x}, \xi_y, h_1, h_2, \lambda\right) \quad (3.3.35)$$

Die Ableitung der einzelnen Terme der Schubspannungsverteilung (3.3.33) ist nur mit Hilfe von Computeralgebra möglich. Unter den konkreten Bedingungen der Kombination der Geschwindigkeitsprofile nach Coles / Lewkowicz und Mager sind diese Terme jedoch alle analytisch darstellbar. Die Integration des Produktes von Hauptströmungsprofil und Schubspannungsverteilung, welche zur Ableitung des Dissipationsintegrals  $\mathcal{Q}_x$  erforderlich ist, ist damit ebenfalls analytisch möglich. Eine Abschätzung der Anzahl der Terme des Schubspannungsprofils zeigt jedoch, dass es sich um mehr als 2000 handelt. Der daraus für den konkreten Algorithmus eines Integralverfahrens folgende Berechnungsaufwand wäre erheblich. Es wird daher auf eine traditionelle Methode der Schließungsannahme für Berechnungsverfahren dreidimensionaler Grenzschichten zurückgegriffen (siehe z. B. B. Mughal, M. Drela 1993). Grundannahme ist dabei, dass sich das Hauptströmungsprofil einer dreidimensionalen Grenzschicht ähnlich dem Grenzschichtprofil einer zweidimensionalen Grenzschicht verhält. Natürlich gilt dies insbesondere für schwache Querstromkomponenten. Es liegt daher nahe, das Dissipationsintegral (Anhang 3), welches für zweidimensionale Grenzschichten aus (3.3.25) abgeleitet wurde, auch für dreidimensionale Grenzschichten anzuwenden.

### 3.4 Alternative Geschwindigkeitsprofile

In den Kapiteln 3.1 und 3.2 wurden die für den Aufbau von Integralverfahren notwendigen Geschwindigkeitsprofile turbulenter Grenzschichten diskutiert. Es konnte gezeigt werden, dass das logarithmische Gesetz eine akzeptable Grundlage für diesen Typ von Grenzschichtberechnungsverfahren ist. Dennoch muss festgestellt werden, dass, so lange dieses Gesetz bereits Anwendung findet, auch Zweifel bezüglich seiner Universalität bestehen.

Bereits C. B. Millikan erwähnte 1938, dass, wenn strenge Selbstähnlichkeit des Geschwindigkeitsprofiles mit  $u_\delta$  als charakteristischer Geschwindigkeit verlangt wird, ein Potenzgesetz anstatt des logarithmischen Gesetzes abgeleitet werden kann. In der Literatur sind mehrere Ansätze (A. E. Gill, 1968; H. Tennekes, 1968; W. B. Bush, F. E. Fendell 1972; N. Afzal, K. Yajnik, 1973; N. Afzal, 1976; R. Panton, 1990) zu finden, welche den klassischen Zweischichtenansatz (siehe Kap. 3.1) auf Terme höherer Ordnung erweitern. Mit diesen Ansätzen wird nach zusätzlichen Termen des zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofiles bezüglich der wandnormalen Koordinate und der Reynoldszahl gesucht. Die Diskussion bezüglich des funktionalen Zusammenhanges, welche das zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofil einer kanonischen turbulenten Grenzschicht beschreibt, fand mit den Arbeiten von G. I. Barenblatt (1993), G. I. Barenblatt et al. (2000 a, b), W. K. George, L. Castillo (1997) sowie J. Österlund (1999) und J. Österlund et al. (2000) einen neuen Höhepunkt. Kernpunkt dieser Debatte sind alternative Potenzgesetze mit Parametern, welche a priori als von der Reynoldszahl abhängig betrachtet werden. Unter kanonischen turbulenten Grenzschichten werden dabei Grenzschichten verstanden, die weder von einem Druckgradienten, noch von einer Wandrauheit beziehungsweise einer Außenturbulenz beeinflusst werden.

Falls sich das logarithmische Gesetz tatsächlich als falsch oder als nur eingeschränkt gültig erweisen sollte, wären die Folgen für die Turbulenzmodellierung weit reichend. Die Berechnung der Umströmung von Flugzeugen, Schiffen oder Straßenfahrzeugen setzt in Wandnähe sehr oft auf Ähnlichkeitshypothesen, deren wichtigste das logarithmische Gesetz ist. Nahezu alle dieser Modelle Dissipationsintegralverfahren eingeschlossen sind so kalibriert, dass sie den logarithmischen Zusammenhang für das turbulente Grenzschichtprofil reproduzieren. Fehler dieses als universell angesehenen Zusammenhanges würden im Grunde genommen bedingen, dass all diese Turbulenzmodelle ebenfalls fehlerhaft wären. Die folgenden Ausführungen wenden sich daher dem Vergleich von alternativen Potenzgesetzen mit dem klassischen logarithmischen Gesetz zu.

#### 3.4.1 Ähnlichkeitstheoretische Grundlagen

Die Eigenschaften einer kanonischen Grenzschicht sind an einem bestimmten Ort der wandnormalen Koordinate durch folgende fünf Parameter charakterisiert : den Stoffeigenschaften Dichte  $\rho$  und kinematische Zähigkeit  $\nu$ , dem Abstand  $z$  des betrachteten Ortes von der Wand, einer externen Längenskale  $\Lambda$  (Rohrdurchmesser, Grenzschichtdicke etc.) und der Wandschubspannung  $\tau_w$ . Das Geschwindigkeitsprofil beziehungsweise dessen Gradient in wandnormaler Richtung werden dann wie folgt beschrieben.

$$u = f_1(\tau_w, \rho, z, \nu, \Lambda) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f_2(\tau_w, \rho, z, \nu, \Lambda) \quad (3.4.1)$$

Eine Dimensionsanalyse zeigt, dass die genannten Parameter mit einem LMT-System dargestellt werden können (L - Länge, M - Masse, T - Zeit).

$$[\tau_w] = \frac{M}{LT^2} ; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3} ; \quad [v] = \frac{L^2}{T} ; \quad [z] = [\Lambda] = L \quad (3.4.2)$$

Die drei Parameter  $v$ ,  $\rho$  und  $z$  sind unabhängige Größen und können nicht durch die anderen Parameter dargestellt werden. Die verbleibenden Parameter Wandschubspannung  $\tau_w$  und die externe Längenskala  $\Lambda$  sind abhängige Größen. Ihre Darstellung mit den unabhängigen Parametern lautet :

$$[\tau_w] = \frac{[v]^2 [\rho]^1}{[y]^2} ; \quad [\delta]=[y] \quad \text{and} \quad [u] = \frac{[\tau_w]^{1/2}}{[\rho]^{1/2}} ; \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{[\tau_w]^{1/2}}{[\rho]^{1/2} [y]^1} \quad (3.4.3)$$

Entsprechend dem  $\Pi$ -Theorem der Dimensionsanalyse (K. Gersten, H. Herwig 1992) bestimmt sich die Zahl der dimensionslosen Produkte der Parameter, welche für eine Funktion zur Beschreibung des dimensionslosen Geschwindigkeitsgradienten benötigt werden, aus der Differenz der Gesamtzahl der Parameter und der Zahl der Parameter mit unabhängiger Dimension. Für das vorliegende Problem werden damit zwei Parameterprodukte  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  benötigt.

$$\Pi = \frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \Phi(\Pi_1, \Pi_2) \quad (3.4.4)$$

$$\Pi_1 = \frac{v}{u_\tau z} ; \quad \Pi_2 = \frac{\Lambda}{z} ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.4.5)$$

Das Reziproke von  $\Pi_1$  ist die lokale Reynoldszahl  $z^+$ . Eine globale Reynoldszahl stellt der Quotient

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \text{Re}_\Lambda = \frac{u_\tau \Lambda}{v} \quad (3.4.6)$$

dar. Damit folgt

$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \Phi(z^+, \text{Re}_\Lambda) \quad (3.4.7)$$

Unter der Annahme vollständiger Selbstähnlichkeit im Bezug auf lokale und globale Reynoldszahl erhält man

$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \Phi(z^+ \rightarrow \infty, \text{Re}_\Lambda \rightarrow \infty) = \text{konstant} \quad (3.4.8)$$



Dabei bedeutet  $z^+$ ,  $Re_\Lambda \rightarrow \infty$  nicht, dass  $u \rightarrow \infty$  bzw.  $z, \Lambda \rightarrow \infty$  gilt, sondern dass die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften verschwindend klein sind ( $v \rightarrow 0$ ). Nach Integration folgt aus (3.4.8)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + C_{\log} \quad (3.4.9)$$

Der Vorteil dieser Analyse gegenüber dem traditionellen Überlappungsansatz ist, dass nur eine Annahme getroffen wird : Die Außenzone ist ohne Einfluss auf das Wandgesetz ( $Re_\Lambda \rightarrow \infty$ ). Ein weiteres einfaches physikalisches Argument : Viskositätseffekte spielen für die Turbulenz keine Rolle ( $z^+ \rightarrow \infty$ ) stellt die Verbindung zum Prandtlschen Mischungswegkonzept her (siehe hierzu auch P. Bradshaw, 1994). Es bleibt jedoch die Frage, ob diese Annahmen auch für endliche Reynoldszahlen, wie sie in der Ingenieurpraxis auftreten, physikalisch akzeptabel sind.

Eine Alternative zum logarithmischen Gesetz (3.4.9) stellte I. G. Barenblatt (1993) vor. Unter der Annahme unvollständiger Ähnlichkeit im Bezug auf die lokale Reynoldszahl und fehlender Selbstähnlichkeit bezüglich der globalen Reynoldszahl folgt aus (3.4.8)

$$\frac{z}{u_\tau} \frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{u_\tau z}{v} \right)^\alpha \Phi(Re_\Lambda) \quad (3.4.10)$$

Der Term  $(u_\tau z / v)^\alpha$  wurde von I. G. Barenblatt (1993) mit der speziellen Zielstellung eingeführt, ein Potenzgesetz zu reproduzieren. Integration führt zu

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\alpha} \Phi(Re_\Lambda) (z^+)^\alpha + B_{Pow} \quad (3.4.11)$$

Allgemein wird angenommen, dass die Konstante  $B_{Pow}$  gleich Null ist. Zusammenfassen der Koeffizienten führt zu der Schreibweise des Potenzgesetzes, wie es von I. G. Barenblatt (1993) vorgeschlagen wurde.

$$u^+ = C_{Pow} (z^+)^\alpha \quad (3.4.12)$$

Ein dritter Weg wird von W. K. George, L. Castillo (1997) eingeschlagen. Ausgangspunkt ist die Grenzschichtgleichung der kanonischen Grenzschicht, einmal geschrieben für die innere Zone

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\overline{u'v'} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (3.4.13)$$

und zum anderen für die Außenzone

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [-\overline{u'v'}] - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\overline{u'^2} - \overline{v'^2}] \right\} \quad (3.4.14)$$

Die jeweils vernachlässigten Terme verschwinden exakt nur für den Fall  $Re \rightarrow \infty$ . Vollständige Ähnlichkeit kann daher nur für diesen Fall gefunden werden. Lösungen der vollständigen Grenzschichtgleichung, so die Argumentation von W. K. George, L. Castillo (1997), werden daher immer eine, wenn auch schwache Reynoldszahlabhängigkeit aufweisen. Das daraus abgeleitete *Asymptotic Invariance Principle* führt zu einem Wandgesetz der Form

$$u^+ = C_{\text{pow}} (z^+ + a^+)^{\alpha} \quad (3.4.15)$$

Wiederum sind die Parameter  $\alpha$  und  $C_{\text{pow}}$  Funktionen der Reynoldszahl. Der Parameter  $a^+$ , eine Konstante, wurde aus mathematischen Gründen eingeführt und später als Ausdruck einer Mesolayer interpretiert. Unter Mesolayer wird dabei eine Schicht unterhalb  $y^+ \approx 300$  verstanden, in welcher die Reynoldsschen Spannungen im Gegensatz zum Geschwindigkeitsprofil nicht frei von Viskositätseinflüssen sind. Die Idee einer solchen Schicht und das  $a^+$  diese erfasst, ist umstritten (R. Panton, 2000 a). Das Konzept einer Mesolayer wird deshalb hier nicht weiter betrachtet.

Die Potenzgesetze (3.4.12) und (3.4.15) sollen innere Potenzgesetze genannt werden, um sie klar von einem weiteren Potenzgesetz abzugrenzen. In I. G. Barenblatt et al. (2000 a) wird ein äußeres Potenzgesetz vorgeschlagen, dessen Geltungsbereich sich an den des inneren Potenzgesetzes (3.4.12) anschließen soll. Es ist ebenfalls in inneren Variablen formuliert und lautet

$$u^+ = B_{\text{pow}} (z^+)^{\beta} \quad (3.4.16)$$

Das logarithmische Gesetz (3.4.9), die inneren Potenzgesetze (3.4.12) und (3.4.15) sowie das äußere Potenzgesetz (3.4.16) stellen unabhängig voneinander gewonnene Ansätze zur Beschreibung des zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofils dar. Keine der Herleitungen weist dabei physikalische oder mathematische Vereinfachungen auf, die vordergründig als fehlerbehaftet zu bezeichnen wären. Es ist damit kaum möglich, aus einer physikalischen Argumentation heraus eines der Gesetze als das richtige zu bestimmen. Die Bewertung und Verifikation der Ansätze soll daher durch den Vergleich von Experimenten mit diesen Gesetzen erfolgen. Hierfür ist eine möglichst breite Datenbasis erforderlich.

Tabelle 3.4.1 listet die im weiteren verwendeten Messungen kanonischer turbulenter Grenzschichten auf. Die insgesamt 109 Profile wurden von sechs unabhängigen Gruppen von Experimentatoren und Numerikern gewonnen und repräsentieren ein Intervall der Reynoldszahl, gebildet mit der Impulsverlustdicke von 500 bis 27320.

### 3.4.2 Vergleich von logarithmischem Gesetz und innerem Potenzgesetz für kanonische turbulente Grenzschichten

Häufig wird die Gültigkeit des logarithmischen Gesetzes (3.4.9) durch eine halblogarithmische Darstellung von experimentell bestimmten Geschwindigkeitsprofilen aufgezeigt. Im Bereich der Gültigkeit des logarithmischen Gesetzes bilden die Messwerte dann eine Gerade mit dem Anstieg  $1/\kappa$ . In Bild 3.4.1 a ist eine solche Auftragung der Daten von J. Österlund (1999) vorgenommen worden. Zum Vergleich wurde eine Gerade mit den

Parametern  $\kappa = 0.384$  und  $C_{\log} = 4.08$ , so wie sie von diesem Autor propagiert werden, eingezeichnet (siehe auch J. Österlund et al. 2000). Eine vergleichbar universelle Darstellung

Tabelle 3.4.1 Datensätze kanonischer turbulenter Grenzschichten  
SHW ... Eindrahtsonde, XW ... Zweidrahtsonde

Autor	Zahl der Profile	Mess-technik	$Re_{\delta_2}$ Intervall	Symbol für logarithmisches Gesetz	Symbol für inneres Potenzgesetz
J. Meinert (2000)	6	SHW	2442 - 6167	?	?
J. Österlund (1999)	70	SHW	2530 - 27320	■	■
H. Osaka et al. (1998)	14	SHW, XW	860 - 6040	▲	▲
K.-S. Choi (1998)	1	SHW	1140	★	★
P. E. Roach, D. H. Brierley (1990)	16	SHW	500 - 2700	●	●
P. Spalart (1989)	2	DNS	640, 1410	◆	◆

des inneren Potenzgesetzes erhält man durch Logarithmieren und Umformen von (3.4.12).

$$\ln[u^+] = \alpha \ln[y^+] + \ln[C_{Pow}] \quad (3.4.17)$$

Im doppeltlogarithmischen Diagramm fallen dann die Daten im Bereich der Gültigkeit des inneren Potenzgesetzes in einer Geraden mit dem Anstieg 1 zusammen. In Bild 3.4.1 b sind die Geschwindigkeitsprofile von J. Österlund (1999) unter Verwendung der Parameter  $\alpha$  and  $C_{Pow}$ , wie sie in I. G. Barenblatt (2000 b) angegeben wurden, entsprechend (3.4.17) dargestellt.

In Ergänzung zur Darstellung der Grenzschichtprofile kann die Darstellung des normierten Gradienten dieser Profile zum Vergleich von logarithmischem und Potenzgesetz herangezogen werden. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die Bestimmung des Gradienten aus den experimentellen Daten zu legen. Diese sind zumeist nichtäquidistant in wandnormaler Richtung aufgenommen, was die Verwendung einer entsprechenden Gradientenformel bedingt. Eine solche Beziehung wird von C. Grossmann, H.-G. Roos (1994) angegeben.

$$\frac{du^+}{dy^+} \approx \beta_1 \frac{u_i^+ + u_{i-1}^+}{y_i^+ + y_{i-1}^+} + \beta_2 \frac{u_{i+1}^+ + u_i^+}{y_{i+1}^+ + y_i^+} \quad (3.4.18 a)$$

$$\beta_1 = \frac{y_{i+1}^+ - y_i^+}{y_{i+1}^+ - y_{i-1}^+} \quad \beta_2 = \frac{y_i^+ - y_{i-1}^+}{y_{i+1}^+ - y_{i-1}^+} \quad (3.4.18 b)$$

Die normierten Gradienten der Geschwindigkeitsprofile selbst folgen für das logarithmische Gesetz aus (3.4.9)

$$GL = \kappa \frac{d u^+}{d y^+} = \frac{1}{y^+} \quad (3.4.19)$$

und für das Potenzgesetz aus (3.4.12)

$$GP = \frac{1}{\alpha C_{Pow}} \frac{1}{(y^+)^{\alpha}} \frac{d u^+}{d y^+} = \frac{1}{y^+} \quad (3.4.20)$$

In einem doppeltlogarithmischen Diagramm zeigen diese normierten Gradienten durch das Zusammenfallen der experimentellen Werte in einer Geraden mit dem Anstieg  $-1$  jeweils an, ob ein logarithmischer Bereich beziehungsweise ein Potenzbereich existiert. Die Bilder 3.4.1 c und 3.4.1 d zeigen die normierten Gradienten für den Datensatz von J. Österlund (1999).

Ein Vergleich der Bilder 3.4.1 a und b einerseits sowie 3.4.1 c und andererseits zeigt, dass diese Formen der Darstellung nicht hinreichend sind, um entweder das logarithmische Gesetz oder das innere Potenzgesetz zu favorisieren. Für beide Zusammenhänge wird ein Zusammenfallen mit den rot eingezeichneten Geraden und damit ein Bereich des logarithmischen Gesetz beziehungsweise des inneren Potenzgesetzes gefunden. Zudem ist es schwer, die Grenzen dieser Bereiche zu bestimmen.

### 3.4.3 Die Methode der bezogenen Differenzen

Zur Bewertung von Messgrößen oder theoretischen Ansätzen wird häufig der Begriff des Fehlers herangezogen. In ähnlicher Weise kann eine bezogene Differenz genutzt werden, um die beiden Ansätze logarithmisches Gesetz und inneres Potenzgesetz zu bewerten. Zuerst wurde dies von M. V. Zagarola et al. (1997) für Profile der Rohrströmung durchgeführt. Die dort verwendete Größe der *fractional difference* eignet sich sowohl zur Validierung von theoretisch vorhergesagten Geschwindigkeitsprofilen als auch zur Bestimmung der in diesen Profilen auftretenden Parameter.

Unter der bezogenen Differenz des Geschwindigkeitsprofiles wird die auf den experimentell bestimmten Wert  $u_{exp}^+$  bezogene Differenz zwischen theoretisch vorhergesagtem Wert  $u_{log}^+$  beziehungsweise  $u_{pow}^+$  an der gleichen  $y^+$ -Position verstanden.

$$FD_{log} = 100\% * \left[ 1 - \frac{u_{log}^+}{u_{exp}^+} \right] \quad (3.4.21)$$

$$FD_{Pow} = 100\% * \left[ 1 - \frac{u_{Pow}^+}{u_{exp}^+} \right] \quad (3.4.22)$$

Analog dazu wird die bezogene Differenz des Gradienten des Geschwindigkeitsprofiles definiert.

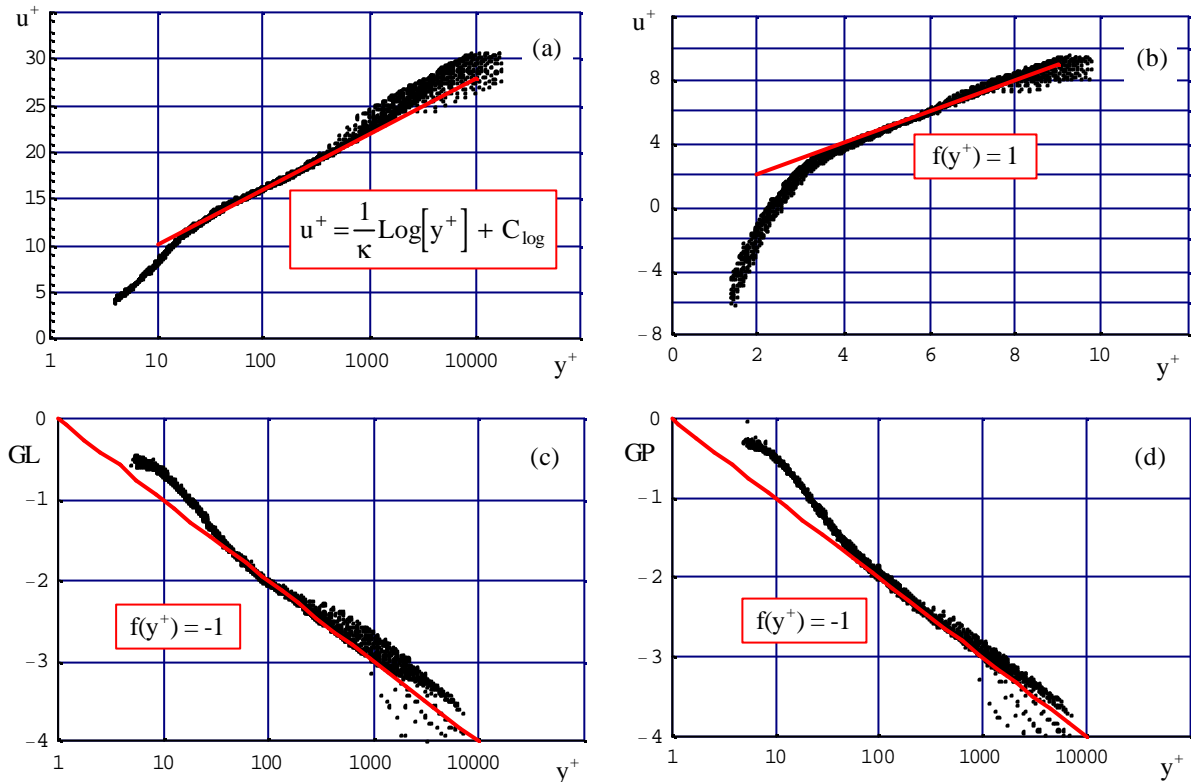


Bild 3.4.1 Darstellung von experimentellen Geschwindigkeitsprofilen und deren normierter Gradienten für den Datensatz von J. Österlund (1999)  
 Bild a : Halblogarithmische Darstellung der Geschwindigkeitsprofile  
 Bild b : Doppeltlogarithmische Darstellung der Geschwindigkeitsprofile  
 Bild c : Doppeltlogarithmische Darstellung des normierten Gradienten der Geschwindigkeitsprofile unter der Annahme der Gültigkeit des logarithmischen Gesetzes mit den Parametern  $\kappa = 0.384$  und  $C_{\log} = 4.080$   
 Bild d : Wie Bild (c) jedoch unter der Annahme der Gültigkeit des inneren Potenzgesetzes unter Verwendung der Parameter  $\alpha$  und  $C_{\text{Pow}}$  wie sie von I. G. Barenblatt et al. (2000 b) angegeben werden

$$\text{FDG}_{\log} = 100\% * \left[ 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y^+} \middle/ \left( \frac{du^+}{dy^+} \right)_{\text{exp}} \right] \quad (3.4.23)$$

$$\text{FDG}_{\text{Pow}} = 100\% * \left[ 1 - \alpha C_{\text{Pow}} (y^+)^{\alpha-1} \middle/ \left( \frac{du^+}{dy^+} \right)_{\text{exp}} \right] \quad (3.4.24)$$

Je kleiner die bezogene Differenz ist, umso besser werden die experimentellen Daten des betrachteten Gesetzes reproduziert. Die bezogene Differenz des Geschwindigkeitsprofils wird für jedes analysierte Profil individuell dargestellt. Die in den beiden Gesetzen jeweils auftretenden Parameter werden so variiert, dass ein maximal großes Intervall, in welchem die FD-Werte kleiner als  $\pm 0.5\%$  sind, gefunden wird. Diese Prozedur stellt sicher, dass a priori

Keine Annahmen bezüglich einer eventuell vorhandenen Reynoldszahlabhängigkeit der Parameter und der Intervalle, in welchen die Gesetze gültig sind, getroffen werden. Die FDG -

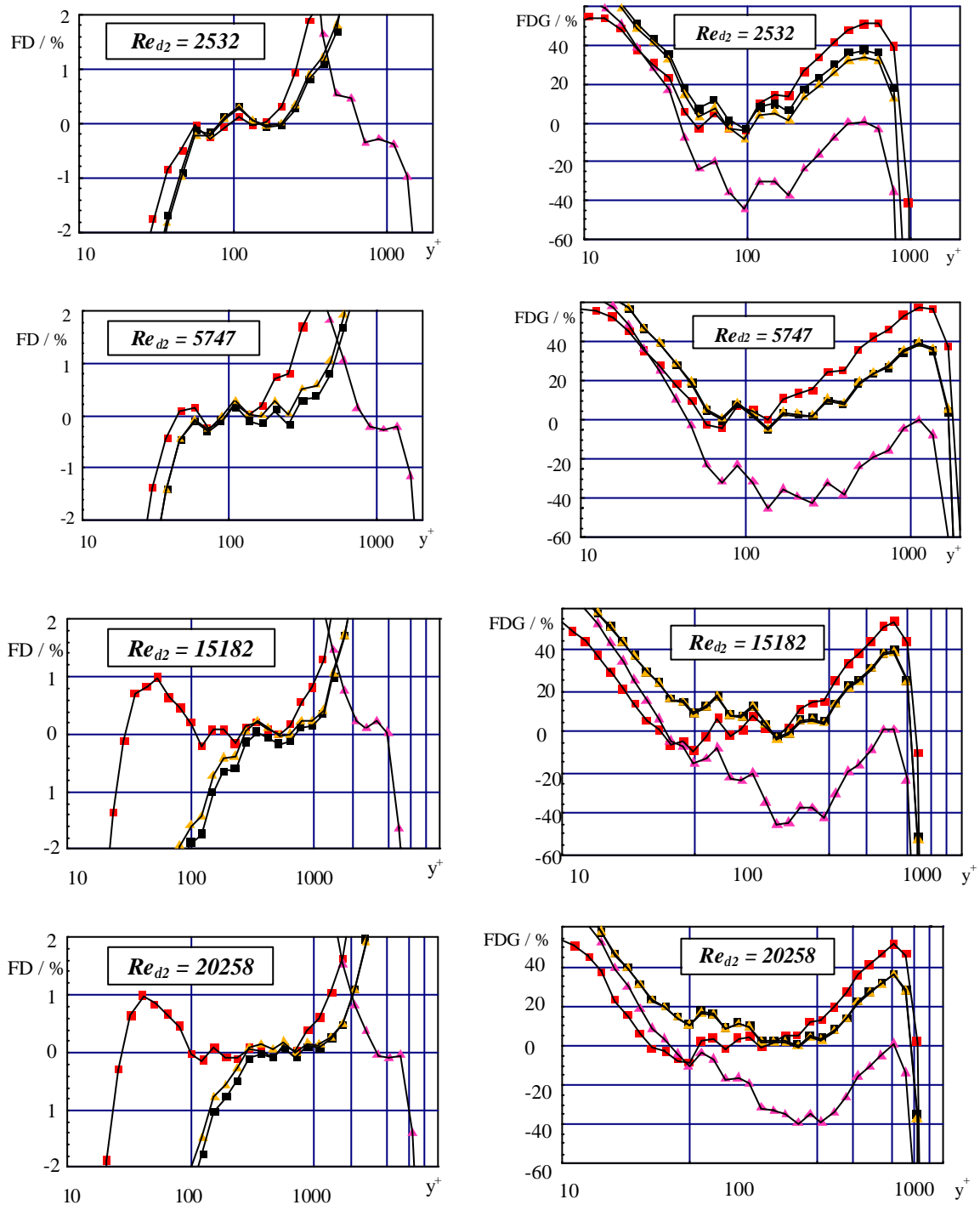


Bild 3.4.2 Bezogene Differenzen des Geschwindigkeitsprofils (FD) sowie des Gradienten des Geschwindigkeitsprofils (FDG) für ausgewählte Werte der Reynoldszahl, gebildet mit der Impulsverlustdicke  $Re_{d_2}$

📁 Datensatz : J. Österlund (1999)

▲ Logarithmisches Gesetz mit individuell bestimmten  $\kappa$  - und  $C_{\log}$  - Werten

■ Inneres Potenzgesetz mit individuell bestimmten  $\alpha$  - und  $C_{\text{Pow}}$  - Werten

Inneres Potenzgesetz mit Parametern nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b)

Äußeres Potenzgesetz mit Parametern nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b)

Verteilung wird als zusätzliche Information zur Validierung der aus den FD-Verteilungen gefundenen Ergebnisse benutzt. Zur Illustration dieser Methode sind in Bild 3.4.2 für vier Reynoldszahlen, gebildet mit der Impulsverlustdicke die FD - sowie die FDG - Verteilungen dargestellt. Die Parameter  $\kappa$  und  $C_{\log}$  des logarithmischen Gesetzes sowie  $\alpha$  und  $C_{\text{Pow}}$  des Potenzgesetzes wurden dabei in der angegebenen Weise optimiert. Zusätzlich sind die FD - und FDG - Verteilungen von innerem und äußerem Potenzgesetz mit den Parametern nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b) dargestellt.

### 3.4.4 Ergebnisse der Analyse

Vergleicht man die FD - Verteilungen von logarithmischem Gesetz und Potenzgesetz in Bild 3.4.2 so wird augenblicklich klar, dass diese Zusammenhänge nicht die gleichen Regionen der klassischen Überlappungszone überdecken. Dennoch kann für beide Zusammenhänge ein Bereich identifiziert werden, in welchem die FD - Werte beider Gesetze vergleichbar klein sind. In dieser gemeinsamen Region ist es nicht möglich, direkt von den FD - bzw. von den FDG - Verteilungen ausgehend zu entscheiden, welches von beiden Gesetzen zu favorisieren ist. Diese Region wird im weiteren gemeinsame Region (COR engl. : *common region*) genannt. Ihre Lage und ihre Ausdehnung hängen offenbar von der Reynoldszahl ab.

Eine kleine Region direkt unterhalb der COR wird sehr gut vom logarithmischen Gesetz wiedergegeben. Das Potenzgesetz liefert hier eine schlechtere Reproduktion der experimentellen Daten. Deshalb soll diese Region im folgenden rein logarithmische Region (PLR engl. : *pure logarithmic region*) genannt werden. Oberhalb der COR findet sich eine Region, welche durch das Potenzgesetz besser approximiert wird. Diese Region soll daher reine Potenzregion (PPR engl. : *pure power region*) genannt werden. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Resultaten, welche R. Panton (2000 a, b) mittels einer asymptotischen Analyse fand. Es wird festgestellt, dass die hier mit der Methode der bezogenen Differenzen gefundenen Werte für  $\alpha$  und  $C_{\text{Pow}}$  sehr gut mit den entsprechenden Werten von I. G. Barenblatt et al. (2000 b), welche mittels statistischer Analysen gefunden wurden, übereinstimmen (Bild 3.4.3). Eine Verwechslung von innerem und äußerem Potenzbereich ist damit ausgeschlossen.

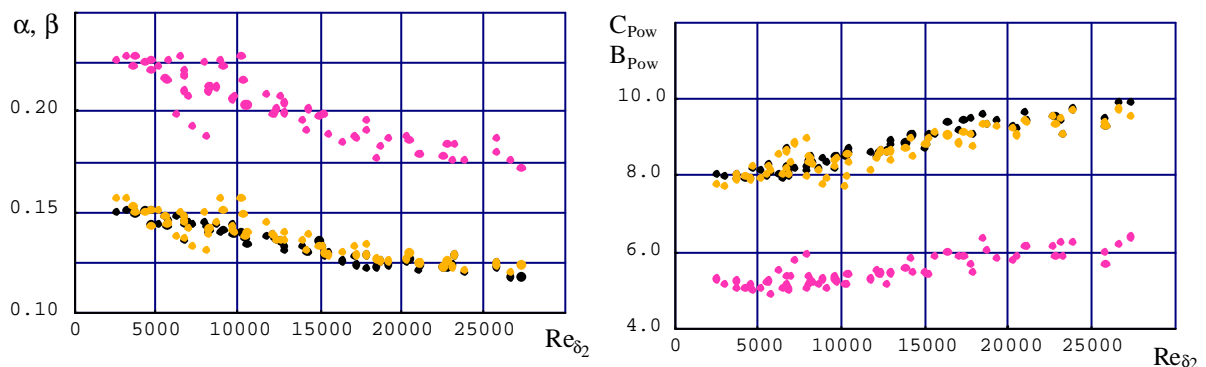


Bild 3.4.3 Parameter der Potenzgesetze für den Datensatz von J. Österlund (1999)

- Inneres Potenzgesetz mit individuell bestimmten  $\alpha$  - und  $C_{\text{Pow}}$  - Werten unter Verwendung der Methode der bezogenen Differenzen
- Inneres Potenzgesetz mit Parametern nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b)
- Äußeres Potenzgesetz mit Parametern nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b)

Die komplette Potenzregion (COR plus PPR) überbedeckt den äußeren Bereich der Überlappungszone und den inneren Bereich der Wakeregion (Bild 3.4.2). Hieraus können zwei Schlussfolgerungen gezogen werden (M. Buschmann, M. Gad-el-Hak, 2000):

- (I) Da sich die Wakezonen von kanonischer turbulenter Grenzschicht, turbulenter Rohrströmung und turbulenter Kanalströmung unterscheiden, ist es nicht möglich,  $\alpha$  - bzw.  $C_{Pow}$  - Werte, welche aus Daten einer dieser Strömungen bestimmt wurden, auf eine andere Strömung anzuwenden.
- (II) Der übliche Ansatz für eine Funktion, welche die Wakeregion beschreibt, erfordert einen Wakeparameter (z. B. A. K Lewkowicz, 1982). Dieser Wakeparameter ist offensichtlich eine Funktion der Reynoldszahl  $Re_{\delta_2}$  (M. Gad-el-Hak, P. R. Bandyopadhyay, 1994). Jede andere Funktion, das innere Potenzgesetz eingeschlossen, welche diese Region beschreibt, sollte daher ebenfalls eine Reynoldszahlabhängigkeit zeigen.

Wie bereits festgestellt, kann für die gemeinsame Region keiner der beiden Ansätze favorisiert werden. Um diese Feststellung zu untermauern, wird eine einfache statistische Betrachtung angestellt. Hierzu wird das mittlere bezogene Abstandsquadrat zwischen Messwert und theoretischem Wert für jedes individuelle Grenzschichtprofil gebildet.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n FD_i^2} \quad (3.4.25)$$

Die Variable n ist dabei die Anzahl der im betrachteten Intervall liegenden Messwerte. Der RMS - Wert sollte klein sein im Falle, dass das korrekte Gesetz angewandt wurde. Er ist dann nur durch den experimentellen Fehler bestimmt. Wird ein falsches Gesetz zur Bildung der FD - Werte herangezogen, so wird der RMS - Wert signifikant größer sein als der des richtigen Gesetzes. Eine zusammenfassende Darstellung der RMS - Verteilungen aller betrachteten Grenzschichtprofile gibt Bild 3.4.4. Die Darstellung erfolgt einmal über einer linearen und einmal über einer logarithmischen Auftragung der Reynoldszahl  $Re_{\delta_2}$ . Die halblogarithmische Darstellung hebt dabei insbesondere den Bereich niedriger Reynoldszahl hervor.

Ein bemerkenswert gutes Zusammenfallen der RMS - Verteilungen von logarithmischem Gesetz und Potenzgesetz wird für die gemeinsame Region (COR) gefunden. Dies unterstützt die Feststellung, dass in dieser Region keinem der Gesetze der Vorzug zu geben ist. In der PLR liefert das logarithmische Gesetz über dem gesamten Reynoldszahlbereich kleinere RMS - Werte als das Potenzgesetz. Im Gegensatz sind in der PPR kleinere RMS - Werte für das Potenzgesetz zu beobachten. Allerdings verbessert sich das logarithmische Gesetz mit wachsender Reynoldszahl ohne jedoch die RMS - Werte des Potenzgesetzes zu erreichen. Für die logarithmische Region (PLR plus COR) zeigt sich die Überlegenheit des logarithmischen Gesetzes. Infolge des Einflusses der COR sind jedoch die RMS - Werte des Potenzgesetzes hier kleiner als in der PLR. Entsprechendes gilt in der Potenzregion (COR plus PPR) bezüglich des logarithmischen Gesetzes.



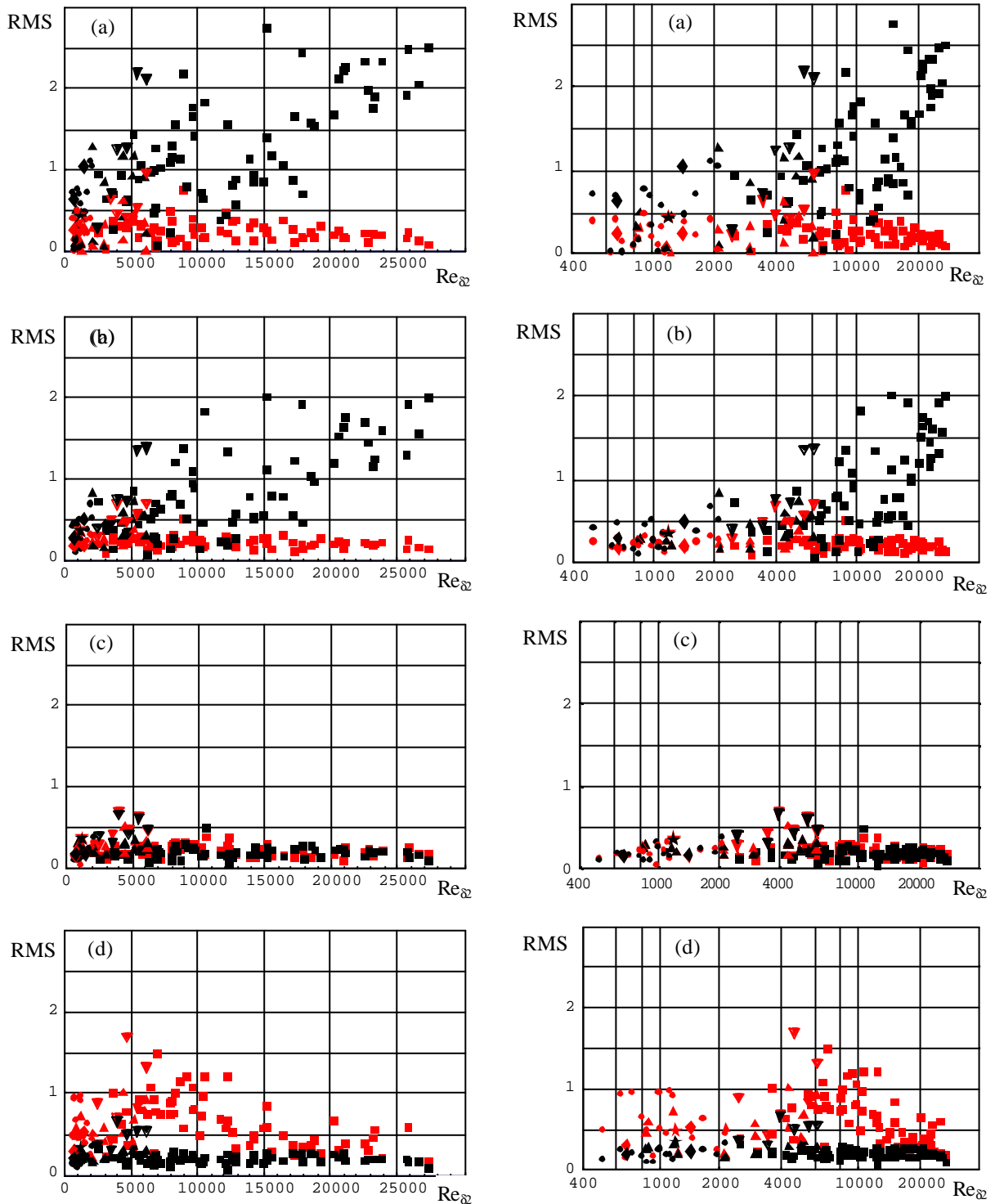


Bild 3.4.4 RMS - Verteilungen für logarithmisches Gesetz und inneres Potenzgesetz  
 linke Spalte : lineare Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 rechte Spalte : halblogarithmische Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 Die Symbole folgen Tabelle 3.4.1  
 (a) Rein logarithmische Region (PLR) (b) Logarithmische Region (PLR plus COR)  
 (c) Gemeinsame Region (COR) (d) Potenzregion (COR plus PPR)

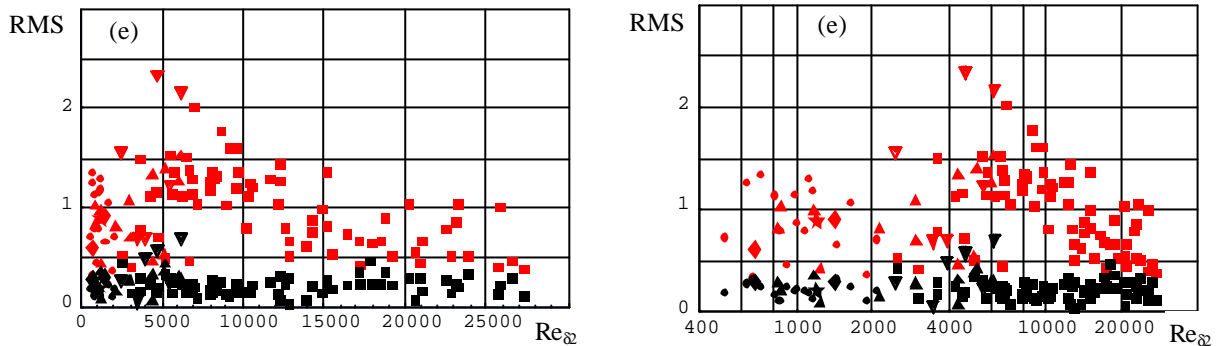


Bild 3.4.4 Fortsetzung von vorangegangener Seite (Bildunterschrift siehe dort)  
(e) Reine Potenzregion (PPR)

Bild 3.4.5 zeigt die Parameter, welche beim Anpassen der Daten an das logarithmische Gesetz beziehungsweise das Potenzgesetz gefunden wurden. Alle vier Parameter -  $\kappa$ ,  $C_{\log}$ ,  $\alpha$  und  $C_{\text{Pow}}$  - hängen von der Reynoldszahl ab, jedoch in unterschiedlichem Maße. Während der Koeffizient  $C_{\text{Pow}}$  und die Potenz  $\alpha$  im ganzen Reynoldszahlbereich eine Abhängigkeit zeigen, scheinen die Parameter des logarithmischen Gesetzes Konstanten zuzustreben. Oberhalb  $Re_{\delta z} \approx 10000$  werden diese konstanten Werte mit  $\kappa = 0.384$  bzw.  $C_{\log} = 4.171$  erreicht. Diese asymptotischen Werte liegen sehr nahe an den Werten, welche von J. Österlund et al. (2000) mit  $\kappa = 0.384$  bzw.  $C_{\log} = 4.080$  für  $Re_{\delta z} > 6000$  und  $y^+ > 200$ ,  $\eta < 0.15$  gefunden wurden. Die oft in der Literatur (siehe z. B. H. Osaka et al., 1998) zu findenden Werte  $\kappa \approx 0.410$  und  $C_{\log} \approx 4.900 - 5.100$  werden für kleine  $Re_{\delta z}$  - Werte bestätigt. Im Gegensatz dazu können die Parameter  $\kappa = 0.436$  und  $C_{\log} = 6.130$ , welche von M. V. Zagarola et al. (1997) für die Rohrströmung gefunden wurden, nicht bestätigt werden. Bezüglich des inneren Potenzgesetzes wird festgestellt, dass dessen Parameter, welche hier mit der Methode der bezogenen Differenzen bestimmt wurden, mit den unabhängig davon ermittelten  $\alpha$  - und  $C_{\text{Pow}}$  - Werten nach I. G. Barenblatt et al. (2000 b) sehr gut übereinstimmen. Offensichtlich finden sowohl das logarithmische Gesetz als auch das innere Potenzgesetz eine gewisse Bestätigung. Es ist daher von Interesse, die Grenzen und Ausdehnung beider Gesetze zu betrachten.

In Bild 3.4.6 sind die Grenzen und die Ausdehnung des logarithmischen Bereiches (PLR plus COR) sowie die Grenzen und die Ausdehnung des Potenzbereiches (COR plus PPR) dargestellt. Die Grenzen werden dabei jeweils dort gefunden, wo die Approximation mit dem logarithmischen Gesetz bzw. dem Potenzgesetz einen Wert der bezogenen Differenz FD von  $\pm 0.5\%$  überschreitet. Es erfolgt jeweils eine Auftragung in inneren und in äußeren Koordinaten.

Wie die Bilder 3.4.6 a, b zeigen, sind die Grenzen von logarithmischem Bereich und Bereich des inneren Potenzgesetzes offensichtlich nicht identisch. Fast im gesamten betrachteten Reynoldszahlbereich liegen die Grenzen des Potenzbereiches oberhalb derer des logarithmischen Bereiches. Alle Grenzen bewegen sich mit wachsender Reynoldszahl von der Wand weg. Diese Bewegung ist jedoch oberhalb von  $Re_{\delta z} \gtrsim 4000 - 6000$  für die beiden Gesetze unterschiedlich. Während die Grenzen des Potenzgesetzes im gesamten Reynoldszahlbereich konvergieren, divergieren die Grenzen des logarithmischen Bereiches. Der Grund für letzteres ist das schnellere Anwachsen der äußeren Grenze des logarithmischen Bereiches im Vergleich zum Anwachsen der

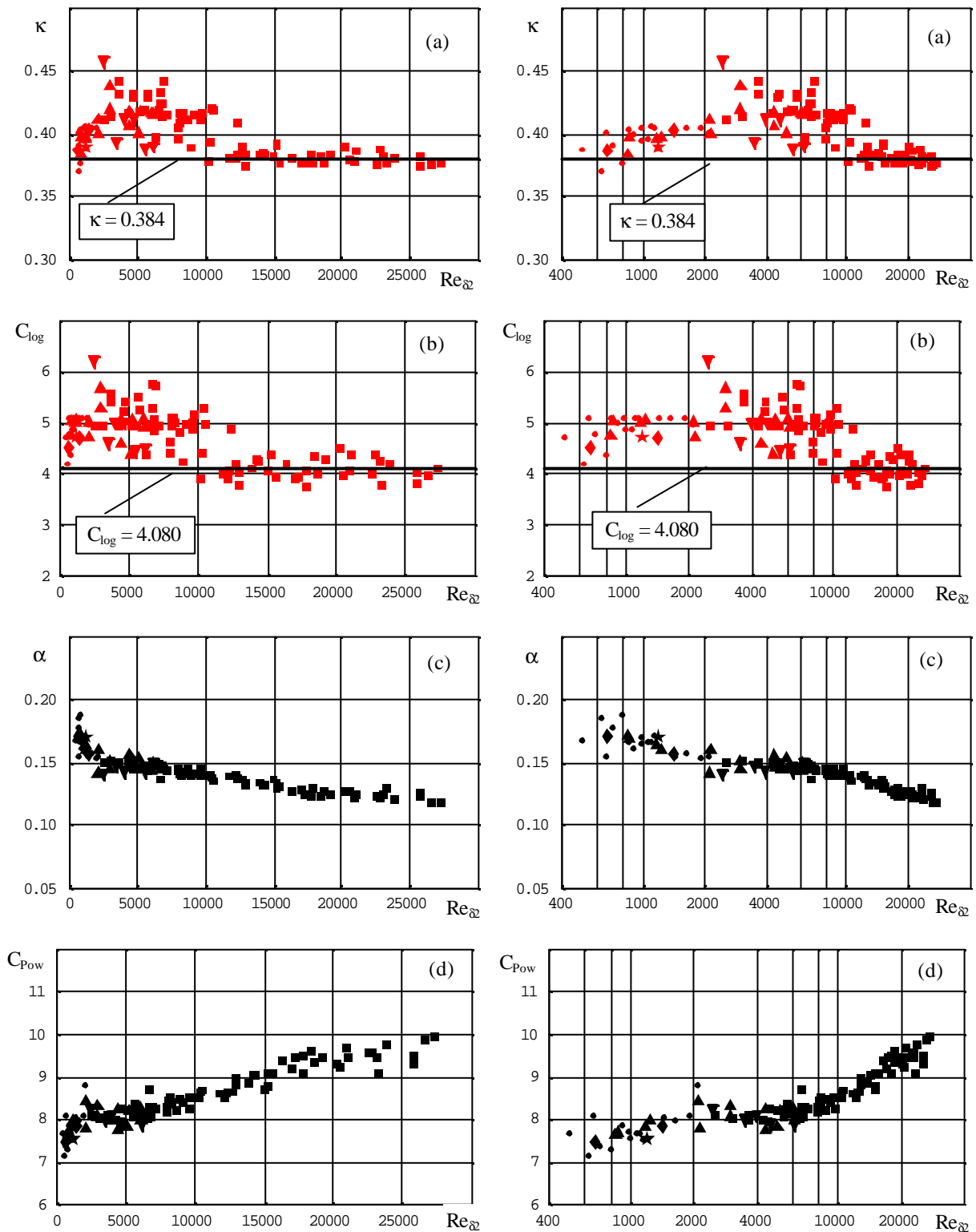


Bild 3.4.5 Parameter des logarithmischen Gesetzes und des inneren Potenzgesetzes  
 linke Spalte : lineare Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 rechte Spalte : halblogarithmische Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 Die Symbole folgen Tabelle 3.4.1

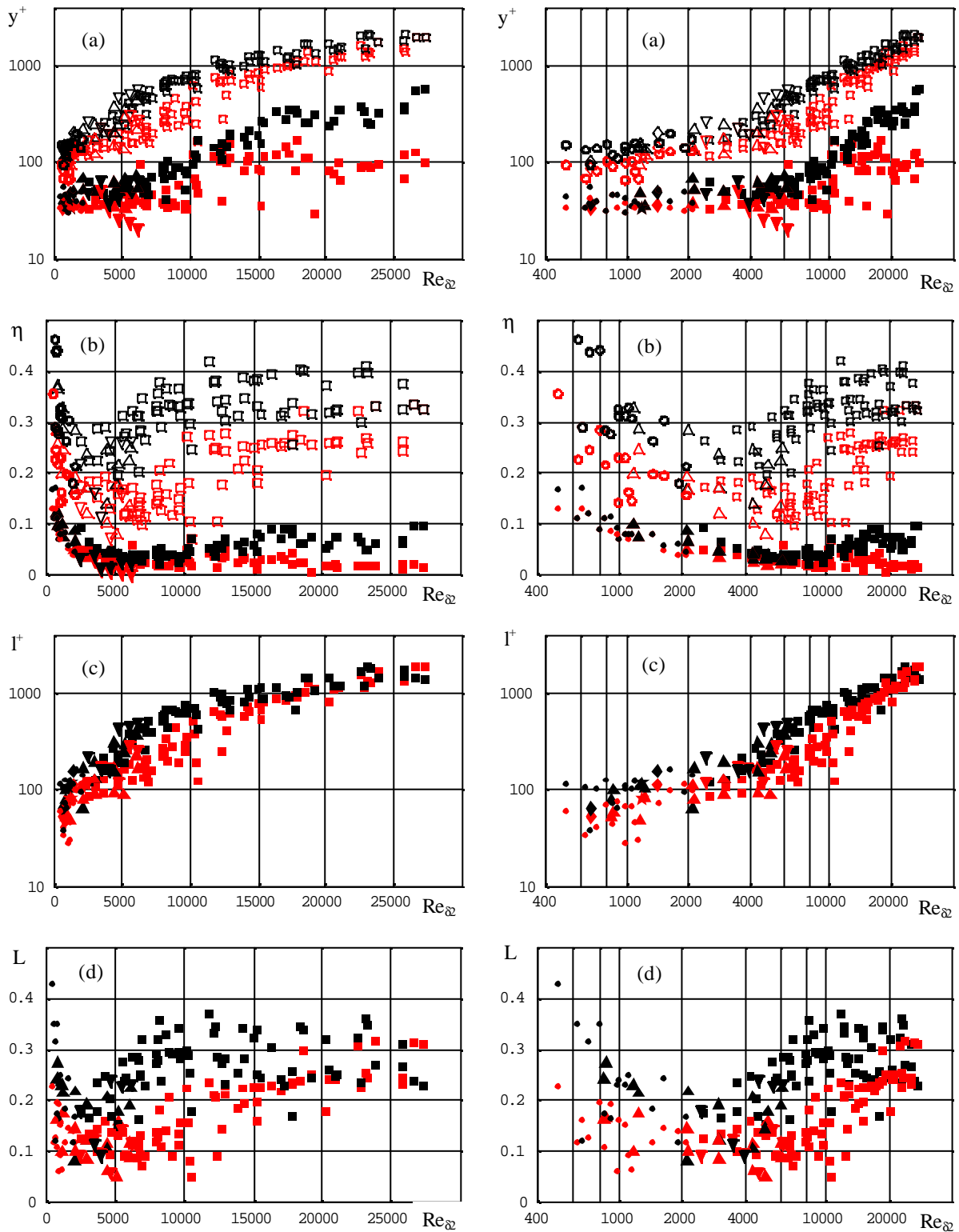


Bild 3.4.6 Grenzen und Ausdehnung des logarithmischen Gesetzes und des inneren Potenzgesetzes  
 linke Spalte : lineare Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 rechte Spalte : halblogarithmische Darstellung über der Reynoldszahl  $Re_{\delta z}$   
 Die Symbole folgen Tabelle 3.4.1, leere Symbole stellen jeweils die äußeren Grenzen und gefüllte Symbole die inneren Grenzen dar.  
 Fortsetzung siehe folgende Seite

Bild 3.4.6 Fortsetzung von vorheriger Seite

- (a) Obere und untere Grenzen in inneren Koordinaten
- (b) Obere und untere Grenzen in äußeren Koordinaten
- (c) Ausdehnung  $l$  des logarithmischen Bereiches (PLR plus COR) und des inneren Potenzbereiches in inneren Koordinaten  $\Gamma^+ = l u_r / \nu$
- (d) Ausdehnung  $l$  des logarithmischen Bereiches (PLR plus COR) und des inneren Potenzbereiches in äußeren Koordinaten  $L = l / \eta$

entsprechenden Grenze des inneren Potenzgesetzes. Die innere Grenze des logarithmischen Bereiches erreicht zudem oberhalb von  $Re_{\delta 2} \approx 10000$  einen konstanten Wert von  $y^+ \approx 100$ . Auf der anderen Seite wandert die innere Grenze des Potenzgesetzes stark von der Wand weg. Die Ausdehnung der logarithmischen Region (PLR plus COR) zeigt dies deutlich an. Obwohl sie kleiner als die Potenzregion ist (COR plus PPR), wächst sie schneller (Bild 3.4.6 c).

Die Darstellungen in äußeren Variablen lassen ein komplizierteres Bild erkennen. Die inneren Grenzen beider Regionen sind unterhalb  $Re_{\delta 2} \approx 10000$  in etwa gleich. Oberhalb dieser Reynoldszahl erreicht die innere Grenze des logarithmischen Gesetzes einen nahezu konstanten Wert. Die entsprechende Grenze des inneren Potenzgesetzes beginnt sich jedoch von der Wand wegzubewegen. Für  $Re_{\delta 2} \lesssim 4000$  bewegen sich die äußeren Grenzen beider Gesetze mit wachsender Reynoldszahl zur Wand hin. Oberhalb dieser Reynoldszahl wandern die äußeren Grenzen wieder nach außen. Während diese Tendenz für das logarithmische Gesetz den gesamten betrachteten Reynoldszahlbereich über anhält, erreicht die äußere Grenze des inneren Potenzgesetzes oberhalb  $Re_{\delta 2} \approx 10000$  einen nahezu konstanten Wert. Zusammengefasst führt dieses Verhalten dazu, dass das Wachstum der logarithmischen Region anhält, während die Ausdehnung der inneren Potenzregion oberhalb  $Re_{\delta 2} \gtrsim 8000$  einen nahezu konstanten Wert annimmt.

Von der klassischen Theorie (R. Panton, 2000 a) her ist bekannt, dass das asymptotische Verhalten aller inneren Gesetze logarithmischer Natur sein sollte. Angenommen, das innere Potenzgesetz beschreibt partiell die innere Region des Grenzschichtprofiles, so sollte bereits bei hohen Reynoldszahlen die Einhüllende aller individuellen Profile näherungsweise eine logarithmische Gerade darstellen. Auf die Existenz einer solchen logarithmischen Einhüllenden hat zuerst I. G. Barenblatt (1993) hingewiesen. Ein direkter Test anhand experimenteller Daten kann mit den Daten von J. Österlund (1999) durchgeführt werden. Hierzu wird das innere Potenzgesetz (3.4.12) umgeschrieben :

$$F(y^+, u^+, Re_{\delta 2}) = C_{Pow}(Re_{\delta 2}) * (y^+)^{\alpha(Re_{\delta 2})} - u^+ \quad (3.4.26)$$

Die Punkte der Einhüllenden  $(y_E^+, u_E^+)$  werden dann als die Lösung des folgenden Gleichungssystems gefunden.

$$F(y^+, u^+, Re_{\delta 2}) = 0 \quad \frac{\partial F(y^+, u^+, Re_{\delta 2})}{\partial Re_{\delta 2}} = 0 \quad (3.4.27)$$

Die zur Lösung notwendigen Gradienten

$$\frac{\partial \alpha(\text{Re}_{\delta_2})}{\partial \text{Re}_{\delta_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial C_{\text{Pow}}(\text{Re}_{\delta_2})}{\partial \text{Re}_{\delta_2}} \quad (3.4.28)$$

werden unter Verwendung der Gradientenformel für nichtäquidistante Stützstellen (3.4.18) bestimmt. Alle Wertepaare  $(z_E^+, u_E^+)$ , welche außerhalb der betrachteten inneren Potenzregion (COR plus PPR) lagen, wurden als fehlerhaft eliminiert. Von den ursprünglich 70 Profilen wurden 56  $(z_E^+, u_E^+)$ -Wertepaare bestimmt. Wie Bild 3.4.7 zeigt, liegen diese Wertepaare in der halblogarithmischen Darstellung tatsächlich nahezu auf einer Geraden. Die Einhüllende des inneren Potenzgesetzes ist damit eine logarithmische Funktion. Eine entsprechende Kurvenapproximation liefert

$$u_E^+ = \frac{1}{\kappa_E} \ln(z_E^+) + C_E \quad (3.4.29)$$

mit  $\kappa_E = 0.365$  und  $C_{\log} = 3.339$ . Ein Vergleich dieser Einhüllenden mit dem logarithmischen Gesetz unter Verwendung der Parameter nach J. Österlund et al. (2000) zeigt, dass beide Beziehungen sehr eng beieinander liegen (Bild 3.4.7). Dennoch muss betont werden, dass beide Beziehungen nicht a priori identisch sind. Das klassische logarithmische Gesetz ist eine Beschreibung des zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofils der kanonischen turbulenten Plattengrenzschicht und wird aus einer Überlappung von Reihenansätzen für die innere und die äußere Zone der Grenzschicht abgeleitet. Die mit Gleichung (3.4.29) beschriebene Einhüllende hingegen ist eine mathematische Eigenschaft des inneren Potenzgesetzes, welche anhand von experimentellen Befunden aufgezeigt wurde.

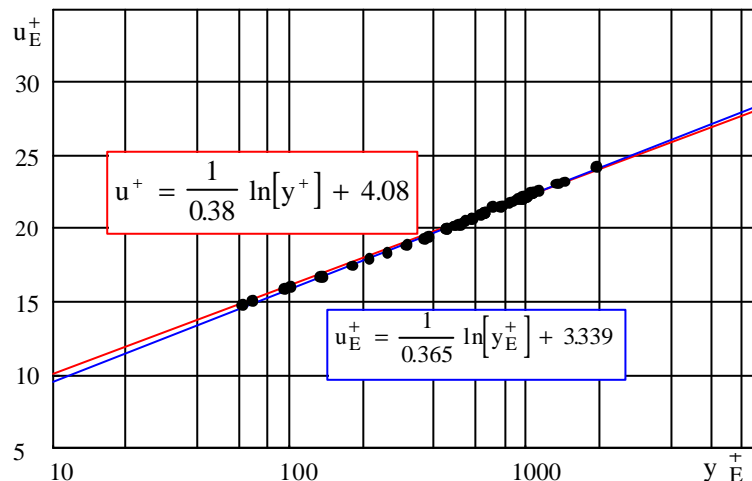


Bild 3.4.7 Einhüllende der individuellen Kurven des inneren Potenzgesetzes  
 Datensatz von J. Österlund (1999)  
 rot : logarithmisches Gesetz nach J. Österlund et al. (2000)  
 blau : Einhüllende Gl. (3.4.29)

Die FD - und FDG - Darstellungen in Bild 3.4.2 zeigen neben logarithmischem Gesetz und Potenzgesetz auch das äußere Potenzgesetz (3.4.16) nach I. G. Barenblatt et al. (2000 a, b).

Zur Berechnung dieser Verteilungen wurden nur die in I. G. Barenblatt et al. (2000 b) angegebenen Originalwerte für  $B_{Pow}$  und  $\beta$  verwendet. Die Vermutung, dass inneres und äußeres Potenzgesetz nicht ineinander übergehen, folgt hauptsächlich aus den FD - Darstellungen. Es existiert eine signifikante Lücke bezüglich  $y^+$  zwischen beiden Zusammenhängen. Diese Lücke kann nur schwer aufgezeigt werden, wenn sich die Darstellung der Messwerte auf die üblichen halblogarithmischen Diagramme beschränken. Zudem werden vom äußeren Potenzgesetz nur drei oder vier Punkte erfasst. Dies legt den Gedanken nahe, dass es sich bei dieser Beziehung mehr um eine Approximation als um einen universellen Zusammenhang handelt.

### 3.4.5 Schlussfolgerungen

Die Analyse kanonischer turbulenter Plattengrenzschichten wird in den folgenden vier Punkten zusammengefasst und mit Bild 3.4.8 illustriert.

- (1) Weder das logarithmische Gesetz noch das innere Potenzgesetz sind im gesamten Bereich der Überlappungszone gültig. Es wird eine gemeinsame Region gefunden, in welcher beide Gesetze vergleichbar kleine bezogene Differenzen aufweisen. In dieser Region kann keinem der beiden Gesetze der Vorzug gegeben werden.
- (2) Unterhalb der gemeinsamen Region existiert eine Zone, in welcher das logarithmische Gesetz die Experimente besser reproduziert als das innere Potenzgesetz. Oberhalb der gemeinsamen Region findet sich eine Zone, wo das innere Potenzgesetz in besserer Übereinstimmung mit dem Experiment als das logarithmische Gesetz ist.

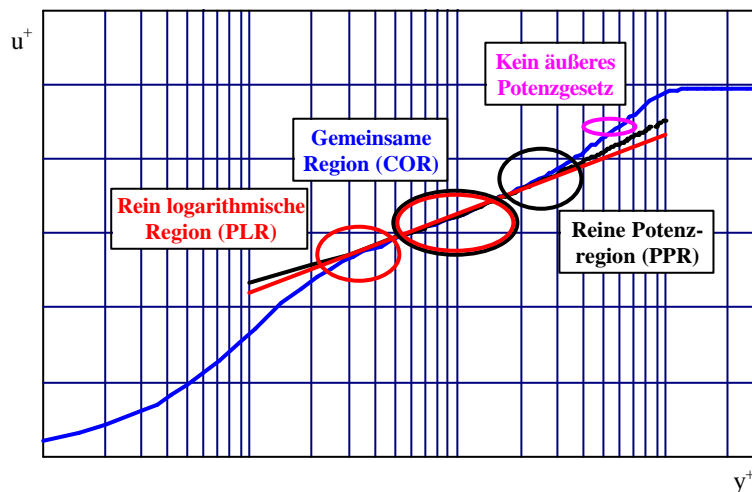


Bild 3.4.8 Schematische Darstellung der unterschiedlichen Regionen des zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofils

- (3) Die Einhüllende aller individuellen Kurven des inneren Potenzgesetzes ist eine logarithmische Gerade. Die gemeinsame Region ist die Zone im Geschwindigkeitsprofil in welcher das innere Potenzgesetz von dieser Einhüllenden abweicht.

- (4) Es gibt offensichtlich keine äußere Potenzregion, wie von I. G. Barenblatt et al. (2000 a, b) vorgeschlagen. Zur Komplettierung des inneren Potenzgesetzes bietet sich analog der Coles'schen Wakefunktion für das logarithmische Gesetz eine spezielle Wakefunktion an (W. K. George, L. Castillo 1997, M. Buschmann, 2001).

Für Dissipationsintegralverfahren ergibt sich damit zusammenfassend, dass das logarithmische Gesetz im Verbund mit einer geeigneten Wakekomponente das zu favorisierende Geschwindigkeitsprofil für die zweidimensionale Grenzschichtrechnung darstellt. Bezüglich der Werte beziehungsweise einer Reynoldszahlabhängigkeit der Parameter  $\kappa$  und  $C_{\log}$  konnten bisher weder experimentelle noch theoretische Arbeiten eine endgültige Aussage liefern. Es ist daher sinnvoll, konstante, in vielen Anwendungsfällen bereits bewährte Parameterkombinationen zu wählen. Die hier vorgestellten Dissipationsintegralverfahren gestatten es dabei zudem durch die verwendeten expliziten Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofile beide Parameter zu variieren.



## 4 Algorithmen

Aus den bisher nur generell hergeleiteten Integralgleichungen sind geeignete Sätze von Gleichungen für konkrete Berechnungsalgorithmen auszuwählen. Es ist dabei physikalisch sinnvoll, die Integralsätze mit den kleinsten Exponenten der Gewichtsfunktion zu wählen. Entsprechende Überlegungen für Integralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten wurden bereits von D. Geropp (1963) vorgestellt. Zusätzlich zu diesen Integralgleichungen sind Parameterbeziehungen für integrale Dicken, Wandschubspannungsbeiwerte, Dissipationsintegrale etc. erforderlich. Das gesamte Gleichungssystem ist in geeigneter Form für die numerische Lösung aufzubereiten und rechentechnisch umzusetzen.

### 4.1 Gleichungssysteme für zweidimensionale Grenzschichtrechnungen

Fast alle bisher bekannt gewordenen Integralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten nutzen zwei Integralgleichungen. Dies gilt sowohl für Dissipationsintegralverfahren als auch für Entrainment- und Impulsmomentenverfahren. Keines der Verfahren verzichtet dabei auf die Impulsgleichung.

Die klassische Form der Dissipationsintegralverfahren (Verfahren A1) folgt direkt aus Gl. (2.2.2) für  $k = 0$  und  $k = 1$ .

$$\begin{array}{l} k = 0 \\ \text{Impulsbilanz} \end{array} \quad \frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12}) \frac{\delta_2}{u_\delta} \frac{du}{dx} = c_f \quad (4.1.1)$$

$$\begin{array}{l} k = 1 \\ \text{Bilanz der} \\ \text{mech. Energie} \end{array} \quad \frac{d\delta_3}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{u_\delta} \frac{du}{dx} = -2 \left( \frac{u_\tau}{u_\delta} \right)^3 \int_0^1 \left( \frac{u}{u_\tau} \right) \frac{\partial(\tau/\tau_w)}{\partial(y/\delta)} d\frac{y}{\delta} = c_{D,2} \quad (4.1.2)$$

Alle zur Lösung dieses Gleichungssystemes erforderlichen Parameterzusammenhänge für den Wandschubspannungsbeiwert, die Formparameter und das Dissipationsintegral werden aus dem Geschwindigkeitsprofil (Gl. 3.1.20 - 21) sowie dem Schubspannungsprofil (Gl. 3.1.22) abgeleitet. Dieses Verfahren wird im weiteren A1 genannt.

Eine zusätzliche Gleichung wird für  $k = 2$  aus (2.2.2) abgeleitet.

$$k = 2 \quad \frac{d\delta_4}{dx} + (4 - 3H_{42}) \frac{\delta_4}{u_\delta} \frac{du}{dx} = -3 \left( \frac{u_\tau}{u_\delta} \right)^4 \int_0^1 \left( \frac{u}{u_\tau} \right)^2 \frac{\partial(\tau/\tau_w)}{\partial(y/\delta)} d\frac{y}{\delta} = c_{D,3} \quad (4.1.3)$$

Diese Integralgleichung hat keine physikalische Bedeutung im Sinne der Gl. (4.1.1, 2). Ihre Kombination mit der integralen Impulsbilanz und der Bilanz der mechanischen Energie führt zum Verfahren A2. Auch für diese Verfahren werden alle benötigten Parameterzusammenhänge aus (3.1.20 - 22) bestimmt.

Die integralen, auf die Grenzschichtdicke bezogenen Größen Verdrängungsdicke  $\delta_1$  (4.1.4), Impulsverlustdicke  $\delta_2$  (4.1.5) und Energieverlustdicke  $\delta_3$  (4.1.6) werden definitionsgemäß aus dem Grenzschichtprofil (3.1.20, 21) gewonnen. Für das Verfahren A2 wird zusätzlich die integrale Dicke  $\delta_4$  (4.1.7) benötigt. Dieser Dicke kann kein physikalischer Begriff zugeordnet werden. Sie ist als Rechengröße zu verstehen. Die Formparameter  $H_{12}$ ,  $H_{32}$  und andere werden aus Kombinationen der Gleichungen (4.1.4) bis (4.1.7) bestimmt.

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{c_1(\pi)}{S} \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{c_1(\pi)}{S} - \frac{c_2(\pi)}{S^2} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\delta_3}{\delta} = 2 \frac{c_1(\pi)}{S} - 3 \frac{c_2(\pi)}{S^2} + \frac{c_3(\pi)}{S^3} \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\delta_4}{\delta} = 3 \frac{c_1(\pi)}{S} - 6 \frac{c_2(\pi)}{S^2} + 4 \frac{c_3(\pi)}{S^3} - \frac{c_4(\pi)}{S^4} \quad (4.1.7)$$

$$c_\kappa(\pi) = \int_0^\delta \left( \frac{u_1 - u}{u_\tau} \right)^\kappa d\eta \quad (4.1.8)$$

Der Zusammenhang für den Wandschubspannungsbeiwert  $c_f$  wird ebenfalls aus dem Geschwindigkeitsprofil (3.1.20, 21) gewonnen. Hierzu wird das Profil für den Grenzschichttrand geschrieben und während der Rechnung für die aktuelle Parameterkombination ( $Re_{\delta_2}$ ,  $H_{32}$ ) ausgewertet. Die Beziehung für das Dissipationsintegral  $c_D$  und dessen Herleitung ist in Kapitel 3.3 näher erläutert (siehe auch Anhang 3).

Für die Rechnung ist ein System gekoppelter, linearer Differentialgleichungen zu lösen. Als Lösungsverfahren fand das Runge-Kutta-Verfahren Anwendung. Die Rechnungen erwiesen sich als durchweg stabil. Für die Programmierung wurde MATHEMATICA 3.0 verwendet.

Die Nachrechnung der Grenzschichtverläufe kann auf zwei Wegen gestartet werden. Die am ersten Messort aus dem Geschwindigkeitsprofil bestimmten Werte der Impuls- und der Energieverlustdicke für das Verfahren A1 sowie zusätzlich  $\delta_4$  für das Verfahren A2 können direkt genutzt werden. Diese Startwerte sind mit Vorgabe der Grenzschichtdicke, des Wakeparameters und des Wandschubspannungsbeiwertes jedoch ebenfalls eindeutig festgelegt. Letzterer Weg wurde für die in Kapitel 5.1 vorgestellten Testrechnungen eingeschlagen.

Zusätzlich zu den genannten Startwerten ist der Gradient des Wakeparameters  $(d\pi/dx)_{\text{Start}}$  am Startpunkt der Rechnung vorzugeben. Nur in wenigen Fällen kann dieser Wert jedoch direkt dem Messmaterial der einzelnen Experimentatoren entnommen werden. Eine mehr oder minder willkürliche Variation dieses Startwertes zeigte jedoch dessen geringen Einfluss auf die Gesamtentwicklung der Rechnung. Es erscheint daher im Falle eines nicht aus den Messergebnissen ableitbaren Wertes für  $(d\pi/dx)_{\text{Start}}$  praktikabel, diesen Gradient Null zu setzen.

Allgemein wurde festgestellt, dass die Startwerte nur bei kurzen Lauflängen einen Einfluss haben, der bis zum Ende der Grenzschichtentwicklung spürbar ist. Im Falle größerer Lauflängen erweist sich die am Grenzschichttrand herrschende Geschwindigkeitsverteilung als dominant.

## 4.2 Gleichungssysteme für dreidimensionale Grenzschichtrechnungen

Wie bereits erwähnt, ist ein Satz von drei Bilanzgleichungen hinreichend für den Aufbau eines Dissipationsintegralverfahrens für dreidimensionale Grenzschichten.

In Abhängigkeit von der Formulierung der Geschwindigkeitsprofile für Haupt- und Querströmungsrichtung beinhaltet das zu lösende Gleichungssystem eine bestimmte Anzahl von Unbekannten. Es ist davon auszugehen, dass die Zahl dieser Unbekannten drei und damit die Zahl der bisher diskutierten Zahl von Integralgleichungen übersteigt. Es erweist sich als notwendig, weitere Gleichungen in das System einzubeziehen. Im folgenden werden hierfür vier Möglichkeiten angegeben.

### (1) Wandreibungsgleichung

Zur Bestimmung einer Wandschubspannungsbeziehung wird das Profil der Hauptströmungsrichtung für den Grenzschichttrand geschrieben. Lautet dieses Profil entsprechend dem Coles-Ansatz (4.2.1), so folgt am Grenzschichttrand Gleichung (4.2.2). Die Differentiation dieser Beziehung in  $x$ - und in  $y$ -Richtung liefert zusätzlich zwei Differentialgleichungen (4.2.3, 4).

$$\frac{u}{u_e} = \frac{S}{k} \operatorname{Log} \left[ \frac{z S u_e}{v} \right] + \frac{S}{k} \pi w \left( \frac{z}{\delta} \right) + S C \quad \text{mit} \quad S = \frac{u_e}{u_\tau} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{k} \operatorname{Log}[S] = \frac{1}{k} \operatorname{Log} \left[ \frac{\delta u_e}{v} \right] + 2 \frac{\pi}{k} + C \quad (4.2.2)$$

$$-\frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \pi}{\partial x} - \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} \quad (4.2.3)$$

$$-\frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial y} + 2 \frac{\partial \pi}{\partial y} - \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{S} \right) \frac{\partial S}{\partial y} \quad (4.2.4)$$

Die Wandreibungsgleichung (4.2.3) wendete H. W. Stock (1977) in seinem Entrainmentverfahren erfolgreich an. Eine Diskussion, warum die Wandreibungsgleichung in Richtung der  $x$ -Koordinate der in Richtung der  $y$ -Koordinate vorzuziehen sei, lieferte diese Arbeit allerdings nicht. Aus mathematischer aber auch aus physikalischer Sicht sind beide Beziehungen gleichwertig.

### (2) Gleichung der Verdrängungsdicke

Bereits im Jahr 1958 entwickelte M. J. Lighthill eine Gleichung, welche die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  der Grenzschicht beschreibt (4.2.5). Die Änderung der Verdrängungswirkung der

Grenzschicht wird dabei als durch eine Verteilung virtueller Quellen und Senken verursacht verstanden.

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_\delta \delta^*) + \frac{\partial}{\partial y}(h_1 v_\delta \delta^*) = \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_e \delta_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_\delta \delta_2) \quad (4.2.5)$$

Die Gleichung (4.2.5) wurde in den Entrainmentverfahren von D. F. Myring (1970) und P. D. Smith (1982) als zusätzliche Gleichung zur Bestimmung der Verdrängungswirkung herangezogen. Zur direkten Berechnung der Grenzschichtentwicklung war sie in diesen Verfahren jedoch nicht notwendig.

Die Gleichung der Verdrängungsdicke stellt letztlich eine Massestrombilanz und damit eine integrale Kontinuitätsbilanz dar. Bei ihrer Ableitung geht z. B. P. D. Smith (1982) dann auch von der Entrainmentgleichung aus. In gewissem Sinne würde ihre Verwendung in einem Dissipationsintegralverfahren der Einführung der Entrainmentgleichung gleichkommen.

### (3) Zusätzliche Integralgleichungen

Die Einführung zusätzlicher Gleichungen aus dem Satz von Integralgleichungen (2.2.2 - 3) ist ohne die Einführung neuer Unbekannter möglich. Alle neu auftretenden integralen Dicken sind über ihre Definitionen aus den Geschwindigkeitsprofilen und damit nur als Funktionen der Parameter dieser Profile darstellbar. Die bekannte Entrainmentgleichung könnte ebenfalls diesmal jedoch direkt in ein Dissipationsintegralverfahren integriert werden. Dies würde die zusätzliche Ableitung und Implementierung einer Entrainmentfunktion erfordern.

### (4) Zusätzliche empirische Beziehungen

Vergleichbar der Beziehungen für zweidimensionale Grenzschichten können Parameterzusammenhänge aus Messwerten dreidimensionaler Grenzschichten gewonnen werden. In Anbetracht der Dreidimensionalität müsste jedoch eine enorme Anzahl von Daten ausgewertet werden, um zu verlässlichen Parameterzusammenhängen zu kommen.

Nach eingehender Analyse der bisher bekannt gewordenen Berechnungsverfahren und der oben genannten Ansätze wird hier Variante (1) favorisiert.

Für einen konkreten Berechnungsalgorithmus sind ausgehend von der Zahl der Parameter des Profilsatzes (im weiteren auch Basisvariable genannt) entsprechend viele integrale Bilanzgleichungen auszuwählen. Die in diesen Bilanzgleichungen auftretenden integralen Dicken, Wandschubspannungsbeiwerte und Dissipationsintegrale sind über Parameterzusammenhänge mit den Parametern des Profilsatzes verknüpft. Tabelle 4.2.1 führt die Basisvariablen der Profilsätze sowie die gewählten Bilanzgleichungen an.

Das für den Profilsatz 1 verwendete Gleichungssystem wurde in seiner ursprünglichen Form - geschrieben mit den integralen Dicken - belassen und zur Rechnung herangezogen.

Für die Profilsätze 2 und 3 wurden die Parameterzusammenhänge der einzelnen integralen Dicken (Anlage 4) in die Bilanzgleichungen eingesetzt. Nach Differenzieren und Umformen

folgen partielle Differentialgleichungen für die Basisvariablen. Die interessierenden integralen Größen werden im Anschluss an die simultane Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems mittels der Parameterzusammenhänge bestimmt. Aus physikalischer Sicht sind beide Vorgehensweisen gleichwertig. Der zweite Weg ist in gewissem Sinne jedoch eleganter, da er die Bilanzgleichungen auf die ursprünglichen Variablen des Problems zurückführt.

Tabelle 4.2.1 : Basisvariable und gewählte Gleichungen

Profile	Basisvariable	Gleichungen
Profilsatz 1 / Verfahren NM <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1/n-tel Potenzgesetz</li> <li>• Magerscher Ansatz</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exponent 1/n</li> <li>• Grenzschichtdicke <math>\delta</math></li> <li>• Verwindungswinkel <math>\beta_0</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Impulsbilanz in Querströmungsrichtung</li> </ul>
Profilsatz 2 / Verfahren CLM <ul style="list-style-type: none"> <li>• Coles-Profil mit Wakekomponente nach Lewkowicz</li> <li>• Magerscher Ansatz</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wakeparameter <math>\pi</math></li> <li>• Grenzschichtdicke <math>\delta</math></li> <li>• Parameter der Wandschubspannung <math>S</math></li> <li>• Verwindungswinkel <math>\beta_0</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Impulsbilanz in Querströmungsrichtung</li> <li>• Wandreibungsgleichung</li> </ul>
Profilsatz 3 / Verfahren CLJ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Coles-Profil mit Wakekomponente nach Lewkowicz</li> <li>• Johnston Ansatz</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Wakeparameter <math>\pi</math></li> <li>• Grenzschichtdicke <math>\delta</math></li> <li>• Parameter der Wandschubspannung <math>S</math></li> <li>• Parameter des Querstromprofils <math>B</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung</li> <li>• Impulsbilanz in Querströmungsrichtung</li> <li>• Wandreibungsgleichung</li> </ul>

Die Lösung der Gleichungssysteme erfolgt mit einem bereits von H. W. Stock (1977) eingesetzten numerischen Algorithmus für Entrainmentverfahren, welches auch gegenwärtig bei der DLR-Braunschweig Anwendung findet (H. Köster, G. Wichmann 1996). Die Differentialgleichungen werden dazu in Differenzgleichungen geschrieben und nach den Gradienten der Unbekannten in Hauptströmungsrichtung umgeformt. Die Berechnung erfolgt von einer Startpotentiallinie ausgehend schrittweise in Hauptströmungsrichtung. Die Querströmgradienten werden nach jedem Schritt für die aktuelle Potentiallinie gebildet.

Für die Startpotentiallinie sowie die den äußeren Rand der Berechnungsdomäne bildende Stromlinie werden Start- bzw. Randwerte vorgegeben. Die Werte auf der Startpotentiallinie

folgen für beide Testfälle aus den Experimenten und tragen in den hier behandelten Testfällen zweidimensionalen Charakter. Die Werte auf der Randstromlinie werden aus einer zweidimensionalen Grenzschichtrechnung mit Druckgradientenfluss vorab bestimmt.

#### 4.2.1 Gleichungssystem für Profilsatz 1 / Verfahren NM

Das Gleichungssystem für das Verfahren NM ist unter (4.2.6 - 8) angegeben. Die rechten Seiten der Gleichungen  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  sind unter (4.2.13), (4.2.18) und (4.2.23) angegeben.

Integrale Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + \vartheta_{21} P'_{12}(H) \frac{\partial H}{\partial n} + P_{12}(H) \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} = K_1 \quad (4.2.6)$$

Integrale Impulsbilanz in Querströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial s} + P'_{22}(H) \frac{\vartheta_{21}^2}{\vartheta_{11}} \frac{\partial H}{\partial n} + P_{22}(H) \frac{2\vartheta_{21}}{\vartheta_{11}} \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} - P_{22}(H) \frac{\vartheta_{21}^2}{\vartheta_{11}^2} \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial n} = K_2 \quad (4.2.7)$$

Integrale Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{B_{11}(H)}{P_{22}(H)} \frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} - B_{12}(H) \frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial n} + \frac{\vartheta_{21}}{P_{22}(H)} \left[ B'_{11}(H) + \frac{B_{11}(H) P'_{22}(H)}{P_{22}(H)} \right] \frac{\partial H}{\partial s} - \vartheta_{21} B'_{12}(H) \frac{\partial H}{\partial n} = K_3 \quad (4.2.8)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt für die Variablen  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{21}$  und  $H$ . Die Parameterzusammenhänge für die Variablen werden zunächst zur Bestimmung der Basisvariablen  $1/n$ ,  $\delta$  und  $\beta_0$  herangezogen. Weitere Parameterzusammenhänge dienen zur Bestimmung zusätzlicher Integralgrößen und der Wandschubspannung.

#### 4.2.2 Gleichungssystem für Profilsatz 2 und Profilsatz 3 / Verfahren CLM und CLJ

Die Gleichungssysteme für die Profilsätze 2 und 3 sind prinzipiell gleich aufgebaut. In beiden Fällen werden von den vier Basisvariablen ausgehend vier Bilanzgleichungen ausgewählt. Die vorab bestimmten Parameterzusammenhänge für  $\vartheta_{11}$  (Impulsverlustdicke),  $\vartheta_{21}$  (Summe aus Verdrängungsdicke des Querstromes und "Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke),  $\vartheta_{21}$  ("Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke),  $\vartheta_{22}$  (Impulsverlustdicke des Querstromes),  $\Theta_{11}$  (Energieverlustdicke) und  $\Theta_{12}$  (erste "Kreuzprodukt"-Energieverlustdicke) werden in die Bilanzgleichungen eingesetzt. Nach Differenzieren und Umformung folgen vier partielle Differentialgleichungen für die Basisvariablen  $\pi$ ,  $\delta$ ,  $S$  und  $\beta_0$  (Profilsatz 2 / Verfahren CLM) bzw.  $\pi$ ,  $\delta$ ,  $S$  und  $B$  (Profilsatz 3 / Verfahren CLJ).

Im folgenden sind für die Impulsbilanz in Haupt- und Querströmungsrichtung sowie die Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung die notwendigen Parameterzusammenhänge sowie die abgeleiteten partiellen Differentialgleichungen für die Basisvariablen angegeben. Die Beziehungen CIJ mit I = 0, 1, 2, 3 und J = 0, 1, 2, 3 sind Funktionen der Basisvariablen. Sie sind in Anhang 4 ausführlich dargestellt. Nicht für alle CIJ lassen sich physikalisch sinnvolle Begriffe wie Impuls- oder Energieverlustdicke finden. Diese Größen sind als Rechengrößen zu verstehen. Die in den Parameterzusammenhängen benutzte Variable  $B^*$  ist eine formale Zusammenfassung von  $\tan(\beta_0)$  (Profilsatz 2 / Verfahren CLM) und  $B(c_{fs}, \beta_0)$  (Profilsatz 3 / Verfahren CLJ).

Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial n} = K_1 \quad (4.2.9)$$

Parameterzusammenhänge

$$\vartheta_{11} = f_{11}(\pi, S) \delta \quad ; \quad f_{11}(\pi, S) = \frac{C10(\pi)}{S} - \frac{C20(\pi)}{S^2} \quad (4.2.10 \text{ a, b})$$

$$\vartheta_{12} = f_{12}(\pi, S, B^*) \delta \quad ; \quad f_{12}(\pi, S, B^*) = \frac{C11(\pi, B^*)}{S^2} \quad (4.2.11 \text{ a, b})$$

Partielle Differentialgleichung für die Basisvariablen

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial f_{11}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial s} + \delta \frac{\partial f_{11}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial s} + f_{11} \frac{\partial \delta}{\partial s} + \delta \frac{\partial f_{12}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial n} + \delta \frac{\partial f_{12}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial n} \\ + \delta \frac{\partial f_{12}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial n} + f_{12} \frac{\partial \delta}{\partial n} = K_1 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Rechte Seite

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{c_{fs}}{2} - \vartheta_{11} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] - \vartheta_{12} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \\ - \vartheta_1 \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} - \vartheta_2 \left[ \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] + \vartheta_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Impulsbilanz in Querströmungsrichtung

$$\frac{\partial \vartheta_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta_{22}}{\partial n} = K_2 \quad (4.2.14)$$

Parameterzusammenhänge

$$\vartheta_{21} = f_{21}(\pi, S, B^*) \delta ; \quad f_{21}(\pi, S, B^*) = -\frac{C01(\pi, S, B^*)}{S} + \frac{C11(\pi, S, B^*)}{S^2} \quad (4.2.15 \text{ a, b})$$

$$\vartheta_{22} = f_{22}(\pi, S, B^*) \delta ; \quad f_{22}(\pi, S, B^*) = -\frac{C02(\pi, S, B^*)}{S^2} \quad (4.2.16 \text{ a, b})$$

Partielle Differentialgleichung für die Basisvariablen

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial f_{21}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial s} + \delta \frac{\partial f_{21}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial s} + \delta \frac{\partial f_{21}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial n} + f_{21} \frac{\partial \delta}{\partial s} \\ + \delta \frac{\partial f_{22}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial n} + \delta \frac{\partial f_{22}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial n} + \delta \frac{\partial f_{22}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial n} + f_{22} \frac{\partial \delta}{\partial n} = K_2 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Rechte Seite

$$\begin{aligned} K_2 = \frac{c_{fn}}{2} - \vartheta_{21} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] - \vartheta_{22} \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \\ - \vartheta_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} + \vartheta_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung

$$\frac{\partial \Theta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \Theta_{12}}{\partial n} = K_3 \quad (4.2.19)$$

Parameterzusammenhänge

$$\Theta_{11} = F_{11}(\pi, S) \delta ; \quad F_{11}(\pi, S) = 2 \frac{C10(\pi, S)}{S} - 3 \frac{C20(\pi, S)}{S^2} + \frac{C30(\pi, S)}{S^3} \quad (4.2.20 \text{ a, b})$$

$$\Theta_{12} = F_{12}(\pi, S, B^*) \delta ; \quad F_{12}(\pi, S, B^*) = 2 \frac{C11(\pi, S, B^*)}{S^2} - \frac{C21(\pi, S, B^*)}{S^3} \quad (4.2.21 \text{ a, b})$$

Partielle Differentialgleichung für die Basisvariablen

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial F_{11}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial s} + \delta \frac{\partial F_{11}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial s} + F_{11} \frac{\partial \delta}{\partial s} \\ + \delta \frac{\partial F_{12}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial n} + \delta \frac{\partial F_{12}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial n} + \delta \frac{\partial F_{12}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial n} + f_{12} \frac{\partial \delta}{\partial n} = K_3 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$



Rechte Seite

$$\begin{aligned}
 K_3 = c_{Ds} - \Theta_{11} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \right] - \Theta_{12} \left[ \frac{3}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{3}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \\
 - \vartheta_2 \left[ \frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial n} + \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] - \Theta_{21} \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \quad (4.2.23)
 \end{aligned}$$

Die vierte Gleichung wird mit der so genannten Wandreibungsgleichung in Hauptströmungsrichtung gefunden (4.2.3, 4.2.24). Diese Gleichung folgt, wenn das Grenzschichtprofil in Hauptströmungsrichtung (2.4) für den Grenzschichttrand  $y = \delta$  geschrieben und in Hauptströmungsrichtung differenziert wird.

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial s} + 2 \frac{\partial \pi}{\partial s} - \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{S} \right) \frac{\partial S}{\partial s} = - \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial s} \quad (4.2.24)$$

In Matrixschreibweise lautet das komplette Gleichungssystem entsprechend (4.2.25). Die Koeffizienten  $A_j$  sind reine Funktionen der Basisvariablen. Sie können explizit dargestellt werden. Es wird jedoch hier bedingt durch den großen Umfang der Funktionen auf deren Darstellung verzichtet.

$$\begin{pmatrix}
 A_{12} & A_{12} & 0 & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\
 A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\
 A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \\
 A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \partial \pi / \partial s \\
 \partial S / \partial s \\
 \partial B / \partial s \\
 \partial \delta / \partial s \\
 \partial \pi / \partial n \\
 \partial S / \partial n \\
 \partial B / \partial n \\
 \partial \delta / \partial n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 K_1 \\
 K_2 \\
 K_3 \\
 K_4
 \end{pmatrix} \quad (4.2.25)$$

## 5 Testrechnungen

Zur Überprüfung der entwickelten Grenzschichtberechnungsverfahren wurden Messergebnisse herangezogen. Im Folgenden werden die Testfälle vorgestellt sowie die berechneten Grenzschichtverläufe mit den Messungen verglichen.

### 5.1 Zweidimensionale Testfälle

Zum Test der Algorithmen A1 und A2 für turbulente 2d-Grenzschichten wurden sechzehn Grenzschichten mit insgesamt 129 Messorten nachgerechnet. Vierzehn Grenzschichten stammen von der 1968-AFSR Stanford Conference (D. E. Coles, E. A. Hirt, 1968). Gewählt wurden diese Testfälle, um einen Vergleich mit Nachrechnungen, welche aus der Literatur bekannt sind, durchführen zu können (D. C. Wilcox, 1993). Für die Testrechnungen wurden nur solche Grenzschichten der 1968-AFSR Stanford Conference zugelassen, bei welchen die Abweichung zwischen linker und rechter Seite der integralen Impulsbilanz kleiner als 10 % ist. Die Nachrechnung der Grenzschichten IDENT 1100, 1200 und 2100 wurde aus diesem Grund nicht bis zum letzten Messpunkt geführt. Zusätzlich zu diesen vierzehn Grenzschichten wurden zwei Grenzschichten mit starker Verzögerung von I. Maruscic (1991) in die Betrachtungen einbezogen. In Anlehnung an D. C. Wilcox (1993) wurden die Testfälle entsprechend ihres Druckgradienten in vier Gruppen unterteilt.

Tabellen 5.1.1 Gruppen 1 und 2 der berechneten turbulenten zweidimensionalen  
und 5.1.2 : Grenzschichten (Abkürzungen siehe folgende Seite)

<b>Gruppe 1 : Grenzschichten ohne bzw. mit negativem Druckgradienten</b>		
Benennung	SG / G	Bemerkungen und Originalautor
IDENT 1400	a / 1	ebene Platte / K. Wieghardt
IDENT 1300	b / 1	Nichtgleichgewicht / E. Ludwieg, W. Tillmann
IDENT 2700	a / 2	negativer Druckgradient, Gleichgewicht
IDENT 6300	b / 1	H. Herring, J. Norbury Gleichgewicht / W. J. Bauer

<b>Gruppe 2 : Grenzschichten mit schwach positivem Druckgradienten</b>		
Benennung	SG / G	Bemerkungen und Originalautor
IDENT 1100	b / 1	Nichtgleichgewicht / E. Ludwieg, W. Tillmann
IDENT 2100	d / 1	Profilflügel / G. B. Schubauer, P. S. Klebanoff
IDENT 2500	a / 2	Gleichgewicht / P. Bradshaw
IDENT 4800	b / 1	Nichtgleichgewicht / G. B. Schubauer, W. G. Spangenberg

Tabellen 5.1.3 Gruppen 3 und 4 der berechneten turbulenten zweidimensionalen  
 und 5.1.4 : Grenzschichten  
 SG .... Schwierigkeitsgrad nach F. M. White (zitiert in R. Voges 1979)  
 a ... sehr leicht, b ... leicht, c ... schwer, d ... sehr schwer  
 G ..... Güte der Messungen nach D. E. Coles, E. A. Hirt (1968)  
 1 ... gut, 2 ... mittel, 3 ... mangelhaft

<b>Gruppe 3 : Grenzschichten mit moderat positivem Druckgradienten</b>		
Benennung	SG / G	Bemerkungen und Originalautor
IDENT 2400	d / 1	Druckgradient auf Null abfallend / P. Bradshaw
IDENT 2600	a / 1	Gleichgewicht / P. Bradshaw
IDENT 3300	d / 1	Gleichgewicht / P. Bradshaw
IDENT 4500	d / 2	Nichtgleichgewicht / G. B. Schubauer, W. G. Spangenberg

<b>Gruppe 4 : Grenzschichten mit stark positivem Druckgradienten</b>		
Benennung	SG / G	Bemerkungen und Originalautor
IDENT 1200	d / 3	Nichtgleichgewicht / E. Ludwieg, W. Tillmann
IDENT 4400	d / 2	Nichtgleichgewicht / G. B. Schubauer, W. G. Spangenberg
APG 10		Nichtgleichgewicht / I. Maruscic
APG 30		Nichtgleichgewicht / I. Maruscic

### 5.1.1 Bewertung der zweidimensionalen Verfahren

Die Bewertung der Algorithmen A1 und A2 erfolgt im Wesentlichen durch einen Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messwerten der Wandschubspannung. Zudem werden Mess- und Rechenergebnisse der Reynoldszahl ( $Re_{\delta_2}$ ,  $Re_{\delta_3}$ ) gebildet mit der Impulsverlustdicke bzw. der Energieverlustdicke sowie der Formparameter  $H_{12}$  verglichen. In Anlehnung an die Arbeiten von R. Voges (1979) und D. C. Wilcox (1993) werden zwei Bewertungsgrößen gebildet.

Für eine globale Aussage über die Abweichungen der Rechen- von den Messergebnissen wird die mittlere Abweichung zwischen diesen Werten (Voges-Parameter) bestimmt.

$$v(g) = \frac{100\%}{m} * \sum_{i=1}^m \left| \frac{g_{i,Rechnung} - g_{i,Messung}}{g_{i,Messung}} \right|$$

m ... Anzahl der untersuchten Messwerte

g ...  $c_f$ ,  $Re_{\delta_2}$ ,  $Re_{\delta_3}$ ,  $H_{12}$

(5.1.1)

Eine sensiblere Aussage bezüglich der Qualität der Verfahren liefert die relative Abweichung nach D. C. Wilcox (1993) (Wilcox-Parameter). Hierzu werden zuerst die Beträge der Differenz zwischen gemessenem und berechnetem Wandschubspannungsbeiwert an der letzten Station einer jeden Grenzschicht summiert. Anschließend erfolgt die Addition aller gemessenen Wandschubspannungsbeiwerte an diesen Orten. Die Bewertungsgröße  $W(c_f)$  ist der Quotient dieser beiden Summen.

$$W(c_f) = 100 \% \frac{\sum_{j=1}^n |c_{f, \text{Rechnung}}^* - c_{f, \text{Messung}}^*|}{\sum_{j=1}^n c_{f, \text{Messung}}^*}$$

$n$  .... Zahl der Testreihen

$c_f^*$  ... Wandschubspannungsbeiwert am letzten Ort der Testreihe (5.1.2)

In Tabelle 5.1.5 sind die Ergebnisse der Bewertung für die vier Gruppen von Grenzschichten bezüglich des Wandschubspannungsbeiwertes zusammengefasst. Generell ist festzustellen, dass der Wilcox-Parameter größere Werte anzeigt. Dies ist auf die Bewertung nur des letzten berechneten  $c_f$ -Wertes zurückzuführen. Da Vorwärtsschrittverfahren betrachtet werden, akkumulieren sich in diesem Punkt alle bisherigen Abweichungen der Berechnung von der Messung. Zudem liegt dieser Punkt für die Gruppen 3 bis 4 in Ablösenähe. Der Wert der Wandschubspannung ist hier sehr klein. Geringe Abweichungen der berechneten Wandschubspannungsbeiwerte vom Messwert führen daher bereits zu relativ großen Wilcox-Parametern.

Weitere gemittelte relative Abweichungen zwischen Messung und Rechnung (Voges-Parameter) sind in Tabelle 5.1.6 angegeben.

Tabelle 5.1.5 : Vergleich der Parameter  $V(c_f)$  und  $W(c_f)$  des Wandschubspannungsbeiwertes  
\* D. C. Wilcox (1993)

Gruppe	A1		A2		R. Voges (1979)	D. C. Wilcox* k,ε - Modell	D. C. Wilcox* k,ω - Modell
	$V(c_f)$	$W(c_f)$	$V(c_f)$	$W(c_f)$	$V(c_f)$	$W(c_f)$	$W(c_f)$
(1)	2.1 %	3.5 %	1.4 %	2.2 %	1.3 - 12.6 %	3.0 - 9.0 %	1.0 - 2.0 %
(2)	4.9 %	10.7 %	5.4 %	13.2 %	16.3 - 75.5 %	27.0 - 51.0 %	4.0 %
(3)	8.7 %	15.0 %	9.9 %	12.4 %	3.1 - 30.0 %	40.0 - 66.0 %	4.0 - 6.0 %
(4)	6.0 %	10.3 %	4.6 %	11.4 %	11.4 - 39.4 %	55.0 - 105.0 %	6.0 - 12.0 %
∅	4.7 %	8.5 %	4.6 %	8.2 %	8.8 - 44.9 %	36.0 - 58.0 %	4.0 - 6.0 %

Tabelle 5.1.6 : Vergleich der mittleren relativen Abweichungen (Voges-Parameter) der Verfahren A1 und A2 bezüglich Reynoldszahlen und Formparameter

	A1	A2
V( $Re_{\delta_2}$ )	4.6 %	5.0 %
V( $Re_{\delta_3}$ )	4.7 %	4.9 %
V( $H_{12}$ )	2.7 %	2.6 %

Ein Vergleich der mit den hier vorgestellten Dissipationsintegralverfahren berechneten Wandschubspannungsverläufe zeigt die Überlegenheit dieser Verfahren gegenüber den herkömmlichen  $k, \epsilon$ -Modellen und sowie anderen Zwei-Gleichungs-Turbulenz-Modellen. Dies ist besonders bemerkenswert, da der Wandschubspannungskoeffizient kein integraler Wert wie die Grenzschichtdicke ist. Erst die Ergebnisse mit dem  $k, \omega$ -Verfahren nach D. C. Wilcox (1993) liefern bessere Ergebnisse als die Dissipationsintegralverfahren. Ein Vergleich mit bisherigen Dissipationsintegralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten fällt ebenfalls zu Gunsten der Verfahren A1 und A2 aus. So gibt zum Beispiel M. Buschmann (1992) für das Dissipationsintegralverfahren nach K.-O. Felsch (1972) eine mittlere relative Abweichung zu Messungen mit 15 - 22 % an. Ursache dieser Verbesserung ist letztlich die Nutzung eines expliziten Geschwindigkeitsprofils.

Die Reynoldszahlen der Impulsverlustdicke und der Energieverlustdicke sowie der Formparameter  $H_{12}$  werden in relativ guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen berechnet (Tabelle 5.1.6, siehe auch Bild 5.1.2). Beide Verfahren zeigen in etwa die gleichen Werte des Voges-Parameters. Die Werte der relativen mittleren Abweichung der Reynoldszahlen sind vergleichbar den entsprechenden Werten (ca. 6 %), welche in M. Buschmann (1992) für das Dissipationsintegralverfahren nach K.-O. Felsch (1972) angegeben werden. Sie liegen jedoch unter dem Wert von 12 %, welcher in R. Voges (1979) für 33 nachgerechnete Grenzschichtverläufe der 1968-AFOSR Stanford Conference (eingeschlossen der hier behandelten Testfälle) zu finden ist.

### 5.1.2 Ausgewählte Testbeispiele

Die Ergebnisse der Nachrechnung für die Grenzschicht IDENT 2100 (Tragflügelumströmung Gruppe 2) und für die relaxierende Grenzschicht nach einer Stufe nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985) werden im folgenden kurz näher diskutiert.

#### **Tragflügelumströmung IDENT 2100 nach G. B. Schubauer, P. S. Klebanoff**

Das Bild 5.1.1 zeigt die für Tragflügel charakteristische Geschwindigkeitsverteilung am Grenzschichttrand. Die anfängliche Beschleunigung geht in ein Gebiet konstanten Druckes über. Dem schließt sich eine Verzögerung bis zur Ablösung der Strömung an.

Die beiden Dissipationsintegralverfahren A1 und A2 liefern mit Ausnahme der Wandschubspannung im Bereich der verzögerten Strömung nahezu identische Ergebnisse. Für die Bestimmung des Voges-Parameters wurden die Ergebnisse bis  $x = 6.069$  m berücksichtigt. Es ist jedoch festzustellen, dass bis ca.  $x = 7.000$  m noch eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung besteht. Bemerkenswert ist, dass die Rechnung problemlos den Änderungen des Vorzeichens des Druckgradienten folgt. Die Rechnung wird bis zum Ende der Lauflänge geführt, ohne dass Ablösung eintritt. Oberhalb ca.  $x = 7.500$  m ist jedoch eine stärkere Abweichung aller berechneten Grenzschichtgrößen von den Messungen zu beobachten.

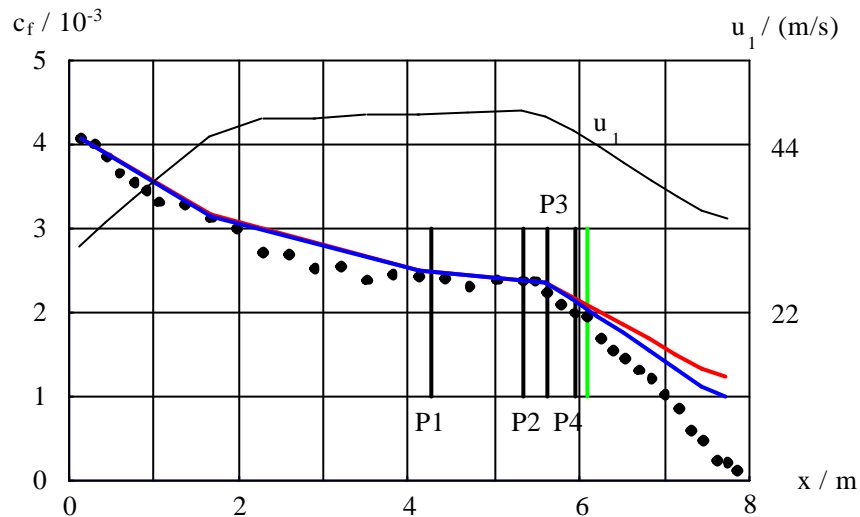


Bild 5.1.1 : Grenzschicht an einem tragflügelartigen Körper (IDENT 2100)  
 Geschwindigkeitsverteilung und Wandschubspannungsbeiwert  
 • Experiment ; — Algorithmus A1 ; — Algorithmus A2  
 — Grenze der Berechnung infolge experimenteller Ungenauigkeit

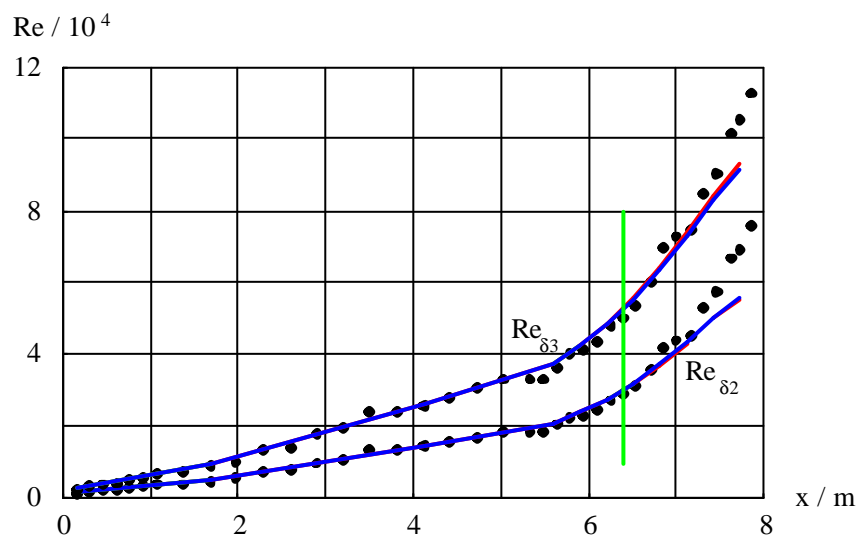


Bild 5.1.2 : Grenzschicht an einem tragflügelartigen Körper (IDENT 2100)  
 Reynoldszahlen der Impuls- und der Energieverlustdicke  
 (Legende siehe Bild 5.1.1)

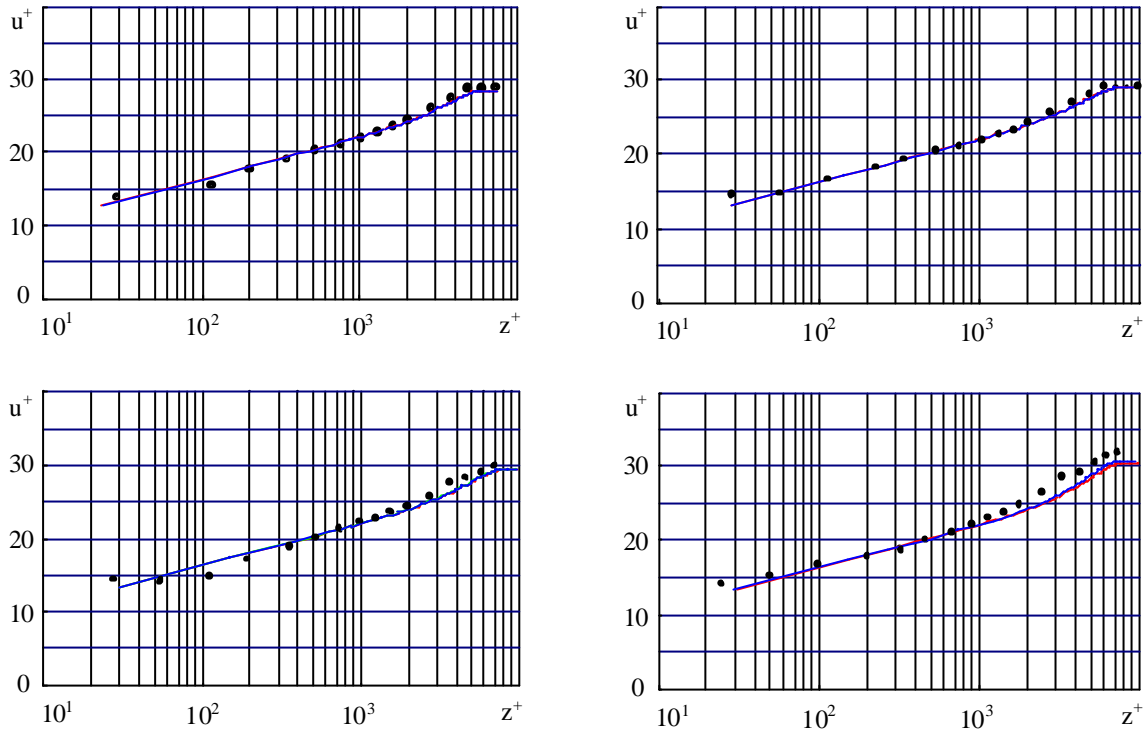


Bild 5.1.3 : Grenzschichtprofile für IDENT 2100

- Experiment ; — Algorithmus A1 ; — Algorithmus A2
- links oben : Position P1 x = 14.0 ft (IDENT 2117 / 2118)
- rechts oben : Position P2 x = 17.5 ft (IDENT 2121)
- links unten : Position P3 x = 18.5 ft (IDENT 2123)
- rechts unten : Position P4 x = 19.5 ft (IDENT 2125)
- (Position P1 bis P4 siehe auch Bild 5.1.1)

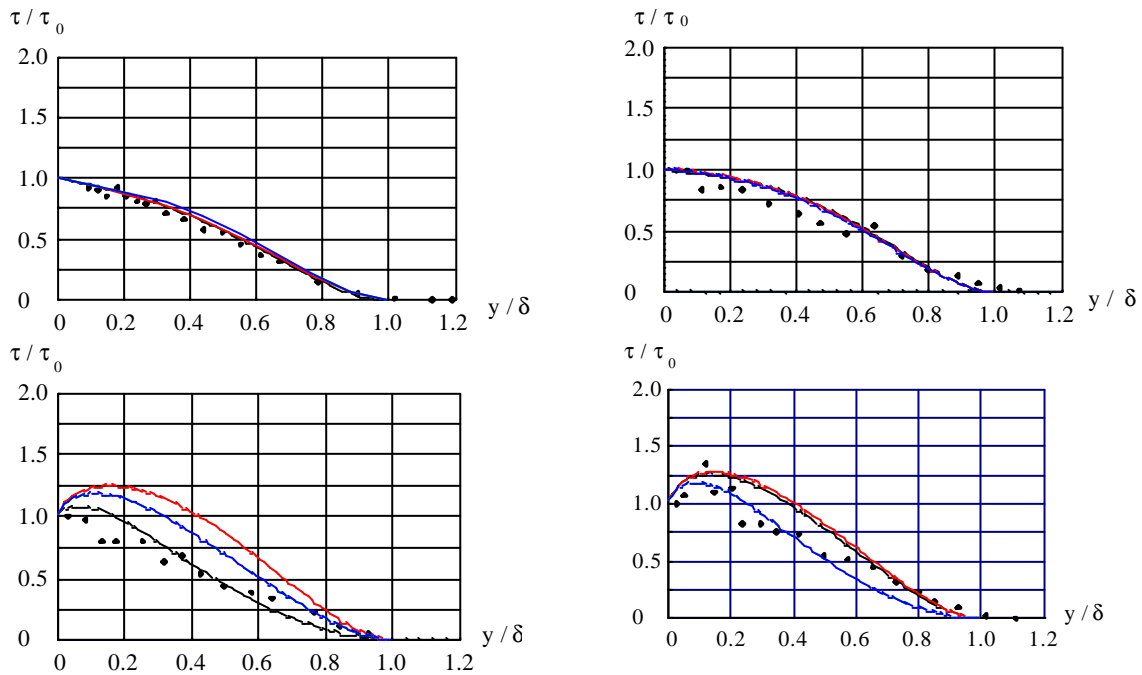


Bild 5.1.4 : Schubspannungsprofile für IDENT 2100 (Legende siehe Bild 5.1.3), schwarze Kurven zeigen  $\tau / \tau_w$  entsprechend experimenteller Werte von  $\pi$ ,  $S$ ,  $\zeta$  und  $\beta$

## Wiederangelegte, relaxierende Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller

Der Testfall der wiederangelegten Grenzschicht nach einer rückspringenden Stufe gehört nicht zu den sechzehn Testfällen aus Kapitel 5.1. Dieser Typ von Grenzschicht ist jedoch von großem praktischem Interesse für Strömungen mit komplexer Geometrie und wird hier zusätzlich diskutiert. Eine ausführliche Besprechung dieser Strömung wird in M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985) gegeben. Die Experimente wurden in einem Niedergeschwindigkeitswindkanal bei einer Anströmungsgeschwindigkeit von 44.2 m/s ( $Ma = 0.128$ ) durchgeführt. Die Geschwindigkeitsverteilung im Bereich des Wiederanlegens zeigt Bild 5.1.5.

Die berechnete Entwicklung der Wandschubspannung zeigt Bild 5.1.6. Beide Verfahren bestimmen den zuerst starken und sich dann verlangsamen Anstieg von  $c_f$  tendenziell richtig. Das Verfahren A1 zeigt dabei jedoch eine etwas bessere Übereinstimmung mit den Messwerten. Eine durchweg gute Übereinstimmung wird mit beiden Verfahren bei der Berechnung der Reynoldszahlen gebildet mit Verdrängungs-, Impulsverlust- und Energieverlustdicke erzielt (Bild 5.1.7).

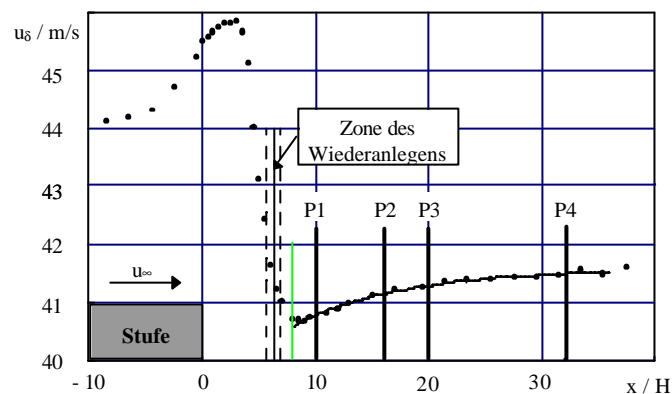


Bild 5.1.5 : Geschwindigkeitsverteilung einer wiederanlegenden Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985)

- Experiment ; — Start der Berechnung

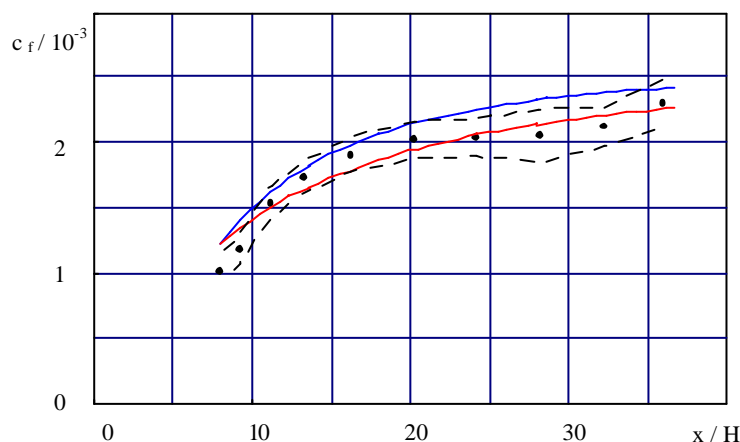


Bild 5.1.6 : Wandschubspannungsbeiwert einer wiederanlegenden Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985)

- Experiment ; ----- Fehlerband der gemessenen Wandschubspannung
- Algorithmus A1 ; — Algorithmus A2



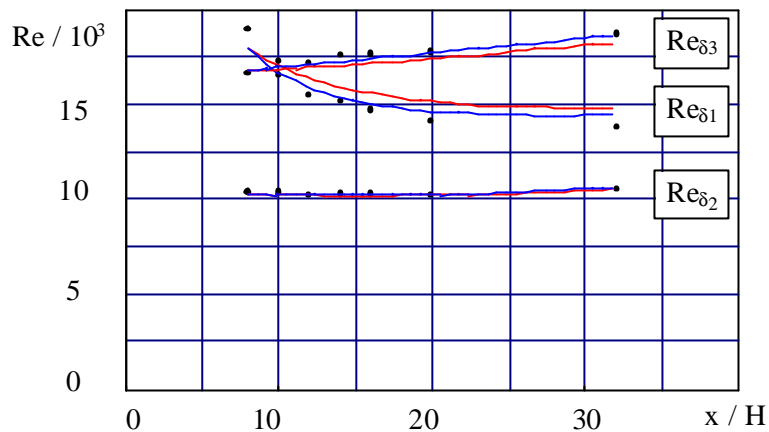


Bild 5.1.7 : Reynoldszahlen der Verdrängungs-, der Impuls- und der Energieverlustdicke einer wiederanlegenden Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985)  
(Legende siehe Bild 5.1.6)

An den Punkten P1 bis P4 (Koordinaten siehe Bild 5.1.5) wurden die Grenzschichtprofile (Bild 5.1.8) sowie die Schubspannungsprofile (Bild 5.1.9) berechnet und dargestellt. An den Orten P1 bis P3 zeigen die Grenzschichtprofile, welche mit den Verfahren A1 und A2 berechnet wurden, gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Insbesondere die Rückbildung der zuerst stark ausgeprägten Wakezone wird korrekt wiedergegeben. Im Wesentlichen ist auch das Profil am Ort P4 richtig berechnet. Eine gewisse Abweichung vom Experiment wird im Bereich des logarithmischen Gesetzes festgestellt. Die Abweichung ist jedoch nicht so stark, als dass es zu einer falschen Berechnung der integralen Dicken kommen würde (Bild 5.1.7). Die Ursache könnte durch die Begrenztheit der Universalität der Konstanten  $\kappa$  und  $C_{\log}$  des logarithmischen Gesetzes für relaxierende Grenzschichten oder durch experimentelle Fehler begründet sein.

Die Abweichungen am Ort P1 der berechneten Schubspannungsprofile von den Messwerten sind durch die Herleitung des Schubspannungsprofiles zu erklären. Bei dieser Herleitung wurde die eindeutige Zuordnung von Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofil (Kap. 3.1.2) sowie die uneingeschränkte Gültigkeit der Prandtlschen Grenzschichtgleichung (Gl. 3.1.1 a) vorausgesetzt. Im Grenzschichtbereich kurz nach dem Wiederanlegen ist dies jedoch infolge der Wirkung der Normalspannungen nur begrenzt gültig. Mit wachsender Entfernung vom Wiederanlegeort nimmt die Übereinstimmung zwischen den berechneten Schubspannungsverteilungen sowohl mit den Messwerten als auch untereinander deutlich zu.

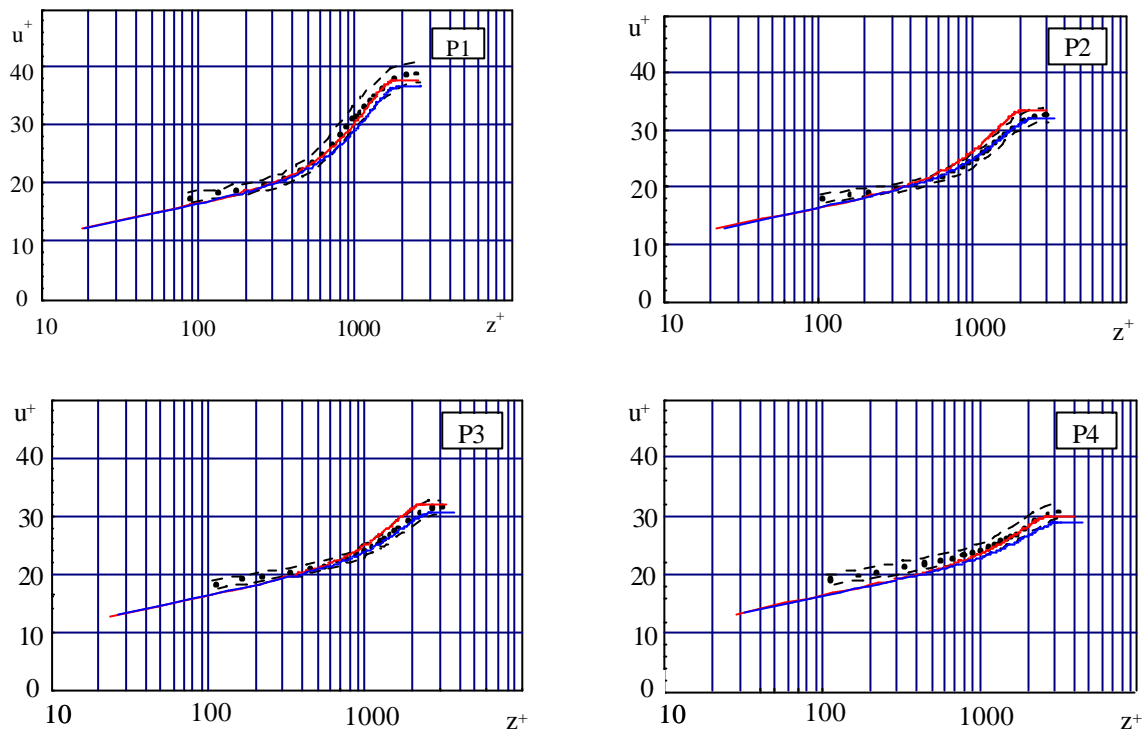


Bild 5.1.8 : Grenzschichtprofile einer wiederanlegenden Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985)

- Experiment ; — Algorithmus A1 ; — Algorithmus A2
- links oben : Position P1  $x / H = 10$
- rechts oben : Position P2  $x / H = 16$
- links unten : Position P3  $x / H = 20$
- rechts unten : Position P4  $x / H = 32$
- (Position P1 bis P4 siehe auch Bild 5.1.5)

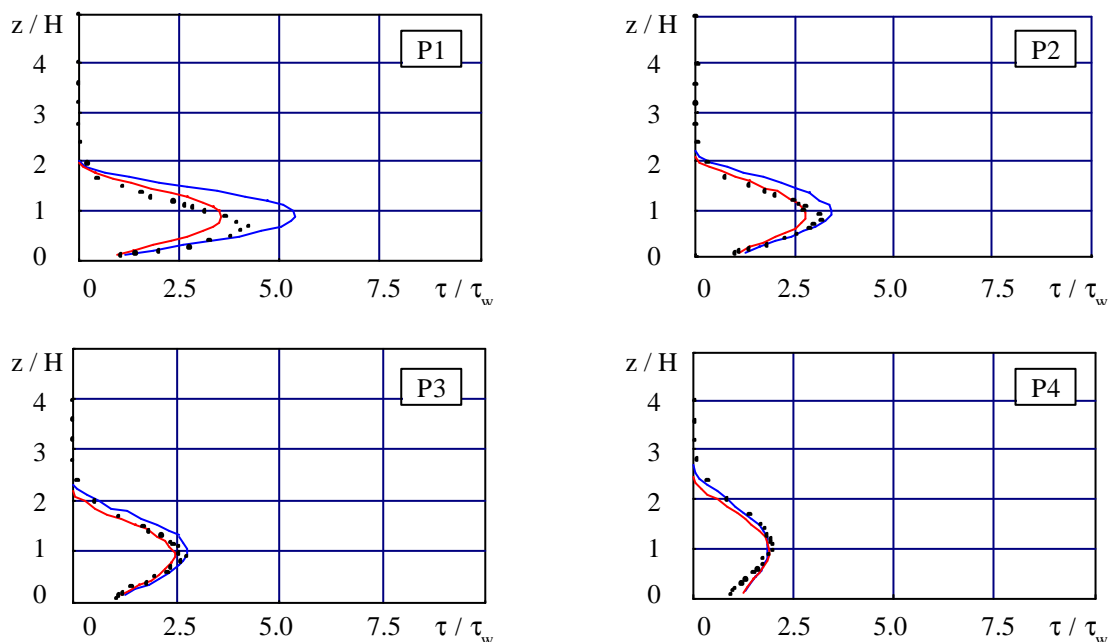


Bild 5.1.9 : Schubspannungsprofile einer wiederanlegenden Grenzschicht nach M. D. Driver, H. L. Seegmiller (1985) (Legende siehe Bild 5.1.6)

## 5.2 Dreidimensionale Testfälle

In der Literatur sind mehrere Messungen dreidimensionaler druckgradientengetriebener turbulenter Grenzschichten zu finden. Übersichten hierzu liefern unter anderem die Arbeiten von M. S. Ölcmen, R. L. Simpson (1992) und J. P. Johnston, K. A. Flack (1996). Es wurden zwei Testbeispiele ausgewählt, welche beide als Entwicklung einer dreidimensionalen Grenzschicht vor einem Hindernis zu kategorisieren sind. Beide Experimente wurden zur Erkundung der Grenzschicht auf einem Flugzeugrumpf vor der Einbindung eines Tragflügels durchgeführt. Sie stehen jedoch gleichermaßen stellvertretend für alle dreidimensionalen Grenzschichten, welche durch ein Hindernis gestört werden. Die Datensätze sind in der Datenbank des **European Research Community on Flow Turbulence and Combustion** (ERCOFTAC, <http://ercoftac.mech.surrey.ac.uk/>) verfügbar.

Für beide Testfälle wurde die reibungsfreie Außenströmung mittels der Potentialtheorie bestimmt (W. Albring, 1961). Die Verdrängungswirkung der Grenzschichten, welche sich an den Hindernissen selbst ausbilden, sowie der Rezirkulationsgebiete vor den Hindernissen wurde als klein und damit vernachlässigbar eingeschätzt.

Integrale Grenzschichtdicken wie  $\vartheta_{11}$ ,  $\vartheta_{21}$ ,  $\Theta_{11}$  und  $\vartheta_{22}$ , Formparameter  $H$ , Wandschubspannung  $u_\tau$ , Potenz  $n$  und Verwindungswinkel  $\beta_0$  sind Ergebnisse, welche von den meisten Integralverfahren geliefert werden. Bei Verfahren wie den vorliegenden, welche mit expliziten Geschwindigkeitsprofilen arbeiten, können zusätzlich mit Hilfe der Parameter dieser Profile die Geschwindigkeitsverteilungen, der Strömungswinkel sowie der Winkel zwischen den Gradienten der Geschwindigkeiten als Funktionen der wandnormalen Koordinate berechnet werden. Diese Ergebnisse werden in den Anhängen 5.1 und 5.2 mit Experimenten verglichen. Ein Vergleich der Algorithmen CLM und CLJ mit dem Algorithmus NM bezüglich der Basisvariablen ist infolge der verschiedenen Basisvariablen in den einzelnen Verfahren nur eingeschränkt möglich. Gleiches gilt für den Verwindungswinkel aus Verfahren CLM. Er ist keine Basisvariable im Verfahren CLM.

### 5.2.1 Testbeispiel 1 - Dreidimensionale Grenzschicht vor einem senkrecht auf einer ebenen Wand stehenden Zylinder mit Nachlaufkörper nach R. Dechow, K.-O. Felsch

In den Arbeiten von R. Dechow (1976) und K.-O. Felsch et al. (1983) wurde die turbulente dreidimensionale Grenzschicht vor einem auf einer ebenen Platte angebrachten Zylinder ( $\varnothing$  0.320 m) mit Nachlaufkörper untersucht (Bild 5.2.1). Die betrachtete Grenzschicht entwickelte sich von einem zweidimensionalen Zustand (ohne Querströmungskomponente) unter Einfluss des Druckgradienten, welcher von dem Hindernis aufgeprägt wurde, zu einer dreidimensionalen Grenzschicht. Die Anströmreynoldszahl gebildet mit Zylinderdurchmesser und der Anströmgeschwindigkeit betrug ca.  $4.77 \cdot 10^5$ . Das Strömungsmedium war Luft. Die Messungen wurden mit X-Hitzdrahtsonden durchgeführt.

Zur Validierung der Berechnungsmethoden wurden an neun verschiedenen Orten gemessene Geschwindigkeitsprofile herangezogen. Alle Messorte liegen auf einer gemeinsamen Außenstromlinie.

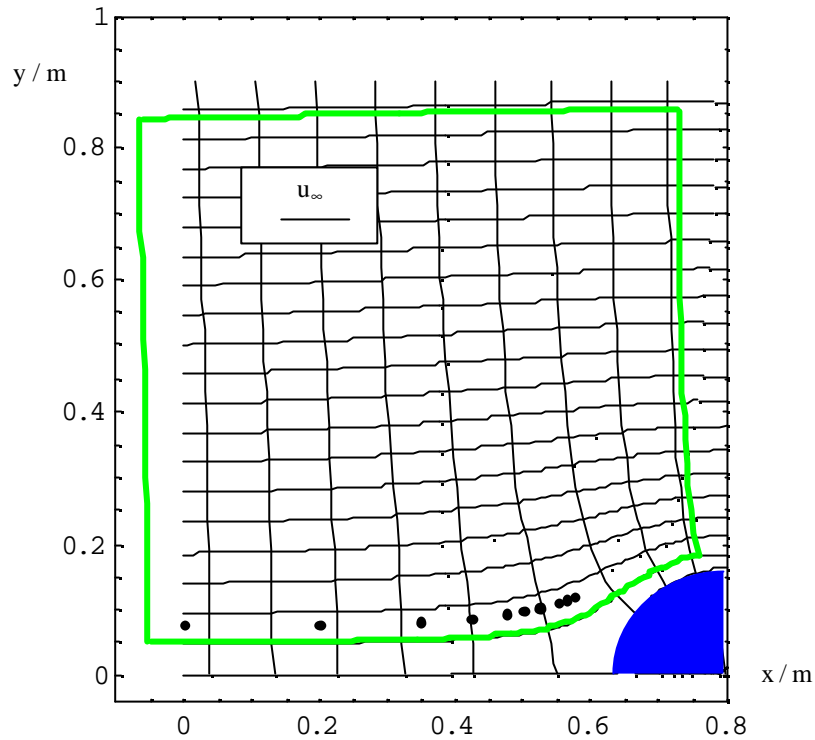


Bild 5.2.1 Potentialtheoretische Strom- und Potentiallinien für Testfall I  
 blau : Zylinder ; grün : Berechnungsdomäne ; • Messorte

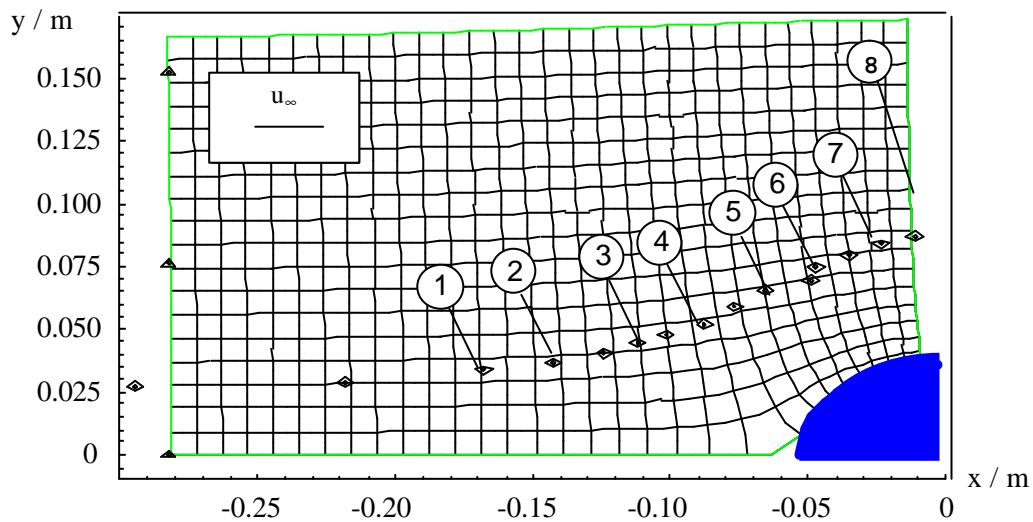


Bild 5.2.2 Potentialtheoretische Strom- und Potentiallinie für Testfall II  
 blau : elliptische Nase des Tragflügels ; grün : Berechnungsdomäne  
 ▲ Messorte der Startwerte ; ◆ Orte der Grenzschichtmessungen  
 Orte der LDV-Messungen nummeriert

Am Fuß des Zylinders bildet sich ein Hufeisenwirbel aus. Dieser Wirbel erzeugt eine intensive Rückströmung von auf den Zylinder auftreffendem Fluid. Diese Rückströmung, welche unterhalb des Hufeisenwirbels direkt an der Platte erfolgt, bildet eine Sekundärgrenzschicht. Diese Sekundärgrenzschicht schiebt sich entgegen der Hauptströmungsrichtung unter die ankommende Grenzschicht und führt zur dreidimensionalen Ablösung. Detaillierte Untersuchungen zur Strömung um einen tragflügelartigen, in eine Wand eingebundenen Körper wurden von W. J. Devenport, R. L. Simpson (1992) vorgestellt und gehören zu den Voruntersuchungen zu Testbeispiel 2.

Die Messorte 1 bis 6 (Zählung in Richtung der Zuströmung) liegen außerhalb des Gebietes der dreidimensionalen Ablösung. Am Ort Nr. 1 ist die Grenzschicht zweidimensional, wandelt sich von da jedoch kontinuierlich zu einer voll ausgebildeten dreidimensionalen Strömung.

Die Basisvariablen  $\pi$ ,  $\delta$ ,  $\beta_0$  und  $u_\tau$  werden von den Verfahren CLM und CLJ nahezu übereinstimmend und mit vergleichbarer Güte bestimmt (Anhang 5.1, Bild 1, 5). Stärkere Abweichungen treten beim Verfahren NM auf (Anhang 5.1, Bild 9). Dies ist insbesondere durch die begrenzte Anwendbarkeit des Potenzansatzes für dreidimensionale Grenzschichten bedingt. Die Grenzschichtdicke wird von den Verfahren CLM und CLJ über dem gesamten Messbereich gut wiedergegeben. Wakeparameter  $\pi$  und Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  zeigen im vorderen Bereich der Grenzschicht ( $x < 0.45$  m) eine ebenfalls gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Im Vergleich mit dem Verfahren NM wird eine verbesserte Berechnung dadurch erreicht, dass  $u_\tau$  in den Verfahren CLM und CLJ eine Basisvariable ist. Mit zunehmender Querstromkomponente wachsen die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung jedoch an. Insbesondere der berechnete Wakeparameter kann dem starken Anstieg der Messwerte, welcher in Ablösenähe ( $x > 0.5$  m) zu beobachten ist, nicht folgen. Der Verwindungswinkel  $\beta_0$  wird von allen drei Verfahren zu klein bestimmt. Den experimentellen Daten am nächsten kommt dabei das Verfahren CLM mit dem Magerschen Ansatz für das Querstromprofil.

Verdrängungs-, Impulsverlust- und Energieverlustdicke ( $\delta_1$ ,  $\delta_{11}$  und  $\Delta_{11}$ ) sowie der Formparameter  $H$  werden von den Verfahren CLM und CLJ nahezu identisch bestimmt und folgen den Messwerten relativ gut. Dies liegt in der ebenfalls nahezu identischen Berechnung der Basisvariablen, welche für die Bestimmung der genannten Integralgrößen erforderlich sind, begründet. Wie die Bilder im Anhang 5.1 zeigen, werden diese integralen Dicken gleichermaßen zu groß bestimmt. Die wesentlichste Ursache hierfür ist die Berechnung etwas zu großer Werte für die Grenzschichtdicke. Vergleichbar dem NM-Algorithmus zeigen die Verfahren CLM und CLJ bezüglich der integralen Dicken  $\vartheta_{21}$  ("Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke) und  $\vartheta_{22}$  (Impulsverlustdicke des Querstromes) eine teilweise sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen. Für stärkere Querstromkomponenten hat jedoch offenbar der Querstromansatz nach Johnston Vorteile.

Die Bilder 3 und 7 des Anhangs 5.1 zeigen in der jeweils linken Spalte die halblogarithmische Darstellung gemessener und berechneter Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung an den Stationen 2, 4, 5 und 7. Die Ergebnisse der Verfahren CLM und CLJ unterscheiden sich wiederum nur geringfügig. Bis Station 5 ist eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zu beobachten. In Nähe der dreidimensionalen Ablösung (Position 7) ist ein starkes Abweichen der Rechnungen, insbesondere im Außenbereich der Grenzschicht festzustellen. Ursache ist der zu klein bestimmte Wakeparameter  $\pi$  an diesem Messort. In Bild 11 (linke Spalte) des Anhangs 5.1 sind die mit dem Verfahren NM gewonnenen

Geschwindigkeitsverteilungen in Hauptströmungsrichtung halblogarithmisch aufgetragen. Für Profile mit geringer Ausbiegung des Wakebereiches von der logarithmischen Geraden (z. B. Station 2) wird eine gewisse Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung gefunden. Diese ist jedoch geringer als bei den Verfahren CLM und CLJ. Bei Profilen mit ausgeprägtem Wakebereich werden die Schwächen des  $1/n$  - tel Potenzgesetzes bezüglich der Modellierung dreidimensionaler Grenzschichten deutlich sichtbar.

Die jeweils rechten Spalten der Bilder 3 und 7 des Anhangs 5.1 stellen die Hodographen der Geschwindigkeitsverteilungen dar. Die Messergebnisse zeigen, dass die Hypothese eines Dreiecksmodells, welche von J. P. Johnston (1960) aufgestellt wurde, für Testbeispiel I gut zutrifft. Im äußeren Grenzschichtbereich ist ein linearer Zusammenhang zwischen  $v / u_e$  und  $u / u_e$  zu beobachten. Für den inneren Grenzschichtbereich liegen nur wenige Messpunkte vor. Ein lineares Abfallen der Verteilung hin zum Koordinatenursprung ist jedoch andeutungsweise zu erkennen. Vergleicht man die Ergebnisse der Verfahren CLM und CLJ, so finden sich prinzipiell voneinander abweichende Kurven der berechneten Hodographen. Während das Verfahren CLM dreieckige Verläufe zeigt, liefert CLJ eine Gerade mit dem Anstieg  $-B(c_{f_0}, \tan(\beta_0))$ . Letzteres liegt im Querstromansatz nach J. P. Johnston (1960) begründet. Er berücksichtigt nur den äußeren Grenzschichtbereich in linearer Form (3.2.24). Eine Komplettierung dieser Verteilung kann mit einer Geraden der Steigung  $\tan(\beta_0)$  entsprechend Gl. 3.2.23 erfolgen.

Die Bilder 4, 8 und 12 des Anhangs 5.1 zeigen die Verteilungen des Strömungswinkels  $\beta_{FA}$  (3.2.2) und des Winkels der wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten  $\beta_{FGA}$  (3.2.3) in linearer Darstellung. Über große Bereiche der Grenzschicht ( $0.2 < y/\delta < 1.0$ ) wird eine gute Übereinstimmung der Messwerte des Strömungswinkels  $\beta_{FA}$  und der mit den Verfahren CLM und CLJ berechneten Verläufe gefunden. Das Verfahren NM zeigt hingegen nur im oberen Bereich der Grenzschicht ( $0.5 < y/\delta < 1.0$ ) eine geringe Abweichung vom Experiment. Am Grenzschichtrand bestimmen alle drei Verfahren den Winkel  $\beta_{FA}$  korrekt zu Null. Der Winkel  $\beta_{FGA}$  wird von den Verfahren CLM und CLJ im Bereich  $0.4 < y/\delta < 1.0$  gut wiedergegeben. Beide Algorithmen bestimmen für den Grenzschichtrand Werte ungleich Null, welche gut mit den experimentellen Aussagen übereinstimmen.

### **5.2.2 Testbeispiel II - Dreidimensionale Grenzschicht vor einem senkrecht auf einer ebenen Wand stehenden Tragflügel mit elliptischer Nase nach S. M. Ölcmen, R. L. Simpson**

S. M. Ölcmen, R. L. Simpson (1995) untersuchten die Grenzschicht auf einer ebenen Wand vor einem entsprechend dem NACA0020-Profil auslaufenden zylindrischen Flügel mit elliptischer Nase (Skizze siehe Anhang 5.3). Die Achsen der Ellipse hatten ein Verhältnis von 3 : 2. Die Längen der Halbachsen betragen  $a = 0.054$  m und  $b = 0.036$  m. Das Profil hatte eine Länge von 0.305 m. Die Anströmreynoldszahl gebildet mit Profillänge und Anströmgeschwindigkeit betrug ca.  $5.55 \cdot 10^5$ . Das Strömungsmedium war auch hier Luft. Die Grenzschicht wurde 0.229 m stromauf der Profilnase an 12 Positionen quer zum Kanal mittels Hitzdraht vermessen und an diesen Orten als ungestörte zweidimensionale Grenzschicht charakterisiert. Von diesen Messungen leiten sich die Startwerte der Rechnung ab.

Von den experimentell bestimmten Geschwindigkeitsverteilungen wurden 25 - acht mit LDA sowie 17 mit Hitzdraht - vermessene Profile zur Validierung des Berechnungsalgorithmus ausgewählt. Die LDA-Messungen wurden in Strömungsrichtung links vom Hindernis und die

Hitzdrahtmessungen rechts von diesem aufgenommen. Die Linie, welche die Messreihen jeweils miteinander verbindet, ist an der Symmetrieachse des Hindernisses gespiegelt. Beide Messreihen können daher zusammengefasst werden. Im Gegensatz zum Testfall 1 liegen die Messorte jedoch nicht auf einer gemeinsamen Außenstromlinie. Die Berechnungsergebnisse für Testfall II wurden daher als Punkte in die Diagramme eingetragen und nicht zu Kurvenzügen verbunden. Bild 5.2.2 zeigt die Messorte für den Testfall II. Die integralen Dicken  $\delta_1$ ,  $\delta_{11}$ ,  $\Delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$  und  $\delta_{22}$ , welche aus den LDV-Messungen bestimmt wurden, sind in S. M. Ölçmen, R. L. Simpson (1995) zusammengefasst. Die entsprechenden Werte für die Hitzdrahtmessungen wurden direkt aus den aufgemessenen Geschwindigkeitsprofilen bestimmt. Der Wakeparameter  $\pi$  wurde aus den LDV-Profilen bestimmt.

Bereits die Analyse des Testbeispiels I lieferte wesentliche Aussagen über die betrachteten Integralverfahren. Sofern das Testbeispiel II diese Ergebnisse bestätigt, werden sie hier nicht erneut besprochen. Die folgende Diskussion konzentriert sich auf die Spezifik der Nachrechnung der Grenzschicht nach S. M. Ölçmen, R. L. Simpson (1995).

Die Messungen von Testbeispiel II zeigen neben dem Gebiet der sich ausbildenden Dreidimensionalität der Grenzschicht auch den Bereich des sich zurückstellenden Verwindungswinkels. Dieses Rückstellen von  $\beta_0$  wird von allen Verfahren wiedergegeben jedoch mit unterschiedlicher Güte. Die berechneten Verteilungen hängen, wie auch bei anderen direkten Integralverfahren zu beobachten, den gemessenen Werten nach. Dieses zu langsame Anwachsen des Verwindungswinkels führt zu einem zu weit stromab liegenden Maximum der Verteilung  $\beta_0(x)$ . Richtet man die Bewertung der drei Verfahren an der Übereinstimmung zwischen berechneten und experimentell bestimmten Verwindungswinkels aus, so ist das Verfahren CLM als das beste einzustufen. Die Lage (x-Koordinate) des Maximalwertes des Verwindungswinkels  $\beta_{0,max}$  wird von diesem Verfahren relativ gut gefunden. Der Betrag dieses Winkels ist jedoch um ca.  $5^\circ$  zu klein.

Die Basisvariablen  $\pi$ ,  $\delta$  und  $u_\tau$  (Verfahren CLM, CLJ) werden teilweise in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment bestimmt. Dies gilt insbesondere für die Wandschubspannungsgeschwindigkeit. Größere Abweichungen treten erst nach dem Maximum des Verwindungswinkels auf. Der Wakeparameter  $\pi$  fällt im Intervall  $-0.05 < x < 0$  unter die Werte, welche aus den Experimenten folgen (Anhang, Bild 2, 6).

Bis zum Ort des maximalen Verwindungswinkels wachsen die integralen Dicken  $\delta_1$ ,  $\delta_{11}$  und  $\Delta_{11}$  infolge der zunehmenden Nähe zum Ablösegebiet, welches sich direkt vor dem Hindernis ausbildet, an. Danach, im Bereich des sich zurückstellenden Verwindungswinkels, fallen alle drei Größen wieder. Die von den Verfahren CLM und CLJ berechneten Verläufe dieser integralen Dicken spiegeln die generelle Grenzschichtentwicklung wieder. Die berechneten Werte sind dabei kleiner als die entsprechenden LDV-Werte jedoch größer als die Werte, welche aus den Hitzdrahtmessungen folgen. Der Formparameter der Hauptströmung H stimmt gut mit dem Experiment überein.

Die integralen Dicken der Querströmung zeigen ebenfalls ein Verhalten, welches entsprechend der Entwicklung des Verwindungswinkels unterteilt werden kann. Im vorderen, quasi zweidimensionalen Bereich der Grenzschicht sind diese Größen nahezu Null. Ihre Beträge wachsen mit zunehmendem Verwindungswinkel an. Dies wird von den Rechnungen wiedergegeben. Das berechnete Anwachsen übersteigt jedoch deutlich die experimentell gefundenen Werte. Der Querstrom wird hier offensichtlich zu groß bestimmt. Im Bereich des

sich zurückstellenden Verwindungswinkels verkleinern sich die integralen Dicken  $\delta_{21}$  und  $\delta_{22}$  wieder. Mit dem Verfahren CLM werden dabei fast wieder die experimentellen Werte erreicht.

In den Bildern 3, 7 und 11 des Anhangs 5.2 (jeweils linke Spalte) sind die Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung dargestellt. Die Verfahren CLM und CLJ zeigen für die ersten drei Profile (Position 2, 3 und 4 siehe Bild 5.2.2) eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Im Bereich des maximalen Verwindungswinkels (Position 5) wird der Wakeparameter von diesem Verfahren zu klein bestimmt (Bild 1 und 5 Anhang 5.2). Die berechneten Geschwindigkeitsprofile sind daher im Außenbereich der Grenzschicht flacher als die experimentellen Verteilungen. Die Hodographendarstellung der experimentell bestimmten Grenzschichtprofile zeigen, dass die Annahme einer dreieckigen Verteilung (J. P. Johnston, 1960) für den Testfall II nur eingeschränkte Gültigkeit hat. Insbesondere an Position 5 ist das Querstromprofil so verwunden, dass die Flanken des Hodographen nicht mehr linear sind. Die Abweichungen der berechneten Hodographen von den Experimenten insbesondere an Position 5 werden daher durch ein nichtadäquates Querstromprofil verursacht.

Der Strömungswinkel  $\beta_{FA}$  wird an allen vier Messstellen in guter Übereinstimmung von den Verfahren CLM und CLJ bestimmt (Anhang 5.2, Bild 4, 8). Eine akzeptable Übereinstimmung des berechneten Winkels  $\beta_{FGA}$  wird an den Positionen 2 und 3 erzielt. Stromab hiervon kommt es zu größeren Abweichungen über der gesamten Grenzschichtdicke.

Die mit dem Verfahren CLM berechneten Verteilungen des Wakeparameters  $\pi$  und des Verwindungswinkels  $\beta_0$  auf einer Halbseite des Strömungsfeldes vor dem Hindernis sind in Anhang 5.3 dargestellt. Deutlich ist die unter dem Einfluss der Druckverteilung von beiden Ortskoordinaten abhängige Entwicklung dieser Parameter zu erkennen. Auf der Mittellinie ( $y = 0$ ) wächst der Wakeparameter bis zur Ablösung an. Trotz des dreidimensionalen Charakters der Grenzschicht bleibt der Verwindungswinkel  $\beta_0$  hier konstant Null. Erst in einem vergleichsweise kleinen Gebiet vor dem Hindernis bildet sich eine Querkomponente des Geschwindigkeitsfeldes und damit ein Verwindungswinkel ungleich Null aus. Im Bereich der maximalen Dicke des Hindernisses beginnt das Rückstellen von  $\beta_0$ .

Die Ablöselinie wird in guter Übereinstimmung mit der aus dem Experiment (Rußanstrich) gewonnenen Ablöselinie berechnet (siehe Anhang 5.3).

### 5.2.3 Bewertung der dreidimensionalen Verfahren

Zusammenfassend wird festgestellt, dass die hier betrachteten dreidimensionalen Grenzschichten vor senkrechten Hindernissen mit den Verfahren CLM und CLJ mit gutem Erfolg nachgerechnet wurden. Bezüglich der Integralgrößen in Hauptströmungsrichtung ( $\delta_1$ ,  $\delta_{11}$ ,  $\Delta_{11}$ ,  $H$ ) sowie der Wandschubspannung und des Verwindungswinkels zeigen beide Verfahren im Vergleich mit dem Experiment eine vergleichbare Qualität. Das Verfahren NM schneidet infolge der mangelhaften Modellierung des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung schlechter ab. Die Integralgrößen, welche die Querstromgeschwindigkeit enthalten ( $\delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$ ) werden vom Verfahren CLJ etwas besser bestimmt (siehe insbesondere Testfall I, Anhang 5.1 Bilder 2 und 6). Generell wird jedoch festgestellt, dass für schwächere Querstromkomponenten eine bessere Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung erzielt wird.



Der Vorteil von Integralverfahren, welche auf expliziten Geschwindigkeitsprofilen aufbauen, wurde mit der Berechnung dieser Profile und den wandnormalen Verteilungen des Strömungswinkels sowie des Winkels zwischen den Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten aus den Basisvariablen gezeigt. Das Hauptströmungsprofil  $u^+(y^+)$  wird dabei von den Verfahren CLM und CLJ in etwa mit der gleichen Güte berechnet (Anhang 5.2, Bild 3, 7 jeweils linke Spalte). Die Hodographen zeigen jedoch eine etwas bessere Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung für CLJ. Offensichtlich ist die Annahme des Querstromprofils nach J. P. Johnston (1960), welche auch von den asymptotischen Ansätzen von A. T. Degani et al. (1993) gestützt wird, von Vorteil (siehe hierzu auch Kap. 3.2.1). Dieses Ergebnis wird, wenn auch in differenzierter Form durch die berechneten Winkelverteilungen bestätigt.

## 6 Zusammenfassung

Die Integralverfahren der Grenzschichttheorie gehören zu den praktischen Ingenieurmethoden der Strömungsmechanik. Eine Analyse der einschlägigen Fachliteratur zeigt, dass diese Verfahren eine breite Anwendung finden und für verschiedenartige Grenzschichttypen mit gutem Erfolg angewandt werden. Es ist jedoch festzustellen, dass viele der bisher bekannten Verfahren, insbesondere für dreidimensionale Grenzschichten, halbempirische Parameterzusammenhänge nutzen, welche auf Auswertung begrenzter experimenteller Datenbasen beruhen. Zudem wird oft die Vorgeschichte der Grenzschicht nicht berücksichtigt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Vernachlässigung des Nichtäquilibriumsscharakters der Grenzschicht. Ein weiteres Manko fast aller bisher für dreidimensionale Grenzschichten bekannt gewordenen Verfahren ist, dass nur Informationen über die Schubspannungsverteilung am Grenzschichtrand in die Rechnung einfließen (Entrainmentverfahren).

Aus dieser Situation heraus erwuchs die Intention, eine generalisierte Form der Integralverfahren zu entwickeln, welche auf expliziten Geschwindigkeitsprofilen beruht. Aus den generell möglichen Formen von Integralverfahren wurden hierzu die Dissipationsintegralverfahren ausgewählt. Diese Verfahren bieten a priori den Vorzug, mit den Dissipationsintegralen Terme zu berücksichtigen, welche das Schubspannungsprofil über der gesamten Grenzschichtdicke in sich tragen. Ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen wurden über die Grenzschichtgleichungen die generalisierten Dissipationsintegralgleichungen abgeleitet. Diese Gleichungen sind für dreidimensionale, inkompressible, druckgradientengetriebene, laminare und turbulente Grenzschichten gültig. Sie beinhalten die bekannten Gleichungen für Dissipationsintegralverfahren zweidimensionaler Grenzschichten als Sonderfall.

Die zur Komplettierung der Berechnungsalgorithmen notwendigen Parameterzusammenhänge für integrale Dicken, Formparameter und Wandschubspannungsbeiwerte wurden aus expliziten Geschwindigkeitsprofilen entwickelt. Ziel war es dabei, die nur beschränkt gültigen halbempirischen Parameterzusammenhänge durch universellere Beziehungen zu ersetzen. Die Universalität dieser Beziehungen entspricht der der verwendeten Geschwindigkeitsprofile. Ausgehend vom Zweischichtenmodell turbulenter Grenzschichten werden dabei die verwendeten Geschwindigkeitsprofile ausführlich diskutiert und ausgewählt. Für konkrete Berechnungsalgorithmen dreidimensionaler Grenzschichten werden drei Profilkombinationen ausgewählt. Im zweidimensionalen Fall wird mit einem Profil gearbeitet.

Die Schließung der Berechnungsalgorithmen, welche hier als die Bestimmung der Dissipationsintegrale verstanden wird, erfolgte über die Auswertung der ursprünglichen Grenzschichtgleichungen. Durch Einsetzen der Geschwindigkeitsprofile in die Grenzschichtgleichungen und Umformung werden explizite Schubspannungsverteilungen gewonnen. Diese Verteilungen werden entsprechend der Definition der Dissipationsintegrale zu deren Ableitung herangezogen. Diese Vorgehensweise ermöglicht die Beschreibung der Grenzschicht an einem bestimmten Ort auf einer umströmten Oberfläche nicht nur in Abhängigkeit vom Druckgradienten sondern auch in Abhängigkeit von den Gradienten der Parameter des Geschwindigkeitsprofils. Letzteres ist Ausdruck des Nichtäquilibriumcharakters der Grenzschichtentwicklung.

Dem Aufbau der Berechnungsalgorithmen schließen sich umfangreiche Testrechnungen an. Es wurden zwei dreidimensionale Grenzschichten vor einem Hindernis sowie 16 zweidimensionale Grenzschichten mit unterschiedlichen Verläufen der Druckgradienten nachgerechnet. Die Ergebnisse der dreidimensionalen Rechnungen stimmen zufrieden stellend mit Messungen überein. Die angesprochenen Potenziale der Verfahren wie Bestimmung expliziter Grenzschichtprofile und darauf aufbauend die Berechnung des Strömungswinkels und des Winkels der wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten wurden demonstriert. Die zweidimensionalen Testfälle zeigen die Konkurrenzfähigkeit der Dissipationsintegralverfahren zu Verfahren, welche auf den Reynoldsgleichungen beruhen, insbesondere den  $k, \epsilon$  - Modellen, auf.

Mit der vorliegenden Arbeit wurden die Möglichkeiten des Einsatzes von Integralverfahren für die Berechnung turbulenter Grenzschichten erweitert. Bei sachgerechter Anwendung stellen sie ein wertvolles und schnelles Werkzeug der Strömungsmechanik dar.

## 7 Literaturverzeichnis

- Abrahamson, S.; Lonnes, S. (1993): An integral method for turbulent boundary layers on rotating disks. ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, 614 - 619
- Afzal, N.; Yajnik, K. (1973): Analysis of turbulent pipe and channel flows at moderately large Reynolds number. J. Fluid Mech., Vol. 61, 23 - 31.
- Afzal, N. (1976): Millikan's argument at moderately Reynolds number. Physics of Fluids, Vol. 19, 600 - 602.
- Albring, W. (1961): Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodor Steinkopf Dresden und Leipzig
- Bolte, W. (1980): Zur Berechnung turbulenter Grenzschichten. VDI Reihe 7, Nr. 55, VDI-Verlag, Düsseldorf
- Barenblatt, G.I. (1993): Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis. J. Fluid Mech., Vol. 248, 513 - 520
- Barenblatt, G.I.; Chorin, A.J.; Prostokishin, V.M. (2000a): Self-similar intermediate structures in turbulent boundary layers at large Reynolds number, J. Fluid Mech., Vol. 410, 263 - 283
- Barenblatt, G.I.; Chorin, A.J.; Prostokishin, V.M. (2000b): Analysis of experimental investigations of self-similar intermediate structures in zero-pressure boundary layers at large Reynolds number. PAM - 777, University of California at Berkeley
- Bouras, B.; Karagiannis, F.; Leoutsakos, G.; Giannakoglou, K.C.; Papailiou, K.D. (1996): Arbitrary blade section design based on viscous considerations - Background information. ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 118, 358 - 363
- Bradshaw, P. (1994): Turbulence: the chief outstanding difficulty of our subject. Experiments in Fluid, Vol. 16, 203 - 216
- Bruns, J.M.; Fernholz, H.H.; Monkewitz, P.A. (1999): An experimental investigation of a three-dimensional turbulent boundary layer in an 'S'-shaped duct, J. Fluid Mech., Vol. 393, 149 - 174
- Bush, W.B.; Fendell, F.E. (1972): Asymptotic analysis of turbulent channel and boundary-layer flow. J. Fluid Mech., Vol. 56, 657- 681
- Buschmann, M. (2001): Power law or logarithmic law for canonical turbulent boundary layers ? - Part II. Symposium Topical Problems of Fluid Mechanics, Prague
- Buschmann, M.; Gad-el-Hak, M. (2000): Power Law or Log Law for the Turbulent Boundary Layer ? Bulletin American Physical Society, Vol. 459, 160
- Buschmann, M. (1996): Contribution to the calculation of turbulent boundary layers using dissipation integral methods. 9<sup>th</sup> – International Symposium on Thermal Problems, Singapore
- Buschmann, M. (1992): Zur Berechnung laminarer, transitionaler und turbulenter ebener isothermer Grenzschichten sowie von Rezirkulationsgebieten und der Relaminarisierung mit halbempirischen Ansätzen. Dissertation TU Dresden
- Choi, K.-S. (1998): Private communication
- Coles, D. E. (1956): The law of the wake in the turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., Vol. 1, 191 - 226
- Coles, D.E.; Hirt, E.A. (1968): Computation of turbulent boundary layers. AFOSR - IFT - Stanford Conference, Vol. 2
- Cousteix, J.; Houdeville, R. (1981): Singularities in three-dimensional turbulent boundary-layer calculation and separation. AIAA-Journal, Vol. 19, 976 - 985
- Das, D.K. (1992): An inverse inner-variable theory for separated turbulent boundary layers. ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 114, 543 - 553

- Dechow, R. (1976): Mittlere Geschwindigkeit und Reynoldsscher Spannungstensor in der dreidimensionalen turbulenten Wandgrenzschicht vor einem stehenden Zylinder. Dissertation Universität Karlsruhe
- Degani, A.T.; Smith, F.T.; Walker, J.D.A. (1993): The structure of a three-dimensional turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, Vol. 250, 43 - 68
- Devenport, W.J.; Simpson, R.L. (1992): Flow past a wing-body junction - Experimental evaluation of turbulence models, *AIAA-Journal*, Vol. 30, 873 - 881
- Driver, M.D.; Seegmiller, H.L. (1985): Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA-Journal*, Vol. 23, 163 - 172
- Felsch, K.-O. (1972): Turbulente Wandgrenzschichten in zweidimensionalen inkompressiblen Strömungen. *Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen*, Heft 13, Karlsruhe
- Felsch, K.-O. (1968): Beitrag zur Berechnung turbulenter Grenzschichten in zwei-dimensionalen inkompressiblen Strömungen, Dissertation Universität Karlsruhe
- Felsch, K.-O.; Paulsen, L.; Schulenberg, T. (1983): Experimentelle Untersuchung der dreidimensionalen turbulenten Grenzschicht vor einem senkrecht auf einer ebenen Wand stehenden Zylinder. *VDI Reihe 7, Nr. 79*, VDI-Verlag, Düsseldorf
- Fernholz, H.H.; Krause, E. (1982): Three-dimensional turbulent boundary layers. *IUTAM Symposium Berlin*, Springer-Verlag, Berlin
- Ferziger, J.H. (1997): Introduction to the physics and simulation of turbulence, *Lecture Series 1997-03 - Introduction to the modelling of turbulence*, von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Belgien
- Gad-el-Hak, M.; Bandyopadhyay, P.R. (1994): Reynolds number effects in wall-bounded turbulent flows. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, no. 8, 307 - 364
- George, K.; Castillo, L. (1997): Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, 689 - 729
- Geropp, D. (1963): Näherungstheorie für kompressible laminare Grenzschichten mit zwei Formparametern für das Geschwindigkeitsprofil. Dissertation Universität Karlsruhe
- Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik - Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Verlag Vieweg, Wiesbaden
- Gill, A. E. (1968): The Reynolds number similarity argument. *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 47, 437- 441
- Goldstein, U.; Reshotko, E. (1984): Scaling and modeling of three-dimensional pressure-driven turbulent boundary layers. *AIAA-Journal*, Vol. 22, 914 - 920
- Gostelow, J.P.; Hong, G.; Walker, G.J.; Dey, J. (1994): Modeling of boundary layer transition in turbulent flows by linear combination integral method. *ASME-Report 94-GT-358*
- Großmann, C.; Roos, H.-G. (1994): *Numerik der partiellen Differentialgleichungen*. Verlag B. G. Teubner, Stuttgart
- Hauke, W. (1978): Zur Bestimmung der Wirbelzähigkeit von turbulenten Wandgrenzschichten. *Maschinenbautechnik*, Bd. 27, S. 322 - 326
- Horlock, J.H.; Evans, R.L. (1975): The momentum-integral equation for a boundary layer with turbulence or ordered unsteadiness in the free stream. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 97, 126 - 129
- Jischa, M. (1982): *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Verlag Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden
- Johnston, J.P. (1998): Review : Diffuser design and performance analysis by a unified integral method. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 120, 6 - 18

- Johnston, J.P. (1960): On the three-dimensional turbulent boundary layer generated by secondary flow. *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, 233 - 246
- Johnston, J.P.; Flack, K.A. (1996): Review - Advances in three-dimensional turbulent boundary layers with emphasis on the wall-layer regions. *ASME J. Fluids Engineering*, Vol. 118, 219 - 232
- von Kármán, Th. (1930): *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse, 58 - 68
- Karimipannah, M.T.; Olsson, E. (1992): Calculation of three-dimensional boundary layers on rotor blades using integral methods. ASME-Report 92-GT-210
- Kim, M.S. (1993): Berechnung zweidimensionaler Körperumströmungen mit Totwasser und Relativbewegung gegenüber der Berandung. Dissertation Universität Siegen
- Klauer, J. (1989): Berechnung ebener turbulenter Scherschichten mit Ablösung und Rückströmung bei hohen Reynoldszahlen. Dissertation Ruhr-Universität Bochum
- Köster, H.; Wichmann, G. (1996): Investigation on a transport aircraft wing with an optimized trailing edge. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 60, 197 - 204
- Kus, U.; Chauvin, J. (1995): Performance of turbomachinery cascades as affected by upstream turbulence. *Journal Physic III France*, Vol. 5, 1599 - 1620
- Lewkowicz, A.K. (1982): An improved universal wake function for turbulent boundary layers and some of its consequences. *Zeitschrift für Flugw. und Weltraumforschung*, Vol. 7, 261 - 266
- Lighthill, M.J. (1958): On displacement thickness. *J. Fluid Mech.*, 384 - 392
- Maruscic, I. (1991): The structure of zero- and adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers. PhD-Thesis, University of Melbourne, Australia
- Meinert, J. (2000): Haftreibung und Wärmeübergang in einer turbulenten Grenzschicht mit Fremdgasstranspiration. Dissertation TU Dresden
- Mellor, G.L. (1972): The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 851 - 873
- Mikielewicz, J. (1997): Impingement of two-phase gas-liquid jet on a flat plate. *Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery*, Gdansk, Poland
- Millikan, C.B. (1938): A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. *Proceedings 5<sup>th</sup> International Congress on Applied Mechanics*, Wiley NY, 386 - 392
- Morgado, F.T.F.; Gato, L.M.C. (1992): An integral calculation method for incompressible three-dimensional boundary layers in axisymmetric diffusers. *International Journal Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, 150 - 157
- Mughal, B.; Drela, M. (1993): A calculation method for the three-dimensional boundary-layer equations in integral form. AIAA-Paper 93-0786, Reno NV
- Myring, D.F. (1970): An integral prediction method for three-dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow. RAE-TR 70147
- Oljaca, M.; Sucec, J. (1997): Prediction of transpired turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradient. *ASME Journal of Fluid Engineering*, Vol. 119, 526 - 532
- Ölçmen, S.M.; Simpson, R.L. (1995): An experimental study of a three-dimensional pressure-driven turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, Vol. 290, 225 - 262
- Ölçmen, M.S. ; Simpson, R.L. (1992): Perspective : On the near wall similarity of three-dimensional turbulent boundary layers. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 114, 487 - 495
- Österlund, J.M. (1999): Experimental studies of zero pressure gradient turbulent boundary layer. PhD-Thesis, Stockholm
- Österlund, J.M.; Johansson, A.V.; Nagib, H.M.; Hites, M.H. (2000): A note on the overlap region in turbulent boundary layers. *Physics of Fluids*, Vol. 12, 1 - 4

- Osaka, H.; Kameda, T.; Mochizuki, S. (1998): Re-examination of the Reynolds number effect on the mean flow quantities in a smooth wall turbulent boundary layer. *JSME International Journal, Series B*, Vol. 41, 123-129
- Panton, R.L. (2000a): Some issues concerning wall turbulence. Privatkommunikation
- Panton, R.L. (2000b): Power law or log law; that is NOT the question. *Bul. Am. Phys. Soc.*, Vol. 459, 160 - 161
- Panton, R.L. (1990): Scaling turbulent wall layers. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 112, 425 - 432
- Perry, A.E.; Marusic, I.; Li, J.D. (1994): Wall turbulence closure based on classical similarity laws and the attached eddy hypothesis. *Physics of Fluids*, Vol. 6, 1024 - 1035
- Prandtl, L. (1932): Zur turbulenten Strömung in Röhren und längs Platten. *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen*, 18 - 29
- Prandtl, L. (1945): Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen. *Festschrift zum 60. Geburtstag von A. Betz, Göttingen*, 134 - 141
- Roach, P.E.; Brierley, D.H. (1990): The influence of a turbulent free stream on zero pressure gradient transitional boundary layer development. Cambridge University Press
- Shevchuk, I.V. (1999): Prediction of heat transfer and fluid flow over a rotating disk: Effect of the radial velocity profile. 4<sup>th</sup>-International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, Dresden, Germany
- Simpson, R.L.; Chew, Y.-T.; Shivaprasad, B.G. (1981): The structure of a separating turbulent boundary layer, Part 1 - Mean flow and reynolds stresses. *J. Fluid Mech.*, Vol. 113, 23 - 51
- Schlichting, H.; Gersten, K. (1997): *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Smith, P.D. (1982): The numerical Computation of Three-dimensional boundary layers. in *Tree-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, Berlin, (ed. H.H. Fernholz)
- So, R.M.C. (1975): Momentum integral for curved shear layers, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 97, 253 - 256
- Spalart, P. (1989): Direct simulation of turbulent boundary layer up to  $Re_{\delta_2} = 1410$ . *J. Fluid Mech.*, Vol. 187, 61 - 98
- Stock, H. W. (1977): *Integralverfahren zur Berechnung dreidimensionaler laminarer und turbulenter Grenzschichten*. Dornier GmbH
- Sucec, J.; Oljaca, M. (1995): Calculation of tubulent boundary layers with transpiration and pressure gradient effects, *International Journal Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, 2855 - 2862
- Sucec, J. (1995): The double integral method applied to separation calculation. *International Journal Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, 2771 - 2777
- Tennekes, H. (1968): Outline of a second-order theory of turbulent pipe flow. *AIAA-Journal*, Vol. 6, 1735-1740
- Truckenbrodt, E. (1972): Die Integralbeziehungen der Grenzschichttheorie in : *Beiträge zur Grenzschichttheorie Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 72 - 76*
- Voges, R. (1979): *Berechnung turbulenter Wandgrenzschichten mit Zwei-Gleichungs-Turbulenz-Modellen*. Dissertation Universität München
- Walz, A. (1966): *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*, Karlsruhe
- Wiegardt, K. (1948): Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten, *Ingenieur-Archiv*, Bd. 16, 231 - 237
- Wilcox, D.C. (1993): Comparison of Two-Equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient. *AIAA-Journal*, Vol. 31, 1414 - 1421
- Zagarola, M.V.; Perry, A.E.; Smits, A.J. (1997): Log laws or power laws: The scaling in the overlap region. *Physics of Fluids*, Vol. 9, 2094 - 2100

## Anhang 1

### Integralverfahren zur Berechnung zwei- und dreidimensionaler Grenzschichten

- (I) Berechnungsgegenstand
- (II) Eigenschaften der berechneten Grenzschichten
- (III) Klassifikation entsprechend der Ausgangsgleichungen (siehe Tabelle 1.2.1)
- (IV) Gelöste integrale Bilanzgleichungen
- (V) Schließungsannahme (Semi-empirical frame)

### Integralverfahren für zweidimensionale Grenzschichten

Autor	M. Oljaca, J. Sucec (1997) J. Sucec; M. Oljaca (1995)
(I)	keine Spezifikation
(II)	turbulent mit Absaugung bzw. Ausblasung / anliegend / inkompressibel
(III)	direktes Impulsverfahren
(IV)	Impulsbilanz
(V)	Geschwindigkeitsprofil nach Stevenson / Silva-Freire ("law of the wall / law of the wake - Formulierung")

Autoren	U. Kus; J. Chauvin (1995)
(I)	Auslegung von Schaufeln von Axialmaschinen
(II)	laminar, transitional, turbulent / anliegend / inkompressibel
(III)	direktes Dissipationsintegralverfahren
(IV)	Impulsbilanz / Energiebilanz
(V)	Lösung nach Le Foll Empirisches Transitionsmodell für zweidimensionale Grenzschichten

Autor	M. S. Kim (1993)
(I)	zweidimensionale Fahrzeugumströmung / Drei-Zonen-Modell
(II)	laminar und turbulent mit Absaugung bzw. Ausblasung / anliegend inkompressibel
(III)	direktes Dissipationsintegralverfahren
(IV)	Impulsbilanz / Energiebilanz
(V)	laminar : zweiparametrisches Geschwindigkeitsprofil nach Geropp turbulent : erweiterter Coles-Ansatz Umschlagpunkt : Kriterium nach Arnal basierend auf $e^n$ - Methode

Autor	D. K. Das (1992)
(I)	keine Spezifikation
(II)	turbulent / anliegend und abgelöst / inkompressibel
(III)	inverses Impulsverfahren
(IV)	inverse Impulsbilanz
(V)	Coles-Profil mit polynomialer Wakefunktion neue Funktion für : $\pi = f(\beta)$



## Verfahren für dreidimensionale Grenzschichten

Autor	I. V. Shevchuk (1999)
(I)	Berechnung des Wärmeüberganges an geheizten, rotierenden Scheiben
(II)	nichtisotherme Strömungs- und Temperaturgrenzschichten / inkompressibel
(III)	Impulsverfahren Zylinderkoordinaten
(IV)	Impulsbilanz in Umfangsrichtung Impulsbilanz in radialer Richtung Bilanz der thermischen Energie
(V)	Potenzansätze für Geschwindigkeits- und Temperaturprofile halbempirische Beziehungen für Wandschubspannung und Nusselt-Zahl

Autoren	B. Bouras; F. Karagiannis; G. Leoutsakos; K. C. Giannakoglou; K. D. Papailiou (1996)
(I)	Schaufelauslegung in Turbomaschinen
(II)	laminar, turbulent / anliegend, abgelöst / inkompressibel, kompressibel auf gekrümmten Oberflächen
(III)	Die integralen Bilanzen für Impuls und Energie werden von Bouras et al. durch Subtraktion der reibungsbehafteten Gleichungen des realen Fluids von den reibungsfreien Gleichungen der Außenströmung und anschließender Integration gewonnen. Sie sind nicht mit den hier hergeleiteten integralen Bilanzen identisch. Das Verfahren von Bouras et al. wird daher auch nicht als Dissipationsintegralverfahren im Sinne von M. Jischa (1982) eingestuft. Es kommen Stromlinienkoordinaten zur Anwendung.
(IV)	Impulsbilanz in Richtung der Außenstromlinie Energiebilanz in Richtung der Außenstromlinie im turbulenten Fall zusätzlich eine Bilanzgleichung für die turbulente kinetische Energie
(V)	laminar inkompressibel : Falkner / Skan - Profile laminar kompressibel : eigene Beziehungen turbulent : eigene Beziehungen

Autoren	B. Mughal, M. Drela (1993)
(I)	Dreidimensionale Grenzschichten auf Tragflügeln
(II)	turbulent / inkompressibel
(III)	Dissipationsintegralverfahren
(IV)	Impulsbilanz in Hauptströmungsrichtung Impulsbilanz in Querströmungsrichtung Energiebilanz in Hauptströmungsrichtung
(V)	Hauptstromprofil : Swafford- Ansatz Querstromprofil : Johnston Hodograph Halbempirischer Ansatz für Dissipationsintegral in Hauptströmungsrichtung unter Einbeziehung des Cebeci-Smith Wirbelviskositätsmodells

Autor	S. Abrahamson, S. Lonnes (1993)
(I)	rotierende Scheiben - Compact Disks Scheiben in rotierenden Maschinen
(II)	turbulent / anliegend / inkompressibel, rotationssymmetrisch
(III)	direktes Impulsverfahren Zylinderkoordinaten
(IV)	Impulsbilanz in Umfangsrichtung Impulsbilanz in radialer Richtung
(V)	selbstähnliche Geschwindigkeitsprofile in radialer und tangentialer Richtung

Autoren	M. T. Karimipana, E. Olsson (1992)
(I)	Berechnung der Grenzschichtströmung auf Laufschaufeln von Kompressoren
(II)	laminar, transitional, turbulent / anliegend / inkompressibel, kompressibel auf gekrümmten Oberflächen unter Corioliskrafteinfluß
(III)	direktes Entrainmentverfahren schaufelorientierte krummlinige mitrotierende Koordinaten
(IV)	Impulsbilanz in Richtung der Außenstromlinie Impulsbilanz normal zur Richtung der Außenstromlinie Entrainmentgleichung
(V)	Wandschubspannung $c_{f\kappa}$ aus nicht näher erläuterten Geschwindigkeitsprofil Querstrommodell nach Michel Entrainmentfunktion nach Michel Transitionsmodell mit $e^n$ -Methode sowie empirischen Beziehungen nach Granville (Hauptströmungsrichtung) und Owen (Querströmungsrichtung) für kompressible Strömung empirischer Ansatz nach Narasimha

Autoren	F. T. F. Morgado, L. M. C. Gato (1991)
(I)	Auslegung achssymmetrischer Diffusoren mit verdrallter Kernströmung
(II)	turbulent / anliegend / inkompressibel / an achssymmetrischen Wänden
(III)	direktes Entrainmentverfahren Stromlinienkoordinaten
(IV)	Impulsbilanz in Richtung der Außenstromlinie Impulsbilanz normal zur Richtung der Außenstromlinie Entrainmentgleichung
(V)	Coles-Profil mit trigonometrischer Wakefunktion in Hauptströmungsrichtung Mager-Profil in Querstromrichtung Ansätze der Entrainmentfunktion nach Head bzw. Nicoll / Escudier

## Anhang 2.1

### Zur Herleitung der dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen

$$\text{Kontinuitätsgleichung : } \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A 2.1.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z} = -\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial Y} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.2})$$

$$\int_0^Y \partial v \sim \left( \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right) \int_0^Y \partial Z \quad (\text{A 2.1.3})$$

$$v \sim u_\delta \frac{\partial \delta}{\partial X} + w_\delta \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.4})$$

Scher- und Normalspannungen

$$\overline{u'^2} \sim \overline{v'^2} \sim \overline{w'^2} \sim \overline{u'v'} \sim \overline{u'w'} \sim \overline{v'w'} \sim u_\tau^2 \quad (\text{A 2.1.5})$$

X-Komponente der Reynoldsgleichungen

$$\text{Trägheitsglieder : } \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.6})$$

$$\frac{\partial u}{\partial Z} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \quad (\text{A 2.1.7})$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.8})$$

$$\text{Reibungsglieder : } \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \frac{\partial Z^2}{\partial X^2} \sim \frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 \quad (\text{A 2.1.9})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial Z} \sim \frac{1}{\delta} \frac{u_\delta}{\delta} = \frac{u_\delta}{\delta^2} \quad (\text{A 2.1.9})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \frac{\partial Z^2}{\partial Y^2} \sim \frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 \quad (\text{A 2.1.10})$$

Glieder der Scher- und Normalspannungen:

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial X} = \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.11})$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial Z} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \quad (\text{A 2.1.12})$$

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Y} = \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.13})$$

Z-Komponente

Trägheitsglieder :

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.14})$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z} = -\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial Y} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.15})$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} + \frac{w_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 \quad (\text{A 2.1.16})$$

Reibungsglieder :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial X} \sim \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \left[ \frac{u_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right] \quad (\text{A 2.1.17})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \sim \frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^3 + \frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.18})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial Z} \sim \frac{u_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.19})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Y} \sim \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \left[ \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} + \frac{w_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (\text{A 2.1.20})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \sim \frac{u_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial X} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 + \frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^3 \quad (\text{A 2.1.21})$$

Glieder der Scher- und Normalspannungen: 
$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial X} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.22})$$

$$\frac{\partial v'^2}{\partial Z} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \quad (\text{A 2.1.23})$$

$$\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial Y} = \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.24})$$

Y-Komponente

Trägheitsglieder: 
$$\frac{\partial w}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.25})$$

$$\frac{\partial w}{\partial Z} \sim \frac{w_\delta}{\delta} \quad (\text{A 2.1.26})$$

$$\frac{\partial w}{\partial Y} = \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.27})$$

Reibungsglieder: 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} \frac{\partial Z^2}{\partial X^2} \sim \frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 \quad (\text{A 2.1.28})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial w}{\partial Z} \sim \frac{1}{\delta} \frac{w_\delta}{\delta} = \frac{w_\delta}{\delta^2} \quad (\text{A 2.1.29})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} \frac{\partial Z^2}{\partial Y^2} \sim \frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 \quad (\text{A 2.1.30})$$

Glieder der Scher- und Normalspannungen: 
$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial X} = \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.31})$$

$$\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial Z} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \quad (\text{A 2.1.32})$$

$$\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial Y} = \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial Y} \sim \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.33})$$

Tabelle A 2.1.1

Proportionalität der einzelnen Terme der X-Komponente der Reynoldsgleichungen

Glieder erster Ordnung : ohne Unterstreichung

Glieder zweiter Ordnung : einfach unterstrichen

Glieder dritter Ordnung : doppelt unterstrichen

Term der Reynoldsgleichung	ist proportional zu Term
$u \frac{\partial u}{\partial X}$	$\sim u \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X}$
$+ v \frac{\partial u}{\partial Z}$	$\sim \left( \frac{u_\delta^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{u_\delta w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)$
$+ w \frac{\partial u}{\partial Y}$	$\sim w \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y}$
$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X}$	
$+ v \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$	$\sim \underline{\underline{\frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2}}$
$+ v \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$	$\sim \frac{u_\delta}{\delta^2}$
$+ v \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$	$\sim \underline{\underline{\frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2}}$
$-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial X}$	$\sim \underline{\underline{\frac{u_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2}}$
$-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial Z}$	$\sim \frac{u_\delta^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X}$
$-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Y}$	$\sim \underline{\underline{\frac{u_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)}}$

Tabelle A 2.1.2

Proportionalität der einzelnen Terme der Z-Komponente der Reynoldsgleichungen

Glieder erster Ordnung : ohne Unterstreichung

Glieder zweiter Ordnung : einfach unterstrichen

Glieder dritter Ordnung : doppelt unterstrichen

Term der Reynoldsgleichung	ist proportional zu Term
$u \frac{\partial v}{\partial X}$	$\sim \left( \underline{\underline{u \frac{u_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2}} + \underline{\underline{u \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}}} \right)$
$+ v \frac{\partial v}{\partial Z}$	$\sim \left( \underline{\underline{\frac{u_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2}} + \underline{\underline{\frac{u_\delta w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}}} + \underline{\underline{\frac{u_\delta w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}}} + \underline{\underline{\frac{w_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2}} \right)$
$+ w \frac{\partial v}{\partial Y}$	$\sim \underline{\underline{w \frac{u_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}}} + \underline{\underline{w \frac{w_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2}}$
$= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z}$	
$+ v \frac{\partial^2 v}{\partial X^2}$	$\sim \left( \underline{\underline{\frac{u_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^3}} + \underline{\underline{\frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \delta}{\partial Y}}} \right)$
$+ v \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}$	$\sim \left( \frac{u_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)$
$+ v \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}$	$\sim \left( \underline{\underline{\frac{u_\delta}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial X} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2}} + \underline{\underline{\frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^3}} \right)$
$- \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial X}$	$\sim \underline{\underline{\frac{u_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2}}$
$- \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial Z}$	$\sim \frac{u_\tau^2}{\delta}$
$- \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Y}$	$\sim \underline{\underline{\frac{w_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2}}$



Tabelle A 2.1.3

Proportionalität der einzelnen Terme der Y-Komponente der Reynoldsgleichungen

Glieder erster Ordnung : ohne Unterstreichung

Glieder zweiter Ordnung : einfach unterstrichen

Glieder dritter Ordnung : doppelt unterstrichen

Term der Reynoldsgleichung	ist proportional zu Term
$u \frac{\partial w}{\partial X}$	$\sim u \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y}$
$+v \frac{\partial w}{\partial Z}$	$\sim \left( \frac{u_\delta w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} + \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)$
$+w \frac{\partial w}{\partial Y}$	$\sim w \frac{w_\delta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial Y}$
$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y}$	
$+v \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}$	$\sim \frac{w_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2$
$+v \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}$	$\sim \frac{w_\delta}{\delta^2}$
$+v \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}$	$\sim \frac{w_\delta}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2$
$-\frac{\partial \overline{u'w}}{\partial X}$	$\sim \frac{u_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2$
$-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial Z}$	$\sim \frac{u_\delta^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X}$
$-\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial Y}$	$\sim \frac{u_\delta^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)$

Integration von Gleichung (2.1.7)

$$0 = -\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{\rho} p_{\infty} + v \frac{\partial v_{\infty}}{\partial Z} - \overline{v_{\infty}'^2} \quad (\text{A 2.1.34})$$

Differentiation nach X bzw. nach Y

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial X} + v \frac{\partial^2 v_{\infty}}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial \overline{v_{\infty}'^2}}{\partial X} \quad (\text{A 2.1.35})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial Y} + v \frac{\partial^2 v_{\infty}}{\partial Y \partial Z} - \frac{\partial \overline{v_{\infty}'^2}}{\partial Y} \quad (\text{A 2.1.36})$$

Tabelle A 2.1.4

Term der Gleichung (A 2.1.35)	ist proportional zu Term
$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X}$	
$+\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial X}$	
$+v \frac{\partial^2 v_{\infty}}{\partial X \partial Z}$	$\sim \frac{u_{\delta}}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2 + \frac{w_{\delta}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}$
$-\frac{\partial \overline{v_{\infty}'^2}}{\partial X}$	$\sim \frac{u_{\delta}^2}{\delta} \left( \frac{\partial \delta}{\partial X} \right)^2$

Tabelle A 2.1.5

Term der Gleichung (A 2.1.36)	ist proportional zu Term
$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y}$	
$+\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial Y}$	
$+v \frac{\partial^2 v_{\infty}}{\partial Y \partial Z}$	$\sim \frac{u_{\delta}}{\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y} + \frac{w_{\delta}}{\delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2$
$-\frac{\overline{\partial v_{\infty}^{\prime 2}}}{\partial Y}$	$\sim \frac{u_{\delta}^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial X} \frac{\partial \delta}{\partial Y}$

## Anhang 2.2

### Zur Herleitung der generellen Form der Integralgleichungen

Die Herleitung wird hier nur für die x-Komponente der Grenzschichtgleichungen dargestellt. Die y-Komponente wird in analoger Form aufbereitet und führt zu Gleichung 2.2.3. Die für den zweidimensionalen Fall verbleibenden Terme sind doppelt unterstrichen.

Grenzschichtgleichung (2.1.6)

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{\underline{w \frac{\partial u}{\partial z}}} + K_2 v^2 + K_{12} u v = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_1} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial z} \left[ v \frac{\partial u}{\partial z} - u' w' \right]}} \quad (\text{A 2.2.1})$$

Schreiben der Gl. (A 2.2.1) für den Grenzschichttrand

$$\frac{u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} + \frac{v_\delta}{h_2} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} + K_2 v_\delta^2 + K_{12} u_\delta v_\delta = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_1} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} \quad (\text{A 2.2.2})$$

Unter Verwendung von (A 2.2.2) wird der Druckterm in (A 2.2.1) eliminiert

$$\frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{\underline{w \frac{\partial u}{\partial z}}} + K_2 v^2 + K_{12} u v - \frac{u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{v_\delta}{h_2} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} - K_2 v_\delta^2 + K_{12} u_\delta v_\delta = \underline{\underline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}}} \quad (\text{A 2.2.3})$$

Multiplikation der Grenzschichtgleichung mit der Gewichtsfunktion  $u^k$  (siehe Tabelle 2.2.1)

$$\frac{u^{k+1}}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u^k v}{h_2} \frac{\partial u}{\partial y} + \underline{\underline{u^k w \frac{\partial u}{\partial z}}} + K_2 (u^k v^2 - u^k v_\delta^2) + K_{12} (u^{k+1} v - u^k u_\delta v_\delta) - \frac{u^k u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \frac{u^k v_\delta}{h_2} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} = \underline{\underline{\frac{u^k}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}}} \quad (\text{A 2.2.4})$$

Multiplikation der Kontinuitätsgleichung mit der Gewichtsfunktion  $\frac{u^{(k+1)}}{(k+1)}$  und Umformung

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{u^{k+1}}{(k+1)} \frac{\partial (h_2 u)}{\partial x} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{u^{k+1}}{(k+1)} \frac{\partial (h_1 v)}{\partial y} + \underline{\underline{\frac{u^{k+1}}{(k+1)} \frac{\partial w}{\partial z}}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{A 2.2.5})$$

Integration über der Grenzschichtdicke von Gleichung (A 2.2.5) und Umformung nach  $w_\delta$  liefert

$$\underline{\underline{w_\delta}} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dz + \frac{u_\delta}{h_1} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\delta v dz + \frac{v_\delta}{h_2} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_0^\delta u dz - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \int_0^\delta v dz \quad (\text{A 2.2.6})$$

Umformung und Integration von (A 2.2.4) über der wandnormalen Koordinate

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{(k+1)} \int_0^\delta \frac{\partial(h_2 u^{k+2})}{\partial x} dz}} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{(k+1)} \int_0^\delta \frac{\partial(h_1 u^{k+1} \cdot v)}{\partial y} dz + \underline{\underline{\frac{1}{(k+1)} \int_0^\delta \frac{\partial(u^{k+1} \cdot w)}{\partial z} dz}} \\ + K_2 \int_0^\delta (u^k v^2 - u^k v_\delta^2) dz + K_{12} \int_0^\delta (u^{k+1} v - u^k u_\delta v_\delta) dz \\ - \underline{\underline{\int_0^\delta \frac{u^k u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} dz}} - \int_0^\delta \frac{u^k v_\delta}{h_2} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} dz = - \underline{\underline{\int_0^\delta \frac{u^k}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz}} \quad (\text{A 2.2.7}) \end{aligned}$$

Umformung der Parameterintegrale in (A 2.2.7) entsprechend

$$\frac{d}{dx} \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy = \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, g_1(x)) \cdot g_1'(x) - f(x, g_2(x)) \cdot g_2'(x) \quad (\text{A 2.2.8})$$

liefert

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{(k+1)} \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^{k+2} dz - h_2 u_\delta^{k+1} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \int_0^\delta \left( u^{k+2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) dz \right\}}} \\ + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{(k+1)} \left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\delta (u^{k+2} v) dz - h_1 u_\delta^{k+1} v_\delta \frac{\partial \delta}{\partial y} + \int_0^\delta \left( u^{k+1} v \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) dz \right\} \\ + \underline{\underline{\frac{1}{(k+1)} u_\delta^{k+1} w_\delta}} + K_2 \int_0^\delta (u^k v^2 - u^k v_\delta^2) dz + K_{12} \int_0^\delta (u^{k+1} v - u^k u_\delta v_\delta) dz \\ - \underline{\underline{\frac{u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} \int_0^\delta u^k dz}} - \frac{v_\delta}{h_2} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \int_0^\delta u^k dz = - \underline{\underline{\frac{1}{\rho} \int_0^\delta u^k \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz}} \quad (\text{A 2.2.9}) \end{aligned}$$

Nach Entdimensionierung und Neuordnen der Terme folgt die generelle Form der Integralgleichungen in x-Richtung  
(siehe auch Gleichung 2.2.2 und Tafel A 2.3.1 in Anhang 2.3)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right) \right]}_{f_k} dz + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right) \right]}_{m_k} dz \\
& + \left[ \frac{1}{h_1} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] * \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right) \right]}_{f_k} dz \\
& + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{(k+2)}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{(k+2)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right] * \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right) \right]}_{m_k} dz \\
& + \left[ \frac{1}{h_2} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial y} - \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) + \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) \right] * \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) \left( \frac{u}{u_e} \right)^k - \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^k \right]}_{l_k} dz \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{(k+1)}{u_e} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} * \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right) \left( \frac{u}{u_e} \right)^k - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^k \right]}_{g_k} dz \\
& - \frac{(k+1)}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} * \int_0^\delta \underbrace{\left[ \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \left( \frac{u_\delta}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_\delta}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \left( \frac{v}{u_e} \right)^k \right) \right]}_{q_k} dz = \underbrace{(k+1) \frac{1}{\rho u_e^2} \int_0^\delta \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz}_{(A 2.2.10)}
\end{aligned}$$

(A 2.2.10)

## **Anhang 2.3**

### **Formelverzeichnisse für Integralgleichungen**

Allgemeine Form der integralen Grenzschichtdicken in X-Richtung	Integrale Impulsbilanzen k = 0	Integrale Energiebilanzen k = 1
$f_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\delta_{11} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_{11} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$m_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{u}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\delta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$g_k = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^k \right] dz$	$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_1 = 0$
$q_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\delta_{22} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_3 = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$
$l_k = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^k \right] dz$	$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_2 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) \right] dz$

Tafel A 2.3.1 : Integrale Grenzschichtdicken der integralen Bilanzen in x-Richtung



Allgemeine Form der integralen Grenzschichtdicken in Y-Richtung	Integrale Impulsbilanzen k = 0	Integrale Energiebilanzen k = 1
$s_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{v}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\delta_{21} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_{21} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{v}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$r_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^{k+1} - \left( \frac{v}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\delta_{22} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_{22} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^2 - \left( \frac{v}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$p_k = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{v}{u_e} \right)^k \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^k \right] dz$	$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \right] dz$	$-\Delta_2 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) \right] dz$
$t_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^k - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v}{u_e} \right)^k \right] dz$	$\delta_{11} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_3 = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{u_e} \right) \left[ \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{u}{u_e} \right) \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$
$u_k = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{v}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right)^k \right] dz$	$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{v_{\delta}}{u_e} \right) - \left( \frac{v}{u_e} \right) \right] dz$	$\Delta_1 = 0$

Tafel A 2.3.2 : Integrale Grenzschichtdicken der integralen Bilanzen in y-Richtung

Allgemeine Form der integralen Grenzschichtdicken in Hauptströmungsrichtung	Integrale Impulsbilanz k = 0	Integrale Energiebilanz k = 1
$f_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\vartheta_{11} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \right] dz$	$\Theta_{11} = \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$m_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^{k+1} \right] dz$	$\vartheta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \right] dz$	$\Theta_{12} = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 \right] dz$
$g_k = \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^k - \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \right] dz$	$\vartheta_1 = \int_0^{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \right] dz$	$\Theta_1 = 0$
$q_k = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^k \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$	$\vartheta_{22} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$	$\Theta_{21} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$
$l_k = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right)^k dz$	$\vartheta_2 = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) dz$	$\vartheta_2 = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) \left( \frac{u_{\delta}}{u_e} \right) dz$

Tafel A 2.3.3 : Integrale Grenzschichtdicken in Hauptströmungsrichtung (s-Koordinate)

Allgemeine Form der integralen Grenzschichtdicken in Querströmungsrichtung	Integrale Impulsbilanz k = 0	Integrale Energiebilanz k = 1
$s_k = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^{k+1} dz$	$\vartheta_{21} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left( \frac{v_n}{u_e} \right) dz$	$\Theta_{21} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right) \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$
$r_k = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^{k+2} dz$	$\vartheta_{22} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^2 dz$	$\Theta_{22} = - \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^3 dz$
$p_k = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^k dz$	$\delta$	$- \vartheta_2 = \int_0^{\delta} \left( \frac{v_n}{u_e} \right) dz$
$t_k = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 \left( \frac{v_n}{u_e} \right)^k dz$	$\vartheta_4 = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 dz$	$\Theta_4 = - \int_0^{\delta} \left( \frac{u_s}{u_e} \right)^2 \left( \frac{v_n}{u_e} \right) dz$
$u_k = 0$		

Tafel A 2.3.4 : Integrale Grenzschichtdicken in Querströmungsrichtung (n-Koordinate)

$\delta_1 = \vartheta_1 \cos[\lambda] - \vartheta_2 \sin[\lambda]$
$\delta_2 = \vartheta_1 \sin[\lambda] + \vartheta_2 \cos[\lambda]$
$\delta_{11} = \vartheta_{11} \cos^2[\lambda] - (\vartheta_{12} + \vartheta_{21}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] + \vartheta_{22} \sin^2[\lambda]$
$\delta_{12} = \vartheta_{12} \cos^2[\lambda] + (\vartheta_{11} - \vartheta_{22}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] + \vartheta_{21} \sin^2[\lambda]$
$\delta_{22} = \vartheta_{22} \cos^2[\lambda] + (\vartheta_{12} + \vartheta_{21}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] + \vartheta_{11} \sin^2[\lambda]$
$\delta_{21} = \vartheta_{21} \cos^2[\lambda] + (\vartheta_{11} - \vartheta_{22}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] - \vartheta_{12} \sin^2[\lambda]$
$c_{fx} = c_{fs} \cos[\lambda] - c_{fn} \sin[\lambda]$
$c_{fy} = c_{fs} \sin[\lambda] + c_{fn} \cos[\lambda]$
$\Delta_2 = \vartheta_2$
$\Delta_3 = \Theta_{21} \cos^3[\lambda] + (2 \Theta_{12} - \Theta_{22} + \Theta_4) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] + (\Theta_{11} - 2 \Theta_{12}) \sin^2[\lambda] \cos[\lambda] - \Theta_4 \sin^3[\lambda]$
$\Delta_4 = \Theta_4 \cos^3[\lambda] + (\Theta_{11} - 2 \Theta_{21}) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] + (\Theta_{22} + \vartheta_2 - 2 \Theta_4) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] - \Theta_{21} \sin^3[\lambda]$
$\Delta_{11} = \Theta_{11} \cos^3[\lambda] - (3 \Theta_{12} + 2 \vartheta_2) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] + 3 \Theta_{21} \sin^2[\lambda] \cos[\lambda] - \Theta_{22} \sin^3[\lambda]$
$\Delta_{12} = \Theta_{12} \cos^3[\lambda] + (\Theta_{11} - 2 \Theta_{21}) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] + (-2 \Theta_{12} - 2 \vartheta_2 + \Theta_{22}) \sin^2[\lambda] \cos[\lambda] + \Theta_{21} \sin^3[\lambda]$
$\Delta_{21} = \Theta_{21} \cos^3[\lambda] + (-\Theta_{22} + 2 \Theta_{12} + 2 \vartheta_2) \sin[\lambda] \cos^2[\lambda] + (\Theta_{11} - 2 \Theta_{21}) \sin^2[\lambda] \cos[\lambda] - \Theta_{12} \sin^3[\lambda]$
$\Delta_{22} = \Theta_{22} \cos^3[\lambda] + 3 \Theta_{21} \sin[\lambda] \cos[\lambda] + (3 \Theta_{12} + 2 \vartheta_2) \sin^2[\lambda] \cos[\lambda] + \Theta_{11} \sin^3[\lambda]$
$c_{Dy} = c_{Dss} \sin^2[\lambda] + (c_{Dsn} + c_{Dns}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] + c_{Dnn} \cos^2[\lambda]$
$c_{Dy} = c_{Dss} \sin^2[\lambda] + (c_{Dsn} + c_{Dns}) \sin[\lambda] \cos[\lambda] + c_{Dnn} \cos^2[\lambda]$

Tafel A 2.3.5 : Transformationsregeln der Grenzschichtgrößen

## Anhang 2.4

### Zur Analyse des Differentialgleichungssystems

$P_{12}(H) = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{21}} = \frac{(1-H)(15+7H)}{(15+8H+H^2)}$
$P_{22}(H) = \frac{\vartheta_{11} \vartheta_{22}}{\vartheta_{21}^2} = \frac{6(1-H)(2+H)}{(12+7H+H^2)}$
$B_{11}(H) = \frac{\Theta_{11} \vartheta_{22}}{\vartheta_{21}^2} = \frac{24H(1-H)(2+H)}{(12+20H+20H^2+3H^3)}$
$B_{12}(H) = \frac{\Theta_{12}}{\vartheta_{21}} = \frac{16H(1-H)(2+H)(9+13H)}{(-45-24H+402H^2+216H^3+27H^4)}$
$P'_{12}(H) = \frac{-48(5+5H+H^2)}{(15+8H+H^2)^2}$
$P'_{22}(H) = \frac{-12(13+14H+3H^2)}{(12+7H+H^2)^2}$
$B'_{11}(H) = \frac{24(-24+24H-33H^2-70H^3-17H^4)}{(12+20H+20H^2+3H^3)^2}$
$B'_{12}(H) = \frac{-32(135+255H+779H^2+730H^3+2173H^4+1895H^5+369H^6)}{(-45-24H+402H^2+216H^3+27H^4)^2}$

Tafel A 2.4.1 : Formparameterfunktionen und deren Ableitungen nach H für die Analyse nach D. F. Myring (siehe Kapitel 2.3.1)

$\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{11}} = C [H - 1]$
$\frac{\vartheta_{21}}{\vartheta_{11}} = -C H$
$\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta_{11}} = -C^2 [H - 1]$
$\frac{\Delta_{12}}{\vartheta_{11}} = C \left[ H + 1 - \frac{\Delta_{11}}{\vartheta_{11}} \right]$

Tafel A 2.4.2 : Formparameterfunktionen für die Analyse nach J. Cousteix und R. Houdeville (siehe Kapitel 2.3.2)

### Anhang 3

#### Dissipationsintegral für zweidimensionale turbulente Grenzschichten

$$c_D = \frac{S - [1.353(4.569 + 8.419\pi + 6.316\pi^2 + 1.859\pi^3 - 1.248S - 2.218\pi S - 1.525\pi^2 S - 0.381\pi^3 S + 0.128S^2 + 0.202\pi S^2 + 0.0945\pi^2 S^2)]}{(8.437 \cdot 10^6 + 1.334 \cdot 10^7 \pi + 6.240 \cdot 10^6 \pi^2 - 3.459 \cdot 10^6 S - 5.469 \cdot 10^6 \pi S - 2558400\pi^2 S + 694253S^2 + 706020\pi S^2)} +$$

$$\zeta^* = \frac{-[7.669 \cdot 10^6(-32.772 - 180.230\pi - 347.099\pi^2 - 313.663\pi^3 - 146.036\pi^4 - 29.008\pi^5 + 24.177S + 99.770\pi S + 139.145\pi^2 S + 87.542\pi^3 S + 21.956\pi^4 S - 4.570S^2 - 15.695\pi S^2 - 15.616\pi^2 S^2 - 5.266\pi^3 S^2 - 0.305S^3 + 0.800\pi S^3 + 0.407\pi^2 S^3)]}{[S(8.437 \cdot 10^6 + 1.334 \cdot 10^7 \pi + 6.24 \cdot 10^6 \pi^2 - 3.45917 \cdot 10^6 S - 5.469 \cdot 10^6 \pi S - 25584 \cdot 10^6 \pi^2 S + 694253S^2 + 706020\pi S^2)]} +$$

$$\beta^* = \frac{[1.572 \cdot 10^6(0.385 + 9.454\pi + 25.361\pi^2 + 26.410\pi^3 + 13506\pi^4 + 2.900\pi^5 - 2.657S - 9.128\pi S - 12.672\pi^2 S - 8.256\pi^3 S - 2.157\pi^4 S + 0.5286S^2 + 1.371\pi S + 1.239\pi^2 S^2 + 0.397\pi^3 S^2)]}{[(0.240 + 0.244\pi)(8.437 \cdot 10^6 + 1.334 \cdot 10^7 \pi + 6.240 \cdot 10^6 \pi^2 - 3.45917 \cdot 10^6 S - 5.469 \cdot 10^6 \pi S - 2558 \cdot 10^6 \pi^2 S + 694253S^2 + 706020\pi S^2)]}$$

## Anhang 4

### Zu den Parameterzusammenhängen dreidimensionaler Grenzschichten

Tafel A 4.1.1 : Allgemeine Parameterbeziehungen für die integralen Dicken

$$C_{IJ} = \int_0^1 \left( \frac{u_e - u}{u_e} \right)^I * \left( \frac{v}{u_e} \right)^J d\left( \frac{z}{\delta} \right)$$

Verdrängungsdicke in Hauptströmungsrichtung	$\frac{\vartheta_1}{\delta} = \frac{C10(\pi)}{S}$
Impulsverlustdicke in Hauptströmungsrichtung	$\frac{\vartheta_{11}}{\delta} = \frac{C10(\pi)}{S} - \frac{C20(\pi)}{S^2}$
Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung	$\frac{\Theta_{11}}{\delta} = 2 \frac{C10(\pi)}{S} - 3 \frac{C20(\pi)}{S^2} + \frac{C30(\pi)}{S^3}$
Summe aus Verdrängungsdicke des Querstromes und "Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke	$\frac{\vartheta_{12}}{\delta} = \frac{C11(\pi)}{S^2}$
erste "Kreuzprodukt"-Energieverlustdicke	$\frac{\Theta_{12}}{\delta} = -\frac{C21(\pi)}{S^3} + 2 \frac{C11(\pi)}{S^2}$
Verdrängungsdicke in Querströmungsrichtung	$\frac{\vartheta_2}{\delta} = -\frac{C01(\pi)}{S}$
Impulsverlustdicke in Querströmungsrichtung	$\frac{\vartheta_{22}}{\delta} = -\frac{C02(\pi)}{S^2}$
Energieverlustdicke in Querströmungsrichtung	$\frac{\Theta_{22}}{\delta} = -\frac{C03(\pi)}{S^3}$
"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke	$\frac{\vartheta_{21}}{\delta} = \frac{C11(\pi)}{S^2} - \frac{C01(\pi)}{S}$
zweite "Kreuzprodukt"-Energieverlustdicke	$\frac{\Theta_{21}}{\delta} = \frac{C12(\pi)}{S^3} - \frac{C02(\pi)}{S^2}$



Reine Hauptströmungsgrößen

$$C10(\pi) = \frac{59 + 60 \pi}{60 \kappa}$$

$$C20(\pi) = \frac{8437 + 13340 \pi + 6240 \pi^2}{4200 \kappa^2}$$

$$C30(\pi) = \frac{4569631121 + 8418625020 \pi + 6315819120 \pi^2 + 1859457600 \pi^3}{756756000 \kappa^3}$$

Größen in denen sowohl Parameter des Profiles in Hauptströmungsrichtung als auch in Querströmungsrichtung auftreten

$$C01(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \frac{\tan(\beta_0)(-773 - 672 \pi + 420 \kappa S)}{1260 \kappa}$$

$$C02(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \frac{\tan(\beta_0)^2 (3046893263 + 3936897900 \pi + 1485993600 \pi^2 - 2082520440 \kappa S - 1621620000 \kappa \pi S + 454053600 \kappa^2 S^2)}{2270268000 \kappa^2}$$

$$C03(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \tan(\beta_0)^3 * \left( \frac{-6135934407601087753}{1356487182322272000 \kappa^3} - \frac{4798077917287 \pi}{689877688500 \kappa^3} - \frac{50677454 \pi^2}{12167155 \kappa^3} - \frac{436 \pi^3}{455 \kappa^3} + \frac{41281594063 S}{11654042400 \kappa^2} + \frac{138344 \pi S}{32175 \kappa^2} + \frac{216 \pi^2 S}{143 \kappa^2} - \frac{72119 S^2}{64680 \kappa} - \frac{4 \pi S^2}{5 \kappa} + \frac{S^3}{7} \right)$$

$$C11(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \frac{\tan[\beta_0](-4610927 - 647446 \pi - 2679600 \pi^2 + 178563 \kappa S + 1552320 \kappa \pi S)}{2910600 \kappa^2}$$

$$C12(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \frac{\tan(\beta_0)^2 (22614195919409387 + 36342229185369900 \pi + 23025531757737600 \pi^2 + 5650242998400000 \pi^3 - 1244375583755304 \kappa S - 16078605975432000 \kappa \pi S - 6068916741888000 \kappa \pi^2 S + 2126295019648800 \kappa^2 S^2 + 1655706452400000 \kappa^2 \pi S^2)}{46359778066720000 \kappa^3}$$

$$C21(\pi, S, \tan(\beta_0)) = \frac{\tan(\beta_0) * (-311771659999 - 530575351306 \pi - 361307577400 \pi^2 + 96057561600 \pi^3 + 92310758540 \kappa S + 129618849360 \kappa \pi S + 53645592000 \kappa \pi^2 S)}{58270212000 \kappa^3}$$

Tafel A 4.1.3 : Parameterzusammenhänge für Profilsatz 3 : Coles / Lewkowicz / Johnston Ansatz

Reine Hauptströmungsgrößen

$$C10(\pi, S, A) = \frac{61 + 60\pi}{60\kappa}$$

$$C20(\pi, S, A) = \frac{13(1933 - 3060\pi + 1440\pi^2)}{12600\kappa^2}$$

$$C30(\pi, S, A) = \frac{4513811819\pi - 829560780\pi^2 - 1859457600\pi^3}{756756000\kappa^3}$$

Größen in denen sowohl Parameter des Profiles in Hauptströmungsrichtung als auch in Querströmungsrichtung auftreten

$$C01(\pi, S, A) = A * C10(\pi, S, A) = \frac{A(61 + 60\pi)}{60\kappa}$$

$$C02(\pi, S, A) = A * C20(\pi, S, A) = \frac{13A^2(1933 - 3060\pi + 1440\pi^2)}{12600\kappa^2}$$

$$C03(\pi, S, A) = A * C30(\pi, S, A) = \frac{A^3(4513811819\pi - 829560780\pi^2 - 1859457600\pi^3)}{756756000\kappa^3}$$

$$C11(\pi, S, A) = \frac{13A(1933 - 3060\pi + 1440\pi^2)}{12600\kappa^2}$$

$$C12(\pi, S, A) = \frac{A^2(4513811819 - 829560780\pi + 6245712720\pi^2 - 1859457600\pi^3)}{756756000\kappa^3}$$

$$C21(\pi, S, A) = \frac{A(4513811819 - 829560780\pi + 6245712720\pi^2 - 1859457600\pi^3)}{756756000\kappa^3}$$

## Anhang 5.1

### Berechnungsergebnisse für Testfall I

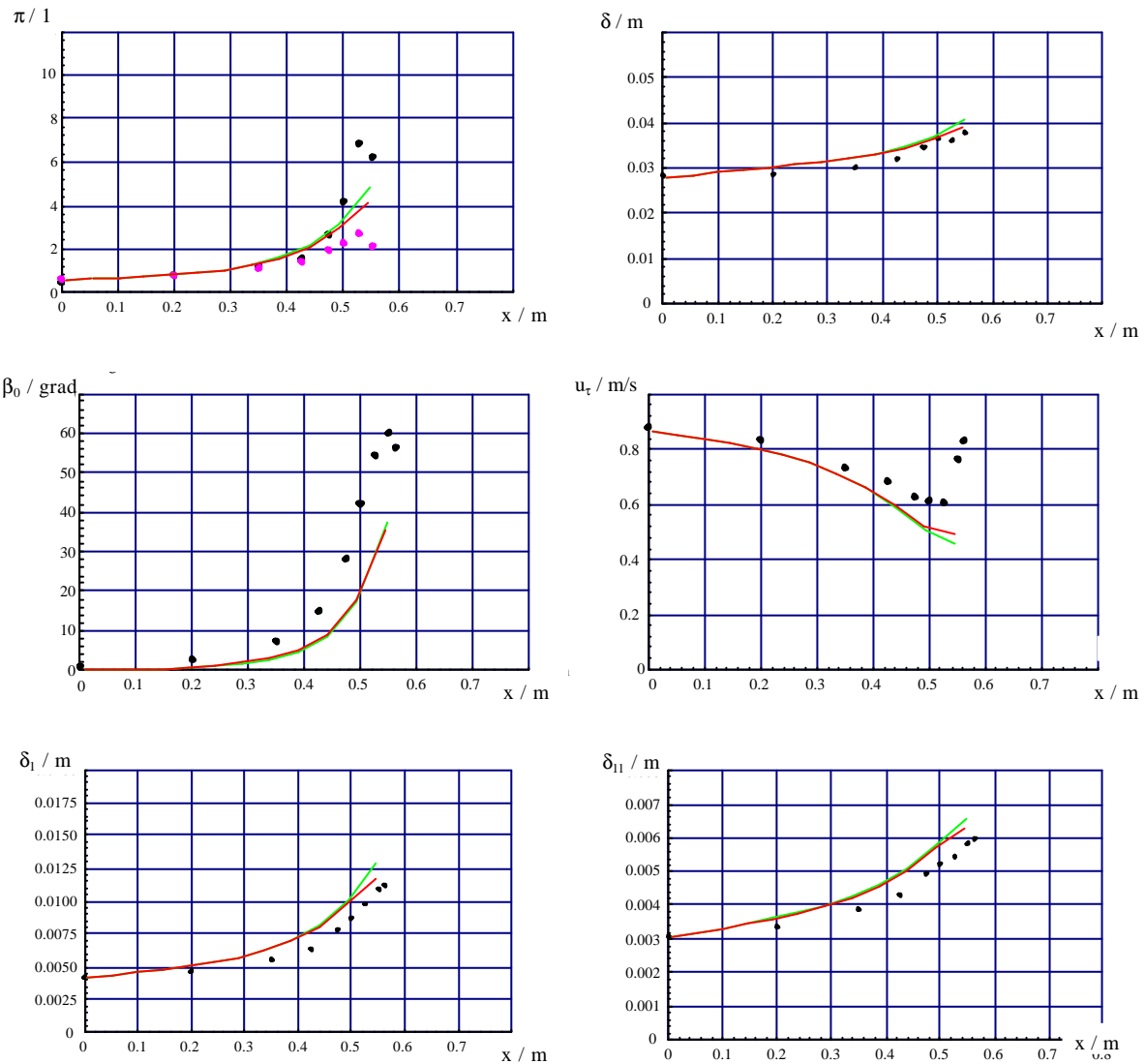


Bild 1 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben:

Wakeparameter der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke

Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung

Experiment : ●

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie  
benachbarten Stromlinien

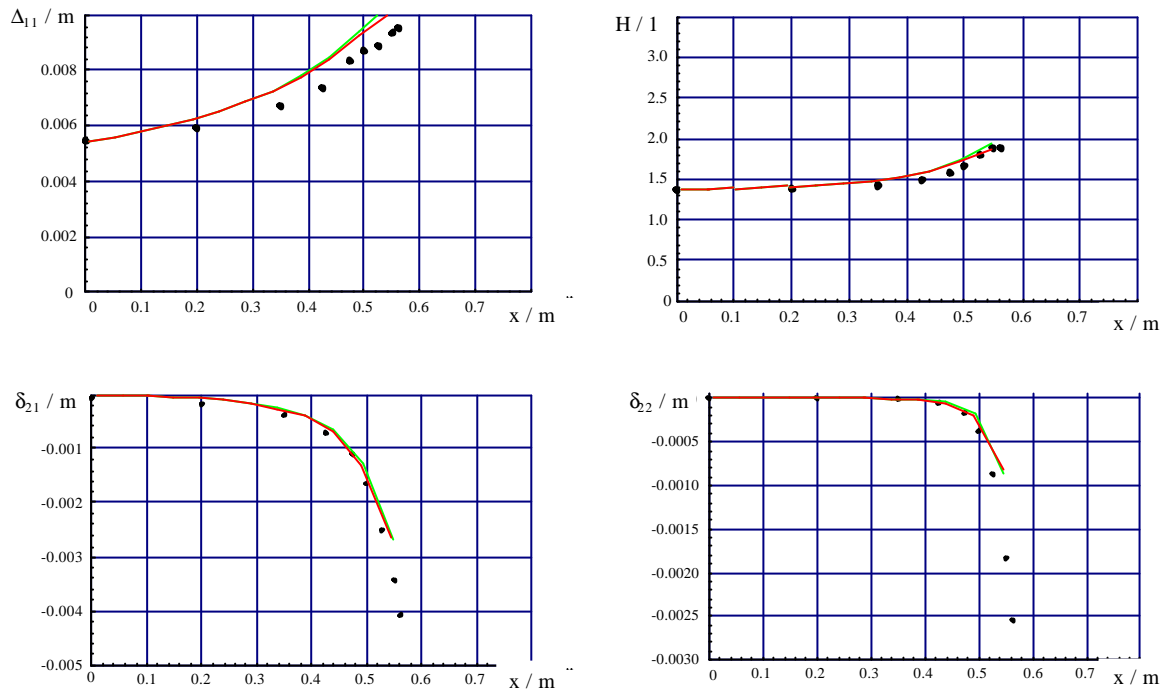


Bild 2 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : ●

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie  
benachbarten Stromlinien

folgende Seite

Bild 3 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils  
in Hauptströmungsrichtung

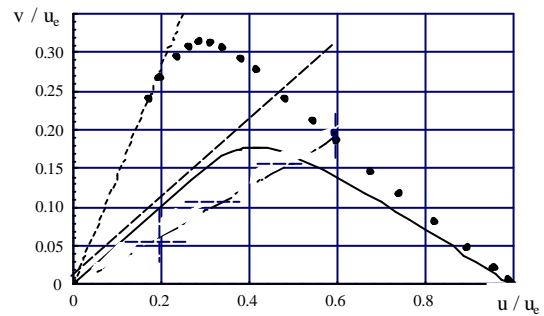
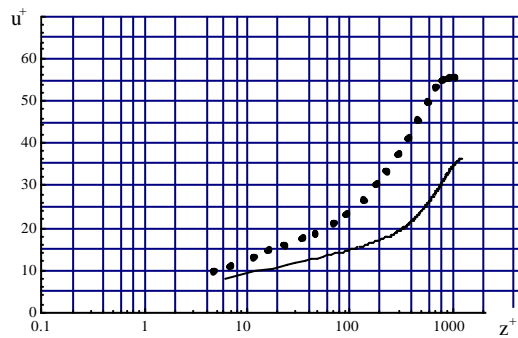
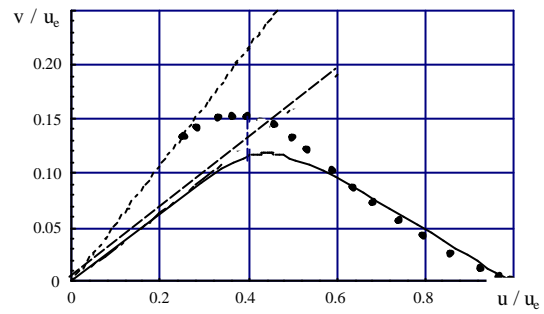
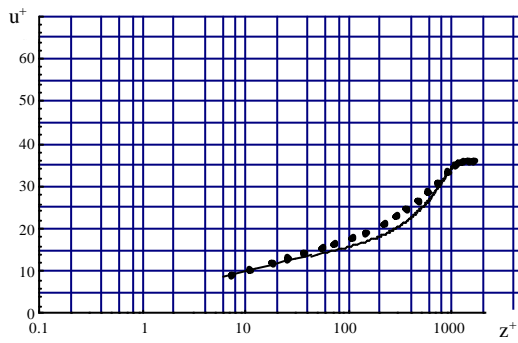
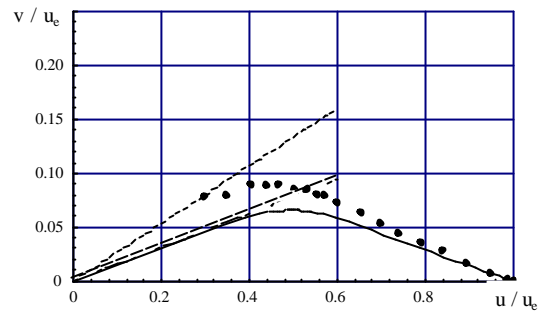
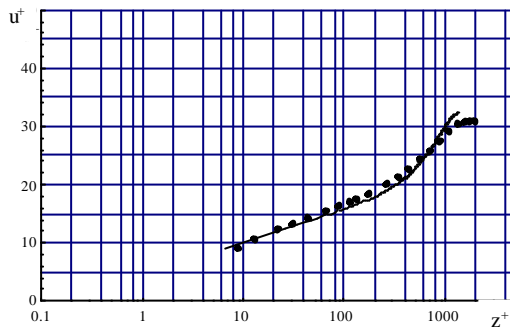
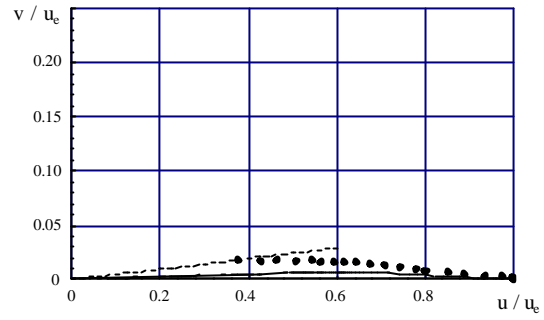
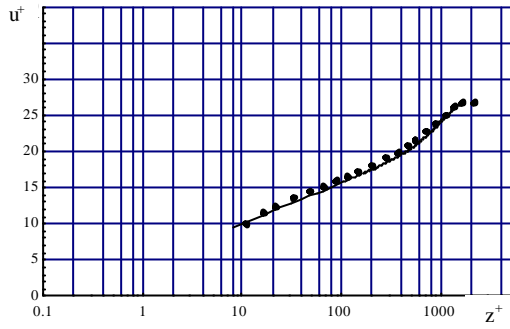
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in  
Stromlinienkoordinaten

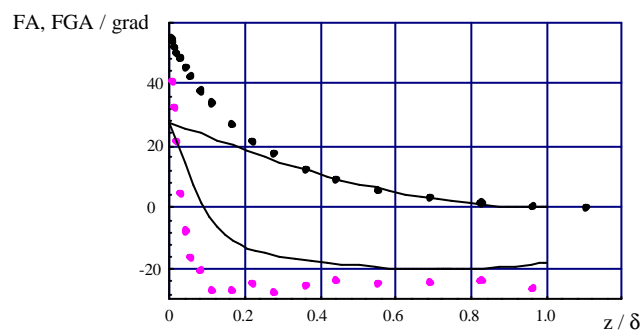
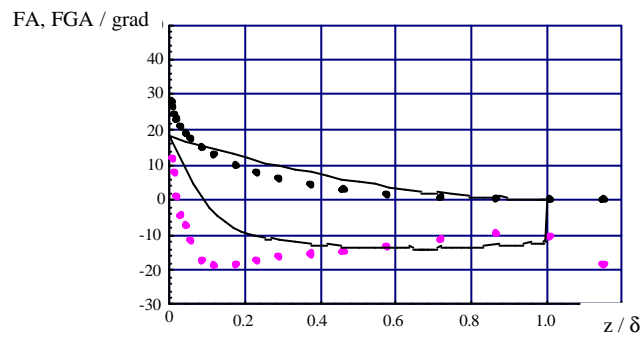
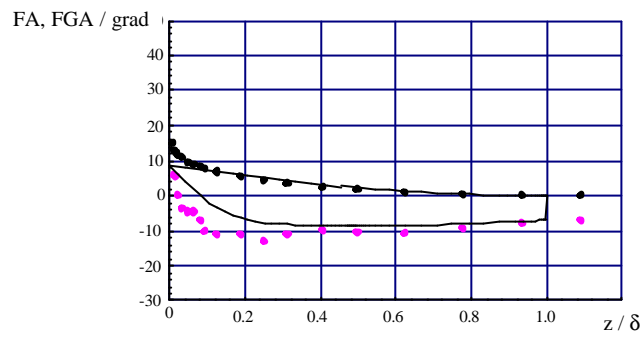
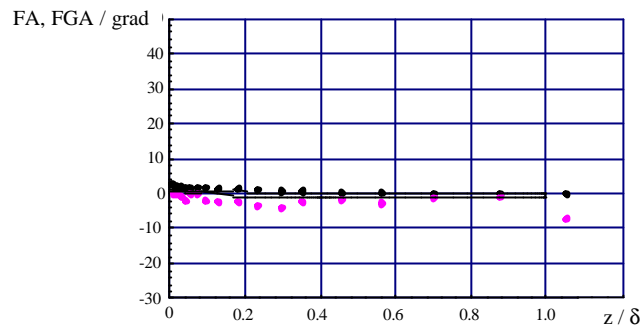
Experiment : ● / Berechnung : Volllinie

übernächste Seite

Bild 4 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Experiment : ● Winkel  $\beta_{FA}$  und ● Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Volllinie





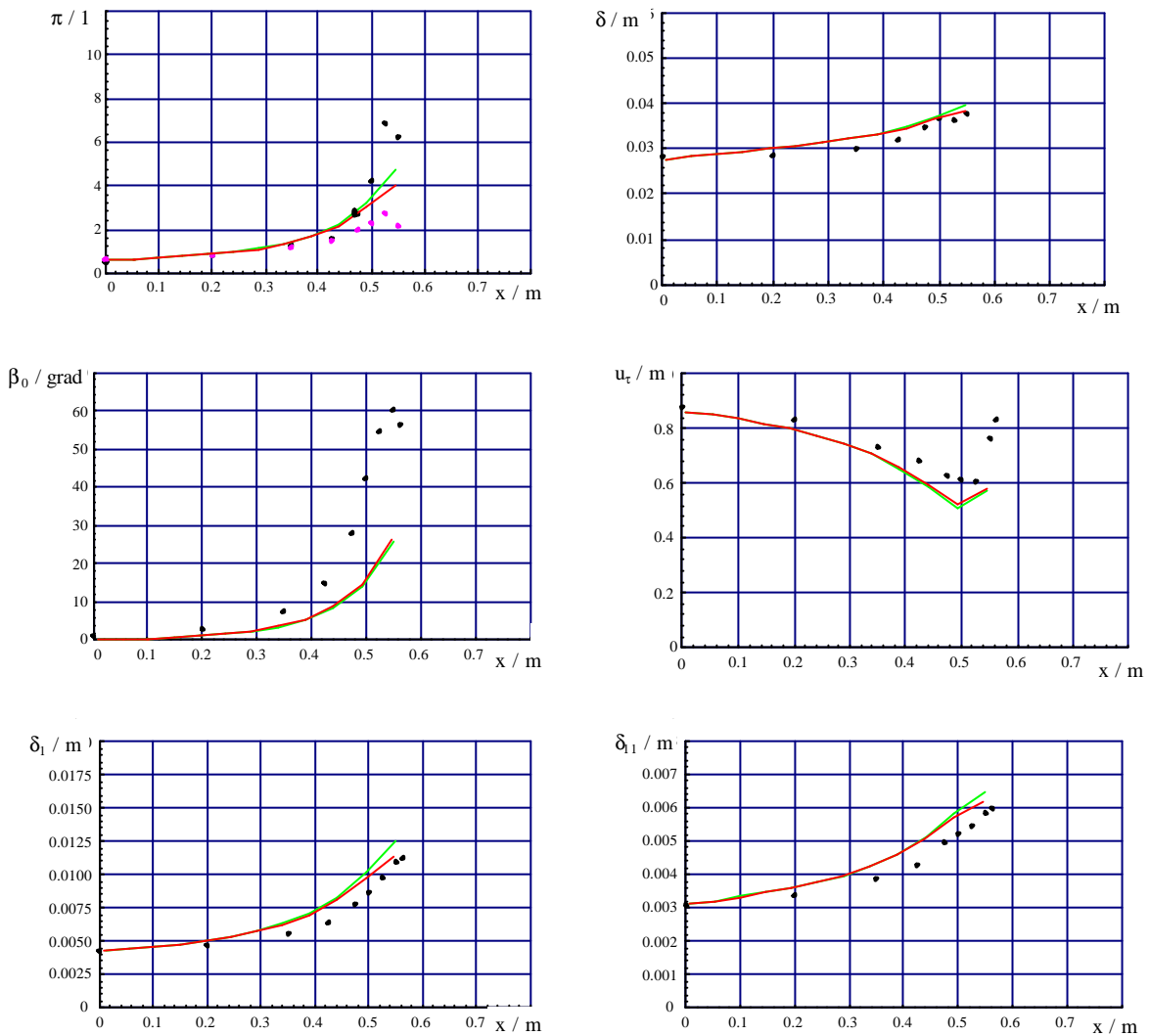


Bild 5 Ergebnisse des Verfahrens CLJ

Bilder von links oben :

Wakeparameter der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke

Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung

Symbole : •

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie

benachbarten Stromlinien



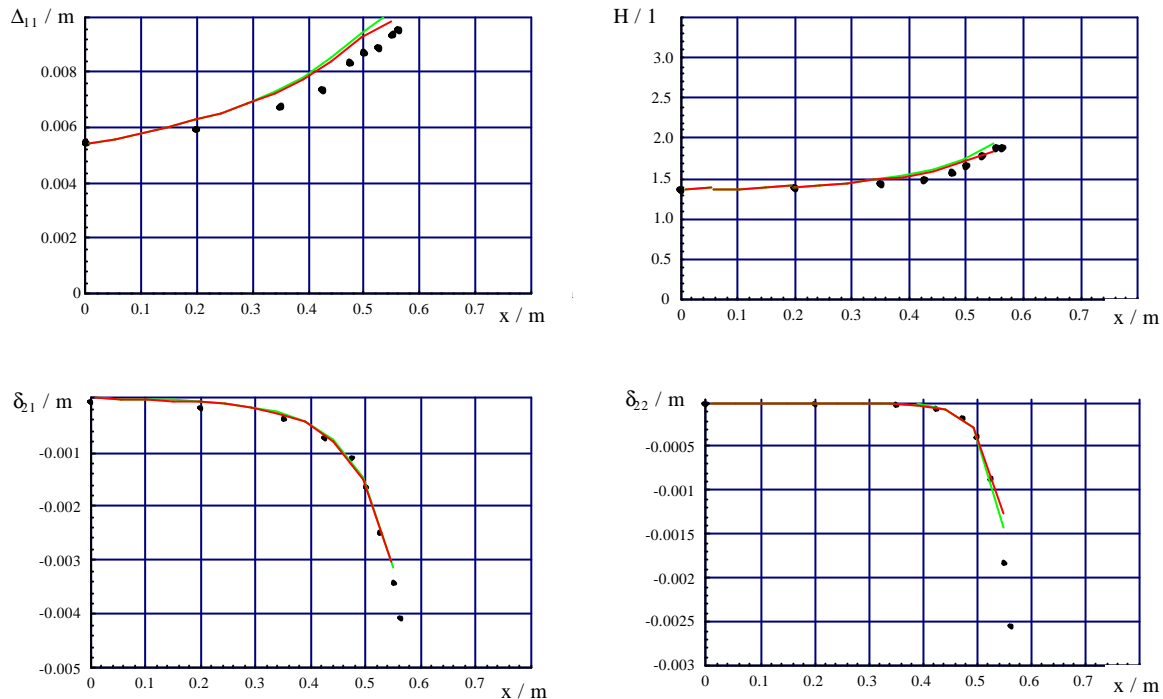


Bild 2 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : ●

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie  
benachbarten Stromlinien

folgende Seite

Bild 3 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils  
in Hauptströmungsrichtung

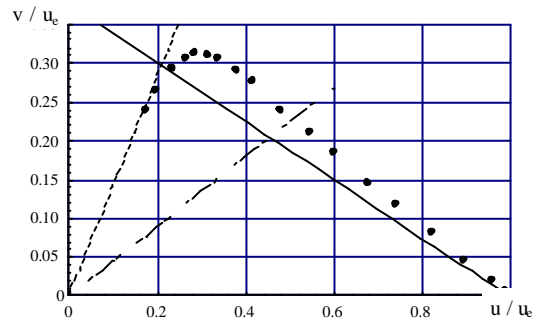
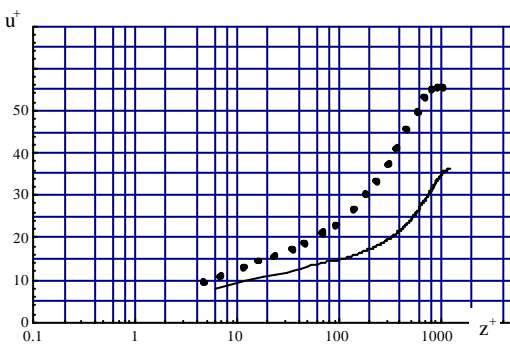
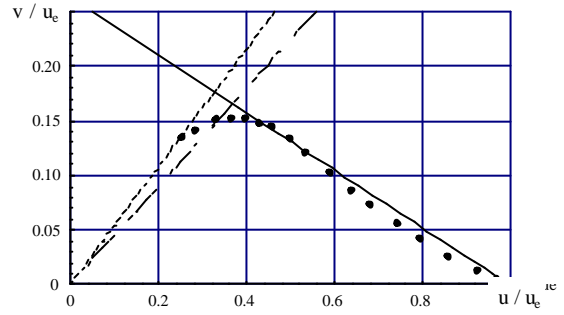
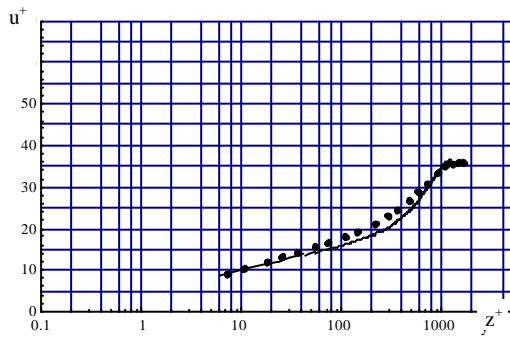
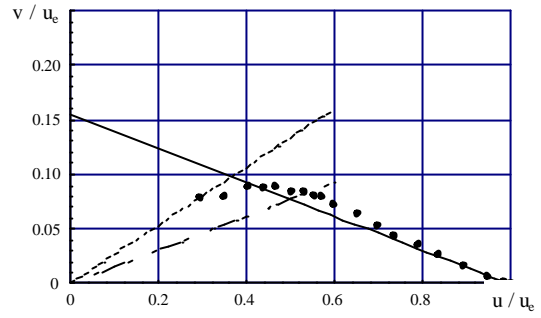
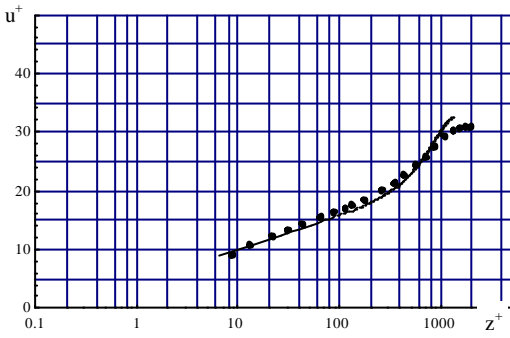
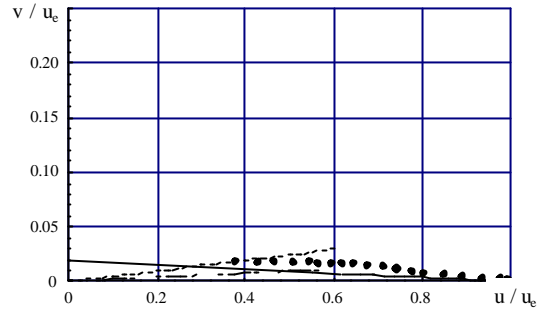
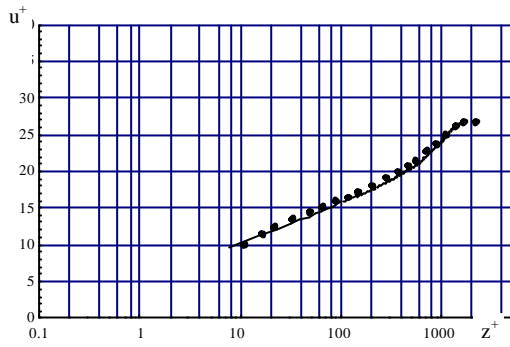
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in  
Stromlinienkoordinaten

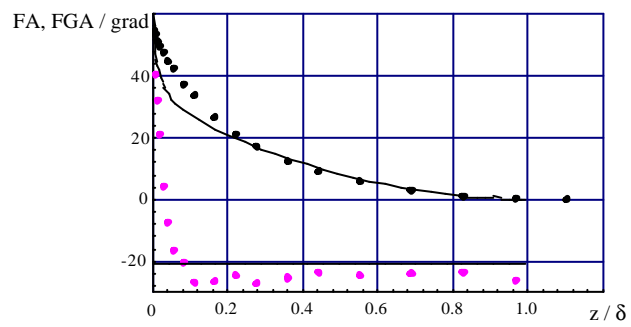
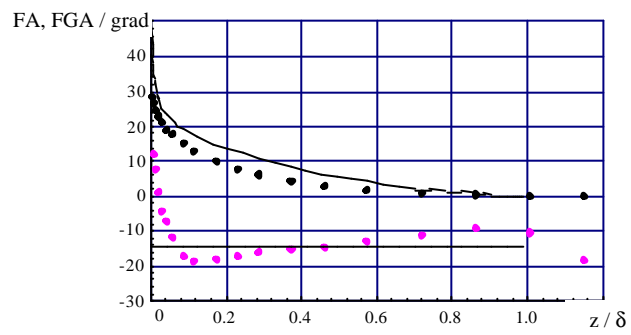
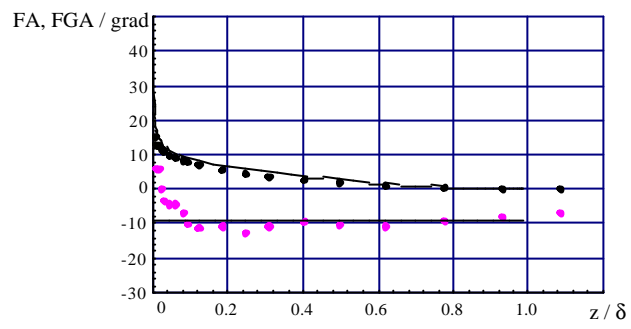
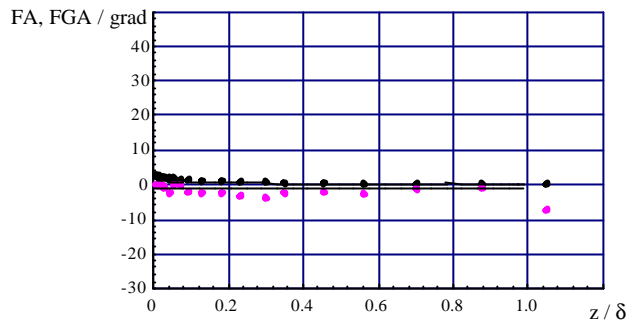
Experiment : ● / Berechnung : Volllinie

übernächste Seite

Bild 4 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Experiment : ● Winkel  $\beta_{FA}$  und ● Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Volllinie





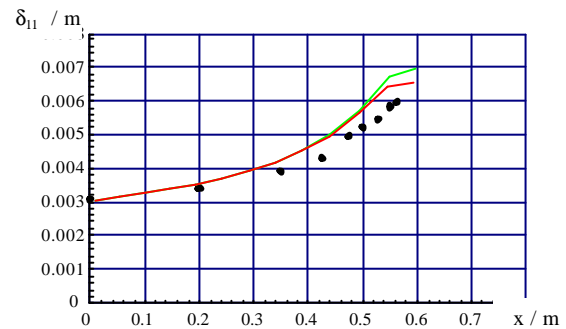
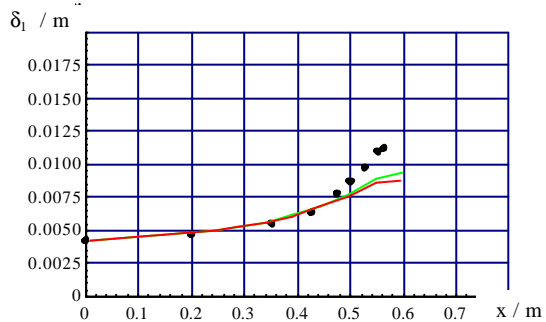
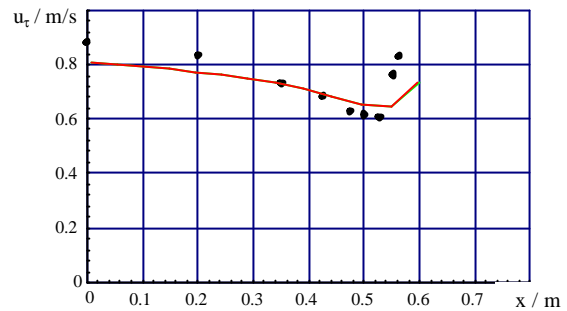
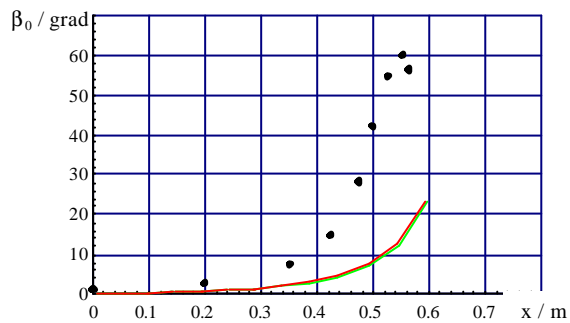
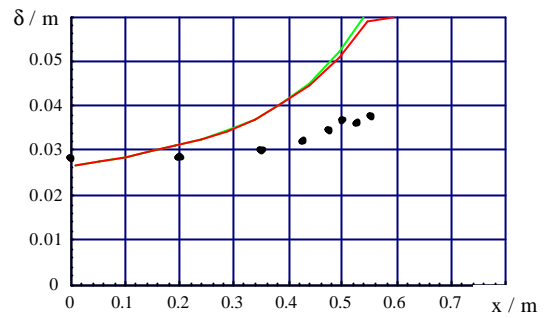
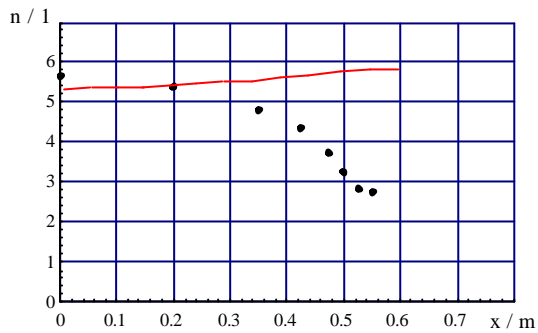


Bild 9 Ergebnisse des Verfahrens NM

Bilder von links oben :

Wakeparameter der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke

Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung

Symbole : ●

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie  
benachbarten Stromlinien

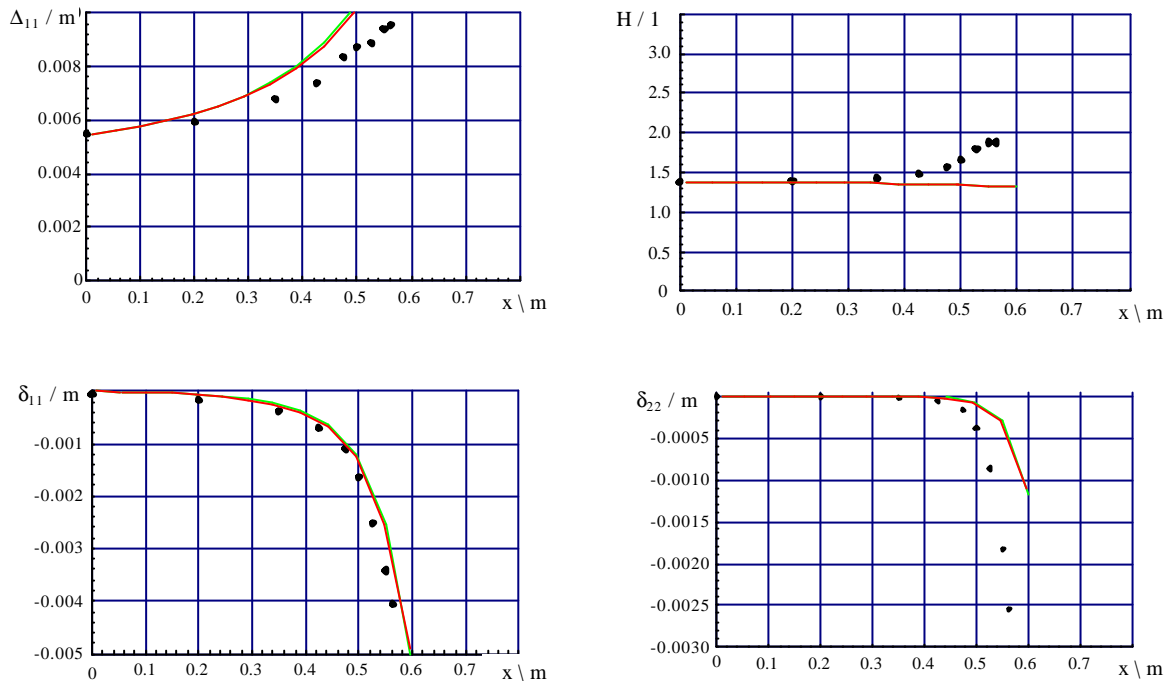


Bild 10 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : ●

rote / grüne Kurven : Rechnung auf den der im Experiment untersuchten Stromlinie  
benachbarten Stromlinien

folgende Seite

Bild 11 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils  
in Hauptströmungsrichtung

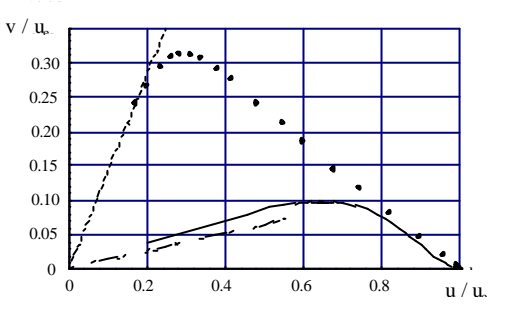
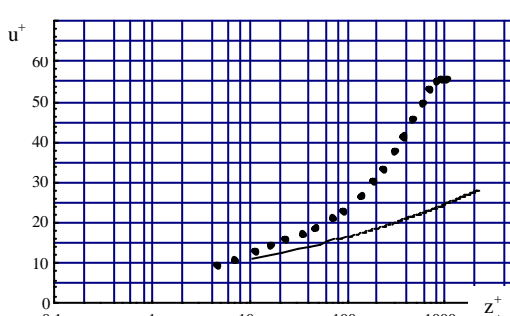
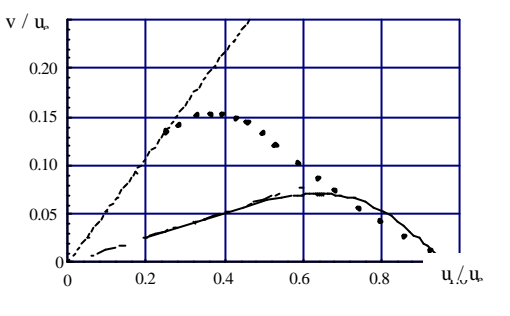
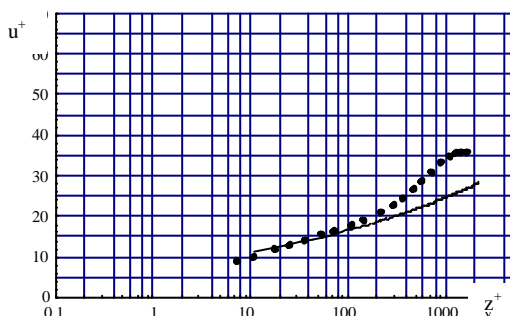
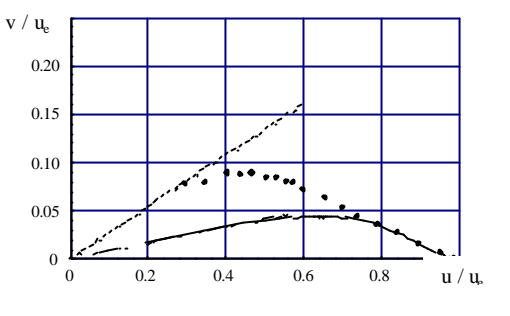
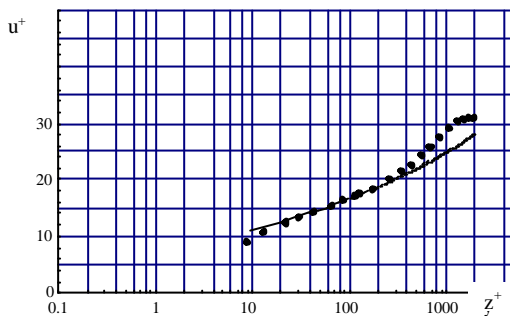
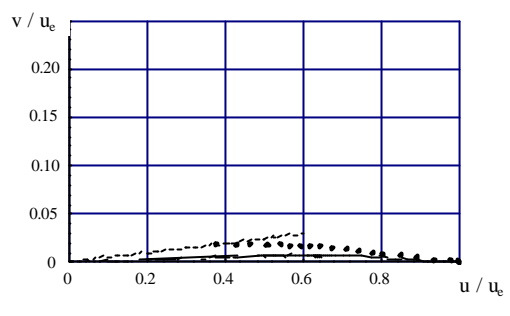
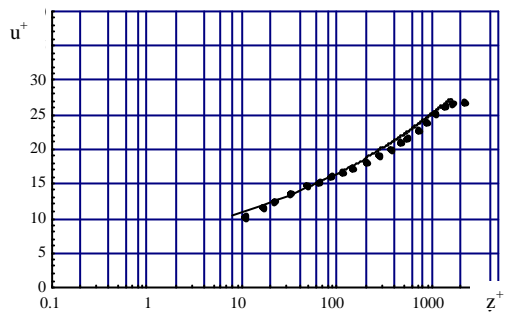
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in  
Stromlinienkoordinaten

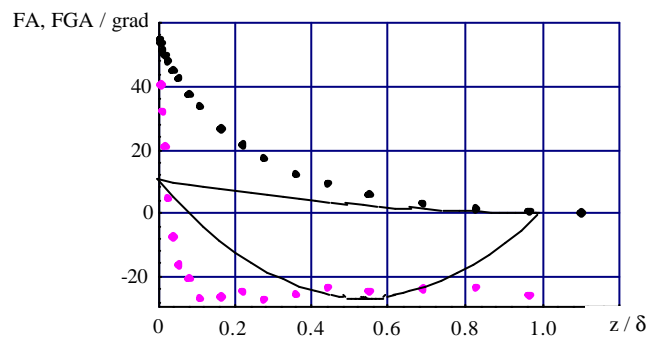
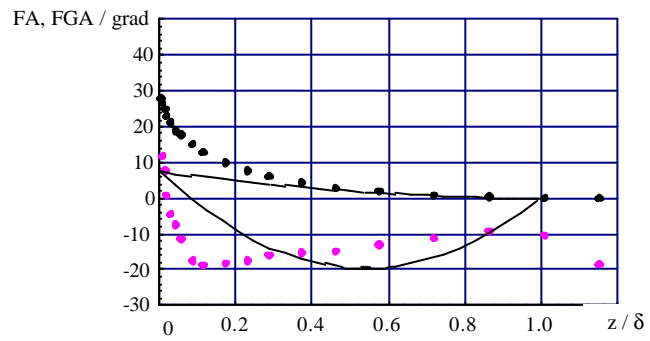
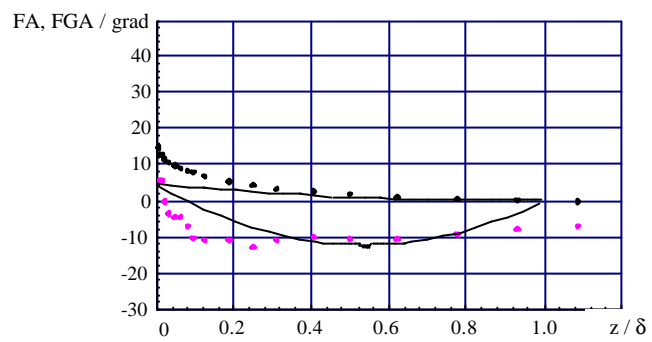
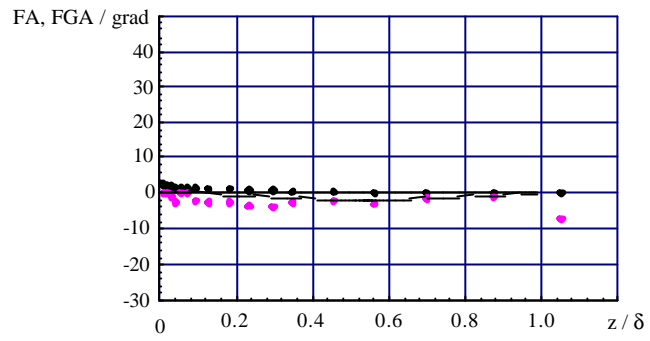
Experiment : ● / Berechnung : Volllinie

übernächste Seite

Bild 12 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 4, 5, 7 (von oben nach unten)

Experiment : ● Winkel  $\beta_{FA}$  und ● Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Volllinie





## Anhang 5.2

### Berechnungsergebnisse für Testfall II

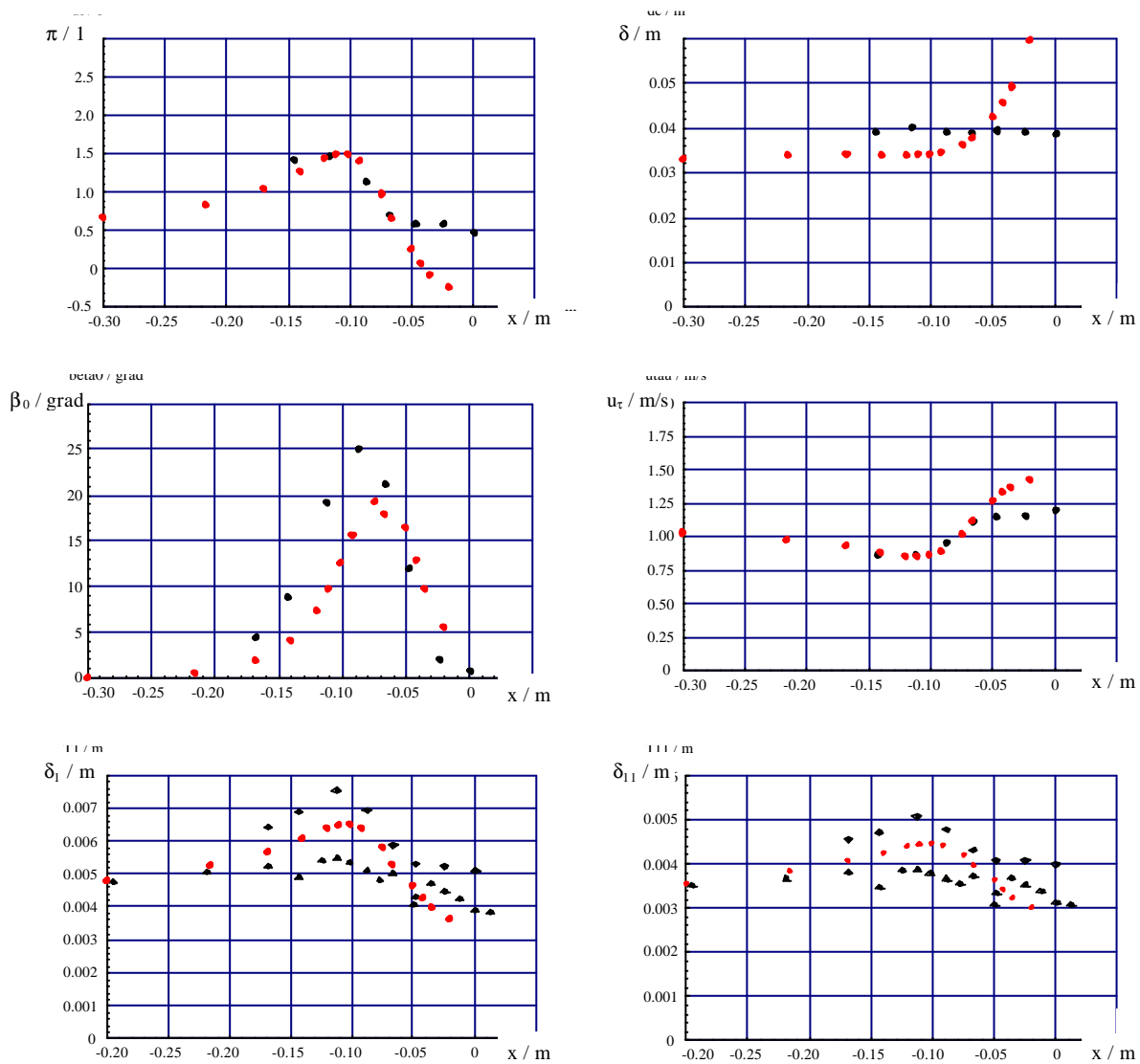


Bild 1 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben:

Wakeparameter der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke

Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung

Experiment : ●, ◆ (LDA), ◆ (Hitzdraht) / Rechnung : ●



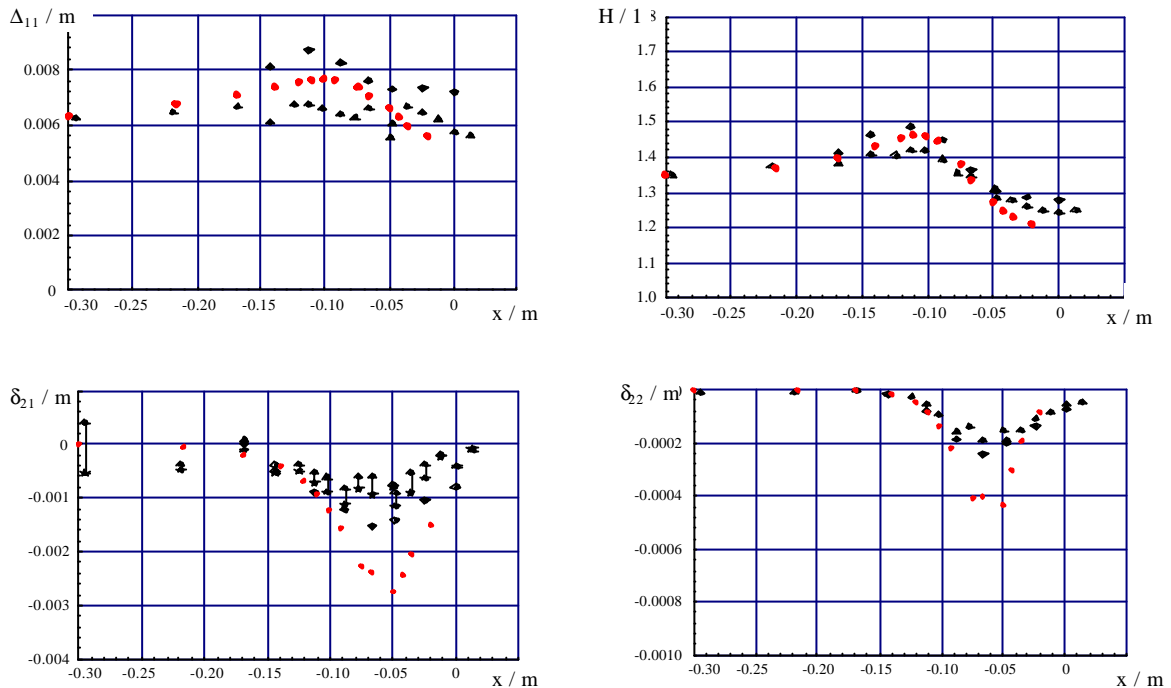


Bild 2 Ergebnisse des Verfahrens CLM

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : ●, ◆ (LDA), ◊ (Hitzdraht) / Rechnung : ●

folgende Seite

Bild 3 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung

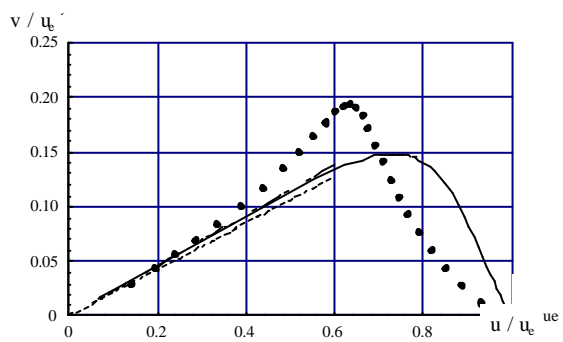
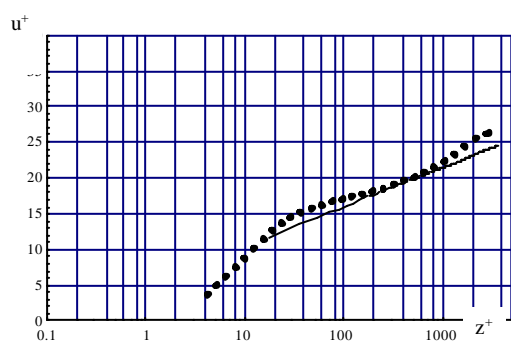
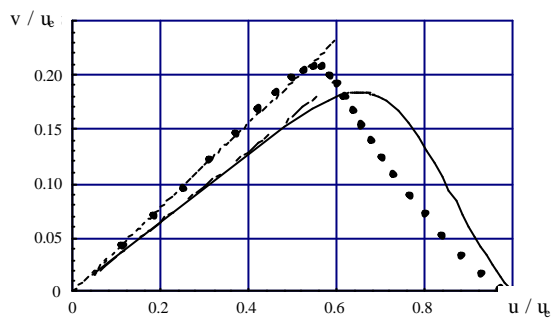
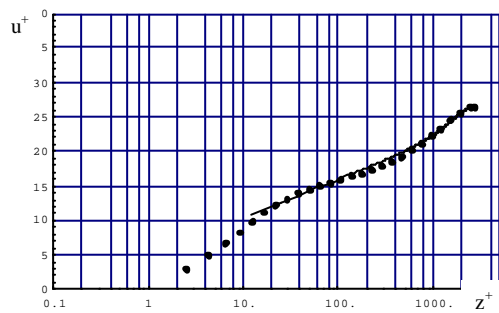
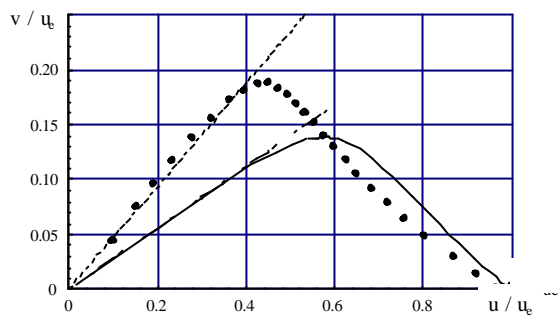
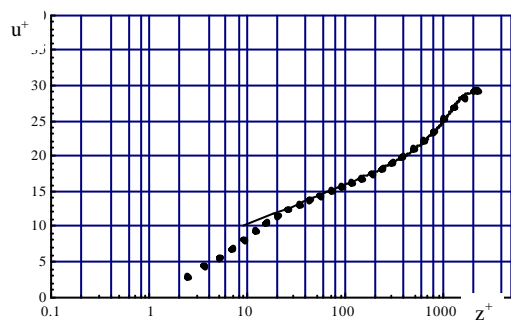
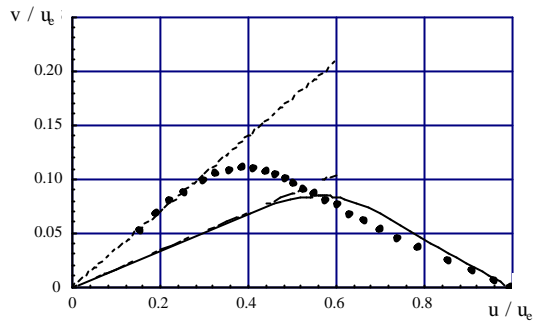
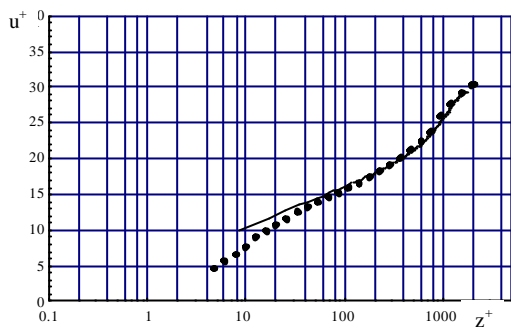
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in Stromlinienkoordinaten

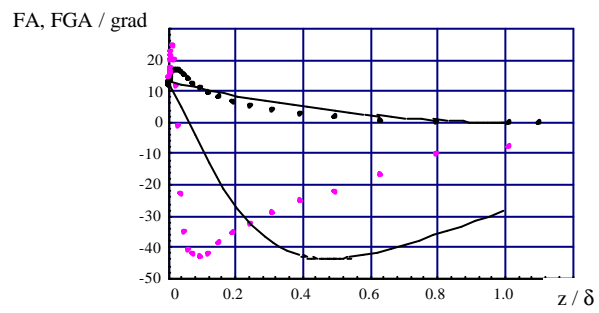
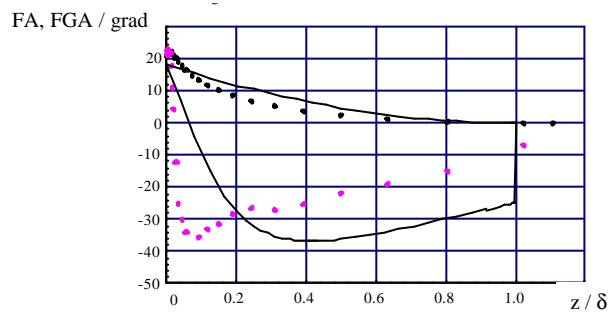
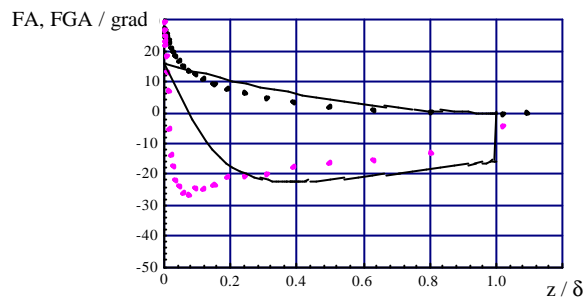
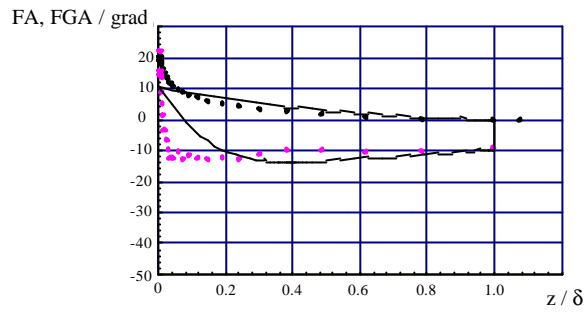
Experiment : ● / Berechnung : Vollinie

übernächste Seite

Bild 4 Ergebnisse des Verfahrens CLM für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

Experiment : ● Winkel  $\beta_{FA}$  und ● Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Vollinie





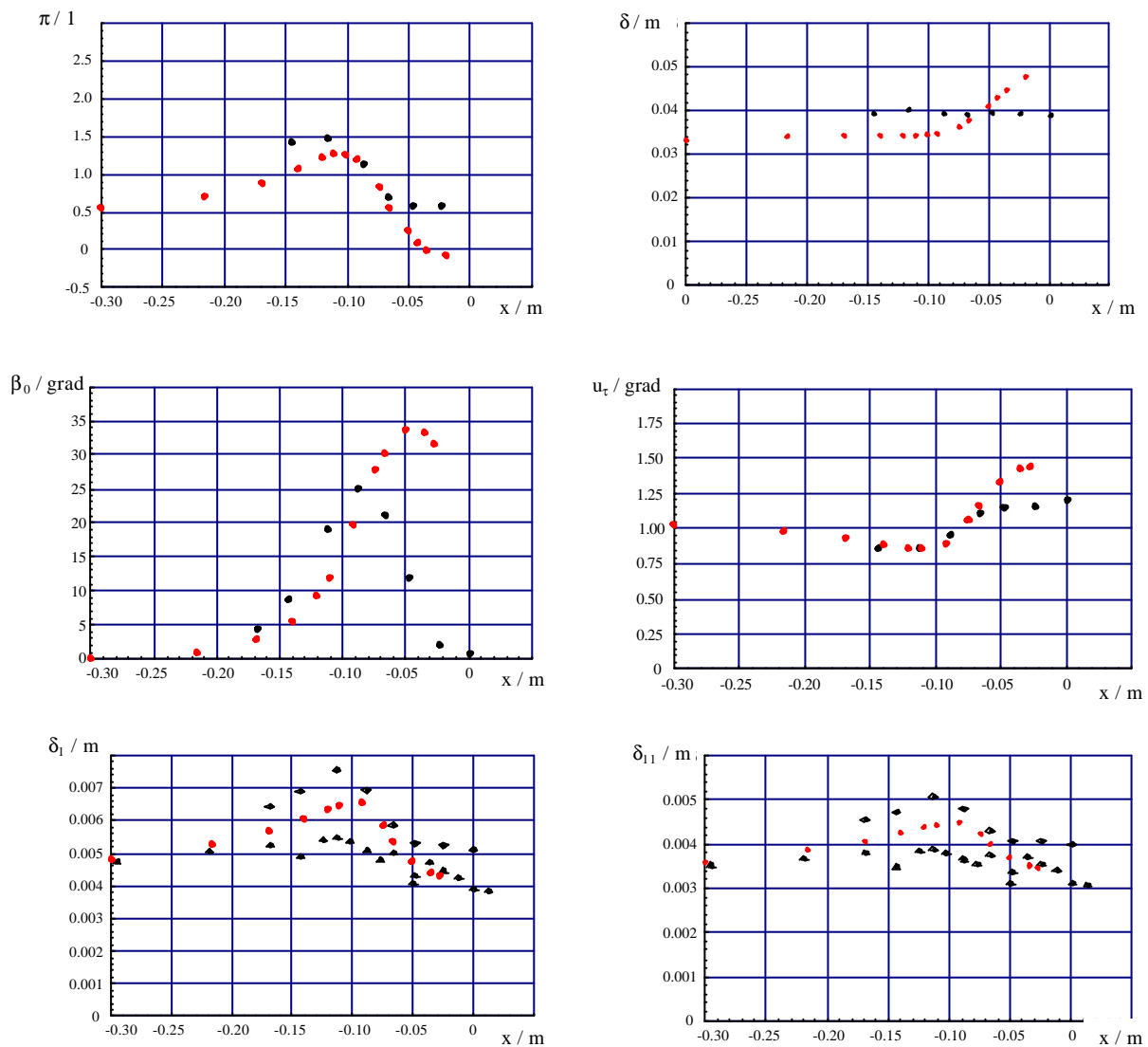


Bild 5 Ergebnisse des Verfahrens CLJ

Bilder von links oben:

Wakeparameter der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke

Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit

Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung

Experiment : ●, ◆ (LDA), ▲ (Hitzdraht) / Rechnung : ●

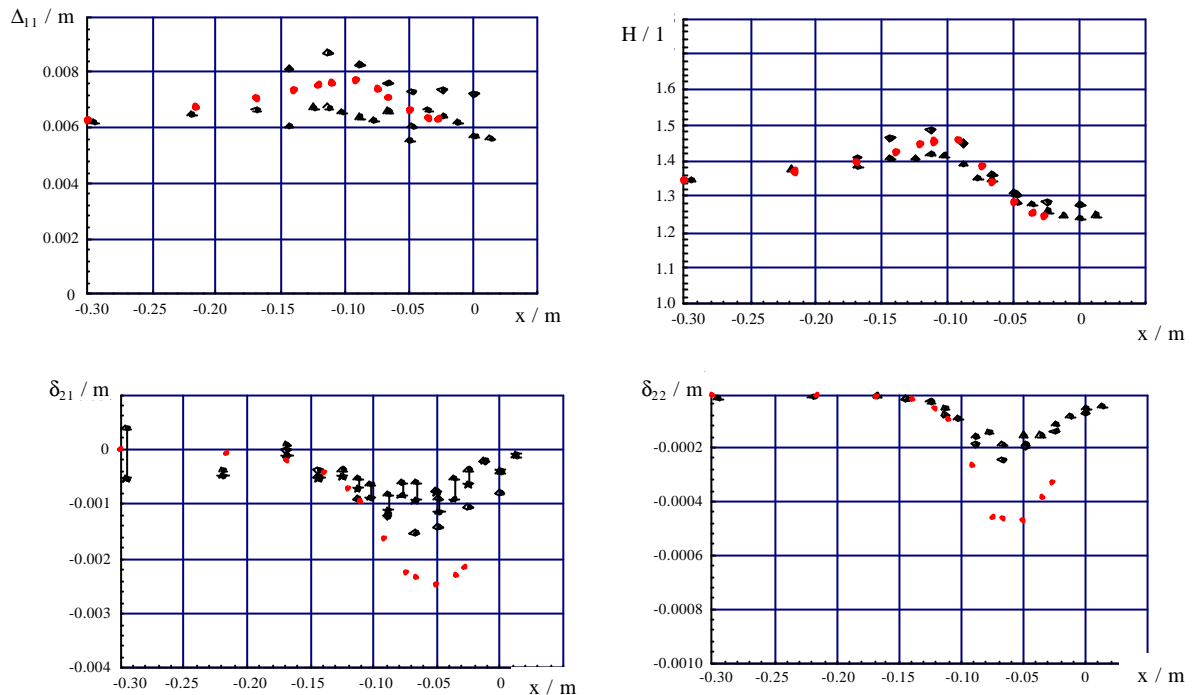


Bild 6 Ergebnisse des Verfahrens CLJ

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : •, ◆ (LDA), ◆ (Hitzdraht) / Rechnung : •

folgende Seite

Bild 7 Ergebnisse des Verfahrens CLJ für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung

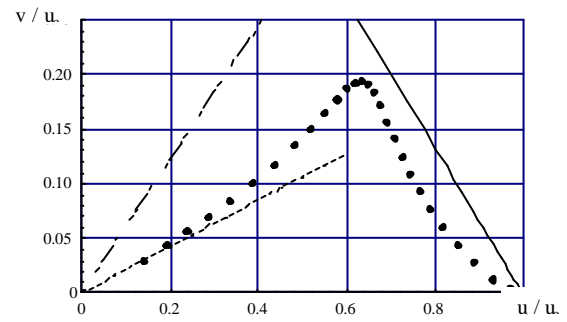
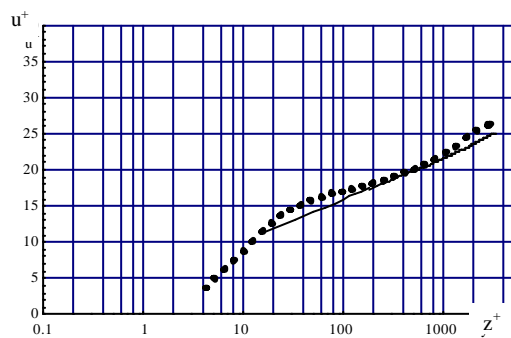
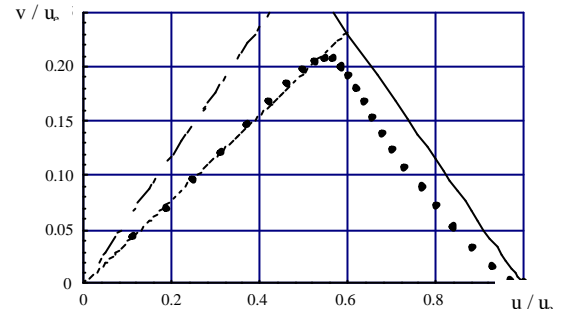
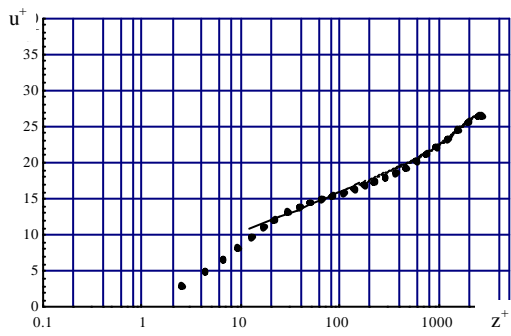
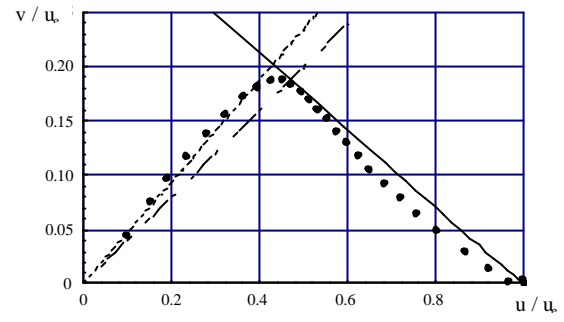
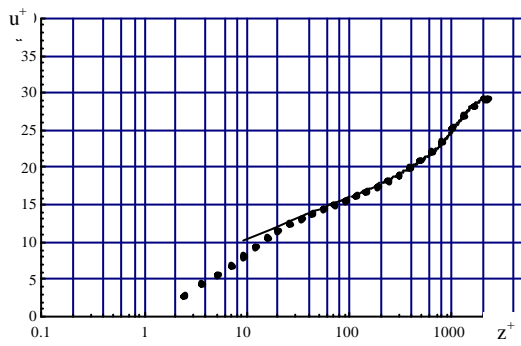
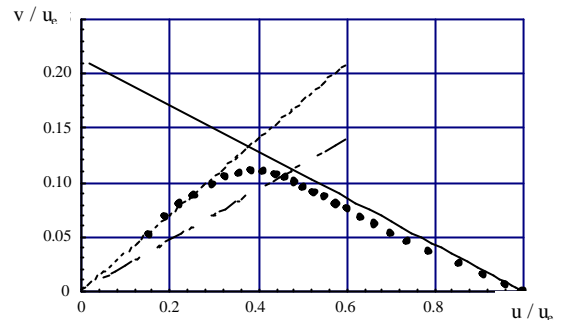
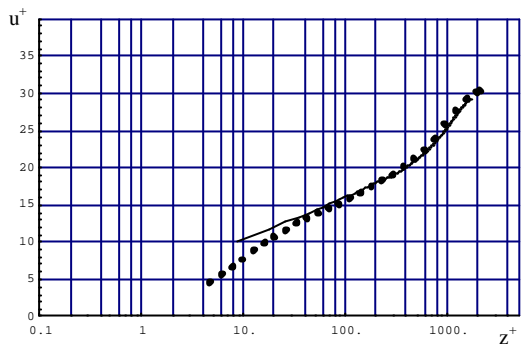
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in Stromlinienkoordinaten

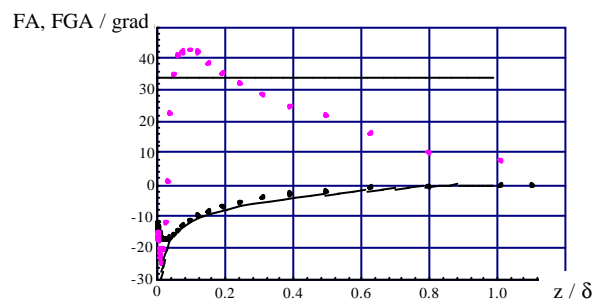
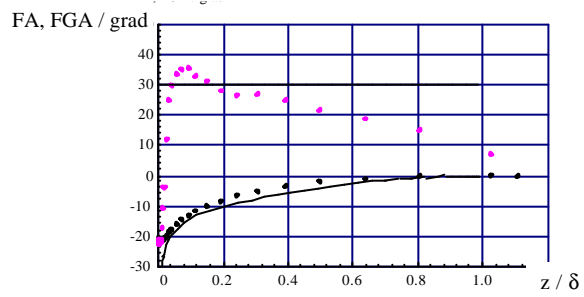
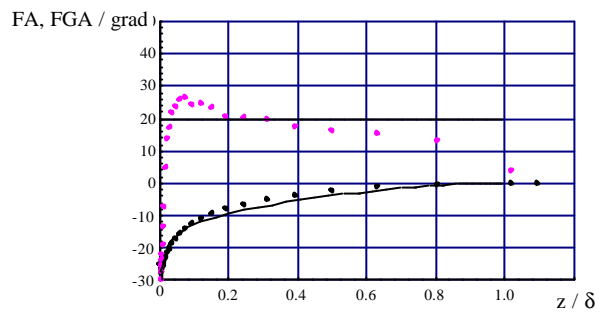
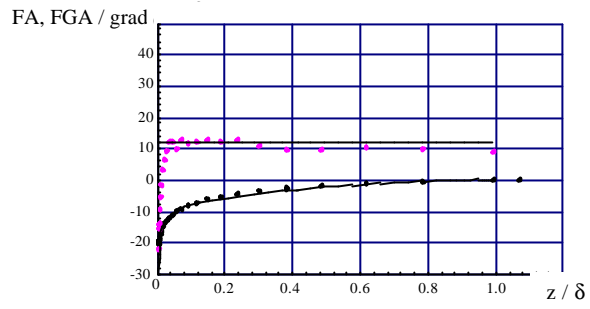
Experiment : • / Berechnung : Vollinie

übernächste Seite

Bild 8 Ergebnisse des Verfahrens CLJ für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

Experiment : • Winkel  $\beta_{FA}$  und • Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Vollinie





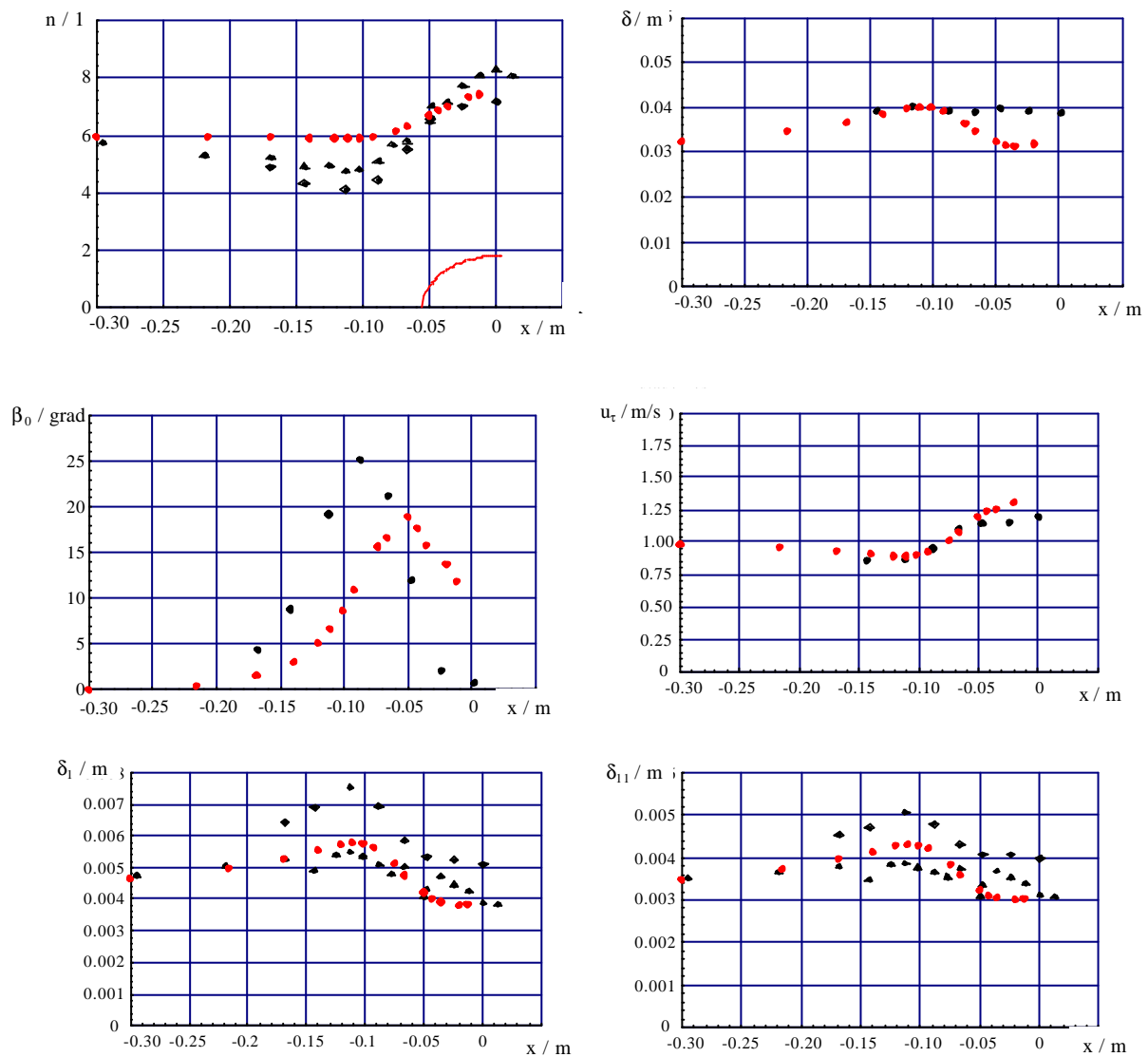


Bild 9 Ergebnisse des Verfahrens NM  
 Bilder von links oben:  
 Potenz der Hauptströmungsgeschwindigkeit / Grenzschichtdicke  
 Verwindungswinkel / Wandschubspannungsgeschwindigkeit  
 Verdrängungsdicke / Impulsverlustdicke jeweils in Hauptströmungsrichtung  
 Experiment : ●, ◆ (LDA), ◊ (Hitzdraht) / Rechnung : ●



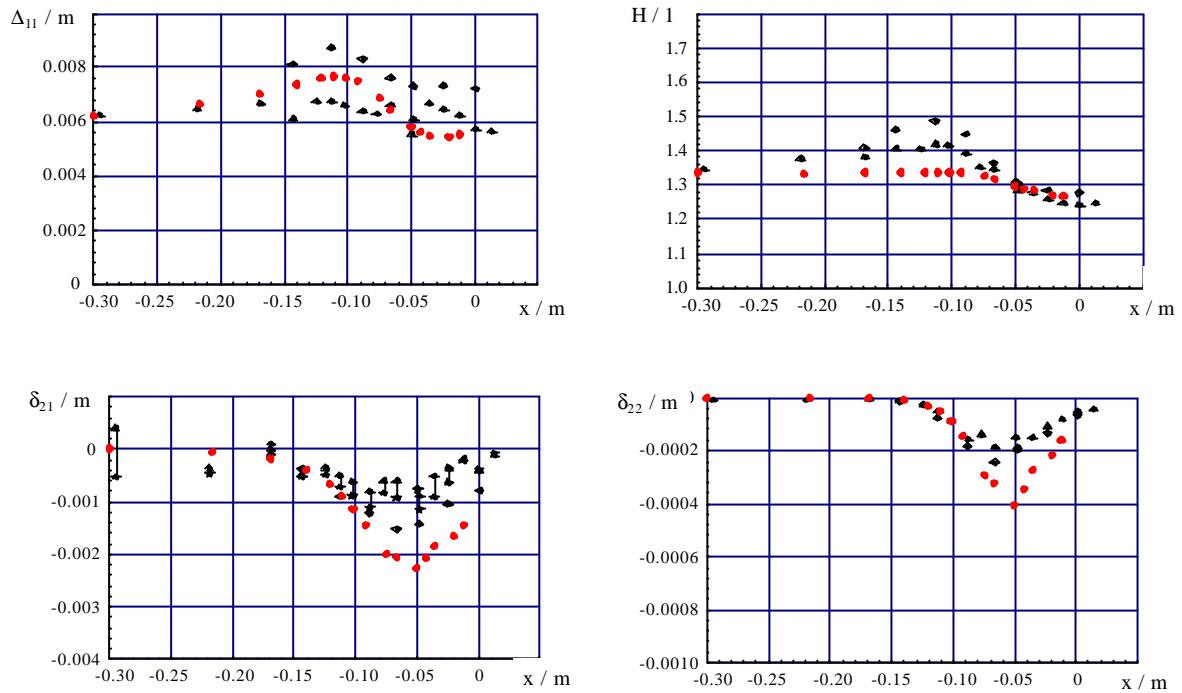


Bild 10 Ergebnisse des Verfahrens NM

Bilder von links oben

Energieverlustdicke in Hauptströmungsrichtung / Formparameter

"Kreuzprodukt"-Impulsverlustdicke / Impulsverlustdicke in Querstromrichtung

Experiment : ●, ◆ (LDA), ◊ (Hitzdraht) / Rechnung : ●

folgende Seite

Bild 11 Ergebnisse des Verfahrens NM für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

Linke Spalte : Halblogarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils  
in Hauptströmungsrichtung

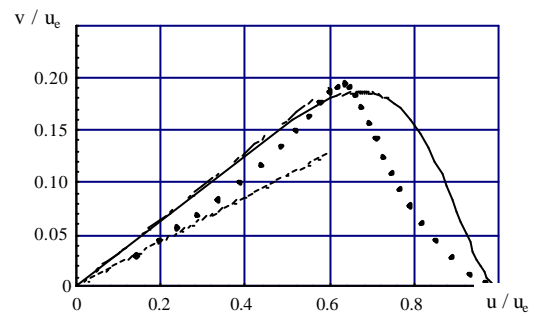
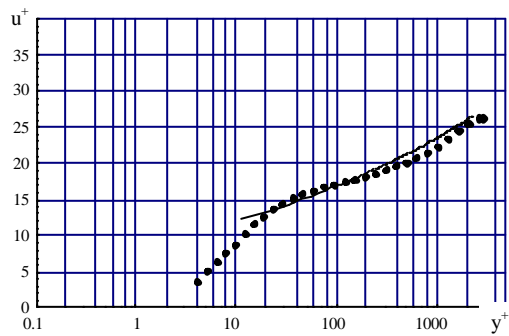
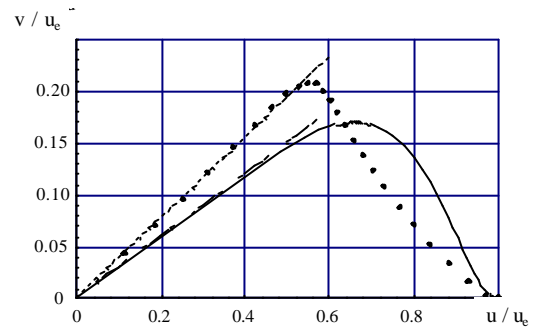
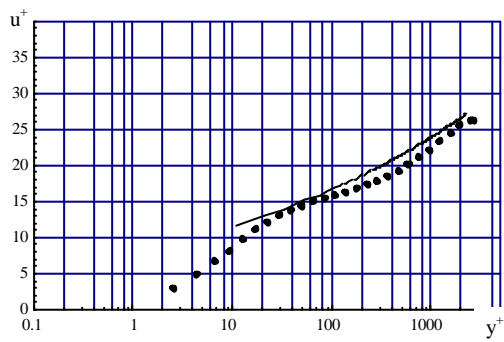
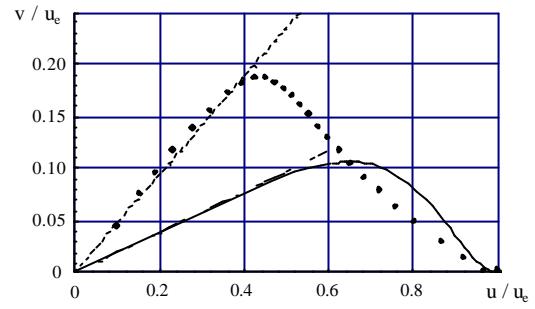
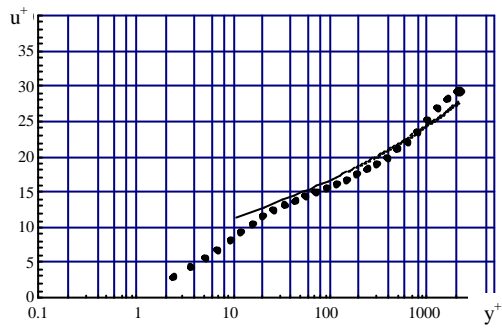
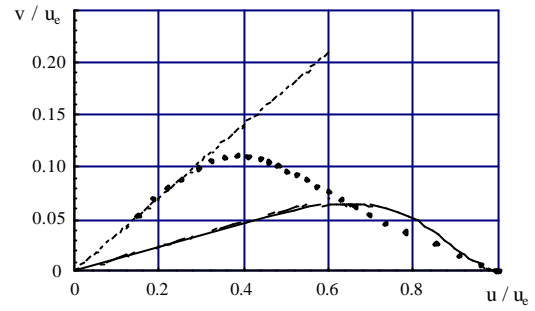
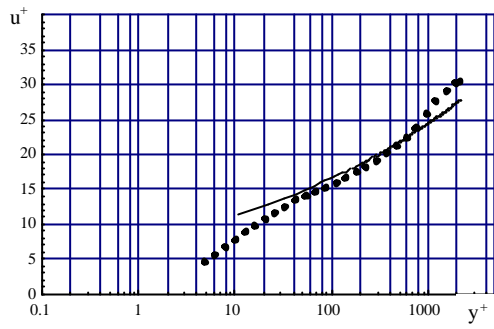
Rechte Spalte : Hodograph des verwundenen Geschwindigkeitsprofils in  
Stromlinienkoordinaten

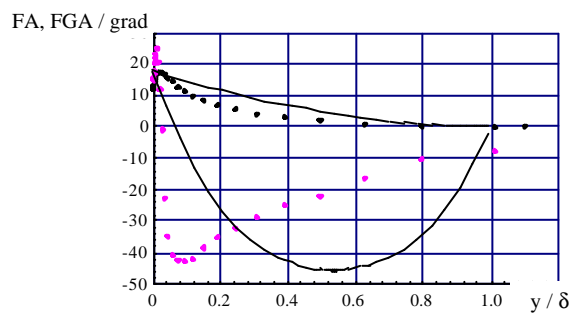
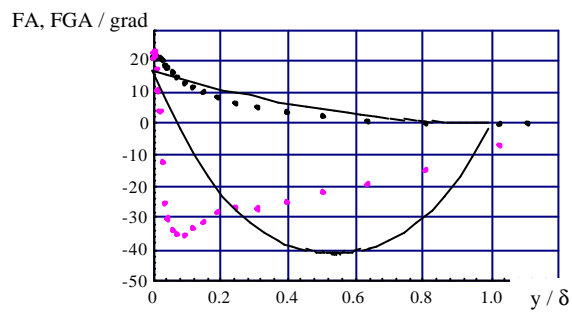
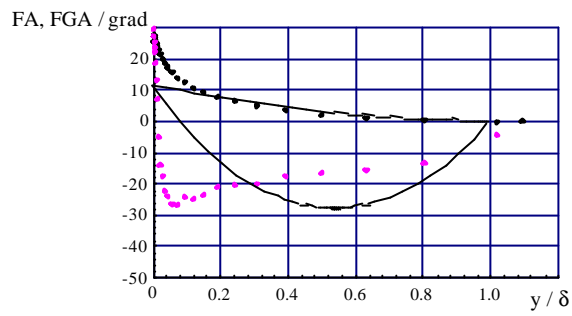
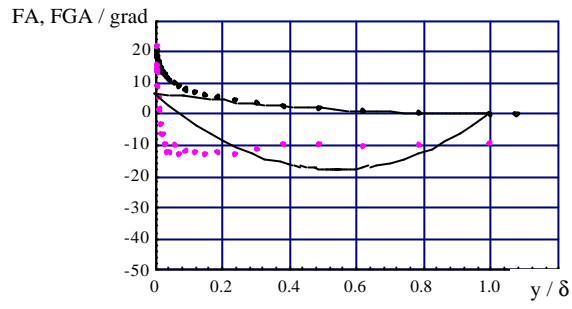
Experiment : ● / Berechnung : Vollinie

übernächste Seite

Bild 12 Ergebnisse des Verfahrens NM für die Messorte Nr. 2, 3, 4, 5 (von oben nach unten)

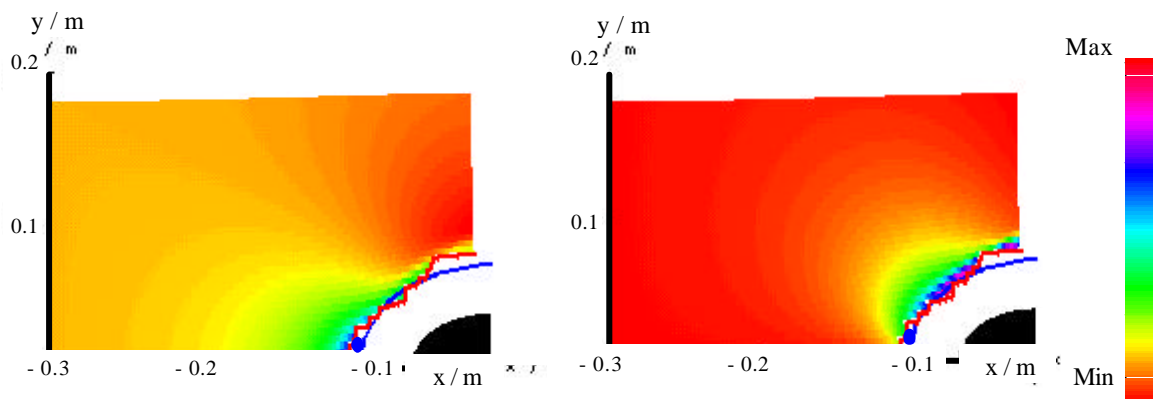
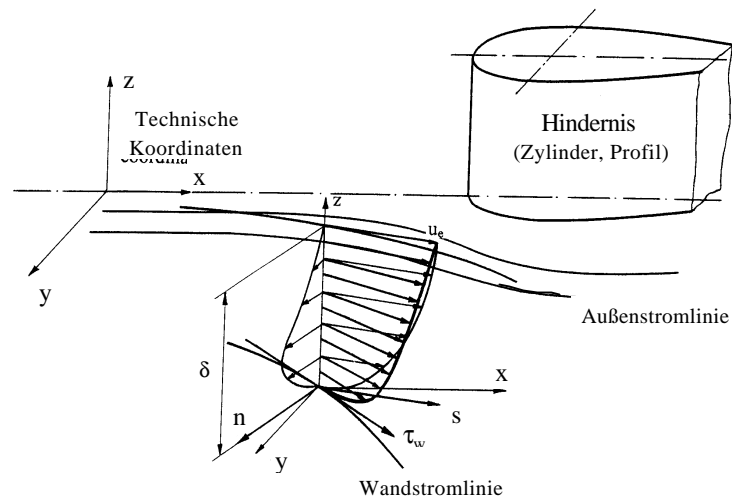
Experiment : ● Winkel  $\beta_{FA}$  und ● Winkel  $\beta_{FGA}$  / Berechnung : Vollinie





## Anhang 5.3

### Versuchsaufbau und Berechnungsergebnisse für Testfall II



oben : Darstellung des Versuchsaufbaus für Testfall II nach S. M. Ölçmen, R. L. Simpson (1995)

unten links : Mit dem Verfahren CLM berechnete Verteilung des Wakeparameters  $\pi$

unten rechts : Mit dem Verfahren CLM berechnete Verteilung des Verwindungswinkels  $\beta_0$

— : experimentell bestimmte Ablöselinie (Rußanstrich)

• : experimentell bestimmter Ablöseort auf der Mittellinie

— : berechnete Ablöselinie

## Im Rahmen dieser Arbeit entstandene Veröffentlichungen

### Journale

- Buschmann, M. H. & Gad-el-Hak, M., Reynolds-Number-Dependent Scaling Law for Turbulent Boundary Layers, IUTAM-Symposium Reynolds Number Scaling in Turbulent Flow. Kluwer Academic Publishers (A. J. Smits), 2003
- Buschmann, M. H. & Gad-el-Hak, M. (2003): Debate Concerning the Mean-Velocity Profile of a Turbulent Boundary Layer. AIAA-Journal, Vol. 41, no. 4, pp. 565 - 572
- Buschmann, M. H. & Gad-el-Hak, M. (2003): The Generalized Logarithmic Law and Its Consequences. AIAA-Journal, Vol. 41, no. 1, pp. 40 - 48

### Konferenzen

- Buschmann, M. H. (2000): Power law or logarithmic law ? - A data analysis for zero pressure gradient turbulent boundary layers with low  $Re_{\delta_2}$ . Journal of Thermal Science. Vol. 9, no. 1, pp. 23 - 29
- Buschmann, M. H. (1999): Calculation of Turbulent Boundary Layers using the Dissipation Integral Method. Journal of Thermal Science, Vol. 8, pp. 223 - 230
- Buschmann, M. & Meinert, J. (1999): Power law or logarithmic law for turbulent boundary layers with low Reynolds numbers. Proceedings of the Colloquium Fluid Dynamics, Prague (Czech Republic), pp. 21 - 28
- Buschmann, M. H. (1999): Calculation of three-dimensional turbulent boundary layers using dissipation integral method, 4<sup>th</sup> Int. Symp. on Exp. and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, Dresden (Germany)
- Buschmann, M. H. (1997): Dissipation integral method for three-dimensional turbulent boundary layers, 10<sup>th</sup> International Symposium on Transport Phenomena, Kyoto (Japan), pp. 245 - 249

### American Physical Society (Division Fluid Dynamics) Meetings

- Buschmann, M., Gad-el-Hak, M. (2002): A new Reynolds-number-dependent scaling law for turbulent boundary layers. „55<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics“, Dallas (USA)
- Buschmann, M., Gad-el-Hak, M. (2001): The generalized logarithmic law for the turbulent boundary layer. „54<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics“, San Diego (USA)
- Buschmann, M., Gad-el-Hak, M. (2001): Does the universal log law have a perceptible dependence on Reynolds number? „54<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics“, San Diego (USA)
- Buschmann, M., Gad-el-Hak, M. (2000) : Power Law or Log Law for the Turbulent Boundary Layer ?, „The 53<sup>rd</sup> Annual Meeting of the American Physical Society's Division of Fluid Dynamics“, Washington DC (USA)

### Danksagung

Diese Arbeit entstand mit großzügiger Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter dem Thema Bu 1082 / 1-2. Mein spezieller Dank geht daher an diese Institution. Bedanken möchte ich mich bei allen Gutachtern und Diskussionspartnern, die mir mit ihrem Wissen und Hinweisen zur Seite standen. Mein Dank geht ebenfalls an das Institut für Strömungsmechanik der Technischen Universität Dresden, welches mir den Rahmen für diese Arbeit bot.

Mein Dank geht insbesondere an meine liebe Frau Sabine für ihre Unterstützung.



Dr.-Ing. M. Buschmann  
Pohrsdorfer Weg 36 b  
01169 Dresden

## **ERKLÄRUNG**

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Habilitationsschrift von mir selbstständig verfasst und das dazu keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Alle wörtlichen bzw. sinngemäß übernommenen Stellen anderer wissenschaftlicher Arbeiten sind entsprechend gekennzeichnet.

Dr.-Ing. M. Buschmann