

TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN
FAKULTÄT MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

Defektkorrekturverfahren für singulär gestörte Randwertaufgaben

genehmigte Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Dipl.-Math. Anja Katrin Fröhner
geboren am 22. Dezember 1973 in Karl-Marx-Stadt

Defektkorrekturverfahren für singulär gestörte Randwertaufgaben

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl.-Math. Anja Katrin Fröhner
geboren am 22. Dezember 1973 in Karl-Marx-Stadt

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Lutz Angermann
Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Heinrich
Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Görg Roos

Eingereicht am : 07. Juni 2002
Tag der Disputation : 20. Dezember 2002

Für Carolin und Dorian

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Lösungsverhalten des stetigen Problems	7
1.1 Das eindimensionale Modellproblem	7
1.1.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	8
1.1.2 Stabilitätsabschätzungen	9
1.1.3 Schranken für die Ableitungen	10
1.2 Das zweidimensionale Modellproblem	11
1.2.1 Existenz, Eindeutigkeit und Grenzschichtverhalten der Lösung	12
1.2.2 Stabilitätsaussagen	14
1.2.3 Schranken für die partiellen Ableitungen	15
2 Finite-Differenzen-Verfahren	19
2.1 Grundlegende Begriffe	19
2.2 Grenzschichtangepaßte Gitter	21
2.2.1 Bakhvalov-Gitter	21
2.2.2 Shishkin-Gitter	22
2.2.3 Shishkin-Typ-Gitter	23
2.3 Differenzenverfahren für das eindimensionale Randwertproblem	26
2.3.1 Das Upwind-Differenzenverfahren	28
2.3.2 Das zentrale Differenzenverfahren	42
2.4 Differenzenverfahren für das zweidimensionale Randwertproblem	49
2.4.1 Das Upwind-Differenzenverfahren	51
2.4.2 Das zentrale Differenzenverfahren	64
3 Defektkorrektur: die Grundideen	69
3.1 Defektkorrekturtechniken zur approximativen Lösung von Differentialgleichungen	70
3.2 Methoden der Konvergenzanalyse	71
3.2.1 Asymptotische Fehlerentwicklung	72
3.2.2 Konzept korrespondierender Normen	75
3.3 Defektkorrekturverfahren für singular gestörte Probleme	76
3.3.1 Defektkorrekturalgorithmen für Finite-Differenzen-Verfahren	76
3.3.2 Finite-Elemente-basierte Defektkorrekturalgorithmen	78
4 Ein Defektkorrekturverfahren für ein eindimensionales Problem	79
4.1 Beschreibung des Verfahrens	79
4.2 Konvergenzanalyse	80
4.2.1 Abschätzung der Fehlerdifferenz	84
4.3 Numerische Resultate	90

5	Ein Defektkorrekturverfahren für zweidimensionale Probleme	93
5.1	Beschreibung des Verfahrens	93
5.1.1	Numerische Resultate	94
5.1.2	Konvergenzhypothese	96
5.2	Diskussion von Techniken zur Konvergenzanalyse	96
5.2.1	Das Konzept korrespondierender Normen	97
5.2.2	Asymptotische Fehlerentwicklung	97
5.2.3	Asymptotische Entwicklung des Konsistenzfehlers τ^u	99
5.3	Teilresultate zur Konvergenzanalyse	100
5.3.1	Voraussetzungen	100
5.3.2	Der Kommutant von L^u und $L^u - L^c$ und andere Hilfsmittel . . .	102
5.3.3	Konvergenzaussagen für die Lösungsanteile von u	109
5.3.4	Abschließende Bemerkung	120
6	Einige Bemerkungen zu Finite-Elemente-Methoden und Defektkorrektur	121
	Bezeichnungen	129
	Literaturverzeichnis	131

Einleitung

Zahlreiche Prozesse in Naturwissenschaft und Technik lassen sich mit Hilfe von Konvektions–Diffusions–Gleichungen modellieren. Eine besondere Stellung nehmen dabei *konvektionsdominierte Konvektions–Diffusions–Gleichungen* ein, die durch sehr kleine Diffusionsparameter gekennzeichnet sind. Derartige Differentialgleichungen beschreiben zum Beispiel die Ausbreitung eines (verschmutzenden) Stoffes in einer Flußmündung, von Radioaktivität in der Atmosphäre oder den Transport einer im Grundwasser gelösten Substanz. In den verschiedensten technischen Zusammenhängen ist ferner die approximative Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen von Interesse, etwa zur Modellierung inkompressibler stationärer Flüsse oder für das Design von Tragflügeln. Konvektionsdominierte Konvektions–Diffusions–Gleichungen treten außerdem als mathematische Formulierung von Prozessen in der Halbleitertechnik oder in der Finanzmathematik auf. Eine einführende Beschreibung derartiger Anwendungen findet man in [75].

Beschränkt man die Untersuchung solcher Modelle für räumlich zweidimensionale Problemstellungen auf ihren stationären Zustand und linearisiert sie in geeigneter Weise, dann erhält man eine Randwertaufgabe des folgenden Typs:

$$\mathcal{L}u := -\varepsilon\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1a)$$

$$Bu = g \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad (1b)$$

wobei der Operator B geeignete Randbedingungen (Dirichlet–, Neumann– oder Robin–Bedingungen) repräsentiert und ε ein kleiner positiver Parameter ist. Diese Randwertaufgabe widerspiegelt bereits die charakteristischen Eigenschaften der Modelle komplizierter Anwendungsprobleme.

Probleme des Typs (1) heißen *singulär gestört*, denn ihre Lösung $u = u(\cdot, \varepsilon)$ konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht punktweise gegen die Lösung des sogenannten *reduzierten Problems*. Dabei ergibt sich das reduzierte Problem, indem in Gleichung (1) der Parameter $\varepsilon = 0$ gewählt wird und geeignete Randbedingungen weggelassen werden. Das reduzierte Problem ist hyperbolisch, während die Differentialgleichung (1) elliptisch ist.

Charakteristisch für die Lösung von (1) ist die Ausbildung von *Grenzschichten*. Das sind Teilgebiete des Grundgebietes Ω , in denen sich die Lösung und ihre Ableitungen sehr stark ändern. In Abhängigkeit von ihrer speziellen Gestalt unterscheidet man *reguläre* und *parabolische* Randgrenzschichten sowie *innere* Grenzschichten. In der vorliegenden Arbeit werden nur reguläre Randgrenzschichten betrachtet.

Aufgrund der auftretenden Grenzschichten liefern die üblichen, im allgemeinen isotropen, numerischen Verfahren keine befriedigende Approximation der Lösung von (1). Man beobachtet die folgenden typischen Phänomene:

- Die Näherungslösungen weisen physikalisch inadäquate Oszillationen auf, da die Verfahren instabil sind, solange die gewählten Gitterschrittweiten größer als der Störungsparameter ε sind. Sehr feine Gitter hingegen verursachen einen hohen Rechenaufwand.

- Der Konsistenzfehler von Differenzenverfahren und der Approximationsfehler von Finite-Elemente-Methoden wächst unbeschränkt, wenn der Störungsparameter ε gegen Null konvergiert.

In Anbetracht dieser Schwierigkeiten fordert man von einem für Probleme des Typs (1) geeigneten Verfahren spezielle Eigenschaften:

Robustheit. Das Verfahren soll für alle Werte des Störungsparameters ε im gesamten Gebiet Ω konvergieren. Das bedeutet, daß die auf einem Gitter mit N^2 Punkten gewonnene Näherung u^N zur exakten Lösung u einen Fehler

$$\|u - u^N\| \leq CN^{-k}$$

aufweist. Ist die Konstante C nicht nur von N , sondern auch von ε unabhängig, dann heißt das Verfahren *robust* oder *global gleichmäßig konvergent* in der gewählten Norm $\|\cdot\|$. Die Zahl $k > 0$ beschreibt die Konvergenzordnung des Verfahrens.

Monotonieerhaltung. Die Näherungslösung soll wesentliche physikalische Eigenschaften der exakten Lösung, insbesondere ihre Monotonie, widerspiegeln. Dies entspricht der Forderung an den Diskretisierungsoperator, ähnlichen Stabilitätsbeziehungen wie der Differentialoperator zu genügen.

Genauigkeit. Hohe Konvergenzraten sind stets ein Ziel bei der Konstruktion numerischer Verfahren. Für die hier behandelten Probleme ist insbesondere eine genaue Auflösung der Grenzschichten von Bedeutung.

Wesentliche Strategien bei der Diskretisierung von Problemen des Typs (1) sind exponentielle Anpassung und die Verwendung grenzschichtangepaßter Gitter. Beide Diskretisierungsprinzipien setzen voraus, daß die Lage bzw. die Art der Grenzschicht im voraus bekannt ist¹. Exponentiell angepaßte Verfahren sind so konstruiert, daß sie für gewisse Exponentialfunktionen (vom Grenzschichttyp) wenigstens lokal exakt sind. Sie weisen häufig eine komplizierte Struktur auf. Grenzschichtangepaßte Gitter wurden erstmals von Bakhvalov [9] beschrieben und später unter anderem von Vulcanović [114] und Shishkin [98] vereinfacht. Diese Gitter sind innerhalb des Grenzschichtbereiches wesentlich feiner als im übrigen Gebiet. Einige Verfahren, die auf uniformen Gittern nicht gleichmäßig im Störungsparameter konvergieren, konnten auf grenzschichtangepaßten Gittern als robust nachgewiesen werden (vgl. z. B. [52, 54, 59]). Dies zeigt, daß bereits die Anpassung des Gitters an die charakteristische Struktur der Lösung eine stabilisierende Wirkung auf das Verfahren ausübt.

In der Literatur findet man viele, auf verschiedene Weise stabilisierte Finite-Differenzen- und Finite-Elemente-Methoden, die einige der Schwierigkeiten bei der Diskretisierung singular gestörter Randwertaufgaben überwinden. Dazu gehören Upwind-Verfahren, die Addition künstlicher Viskosität, Stromliniendiffusionsverfahren und Petrov-Galerkin-Methoden. In den Monographien von Roos, Stynes und Tobiska [91] oder Morton [75] werden die bekannten Methoden im Detail behandelt.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Frage der Konstruktion inversmonotoner Verfahren, die von zweiter Ordnung konvergieren. In den frühen achtziger Jahren schlug Hemker [45, 46] vor, mit Hilfe von Defektkorrekturtechniken die Genauigkeit der näherungsweise Lösung singular gestörter Aufgaben zu erhöhen. Diesem Vorschlag folgend,

¹Adaptiv mit Hilfe von a posteriori-Fehlerabschätzungen an die Grenzschicht angepaßte Gitter sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

untersuchen wir einen Defektkorrekturalgorithmus, für den numerische Experimente Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung auf grenzschichtangepaßten Gittern indizieren (vgl. [67, 78]).

Das Prinzip der Defektkorrektur liegt vielen numerischen Iterationsverfahren zugrunde. Seit den fünfziger Jahren wurde es immer wieder benutzt, um gut konditionierte Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung zur näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen zu gewinnen. Einen Überblick über das Defektkorrekturprinzip und seine Anwendungen liefern die Übersichtsartikel [14, 106].

Die zugrundeliegende Idee ist folgende: Zur Approximation der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega\end{aligned}$$

werden zwei verschiedene Diskretisierungsverfahren

$$\begin{aligned}L^s u^s &= f^s \quad \text{in } \Omega^N & \text{und} & \quad L^z u^z = f^z \quad \text{in } \Omega^N \\ u^s &= 0 \quad \text{auf } \Gamma^N & & \quad u^z = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N\end{aligned}$$

betrachtet. Der Diskretisierungsoperator L^s repräsentiert ein stabiles Verfahren geringer Konvergenzordnung. Die Zieldiskretisierung L^z konvergiert formal von höherer Ordnung, ist jedoch instabil oder aufwendig zu lösen. Die Näherungslösung u^z der Zieldiskretisierung soll mit Hilfe eines Defektkorrekturalgorithmus iterativ ($i = 0, 1, 2, \dots$) approximiert werden:

1. Bestimme eine Startnäherung u^0 aus der Gleichung $L^s u^0 = f^s$.
2. Berechne den sogenannten Defekt $d^i = L^s u^i - L^z u^i$.
3. Ermittle den Korrekturterm k^i aus der Gleichung $L^s k^i = d^i$.
4. Aktualisiere die gewonnene Näherung u^i gemäß $u^{i+1} = u^i + k^i$.

Der Vorteil dieser Technik besteht darin, daß nur gut konditionierte diskrete Probleme, repräsentiert durch L^s , gelöst werden müssen. Für klassische Aufgabenstellungen wird als Zieldiskretisierung zumeist ein Verfahren hoher Ordnung gewählt, dessen Systemmatrix eine große Zahl von Freiheitsgraden enthält, während L^s ein kompaktes Verfahren symbolisiert. Zur Diskretisierung der hier behandelten singular gestörten Aufgaben ist es naheliegend, inversmonotone (bzw. in geeigneter Weise numerisch stabile) Methoden erster Ordnung mit klassischen Verfahren mindestens zweiter Ordnung zu kombinieren. Numerische Experimente deuten darauf hin, daß sich Defektkorrekturverfahren auf grenzschichtangepaßten Gittern gut eignen, um robuste Methoden höherer Ordnung zu gewinnen (vgl. [67]). Ihre einfache Implementation macht die Technik der Defektkorrektur zur Generierung von Verfahren höherer Ordnung zusätzlich attraktiv.

Ein analytischer Nachweis der ε -gleichmäßigen Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung stand selbst für die nächstliegende Verfahrenskombination von einem einfachen Upwind- und einem zentralen Differenzenverfahren für singular gestörte Aufgaben bislang aus. Erste theoretische Untersuchungen zur Konvergenz eines solchen Defektkorrekturverfahrens wurden von Ervin und Layton [25] vorgelegt. Sie bewiesen auf einem uniformen Gitter gleichmäßige Konvergenz außerhalb der Grenzschichtregion. In Arbeiten von Axelsson und Nikolova [8, 79] wurde die Konvergenz dieses Verfahrens auf Shishkin-Gittern untersucht. Die dort angegebenen Beweise für ε -gleichmäßige Konvergenz des Verfahrens sind allerdings fehlerhaft.

Eine Kombination von Finite-Elemente-Methoden in einem Defektkorrekturalgorithmus analysierten in den frühen neunziger Jahren Axelsson und Layton [7] auf äquidistanten

Gittern, ohne jedoch ε -gleichmäßige Konvergenz nachweisen zu können. Layton et al. [18] konstruierten einen a posteriori Fehlerschätzer auf der Basis eines Finite-Elemente-Defektkorrekturverfahrens. Einen Überblick über weitere Beiträge zu Defektkorrektur bei singular gestörten Randwertproblemen liefert Abschnitt 3.3.

Die vorliegende Arbeit ist der Analysis von speziellen Defektkorrekturverfahren für Aufgaben des Typs (1) gewidmet. Zunächst werden in Kapitel 1 wesentliche Eigenschaften der Lösung des stetigen Problems (1) und seines eindimensionalen Analogons zusammengestellt. In Kapitel 2 werden a priori grenzschichtangepaßte Gitter beschrieben und die in der Arbeit behandelten numerischen Verfahren definiert. Die Eigenschaften der betrachteten Differenzenmethoden werden im Hinblick auf die Konvergenzanalyse von Defektkorrekturalgorithmen diskutiert. Kapitel 3 gibt einen Überblick über die Literatur zur Anwendung von Defektkorrekturtechniken bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen. Außerdem werden die wesentlichen Beweismethoden für deren Konvergenzanalyse vorgestellt. Dies ist zum einen die Konstruktion einer *asymptotischen Entwicklung des Fehlers* des stabilen Lösungsverfahrens. Diese Technik setzt eine sehr hohe Glattheit der exakten Lösung voraus. Ein anderer, allgemeinerer Zugang besteht im *Konzept korrespondierender Normen* (vgl. [42, 100]) und basiert auf speziellen Stabilitätseigenschaften des Lösungsverfahrens.

Die entscheidenden Resultate dieser Arbeit sind in den Kapiteln 4 und 5 enthalten. In Kapitel 4 wird die gleichmäßige Konvergenz eines Defektkorrekturalgorithmus für eindimensionale singular gestörte Randwertprobleme nachgewiesen. Das betrachtete Verfahren kombiniert ein einfaches Upwind- und ein zentrales Differenzenverfahren auf einer Klasse grenzschichtangepaßter Gitter. Zwar wurde in [52] die ε -gleichmäßige Konvergenz des eindimensionalen zentralen Differenzenverfahrens auf einem derartigen Gitter bereits direkt gezeigt, und auch die Lösung der durch das zentrale Differenzenverfahren generierten diskreten Systeme bereitet in diesem Fall keine wesentlichen Schwierigkeiten. Die Analysis des Defektkorrekturverfahrens im eindimensionalen Fall liefert aber einen entscheidenden Beitrag zum Verständnis derartiger Methoden und ihrer Anwendung auf singular gestörte Probleme.

Der in der vorliegenden Arbeit geführte Beweis basiert auf einem speziellen Stabilitätsresultat von Andreev und Kopteva [4] und einer daraus abgeleiteten Aussage über die Approximation der Ableitung der Lösung von singular gestörten Zweipunkt-Randwertaufgaben von Kopteva und Stynes [55]. Bereits vor der Publikation von [55] wurde dasselbe Konvergenzresultat für das Defektkorrekturverfahren in [34] in ähnlicher Form bewiesen. Die Aussage aus [55] ergab sich dabei mit etwas geringerer Allgemeinheit als Nebenresultat.

Für das zweidimensionale Randwertproblem erweist sich Defektkorrektur anhand von numerischen Experimenten als ein mögliches Werkzeug, um die Probleme, die wegen der fehlenden Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens bei der iterativen Lösung der diskreten Systeme auftreten, zu überwinden. Die Konvergenzanalyse zum Defektkorrekturverfahren ist jedoch deutlich schwieriger als im eindimensionalen Fall. Ein analytischer Nachweis der für die Kombination von Upwind- und zentralem Differenzenverfahren beobachteten ε -gleichmäßigen Konvergenz von fast zweiter Ordnung ist nach wie vor ein offenes Problem. Im Kapitel 5 dieser Arbeit wird die Anwendbarkeit der bekannten Zugänge zur Konvergenzanalyse für Probleme des Typs (1) erörtert. Dabei kristallisieren sich folgende Schwierigkeiten heraus:

Für den zum Upwind-Differenzenverfahren assoziierten diskreten Operator konnten bislang keine Stabilitätsaussagen bewiesen werden, die stark genug sind, um daraus im Rah-

men des Konzeptes korrespondierender Normen die numerisch beobachtete Konvergenzrate des Defektkorrekturverfahrens abzuleiten. Infolge der unterschiedlichen Beschränktheitseigenschaften der Greenschen Funktion des Randwertproblems (1) und seines eindimensionalen Analogons können wir die Gültigkeit derselben Stabilitätsbeziehungen im allgemeinen weder für die Differential- noch für die Differenzenoperatoren erwarten. Um die auftretenden Unterschiede in Abhängigkeit von der Dimension des Grundgebietes zu verdeutlichen, werden in Kapitel 2 die bekannten Stabilitätsresultate für das Upwind-Differenzenverfahren im ein- und zweidimensionalen Fall zusammengetragen und ihre Anwendung bei der Herleitung von Konvergenzaussagen demonstriert.

Die Konstruktion einer geeigneten asymptotischen Entwicklung für den Fehler des Upwind-Verfahrens wird sowohl durch die ε -Abhängigkeit der exakten Lösung von (1) als auch durch die Verwendung hochgradig nichtuniformer Gitter erschwert. In Kapitel 5 wird anstelle der Entwicklung des Verfahrensfehlers eine Reihenentwicklung des Konsistenzfehlers des Upwind-Verfahrens verwendet, um für ein spezielles zweidimensionales Problem zumindest Teilresultate über die Konvergenz des Defektkorrekturverfahrens zu beweisen. Die Beweisidee entstammt [36], wurde dort aber, wie sich später herausstellte, fehlerhaft angewendet. Sie stellt einschränkende Voraussetzungen an das Ausgangsproblem und die verwendeten Gitter. So werden konstante Koeffizienten in der Differentialgleichung und eine hohe Glattheit der rechten Seite gefordert. Ferner dürfen nur stückweise uniforme grenzschiichtangepaßte Gitter verwendet werden. Unter den genannten Bedingungen können wir zeigen, daß der glatte Anteil und die Grenzschiichtanteile der exakten Lösung auf jeweils spezifischen Gittern durch das Defektkorrekturverfahren von fast zweiter Ordnung approximiert werden.

Es gelingt uns mit Hilfe der derzeit zur Verfügung stehenden Methoden nicht, die in den numerischen Beispielrechnungen beobachtete Konvergenz des betrachteten Defektkorrekturverfahrens in allgemeineren Fällen zu beweisen. Ziel des Kapitels 5 ist es, die Grenzen der bekannten Beweistechniken für singular gestörte Randwertaufgaben aufzuzeigen. Die bewiesenen Teilresultate untermauern die Vermutung über die ε -gleichmäßige Konvergenz des Defektkorrekturverfahrens von (fast) zweiter Ordnung auf grenzschiichtangepaßten Gittern im zweidimensionalen Fall.

Zum Schluß der Arbeit wird in Kapitel 6 kurz die Konstruktion von Defektkorrekturverfahren auf der Basis von Finite-Element-Methoden diskutiert. Für eine Upwind-Finite-Element-Methode und das Standard-Galerkin-Verfahren wird ein derartiger Algorithmus formuliert und die Ergebnisse numerischer Testrechnungen sowie erste Ansätze zur Konvergenzanalyse angegeben. Außerdem gehen wir auf offene Fragen ein, die sich stellen, wenn die Upwind-Finite-Element-Methode durch ein Stromliniendifusions-Finite-Elemente-Verfahren ersetzt werden soll.

Die Entstehung der vorliegenden Arbeit wurde durch ein Sächsisches Landesstipendium und die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Projektes „Stückweise uniforme Gitter – Theorie und Anwendungen, insbesondere zur Auflösung von Grenzschiichten“ gefördert. Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinem Betreuer Prof. Dr. H.-G. Roos und bei Dr. T. Linß für ihre ständige Diskussionsbereitschaft zum Thema der Arbeit, zahlreiche nützliche Anregungen und Hinweise und nicht zuletzt für Motivation und Rat in schwierigen Schaffensphasen bedanken. Mein Dank gilt ferner meiner Familie und meinen Freunden für die von ihnen aufgebrachte Geduld, ihr Verständnis und die Unterstützung, mit der sie wesentlich zum Gelingen der Arbeit beitrugen.

Kapitel 1

Lösungsverhalten des stetigen Problems

In diesem Kapitel werden die betrachteten ein- und zweidimensionalen Modellprobleme und die wesentlichen Eigenschaften ihrer exakten Lösungen beschrieben. Besonderen Stellenwert nehmen das Grenzschichtverhalten und eine daraus abgeleitete Zerlegung der Lösung in eine gleichmäßig beschränkte Funktion und exponentiell anwachsende Grenzschichtanteile ein. Die Darstellung stützt sich im wesentlichen auf [91] und [75].

1.1 Das eindimensionale Modellproblem

Wir betrachten im \mathbb{R}^1 das lineare Zweipunkt-Randwertproblem

$$\mathcal{L}u := -\varepsilon u'' - bu' + cu = f \quad \text{in } \Omega := (0, 1), \quad (1.1a)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.1b)$$

Die Funktionen b, c und f seien auf $\bar{\Omega}$ stetig. Es gelte $b(x) \geq \beta > 0$ für alle $x \in [0, 1]$ sowie $0 < \varepsilon \ll 1$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktion c nichtnegativ ist.

Bemerkung 1.1 Ist $\min_{x \in \bar{\Omega}} c(x) < 0$, dann wird das Problem (1.1) mittels der Transformation $u(x) \mapsto \exp(-\theta x)v(x)$ in ein äquivalentes Problem für v mit einem nichtnegativen Koeffizienten des Absolutgliedes überführt, wenn der Parameter θ im Intervall $(\frac{2}{\beta} |\min_{x \in \bar{\Omega}} c(x)|, \frac{\beta}{4\varepsilon})$ liegt (vgl. [108]). \square

Ebenfalls ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir das Einheitsintervall $\Omega = (0, 1)$ als Grundgebiet und wählen homogene Dirichlet-Randbedingungen.

Bemerkung 1.2 Eine lineare Koordinatentransformation überträgt das Problem in ein beliebiges Intervall (d, e) . Zu allgemeinen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1$$

definiert man eine lineare Funktion \bar{u}

$$\bar{u}(x) = -\gamma_0(x - 1) + \gamma_1 x,$$

so daß $u^*(x) = u(x) - \bar{u}(x)$ der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}u^* = \mathcal{L}u - \mathcal{L}\bar{u} = f + b \cdot (-\gamma_0 + \gamma_1)$$

und homogenen Randbedingungen genügt. \square

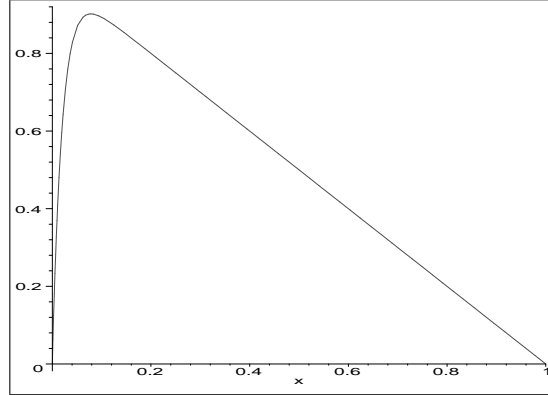


Abbildung 1.1: Die exakte Lösung des Randwertproblems $-0.05u'' - u = 1$ mit homogenen Randbedingungen

1.1.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Unter den getroffenen Voraussetzungen besitzt das Randwertproblem (1.1) eine Lösung $u \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$. Falls die Daten des Problems in $C^k(0, 1)$ für ein $k \in \mathbb{N}_+$ liegen, dann gilt sogar $u \in C^{k+2}(0, 1)$ (vgl. [39, Lemma 6.18]).

Die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus folgendem Vergleichssatz

Satz 1.1 [39] *Es seien v und w Funktionen aus $C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$, die für alle $x \in (0, 1)$ der Ungleichung $\mathcal{L}v(x) \leq \mathcal{L}w(x)$ und weiterhin der Bedingung $v(0) \leq w(0), v(1) \leq w(1)$ genügen. Dann gilt die Beziehung*

$$v(x) \leq w(x)$$

für alle $x \in [0, 1]$.

Der Randwertaufgabe (1.1) ist das sogenannte *reduzierte Problem*

$$\mathcal{L}_r u_r = -b(x)u_r' + c(x)u_r = f(x) \quad (1.2a)$$

$$u_r(1) = 0 \quad (1.2b)$$

zugeordnet. Es ergibt sich aus (1.1) für $\varepsilon = 0$ unter Vernachlässigung der Randbedingung an jenem Rand, wo die Lösung u von (1.1) eine Grenzschicht ausbildet¹.

Aufgrund der Voraussetzung $b(x) \geq \beta > 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ besitzt Problem (1.2) eine eindeutige Lösung $u_r \in C^1(0, 1)$. Die Lösung u der Randwertaufgabe (1.1) konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ auf dem halboffenen Intervall $(0, 1]$ punktweise gegen u_r . In einer kleinen Umgebung von $x = 0$ weichen u und u_r jedoch stark voneinander ab: es gilt die Grenzbeziehung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) \neq u_r(0).$$

Aufgrund dieser Eigenschaft bezeichnet man das Problem (1.1) als *singulär gestört*.

Die geforderte Stetigkeit der rechten Seite f und die strikte Positivität des Konvektionskoeffizienten b von (1.1) schließen die Ausbildung *innerer* Grenzschichten der zugehörigen Lösung u aus.

¹Ist das Vorzeichen des Konvektionsterms negativ, so streicht man die Randbedingung an $x = 0$, andernfalls die an $x = 1$.

Detaillierte Informationen über die exakte Lösung werden häufig aus *angepaßten asymptotischen Entwicklungen* gewonnen. Ihre Konstruktion wird z. B. in [91] ausführlich dargestellt.

Manchmal erweist es sich als günstig, die Differentialgleichung (1.1) in *konservativer Form* zu schreiben:

$$\mathcal{L}_k u := -\varepsilon u'' - (b(x)u)' + c(x)u = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1) \quad (1.3a)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.3b)$$

Unter den obigen Voraussetzungen an b gelten alle Aussagen über die Lösung von (1.1) auch für die Lösung von (1.3). Die Differentialgleichung (1.3a) kann in der Form

$$\mathcal{L}_k u = -(\mathcal{A}u)' = f \quad (1.3c)$$

geschrieben werden, wobei der Operator \mathcal{A} durch

$$\mathcal{A}u(x) := \varepsilon u'(x) + (bu)(x) - \int_0^x (cu)(s) ds \quad (1.3d)$$

definiert ist.

1.1.2 Stabilitätsabschätzungen

Im folgenden Abschnitt wollen wir verschiedene a priori-Abschätzungen der Lösung u von (1.1) angeben. Diskrete Analoga einiger dieser Aussagen werden uns im Kapitel 2 wieder begegnen und bei der Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren eine entscheidende Rolle spielen.

Wählt man die Schrankenfunktion

$$w(x) = C(1+x)\|Lu\|_\infty,$$

dann folgt aus dem Vergleichssatz 1.1 die Ungleichung

$$\|u\|_\infty \leq C\|Lu\|_\infty = C\|f\|_\infty. \quad (1.4)$$

Ist f beschränkt, dann ist folglich auch u beschränkt. Die Ungleichung (1.4) impliziert, daß der inverse Operator \mathcal{L}^{-1} als lineare Abbildung von $L_\infty(\Omega)$ nach $L_\infty(\bar{\Omega})$ stetig ist. Diese Eigenschaft wird auch als L_∞ - L_∞ -Stabilität von \mathcal{L} bezeichnet.

Weitere Stabilitätsaussagen für \mathcal{L} bzw. \mathcal{L}_k , die zuerst in [5], [38] und [53] bewiesen wurden, vereinheitlicht und verallgemeinert Andreev in [3]. Er führt sie auf Eigenschaften der Greenschen Funktion \mathcal{G} von \mathcal{L}_k (bzw. \mathcal{L}) zurück, die als Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \mathcal{G}(x, \xi) &= \delta(x, \xi), \quad x \in (0, 1), \xi \in (0, 1) \\ G(0, \xi) &= G(1, \xi) = 0. \end{aligned}$$

gegeben ist. Andreev beweist zunächst, daß es eine Konstante $C > 0$ so gibt, daß \mathcal{G} für alle $x, \xi \in \Omega$ den Abschätzungen

$$0 \leq \mathcal{G}(x, \xi) \leq C \quad \text{und} \quad (1.5a)$$

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial \mathcal{G}(x, \xi)}{\partial x} \right| dx \leq C \quad (1.5b)$$

genügt. Daraus leitet er a priori–Abschätzungen der Lösung u von (1.1) bzw. (1.3) bezüglich der Maximum–Norm $\|\cdot\|_\infty$ und der durch

$$\|v\|_{1,\infty,\varepsilon} := \|v\|_\infty + \varepsilon\|v'\|_\infty$$

definierten gewichteten $W_\infty^1(0,1)$ –Norm $\|\cdot\|_{1,\infty,\varepsilon}$ ab. Die Schranken bilden den Dualräumen $L_1(0,1) = (L_\infty(0,1))^*$ und $W_\infty^{-1}(0,1) = (W_\infty^1(0,1))^*$ entsprechende Normen² von f (vgl. z. B. [1]), wobei Andreev die Normäquivalenz

$$\|f\|_{-1,\infty} = \|f\|_* := \min_{C \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0,1)} \left| \int_0^x f(s)ds - C \right|$$

nachweist. Basierend auf der Lösungsdarstellung

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (1.6)$$

beweist er

Satz 1.2 [3] *Zur Funktion $b \in C^1[0,1]$ mögen positive Konstanten $\beta, \bar{\beta}$ so existieren, daß für alle $x \in (0,1)$ die Beziehung $0 < \beta \leq b(x) \leq \bar{\beta}$ erfüllt ist. Ferner sei $c(x) \geq 0$ für alle $x \in (0,1)$. Dann gibt es positive Konstanten C, C_1, C_2 , unabhängig von ε , so daß die Abschätzungen*

$$(i) \|u\|_\infty \leq C\|f\|_1,$$

$$(ii) \|u\|_\infty \leq C\|f\|_{-1,\infty} \leq C \sup_{x \in (0,1)} \left| \int_0^x f(s)ds \right| \text{ und}$$

$$(iii) C_1\|f\|_{-1,\infty} \leq \|u\|_{1,\infty,\varepsilon} \leq C_2\|f\|_{-1,\infty}$$

gelten.

Die Aussage (iii) ist stärker als die von Gartland in [38] bewiesene *streng gleichmäßige Stabilität*³ von (1.1), denn die Norm $\|\cdot\|_{-1,\infty}$ ist schwächer als die Norm $\|\cdot\|_1$.

1.1.3 Schranken für die Ableitungen

Die Stabilitätsabschätzungen liefern Relationen zwischen der exakten Lösung des Randwertproblems (1.1) und der zugehörigen rechten Seite f . Für die Analyse numerischer Verfahren sind zusätzlich explizite Informationen über die Gestalt der Lösung u und ihrer Ableitungen wünschenswert. Am Ende dieses Abschnittes wird die Existenz einer entsprechenden Zerlegung der Lösung u von (1.1) bewiesen. Sie erweist sich als nützliches Hilfsmittel zur Herleitung von Konvergenzabschätzungen für Diskretisierungsverfahren.

Unter Glattheitsbedingungen an die Daten b, c und f , die die entsprechende Differenzierbarkeit von u sichern, kann für die i -te Ableitung ($i \in \mathbb{N}_0$) der Lösung u von (1.1) die Schranke

$$|u^{(i)}(x)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-i} \exp\left(-\beta \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \quad (1.7)$$

² $W_\infty^1(0,1) := \{v \in W_1^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\} \subset L_\infty(0,1)$

³Das Problem (1.1) heißt *streng gleichmäßig stabil*, wenn es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ positive Konstanten c, d_0 und d_1 , unabhängig von ε , so gibt, daß die Ungleichung $\|u\|_{1,\infty,\varepsilon} \leq C\|f\|_1 + d_0|u(0)| + d_1|u(1)|$ gilt.

hergeleitet werden. Dieses Resultat wurde zuerst in [50] bewiesen. Ein Weg zur Herleitung von (1.7) besteht in der formalen Differentiation der angepaßten asymptotischen Entwicklung und wird in [80] beschrieben. Einen alternativen Beweis über eine explizite Lösungsdarstellung für (1.1), deren wiederholte Ableitung und vollständige Induktion findet man in [91, Abschnitt I.1.1.2].

Shishkin [99] wies erstmals die Existenz einer Zerlegung der Lösung u in einen sogenannten *glatten* und einen *Grenzschichtanteil* nach:

Satz 1.3 [72] *Für $b, f \in C^3(0, 1)$ gestattet die Lösung u von (1.1) eine Darstellung $u = S + E$ in einen glatten Anteil S , der für alle $x \in (0, 1)$ den Beziehungen*

$$\mathcal{L}S(x) = f(x) \quad \text{und} \quad |S^{(k)}(x)| \leq C(1 + \varepsilon^{2-k}) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3$$

genügt, während die Grenzschichtkomponente E für alle $x \in (0, 1)$ die Bedingungen

$$\mathcal{L}E(x) = 0 \quad \text{und} \quad |E^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} \exp(-\beta x/\varepsilon) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3$$

erfüllt.

Bemerkung 1.3 1. Der in [72] geführte Beweis des Satzes 1.3 läßt sich unter höheren Glattheitsforderungen an die Daten des Problems (1.1) auch auf $k > 3$ erweitern.

2. Linß liefert in [60] einen alternativen Beweis des Satzes 1.3 unter schwächeren Voraussetzungen an die Glattheit der Daten von (1.1) für $k \leq 3$.

3. In [58] diskutiert derselbe Autor die Notwendigkeit einer Shishkin-Zerlegung zum Nachweis der Konvergenz von Diskretisierungsverfahren. Basierend auf einer geeigneten Integralungleichung schlägt er in [58, 61] eine Abschätzungstechnik vor, die nur auf (1.7) beruht. \square

1.2 Das zweidimensionale Modellproblem

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Randwertaufgabe

$$\mathcal{L}u := -\varepsilon \Delta u - \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega := (0, 1) \times (0, 1) \quad (1.8a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \quad (1.8b)$$

Die Daten $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $c, f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des Problems (1.8) sollen folgende Voraussetzungen erfüllen:

- (i) Für den Parameter ε gelte $0 < \varepsilon \ll 1$.
- (ii) Die Vektorfunktion $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2)^T$ sei strikt positiv auf $\bar{\Omega}$. Es gebe Konstanten $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 > 0$ so, daß für alle $(x, y) \in \bar{\Omega}$ die Ungleichungen $b_1(x, y) \geq \beta_1 > 0$ und $b_2(x, y) \geq \beta_2 > 0$ erfüllt sind.
- (iii) Der Quellterm f genüge in den Ecken des Gebietes den Kompatibilitätsbedingungen

$$f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 0. \quad (1.9)$$

Wir können weiterhin ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Koeffizient c des Reaktionsterms nichtnegativ ist bzw. daß die Ungleichung $c + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} > 0$ gilt.

Bemerkung 1.4 Andernfalls überführt die Transformation

$$u(x, y) \rightarrow \exp(-\theta(x + y))v(x, y)$$

für ein geeignet gewähltes $\theta = \theta(\mathbf{b}, c)$ die Randwertaufgabe (1.8) in ein äquivalentes Problem, das dieser Bedingung genügt (vgl. [108]). \square

Bemerkung 1.5 Wir haben in (1.8b) homogene Dirichlet-Randbedingungen vorausgesetzt. Dies erweist sich als geringe Einschränkung der Allgemeinheit. Es seien die Funktionen $g_W, g_O, g_N, g_S \in C^2[0, 1]$ gegeben. Ein Problem vom Typ (1.8a) mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_W(y), & u(x, 0) &= g_S(x), \\ u(1, y) &= g_O(y) \quad \text{und} \quad u(x, 1) &= g_N(x), \end{aligned}$$

die den Kompatibilitätsforderungen

$$\begin{aligned} g_W(0) &= g_S(0), & g_O(0) &= g_S(1), \\ g_W(1) &= g_N(0) \quad \text{und} \quad g_O(1) &= g_N(1) \end{aligned}$$

genügen, kann wie folgt in eine Aufgabe mit homogenen Randbedingungen überführt werden: Wir definieren die Funktionen $\bar{u}, u^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$\bar{u}(x, y) := g_W(y)(1 - x) - \frac{1}{2}(g_W(0)(1 - x)(1 - y) + g_W(1)(1 - x)y) \quad (1.10)$$

$$+ g_O(y)x - \frac{1}{2}(g_O(0)x(1 - y) + g_O(1)xy) \quad (1.11)$$

$$+ g_S(x)(1 - y) - \frac{1}{2}(g_S(0)(1 - x)(1 - y) + g_S(1)x(1 - y)) \quad (1.12)$$

$$+ g_N(x)y - \frac{1}{2}(g_N(0)(1 - x)y + g_N(1)xy) \quad (1.13)$$

$$(1.14)$$

und

$$u^*(x, y) := u(x, y) - \bar{u}(x, y).$$

Die Funktion u^* genügt für alle $(x, y) \in \Omega$ der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}u^*(x, y) = \mathcal{L}u(x, y) - \mathcal{L}\bar{u}(x, y) = f(x, y) - \mathcal{L}\bar{u}(x, y)$$

mit modifizierter rechter Seite und homogenen Randbedingungen auf $\partial\Omega$ (vgl. [43]). \square

1.2.1 Existenz, Eindeutigkeit und Grenzsichtverhalten der Lösung

Im allgemeinen kann man die Existenz einer klassischen Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $\alpha \in (0, 1]$ nur erwarten, wenn b_1, b_2, c, f in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ liegen und der Rand von Ω hinreichend glatt ist.

Für Gebiete mit *regulärem* Rand⁴ (wie z. B. $\Omega = (0, 1)^2$) gilt folgende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage:

Satz 1.4 [91] *Die Funktionen b_1, b_2, c, f seien α -Hölder-stetig auf $\bar{\Omega}$ für ein $\alpha \in (0, 1]$, und c sei nichtnegativ. Das Gebiet Ω besitze einen regulären Rand. Dann hat das Problem (1.8) eine eindeutige klassische Lösung $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.*

⁴Der Rand $\partial\Omega$ heißt *regulär*, wenn er lokal durch Lipschitz-stetige Funktionen beschrieben werden kann.

Gelten in den Ecken von Ω zusätzlich Kompatibilitätsbedingungen wie (iii), dann existiert sogar eine klassische Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^{4,\alpha}(\Omega)$. Weitere Kompatibilitätsbedingungen sichern noch glattere Lösungen (vgl. [43, Theorem 3.2]).

Der Operator \mathcal{L} genügt dem klassischen Vergleichsprinzip:

Satz 1.5 [83] *Der Reaktionskoeffizient c aus Gleichung (1.8) sei nichtnegativ. Genügen die Funktionen $v, w \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ den Ungleichungen*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}v(x, y)| &\leq \mathcal{L}w(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{und} \\ |v(x, y)| &\leq w(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned}$$

dann gilt für alle $(x, y) \in \bar{\Omega}$ die Beziehung $|v(x, y)| \leq w(x, y)$.

Die Grenzschichten der Lösung u von (1.8) entstehen in Teilgebieten des Gebietes Ω , wo die Lösung u für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht gegen die Lösung u_r des *reduzierten Problems*

$$\mathcal{L}_r u_r := -\mathbf{b} \cdot \nabla u_r + c u_r = f \quad \text{in } \Omega, \quad (1.15)$$

versehen mit passenden Randbedingungen, konvergiert. Die Grenzschichtbereiche sind klein im Vergleich zu dem Teilgebiet $\Omega_r \subset \Omega$, in dem für $\varepsilon \rightarrow 0$ punktweise Konvergenz von $u(\cdot, \varepsilon)$ gegen u_r vorliegt.

Die Lösung des reduzierten Problems kann ein sehr kompliziertes Verhalten aufweisen. Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung setzen eine höhere Glattheit der Daten und gewisse Kompatibilität der Randbedingungen und Daten in den Ecken des Gebietes voraus. (Details hierzu werden z.B. in [91, III.1] und [57] diskutiert.)

Bemerkung 1.6 Außerhalb der Grenzschichtbereiche liefert uns das reduzierte Problem Informationen über die exakte Lösung u von (1.8). Seine Lösung u_r ist wesentlicher Bestandteil der Konstruktion von asymptotischen Approximationen von u , aus denen z. B. die hier verwendeten Zerlegungen der Lösung in glatte und Grenzschichtanteile abgeleitet werden können. Die Verwandtschaft der elliptischen Randwertaufgabe zum hyperbolischen reduzierten Problem beeinflusst ferner die Wahl der numerischen Verfahren zur Approximation der Lösung von (1.8). \square

Die Vorgaben an die Vektorfunktion \mathbf{b} bestimmen die Lage der auftretenden Grenzschichten. Für ein Gebiet mit regulärem Rand, der fast überall einen eindeutig definierten Normalenvektor \mathbf{n} besitzt, kann der Rand in drei Typen unterteilt werden:

$$\begin{aligned} \Gamma^- &:= \{\mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} < 0\} && \text{Einströmrand} \\ \Gamma^0 &:= \{\mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0\} && \text{charakteristischer Rand} \\ \Gamma^+ &:= \{\mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} > 0\} && \text{Ausströmrand.} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.7 Der Verlauf der Charakteristiken des reduzierten Problems (1.15) legt nahe, die Randbedingung $u_r = 0$ für diese Aufgabe auf dem Abschluß des Einströmrandes Γ^- zu fixieren. \square

Der Diffusionsterm $-\varepsilon \Delta u$ in (1.8) bewirkt einerseits eine Glättung der Lösung des Problems. Andererseits ist sein Auftreten zusammen mit der zusätzlichen Randbedingung für die Ausbildung der Grenzschichten verantwortlich. Man unterscheidet folgende Typen von Grenzschichten:

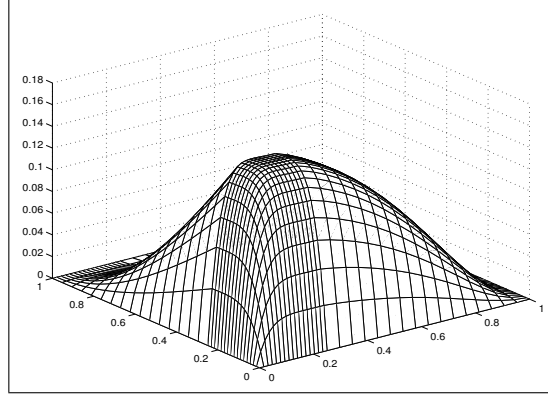


Abbildung 1.2: Die Lösung des Randwertproblems (5.3) mit dem Parameter $\varepsilon = 10^{-8}$

Reguläre Randgrenzschichten treten am Ausströmrand Γ^+ auf und sind von der Breite $\mathcal{O}(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$. Man nennt sie auch *exponentielle Grenzschichten*. Sie sind die zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestuntersuchten Grenzschichten.

Charakteristische Randgrenzschichten treten dort auf, wo der Rand parallel zu den Charakteristiken des Vektorfeldes \mathbf{b} verläuft. Mit einer Breite von $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon} \ln(1/\varepsilon))$ sind sie weniger scharf als reguläre Randgrenzschichten.

Innere Grenzschichten entstehen aus Unstetigkeiten der Randbedingungen am Einströmrand und breiten sich senkrecht zu den Charakteristiken des Vektorfeldes \mathbf{b} aus. Sie weisen ähnliche Eigenschaften wie die charakteristischen Grenzschichten auf.

Wir wollen im folgenden nur den Fall der regulären Randgrenzschichten behandeln. Die gewählten Randbedingungen und Voraussetzung (ii) schließen das Auftreten der anderen Grenzschichtarten aus. Der Einströmrand unseres Gebietes ist $\Gamma^- = \{(x, y) \in \Gamma : x = 1\} \cup \{(x, y) \in \Gamma : y = 1\}$. Reguläre Randgrenzschichten bilden sich entlang $\Gamma^+ = \{(x, y) \in \Gamma : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \Gamma : y = 0\}$ aus.

1.2.2 Stabilitätsaussagen

Aus Satz 1.5 folgt die L_∞ - L_∞ -Stabilität von \mathcal{L} und somit

$$\|u\|_\infty \leq C \|\mathcal{L}u\|_\infty = C \|f\|_\infty.$$

Zweidimensionale Analoga zu den in Satz 1.2 aufgeführten Stabilitätsbeziehungen gibt es (bisher) nicht. Eine Ursache dafür besteht darin, daß die Greensche Funktion $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$ von (1.8) nicht beschränkt ist. Für ein Problem mit konstanten Koeffizienten und $c = 0$ wird in [22] das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion in der Form

$$\mathcal{G}(x, y) \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{|\mathbf{b}||x, y|}{2\varepsilon} \right) \quad \text{für } |(x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad (1.16a)$$

$$\mathcal{G}(x, y) \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{|\mathbf{b}||x, y|}{2\varepsilon} \right)^{-1/2} \exp(-(\mathbf{b} \cdot (x, y)^T + |\mathbf{b}||x, y|)/(2\varepsilon))$$

für $|(x, y)| \rightarrow \infty$ (1.16b)

beschrieben. Die Gültigkeit von L_∞ - L_1 -Stabilität und streng gleichmäßiger Stabilität ist im zweidimensionalen Fall folglich nicht zu erwarten.

Dörfler beweist in [24] verschiedene L_p -Stabilitätsaussagen für Probleme vom Typ (1.8). Falls zu $p \in [0, \infty]$ eine Konstante γ_p so existiert, daß $c + \frac{1}{p} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq \gamma_p > 0$ gilt, zeigt Dörfler einerseits die Beziehung

$$\|u\|_p \leq \frac{1}{\gamma_p} \|f\|_p.$$

Außerdem beweist er in derselben Arbeit eine gleichmäßige anisotrope Stabilitätsabschätzung folgender Art:

Satz 1.6 [24, Theorem 2.12] *Es sei $c + \nabla \cdot \mathbf{b} \geq \gamma_1 > 0$. Dann existiert für die Lösung u von (1.8) eine Konstante $C > 0$ so, daß die Beziehungen*

$$\|u\|_\infty \leq C \|f\|_{1 \otimes \infty} \quad \text{und} \quad \|u\|_\infty \leq C \|f\|_{\infty \otimes 1}$$

gelten. Dabei sind die anisotropen Normen $\|\cdot\|_{1 \otimes \infty}$ und $\|\cdot\|_{\infty \otimes 1}$ für $f \in C(\bar{\Omega})$ wie folgt definiert:

$$\|f\|_{1 \otimes \infty} := \|x \mapsto \|f(x, \cdot)\|_\infty\|_1 \quad \text{und} \quad \|f\|_{\infty \otimes 1} := \|y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_\infty\|_1.$$

Bemerkung 1.8 Ein diskretes Analogon zu dieser Aussage für das Upwind-Differenzenverfahren bewies Andreev [2]. Es wird in Abschnitt 2.4 behandelt und im Rahmen der Konvergenzuntersuchungen zu einem Defektkorrekturverfahren für das zweidimensionale Modellproblem angewendet. \square

Bemerkung 1.9 Einen anderen Zugang zu Stabilitätsabschätzungen für die Lösung von (1.8) bietet die zugehörige schwache Formulierung. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit im wesentlichen auf Finite-Differenzen-Verfahren konzentrieren und dafür einer klassischen Lösung bedürfen, wollen wir darauf nicht näher eingehen und verweisen z. B. auf [91]. \square

1.2.3 Schranken für die partiellen Ableitungen

Schranken für die partiellen Ableitungen der Lösung des zweidimensionalen Randwertproblems (1.8) anzugeben, erweist sich als weitaus schwieriger als im eindimensionalen Fall. Sie können oft nur in Spezialfällen bewiesen werden.

Falls die Bedingung (1.9) und die Ungleichung $c + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq 1$ auf $\bar{\Omega}$ gelten und die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{1,x} + c & b_{2,x} \\ b_{1,y} & b_{2,y} + c \end{pmatrix}$$

eine strikt diagonaldominante L-Matrix⁵ ist, zeigen Adam et al. in [93], daß ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert, so daß für alle $(x, y) \in \Omega$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ die Beziehungen

$$|\partial_x u(x, y)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1 \frac{x}{2\varepsilon}) \right) \quad \text{und} \quad (1.17a)$$

$$|\partial_y u(x, y)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta_2 \frac{y}{2\varepsilon}) \right) \quad (1.17b)$$

⁵Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *L-Matrix*, wenn $a_{ii} > 0$ gilt und außerdem $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ (vgl. [41, S.20]).

gelten. Abschätzungen für höhere partielle Ableitungen von u sind nur unter zusätzlichen Kompatibilitätsbedingungen beweisbar, die die Existenz einer entsprechend glatten Lösung des reduzierten Problems garantieren.

Aufbauend auf einer Idee von Miller et al. [72, Kap.12] und ihrer Erweiterung in [23] beweisen Linß und Stynes in [66] die Existenz einer Zerlegung von u in eine glatte Funktion S und Grenzsichtanteile E_1, E_2 sowie E_{12} . Wir führen zur Abkürzung der Notation die Bezeichnungen

$$\mathcal{L}_0 g := \frac{\partial}{\partial y} g \left(\frac{b_2}{b_1} \right) + g \left(\frac{c}{b_1} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_1 g := \frac{\partial}{\partial y} g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2}{b_1} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{b_1} \right)$$

ein.

Satz 1.7 [66] *Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Für ein $\alpha \in (0, 1]$ sei die Funktion f in $C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ und genüge der Voraussetzung (1.9). Ferner seien die Kompatibilitätsbedingungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{b_1} \right) (1, 1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{b_2} \right) (1, 1), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{b_1} \right) - \mathcal{L}_0 \left(\frac{f}{b_1} \right) \right) (1, 1) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f}{b_2} \right) (1, 1), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f}{b_1} \right) - \mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{b_1} \right) - \mathcal{L}_0 \left(\frac{f}{b_1} \right) \right) - 2\mathcal{L}_1 \left(\frac{f}{b_1} \right) \right) (1, 1) &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{f}{b_2} \right) (1, 1) \end{aligned}$$

und

$$\left(b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f}{b_2} \right) \right) (1, 1) = \left(b_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{f}{b_1} \right) \right) (1, 1)$$

erfüllt. Ist $n \geq 4$, so gelte zusätzlich $\frac{\partial}{\partial x} b_2(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} b_1(0, 0)$.

Dann besitzt die Randwertaufgabe (1.8) eine klassische Lösung $u \in C^{3,1}(\bar{\Omega})$. Diese Lösung läßt sich gemäß

$$u = S + E_1 + E_2 + E_{12} \tag{1.18}$$

zerlegen, wobei die Summanden aus (1.18) für $0 \leq \mu, \nu \leq 2$ und $0 \leq i + j \leq n$ und alle $(x, y) \in \Omega$ den Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} S(x, y) \right| \leq C \quad \text{für} \quad 0 \leq i + j \leq 2, \tag{1.19a}$$

$$\left| \frac{\partial^{i+\nu}}{\partial x^i \partial y^\nu} E_1(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-i} e^{-\beta_1 x / \varepsilon}, \tag{1.19b}$$

$$\left| \frac{\partial^{\mu+j}}{\partial x^\mu \partial y^j} E_2(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-j} e^{-\beta_2 y / \varepsilon} \quad \text{und} \tag{1.19c}$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} E_{12}(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-(i+j)} e^{-\beta_1 x / \varepsilon} e^{-\beta_2 y / \varepsilon} \tag{1.19d}$$

genügen. Ferner gelten für alle $(x, y) \in \Omega$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} |\mathcal{L} E_1(x, y)| &\leq C \varepsilon e^{-\beta_1 x / \varepsilon}, \\ |\mathcal{L} E_2(x, y)| &\leq C \varepsilon e^{-\beta_2 y / \varepsilon} \quad \text{und} \\ |\mathcal{L} E_{12}(x, y)| &\leq C \varepsilon e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y) / \varepsilon}. \end{aligned}$$

Die Funktion S beschreibt den regulären Anteil der Lösung u , E_1 die Grenzschicht in x -Richtung, E_2 die Grenzschicht in y -Richtung und E_{12} die Eckgrenzschicht nahe $(0, 0)$.

Bemerkung 1.10 Studiert man den Beweis des Satzes 1.7, der auf einer angepaßten asymptotischen Entwicklung von u beruht, so stellt man fest, daß für eine hinreichend glatte Lösung u eine derartige Zerlegung so konstruiert werden kann, daß auch höhere Ableitungen von S, E_1, E_2 und E_{12} beschränkt sind. Die geforderte Glattheit von u wird durch entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen an b und f und eine hohe Glattheit von f gesichert. Um für ein $l \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} |S(x, y)| \leq C$ mit $i + j \leq l$ zu zeigen, benötigt man etwa $f \in C^k(\bar{\Omega})$ für $k = 3l - 2$. Eine strengere, aber einfachere Forderung als die Kompatibilitätsbedingungen an f ist die Gleichung $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(0, 0) = 0$ für $i + j < k$. \square

Bemerkung 1.11 Die Voraussetzungen des Satzes 1.7 sind hinreichend für die Existenz der beschriebenen Zerlegung. Wir werden der Einfachheit halber in Kapitel 5 die Existenz einer solchen Zerlegung von geeigneter Ordnung voraussetzen. \square

Kapitel 2

Finite–Differenzen–Verfahren

In diesem Kapitel werden Standard–Differenzenverfahren zur numerischen Berechnung der Lösung der singular gestörten Modellprobleme (1.1) und (1.8) mit den für sie typischen Eigenschaften vorgestellt. Besonderen Stellenwert bei der Betrachtung nehmen Stabilitätseigenschaften der Differenzenoperatoren in Abhängigkeit von der Dimension des Grundgebietes Ω ein. Die Bedeutung dieser Sichtweise erschließt sich im Abschnitt über das Defektkorrekturprinzip und die üblichen Beweisstrategien für die Konvergenz von Defektkorrekturverfahren zur Approximation der Lösung von Randwertaufgaben.

Die Art des zur Diskretisierung des Grundgebietes verwendeten Gitters beeinflusst das Konvergenzverhalten der behandelten Differenzenverfahren wesentlich. Verschiedene Typen a priori grenzschichtangepaßter Gitter sind deshalb Gegenstand des Abschnittes 2.2.

2.1 Grundlegende Begriffe

Will man die Lösung einer Randwertaufgabe über dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ durch ein Differenzenverfahren approximieren, so ersetzt man zunächst $\bar{\Omega}$ durch eine Menge von $(N + 1)^d$ Gitterpunkten aus $\bar{\Omega}$. In jedem Gitterpunkt wird der Differentialoperator durch einen auf dem Gitter Ω^N erklärten Differenzenoperator approximiert.

Wir werden im folgenden ein einfaches Upwind–Differenzenverfahren und ein zentrales Differenzenverfahren definieren und Aussagen über deren Stabilität, Konsistenz und Konvergenz treffen. Upwind–Techniken werden häufig zur Diskretisierung hyperbolischer Aufgaben angewendet, während das zentrale Differenzenverfahren ein Standardverfahren für reguläre elliptische Probleme ist.

Wir trennen die Betrachtungen für das eindimensionale und das zweidimensionale Modellproblem (1.1) bzw. (1.3) und (1.8), da in Abhängigkeit von der Dimension d des Grundgebietes unterschiedliche Stabilitätsaussagen gelten.

In Anlehnung an [41, 95] definieren wir zunächst die charakteristischen Eigenschaften von Differenzenverfahren. Es bezeichne im folgenden L^N den Differenzenoperator und u^N die als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} L^N u^N &= f^N && \text{in } \Omega^N \\ u^N &= 0 && \text{auf } \Gamma^N \end{aligned}$$

ermittelte Approximation der exakten Lösung u des stetigen Ausgangsproblems mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen. Die entscheidende Eigenschaft eines Differenzenverfahrens ist seine Konvergenz:

Definition 2.1 Ein Differenzenverfahren heißt **konvergent von der Ordnung** $k > 0$ in der (diskreten) Norm $\|\cdot\|_l$, wenn es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ und eine von N unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $N > N_0$ die Einschränkung \hat{u} von u auf das Gitter Ω^N und u^N der Ungleichung

$$\|\hat{u} - u^N\|_l \leq CN^{-k}$$

genügen. Das Verfahren heißt **robust** oder **ε -gleichmäßig konvergent**, wenn die Konstante C auch unabhängig vom Störungsparameter ε ist.

Wir interessieren uns in der vorliegenden Arbeit vor allem für punktweise Abschätzungen des Fehlers für alle Gitterpunkte, also Konvergenzaussagen in der diskreten Maximumnorm $\|\cdot\|_{\infty,d}$.

Die Konvergenzanalyse eines Differenzenverfahrens baut im allgemeinen auf dessen *Konsistenz* und *Stabilität* auf.

Definition 2.2 Ein Differenzenverfahren heißt **konsistent von der Ordnung** k bezüglich der Norm $\|\cdot\|_r$, wenn für die Lösung u der Differentialgleichung und ihre Einschränkung \hat{u} sowie die Einschränkung $\widehat{\mathcal{L}u}$ von $\mathcal{L}u$ auf das Gitter Ω^N die Ungleichung

$$\|L^N \hat{u} - \widehat{\mathcal{L}u}\|_r \leq CN^{-k}$$

mit einer positiven, von N unabhängigen Konstanten C gilt.

Bemerkung 2.1 Die Konsistenz eines Verfahrens sichert, daß L^N für $N \rightarrow \infty$ gegen den Differentialoperator \mathcal{L} konvergiert. Für die hier betrachteten singular gestörten Randwertaufgaben werden wir im allgemeinen keine Konsistenz *gleichmäßig in ε* nachweisen können. \square

Die zweite bedeutende Eigenschaft eines Differenzenverfahrens ist seine Stabilität:

Definition 2.3 Ein Differenzenverfahren heißt $\|\cdot\|_l - \|\cdot\|_r$ -**stabil**, wenn aus den Gleichungen $L^N u^N = f^N$ in Ω^N und $u^N = 0$ auf Γ^N die Beziehung

$$\|u^N\|_l \leq C \|f^N\|_r$$

folgt.

Bemerkung 2.2 Die Stabilität des Differenzenverfahrens ist gleichbedeutend mit der Beschränktheit des inversen Operators $L^{N,-1} : (\mathbb{R}^{N^d}, \|\cdot\|_r) \rightarrow (\mathbb{R}^{N^d}, \|\cdot\|_l)$. Aus der Stabilität des Differenzenverfahrens folgt insbesondere, daß die Lösung u^N stetig von den Eingangsdaten des diskreten Problems abhängt. \square

Es gilt die Implikation

$$\text{Konsistenz und Stabilität} \implies \text{Konvergenz},$$

d. h., aus Konsistenz von der Ordnung k in der Norm $\|\cdot\|_r$ und $\|\cdot\|_l - \|\cdot\|_r$ -Stabilität von L^N folgt die Konvergenz von der Ordnung k in der Norm $\|\cdot\|_l$.

2.2 Grenzschichtangepaßte Gitter

Der abrupten Änderung der Lösung singular gestörter Randwertaufgaben in den Grenzschichtbereichen werden Diskretisierungsverfahren auf uniformen Gittern, deren Schrittweite nicht von der Größenordnung des Störungsparameters ist, nur schwer gerecht. Punktweise gleichmäßig bezüglich ε konvergieren nur Verfahren, die auf exponentieller Anpassung beruhen¹. Eine Alternative zur exponentiellen Anpassung ist die Verwendung von hochgradig nichtuniformen Gittern.

Die zwei grundlegenden Zugänge zur Konstruktion von grenzschichtangepaßten Gittern sind:

a priori gewählte Gitter. Basierend auf Informationen über das Verhalten der exakten Lösung wird das Gitter im voraus in „kritischen Regionen“ des Grundgebietes verfeinert.

a posteriori verfeinerte Gitter. Zunächst wird eine Approximation der exakten Lösung auf einem (uniformen) Ausgangsgitter berechnet. Aus dieser berechneten Näherung werden Informationen darüber gewonnen, wo das Gitter zu verfeinern ist.

Die Konstruktion von a posteriori verfeinerten Gittern wird zum Beispiel in [91, Abschnitt III.3.3] erläutert. Wir beschränken uns in der vorliegenden Arbeit auf die Betrachtung a priori gewählter Gitter. In diesem Abschnitt werden eindimensionale grenzschichtangepaßte Gitter vorgestellt. Da das Grundgebiet unseres Modellproblems (1.8) ein Rechteckgebiet ist, können zweidimensionale Gitter leicht als Tensorprodukte der eindimensionalen Gitter konstruiert werden.

2.2.1 Bakhvalov–Gitter

Eine Schlüsselstellung zur Konstruktion a priori grenzschichtangepaßter Gitter nimmt die Arbeit [9] von Bakhvalov aus dem Jahre 1969 ein. Darin wird das gesuchte Gitter der x -Achse als eine Projektion eines gleichabständigen Gitters der y -Achse mittels der Umkehrfunktion der Grenzschichtfunktion erzeugt.

Die Lösung des eindimensionalen Randwertproblems (1.1) habe eine Grenzschicht bei $x = 0$. Dann hat die Grenzschichtfunktion die Gestalt

$$y = \exp\left(-\beta \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

wobei β wie in Abschnitt 1.1 gewählt ist. Ein Gitterpunkt x_i ergibt sich demnach aus der Gleichung

$$x_i = -\frac{\varepsilon}{\beta} \ln\left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

Zur Beschreibung des Gitters wird eine *gittererzeugende Funktion* $\varphi_B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eingeführt, die streng monoton ist und für die die Gleichungen $\varphi_B(0) = 0$ und $\varphi_B(1) = 1$ gelten. Die Funktion $\varphi_B : t \mapsto x := \varphi_B(t)$ ordnet jedem Gitterpunkt t_i eines gleichabständigen Gitters einen Gitterpunkt x_i innerhalb der Grenzschichtregion $[0, \lambda_B]$ zu. Die Funktion φ hängt zumeist von weiteren (vom Nutzer zu wählenden) Parametern ab. Es ist

$$\varphi_B(t) = \begin{cases} \mu_B(t) := -A\varepsilon \ln(1 - t/q) & \text{für } t \in [0, \lambda_B] \\ \mu'_B(\lambda_B)(t - \lambda_B) + \mu_B(\lambda_B) & \text{für } t \in [\lambda_B, 1], \end{cases} \quad (2.1)$$

¹Dies bedeutet, daß Exponentialfunktionen vom Grenzschichttyp wenigstens lokal exakt diskretisiert werden.

wobei die Konstanten A und q die Eigenschaften $A > 2$, $q \in (0, 1)$ und $q > A\varepsilon$ haben. Das Gitter ist gleichabständig jenseits der Grenzschichtregion. Der Übergangspunkt zwischen kondensierendem und uniformem Gitterteil wird mit λ_B bezeichnet. Er ergibt sich aus der Gleichung

$$\mu_B(\lambda_B) + \mu'_B(\lambda_B)(y - \lambda_B) = 1. \quad (2.2)$$

Aus geometrischer Sicht garantiert die Gleichung (2.2), daß die Tangente an μ_B im Punkt $(\lambda_B, \mu_B(\lambda_B))$ durch den Punkt $(1, 1)$ verläuft.

Die nichtlineare Gleichung (2.2) zur Ermittlung des Übergangspunktes λ_B kann nicht exakt gelöst werden. Vulcanović [114] schlug deshalb vor, die exponentielle Grenzschichtfunktion durch ihre $(0, 1)$ -Padé-Approximation zu ersetzen:

$$\exp\left(-\beta \frac{x}{A\varepsilon}\right) \approx \left(1 + \beta \frac{x}{A\varepsilon}\right).$$

Die gittererzeugende Funktion des **Vulanović-Gitters** ist dann

$$\varphi_V(y) = \begin{cases} \mu_V(y) := -A\varepsilon y/(q - y) & \text{für } y \in [0, \lambda_V] \\ \mu'_V(\lambda_V)(y - \lambda_V) + \mu_V(\lambda_V) & \text{für } y \in [\lambda_V, 1], \end{cases} \quad (2.3)$$

Anstelle von (2.2) ergibt sich nun eine quadratische Gleichung für λ_V . Derartige Varianten des ursprünglichen Bakhvalov-Gitters, wie sie zum Beispiel von Vulcanović [114] und Liseikin [68] eingeführt wurden, werden unter dem Begriff *Bakhvalov-Typ-Gitter* zusammengefaßt.

2.2.2 Shishkin-Gitter

Shishkin schlug in [98] ein überraschend einfaches Prinzip zur Konstruktion stückweise uniformer grenzschichtangepaßter Gitter vor. Es sei λ_0 die (formale) Konvergenzordnung des verwendeten Diskretisierungsverfahrens und $N + 1$ die Anzahl der Gitterpunkte im Intervall $[0, 1]$. In Anlehnung an die Grenzschichtdicke $\mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon)$ definiert Shishkin den Übergangspunkt λ_S zwischen grobem und feinem Gitter so, daß die Gleichung

$$CN^{-\lambda_0} = \exp\left(-\frac{\beta\lambda_S}{\varepsilon}\right)$$

gilt, das heißt

$$\lambda_S := \min\left\{\frac{1}{2}, \lambda_0 \frac{\varepsilon}{\beta} \ln N\right\}. \quad (2.4)$$

Im Intervall $[\lambda_S, 1]$ ist damit die Grenzschichtfunktion von der Größenordnung des Verfahrensfehlers. Die Intervalle $[0, \lambda_S]$ und $[\lambda_S, 1]$ werden gleichabständig in $N/2$ Teilintervalle unterteilt. Für die Schrittweite $h_i = x_i - x_{i-1}$ gelten die Abschätzungen

$$h_i = 2N^{-1}\lambda_S = C\varepsilon N^{-1} \ln N, \quad \text{falls } 1 \leq i \leq N/2 \quad (2.5a)$$

und

$$N^{-1} \leq h_i = 2N^{-1}(1 - \lambda_S) \leq 2N^{-1}, \quad \text{falls } N/2 + 1 \leq i \leq N. \quad (2.5b)$$

Die gittererzeugende Funktion φ_S des Shishkin-Gitters ist stückweise linear (vgl. Abbildung 2.1):

$$\varphi_S(t) = \begin{cases} 2t\lambda_S & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ 2(1 - \lambda_S)(t - \frac{1}{2}) + \lambda_S & \text{für } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Vulanović [115] erweiterte Shishkins Idee zu Gittern mit mehreren Übergangspunkten.

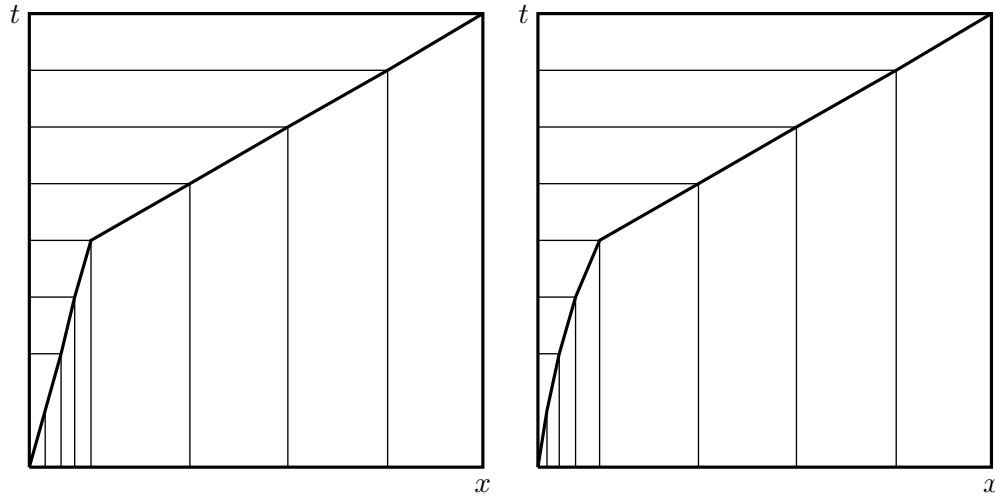


Abbildung 2.1: Gittererzeugende Funktion eines Shishkin-Gitters (Bild links) und eines Bakhvalov-Shishkin-Gitters (Bild rechts)

2.2.3 Shishkin-Typ-Gitter

In [94] haben Roos und Linß die existierenden Konzepte zur Konstruktion grenzschichtangepaßter Gitter unter folgendem einheitlichen Kriterium zusammengefaßt:

Gibt es eine Charakterisierung eines Gitters derart, daß daraus unmittelbare Rückschlüsse auf die gleichmäßige Konvergenz von Standardverfahren (einschließlich ihrer Konvergenzrate) gezogen werden können ?

In [94] werden *Shishkin-Typ-Gitter* konstruiert, die den Übergangspunkt und das äquidistante grobe Gitter von Shishkin übernehmen. Das feine Gitter wird durch spezielle gittererzeugende Funktionen φ beschrieben, die stetig, monoton wachsend und stückweise stetig differenzierbar sind. Ferner gelte stets $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1/2) = \ln N$. Man definiert

$$x_i := \begin{cases} \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \varphi(t_i) & \text{für } t_i = \frac{i}{N}, i = 1, \dots, N/2 \\ 1 - (1 - \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \ln N) \frac{2(N-i)}{N} & \text{für } i = N/2 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.7)$$

Für die Schrittweite h_i , $i = 1, \dots, N/2$, ergibt sich daraus die Darstellung

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\xi) d\xi. \quad (2.8)$$

Um die Frage nach einer allgemeingültigen Charakterisierung zu beantworten, führen Linß und Roos [94] zusätzlich die *gittercharakterisierende* Funktion $\psi : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$, definiert durch

$$\psi(t) := \exp(-\varphi(t)), \quad (2.9)$$

ein. Die Funktion ψ ist monoton fallend, und es gelten die Beziehungen $\psi(0) = 1$ und $\psi(1/2) = N^{-1}$. Folgende Aussage wird in [94] bewiesen:

Satz 2.1 [94] *Wenn die stückweise differenzierbare gittererzeugende Funktion φ den Bedingungen*

$$\max_{t \in [0, 1/2]} \varphi'(t) \leq CN \quad (2.10)$$

und

$$\int_0^1 \varphi'(\xi)^2 d\xi \leq CN \quad (2.11)$$

genügt, dann konvergiert das einfache Upwind-Differenzenverfahren (vgl. (2.15)) auf dem zugehörigen Shishkin-Typ-Gitter gleichmäßig in ε von (fast) erster Ordnung. Es gilt die Abschätzung

$$|u(x_i) - u_i^u| \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|.$$

Die Bedingung (2.10) ist äquivalent zur Forderung

$$\max_{t \in [0, 1/2]} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq CN \quad (2.12)$$

an die gittercharakterisierende Funktion ψ .

In weiteren Arbeiten, z. B. [34, 54, 63, 97, 116], wurden von Linß und verschiedenen Koautoren vergleichbare Konvergenzresultate für andere numerische Verfahren zur näherungsweise Lösung von linearen und quasilinearen Konvektions-Diffusions-Gleichungen bewiesen.

Ist das Grundgebiet eines zweidimensionalen Konvektions-Diffusions-Problems ein Rechteckgebiet, dann wird ein adäquates Shishkin-Typ-Gitter als Tensorprodukt von entsprechenden eindimensionalen Gittern erzeugt.

Die folgende Tabelle liefert eine Übersicht spezieller Gitter mit ihren gittererzeugenden Funktionen $\varphi : [0, 1/2] \rightarrow [0, \lambda_S]$ und der charakteristischen Größe $\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|$ (vgl. [34]):

Gitter	gittererzeugende Funktion φ	$\max_{t \in [0, 1/2]} \psi'(t) $
Standard-Shishkin-Gitter	$2(\ln N)t$	$C \ln N$
Polynomiales Shishkin-Gitter	$(2t)^m (\ln N)$	$C(\ln N)^{1/m}$
Vulanovićs verbessertes Shishkin-Gitter	$4\alpha_N t$ für $t \in [0, \frac{1}{4}]$ $2\alpha_N - \beta_N + 4(\beta_N - \alpha_N)t$ für $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ mit $\alpha_N = \ln(\ln N), \beta_N = \ln N$	$C \ln(\ln N)$
Bakhvalov-Shishkin-Gitter	$-\ln [1 - 2(1 - N^{-1})t]$	C
Modifiziertes Bakhvalov-Shishkin-Gitter	$t/(q - t)$ mit $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \ln N}$	C
Gitter mit rationalem ψ	$\ln [1 + (N - 1)(2t)^l], l \geq 2$	$CN^{1/l}$

Tabelle 2.1: Einige Shishkin-Typ-Gitter mit ihren gittererzeugenden Funktionen

Bemerkung 2.3 In [61] leitet Linß in Anlehnung an [94] Kriterien für die Monitorfunktion von mittels sogenannter *Grid Equidistribution* erzeugten grenzschichtangepaßten Gittern her, auf denen die üblichen Verfahren für singular gestörte Randwertaufgaben gleichmäßig von der erwarteten Ordnung konvergieren. Auf diesen Ansatz, dessen Erweiterung auf zweidimensionale Grundgebiete kompliziert ist, wollen wir nicht näher eingehen. \square

Am Ende dieses Abschnittes über grenzschichtangepaßte Gitter zeigen wir einige Eigenschaften der Shishkin-Typ-Gitter, die sich aus (2.10) und (2.11) ergeben. Die angegebenen Aussagen werden in späteren Konvergenzbeweisen für Diskretisierungsverfahren verwendet.

Lemma 2.1 [34] *Wenn die Bedingung (2.10) erfüllt ist, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq \lambda_0$ und alle Indizes $i = 1, \dots, N$ die Ungleichung*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(k\varepsilon))] d\xi \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|.$$

Beweis: Für $i = N/2 + 1, \dots, N$ folgt aus der Wahl des Übergangspunktes $\lambda = \lambda_S$ unmittelbar

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(k\varepsilon))] d\xi \leq h_i - \frac{k}{\beta} \exp(-\beta\xi/(k\varepsilon)) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \leq C(N^{-1} + N^{-\lambda_0/k}) \leq CN^{-1}.$$

Um die Aussage für $i = 1, \dots, N/2$ zu beweisen, transformieren wir die Integrationsvariable $\xi = \lambda_0 \varepsilon \beta^{-1} \varphi(t)$ und erhalten die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(k\varepsilon))] d\xi = \\ &= \frac{\lambda_0}{\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon + \exp(-\frac{\lambda_0 t}{k})] \varphi'(t) dt \\ &= \frac{\lambda_0}{\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon + \exp(-\frac{\lambda_0 \varphi(t)}{k})] \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} dt \\ &\leq \frac{\lambda_0}{\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon N + \exp((1 - \frac{\lambda_0}{k})\varphi(t))] |\psi'(t)| dt \\ &\leq C \left(\varepsilon + N^{-1} \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \exp((1 - \frac{\lambda_0}{k})\varphi(t)) \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\psi'(t)| \right) \\ &\leq CN^{-1} \max_{[0, 1/2]} |\psi'(t)|. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Definition von ψ in (2.9), die Beziehungen $\varphi' = -\psi'/\psi$ und $\psi(t) \geq N^{-1}$ sowie die äquivalenten Bedingungen (2.10) bzw. (2.12) benutzt. \blacksquare

Lemma 2.2 [34] *Wenn (2.10) erfüllt ist, dann gelten die Abschätzungen*

$$h_i \leq C\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_i / (\lambda_0 \varepsilon)) \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \quad \text{für } i = 1, \dots, N/2.$$

Beweis: Unmittelbar aus (2.10) folgt die erste Aussage, denn es ist

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \leq \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \varphi'(t) \leq C\varepsilon.$$

Um die zweite Aussage zu beweisen, ziehen wir wiederum die Definition von ψ und die Beziehung zwischen φ' und ψ' heran. Obiger Argumentation folgend gelten dann die Ungleichungen

$$h_i \leq \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \frac{\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|}{\min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \psi(t)} \leq \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \exp(\beta x_i / (\lambda_0 \varepsilon)).$$

Dabei wurde auf die Gleichung

$$\min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \psi(t) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \exp(-\beta x / (\lambda_0 \varepsilon)) = \exp(-\beta x_i / (\lambda_0 \varepsilon))$$

zurückgegriffen. Die Behauptung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_i / (\lambda_0 \varepsilon)) \leq C N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|$$

folgt nun unmittelbar. ■

Lemma 2.3 *Die gittererzeugende Funktion φ besitze eine nichtfallende erste Ableitung. Dann ist $h_i \leq h_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, N$, und es gilt*

$$h_{N/2} \geq \frac{2\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \ln N.$$

Beweis. Unmittelbar aus (2.8) und der Voraussetzung folgt die Ungleichung

$$h_i = \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(\xi) d\xi \leq \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi'(\xi) d\xi = h_{i+1}.$$

Nehmen wir an, es wäre $h_{N/2} < \frac{2\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \ln N$. Dann folgt aus der Beziehung $h_i \leq h_{N/2}$ für $i = 1, \dots, N/2 - 1$ die Abschätzung

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^{N/2} h_i \leq \sum_{i=1}^{N/2} h_{N/2} < N/2 \frac{2\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \ln N$$

im Widerspruch zu (2.4). Also muß $h_{N/2} \geq \frac{2\lambda_0 \varepsilon}{\beta} N^{-1} \ln N$ gelten. ■

Bemerkung 2.4 Die Voraussetzung von Lemma 2.3 gilt nicht für polynomiale Shishkin-Gitter und Gitter mit einer rationalen gittercharakterisierenden Funktion ψ . □

2.3 Differenzenverfahren für das eindimensionale Randwertproblem

Wir ersetzen das Ausgangsgebiet $\Omega = (0, 1)$ durch ein (beliebiges) Gitter mit $N - 1$ inneren Gitterpunkten

$$\Omega^N = \{x_1, \dots, x_{N-1} : 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1\}$$

und ergänzen das Gitter Ω^N um die Randpunkte $x_0 = 0$ und $x_N = 1$ zu $\bar{\Omega}^N$. Die Gitterschrittweite ist definiert durch

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Wir führen weiterhin die gewichtet gemittelte Schrittweite $\bar{h}_{\sigma,i}$ für $\sigma \in [0, 1]$ ein:

$$\bar{h}_{\sigma,i} = (1 - \sigma)h_i + \sigma h_{i+1}.$$

Eine Gitterfunktion $v^N : \Omega^N \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Gitterpunkt x_i einen Wert v_i zu. Zur Abkürzung der Notation verwenden wir für die punktweise Auswertung einer stetigen Funktion g die Schreibweise

$$\hat{g}_i = g(x_i).$$

Die erste Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion v wird im Gitterpunkt x_i durch einen der folgenden Differenzenquotienten approximiert:

$$\text{die Vorwärtsdifferenz} \quad D^+ v_i^N := [v_{i+1}^N - v_i^N]/h_{i+1}, \quad (2.13a)$$

$$\text{die Rückwärtsdifferenz} \quad D^- v_i^N := [v_i^N - v_{i-1}^N]/h_i \quad (2.13b)$$

$$\text{oder eine zentrale Differenz} \quad D^{0,\zeta} v_i^N := \zeta_i D^+ v_i^N + (1 - \zeta_i) D^- v_i^N$$

mit dem Parametervektor $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=1}^N$, dessen Komponenten ζ_i in $(0, 1)$ liegen. Wir werden im folgenden stets $\zeta_i = h_{i+1}/(h_i + h_{i+1})$ wählen und schreiben dafür kurz

$$D^0 v_i^N := [v_{i+1}^N - v_{i-1}^N]/(h_{i+1} + h_i). \quad (2.13c)$$

Zur Approximation der zweiten Ableitung wird ein Differenzenquotient der Struktur

$$\delta_\sigma^2 v_i^N := [D^+ v_i^N - D^- v_i^N]/\bar{h}_{\sigma,i} \quad (\sigma \in [0, 1]) \quad (2.13d)$$

verwendet.

Ist die Funktion v entsprechend oft differenzierbar, dann ermittelt man mit Hilfe der Taylor-Entwicklung² von v an der Stelle x_i die folgende Gestalt des Approximationsfehler des ersten Differenzenquotienten zur ersten Ableitung von v :

$$D^+ \hat{v}_i - v'(x_i) = \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v''(\xi)(x_{i+1} - \xi) d\xi, \quad (2.14a)$$

$$D^- \hat{v}_i - v'(x_i) = -\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v''(\xi)(\xi - x_{i-1}) d\xi, \quad (2.14b)$$

Für $D^{0,\zeta}$ folgt aus (2.14a) und (2.14b) die Darstellung

$$\begin{aligned} D^{0,\zeta} \hat{v}_i - v'(x_i) &= \frac{\zeta_i}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v''(\xi)(x_{i+1} - \xi) d\xi - \frac{1 - \zeta_i}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v''(\xi)(\xi - x_{i-1}) d\xi \\ &= \frac{\zeta_i h_{i+1} - (1 - \zeta_i) h_i}{2} v''(x_i) + \frac{\zeta_i}{2h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{(3)}(\xi)(x_{i+1} - \xi)^2 d\xi \\ &\quad + \frac{1 - \zeta_i}{2h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v^{(3)}(\xi)(\xi - x_{i-1})^2 d\xi. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5 Man rechnet leicht nach, daß für $\zeta_i = h_i/(h_i + h_{i+1})$ der Differenzenquotient $D^{0,\zeta} \hat{v}$ die erste Ableitung von v auf beliebigem Gitter (formal) von zweiter Ordnung approximiert. Dennoch ist die Wahl dieses zentralen Differenzenquotienten unüblich. Das zentrale Differenzenverfahren für (1.1) mit $c = 0$ generiert nur dann eine M -Matrix, wenn für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ neben der Ungleichung $\varepsilon > Ch_i$ zusätzlich die Bedingung $\varepsilon \geq C(h_{i+1} - h_i)$ erfüllt ist. Numerische Experimente auf Shishkin-Gittern bestätigen die Unbrauchbarkeit des zentralen Differenzenquotienten $D^{0,\zeta} \hat{v}$, falls die zweite Bedingung im Übergangspunkt verletzt ist. \square

²Zu Taylor-Entwicklung und Restglieddarstellungen vgl. z. B. [51, Abschnitt 14.1]

Für unsere Wahl $\zeta_i = h_{i+1}/(h_i + h_{i+1})$ folgt aus obiger Darstellung des Konsistenzfehlers die Gleichung

$$D^0 \hat{v}_i - v'(x_i) = \frac{h_{i+1} - h_i}{2} v''(x_i) + \frac{1}{2(h_{i+1} + h_i)} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{(3)}(\xi)(x_{i+1} - \xi)^2 d\xi + \int_{x_{i-1}}^{x_i} v^{(3)}(\xi)(\xi - x_{i-1})^2 d\xi \right). \quad (2.14c)$$

Der Approximationsfehler des zweiten Differenzenquotienten zur zweiten Ableitung ergibt sich als

$$\begin{aligned} \delta_\sigma^2 \hat{v}_i - v''(x_i) &= \frac{1}{\bar{h}_{\sigma,i}} \left((\bar{h}_{1/2,i} - \bar{h}_{\sigma,i}) v''(x_i) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{(3)}(\xi)(x_{i+1} - \xi)^2 d\xi - \frac{1}{2h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v^{(3)}(\xi)(\xi - x_{i-1})^2 d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\bar{h}_{\sigma,i}} \left((\bar{h}_{1/2,i} - \bar{h}_{\sigma,i}) v''(x_i) - \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6} v^{(3)}(x_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^{(4)}(\xi)(x_{i+1} - \xi)^3 d\xi + \frac{1}{6h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v^{(4)}(\xi)(\xi - x_{i-1})^3 d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.14d)$$

Die Differenz δ_σ^2 liefert für $\sigma \neq 1/2$ nur eine Approximation erster Ordnung. Für das Upwind-Differenzenverfahren werden wir im folgenden Unterabschnitt aber bei der Wahl $\sigma = 1$ eine besonders starke Stabilitätsaussage beweisen können (vgl. Bemerkung 2.10). Dies motiviert die parametrisierte Definition des Differenzenquotienten δ_σ^2 .

Uns stehen nun die wesentlichen Definitionen zur Verfügung. Wir wenden uns im folgenden der detaillierten Beschreibung zweier spezieller Differenzenverfahren für die Zweipunkt-Randwertaufgabe (1.3) zu.

2.3.1 Das Upwind-Differenzenverfahren

Der Name *Upwind*-Differenzenverfahren widerspiegelt den Fakt, daß der Konvektionsterm $-(bu)'$ in (1.3) durch einen entgegen der Strömungsrichtung gerichteten Differenzenquotienten ersetzt wird. Für unsere Modellprobleme verläuft die Stromrichtung von $x = 1$ zu $x = 0$. Folglich wird die erste Ableitung durch eine Vorwärtsdifferenz approximiert. Die Upwind-Finite-Differenzen-Diskretisierung von (1.3) auf einem (zunächst) beliebigen Gitter ist durch

$$L^u u^u := -\varepsilon \delta_1^2 u^u - D^+(\hat{b}u^u) + \hat{c}u^u = \hat{f} \quad \text{auf } \Omega^N, \quad (2.15a)$$

$$u_0^u = u_N^u = 0 \quad (2.15b)$$

definiert. Wir untersuchen die charakteristischen Eigenschaften dieser Diskretisierung auf allgemeinen Gittern, um dann für die in Abschnitt 2.2 vorgestellten grenzschichtangepaßten Gitter konkrete Abschätzungen zu schlußfolgern.

Stabilität

Für den Upwind-Differenzenoperator L^u gelten $\|\cdot\|_l$ - $\|\cdot\|_r$ -Stabilitätsaussagen bezüglich verschiedener Normenpaare $(\|\cdot\|_l, \|\cdot\|_r)$, die im folgenden angegeben werden. Die anschließende Abschätzung des Konsistenzfehlers des Verfahrens bezüglich der aufgetretenen Typen von $\|\cdot\|_r$ veranschaulicht deren Einfluß auf die Fehlerabschätzung. Wir beweisen zunächst das folgende diskrete Vergleichsprinzip

Satz 2.2 Für $\gamma := \min_{i=1,\dots,N-1} \{c_i - D^+ b_i\}$ gelte

$$(i) \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{\beta^2}{4|\gamma|}, \text{ falls } \gamma < 0 \text{ ist,} \quad \text{bzw.}$$

$$(ii) \quad 0 < \varepsilon < \beta, \text{ falls } \gamma = 0 \text{ ist.}$$

Dann genügt der Operator L^u einem diskreten Vergleichsprinzip. Das heißt, für eine Gitterfunktion v und eine nichtnegative Gitterfunktion w folgt aus den Ungleichungen $|L^u v_i| \leq L^u w_i$ für $i = 1, \dots, N-1$, $|v_0| \leq w_0$ und $|v_N| \leq w_N$ die Beziehung $|v_i| \leq w_i$ für $i = 0, \dots, N$.

Beweis. Die zu L^u assoziierte Matrix ist eine L_0 -Matrix³. Nach dem M -Kriterium ist es deshalb hinreichend zum Beweis der Aussage, eine Gitterfunktion $z > 0$ zu finden, für die $L^u z > 0$ gilt. Falls $\gamma > 0$ ist, dann erfüllt $z = \{z_i = 1\}_{i=0}^N$ diese Bedingung. Ist $\gamma = 0$, so wählt man die Gitterfunktion z mit den Komponenten

$$z_i = \exp(-\beta) \prod_{j=i+1}^N (1 + \beta h_j),$$

und findet auf direktem Wege

$$L^u z_i > \beta(\beta - \varepsilon) > 0.$$

Falls γ negativ ist, leistet unter obiger Voraussetzung die positive Gitterfunktion z , definiert durch

$$z_i = \exp\left(-\frac{2|\gamma|}{\beta}\right) \prod_{k=i+1}^N \left(1 + \frac{2|\gamma|}{\beta}\right),$$

das Gewünschte: Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} L^u z_i &= z_{i+1} \left(-\frac{4|\gamma|^2}{\beta^2} \varepsilon + b_{i+1} \frac{2|\gamma|}{\beta} + c_i - D^+ b_i \right) \\ &\geq -\varepsilon \left(\frac{2\gamma}{\beta} \right)^2 + 2|\gamma| - \gamma \geq |\gamma| - \varepsilon_0 \left(\frac{2\gamma}{\beta} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Folglich ist L^u unter den getroffenen Voraussetzungen stets eine M -Matrix. Daraus ergibt sich die Behauptung des Satzes 2.2. ■

Folgerung 2.1 Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 ist das Upwind-Verfahren (2.15) $\|\cdot\|_{\infty,d}$ -stabil.

Beweis: Der Operator L^u genügt einem diskreten Vergleichsprinzip. In Abhängigkeit vom Vorzeichen von γ wählen wir die Schrankenfunktion $w = C_w z \|\hat{f}\|_{\infty,d}$ mit den entsprechenden Gitterfunktionen z aus dem Beweis von Satz 2.2. Dann folgt sofort

$$L^u w_i \geq C_w \|\hat{f}\|_{\infty,d} \geq \|\hat{f}\|_{\infty,d} \geq L^u u_i^u,$$

falls $C_w \geq (\min_{i=1,\dots,N-1} \{L^u z_i\})^{-1}$ ist⁴. Es gilt ferner $w_0 \geq 0 = u_0^u$ und $w_N \geq 0 = u_N^u$.

Daraus folgt $|u_i^u| \leq w_i \leq C_w \|\hat{f}\|_{\infty,d}$ und somit die Behauptung. ■

³Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ heißt L_0 -Matrix, wenn ihre Außerdiagonaleinträge nichtpositiv sind (vgl. [41, Abschnitt 1.3.1]).

⁴Wir weisen darauf hin, daß unter unseren Voraussetzungen C_w unabhängig von ε ist und die Ungleichung $\exp(-2|\gamma|/\beta) \leq z_i \leq 1$ gilt.

Bemerkung 2.6 Den Beweis der $\|\cdot\|_{\infty,d}$ -Stabilität von L^u für $\gamma \geq 0$ findet man vielerorts in der Literatur (vgl. [91]). Der hier geführte Beweis des Satzes 2.2 dient der Veranschaulichung der Argumentation für beliebige Werte γ . Er liefert außerdem ein Beispiel für die Verwendung spezieller, als Padé-Approximationen von Exponentialfunktionen konstruierter Schrankenfunktionen, die uns im folgenden wiederholt begegnen werden. \square

Andreev und Savin beweisen in [5] die $\|\cdot\|_{\infty,d}$ -Stabilität von L^u , wobei

$$\|v^N\|_{1,\sigma,d} := \sum_{i=1}^{N-1} \hat{h}_{\sigma,i} |v_i|$$

die diskrete L_1 -Norm von $v^N \in \mathbb{R}^N$ in Abhängigkeit von der speziellen Wahl von δ_σ^2 bezeichnet. Passend zur Wahl $\sigma = 1$ in der Definition (2.15) des Upwind-Operator L^u gilt folgende Stabilitätsaussage bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,1,d}$ mit $\|v^N\|_{1,1,d} := \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} |v_i|$ auf der rechten Seite:

Satz 2.3 [5] *Falls Konstanten $q > 1$ und $\gamma \geq 0$ existieren, so daß für alle $i = 0, \dots, N$ die Ungleichungen $\hat{b}_i \geq q\beta$ und $\hat{c}_i - D^+ \hat{b}_i \geq \gamma$ erfüllt sind, dann gilt für jede Gitterfunktion v mit $v_0 = v_N = 0$ die Beziehung*

$$\|v\|_{\infty,d} \leq C \|L^u v\|_{1,1,d}. \quad (2.16)$$

Ähnlich der Argumentation bei der Herleitung der stetigen Stabilitätsabschätzung in Satz 1.2 (i) beruht der Beweis von Satz 2.3 auf dem Nachweis der Beschränktheit der (diskreten) Greenschen Funktion. Für zwei Gitterfunktionen v und w , die homogenen Randbedingungen genügen, definieren wir das diskrete, vom Parameter σ abhängige Skalarprodukt

$$(v, w)_1 = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} v_i w_i.$$

Das zu (2.15) konjugierte Problem bezüglich dieses Skalarproduktes ist

$$\begin{aligned} L^{u,*} w_i &:= -\varepsilon \delta_1^2 w_i + \hat{b}_i \frac{h_i}{h_{i+1}} D^- w_i + \hat{c}_i w_i = \hat{f}_i \quad \text{für } x_i \in \Omega^N, \\ w_0 &= w_N = 0. \end{aligned}$$

Für jedes feste $\xi_{i^*} \in \Omega^N$ definieren wir nun die diskrete Greensche Funktion $G^u(\cdot, \xi_{i^*})$ als Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L^u G^u(x_i, \xi_{i^*}) &= \delta_1^N(x_i, \xi_{i^*}) \quad \text{auf } \Omega^N, \\ G^u(0, \xi_{i^*}) &= G^u(1, \xi_{i^*}) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Gitterfunktion δ_σ^N das (parametrisierte) diskrete Analogon der Dirac- δ -Distribution bezeichnet, d. h.

$$\delta_\sigma^N(x_i, \xi_{i^*}) := \begin{cases} \frac{1}{h_{\sigma,i}} & \text{wenn } i = i^*, \\ 0 & \text{wenn } i \neq i^*. \end{cases} \quad (2.17)$$

Die Lösung u^u von (2.15) kann mit Hilfe der diskreten Greenschen Funktion in der Form

$$u_i^u = (G^u(x_i, \cdot), \hat{f})_1$$

dargestellt werden. Weist man die Beschränktheit der Greenschen Funktion nach, dann folgt daraus unmittelbar die Behauptung des Satzes 2.3.

Alternativ zum Vorgehen in [5] wollen wir die Beschränktheit der diskreten Greenschen Funktion $G^u(\cdot, \xi_{i^*})$ für jedes feste $i^* \in \{1, \dots, N\}$ mit Hilfe einer passenden Schrankenfunktion auf der Basis von Satz 2.2 beweisen:

Lemma 2.4 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3 ist die diskrete Greensche Funktion G^u gleichmäßig in ε beschränkt, d. h., es existiert eine positive, von ε unabhängige Konstante C , so daß für jedes $i^* \in \{1, \dots, N\}$ die Beziehung*

$$\max_{i=1, \dots, N} |G^u(x_i, \xi_{i^*})| \leq C$$

gilt.

Beweis. Für beliebiges, aber festes i^* definieren wir die Schrankenfunktion w^{i^*} punktweise durch

$$w_i^{i^*} := C \min \left\{ \prod_{j=i^*+1}^i \left(1 + \frac{\beta h_j}{\varepsilon}\right)^{-1}, 1 \right\}.$$

Es gelten die Beziehungen $w_i^{i^*} \leq C$ für $i > i^*$ und $w_i^{i^*} = C$ für $i \leq i^*$ sowie in den Randpunkten die Abschätzungen

$$G^u(x_0, \xi_{i^*}) = 0 \leq w_0^{i^*} \quad \text{und} \quad G^u(x_N, \xi_{i^*}) = 0 \leq w_N^{i^*}.$$

Für $i < i^*$ folgt daraus unmittelbar die Ungleichung $L^u w_i^{i^*} \geq \gamma w_i^{i^*} \geq 0$. Ist $i > i^*$, so erhalten wir die Ungleichungskette

$$L^u w_i^{i^*} = w_i^{i^*} \frac{\beta}{\varepsilon + \beta h_{i+1}} (\hat{b}_{i+1} - \beta) + w_i(\hat{c}_i - D^+ \hat{b}_i) \geq C(q-1) \frac{\beta}{\max\{\varepsilon, h_{i+1}\}} > 0.$$

Setzen wir die Gleichungen $w_{i^*+1}^{i^*} = C(1 + \beta h_{i^*+1})/\varepsilon$ und $w_{i^*}^{i^*} = w_{i^*-1}^{i^*} = C$ für $i = i^*$ ein, dann ergibt sich die Abschätzung

$$L^u w_{i^*}^{i^*} = C \frac{\beta}{\varepsilon + \beta h_{i^*+1}} (\varepsilon + \hat{b}_{i^*+1}) + C(\hat{c}_{i^*} + D^+ \hat{b}_{i^*}) \geq C \frac{q\beta^2}{h_{i^*+1}}.$$

Für $C \geq (q\beta^2)^{-1}$ (unabhängig von i^*) folgt nun aus Satz 2.2 für alle $i = 0, \dots, N$ und alle $i^* = 1, \dots, N-1$ die Beziehung $G^u(x_i, \xi_{i^*}) \leq w_i^{i^*} \leq C$. \blacksquare

Bemerkung 2.7 Ist die Konsistenzordnung eines Differenzenoperator in einer festen Zahl von Gitterpunkten (unabhängig von N) um eine Ordnung geringer als in den übrigen, dann kann man mit Hilfe der $\|\cdot\|_{\infty, d^-}$ - $\|\cdot\|_{1, \sigma, d}$ -Stabilität *Suprakonvergenz* nachweisen. Das bedeutet, daß das Verfahren trotz geringerer Konsistenzordnung bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\infty, d}$ global konvergent von der höheren Ordnung ist. \square

Bemerkung 2.8 Eine ähnliche Aussage wie die des Satzes 2.3 gilt auch dann, wenn die Randbedingungen der Differenzaufgabe (2.15) inhomogen sind. Betrachten wir auf dem Intervall $[d, e]$ (z.B. einem Teilintervall von $\Omega = [0, 1]$ mit $d, e \in \Omega^N$), versehen mit einem Gitter $\Omega_{[d, e]}^N = \{x_i \in [d, e] : d = x_m < x_{m+1} < \dots < x_{M-1} < x_M = e, i = m, \dots, M\}$ die Differenzgleichung (2.15a) mit den Randbedingungen

$$u_m^u = u(d) = \gamma_d \quad \text{und} \quad u_M^u = u(e) = \gamma_e. \quad (2.18)$$

Wir definieren eine lineare Gitterfunktion \bar{u}^u gemäß der Vorschrift

$$\bar{u}_i^u := -\gamma_d \frac{x_i - e}{e - d} + \gamma_e \frac{x_i - d}{e - d}$$

und die Gitterfunktion $u^{u,*} := u^u - \bar{u}^u$, die Lösung der Differenzenaufgabe

$$L^u u^{u,*} = L^u u^u - L^u \bar{u}^u = \hat{f} + \bar{g}$$

mit

$$\bar{g}_i := \hat{b}_i \frac{\gamma_e - \gamma_d}{e - d} + \frac{D^+ \hat{b}_i}{e - d} \bar{u}_{i+1}^u - \hat{c}_i \bar{u}_i^u \quad (i = 1, \dots, N - 1)$$

und homogenen Randbedingungen ist (vgl. Bemerkung 1.2). Für die Lösung $u^{u,*}$ dieser Differenzenaufgabe existiert unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3 ein $C > 0$, so daß die Abschätzung

$$\|u^{u,*}\|_{\infty,d} \leq C \|\hat{f}\|_{1,1,d} + \|\bar{g}\|_{1,1,d}$$

gilt. Insbesondere folgt daraus für die Lösung u^u des betrachteten Problems mit inhomogenen Randbedingungen mit Hilfe der Dreiecksungleichung

Folgerung 2.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3 genügt die Lösung u^u der Differenzenaufgabe (2.15a) auf dem Gitter $\Omega_{[d,e]}^N$ mit den inhomogenen Randbedingungen (2.18) der Ungleichung*

$$\|u^u\|_{\infty,d} \leq C(\|\hat{f}\|_{1,1,d} + \|\bar{g}\|_{1,1,d}) + |\gamma_d| + |\gamma_e|.$$

□

Gartland beweist in [38] die *streng gleichmäßige Stabilität* des Upwind-Verfahrens, d. h., es gilt die Abschätzung

$$\|u^u\|_{\varepsilon,\infty,d} := \varepsilon \|D^+ u^u\|_{\infty,d} + \|u^u\|_{\infty,d} \leq C \|L^u u^u\|_{1,1,d},$$

wenn das Gitter und die Daten von (2.15) die *Niederdrenk-Yserentant-Bedingungen* (vgl. [77]) erfüllen.

Während Gartlands Stabilitätsaussage in dem Sinne stärker ist als Satz 2.3, daß auf der linken Seite die stärkere Norm $\|\cdot\|_{\varepsilon,\infty,d}$ verwendet wird, weisen Andreev und Kopteva in [4] auf beliebigen Gittern die $\|\cdot\|_{\infty,d}$ - $\|\cdot\|_{*,\sigma,d}$ -Stabilität des Upwind-Verfahrens mit der Norm

$$\|v\|_{*,\sigma,d} := \max_{i=1,\dots,N-1} \left| \sum_{j=1}^i \bar{h}_{\sigma,j} v_j \right| \quad (2.19)$$

auf der rechten Seite nach. Die $\|\cdot\|_{*,\sigma,d}$ -Norm ist schwächer als die diskrete L_1 -Norm. Sie wurde vermutlich zuerst von Spijker [102] zur Untersuchung von Mehrschrittverfahren bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt und später zum Beispiel in [95, 40, 26] zum Nachweis von Suprakonvergenzresultaten für eindimensionale elliptische Randwertprobleme verwendet.

Kopteva und Stynes [55] erweitern das Ergebnis aus [4] zu einer echt stärkeren Stabilitätsaussage als der streng gleichmäßigen Stabilität Gartlands. Wir geben das Stabilitätsresultat aus [55] für das Upwind-Verfahren (2.15), angewandt auf die Randwertaufgabe (1.3) mit $c \neq 0$, an. Da die Aussage in [55] nur für $c = 0$ gezeigt wird und die Beweistechnik essentiell für die Analysis des eindimensionalen Defektkorrekturverfahrens ist, führen wir den Beweis in Anlehnung an [34].

Satz 2.4 [55] *Auf einem beliebigen Gitter Ω^N gelten für eine Gitterfunktion v mit $v_0 = v_N = 0$ die Stabilitätsabschätzungen*

$$\|v\|_{\infty,d} \leq \frac{2}{\beta} e^{\bar{\gamma}/\beta} \|L^u v\|_{*,1,d} \quad (2.20a)$$

und

$$\varepsilon \|D^+ v\|_{\infty,d} \leq \left(1 + (\bar{\beta} + \bar{\gamma} + 1) \frac{e^{\bar{\gamma}/\beta}}{\beta} \right) \|L^u v\|_{*,1,d} \quad (2.20b)$$

wobei die Bezeichnungen $\bar{\gamma} = \max_{x \in [0,1]} c(x) \geq 0$ und $\bar{\beta} = \max_{x \in [0,1]} b(x) \geq 0$ gewählt wurden. Insbesondere gilt also die Beziehung

$$\|v\|_{\varepsilon,\infty,d} \leq C \|L^u v\|_{*,1,d}.$$

Vorbereitend zum Beweis des Satzes 2.4 zitieren wir folgendes diskrete Vergleichsprinzip für Differenzenoperatoren M^N erster Ordnung:

Lemma 2.5 [55] *Seien v und w Gitterfunktionen, die für beliebiges $j \in \{1, \dots, N\}$ den Voraussetzungen*

(i) $|v_0| \leq w_0$ und

(ii) $|(M^N v)_i| \leq (M^N w)_i$ für $i = 1, \dots, j$

genügen. Dann gilt $|v_i| \leq w_i$ für $i = 0, \dots, j$.

Das Lemma 2.5 ist für Differenzenoperatoren M^N , die eine M -Matrix generieren, leicht zu beweisen.

Beweis des Satzes 2.4. Der Beweis nutzt wesentlich die konservative Form

$$L^u v_i = -D^+(A^u v)_i = \hat{f}_i, \quad (2.21)$$

der Differenzengleichung (2.15) aus, wobei der Differenzenoperator A^u punktweise durch die Gleichung

$$A^u v_i := \varepsilon D^- v_i + (\hat{b}v)_i - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (\hat{c}v)_j$$

definiert ist. Multipliziert man in (2.21) beide Seiten mit h_{j+1} und summiert über alle j von 1 bis $i-1$, dann erhält man eine bis auf die Konstante a bestimmte Differenzengleichung erster Ordnung

$$A^u v_i = a + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} \hat{f}_j, \quad v_0 = 0.$$

Ihre Lösung v besitzt eine Darstellung

$$v_i = \frac{W_N}{V_N} V_i - W_i,$$

wobei die Gitterfunktionen V und W den Gleichungen

$$A^u V_i = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad V_0 = 0$$

$$\text{und } A^u W_i = \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (L^u v)_j \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad W_0 = 0$$

genügen. Die zu A^u assoziierte Matrix ist eine L_0 -Matrix. Wie im Beweis von Satz 2.2 zeigen wir mit Hilfe einer geeigneten Gitterfunktion z , daß A^u die Voraussetzungen des M -Kriteriums erfüllt. Wir wählen

$$z_i = \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Die Gitterfunktion z ist streng positiv, es gilt $1 = z_0 < z_1 < \dots < z_N < e^{\bar{\gamma}/\beta}$. Außerdem folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} A^u z_i &= \varepsilon \frac{\bar{\gamma}}{\beta} \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) + \hat{b}_i \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} \hat{c}_j \prod_{k=1}^j \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) \\ &> \beta \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) - \bar{\gamma} \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} \prod_{k=1}^j \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_k\right) = \beta \left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{\beta} h_1\right) > \beta \end{aligned}$$

die Ungleichung $A^u z > 0$. Folglich ist A^u eine M -Matrix und genügt dem diskreten Vergleichsprinzip aus Lemma 2.5. Wendet man dieses auf V und $\beta^{-1}z$ an, so folgt für $i = 1, \dots, N$ unmittelbar die Ungleichung

$$0 < V_i \leq \beta^{-1} e^{\bar{\gamma}/\beta} \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Eine geeignete Schranke für $|W|$ bildet die Gitterfunktion $V \|L^u v\|_{*,1,d}$. Zusammenfassend erhalten wir die Beziehung (2.20a):

$$\|v\|_{\infty,d} \leq \frac{|W_N|}{V_N} \|V\|_{\infty,d} + \|W\|_{\infty,d} \leq \frac{2}{\beta} e^{\bar{\gamma}/\beta} \|L^u v\|_{*,1,d}.$$

Zum Nachweis von (2.20b) verwenden wir die Definitionen von A^u , V und W wie folgt. Es ist

$$A^u v_i = \frac{W_N}{V_N} A^u V_i - A^u W_i = \frac{W_N}{V_N} - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (L^u v)_j$$

und somit

$$\varepsilon D^- v_i = -(\hat{b}v)_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (\hat{c}v)_j + \frac{W_N}{V_N} - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (L^u v)_j.$$

Insbesondere gilt also unter Einbeziehung der Abschätzungen für V und W und der Beziehung (2.20a) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \varepsilon \|D^- v\|_{\infty,d} &= \varepsilon \|D^+ v\|_{\infty,d} \leq (\bar{\beta} + \bar{\gamma}) \|v\|_{\infty,d} + \left(1 + \frac{e^{\bar{\gamma}/\beta}}{\beta}\right) \|L^u v\|_{*,1,d} \\ &\leq \left(1 + (\bar{\beta} + \bar{\gamma} + 1) \frac{e^{\bar{\gamma}/\beta}}{\beta}\right) \|L^u v\|_{*,1,d}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.4 bewiesen. ■

In [3] bettet Andreev die Stabilitätsaussagen von Satz 2.3 (vgl. [5]), Satz 2.4 (vgl. [55]) und aus [38] in einen gemeinsamen Kontext und beweist

Satz 2.5 [3] *Die Lösung der Differenzgleichung (2.15) genügt folgenden Stabilitätsabschätzungen: Es existieren positive Konstanten C, C_1, C_2 so, daß die Ungleichungen*

$$(i) \|u^u\|_{\infty,d} \leq C \|\hat{f}\|_{1,1,d},$$

$$(ii) \|u^u\|_{\infty,d} \leq C \|\hat{f}\|_{*,1,d} \text{ und}$$

$$(iii) C_1 \|\hat{f}\|_{-1,\infty,d} \leq \|u^u\|_{\varepsilon,\infty,d} \leq C_2 \|\hat{f}\|_{-1,\infty,d}$$

gelten, wobei die Norm $\|\cdot\|_{-1,\infty,d}$ für eine Gitterfunktion v durch

$$\|v\|_{-1,\infty,d} := \min_{C \in \mathbb{R}} \max_{i=1,\dots,N-1} \left| \sum_{j=0}^i v_j \hat{h}_{1/2,j} - C \right|$$

definiert ist.

Bemerkung 2.9 1. Wie für sein stetiges Analogon, den Satz 1.2, beruht der Beweis des Satzes 2.5 auf der Beschränktheit der Greenschen Funktion (vgl. Lemma 2.4) und der Beschränktheit der diskreten L_1 -Norm ihres Vorwärts-Differenzenquotienten erster Ordnung.

2. Ebenso wie im stetigen Fall enthält (iii) eine strengere Stabilitätsaussage als die von Gartland in [38] bewiesene. Insbesondere sind keine zusätzlichen Bedingungen an das Gitter gestellt.

3. Wir haben Satz 2.4 unabhängig vom Vorgehen in [3] bewiesen, um in Kapitel 4 auf die hier angegebenen Beweisstrategie zurückgreifen zu können. \square

Konsistenz- und Konvergenzabschätzungen

Wir interessieren uns nun für Abschätzungen der Größe $\tau^u = L^u \hat{u} - \widehat{(Lu)}$ in Normen, die zu den oben aufgeführten Stabilitätsbeziehungen passen und folgern daraus punktweise Abschätzungen für den Diskretisierungsfehler $e^u = u - u^u$. Aus (2.14a) und (2.14d) leiten wir folgende *exakte* Darstellung des Konsistenzfehlers τ^u ab:

$$\begin{aligned} \tau^u &= \frac{\varepsilon(h_{i+1} - h_i)}{2h_{i+1}} u''(x_i) - \\ &\quad \frac{\varepsilon}{h_{i+1}} \left(\frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'''(\xi)(x_{i+1} - \xi)^2 d\xi - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'''(\xi)(\xi - x_{i-1})^2 d\xi \right) \\ &\quad - \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (bu)''(\xi)(x_{i+1} - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bemerkung 2.10 Der erste Summand in (2.22) resultiert aus der Differenzenapproximation δ_σ^2 mit $\sigma = 1$ für die zweite Ableitung von u . Bei der klassischen Approximation mit $\sigma = 1/2$ taucht dieser Term nicht auf. Die Wahl $\sigma = 1$ erfolgt im Hinblick auf die Verträglichkeit mit der Norm $\|\cdot\|_{*,1,d}$, die für die Betrachtungen in Kapitel 4 entscheidend ist. \square

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Beziehung $\varepsilon < N^{-1}$ gilt. Zum Gitter $\bar{\Omega}^N$ existiere ferner eine Konstante $C > 0$ so, daß für alle Indizes i, j mit $1 \leq i \leq j \leq N$ die Bedingung

$$h_i \leq Ch_j \quad (2.23)$$

erfüllt ist.

Bemerkung 2.11 Diese Voraussetzung erlaubt beliebige Gitterverfeinerung nahe der Grenzschicht bei $x = 0$. Für wachsende Indizes darf die Schrittweite beliebig anwachsen, jedoch nicht mehr wesentlich kleiner werden. Shishkin-Typ-Gitter erfüllen diese Voraussetzung. \square

Zu einer beliebigen Konstanten $C_0 > 0$ bezeichne $\iota = \iota(C_0) \in \{0, \dots, N\}$ den kleinsten Index, für den die Ungleichungen

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \leq C_0 \text{ für } i = 1, \dots, \iota \quad \text{und} \quad \frac{h_{\iota+1}}{\varepsilon} > C_0 \quad (2.24)$$

gelten. Aus Voraussetzung (2.23) folgt, daß es ein positives $C = C(C_0)$ so gibt, daß für $i = \iota + 1, \dots, N$ die Beziehung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} > C \quad (2.25)$$

erfüllt ist.

Als spezielle Gitter betrachten wir Shishkin-Typ-Gitter Ω_{ST}^N mit dem Übergangspunkt

$$x_{N/2} = \lambda_S = \min\{1/2, \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \ln N\}$$

und der gittererzeugenden Funktion φ (vgl. Abschnitt 2.2) .

Konvergenzaussagen auf der Grundlage der L_∞ - L_∞ -Stabilität von L^u werden oft unter Verwendung der Shishkin-Zerlegung der stetigen Lösung u aus Satz 1.3 bewiesen (vgl. z. B. [91, Abschnitt I.2.1.3], [72, Abschnitt 2.3.4], [109], [57], [96]). Man konstruiert eine entsprechende Zerlegung der Lösung u^u des Upwind-Verfahrens in Analogie zu Satz 1.3 gemäß

$$L^u S^u = \hat{f}, \quad S_0^u = S(0), S_N^u = S(1), \quad (2.26a)$$

$$L^u E^u = 0, \quad E_0^u = E(0), E_N^u = E(1). \quad (2.26b)$$

Vorbereitend zeigen wir, daß E^u für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ durch die Padé-Approximation B der E majorisierenden Exponentialfunktion $\exp(-q\beta x/\varepsilon)$ nach oben beschränkt ist. Eine Schrankenfunktion dieses Typs wurde erstmals in [50] verwendet. Wir definieren

$$B_i := \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{q\beta h_k}{\varepsilon}\right)^{-1}, \quad B_0 = 1. \quad (2.27)$$

Die Gitterfunktion B hat folgende Eigenschaften:

Lemma 2.6 *Auf dem Gitter Ω^N ist B positiv, beschränkt und monoton fallend. Ferner gelten die Aussagen*

(i) *Falls $\gamma := \min_{i=1, \dots, N} \{\hat{c}_i - D^+ \hat{b}_i\}$ nichtnegativ ist, dann gilt für $i = 1, \dots, N$ die Abschätzung $L^u B_i \geq C(\max\{\varepsilon, h_{i+1}\})^{-1} B_i$.*

(ii) *Es ist $\exp(-\beta x_i/\varepsilon) \leq B_i$ für $i = 1, \dots, N$.*

(iii) *Zu jedem $\beta_0 \in (0, q\beta)$ existiert ein $\iota = \iota(\beta_0)$ so, daß für $i = 1, \dots, \iota$ die Ungleichung $B_i \leq \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon)$ erfüllt ist.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Aussage (i). Aus den Definitionen von L^u und B schließt man die Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} L^u B_i &= B_i \left(-\frac{\varepsilon}{h_{i+1}} \left[\frac{(1 + \frac{q\beta h_{i+1}}{\varepsilon})^{-1} - 1}{h_{i+1}} - \frac{1 - (1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon})}{h_i} \right] - \right. \\ &\quad \left. \hat{b}_{i+1} \frac{(1 + \frac{q\beta h_{i+1}}{\varepsilon})^{-1} - 1}{h_{i+1}} + \hat{c}_i - D^+ \hat{b}_i \right) \\ &\geq B_i \frac{q\beta}{\varepsilon + q\beta h_{i+1}} (\hat{b}_{i+1} - q\beta) \\ &\geq B_i \frac{q(1-q)\beta^2}{\max\{\varepsilon, h_{i+1}\}}. \end{aligned}$$

Um die Beziehung (ii) nachzuweisen, schätzen wir den Ausdruck $\exp(-\beta x_i/\varepsilon)$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \exp(-\beta x_i/\varepsilon) &\leq \exp(-q\beta x_i/\varepsilon) = \exp\left(-\sum_{k=1}^i \frac{q\beta h_k}{\varepsilon}\right) = \prod_{k=1}^i \exp(-q\beta h_k/\varepsilon) \\ &\leq \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{q\beta h_k}{\varepsilon}\right)^{-1} = B_i. \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Aussage (iii) beweisen. Wir überlegen uns zunächst, daß zu jedem $C_1 \in (0, 1)$ ein $t_1 = t_1(C_1) > 0$ so existiert, daß $\ln(1+t_1) \geq C_1 t_1$ gilt und folglich für alle $t \in [0, t_1]$ die Ungleichung

$$(1+t)^{-1} \leq \exp(-C_1 t) \quad (2.28)$$

erfüllt ist. Wir setzen $C_1 := \beta_0/(q\beta)$ und definieren $C_0 := t_1(C_1)/(q\beta) = C_0(\beta_0)$ sowie diesbezüglich gemäß (2.24) den Index $\iota = \iota(C_0) = \iota(\beta_0)$. Für $i = 1, \dots, \iota$ gilt dann $0 \leq t_i := (q\beta h_i)/\varepsilon \leq t_1(C_1)$. Multiplikation der Ungleichung (2.28) für die entsprechenden Werte t_k von $k = 0$ bis $k = i$ liefert die Behauptung (iii). ■

Folgerung 2.3 Auf einem Shishkin-Typ-Gitter Ω_{ST}^N mit $\lambda_0 = k\beta/\beta_0$ und $k \geq 1$, dessen gittererzeugende Funktion φ der Voraussetzung (2.10) mit einer positiven Konstanten $C = C(\beta_0)$ genügt, gelten die Abschätzungen

(i) $B_i \leq \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon)$ für $i = 1, \dots, N/2$,

(ii) $B_{N/2} \leq CN^{-k}$ und

(iii)

$$\frac{h_i}{\varepsilon} B_i \leq \begin{cases} CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| & \text{für } i = 1, \dots, N/2 \\ CN^{-k} & \text{für } i = N/2 + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Beweis. Gilt (2.10) mit einer Konstanten $C = C(\beta_0) \leq t_1/(q\lambda_0)$, dann ist gemäß Lemma 2.2 die Beziehung $\frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \leq Cq\lambda_0 \leq t_1$ für $i = 1, \dots, N/2$ erfüllt. Also gilt die Ungleichung (2.28) für ebendiese Indizes, und wir folgern die Gültigkeit der unter (i) angegebenen Abschätzung aus Lemma 2.6 (iii).

Weiterhin ist für $\lambda_0 = k\beta/\beta_0$ die Gleichung

$$\exp(-\beta_0 x_{N/2}/\varepsilon) = \exp\left(-\frac{\beta_0 \lambda_0}{\beta} \ln N\right) = N^{-k}$$

erfüllt. Somit folgt die Abschätzung (ii) aus (i).

Wir zeigen die Ungleichung (iii) zunächst für $i = N/2 + 1, \dots, N$. Aus der Monotonie von B und Beziehung (ii) folgt die Ungleichungskette

$$\frac{h_i}{\varepsilon} B_i \leq \frac{h_i}{\varepsilon} \left(1 + \frac{q\beta h_{N/2+1}}{\varepsilon}\right)^{-1} B_{N/2} \leq C \exp(-\beta_0 x_{N/2}/\varepsilon) \leq N^{-k}.$$

Für $i = 1, \dots, N/2$ wissen wir aus Lemma 2.2, daß die Abschätzung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_i/(\lambda_0 \varepsilon)) = \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i/(k\varepsilon)) \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|$$

gilt. Für $k \geq 1$ folgt damit aus der Beziehung (i) die Behauptung. \blacksquare

Wir wollen zunächst eine Abschätzung des Konsistenzfehlers bezüglich der diskreten Maximum-Norm $\|\cdot\|_{\infty, d}$ beweisen. Im Vergleich zu den im weiteren behandelten Schranken für den Konsistenzfehler bezüglich schwächerer Normen stellen wir fest, daß wir hier die stärksten Voraussetzungen an das Gitter stellen müssen, um daraus mit Hilfe des Satzes 2.2 die ε -gleichmäßige Konvergenz des Upwind-Verfahrens ableiten zu können.

Satz 2.6 *Die Daten des Shishkin-Typ-Gitters Ω_{ST}^N mögen der Beziehung (2.10), der Ungleichung $\lambda_0 \geq \max\{2, \beta/\beta_0\}$ für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ und $\beta_0 \in (0, q\beta)$ sowie für $i = 1, \dots, N/2 - 1$ der Schrittweitenbedingung*

$$\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \leq CN^{-1}$$

genügen. Dann ist das durch L^u repräsentierte Upwind-Verfahren (2.15) bezüglich der diskreten Maximumnorm $\|\cdot\|_{\infty, d}$ konsistent von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)$

und konvergent von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)$.

Beweis: Wir betrachten den Konsistenzfehler getrennt für den glatten Anteil S der Lösung und sein diskretes Analogon S^u aus (2.26a) sowie für den Grenzschichtanteil E und E^u aus (2.26b). Für letzteren erfolgen auch die Abschätzungen in den Intervallen $[0, \lambda_S]$ und $(\lambda_S, 1]$ separat.

Aus der Darstellung des Konsistenzfehlers in Gleichung (2.22) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |L^u(S^u - \hat{S})_i| &\leq \frac{\varepsilon(h_{i+1} - h_i)}{h_{i+1}} \|S''\|_{\infty, d} + (h_{i+1}^2 + h_i^2)\varepsilon \|S^{(3)}\|_{\infty, d} + h_{i+1} \|S''\|_{\infty, d} \\ &\leq \frac{\varepsilon(h_{i+1} - h_i)}{h_{i+1}} \|S''\|_{\infty, d} + CN^{-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Auf dem äquidistanten groben Teil des Gitters verschwindet der erste Summand. Auf dem feinen Gitter hängt dieser Term von der Gitterfunktion φ ab. Mit unserer Voraussetzung $(h_{i+1} - h_i)/h_{i+1} \leq CN^{-1}$ für $i = 1, \dots, N/2 - 1$ folgt aus (2.29) für alle $i = 1, \dots, N$ die Beziehung

$$|L^u(S^u - \hat{S})_i| \leq CN^{-1}.$$

Unter Verwendung von Satz 2.2 bezüglich der Gitterfunktion $S^u - \hat{S}$ und der Schrankenfunktion w mit $w_i := C(1 + x_i)N^{-1}$ schließen wir daraus, daß für $i = 0, \dots, N$ die Ungleichung

$$|S^u - \hat{S}| \leq CN^{-1} \quad (2.30)$$

erfüllt ist.

Den Fehleranteil $|E_i^u - \hat{E}_i|$ schätzen wir für $i = N/2, \dots, N$ mittels Satz 2.2 direkt ab. Wir verwenden für E^u die Schrankenfunktion $w = CB$ mit einer Konstante $C = \max\{C_1, C_2\}$, wobei die Werte C_1 und C_2 so gewählt sind, daß die Ungleichungen

$$|E_0^u| = |E(0)| \leq C_1 B_0 \quad \text{und} \quad |E_N^u| = |E(1)| \leq C_2 B_N$$

gelten. Aus Lemma 2.6 (i) und Gleichung (2.26b) folgt dann für $i = 0, \dots, N$ die Abschätzung $|E_i^u| \leq CB_i$. Aus den Beziehungen $|E(x)| \leq C \exp(-\beta x/\varepsilon) \leq CN^{-1}$ für $x \geq x_{N/2}$ und $|E_i^u| \leq CB_{N/2} \leq CN^{-1}$ für $i \geq N/2$ schließen wir

$$|E_i^u - \hat{E}_i| \leq |E_i^u| + |\hat{E}_i| \leq CN^{-1} \quad \text{für } i = N/2, \dots, N. \quad (2.31)$$

Nun wollen wir aus Beziehung (2.26), der Ungleichung $E(x) \leq CN^{-\lambda_0} \leq CN^{-2}$ und der Dreiecksungleichung noch eine Abschätzung des Konsistenzfehlers auf dem groben Gitter herleiten. Wir bezeichnen die maximale Schrittweite kurz mit H , erinnern an (2.5b), d. h., es gilt $C_1 N^{-1} \leq H \leq C_2 N^{-1}$, und erhalten somit die Ungleichungskette

$$|L^u(E^u - \hat{E})_i| = |L^u \hat{E}_i| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{H^2} + \frac{1}{H} + 1 \right) N^{-\lambda_0} \leq CN^{-1}.$$

Für $i = 1, \dots, N/2$ schätzen wir den Konsistenzfehler bezüglich des Grenzschichtanteils unter Verwendung der Gleichungen (2.22) und (2.26b) sowie der Variablentransformation $\xi = \lambda_0 \varepsilon \varphi(t) / \beta$ ab und erhalten die Beziehungen

$$\begin{aligned} |L^u(\hat{E} - E^u)_i| &\leq \frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \varepsilon^{-1} \exp(-\beta x/\varepsilon) + C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta \xi/\varepsilon) d\xi \\ &\leq C \frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \varepsilon^{-1} B_i + C \varepsilon^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \exp[-\lambda_0 \varphi(t)] \varphi'(t) dt \\ &\leq C \frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \varepsilon^{-1} B_i + C \varepsilon^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \psi'(t) \exp[(1 - \lambda_0)\phi(t)] dt \\ &\leq C \frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \varepsilon^{-1} B_i + C \varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]} |\psi'(t)| \exp[(1 - \lambda_0)\phi(t_{i-1})]. \end{aligned}$$

Für $\lambda_0 \geq 2$ folgt unter Einbeziehung von Lemma 2.2 und Lemma 2.6 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |L^u(\hat{E} - E^u)_i| &\leq C \frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \varepsilon^{-1} B_i + \\ &\quad C \varepsilon^{-1} N^{-1} \exp(-\beta x_i/\varepsilon) \exp(\beta h_i/\varepsilon) \max_{t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]} |\psi'(t)| \\ &\leq C \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} + N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \right) \varepsilon^{-1} B_i. \quad (2.32) \end{aligned}$$

Wiederum wenden wir den Satz 2.2 mit der Schrankenfunktion $w = CB$ unter Berücksichtigung von Lemma 2.6 und Ungleichung (2.31) an und erhalten die Beziehung

$$|E_i^u - \hat{E}_i| \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|. \quad (2.33)$$

Die Ungleichungen (2.30), (2.31) und (2.33) zusammenfassend folgt

$$\|u^u - \hat{u}\|_{\infty, d} \leq \|S^u - \hat{S}\|_{\infty, d} + \|E^u - \hat{E}\|_{\infty, d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|$$

und somit die Behauptung des Satzes 2.6. ■

Bezüglich der diskreten L_1 -Norm mit dem Parameter $\sigma = 1$ ist das Upwind-Verfahren sogar gleichmäßig in ε konsistent, wenn wir den ersten Summanden aus (2.22) geeignet beschränken können:

Satz 2.7 Die gittererzeugende Funktion φ des Shishkin-Typ-Gitter Ω_{ST}^N habe eine nichtfallende erste Ableitung und genüge der Bedingung (2.10). Für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ und $\beta_0 \in (0, q\beta)$ sei der Gitterparameter $\lambda_0 \geq \max\{2, \beta/\beta_0\}$. Dann ist das Upwind-Verfahren gleichmäßig in ε konsistent bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,1,d}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)$.

Beweis. Wir betrachten den glatten und den Grenzschichtanteil von u wieder getrennt. Zunächst sei bemerkt, daß unter den getroffenen Voraussetzungen an φ für $i = 1, \dots, N$ die Schrittweitenbedingung $h_{i+1} \geq h_i$ gilt. Aus der Darstellung (2.22) schließt man unter Benutzung der Dreiecksungleichung die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|L^u(S^u - \hat{S})\|_{1,1,d} &\leq \sum_{i=1}^{N-1} [\varepsilon(h_{i+1} - h_i) \|S''\|_\infty + \varepsilon(h_{i+1}^2 + h_i^2) \|S^{(3)}\|_\infty + h_{i+1}^2 \|S''\|_\infty] \\ &\leq \varepsilon \|S''\|_\infty (h_N - h_1) + CN^{-1} (\varepsilon \|S^3\|_\infty + \|S''\|_\infty) \leq CN^{-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wie im Beweis von Satz 2.6 gezeigt, gilt für $i > N/2$ die Beziehung $|L^u(E^u - \hat{E})_i| \leq CN^{-1}$. Aus der Voraussetzung, daß φ' nichtfallend ist, folgt gemäß Lemma 2.3 die Beziehung $h_{N/2} \geq C\varepsilon N^{-1}$. Folglich liefert die im Beweis von Satz 2.6 angewendete Argumentation die Abschätzung

$$|L^u(E^u - \hat{E})_{N/2}| = |L^u \hat{E}_{N/2}| \leq CN^{-2} \left(\frac{\varepsilon}{h_{N/2+1}^2} + \frac{\varepsilon}{h_{N/2+1} h_{N/2}} + \frac{1}{h_{N/2+1}} + 1 \right) \leq C.$$

Für $i \leq N/2 - 1$ erinnern wir an Ungleichung (2.32) und erhalten unter Verwendung der Definition (2.4) des Übergangspunktes von Ω_{ST}^N die Beziehungen

$$\begin{aligned} \|L^u(E^u - \hat{E})\|_{1,1,d} &\leq \sum_{i=1}^{N/2-1} h_{i+1} |L^u(E^u - \hat{E})_i| + h_{N/2+1} |L^u(E^u - \hat{E})_{N/2}| + \\ &\quad + \sum_{i=N/2+1}^{N-1} h_{i+1} |L^u(E^u - \hat{E})_i| \\ &\leq C\varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \frac{\lambda_0 \varepsilon}{\beta} \ln N + C_1 N^{-1} + C_2 N^{-1} \\ &\leq CN^{-1} \left(\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Fassen wir die beiden Teilergebnisse (2.34) und (2.35) zur Abschätzung

$$\|L^u(u^u - \hat{u})\|_{1,1,d} \leq \|L^u(S^u - \hat{S})\|_{1,1,d} + \|L^u(E^u - \hat{E})\|_{1,1,d} \leq CN^{-1} \left(\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N + 1 \right)$$

zusammen, so erhalten wir die Behauptung des Satzes 2.7. ■

Folgerung 2.4 Nach Satz 2.3 ist das Upwind-Verfahren unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 bis auf den Faktor $\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N$ gleichmäßig in ε konvergent von erster Ordnung.

Die schwächsten Voraussetzungen an die Glattheit von u und das Gitter stellt folgender Satz aus [34], dessen Beweis auf der $\|\cdot\|_{\infty,d}$ - $\|\cdot\|_{*,1,d}$ -Stabilität des Upwind-Verfahrens basiert:

Satz 2.8 [34] *Auf einem beliebigen Gitter Ω^N gilt für den Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens (2.15) die Beziehung*

$$\|L^u(u^u - \hat{u})\|_{*,1,d} \leq C \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (1 + |u'(s)|) ds.$$

Insbesondere ist auf einem Shishkin-Typ-Gitter mit $\lambda_0 \geq 1$, dessen gittererzeugende Funktion der Voraussetzung (2.10) genügt, die Ungleichung

$$\|u^u - \hat{u}\|_{\infty,d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|$$

erfüllt.

Beweis. Wir integrieren zunächst Gleichung (1.3a) über $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (Lu)(s) ds &= -\varepsilon u'(x_{i+1}) + \varepsilon u'(x_i) - (bu)(x_{i+1}) + (bu)(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (cu)(s) ds \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s) ds, \end{aligned}$$

und leiten daraus die Beziehung

$$-(bu)(x_{i+1}) + (bu)(x_i) = \varepsilon \left(u'(x_{i+1}) - u'(x_i) \right) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (cu - f)(s) ds$$

ab. Mit Hilfe dieser Darstellung nehmen wir die folgenden Umformungen vor:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} L^u(u^u - \hat{u}) &= \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} \hat{f}_j + \varepsilon \frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} - \varepsilon \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h_1} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} [\widehat{bu}_{j+1} - \widehat{bu}_j] + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} \widehat{cu}_j \\ &= \varepsilon \left(\frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} - \widehat{u}'_i \right) - \varepsilon \left(\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h_1} - \widehat{u}'_1 \right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \left(h_{j+1} (\widehat{cu}_j - \hat{f}_j) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (cu - f)(s) ds \right). \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Summanden gilt gemäß (2.14b) die Ungleichung

$$\varepsilon \left| \frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} - u'(x_i) \right| \leq \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(s)| ds \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f - cu + (bu)')(s)| ds.$$

Weiterhin ist

$$|h_{j+1}(cu - f)(x_j) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (cu - f)(s) ds| \leq h_{j+1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(cu - f)'(s)| ds.$$

Da u beschränkt ist, folgt aus diesen beiden Abschätzungen sofort die erste Behauptung:

$$\|L^u(u^u - \hat{u})\|_{*,1,d} \leq C \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (1 + |u'(s)|) ds.$$

Wegen Ungleichung (1.7) gilt ferner die Abschätzung

$$\|L^u(u^u - \hat{u})\|_{*,1,d} \leq C \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta s/\varepsilon)] ds.$$

Für $\lambda_0 \geq 1$ folgt unter Anwendung von Lemma 2.1 und Satz 2.4 sofort die zweite Ungleichung. ■

Numerische Testrechnungen auf verschiedenen Shishkin-Typ-Gittern, die die beschriebenen Konvergenzaussagen illustrieren, findet man zum Beispiel in [67, 94].

2.3.2 Das zentrale Differenzenverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir ein zentrales Differenzenverfahren, das häufig zur Finite-Differenzen-Diskretisierung von regulären elliptischen Zweipunkt-Randwertaufgaben verwendet wird, untersuchen.

Wie im vorangegangenen Abschnitt definieren wir das Schema passend zum Problem (1.3) auf einem zunächst beliebigen Gitter $\Omega^N \subset [0, 1]$ durch

$$L^c u^c := -\varepsilon \delta_{1/2}^2 u^c - D^0(\hat{b}u^c) + \hat{c}u^c = \hat{f} \quad \text{auf } \Omega^N, \quad (2.36a)$$

$$u_0^c = u_N^c = 0 \quad (2.36b)$$

und stellen im folgenden seine Eigenschaften im Vergleich zum Upwind-Differenzenverfahren (2.15) zusammen.

Stabilität

Wir betrachten zunächst die vom zentralen Differenzenverfahren (2.36) generierte tridiagonale Matrix

$$M^c = \begin{pmatrix} s_1 & t_1 & 0 & & & \dots & 0 \\ r_2 & s_2 & t_2 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & r_k & s_k & t_k & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & r_{N-2} & s_{N-2} & t_{N-2} \\ 0 & \dots & & & 0 & r_{N-1} & s_{N-1} \end{pmatrix}$$

mit den Einträgen

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{b_{k-1}}{h_k + h_{k+1}} - \frac{2\varepsilon}{(h_k + h_{k+1})h_k}, \\ s_k &= \frac{2\varepsilon}{h_k + h_{k+1}} \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) + (cu)_k \quad \text{und} \\ t_k &= -\frac{b_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} - \frac{2\varepsilon}{(h_k + h_{k+1})h_{k+1}}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist im allgemeinen keine L_0 -Matrix, denn die Außerdiagonaleinträge r_k sind nur dann negativ, wenn die Ungleichung $\hat{b}_{k-1}h_k \leq 2\varepsilon$ erfüllt ist. Für einen stetigen positiven Konvektionskoeffizienten b muß es also ein $C > 0$ so geben, daß die Beziehung $h_k \leq C\varepsilon$ für alle $k = 1, \dots, N$ gilt. Daraus folgt für sehr kleine Störungsparameter ε , daß das zentrale Differenzenverfahren (2.36) nur dann eine L_0 -Matrix generiert, wenn man hohen Rechen- und Speicheraufwand ($N \geq C\varepsilon^{-1}$) in Kauf nimmt.

Bemerkung 2.12 Auf beliebigen Gittern ist die zentrale Differenz zur Approximation des Konvektionsterms der singular gestörten Modellprobleme (1.1) bzw. (1.3) ungeeignet. Die mit (2.36) gewonnene Näherungslösung u^c weist starke, physikalisch inadäquate Oszillationen auf und approximiert die exakte Lösung u von (1.3) nicht.

Die Verwendung grenzschichtangepaßter Gitter wirkt stabilisierend auf das Verfahren. In [71] wird gezeigt, daß dann innerhalb der Grenzschicht keine Oszillationen mehr vorliegen, während die außerhalb der Grenzschichtregion auftretenden Oszillationen beschränkt sind und mit wachsendem N verschwinden. Das zentrale Differenzenverfahren ist auf einem Shishkin-Typ-Gitter sogar ε -gleichmäßig von der erwarteten zweiten Ordnung konvergent ([54, 56]). \square

Kopteva [52] beweist folgende Aussage über die Greensche Funktion G^c des zentralen Differenzenverfahrens (2.36) auf grenzschichtangepaßten Gittern:

Lemma 2.7 [52] *Die Daten des Problems (1.3) mögen für alle $x \in \bar{\Omega}$ den Bedingungen $c(x) = 0$ und $0 < \beta < b(x) < \bar{\beta}$ genügen. Die Funktion b sei auf Ω Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $R > 0$. Ferner sollen die Schrittweiten des Gitters Ω^N für alle $i, j = 1, \dots, N$ die Voraussetzungen*

$$\left| \prod_{i=1}^N \left(\frac{\varepsilon}{h_i \hat{b}_{i-1}} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\varepsilon}{h_i \hat{b}_i} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{4} \quad (2.37)$$

und $h_i \leq Ch_j$, falls $i \leq j$, erfüllen. Dann gilt für die Greensche Funktion G^c von L^c die Abschätzung

$$|G^c(x_i, \xi_j)| \leq C,$$

wobei G^c als Lösung der Differenzgleichung

$$\begin{aligned} L^c G^c(x_i, \xi_j) &= \delta_{1/2}^N(x_i, \xi_j), \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\ G^c(0, \xi_j) &= G^c(1, \xi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

mit $\delta_{1/2}^N(x_i, \xi_j)$ gemäß (2.17) definiert ist.

In [54] übertragen Kopteva und Linß diese Aussage auf quasilineare Probleme und Shishkin-Typ-Gitter. Die Voraussetzung (2.37) wird dabei durch die Forderung (2.10) an die gittererzeugende Funktion φ ersetzt. Unmittelbar aus Lemma 2.7 ergibt sich

Folgerung 2.5 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.7 gilt für die Lösung u^c von (2.36) die Beziehung*

$$\|u^c\|_{\infty, d} \leq C \|L^c u^c\|_{1, 1/2, d}.$$

Da für beliebige Gitterfunktionen v die Ungleichung $\|v\|_{1, \sigma, d} \leq \text{meas}(\Omega) \|v\|_{\infty, d}$ gilt, kann man aus Lemma 2.7 auch die folgende Aussage ableiten:

Folgerung 2.6 *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 2.7 ist*

$$\|u^c\|_{\infty, d} \leq C \|L^c u^c\|_{\infty, d}.$$

Bemerkung 2.13 Obwohl die assoziierte Systemmatrix keine L_0 -Matrix (und somit keine M -Matrix) ist, erweist sich das zentrale Differenzenverfahren (2.36) auf geeigneten grenzschichtangepaßten Gittern als $\|\cdot\|_{\infty, d}$ -stabil. \square

Bemerkung 2.14 In [52, Theorem 3] wird gezeigt, daß Folgerung 2.5 ihre Gültigkeit behält, wenn die Voraussetzung $c = 0$ durch die Bedingung $|c(x)| \leq \bar{c}$ für alle $x \in [0, 1]$ ersetzt wird. \square

Konsistenz- und Konvergenzabschätzungen auf Shishkin-Typ-Gittern

Wir wollen im folgenden annehmen, daß das verwendete Gitter vom Shishkin-Typ ist und die gittererzeugende Funktion φ der Voraussetzung (2.10) genügt. Außerdem sei $u \in C^4(\Omega)$ und gestatte eine Shishkin-Zerlegung gemäß Satz 1.3 bis zur Ordnung $q = 4$. Unter diesen Voraussetzungen untersuchen wir die Konsistenz des zentralen Differenzenverfahrens bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{\infty,d}$ und $\|\cdot\|_{1,1/2,d}$. Unter Benutzung von (2.14c) und (2.14d) gilt

$$\begin{aligned} \tau_i^c &= L^c(u^c - \hat{u}) = \widehat{\mathcal{L}}u - L^c\hat{u} \\ &= (h_{i+1} - h_i)(bu)''(x_i) + \frac{\varepsilon}{6}(h_{i+1} - h_i)u'''(x_i) + \\ &\quad \frac{1}{2(h_i + h_{i+1})} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (bu)'''(\xi)(x_{i+1} - \xi)^2 d\xi + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu)'''(\xi)(\xi - x_{i-1})^2 d\xi \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{6\bar{h}_{1/2,i}} \left(\frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^{(4)}(\xi)(x_{i+1} - \xi)^3 d\xi + \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(\xi)(\xi - x_{i-1})^3 d\xi \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die punktweise Beschränktheit des Konsistenzfehlers τ^c durch CN^{-2} (ungeachtet der ε -Abhängigkeit) ist folglich an die Schrittweitenbedingung

$$h_{i+1} - h_i \leq CN^{-2} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

geknüpft. Im Übergangspunkt eines Shishkin-Typ-Gitters ist diese Forderung im allgemeinen verletzt.

Bezüglich der schwächeren diskreten L_1 -Norm kann man auf einem grenzschichtangepaßten Gitter ε -gleichmäßige Konsistenz (und damit Konvergenz) von (fast) zweiter Ordnung nachweisen, auch wenn es eine feste Anzahl von Gitterpunkten gibt, in denen die Konsistenzordnung des zentralen Differenzenverfahrens um eine Ordnung reduziert ist.

Satz 2.9 [52, 54] *Die Gitterfunktion φ des Shishkin-Typ-Gitters Ω_{ST}^N habe eine nichtfallende erste Ableitung, die der Bedingung (2.10) genügt. Außerdem sei für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ und $\beta_0 \in (0, q\beta)$ die Ungleichung $\lambda_0 \geq \max\{3, \beta/\beta_0\}$ erfüllt. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 2.7*

(i) *für den Konsistenzfehler des zentralen Differenzenverfahrens die Abschätzung*

$$\|\tau^c\|_{1,1/2,d} \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2$$

(ii) *und für den zugehörigen Verfahrensfehler die Beziehung*

$$\|u - u^c\|_{\infty,d} \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Beweis. Gemäß Folgerung 2.5 schließt man die Gültigkeit der Aussage (ii) unmittelbar aus (i). Wir zeigen (i) in Anlehnung an [54]. Für $u \in C^4(\Omega)$ und $\sigma = 1/2$ gilt nach (2.14c)

und (2.14d) und unter Einbeziehung der Schranke (1.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \hbar_{1/2,i} |\tau_i^c| &= \left| \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2} (bu)''(x_i) + \frac{\varepsilon}{12} (h_{i+1}^2 - h_i^2) u^{(3)}(x_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (bu)^{(3)}(\xi) (x_{i+1} - \xi)^2 d\xi - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu)^{(3)}(\xi) (\xi - x_{i-1})^2 d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{6} \left(\frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^{(4)}(\xi) (x_{i+1} - \xi)^3 d\xi - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(\xi) (\xi - x_{i-1})^3 d\xi \right) \right| \end{aligned} \quad (2.39a)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 (h_{i+1}^2 - h_i^2) [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta x_i / \varepsilon)] + \\ &\quad C_2 (h_{i+1}^3 + h_i^3) [1 + \varepsilon^{-3} \exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (2.39b)$$

Wir wollen die durch die L_1 -Norm induzierte Summe über $\hbar_{1/2,i} |\tau_i^c|$ getrennt für den feinen Teil ($i = 1, \dots, N/2 - 1$) und den groben Teil ($i = N/2, \dots, N - 1$) des Gitters betrachten.

Für $i = 1, \dots, N/2 - 1$ folgt aus (2.39b) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N/2-1} \hbar_{1/2,i} |\tau_i^c| &\leq C_1 \sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^2 - h_i^2) [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta x_i / \varepsilon)] + \\ &\quad C_2 \sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^3 + h_i^3) [1 + \varepsilon^{-3} \exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für den ersten Summanden in (2.40) ergibt sich durch Umordnen der Summe

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^2 - h_i^2) [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta x_i / \varepsilon)] \\ &= \sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^2 - h_i^2) + \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^2 - h_i^2) \exp(-\beta x_i / \varepsilon) \\ &= h_{N/2}^2 - h_1^2 + \varepsilon^{-2} \left(-h_1^2 \exp(-\beta x_1 / \varepsilon) + \sum_{i=1}^{N/2-1} h_i^2 [\exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon) - \exp(-\beta x_i / \varepsilon)] \right. \\ &\quad \left. + h_{N/2}^2 \exp(-\beta x_{N/2-1} / \varepsilon) \right) \\ &\leq CN^{-2} + C\varepsilon^{-2} \left((\varepsilon N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2 + \sum_{i=2}^{N/2-1} \frac{h_i^3}{\varepsilon} \exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon) \right) \\ &\leq CN^{-2} + C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2 \left(1 + \sum_{i=2}^{N/2-1} \frac{h_i}{\lambda_0 \varepsilon} \exp(-\beta x_{i-1} / (\lambda_0 \varepsilon)) \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

wobei der Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzt wurde, um

$$|\exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon) - \exp(-\beta x_i / \varepsilon)| \leq h_i \frac{\beta}{\varepsilon} \exp(-\beta x_{i-1} / \varepsilon)$$

abzuschätzen. Aus den Gittereigenschaften (2.8) und (2.9) folgen die Gleichungen

$$\frac{\beta h_i}{\lambda_0 \varepsilon} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\xi) d\xi = \int_{t_{i-1}}^{t_i} -\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} d\xi \quad \text{und} \quad \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \psi(t) = \exp(-\beta x_i / (\lambda_0 \varepsilon)).$$

Gemäß Lemma 2.2 gilt für $i = 1, \dots, N/2$ weiterhin die Ungleichung $\exp(\beta h_i/\varepsilon) \leq C$. Folglich ist

$$\sum_{i=2}^{N/2-1} \frac{h_i}{\lambda_0 \varepsilon} \exp(-\beta x_{i-1}/(\lambda_0 \varepsilon)) \leq C \int_1^{N/2-1} |\psi'(\xi)| d\xi = C |\psi(t_{N/2-1}) - \psi(t_1)| \leq C,$$

und wir können die Abschätzung (2.41) abschließen:

$$\sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^2 - h_i^2) [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta x_i/\varepsilon)] \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Abschätzungen derselben Art führen für den zweiten Summanden aus (2.40) zu

$$\sum_{i=1}^{N/2-1} (h_{i+1}^3 + h_i^3) [1 + \varepsilon^{-3} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon)] \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Wir erhalten also auf dem feinen Gitter

$$\sum_{i=1}^{N/2-1} \tilde{h}_{1/2,i} |\tau_i^c| \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2. \quad (2.42)$$

Auf dem groben Gitter ($i = N/2, \dots, N$) machen wir von der in Satz 1.3 beschriebenen Shishkin-Zerlegung $u = S + E$ Gebrauch. Es ist

$$\tau_i^c = (\widehat{\mathcal{L}}\hat{S}_i - L^c \hat{S}_i) + (\widehat{\mathcal{L}}\hat{E}_i - L^c \hat{E}_i) =: \tau_{S,i}^c + \tau_{E,i}^c.$$

Betrachten wir zuerst $\tau_{S,i}^c$. Nach Voraussetzung ist $\|S^{(k)}\|_\infty \leq C$ für $k = 0, \dots, 3$. Aus einer (2.39a) entsprechenden Darstellung für $\tau_{S,i}^c$ und $i \geq N/2$ folgt unmittelbar die Ungleichung

$$\tilde{h}_{1/2,i} |\tau_{S,i}^c| \leq (h_{i+1}^2 - h_i^2) (\|S''\|_\infty + \varepsilon \|S^{(3)}\|_\infty) + (h_{i+1}^3 + h_i^3) \|S^{(3)}\|_\infty$$

und somit

$$\sum_{i=N/2}^{N-1} \tilde{h}_{1/2,i} |\tau_{S,i}^c| \leq \tilde{h}_{N/2} |\tau_{S,N/2}^c| + \sum_{i=N/2+1}^{N-1} (h_{i+1}^3 + h_i^3) \|S^{(3)}\|_\infty \leq CN^{-2}. \quad (2.43)$$

Um $\tilde{h}_{1/2,i} |\tau_{E,i}^c|$ für $i = N/2, \dots, N$ abzuschätzen, erinnern wir uns zunächst an die in Satz 1.3 angegebenen Beziehungen für E . Danach gilt für $i > N/2$ nach Dreiecksungleichung und unter Ausnutzung der Monotonie der Exponentialfunktion und der Definition des Übergangspunktes $\lambda_s = x_{N/2}$ in (2.4) die Abschätzung

$$\tilde{h}_{1/2,i} |\tau_{E,i}^c| = H |L^c \hat{E}_i| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{H} + 1 \right) \exp(-\beta x_{N/2}/\varepsilon) \leq CN^{-\lambda_0} \leq CN^{-3},$$

denn nach Voraussetzung sind $\lambda_0 \geq 3$ und $\varepsilon \leq CN^{-1}$. Gemäß Lemma 2.2 ist für alle $i = 1, \dots, N/2$ die Ungleichung $\exp(\beta h_i/\varepsilon) \leq C$ erfüllt. Nach Lemma 2.3 gilt ferner $h_{N/2} \geq C\varepsilon N^{-1}$. Daraus folgt für $i = N/2$ mit denselben Argumenten wie oben die Beziehung

$$\tilde{h}_{1/2,N/2} |\tau_{E,N/2}^c| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{H} - \frac{\varepsilon}{h_{N/2}} + 2 \right) \exp(-\beta x_{N/2}/\varepsilon) \leq CN^{-\lambda_0+1} \leq CN^{-2}.$$

Summation zur L_1 -Norm über dem groben Gitter ergibt schließlich

$$\sum_{i=N/2}^{N-1} \hat{h}_{1/2,i} |\tau_{E,i}^c| \leq \hat{h}_{1/2,N/2} |\tau_{E,N/2}^c| + \sum_{i=N/2+1}^{N-1} CN^{-3} \leq CN^{-2}. \quad (2.44)$$

Fassen wir (2.42), (2.43) und (2.44) zusammen, dann erhalten wir die Aussage (i) des Satzes 2.9. \blacksquare

Bemerkung 2.15 Einen ganz anderen Beweis der ε -gleichmäßigen Konvergenz von fast zweiter Ordnung auf einem Shishkin-Gitter führt Lenferink in [56]. Seine Argumentation basiert auf einer Zerlegung der Systemmatrix des zentralen Differenzenverfahrens in spezielle M -Matrizen. \square

Auf Gittern, deren Schrittweiten h_i nicht für alle Indizes $i = 1, \dots, N$ der Voraussetzung $2\varepsilon \geq \hat{b}_{i-1} h_i$ genügen, insbesondere also auf dem groben Teil von Shishkin-Typ-Gittern, ist das zentrale Differenzenverfahren nicht $\|\cdot\|_{\infty,d}$ - $\|\cdot\|_{*,1/2,d}$ -stabil⁵. Im Hinblick auf die Analysis des eindimensionalen Defektkorrekturverfahrens in Kapitel 4 leiten wir dennoch die $\|\cdot\|_{*,1/2,d}$ -Konsistenz von (fast) zweiter Ordnung des zentralen Differenzenverfahrens her, auch wenn wir daraus keine Konvergenzaussage folgern können.

Bemerkung 2.16 Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.9 folgt die $\|\cdot\|_{*,1/2,d}$ -Konsistenz von (fast) zweiter Ordnung unmittelbar aus der Tatsache, daß für jede Gitterfunktion v mit $v_0 = v_N = 0$ die Normabschätzung

$$\begin{aligned} \|v\|_{*,1/2,d} &:= \max_{i=1,\dots,N-1} \left| \sum_{j=1}^i \hat{h}_{1/2,j} v_j \right| \leq \max_{i=1,\dots,N-1} \sum_{j=1}^i \hat{h}_{1/2,j} |v_j| = \sum_{j=1}^{N-1} \hat{h}_{1/2,j} |v_j| \\ &=: \|v\|_{1,1/2,d} \end{aligned}$$

gilt. \square

In Anlehnung an den Beweis von Satz 2.8 können wir für das zentrale Differenzenverfahren mit modifizierter rechter Seite und verändertem Absolutterm sogar folgende Aussage beweisen, die – ähnlich dem Satz 2.8 für das Upwind-Verfahren – unter schwächeren Voraussetzungen an die Glattheit von u , unabhängig von der Existenz einer Shishkin-Zerlegung und auf beliebigen Gittern gilt:

Satz 2.10 [34] *Wir wählen die Bezeichnung $\tilde{g} = (g_{i-1} + 2g_i + g_{i+1})/4$. Auf einem beliebigen Gitter Ω^N genügt der Konsistenzfehler $\tilde{\tau}^c = \tilde{L}^c u - \tilde{f}$ der Differenzenapproximation*

$$\begin{aligned} \tilde{L}^c u^c &:= -\varepsilon \delta_{1/2}^2 u^c - D^0(\hat{b}u^c) + \tilde{c}u^c = \tilde{f} \quad \text{auf } \Omega^N, \\ u_0^c &= u_N^c = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

zum Randwertproblem (1.3) der Abschätzung

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \leq C \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(2\varepsilon))] d\xi \right)^2.$$

Insbesondere gilt auf einem Shishkin-Typ-Gitter mit dem Parameter $\lambda_0 \geq 2$, dessen gittererzeugende Funktion die Bedingung (2.10) erfüllt, die Beziehung

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

⁵Man vergleiche hierzu [4] oder den Beweis von Satz 2.4: der assoziierte Differenzenoperator erster Ordnung A^c generiert keine L_0 -Matrix.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.8 integrieren wir die Gleichung (1.3a) über dem Intervall $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, wobei $x_{i-1/2} := (x_i + x_{i-1})/2$ den Intervallmittelpunkt bezeichnet, und erhalten die Gleichung

$$-\varepsilon u'(x_{i+1/2}) + \varepsilon u'(x_{i-1/2}) - (bu)(x_{i+1/2}) + (bu)(x_{i-1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (cu - f)(s) ds = 0.$$

Die punktweise Ergänzung dieser Darstellung der Null und Summation über j liefern die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{h}_{1/2,j} \tilde{\tau}_j^c &= -\varepsilon \left(\frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} - u'(x_{i-1/2}) \right) + \varepsilon \left(\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h_1} - u'(x_{1/2}) \right) \\ &\quad - \frac{(\widehat{bu})_i + (\widehat{bu})_{i-1}}{2} + (bu)(x_{i-1/2}) + \frac{(\widehat{bu})_1 + (\widehat{bu})_0}{2} - (bu)(x_{1/2}) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{h}_{1/2,j} (\widetilde{cu} - \tilde{f})_j - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (cu - f)(s) ds \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aus (1.3a) und der Taylorentwicklung von u und u' an der Stelle x_i folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} - u'(x_{i-1/2}) \right| &\leq \frac{3\varepsilon}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u^{(3)}(\xi)| (\xi - x_{i-1}) d\xi \\ &\leq \frac{3}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f - cu + (bu)')'(\xi)| (\xi - x_{i-1}) d\xi. \end{aligned}$$

In derselben Weise erhalten wir die Ungleichung

$$\left| \frac{(\widehat{bu})_i + (\widehat{bu})_{i-1}}{2} - (bu)(x_{i-1/2}) \right| \leq \frac{3}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(bu)''(\xi)| (\xi - x_{i-1}) d\xi.$$

Schließlich liefert die Taylor-Entwicklung von $(cu - f)$ an der Stelle x_{i+1} einerseits die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{1/2,i} (\widetilde{cu} - \tilde{f})_i &= \tilde{h}_{1/2,i} (cu - f)(x_{i+1}) - \frac{1}{8} (h_i^2 + 4h_i h_{i+1} + 3h_{i+1}^2) (cu - f)'(x_{i+1}) \\ &\quad + \tilde{h}_{1/2,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (cu - f)''(s) (s - x_{i-1}) ds \\ &\quad + 2\tilde{h}_{1/2,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (cu - f)''(s) (s - x_i) ds \end{aligned}$$

und andererseits (mit der Notation $CU - F$ für die Stammfunktion von $cu - f$) die Darstellung

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (cu - f)(s) ds &= (CU - F)(x_{i+1/2}) - (CU - F)(x_{i-1/2}) \\ &= \tilde{h}_{i+1} (cu - f)(x_{i+1}) - \frac{1}{8} (h_i^2 + 4h_i h_{i+1} + 3h_{i+1}^2) (cu - f)'(x_{i+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} (cu - f)''(s) (s - x_{i+1/2})^2 ds + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1}} (cu - f)''(s) (s - x_{i-1/2})^2 ds. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \tilde{h}_{1/2,i} (\widetilde{cu} - \tilde{f})_i - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (cu - f)(s) ds \right| \leq C \tilde{h}_{1/2,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (cu - f)''(s) (s - x_{i-1}) ds.$$

Wir setzen die Schranken für die einzelnen Summanden in Gleichung (2.46) unter Berücksichtigung der Ungleichung (1.7) ein und erhalten die Beziehung

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \leq C \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta s/\varepsilon)](s - x_{j-1}) ds. \quad (2.47)$$

Nun benutzen wir die Integralungleichung

$$\int_a^b g(x)(x - a) dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b g(x)^{1/2} dx \right)^2$$

aus [20], die für jede positive monoton fallende Funktion g auf $[a, b]$ gilt. Ferner gilt für alle positiven Zahlen a, b die Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Damit folgt die erste Abschätzung

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \leq C \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta s/(2\varepsilon))] ds \right)^2$$

des Satzes 2.10 aus der Darstellung (2.47). Wir wenden Lemma 2.1 an, um daraus unmittelbar die zweite Aussage

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2$$

abzuleiten. ■

Bemerkung 2.17 Es gibt verschiedene weitere Differenzenverfahren, die auf grenzschichtangepaßten Gittern von (fast) zweiter Ordnung konvergent sind, etwa exponentiell angepaßte Verfahren wie das El–Mistikawy–Werle–Schema (vgl. [91, S. 45 ff]) oder die in [4], [5], [109] bzw. [96] untersuchten Verfahrensklassen. Die Übertragung solcher Verfahren, die die Daten der Differentialgleichung in Zwischenpunkten auswerten, auf das zweidimensionale Problem ist dabei unklar.

Als geeignetes Verfahren für ein- und mehrdimensionale Probleme erweist sich die Stromliniendifusions–Finite–Elemente–Methode (vgl. auch Kapitel 6). Für eindimensionale Probleme wurde sie in [111] im Sinne eines Finite–Differenzen–Verfahrens analysiert und Konvergenz von zweiter Ordnung nachgewiesen. In [92] wird dieses Verfahren auf singular gestörte Zweipunkt–Randwertaufgaben mit unstetiger rechter Seite angewandt und hierfür Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung auf Shishkin–Typ–Gittern gezeigt. □

2.4 Differenzenverfahren für das zweidimensionale Randwertproblem

Wir wenden uns nun dem zweidimensionalen Modellproblem (1.8) zu, daß über dem Grundgebiet $\Omega = (0, 1)^2$ definiert ist. Wie im vorangegangenen Abschnitt 2.3 werden wir nach der Definition grundlegender Begriffe die wesentlichen Eigenschaften eines einfachen Upwind–Differenzenverfahrens und eines zentralen Differenzenverfahrens zusammenstellen. Im zweidimensionalen Fall sind nur wenige Stabilitätsbeziehungen für die Differenzenoperatoren bekannt. Folglich steht uns hier eine schmalere Palette an Werkzeugen zur Analyse der Verfahren zur Verfügung.

Numerische Tests der betrachteten Verfahren, die die beschriebenen Ergebnisse illustrieren, findet man zum Beispiel in [67].

Wir diskretisieren das Gebiet Ω mit Hilfe eines (zunächst beliebigen) Tensorproduktgitters

$$\Omega^N = \Omega_x^N \times \Omega_y^N,$$

wobei die eindimensionalen Gitter Ω_x^N und Ω_y^N durch

$$\begin{aligned}\Omega_x^N &:= \{x_1, \dots, x_{N-1} : 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1\} \quad \text{und} \\ \Omega_y^N &:= \{y_1, \dots, y_{N-1} : 0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < 1\}\end{aligned}$$

definiert sind. Der Rand des Gitters sei Γ^N . Er umfaßt die Teilmengen

$$\begin{aligned}\Gamma_1^N &= \{(x_i, 0) : i = 0, \dots, N\} \cup \{(x_i, 1) : i = 0, \dots, N\} \quad \text{und} \\ \Gamma_2^N &= \{(0, y_j) : j = 1, \dots, N-1\} \cup \{(1, y_j) : j = 1, \dots, N-1\}.\end{aligned}$$

Für $i, j = 1, \dots, N$ bezeichnen wir die Gitterschrittweiten mit $h_{x;i} := x_i - x_{i-1}$ und $h_{y;j} := y_j - y_{j-1}$. Wie im eindimensionalen Fall definieren wir die gemittelten Schrittweiten $\bar{h}_{x;\sigma,i} := (1-\sigma)h_{x;i} + \sigma h_{x;i+1}$ und entsprechend $\bar{h}_{y;\sigma,j} := (1-\sigma)h_{y;j} + \sigma h_{y;j+1}$. Da bei den zweidimensionalen Betrachtungen vor allem die Gewichte $\sigma = 1$, also $\bar{h}_{x;1,i} = h_{x;i+1}$, und $\sigma = 1/2$ eine Rolle spielen, führen wir zur Abkürzung noch die Notationen $\bar{h}_{x;i} := \bar{h}_{x;1/2,i}$ und $\bar{h}_{y;j} := \bar{h}_{y;1/2,j}$ ein.

Eine Gitterfunktion $v^N : \Omega^N \mapsto \mathbb{R}$ ordnet jedem Gitterpunkt $(x_i, y_j) \in \Omega^N$ einen Wert $v_{ij}^N \in \mathbb{R}$ zu. Für die gitterpunktweise Auswertung einer stetigen Funktion g verwenden wir wie bisher die Bezeichnung $\hat{g}_{ij} = g(x_i, y_j)$.

Zur Approximation der ersten partiellen Ableitungen definieren wir folgende Differenzenquotienten:

- die Vorwärtsdifferenzen

$$D_x^+ v_{ij}^N := [v_{i+1,j}^N - v_{ij}^N]/h_{x;i+1} \quad \text{und} \quad D_y^+ v_{ij}^N := [v_{i,j+1}^N - v_{ij}^N]/h_{y;j+1}, \quad (2.48a)$$

- die Rückwärtsdifferenzen

$$D_x^- v_{ij}^N := [v_{ij}^N - v_{i-1,j}^N]/h_{x;i} \quad \text{und} \quad D_y^- v_{ij}^N := [v_{ij}^N - v_{i,j-1}^N]/h_{y;j}, \quad (2.48b)$$

- und die zentralen Differenzen (vgl. Bemerkung 2.5)

$$D_x^0 v_{ij}^N := [v_{i+1,j}^N - v_{i-1,j}^N]/(2\bar{h}_{x;i}) \quad \text{und} \quad D_y^0 v_{ij}^N := [v_{i,j+1}^N - v_{i,j-1}^N]/(2\bar{h}_{y;j}). \quad (2.48c)$$

Um den Laplace-Operator zu approximieren, verwenden wir die Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$\delta_x^2 v_{ij}^N := [D_x^+ v_{ij}^N - D_x^- v_{ij}^N]/\bar{h}_{x;i} \quad \text{und} \quad \delta_y^2 v_{ij}^N := [D_y^+ v_{ij}^N - D_y^- v_{ij}^N]/\bar{h}_{y;j}. \quad (2.48d)$$

Existieren alle partiellen Ableitungen einer Funktion v bis zur entsprechenden Ordnung und sind diese stetig, dann haben in Analogie zu (2.14) die Approximationsfehler der Differenzenquotienten zu den zugehörigen partiellen Ableitungen die Gestalt

$$\begin{aligned}D_x^+ \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_{x;i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, y_j) dt d\xi, \\ D_y^+ \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_{y;j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, t) dt d\xi, \\ D_x^- \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_j) &= -\frac{1}{h_{x;i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, y_j) dt d\xi, \\ D_y^- \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j) &= -\frac{1}{h_{y;j}} \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, t) dt d\xi\end{aligned} \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned}D_x^- \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_j) &= -\frac{1}{h_{x;i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, y_j) dt d\xi, \\ D_y^- \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j) &= -\frac{1}{h_{y;j}} \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_i, t) dt d\xi\end{aligned} \quad (2.49b)$$

und

$$\begin{aligned} D_x^0 \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{1}{4}(h_{x;i+1} - h_{x;i}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y_j) \\ &+ \frac{1}{4\bar{h}_{x,i}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi - \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.49c)$$

sowie analog für $D_y^0 \hat{v}_{ij} - \frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_j)$. In Abhängigkeit von der Glattheit von v und der gewünschten Verfahrensordnung werden wir eine der beiden folgenden Darstellungen für den Approximationsfehler von δ_x^2 (und entsprechend für δ_y^2) verwenden:

$$\begin{aligned} \delta_x^2 \hat{v}_{ij} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y) &= \\ &= \frac{1}{\bar{h}_{x,i}} \left(\frac{1}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi + \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.49d)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\bar{h}_{x,i}} \left(\frac{h_{x,i+1}^2 - h_{x,i}^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{1}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i}^{\tau} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i}^{\tau} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.49e)$$

Bemerkung 2.18 Die in (2.49) gewählte Integralrestglieddarstellung ist äquivalent zu der in (2.14) verwendeten, denn partielle Integration liefert für das Restglied zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} &\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\xi, y_j)(x_{i+1} - \xi) d\xi = \\ &= \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, y_j) dt (x_{i+1} - \xi) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, y_j) dt \right) (-1) d\xi \\ &= 0 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, y_j) dt d\xi. \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung der gleichen Argumentation zeigt man die Äquivalenz der Restglieddarstellungen für Restglieder höherer Ordnung. \square

2.4.1 Das Upwind-Differenzenverfahren

Genügt der Konvektionskoeffizient \mathbf{b} aus (1.8) der Voraussetzung (ii) aus Abschnitt 1.2, dann definieren wir zur Approximation der Lösung u von (1.8) das Upwind-Schema

$$L^u u^u := -\varepsilon \delta_x^2 u^u - \varepsilon \delta_y^2 u^u - \hat{b}_1 D_x^+ u^u - \hat{b}_2 D_y^+ u^u + \hat{c} u^u = \hat{f} \text{ auf } \Omega^N, \quad (2.50a)$$

$$u^u = 0 \text{ auf } \Gamma^N. \quad (2.50b)$$

Stabilität

Das Upwind-Verfahren (2.50) genügt einem diskreten Vergleichsprinzip:

Satz 2.11 *Es seien die Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2 erfüllt. Falls die Gitterfunktionen v und w den Bedingungen $|v_{ij}| \leq w_{ij}$ für alle $(x_i, y_j) \in \Gamma^N$ und $|(L^u v)_{ij}| \leq (L^u w)_{ij}$ für alle $(x_i, y_j) \in \Omega^N$ genügen, dann gilt für alle $(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}^N$ die Ungleichung $|v_{ij}| \leq w_{ij}$.*

Beweis. Die mit L^u assoziierte Systemmatrix ist eine M -Matrix. ■

Analog zu Folgerung 2.1 beweist man für $c \geq 0$

Folgerung 2.7 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.11 ist das Upwind-Differenzenverfahren (2.50) $\|\cdot\|_{\infty,d}$ - $\|\cdot\|_{\infty,d}$ -stabil.*

In Abschnitt 1.2, Gleichung (1.16), wurde das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion des stetigen Problems (1.8) beschrieben. Ein qualitativ ähnliches Verhalten der diskreten Greenschen Funktion G^u , die der Differenzengleichung (2.50) zugeordnet ist, zeigt Belukhina in [11]:

Um G^u zu definieren, führen wir für zwei Gitterfunktionen v und w auf Ω^N das Skalarprodukt

$$(v, w) := \sum_{(x_i, y_j) \in \Omega^N} v_{ij} w_{ij} \bar{h}_{x_i} \bar{h}_{y_j}$$

ein. Die zum Gitterpunkt (ξ_k, η_l) assoziierte Greensche Funktion $G^u(\cdot, \cdot, \xi_k, \eta_l)$ von L^u ist definiert als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} L^u G^u(x_i, y_j, \xi_k, \eta_l) &= \delta_{1/2}^N(x_i, \xi_k) \delta_{1/2}^N(y_j, \eta_l) \quad \text{auf } \Omega^N, \\ G^u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma^N. \end{aligned}$$

Als Funktion des Argumentes (ξ_k, η_l) genügt G^u für jedes $(x_i, y_j) \in \Omega^N$ dem adjungierten Problem

$$\begin{aligned} L^{u,*} G^u(x_i, y_j, \xi_k, \eta_l) &= \delta_{1/2}^N(x_i, \xi_k) \delta_{1/2}^N(y_j, \eta_l) \quad \text{auf } \Omega^N, \\ G^u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma^N, \end{aligned} \quad (2.51)$$

wobei $L^{u,*}$ auf Ω^N gemäß

$$L^{u,*} v_{ij} := -\varepsilon \delta_x^2 v_{ij} - \varepsilon \delta_y^2 v_{ij} + D_x^-(\hat{b}_1 v)_{ij} + D_y^-(\hat{b}_2 v)_{ij} + \hat{c}_{ij} v_{ij}$$

definiert ist. Falls der Koeffizient c des Reaktionsterms verschwindet, werden in [11] auf einem äquidistanten Gitter die asymptotischen Abschätzungen

$$G^u(x, y) \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\ln \frac{\varepsilon}{bh} + C \right) + \mathcal{O} \left(\frac{bh}{\varepsilon} \ln \frac{\varepsilon}{bh} \right) \quad \text{für } |(x, y)| \rightarrow 0, \text{ falls } \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h} \rightarrow \infty \quad (2.52a)$$

$$\text{und } G^u(x, y) \sim \frac{1}{bh} \left\{ 1 + C \frac{\varepsilon}{bh} + \mathcal{O} \left(\frac{\varepsilon^2}{b^2 h^2} \right) \right\} \quad \text{für } |(x, y)| \rightarrow 0, \text{ falls } \frac{\varepsilon}{h} \rightarrow 0 \quad (2.52b)$$

bewiesen. Die Gültigkeit von Stabilitätsresultaten wie Satz 2.3 oder Satz 2.4 ist folglich für das zweidimensionale Upwind-Differenzenverfahren (2.50) nicht zu erwarten.

Andreev zeigte in [2] folgende anisotrope Stabilitätsabschätzung für L^u , die ein diskretes Analogon zu Satz 1.6 darstellt:

Satz 2.12 [2] *Für jede Gitterfunktion v , die homogenen Randbedingungen genügt, und jede Zerlegung $L^u v = \hat{f} = \hat{f}_x + \hat{f}_y + \hat{f}_0$ existieren positive Konstanten C_1, C_2, C_0 , so daß die Ungleichung*

$$\|v\|_{\infty,d} \leq C_1 \|\hat{f}_x\|_{1 \otimes \infty, d} + C_2 \|\hat{f}_y\|_{\infty \otimes 1, d} + C_0 \|\hat{f}_0\|_{\infty, d}$$

erfüllt ist, wobei die darin auftretenden Normen durch

$$\|\hat{f}_x\|_{1\otimes\infty,d} := \sum_{i=1}^{N-1} \hat{h}_{x,i} \max_{j=1,\dots,N-1} |\hat{f}_{x,ij}|, \quad \text{und} \quad \|\hat{f}_y\|_{\infty\otimes 1,d} := \sum_{j=1}^{N-1} \hat{h}_{y,j} \max_{i=1,\dots,N-1} |\hat{f}_{y,ij}|.$$

definiert sind.

Mit Hilfe des Satzes 2.12 werden wir in Kapitel 5 Teilresultate über die Konvergenz eines zweidimensionalen Defektkorrekturalgorithmus beweisen. Für eine beliebige Zerlegung der rechten Seite

$$\hat{f} = \hat{f}_x + \hat{f}_y + \hat{f}_0$$

folgt seine Aussage unmittelbar aus der Lösungsdarstellung

$$w_{ij}^u = \sum_{(\xi_k, \eta_l) \in \Omega^N} \hat{h}_{x;k} \hat{h}_{y;l} G^u(x_i, y_j, \xi_k, \eta_l) (\hat{f}_{x,kl} + \hat{f}_{y,kl} + \hat{f}_0)$$

und dem folgenden

Lemma 2.8 [2] *Die diskrete Greensche Funktion G^u ist nichtnegativ und genügt den Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \max_{(x_i, y_j, \eta_l)} \|G^u(x_i, y_j, \cdot, \eta_l)\|_{1,1/2,d} &\leq \frac{1}{\beta_2} \\ \text{und} \quad \max_{(x_i, y_j, \xi_k)} \|G^u(x_i, y_j, \xi_k, \cdot)\|_{1,1/2,d} &\leq \frac{1}{\beta_1}, \end{aligned}$$

wobei die Bezeichnung der (eindimensionalen) diskreten L_1 -Norm wie in Abschnitt 2.3 gewählt ist.

Beweis. Wir beschränken uns darauf, das Lemma 2.8 für die Differenzgleichung

$$\tilde{L}^u \tilde{u}^u = -\varepsilon \delta_x^2 \tilde{u}_{ij}^u - \varepsilon \delta_y^2 \tilde{u}_{ij}^u - \hat{b}_{1,ij} D_x^+ \tilde{u}_{ij}^u - \hat{b}_{2,ij} D_y^+ \tilde{u}_{ij}^u$$

und die ihr zugeordnete Greensche Funktion \tilde{G}^u zu beweisen. Für die diskrete Greensche Funktion G^u von (2.50), also im Fall $c \geq 0$, gilt dann $0 \leq G^u \leq \tilde{G}^u$. Unmittelbar aus Satz 2.11 folgt, daß G^u und \tilde{G}^u nichtnegativ sind.

Wir beweisen die Beziehung $\max_{(x_i, y_j, \xi_k)} \|\tilde{G}^u(x_i, y_j, \xi_k, \cdot)\|_{1,1/2,d} \leq \frac{1}{\beta_1}$. Der Beweis der ersten

Ungleichung des Lemmas 2.8 erfolgt analog. Wir definieren zu beliebigem, aber festem $(x_i, y_j) \in \Omega^N$ die eindimensionale Gitterfunktion $G^\Sigma(x_i, y_j, \cdot) : \Omega_x^N \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$G^\Sigma(x_i, y_j, \xi_k) := \sum_{\eta_l \in \Omega_y^N} \tilde{G}^u(x_i, y_j, \xi_k, \eta_l) \hat{h}_{y;l} = \|\tilde{G}^u(x_i, y_j, \xi_k, \cdot)\|_{1,1/2,d}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (2.51) mit $\hat{h}_{y;l}$ und summieren über alle $\eta_l \in \Omega_y^N$, dann erhalten wir eine Gleichung für $G^\Sigma(x_i, y_j, \cdot)$ bezüglich des dritten Argumentes:

$$-\varepsilon \delta_x^2 G_k^\Sigma + D_x^-(b_1^m G^\Sigma)_k = \delta_{1/2}^N(x_i, \xi_k) - F(x_i, y_j, \xi_k). \quad (2.53)$$

mit einer Konstanten⁶ $b_1^m \in [\beta_1, \bar{\beta}_1]$ und $\bar{\beta}_1 = \max_{(x,y) \in \Omega} \{b_1(x,y)\}$. Ferner ist die Gitterfunktion $F(x_i, y_j, \cdot) : \Omega_x^N \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x_i, y_j, \xi_k) := \hat{b}_{2;k,N-1} \tilde{G}(x_i, y_j, \xi_k, \eta_{N-1}) + \frac{\varepsilon}{\hat{h}_{y;N}} \tilde{G}(x_i, y_j, \xi_k, \eta_{N-1}) + \frac{\varepsilon}{\hat{h}_{y;1}} \tilde{G}(x_i, y_j, \xi_k, \eta_1).$$

⁶Für zwei eindimensionale Gitterfunktionen f, g auf Ω_x^N , die für alle $i = 1, \dots, N-1$ den Bedingungen $g_i \geq 0$ und $m \leq f_i \leq M$ genügen, existiert stets ein Zwischenwert $f^m \in [m, M]$ mit $(f, g)_{1/2} = f^m \|g\|_{1,1/2,d}$, (vgl. [2, Lemma 1]).

Bezeichnen wir mit $\tilde{G}^{u,1}$ die Greensche Funktion des eindimensionalen Upwind-Verfahrens

$$\begin{aligned} L_1^u v_i &= \delta_x^2 v_i - b_1^m D_x^+ v_i \quad \text{auf } \Omega_x^N, \\ v_0 &= v_N = 0, \end{aligned}$$

dann kann die Lösung von (2.53) in der Form

$$G^\Sigma(x_i, y_j, \xi_k) = \tilde{G}^{u,1}(x_i, \xi_k) - \sum_{z_l \in \Omega_x^N} \tilde{G}^{u,1}(z_l, \xi_k) F(x_i, y_j, z_l) \tilde{h}_{x;l}$$

geschrieben werden. Da $\tilde{G}^{u,1}$ und F nichtnegativ sind, folgt daraus die Ungleichung

$$G^\Sigma(x_i, y_j, \xi_k) \leq \tilde{G}^{u,1}(x_i, \xi_k).$$

Nach Lemma 2.4 ist $\tilde{G}^{u,1}$ gleichmäßig beschränkt, und folglich gilt die Behauptung. \blacksquare

Bemerkung 2.19 Wie Satz 2.3 gestattet auch Satz 2.12 eine feste Anzahl von Ausnahmepunkten mit um eine Ordnung reduzierter Konsistenz, ohne daß die Konsistenzordnung bezüglich der anisotropen Normen $\|\cdot\|_{1 \otimes \infty, d}$ bzw. $\|\cdot\|_{\infty \otimes 1, d}$ verringert wird. Es ist sogar eine feste Anzahl von Ausnahmelinien zugelassen, deren Verlauf bei der Wahl der Zerlegung von \hat{f} in \hat{f}_x , \hat{f}_y und \hat{f}_0 berücksichtigt werden sollte. \square

Bemerkung 2.20 Eine mit Satz 2.12 vergleichbare Aussage gilt auch dann, wenn die Differenzaufgabe (2.50) mit homogenen Randbedingungen auf $\bar{\Omega}^N \subset [0, 1]^2$ durch die Aufgabe

$$L^u v^u = \hat{f} \tag{2.54a}$$

auf einem Gitter

$$\Omega_{[d,e]}^N = \{(x_i, y_j) : d_x = x_0 < x_1 < \dots < x_M = e_x, d_y = y_0 < y_1 < \dots < y_M = e_y\}$$

(z.B. einem Teilgitter von Ω^N) mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} v_{0j}^u &= \gamma_j^W \quad \text{und} \quad v_{Mj}^u = \gamma_j^O \quad \text{für } j = 1, \dots, M, \\ v_{i0}^u &= \gamma_i^S \quad \text{und} \quad v_{iM}^u = \gamma_i^N \quad \text{für } i = 1, \dots, M \end{aligned} \tag{2.54b}$$

ersetzt wird. Dabei sollen die eindimensionalen Gitterfunktionen $\gamma^W, \gamma^O, \gamma^S, \gamma^N$ den Kompatibilitätsbedingungen

$$\gamma_0^W = \gamma_0^S, \quad \gamma_1^W = \gamma_0^N, \quad \gamma_0^O = \gamma_1^S \quad \text{und} \quad \gamma_1^O = \gamma_1^N$$

genügen. Wir definieren in Anlehnung an (1.10) die Gitterfunktion \bar{v}^u für $i, j = 0, \dots, M$ durch

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ij}^u &:= \frac{e_x - x_i}{e_x - d_x} \left(\gamma_j^W - \frac{1}{2} \left[\gamma_0^W \frac{e_y - y_j}{e_y - d_y} + \gamma_N^W \frac{y_j - d_y}{e_y - d_y} \right] \right) \\ &+ \frac{x_i - d_x}{e_x - d_x} \left(\gamma_j^O - \frac{1}{2} \left[\gamma_0^O \frac{e_y - y_j}{e_y - d_y} + \gamma_N^O \frac{y_j - d_y}{e_y - d_y} \right] \right) \\ &+ \frac{e_y - y_j}{e_y - d_y} \left(\gamma_i^S - \frac{1}{2} \left[\gamma_0^S \frac{e_x - x_i}{e_x - d_x} + \gamma_N^S \frac{x_i - d_x}{e_x - d_x} \right] \right) \\ &+ \frac{y_j - d_y}{e_y - d_y} \left(\gamma_i^N - \frac{1}{2} \left[\gamma_0^N \frac{e_x - x_i}{e_x - d_x} + \gamma_N^N \frac{x_i - d_x}{e_x - d_x} \right] \right) \end{aligned}$$

und eine weitere Gitterfunktion $\bar{g} := L^u \bar{v}^u$. Aus Satz 2.12 leiten wir folgende Aussage ab:

Folgerung 2.8 *Es sei v^u die Lösung der Differenzenaufgabe (2.54). Für beliebige Zerlegungen $\hat{f} = \hat{f}_x + \hat{f}_y + \hat{f}_0$ und $\bar{g} = \bar{g}_x + \bar{g}_y + \bar{g}_0$ existieren positive Konstanten C_1, C_2, C_0 , so daß die Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|v^u\|_{\infty,d} \leq & C_1(\|\hat{f}_x\|_{1\otimes\infty,d} + \|\bar{g}_x\|_{1\otimes\infty,d}) + C_2(\|\hat{f}_y\|_{\infty\otimes 1,d} + \|\bar{g}_y\|_{\infty\otimes 1,d}) + \\ & C_0(\|\hat{f}_0\|_{\infty,d} + \|\bar{g}_0\|_{\infty,d}) + \|\gamma^W\|_{\infty,d} + \|\gamma^O\|_{\infty,d} + \|\gamma^S\|_{\infty,d} + \|\gamma^N\|_{\infty,d} \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Beweis: Die Gitterfunktion \bar{v}^u ist so definiert, daß $v^{*,u} := v^u - \bar{v}^u$ eine Differenzenaufgabe vom Typ (2.54a) mit homogenen Randbedingungen löst (vgl. Bemerkungen 1.5 und 2.8):

$$\begin{aligned} L^u v^{*,u} &= L^u v^u - L^u \bar{v}^u = \hat{f} - \bar{g} \quad \text{auf } \Omega_{[d,e]}^N \\ v^{*,u} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_{[d,e]}^N. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 2.12 existieren zu einer beliebigen Zerlegung $\hat{f} - \bar{g} = (\hat{f}_x - \bar{g}_x) + (\hat{f}_y - \bar{g}_y) + (\hat{f}_0 - \bar{g}_0)$ positive Konstanten C_1, C_2, C_0 , so daß die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v^{*,u}\|_{\infty,d} &\leq C_1\|\hat{f}_x - \bar{g}_x\|_{1\otimes\infty,d} + C_2\|\hat{f}_y - \bar{g}_y\|_{\infty\otimes 1,d} + C_0\|\hat{f}_0 - \bar{g}_0\|_{\infty,d} \\ &\leq C_1(\|\hat{f}_x\|_{1\otimes\infty,d} + \|\bar{g}_x\|_{1\otimes\infty,d}) + C_2(\|\hat{f}_y\|_{\infty\otimes 1,d} + \|\bar{g}_y\|_{\infty\otimes 1,d}) + \\ &\quad C_0(\|\hat{f}_0\|_{\infty,d} + \|\bar{g}_0\|_{\infty,d}) \end{aligned}$$

gilt. Unter Anwendung der Dreiecksungleichung folgt daraus unmittelbar die Beziehung

$$\begin{aligned} \|v^u\|_{\infty,d} &\leq \|v^{*,u}\|_{\infty,d} + \|\bar{v}^u\|_{\infty,d} \\ &\leq C_1(\|\hat{f}_x\|_{1\otimes\infty,d} + \|\bar{g}_x\|_{1\otimes\infty,d}) + C_2(\|\hat{f}_y\|_{\infty\otimes 1,d} + \|\bar{g}_y\|_{\infty\otimes 1,d}) + \\ &\quad C_0(\|\hat{f}_0\|_{\infty,d} + \|\bar{g}_0\|_{\infty,d}) + \|\gamma^W\|_{\infty,d} + \|\gamma^O\|_{\infty,d} + \|\gamma^S\|_{\infty,d} + \|\gamma^N\|_{\infty,d} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. ■

Man rechnet leicht nach, daß die Gitterfunktion \bar{g} – anders als im eindimensionalen Fall (vgl. Bemerkung 2.8) – Differenzenquotienten der Gitterfunktionen $\gamma^W, \gamma^O, \gamma^S$ und γ^N enthält. Bei der Anwendung der Folgerung 2.8 muß folglich neben der Beschränktheit der rechten Seite \hat{f} auch die Beschränktheit von \bar{g} , d. h. insbesondere dieser Differenzenquotienten, nachgewiesen werden. □

Konsistenz und Konvergenz

Nach (2.49a) und (2.49d) besitzt der Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens (2.50) für $u \in C^3(\Omega)$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^u &:= L^u \hat{u}_{ij} - (\mathcal{L}u)(x_i, y_j) = \\ &= -\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{x,i}} \left(\frac{1}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi + \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{y,j}} \left(\frac{1}{h_{y,j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi + \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi \right) \\ &= -\frac{\hat{b}_{1,ij}}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, y) dt d\xi - \frac{\hat{b}_{2,ij}}{h_{y,j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt d\xi. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Unmittelbar aus dieser Gleichung folgt

Lemma 2.9 Für eine Funktion $u \in C^3(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} |L^u \hat{u}_{ij} - (\mathcal{L}u)(x_i, y_j)| &\leq (4\varepsilon + b_{1,ij} h_{x;i+1}) \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y_j) \right| \\ &\quad + (4\varepsilon + b_{2,ij} h_{y;j+1}) \max_{\eta \in [y_{j-1}, y_{j+1}]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta) \right| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |L^u \hat{u}_{ij} - (\mathcal{L}u)(x_i, y_j)| &\leq 2\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi, y_j) d\xi + \hat{b}_{1,ij} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y_j) d\xi \\ &\quad + 2\varepsilon \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \eta) d\eta + \hat{b}_{2,ij} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß das verwendete Gitter Ω^N ein Shishkin-Typ-Gitter ist, d. h., es ergibt sich als Tensorprodukt der eindimensionalen Shishkin-Typ-Gitter Ω_x^N und Ω_y^N mit den Übergangspunkten

$$\lambda_{S,x} = \frac{\lambda_{0,1}\varepsilon}{\beta_1} \ln N \quad \text{und} \quad \lambda_{S,y} = \frac{\lambda_{0,2}\varepsilon}{\beta_2} \ln N \quad (2.56)$$

und derselben gittererzeugenden Funktion φ (vgl. Abschnitt 2.2.3).

Wir setzen ferner voraus, daß eine Shishkin-Typ-Zerlegung der exakten Lösung u gemäß Satz 1.7 existiert und definieren eine entsprechende Aufspaltung der diskreten Lösung:

$$u^u = S^u + E_1^u + E_2^u + E_{12}^u, \quad (2.57a)$$

wobei S^u und E_ν^u für $\nu = 1, 2, 12$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} L^u S_{ij}^u &= (\mathcal{L}S)(x_i, y_j) \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N, \\ S_{ij}^u &= S(x_i, y_j) \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N, \end{aligned} \quad (2.57b)$$

$$\begin{aligned} L^u E_{\nu,ij}^u &= (\mathcal{L}E_\nu)(x_i, y_j) \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N \quad \text{und} \\ E_{\nu,ij}^u &= E_\nu(x_i, y_j) \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N \end{aligned} \quad (2.57c)$$

genügen. Für den glatten Anteil S und seine Upwind-Approximation S^u ergibt sich für $i, j = 1, \dots, N-1$ unmittelbar aus Lemma 2.9 und Satz 1.7 die Beziehung

$$|L^u(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq CN^{-1}. \quad (2.58a)$$

Wendet man das in Satz 2.11 formulierte diskrete Vergleichsprinzip auf die Gitterfunktionen $\hat{S} - S^u$ und $w_{ij} = C(1+x_i)(1+y_j)$ an, so erhält man aus (2.58a) die Abschätzung

$$|(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq CN^{-1}. \quad (2.58b)$$

Zu jeder der drei Grenzsichtapproximationen E_1^u, E_2^u und E_{12}^u definieren wir für ein beliebiges, aber festes $q \in (0, 1)$ in Anlehnung an das Vorgehen im eindimensionalen Fall (siehe Gleichung (2.27)) eine passende Schrankenfunktion als Padé-Approximation der E_1, E_2 und E_{12} beschränkenden Exponentialfunktionen:

$$B_{1,ij} := \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{q\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon}\right)^{-1}, \quad B_{2,ij} := \prod_{l=1}^j \left(1 + \frac{q\beta_2 h_{y,l}}{\varepsilon}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad B_{12,ij} := B_{1,ij} B_{2,ij}. \quad (2.59)$$

Die wesentlichen Eigenschaften dieser Schrankenfunktionen sind im nächsten Lemma zusammengestellt.

Lemma 2.10 Für $\nu = 1, 2$ und ein $q \in (0, 1)$ sei $\beta_{0,\nu} \in (0, q\beta_\nu)$ beliebig, aber fest vorgegeben. Die Gitterparameter $\lambda_{0,\nu}$ mögen der Bedingung $\lambda_{0,\nu} \geq k\beta_\nu/\beta_{0,\nu}$ genügen. Dann gelten für die in (2.59) definierten Gitterfunktionen B_1, B_2 und B_{12} und alle $i, j = 1, \dots, N$ die Beziehungen

$$L^u B_{1,ij} \geq \frac{C_1}{\max\{\varepsilon, h_{x,i+1}\}} B_{1,ij}, \quad (2.60a)$$

$$L^u B_{2,ij} \geq \frac{C_2}{\max\{\varepsilon, h_{y,j+1}\}} B_{2,ij} \quad \text{sowie} \quad (2.60b)$$

$$L^u B_{12,ij} \geq \left(\frac{C_1}{\max\{\varepsilon, h_{x,i+1}\}} + \frac{C_2}{\max\{\varepsilon, h_{y,j+1}\}} \right) B_{12,ij} \quad (2.60c)$$

und die Abschätzungen

$$\exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) \leq B_{1,ij}, \quad \exp(-\beta_2 y_j / \varepsilon) \leq B_{2,ij} \quad \text{und} \quad \exp(-(\beta_1 x_i + \beta_2 y_j) / \varepsilon) \leq B_{12,ij}. \quad (2.61)$$

Ferner existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß für $N/2 \leq i, j < N$ und $\nu = 1, 2$ die Ungleichung $B_{\nu,ij} \leq CN^{-k}$ erfüllt ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 2.6. ■

Mit Hilfe des Lemmas 2.10 und den Eigenschaften der Grenzschnittanteile E_ν für $\nu = 1, 2, 12$ beweisen wir nun folgendes

Lemma 2.11 Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_{0,\nu} \geq k\beta_\nu/\beta_{0,\nu}$ für $\nu = 1, 2$. Dann genügen die Grenzschnittfunktionen E_ν und ihre Upwind-Approximationen E_ν^u für $\nu = 1$ und alle $i \geq N/2, j = 0, \dots, N$ bzw. für $\nu = 2$ und alle $j \geq N/2, i = 0, \dots, N$ den Ungleichungen

$$(a) \quad |E_\nu(x_i, y_j)| \leq CN^{-\lambda_{0,\nu}} \quad \text{und}$$

$$(b) \quad |E_{\nu,ij}^u| \leq CN^{-k}.$$

Für die Eckgrenzschnittfunktion E_{12} und ihre Approximation E_{12}^u gelten die Abschätzungen

$$(c) \quad |E_{12}(x_i, y_j)| \leq \begin{cases} CN^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})} & \text{für } i, j \geq N/2, \\ CN^{-\lambda_{0,1}} & \text{für } i \geq N/2, j < N/2, \\ CN^{-\lambda_{0,2}} & \text{für } i < N/2, j \geq N/2 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$(d) \quad |E_{12,ij}^u| \leq \begin{cases} CN^{-2k} & \text{für } i, j \geq N/2, \\ CN^{-k} & \text{für } i \geq N/2, j < N/2, \\ CN^{-k} & \text{für } i < N/2, j \geq N/2. \end{cases}$$

Beweis. Wir zeigen die Aussagen exemplarisch für $\nu = 1$. Die Beweise für $\nu = 2$ und für die Aussagen (c) und (d) erfolgen analog.

(a) Aus Satz 1.7 folgt für $x_i \geq x_{N/2} = \lambda_{S,x}$ die Ungleichung

$$E_1(x_i, y_j) \leq Ce^{-\beta_1 x_i / \varepsilon} \leq Ce^{-\beta_1 \lambda_{S,x} / \varepsilon} = CN^{-\lambda_{0,1}}.$$

(b) Wir verweisen auf Satz 1.7 sowie auf die Ungleichungen (2.57c) und (2.61) und erhalten die Abschätzung

$$L^u E_{1,ij}^u = (\mathcal{L}E_1)(x_i, y_j) \leq Ce^{-\beta_1 x_i / \varepsilon} \leq CB_{1,ij}.$$

Nun wenden wir Satz 2.11 auf E_1^u und die Schrankenfunktion w mit $w_{ij} = CB_{1,ij}$ an. Auf dem Rand Γ^N gilt $E_{1,ij}^u = E_1(x_i, y_j) \leq Ce^{-\beta_1 x_i / \varepsilon} \leq CB_{1,ij} = w_{ij}$. Nach (2.60a) ist

ferner für $i, j = 1, \dots, N-1$ die Beziehung $L^u w_{ij} \geq C(\max\{\varepsilon, h_{x,i+1}\})^{-1} B_{1,ij} \geq L^u E_{1,ij}^u$ erfüllt. Folglich gilt für alle $i, j = 0, \dots, N$ die Ungleichung

$$|E_{1,ij}^u| \leq w_{ij} \leq CB_{1,ij}$$

und insbesondere für $i \geq N/2$ die Aussage (b) von Lemma 2.11. ■

Unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung ergibt sich aus (2.50), Satz 1.7 und Lemma 2.11

Folgerung 2.9 *Für die Konsistenzfehler der Grenzschichtanteile E_ν ($\nu = 1, 2, 12$) gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 2.11*

$$|L^u(\hat{E}_\nu - E_\nu^u)_{ij}| \leq \begin{cases} CN^{-\lambda_{0,\nu}+1} & \text{falls } i, j > N/2, \\ CN^{-\lambda_{0,\nu}+2} & \text{falls } i = N/2, j \geq N/2 \\ & \text{bzw. } i \geq N/2, j = N/2, \end{cases}$$

wobei wir die Abkürzung $\lambda_{0,12} = \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}$ benutzen.

Bemerkung 2.21 Für die Konvergenzanalyse des Verfahrens sind weder Folgerung 2.9 noch die im folgenden hergeleiteten punktweisen Abschätzungen für den Konsistenzfehler bezüglich der Grenzschichtanteile außerhalb ihrer Einflußgebiete notwendig. Wir sind nur zum Zwecke des Vergleichs an einer globalen Konsistenzaussage für das Upwind-Verfahren bezüglich der diskreten Maximumnorm interessiert. □

Lemma 2.12 *Die gittererzeugende Funktion φ des Shishkin-Typ-Gitters Ω^N genüge der Gleichung (2.10), und die Gitterparameter mögen die Ungleichung $\lambda_{0,\nu} \geq 2\beta_\nu/\beta_{0,\nu}$ für $\nu = 1, 2$ erfüllen. Dann gilt für den Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens bezüglich E_ν für $\nu = 1, 2$ die Abschätzung*

$$\|L^u(E_\nu^u - \hat{E}_\nu)\|_{\infty,d} \leq C\varepsilon^{-1}(N^{-\lambda_{0,\nu}} + \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|N^{-1}).$$

Beweis. Wir führen den Beweis exemplarisch für E_1 und unterscheiden die Fälle

- (a) $i > N/2, j > N/2$,
- (b) $i > N/2, j \leq N/2$ und
- (c) $i \leq N/2, j = 0, \dots, N$.

Da nach Voraussetzung die Ungleichung $\varepsilon \leq CN^{-1}$ gilt, ist die Aussage (a) bereits durch Lemma 2.11 erfaßt. Im Fall (b) folgt aus der zweiten Abschätzung in Lemma 2.9 und Satz 1.7 bei Ausführung der Integration die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} |L^u(\hat{E}_1 - E_1^u)_{ij}| &\leq C\varepsilon^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \exp(-\beta_1 \xi/\varepsilon) d\xi + C \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \exp(-\beta_1 x_i/\varepsilon) d\eta \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1 x_{i-1}/\varepsilon) + CN^{-1} \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1 x_{N/2}/\varepsilon) \\ &\leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,1}}. \end{aligned}$$

Innerhalb der zu E_1 gehörenden Grenzschichtregion, also im Fall (c), ähnelt unser Vorgehen der Herleitung von (2.32). Aus Satz 1.7 und Lemma 2.2 folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |L^u(\hat{E}_1 - E_1^u)_{ij}| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \xi / \varepsilon) d\xi + C \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) d\eta \\ &\leq C \varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) \exp(\beta h_{x,i} / \varepsilon) \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| + CN^{-1} \\ &\leq C \varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|_{B_{1,ij}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Der Beweis der Aussage für E_2 erfolgt analog. \blacksquare

Folgerung 2.10 *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 2.12 und falls $\lambda_{0,\nu} \geq \beta_\nu / \beta_{0,\nu}$ für $\nu = 1, 2$ gilt, genügt der Fehler $\hat{E}_\nu - E_\nu^u$ der Abschätzung*

$$\|\hat{E}_\nu - E_\nu^u\|_{\infty, d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $\nu = 1$. Für $i \geq N/2$ folgt die Behauptung unter Anwendung der Dreiecksungleichung unmittelbar aus Lemma 2.11.

Ausgehend von der Ungleichung (2.62) wenden wir auf dem Teil des Gitters mit $i < N/2$ den Satz 2.11 auf $\hat{E}_1 - E_1^u$ und die Schrankenfunktion w mit

$$w_{ij} = C(N^{-1} + N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|_{B_{1,ij}})$$

an. Unter Beachtung von Lemma 2.10 erhalten wir somit für alle $i, j = 0, \dots, N$ die Abschätzung

$$|(\hat{E}_1 - E_1^u)_{ij}| \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|. \quad (2.63)$$

Der Beweis für $\nu = 2$ erfolgt analog. \blacksquare

Schließlich wenden wir uns der Eckgrenzschicht E_{12} zu, für die in Analogie zu Lemma 2.12 folgende Aussage gilt:

Lemma 2.13 *Auf einem Shishkin-Typ-Gitter Ω^N mit Gitterparametern $\lambda_{0,\nu} \geq \beta_\nu / \beta_{0,\nu}$ für $\nu = 1, 2$, dessen gittererzeugende Funktion φ der Gleichung (2.10) genügt, gilt für den Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens bezüglich der Eckgrenzschicht E_{12} die Beziehung*

$$\|L^u(E_{12}^u - \hat{E}_{12})\|_{\infty, d} \leq C \varepsilon^{-1} (N^{-\lambda_{0,1}} + N^{-\lambda_{0,2}} + \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| N^{-1}).$$

Beweis. Für $i, j \geq N/2$ folgt die Aussage unter Verwendung der Dreiecksungleichung unmittelbar aus Lemma 2.11, denn für $\varepsilon \leq CN^{-1}$ ist

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq CN^{-2+2} \leq C \varepsilon^{-1} N^{-1}.$$

In Analogie zur Argumentation im Beweis von Lemma 2.12 folgt für $i \geq N/2$ und $j < N/2$ aus der zweiten Abschätzung von Lemma 2.9 und Satz 1.7 bei Ausführung der Integration

die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
& |L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq \\
& \leq C\varepsilon^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \exp(-\beta_1\xi/\varepsilon) \exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) d\xi + \\
& \quad C\varepsilon^{-2} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \exp(-\beta_2\eta/\varepsilon) d\eta \\
& \leq C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1x_{i-1}/\varepsilon) \exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) + C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \exp(-\beta_2y_{j-1}/\varepsilon) \\
& \leq C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1x_{N/2}/\varepsilon) \\
& \leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,1}}.
\end{aligned}$$

Für $j \geq N/2$ und $i < N/2$ folgt in gleicher Weise

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,2}}.$$

Die eindimensionalen Gitter Ω_x^N und Ω_y^N werden von derselben gittererzeugenden Funktion φ generiert. Für $i, j < N/2$ folgen wir also in jeder Richtung der Argumentation zur Herleitung von Abschätzung (2.32). Mit Hilfe der Variablensubstitutionen $\xi = \frac{\lambda_{0,1}}{\beta_1} \varepsilon \varphi(s)$ und $\eta = \frac{\lambda_{0,2}}{\beta_2} \varepsilon \varphi(t)$ erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}
& |L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq \\
& \leq C\varepsilon^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \exp(-\beta_1\xi/\varepsilon) \exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) d\xi + \\
& \quad C\varepsilon^{-2} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \exp(-\beta_2\eta/\varepsilon) d\eta \\
& \leq C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \psi'(s) \exp((1 - \lambda_{0,1})\varphi(s)) ds + \\
& \quad C\varepsilon^{-1} \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \psi'(t) \exp((1 - \lambda_{0,2})\varphi(t)) dt \\
& \leq C\varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)| \left(\exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \exp(-\beta h_{x,i}/\varepsilon) + \right. \\
& \quad \left. \exp(-\beta_1x_i/\varepsilon) \exp(-\beta_2y_j/\varepsilon) \exp(-\beta_2 h_{y,j}/\varepsilon) \right) \\
& \leq C\varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)| B_{12,ij}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage des Lemmas 2.13 bewiesen. ■

Folgerung 2.11 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.13 gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\hat{E}_{12} - E_{12}^u\|_{\infty,d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Folgerung 2.10. Die dortige Schrankenfunktion wird durch ein w mit $w_{ij} = CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)| B_{12,ij}$ ersetzt. ■

Setzen wir die Abschätzungen (2.58), die Aussagen der Lemmata 2.12 und 2.13 sowie der Folgerungen 2.10 und 2.11 unter Verwendung der Dreiecksungleichung zusammen, dann erhalten wir

Folgerung 2.12 Auf einem Shishkin–Typ–Gitter Ω^N , dessen gittererzeugende Funktion φ der Voraussetzung (2.10) genügt, gelten für $\nu = 1, 2$ die Abschätzungen

$$(i) \quad \|L^u(\hat{u} - u^u)\|_{\infty, d} \leq C\varepsilon^{-1}N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|, \quad \text{falls } \lambda_{0, \nu} \geq 2\beta/\beta_0 \text{ ist und}$$

$$(ii) \quad \|\hat{u} - u^u\|_{\infty, d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|, \quad \text{falls } \lambda_{0, \nu} \geq \beta/\beta_0 \text{ ist.} \quad \blacksquare$$

Wir wollen nun die gewonnenen Abschätzungen benutzen, um auf der Grundlage des Satzes 2.12 eine ε -gleichmäßige Konsistenzaussage für das Upwind–Verfahren (2.50) bezüglich der anisotropen Normen $\|\cdot\|_{\infty \otimes 1}$ bzw. $\|\cdot\|_{1 \otimes \infty}$ herzuleiten und eine entsprechende Konvergenzaussage zu folgern.

Wir behandeln zunächst die Anteile $L^u(\hat{S} - S^u)$ und $L^u(\hat{E}_\nu - E_\nu^u)$ für $\nu = 1, 2, 12$ jeweils separat. Wählt man für den glatten Anteil S die triviale Aufspaltung

$$f^S = L^u(\hat{S} - S^u) =: f_0^S, \quad (2.64)$$

dann ist nach Ungleichung (2.58a) $\|f_0^S\|_{\infty, d} \leq CN^{-1}$.

Bemerkung 2.22 1. Die punktweisen Abschätzungen der Konsistenzfehler bezüglich der Grenzschichtanteile enthalten für $i < N/2$ bzw. $j < N/2$ stets einen Faktor ε^{-1} . Wir werden im folgenden die Aufspaltung von $f^{E_\nu} := L^u(\hat{E}_\nu - E_\nu^u)$ für $\nu = 1, 2, 12$ so wählen, daß die L_1 -Norm in Richtung des zugehörigen feinen Gitters gebildet wird und somit die Multiplikation mit der Schrittweite diesen Faktor kompensiert.

2. Die Wahl der im folgenden definierten Teilgitter $\Omega_x^{N, E_\nu}, \Omega_y^{N, E_\nu}$ und Ω_0^{N, E_ν} für $\nu = 1, 2, 12$ unterliegt einer gewissen Willkür. Wir beschränken uns auf die Darstellung einer der möglichen Kombinationen, auf deren Grundlage ε -gleichmäßige Konsistenz nachgewiesen werden kann. \square

Um $f^{E_1} = L^u(\hat{E}_1 - E_1^u)$ abzuschätzen, zerlegen wir das Gitter Ω^N in drei Teilgitter

$$\Omega_x^{N, E_1} := \{(x_i, y_j) : 0 < i \leq N/2, j = 1, \dots, N-1\}, \quad (2.65a)$$

$$\Omega_y^{N, E_1} := \{(x_i, y_j) : N/2 < i < N, 0 < j \leq N/2\} \quad \text{und} \quad (2.65b)$$

$$\Omega_0^{N, E_1} := \{(x_i, y_j) : N/2 < i, j < N\}, \quad (2.65c)$$

(vgl. Abbildung 2.2). Nun definieren wir die diskrete charakteristische Funktion χ eines Teilgitters M^N

$$\chi_{ij}(M^N) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_i, y_j) \in M^N, \\ 0 & \text{falls } (x_i, y_j) \in \Omega^N \setminus M^N \end{cases}$$

und setzen für $z \in \{x, y, 0\}$

$$f_z^{E_1} := \chi(\Omega_z^{N, E_1}) f^{E_1}. \quad (2.66)$$

Symmetrisch dazu wählen wir zur Aufspaltung von f^{E_2} die Teilgitter

$$\Omega_x^{N, E_2} := \{(x_i, y_j) : 0 < i \leq N/2, N/2 < j < N\}, \quad (2.67a)$$

$$\Omega_y^{N, E_2} := \{(x_i, y_j) : i = 1, \dots, N-1, 0 < j \leq N/2\} \quad \text{und} \quad (2.67b)$$

$$\Omega_0^{N, E_2} := \{(x_i, y_j) : N/2 < i, j < N\} \quad (2.67c)$$

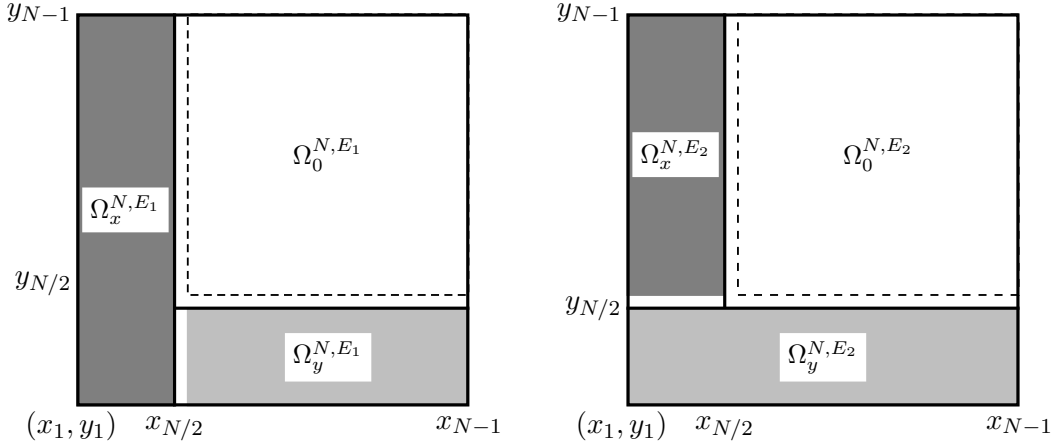


Abbildung 2.2: Teilgitter $\Omega_{\nu,z}^N$ ($\nu = 1, 2$, $z \in \{x, y, 0\}$) zur Abschätzung der anisotropen Normen von $f_z^{E_1}$ (im Bild links) und $f_z^{E_2}$ (im Bild rechts).

und setzen für $z \in \{x, y, 0\}$

$$f_z^{E_2} = \chi(\Omega_z^{N,E_2}) f^{E_2}. \quad (2.68)$$

Für $f^{E_{12}}$ können wir eine Aufteilung analog zu (2.66) oder (2.68) frei wählen. Wir entscheiden uns für $z \in \{x, y, 0\}$ für die Wahl

$$f_z^{E_{12}} = \chi(\Omega_z^{N,E_2}) f^{E_{12}}. \quad (2.69)$$

Wir zerlegen nun $\tau^u = L^u(\hat{u} - u^u) = \tau_x^u + \tau_y^u + \tau_0^u$, wobei die Summanden durch

$$\begin{aligned} \tau_x^u &:= f_x^{E_1} + f_x^{E_2} + f_x^{E_{12}} \\ \tau_y^u &:= f_y^{E_1} + f_y^{E_2} + f_y^{E_{12}} \quad \text{und} \\ \tau_0^u &:= f^S + f_0^{E_1} + f_0^{E_2} + f_0^{E_{12}} \end{aligned}$$

definiert seien, und beweisen

Satz 2.13 *Auf einem Shishkin-Typ-Gitter Ω^N mit den Gitterparametern $\lambda_{0,\nu} \geq 2\beta/\beta_0$ ($\nu = 1, 2$) gilt für die Zerlegung $L^u(\hat{u} - u^u) = \tau_x^u + \tau_y^u + \tau_0^u$ des Konsistenzfehlers des Upwind-Verfahrens mit den oben eingeführten Bezeichnungen die Abschätzung*

$$\|\tau_x^u\|_{1 \otimes \infty, d} + \|\tau_y^u\|_{\infty \otimes 1, d} + \|\tau_0^u\|_{\infty, d} \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N.$$

Beweis. Wir benutzen die Lemmata 2.12 und 2.13 sowie Folgerung 2.9 und schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|\tau_x^u\|_{1 \otimes \infty, d} &= \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{h}_{x,i} \max_{j=1, \dots, N-1} |\tau_{x,ij}^u| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N/2-1} \tilde{h}_{x,i} \max_{j=1, \dots, N-1} (|f_{x,ij}^{E_1}| + |f_{x,ij}^{E_2}| + |f_{x,ij}^{E_{12}}|) \\ &\quad + C\tilde{h}_{x,N/2} (2N^{-\lambda_{0,1}+2} + N^{-\lambda_{0,2}+1}) \\ &\leq C \frac{\lambda_{0,1}\varepsilon}{\beta_1} \ln N \varepsilon^{-1} N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| + CN^{-2} \\ &\leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N \end{aligned}$$

Wir isolieren dabei die Linie $\{(x_{N/2}, y_j), j = 1, \dots, N-1\}$, entlang derer die Konsistenzordnung gemäß Folgerung 2.9 reduziert ist, von der Summe. Weiterhin nutzen wir die Breite $\mathcal{O}(\varepsilon \ln N)$ des feinen Gitters in der Abschätzung zur Kompensation des Faktors ε^{-1} aus.

Auf dieselbe Weise erhält man die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|\tau_y^u\|_{\infty \otimes 1, d} &= \sum_{j=1}^{N-1} \bar{h}_{y,j} \max_{i=1, \dots, N-1} |\tau_{y,ij}^u| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N/2-1} \bar{h}_{y,j} \max_{i=1, \dots, N-1} (|f_{y,ij}^{E_1}| + |f_{y,ij}^{E_2}| + |f_{y,ij}^{E_{12}}|) \\ &\quad + C \bar{h}_{y, N/2} (N^{-\lambda_{0,1}+1} + 2N^{-\lambda_{0,2}+2}) \\ &\leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N. \end{aligned}$$

Für τ_0^u folgt das Ergebnis unmittelbar aus Abschätzung (2.58a) und Folgerung 2.9 für $i, j > N/2$. ■

Folgerung 2.13 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.13 ist das Upwind-Verfahren (2.50) konvergent von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \ln N)$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus den Sätzen 2.12 und 2.13. ■

Auf einem stückweise äquidistanten Shishkin-Gitter läßt sich die Aussage von Satz 2.13 noch ein wenig verschärfen. Mit Hilfe des folgenden Lemmas gelingt es, den zusätzlichen Faktor $\ln N$ zu vermeiden:

Lemma 2.14 *Für die in (2.59) definierten Schrankenfunktionen B_1 und B_2 gelten auf einem Shishkin-Gitter Ω_S^N die Abschätzungen*

$$\sum_{i=1}^{N/2-1} h_{x,i+1} B_{1,ij} \leq C\varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{N/2-1} h_{y,j+1} B_{2,ij} \leq C\varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für B_1 , der Beweis für B_2 erfolgt analog. Zunächst weisen wir darauf hin, daß für alle $i = 1, \dots, N/2$ aus $h_{x,i} = h_x = C\varepsilon N^{-1} \ln N$ die Gleichung

$$B_{1,ij} = \prod_{k=1}^i \left(1 + \frac{q\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon}\right)^{-1} = \left[\left(1 + \frac{q\beta_1 h_x}{\varepsilon}\right)^{-1} \right]^i$$

folgt. Damit ergibt sich als Oberschranke der zu betrachtenden Summe eine geometrische Reihe und folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N/2-1} h_{x,i+1} B_{1,ij} &\leq C\varepsilon N^{-1} \ln N \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{q\beta_1 h_x}{\varepsilon}\right)^{-1} \right]^i \\ &\leq C\varepsilon N^{-1} \ln N \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + q\beta_1 h_x}} \\ &\leq C\varepsilon N^{-1} \ln N \frac{\varepsilon(1 + N^{-1} \ln N)}{\varepsilon N^{-1} \ln N} \\ &\leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

denn für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $N^{-1} \ln N < C$. ■

2.4.2 Das zentrale Differenzenverfahren

Im zweidimensionalen Fall unterscheidet sich das zentrale Differenzenverfahren vom Upwind-Verfahren (2.50) lediglich durch die Approximation des Konvektionsterms $\mathbf{b} \cdot \nabla u$. Wir definieren zum Randwertproblem (1.8) die Differenzenaufgabe

$$L^c u^c := -\varepsilon \delta_x^2 u^c - \varepsilon \delta_y^2 u^c - \hat{b}_1 D_x^0 u^c - \hat{b}_2 D_y^0 u^c + \hat{c} u^c = \hat{f} \text{ auf } \Omega^N, \quad (2.70a)$$

$$u^c = 0 \text{ auf } \Gamma^N \quad (2.70b)$$

und untersuchen im folgenden ihre Eigenschaften.

Stabilität

Wie schon im eindimensionalen Fall generiert das Schema (2.70) nur dann eine L_0 -Matrix, wenn für alle $i, j = 1, \dots, N$ die Schrittweiten des verwendeten Gitters den Bedingungen

$$b_{1,ij} h_{x;i} \leq 2\varepsilon \quad \text{und} \quad b_{2,ij} h_{y;j} \leq 2\varepsilon \quad (2.71)$$

genügen. Die Systemmatrix des zentralen Differenzenverfahrens ist demnach im allgemeinen keine M -Matrix. Somit gilt die übliche hinreichende Bedingung für L_∞ - L_∞ -Stabilität nicht. Andere Stabilitätsaussagen im hier betrachteten engeren Sinne sind für das zentrale Differenzenverfahren (2.70) bisher nicht bekannt.

Bemerkung 2.23 1. Ist die Forderung (2.71) – insbesondere in der Grenzschichtregion – verletzt, so weist die mit dem zentralen Differenzenverfahren (2.70) gewonnene Approximation physikalisch inadäquate Oszillationen auf und ist als Näherung für u unbrauchbar.

2. Wie im eindimensionalen Fall (vgl. Bemerkung 2.12) hat die Verwendung grenzschichtangepaßter Gitter einen stabilisierenden Effekt auf das Verfahren, auch wenn die Schrittweiten außerhalb der Grenzschichtregion nicht von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind. Numerische Experimente weisen allerdings darauf hin, daß das Verfahren sehr empfindlich auf die Wahl des Übergangspunktes des Shishkin-Typ-Gitters reagiert [64].

3. Die durch (2.70) generierten diskreten Systeme sind aufwendig zu lösen. Effektive iterative Lösungsverfahren wie Konjugierte-Gradienten-Verfahren versagen, denn die Systemmatrix besitzt Eigenwerte mit großen Imaginärteilen. Direkte Faktorisierungsmethoden sind für große Werte von N rechenzeit- und speicherintensiv. \square

Konsistenz des zentralen Differenzenverfahrens

Ist $u \in C^4(\Omega)$, so leiten wir aus den Gleichungen (2.49c) und (2.49e) folgende exakte Darstellung des Konsistenzfehlers $\tau^c = L^c(\hat{u} - u^c)$ des zentralen Differenzenverfahrens

ab:

$$\begin{aligned}
\tau^c &= L^c(\hat{u} - u^c) = \\
&= -\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{x,i}} \left(\frac{h_{x,i+1}^2 - h_{x,i}^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{1}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i}^{\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i}^{\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\bar{h}_{y,j}} \left(\frac{h_{y,j+1}^2 - h_{y,j}^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \frac{1}{h_{y,j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{y_j}^{\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \sigma) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{y_j}^{\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \sigma) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \\
&\quad + \frac{b_{1,ij}}{4} (h_{x,i+1} - h_{x,i}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{b_{2,ij}}{4} (h_{y,j+1} - h_{y,j}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \\
&\quad + \frac{b_{1,ij}}{4\bar{h}_{x,i}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi - \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \\
&\quad + \frac{b_{2,ij}}{4\bar{h}_{y,j}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi - \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi \right).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Offensichtlich entfällt ein Teil der Summanden in solchen Gitterpunkten (x_i, y_j) , wo eine der Gleichungen $h_{x,i} = h_{x,i+1}$ bzw. $h_{y,j} = h_{y,j+1}$ gilt. Aus (2.72) folgt unmittelbar

Lemma 2.15 *Der Konsistenzfehler des zentralen Differenzenverfahrens genügt für eine Funktion $u \in C^4(\Omega)$ den Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
|L^c(\hat{u} - u^c)_{ij}| &\leq C \left(\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \hat{b}_{1,ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \right) (h_{x,i+1} - h_{x,i}) + \\
&\quad + C \left(\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \hat{b}_{2,ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \right) (h_{y,j+1} - h_{y,j}) + \\
&\quad + C(\varepsilon \bar{h}_{x,i} + b_{1,ij} \bar{h}_{x,i}^2) \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi, y_j) \right| + \\
&\quad + C(\varepsilon \bar{h}_{y,j} + b_{2,ij} \bar{h}_{y,j}^2) \max_{\xi \in [y_{j-1}, y_{j+1}]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \xi) \right|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|L^c(\hat{u} - u^c)_{ij}| &\leq C \left(\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \hat{b}_{1,ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \right) (h_{x,i+1} - h_{x,i}) + \\
&\quad + C \left(\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \hat{b}_{2,ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \right) (h_{y,j+1} - h_{y,j}) + 2\hat{b}_{2,ij} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, \eta) d\eta \\
&\quad + 2\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi, y_j) d\xi + 2\hat{b}_{1,ij} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y_j) d\xi + 2\varepsilon \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, \eta) d\eta.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie für das Upwind-Verfahren (2.50) zeigt man, daß das zentrale Differenzenverfahren nicht gleichmäßig in ε konsistent bezüglich der diskreten Maximumnorm ist.

Auch bezüglich der anisotropen Normen im Sinne des Satzes 2.12 können wir keine Konsistenz der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-2} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|^2)$ herleiten. Um dies zu verstehen, beschränken wir unsere Betrachtungen auf ein stückweise äquidistantes Shishkin-Gitter Ω_S^N mit den Gitterparametern $\lambda_{0,\nu} \geq 3$ ($\nu = 1, 2$), das uns für alle (x_i, y_j) mit $i \neq N/2$ und $j \neq N/2$ der zusätzlichen Summanden entledigt. Dann haben wir eine feste Anzahl von Ausnahmelinien mit punktweise reduzierter Konsistenzordnung (ungeachtet der ε -Abhängigkeit) in jeder Koordinatenrichtung, die durch die L_1 -Norm bezüglich dieser Richtung kompensiert werden kann. Setzen wir zusätzlich voraus, daß die exakte Lösung u von (1.8) eine Shishkin-Typ-Zerlegung gemäß Satz 1.7 bis zur Ordnung $q = 4$ gestattet, dann können wir folgende Aussage beweisen:

Lemma 2.16 *Für den glatten Anteil S von u existiere ein positive Konstante C so, daß für alle $x \in \Omega$ und $k = 0, \dots, 4$ die Bedingung $|S^{(k)}(x)| \leq C$ erfüllt ist. Die Gitterfunktion S^c sei definiert als Lösung der Differenzenaufgabe*

$$L^c S^c = \widehat{\mathcal{L}}S \text{ auf } \Omega^N, \quad S^c = \widehat{S} \text{ auf } \Gamma^N.$$

Dann gibt es eine Zerlegung $L^c(\widehat{S} - S^c) =: f^S = f_x^S + f_y^S$ so, daß die Ungleichung

$$\|f_x^S\|_{1 \otimes \infty, d} + \|f_y^S\|_{\infty \otimes 1, d} \leq CN^{-2}$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen Lemma 2.16, indem wir eine Zerlegung von $f^S = L^c(\widehat{S} - S^c)$ konstruieren, die die gewünschten Eigenschaften hat. Aus der Voraussetzung an die Funktion S und aus Lemma 2.15 folgt

$$|f_{ij}^S| \leq \begin{cases} C_1(\hbar_{x,i}^2 + \varepsilon \hbar_{x,i}) \left\| \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \right\|_{\infty, d} + C_2(\hbar_{y,j}^2 + \varepsilon \hbar_{y,j}) \left\| \frac{\partial^3 S}{\partial y^3} \right\|_{\infty, d} \leq CN^{-2} & \text{für } i \neq N/2 \text{ und } j \neq N/2 \\ C_1(h_{x,i+1} - h_{x,i}) \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right\|_{\infty, d} + C_2(h_{y,j+1} - h_{y,j}) \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right\|_{\infty, d} + \mathcal{O}(N^{-2}) \leq CN^{-1} & \text{für } i = N/2 \text{ oder } j = N/2. \end{cases}$$

Entlang der Linien $\{(x_{N/2}, y_j) : j = 1, \dots, N-1\}$ und $\{(x_i, y_{N/2}) : i = 1, \dots, N-1\}$ ist die Konsistenzordnung auf $\mathcal{O}(N^{-1})$ reduziert. Diese Linien stehen senkrecht aufeinander. Das linienweise Maximum $\max_{1 \leq j \leq N-1} |f_{ij}^S|$ wird im Punkt $(x_i, y_{N/2})$ angenommen und ist somit nur von erster Ordnung. Wir wählen deshalb im Hinblick auf das Paar anisotroper Normen ($\|\cdot\|_{1 \otimes \infty, d}$, $\|\cdot\|_{\infty \otimes 1, d}$) die Zerlegung $f^S = f_x^S + f_y^S$ in

$$f_x^S := \chi(\Omega_x^N) f^S \quad \text{und} \quad f_y^S := \chi(\Omega_y^N) f^S,$$

wobei die Teilgitter durch

$$\begin{aligned} \Omega_x^N &:= \{(x_i, y_j) : 1 \leq i, j \leq N-1, j \neq N/2\} \quad \text{und} \\ \Omega_y^N &:= \{(x_i, y_j) : 1 \leq i \leq N-1, j = N/2\} \end{aligned}$$

definiert sind. Dann ist

$$\|f_x^S\|_{1 \otimes \infty, d} = \sum_{i=1}^{N+1} \hbar_{x,i} \max_{\substack{j=1, \dots, N-1 \\ j \neq N/2}} |f_{x,ij}^S| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq N/2}}^{N+1} \hbar_{x,i} CN^{-2} + \hbar_{x,N/2} CN^{-1} \leq CN^{-2}$$

und

$$\|f^S\|_{\infty \otimes 1, d} = \sum_{j=1}^{N+1} \hat{h}_{y,j} \max_{i=1, \dots, N-1} |f_{y,ij}^S| \leq C \hat{h}_{y,N/2} N^{-1} \leq CN^{-2}.$$

Die gefundene Zerlegung von f^S leistet also das Gewünschte. \blacksquare

Bemerkung 2.24 Aus Lemma 2.16 und Satz 2.12 folgt, daß im Falle einer (gleichmäßig in ε) hinreichend glatten Lösung des Ausgangsproblems das zentrale Differenzenverfahren auf stückweise uniformen Gittern mit einer festen Anzahl von Übergangslinien konvergent von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-2})$ ist. \square

Für $\nu = 1, 2, 12$ sind die Funktionen E_ν durch Satz 1.7 und ihre Approximationen E_ν^c als Lösungen der entsprechenden Gleichungen

$$L^c E_\nu^c = \widehat{\mathcal{L}} E_\nu \text{ auf } \Omega^N, \quad E_\nu^c = \hat{E}_\nu \text{ auf } \Gamma^N$$

definiert. Für die zugehörigen Konsistenzfehler $L^c(\hat{E}_\nu - E_\nu^c)$ können wir keine zu Lemma 2.16 vergleichbare Aussage herleiten. Aus der zweiten Darstellung in Lemma 2.15 und Satz 1.7 leiten wir zwei wesentliche Probleme ab:

- (a) Auf dem groben Gitter können wir nicht wie für das Upwind-Verfahren (vgl. Folgerung 2.9) ε -unabhängige Konsistenz zweiter Ordnung nachweisen, sondern erhalten nur aus (2.72), Satz 1.7 und Lemma 2.10 die Schranke

$$|L^c(\hat{E}_\nu - E_\nu^c)_{ij}| \leq C\varepsilon^{-1} B_{\nu,ij} \quad \text{für } \nu = 1, 2, 12 \text{ und } N/2 < i, j \leq N.$$

Die Schrittweite des groben Gitters kann jedoch – anders als die Schrittweite des feinen Gitters – keine ε -Potenz kompensieren. Eine explizite Abschätzung von E_ν^c auf dem groben Gitter steht uns nicht zur Verfügung.

- (b) Entlang der Übergangslinien des Shishkin-Gitters ist $L^c(\hat{E}_\nu - E_\nu^c)$ nur von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}N^{-1})$.

Bemerkung 2.25 Linß und Stynes konstruieren in [65] ein hybrides Differenzenverfahren auf einem Shishkin-Gitter. Zunächst führen sie die Bezeichnungen

$$D_x v_{ij} := \begin{cases} D_x^+ v_{ij} & \text{falls } N/2 \leq i < N \\ D_x^0 v_{ij} & \text{falls } 0 < i < N/2 \end{cases} \quad \text{und} \quad D_y v_{ij} := \begin{cases} D_y^+ v_{ij} & \text{falls } N/2 \leq j < N \\ D_y^0 v_{ij} & \text{falls } 0 < j < N/2 \end{cases}$$

ein und definieren dann das Schema

$$L^h u_{ij}^h := -\varepsilon \delta_x^2 u_{ij}^h - \varepsilon \delta_y^2 u_{ij}^h - \hat{b}_{1,ij} D_x u_{ij}^h - \hat{b}_{2,ij} D_y u_{ij}^h + \hat{c}_{ij} u_{ij}^h = \hat{f}_{ij} \text{ auf } \Omega^N \quad (2.73a)$$

$$u_{ij}^h = 0 \text{ auf } \Gamma^N. \quad (2.73b)$$

Die Autoren zeigen, daß dieses Verfahren einem diskreten Vergleichsprinzip (analog zu Satz 2.11) genügt und von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1})$, gleichmäßig in ε , konvergiert. \square

Kapitel 3

Defektkorrektur: die Grundideen

Um die grundlegende Idee der Defektkorrektur zu erläutern, gehen wir von einer allgemeinen Gleichung für eine Unbekannte z in der Form

$$F(z) = y \tag{3.1}$$

aus. Dabei sei $F : D \subset E \rightarrow D' \subset E'$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen E und E' . Wir können oder wollen die Lösung z von (3.1) zu vorgegebenem $y \in D'$ nicht direkt berechnen. Wir approximieren die Gleichung (3.1) durch ein geeignetes „Nachbarproblem“

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = \tilde{y} \tag{3.2}$$

mit einer Abbildung $\tilde{F} : D \rightarrow D'$. Die Lösung \tilde{z} von (3.2) können wir für beliebige rechte Seiten $\tilde{y} \in D'$ mit relativ geringem Aufwand ermitteln. In dieser Ausgangssituation kann die (iterative) Anwendung des im folgenden beschriebenen Defektkorrekturprozesses zur Approximation von z geeignet sein:

- Gegeben sei eine Startnäherung z_0 für die Lösung z von (3.1).
- Man berechne den Defekt $d_0 := F(z_0) - y$ als Maß für die Qualität der Approximation z_0 .
- Man löse das einfachere Problem (3.2) mit der rechten Seite d_0 , um einen Korrekturterm zu ermitteln,
- und addiere diesen Korrekturterm zur Ausgangsapproximation, um eine (hoffentlich bessere) Näherung z_1 für z zu erhalten.

Bemerkung 3.1 Prototypen von Defektkorrekturverfahren sind die klassischen Methoden zur Ermittlung von Nullstellen nichtlinearer Funktionen einer Variabler, wie z. B. das Newton–Verfahren und das vereinfachte Newton–Verfahren.

Die Nachiteration, die auf eine mit unbekanntem Rundungsfehler behaftete numerische Lösung eines linearen Gleichungssystems angewendet wird, beruht ebenfalls auf diesem Prinzip¹. □

In diesem Kapitel soll zunächst ein Überblick über die Anwendung von Defektkorrektur in Kombination mit der Diskretisierung von Differentialgleichungen gegeben werden. Wir orientieren uns dabei an den Übersichtsartikeln [14, 48, 100, 106]. In Abschnitt 3.2 stellen wir die wesentlichen Methoden zur Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren vor. Schließlich wird in Abschnitt 3.3 auf bekannte Arbeiten zur Anwendung des Defektkorrekturprinzips bei der Diskretisierung von singular gestörten Randwertproblemen eingegangen.

¹Zu Newton–Verfahren und Nachiteration vgl. z. B. [107].

3.1 Defektkorrekturtechniken zur approximativen Lösung von Differentialgleichungen

Erste Ansätze zur Anwendung einer Differenzenkorrekturmethode (auch „deferred correction“ genannt) zur (iterativen) Verbesserung der Näherungslösung einer Zweipunkt-Randwertaufgabe gehen auf Fox [27, 28, 29] in den späten vierziger Jahren zurück. Von der Richardson–Extrapolation², die ebenfalls den Zweck der iterativen Verbesserung einer vorhandenen Approximation verfolgt, unterscheidet sich ein solcher Defektkorrekturprozess vor allem dadurch, daß alle Berechnungen auf demselben Gitter durchgeführt werden. Die Herangehensweise von Fox wurde in [81, 82] von Pereyra in den abstrakten Rahmen von Operatorgleichungen gebettet. Er bewies allgemeine Konvergenzaussagen für solche Verfahren auf der Grundlage von Stetters Existenzsatz für asymptotische Fehlerentwicklungen [104].

Der systematischen Anwendung des Defektkorrekturprinzips in Kombination mit Diskretisierungsverfahren für Differentialgleichungen gaben die Arbeiten [117, 118] und Zadunaiskys Vortrag auf der Konferenz zur Numerischen Analysis in Dundee 1973 neue Impulse. Stetter [105, 106] formalisierte Zadunaiskys praktisch sehr effektive, heuristische Ansätze und konzipierte deren iterative Anwendung. Frank, Hertling und Überhuber [30, 31, 32, 33] (und weitere, vgl. hierzu [106]) analysierten spezielle Defektkorrekturverfahren zur iterativen Verbesserung der Konvergenz von Diskretisierungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen unter Verwendung von Polynom–Kollokation. Die Konvergenzbeweise in diesen Arbeiten setzen ebenso wie Stetters Übersichtsartikel [106] neben der Stabilität des Diskretisierungsverfahrens die Existenz einer asymptotischen Entwicklung des globalen Verfahrensfehlers voraus. Deshalb entstanden im Umfeld der Arbeiten zu Defektkorrektur auch einige Ergebnisse zur Existenz von asymptotischen Fehlerentwicklungen (z. B. [12, 13]).

Skeel [100] formulierte den theoretischen Rahmen, um Konvergenz eines Defektkorrekturverfahrens nachzuweisen, neu und zeigte dabei, daß nicht die Existenz einer asymptotischen Fehlerentwicklung entscheidend ist, sondern die „Glattheit“ des Fehlers. Im Kontext von Finite–Differenzen–Verfahren bedeutet dies, daß gewisse Differenzenquotienten höherer Ordnung des Fehlers beschränkt sein müssen. Skeel schlug vor, die „Fehlertatheit“ mit Hilfe diskreter Sobolev–Normen zu messen. In einem Anwendungsbeispiel für ein Zweipunkt–Randwertproblem erzielte er die besten Genauigkeitsresultate unter Benutzung der Spijker–Norm³. Etwa zeitgleich mit [100] publizierte Hackbusch die Arbeit [42], in der er einen vergleichbaren theoretischen Rahmen zur Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren vorstellte.

Im Jahre 1984 fand ein von Böhmer und Stetter organisierter Workshop in Oberwolfach zur Theorie und Anwendung von Defektkorrekturverfahren statt, der die verschiedenen Facetten der Nutzung von Defektkorrektur zur Diskretisierung von Differentialgleichungen zusammenführen sollte (vgl. [15]). In den folgenden Jahren wurden zahlreiche weitere Artikel in dieser Richtung publiziert, von denen wir nur ausgewählte erwähnen wollen. So untersuchten Butcher et al. [17] ein Defektkorrekturverfahren auf der Basis von Finite–Differenzen–Methoden auf nichtäquidistanten Gittern⁴

²zu Richardson–Extrapolation vgl. z. B. [69]

³eingeführt in [102], vgl. auch Abschnitt 2.3, Gleichung (2.19) dieser Arbeit und die Diskussion hierzu

⁴Hochgradig nichtäquidistante Gitter erschweren die Konstruktion asymptotischer Entwicklungen und damit die von Stetter beschriebene Analysis.

für ein Zweipunkt-Randwertproblem unter Verwendung diskreter Sobolev-Normen. Moore und verschiedene Koautoren [10, 74, 19] analysierten Defektkorrekturverfahren für Finite-Elemente-Methoden. Während sich die ersten beiden Arbeiten auf Zweipunkt-Randwertprobleme beschränken, befaßt sich [19] mit zweidimensionalen Randwertaufgaben. Rannacher [84] und Blum [12] untersuchten Defektkorrektur in Kombination mit Finite-Elemente-Verfahren unter Verwendung einer speziellen asymptotischen Fehlerentwicklung. In [37] lieferten Gao et al. eine Darstellung für den Konvergenzfehler der k -ten Iterierten eines Defektkorrekturverfahrens für FEM, basierend auf der Fehlerabschätzung für die erste Iterierte, die jedoch leider nicht spezifiziert wurde.

Zum Abschluß dieses kurzen Überblickes über die Entwicklung von Defektkorrekturverfahren sei erwähnt, daß einige Autoren auch Multigrid-Methoden im Sinne von Defektkorrekturverfahren interpretieren [14, 42, 45, 48]. Typische Techniken zum Konvergenznachweis in diesem Zusammenhang sind die (diskrete) Fourieranalyse, wie sie in [21, 45, 47, 46] angewendet wird, bzw. die Eigenwertanalyse [21, 44]. Auf diese Beweismethoden wollen wir in der vorliegenden Arbeit nicht eingehen.

3.2 Methoden der Konvergenzanalyse

In diesem Abschnitt werden die zwei wesentlichen Methoden zur Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren vorgestellt, die man in der Literatur findet. Ihre Anwendbarkeit auf die Diskretisierung singular gestörter Randwertprobleme auf grenzschichtangepaßten Gittern wird kurz diskutiert.

Der Einfachheit halber wollen wir von einem linearen Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \quad (3.3)$$

ausgehen, das für $f = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Die Daten sollen die im folgenden benötigte Glattheit der Lösung u gestatten. Für $k, r \in \mathbb{N}$ folge aus $f \in C^k(\Omega)$ die Beziehung $u \in C^{k+r}(\Omega)$. Zum stetigen Problem seien auf einem Gitter $\Omega^N \cup \Gamma^N \subset \bar{\Omega}$ eine (stabile) Diskretisierung

$$L^s u^s = f^s \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^s = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N \quad (3.4a)$$

der Konsistenzordnung p_s und eine Diskretisierung

$$L^z u^z = f^z \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^z = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N \quad (3.4b)$$

der Konsistenzordnung $p_z > p_s$ gegeben. Das Defektkorrekturverfahren wird dann durch den iterativen Algorithmus

$$L^s u^0 = f^s \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^0 = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N, \quad (3.5a)$$

$$L^s u^{k+1} = L^s u^k + (f^z - L^z u^k) \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^{k+1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N \quad (3.5b)$$

beschrieben. Für den Konsistenzfehler der $(k+1)$ -ten Iterierten dieses Verfahrens ergibt sich die Darstellung

$$L^s(\hat{u} - u^{k+1}) = (L^s - L^z)(\hat{u} - u^k) + (L^z \hat{u} - f^z). \quad (3.6)$$

Er spaltet sich somit auf in den Konsistenzfehler der Diskretisierung L^z und einen sogenannten *relativen Konsistenzfehler*, der im Kontext der Differenzenverfahren einen

Differenzenquotienten des Fehlers $u - u^k$ widerspiegelt. In der Behandlung dieses Fehleranteils unterscheiden sich die vorgestellten Konzepte.

Ist das Verfahren L^s (als Abbildung zwischen geeigneten normierten Räumen) stabil, dann leiten wir aus (3.6) eine entsprechende Fehlerabschätzung für $u - u^{k+1}$ ab.

Bemerkung 3.2 Im Hinblick auf die Anwendung auf singularär gestörte Differentialgleichungen interessiert uns nicht das Konvergenzverhalten des Defektkorrekturalgorithmus für $k \rightarrow \infty$ (das gemäß (3.6) durch die Konsistenzordnung p_z von L^z limitiert wird), sondern vielmehr das asymptotische Verhalten des Fehlers $\hat{u} - u^k$ für $h \rightarrow 0$ bei einer festen Anzahl von Iterationsschritten k . Für die spezielle, von uns gewählte Verfahrenskombination beobachten wir in numerischen Experimenten bereits nach einem Iterationsschritt eine Erhöhung der Konvergenzordnung auf p_z . Wir wollen uns deshalb auch bei den folgenden allgemeinen Betrachtungen auf den Fall $k = 1$ beschränken. \square

3.2.1 Asymptotische Fehlerentwicklung

Das Ziel der Anwendung der im folgenden beschriebenen Technik bei der Analyse von Defektkorrekturverfahren ist es, die in (3.6) vorkommenden Differenzenquotienten des Fehlers $\hat{u} - u^k$ durch geeignete Ableitungen glatter Funktionen (und Restterme höherer Ordnung) auszudrücken. Gesucht wird zu diesem Zweck eine asymptotische Entwicklung der Gitterfunktion $\hat{u} - u^k$ bezüglich des Gitterparameters h .

Wir orientieren uns bei der folgenden Beschreibung asymptotischer Fehlerentwicklungen an [49] und [70].

In Abhängigkeit von der Dimension d des Ausgangsproblems und der Wahl des Gitters ist $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine vektorwertige Funktion. In der Literatur findet man asymptotische Fehlerentwicklungen häufig nur auf äquidistanten Gittern bzw. bezüglich der maximalen Gitterschrittweite, also bezüglich eines festen Parameters $h \in \mathbb{R}$ (siehe z. B. [14, 49, 69, 103]).

Für einen solchen Parameter $h \in \mathbb{R}$ nennen wir eine Folge von Funktionen $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ eine *asymptotische Folge*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Grenzbeziehung

$$\frac{\theta_{n+1}(h)}{\theta_n(h)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt. Auf einem Gitter $\Omega^N = \{\mathbf{x}_k \in \bar{\Omega} : k = 0, \dots, N\}$ seien eine reellwertige Gitterfunktion v^N , eine asymptotische Folge $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$, reellwertige Funktionen $\mu_1, \dots, \mu_M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zahl $M \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann heißt

$$\sum_{n=1}^M \theta_n(h) \mu_n(\mathbf{x}_k) \tag{3.7a}$$

eine *asymptotische Entwicklung M -ter Ordnung* von v^N an der Stelle $\mathbf{x}_k \in \Omega^N$, falls sie der Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[v_k^N - \sum_{n=1}^M \theta_n(h) \mu_n(\mathbf{x}_k) \right] = \mathcal{O}(\theta_M(h)) \tag{3.7b}$$

genügt. Die asymptotische Entwicklung heißt *gleichmäßig gültig*, wenn (3.7b) auf ganz Ω^N gilt.

Im Kontext von Fehlerentwicklungen für Finite-Differenzen-Verfahren wählt man im allgemeinen die asymptotische Folge

$$\theta_n(h) = h^n.$$

Für lineare Operatoren \mathcal{L} und L^s werden die Funktionen μ_n ($n = 1, \dots, M$) unter den getroffenen Voraussetzungen auf der Grundlage der Taylor-Entwicklung des Konsistenzfehlers bestimmt. Gilt für die exakte Lösung der Differentialgleichung die Beziehung $u \in C^{M+1}(\bar{\Omega})$, dann gibt es eine Darstellung des Konsistenzfehlers

$$L^s(u^s - \hat{u})_k = (\widehat{\mathcal{L}u})_k - L^s \hat{u}_k = \sum_{n=1}^M h^n T_n\{u(x_k)\} + R_M\{u(x_k)\} \quad (3.8)$$

mit Termen $T_n\{u(x_k)\}$, die die (partiellen) Ableitungen der Ordnung n von u an der Stelle x_k enthalten. $R_M\{u(x_k)\}$ bezeichnet das in einer Umgebung von x_k gebildete Restglied M -ter Ordnung. Ist die Konsistenzordnung p_s von L^s größer als 1, dann gilt $T_n\{u(x_k)\} = 0$ für alle $n < p_s$.

Man definiert nun die Funktionen μ_n ($n = 1, \dots, M$) als Lösungen der stetigen Probleme

$$\mathcal{L}\mu_1(x) = T_1\{u(x)\} \quad \text{für } x \in \Omega, \quad \mu_1 = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{und} \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{L}\mu_n(x) = T_n\{u(x)\} + \sum_{l=1}^{n-1} T_l\{\mu_{n-l}(x)\} \quad \text{für } x \in \Omega, \quad \mu_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (3.9b)$$

Lemma 3.1 [49] *Auf einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite h existiere für die Lösung $u \in C^{M+1}(\bar{\Omega})$ von (3.3) eine Entwicklung (3.8) des Konsistenzfehlers des Differenzenverfahrens (3.4a). Die Funktionen μ_n ($n = 1, \dots, M$) seien gemäß (3.9) definiert. Dann ist*

$$e_k^s = (\hat{u} - u^s)_k = \sum_{n=1}^M h^n \mu_n(x_k) + \mathcal{O}(h^M)$$

eine asymptotische Entwicklung der Gitterfunktion $e^s = \hat{u} - u^s$ an der Stelle x_k .

Beweisskizze. Wir setzen im folgenden stets hinreichende Glattheit der Koeffizienten der Differentialgleichung voraus. Ist $u \in C^{M+1}(\Omega)$, dann gilt $T_n\{u(x)\} \in C^{M+1-n}(\Omega)$. Gemäß unserer Annahme über die Glattheit der Lösung in Abhängigkeit von der rechten Seite folgt daraus $\mu_n \in C^{M-n+r+1}(\Omega)$. Unter Berücksichtigung von (3.8) und (3.9) schlußfolgert man

$$\begin{aligned} L^s \mu_n(x_k) &= \mathcal{L}\mu_n(x_k) + [L^s \mu_n(x_k) - \mathcal{L}\mu_n(x_k)] \\ &= \mathcal{L}\mu_n(x_k) - \sum_{l=1}^{M-n} h^l T_l\{\mu_n(x_k)\} + R_{M-n}\{\mu_n(x_k)\} \\ &= T_n\{u(x_k)\} + \sum_{l=1}^{n-1} T_l\{\mu_{n-l}(x_k)\} - \sum_{l=1}^{M-n} h^l T_l\{\mu_n(x_k)\} + R_{M-n}\{\mu_n(x_k)\}, \end{aligned}$$

und folglich ergibt sich nach kurzer Rechnung die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M h^n L^s \mu_n(x_k) &= \sum_{n=1}^M h^n T_n \{u(x_k)\} + \sum_{n=1}^M h^n \sum_{l=1}^{n-1} T_l \{\mu_{n-l}(x_k)\} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{M-1} h^n \sum_{l=1}^{M-n} h^l T_l \{\mu_n(x_k)\} + \sum_{n=1}^{M-1} h^n R_{M-n} \{\mu_n(x_k)\} \\ &= \sum_{n=1}^M h^n T_n \{u(x_k)\} + \mathcal{O}(h^M). \end{aligned}$$

Daraus und aus (3.8) folgt – für lineare Differenzenoperatoren L^s und konstante Schrittweite h – die Darstellung

$$L^s \left[u_k^s - \hat{u}_k - \sum_{n=1}^M h^n \mu_n(x_k) \right] = \mathcal{O}(h^M).$$

Die gestellten Randbedingungen ergeben die Beziehung

$$u_k^s - \hat{u}_k - \sum_{n=1}^M h^n \mu_n(x_k) = 0 \quad \text{für } x_k \in \Gamma^h.$$

Mit Hilfe eines geeigneten Stabilitätsresultates für L^s ergibt sich schließlich

$$u_k^s - \hat{u}_k - \sum_{n=1}^M h^n \mu_n(x_k) = \mathcal{O}(h^M),$$

und somit gilt die Behauptung von Lemma 3.1. ■

Bemerkung 3.3 Analysiert man die Konstruktion der asymptotischen Fehlerentwicklung genauer, so stellt sich heraus, daß

- (i) Stabilität und Linearität von L^s notwendig sind,
- (ii) das Verhalten der Ableitungen von u die Glattheit der Koeffizienten μ_n unmittelbar beeinflußt und
- (iii) nichtäquidistante Gitter zusätzliche Schwierigkeiten verursachen⁵.

Im Hinblick auf die Konstruktion einer asymptotischen Fehlerentwicklung für ein Diskretisierungsverfahren für singular gestörte Randwertaufgaben sind insbesondere die Punkte (ii) und (iii) kritisch. Natividad und Stynes [76] zeigen die Existenz einer ε -gleichmäßigen asymptotischen Fehlerentwicklung erster Ordnung für ein Problem des Typs (1.1) und seine Upwind-Approximation auf einem Shishkin-Gitter. Sie zerlegen dabei die exakte Lösung u in einen glatten Anteil v und einen Grenzschichtanteil w und ihre diskreten Analoga v^u und w^u und konstruieren jeweils eine asymptotische Entwicklung für $v^u - v$ auf dem (äquidistanten) groben Teil des Shishkin-Gitters und für $w^u - w$ auf dem (äquidistanten) feinen Teil des Gitters. In den verbleibenden Regionen werden die Fehler direkt abgeschätzt. Linß [62] erweitert das Ergebnis aus [76] auf Shishkin-Typ-Gitter (vgl. Bemerkung 5.2). Offen sind bislang die Übertragung der Resultate auf Entwicklungen höherer Ordnung bzw. auf zweidimensionale Randwertprobleme. □

⁵In [49] wird für nichtäquidistante Gitter die asymptotische Entwicklung im Sinne einer Entwicklung bezüglich eines festen Parameters $h_0 = \max\{h_i : 1 \leq i \leq N\}$ verallgemeinert.

3.2.2 Konzept korrespondierender Normen

Zu Beginn der achtziger Jahre erschienen einige Arbeiten ([42, 100] und Referenzen darin), in denen ein theoretischer Rahmen zur Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren formuliert wird, der nicht die Existenz einer asymptotischen Fehlerentwicklung voraussetzt.

Es sei in Anlehnung an obige Notation $\mathcal{L} : X^\alpha \rightarrow Y^\alpha$ ein Differentialoperator zwischen Skalen von Banachräumen X^α und Y^α , wobei α eine Indexmenge I mit $0 \in I$ durchläuft⁶. Die Normen von X^α und Y^α sollen mit steigendem Index α stärker werden, d. h., es existiert ein $C > 0$, so daß für alle $v \in X^\beta$ bzw. alle $w \in Y^\beta$ die Ungleichungen

$$\|v\|_{X^\alpha} \leq C\|v\|_{X^\beta}, \quad \text{und} \quad \|w\|_{Y^\alpha} \leq C\|w\|_{Y^\beta} \quad \text{für } \alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in I$$

gelten. Der inverse Operator \mathcal{L}^{-1} existiere und sei für ein $\sigma \geq 0$ als Abbildung von $Y^\alpha \rightarrow X^{\alpha-\sigma}$ stetig.

Den Räumen X^α und Y^α werden diskrete Analoga X_h^α und Y_h^α zugeordnet⁷, zwischen denen die diskreten Operatoren L^s und L^z abbilden. Wie bisher bezeichne \hat{x} die Einschränkung von $x \in X^\alpha$ auf X_h^α und entsprechend $\hat{y} \in Y_h^\alpha$.

Satz 3.1 [42] *Für $\alpha \in [\omega + \sigma, \omega + (k+1)(\sigma + p_s)]$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(i) *Der diskrete Operator L^s sei σ -stabil, d. h., es gilt*

$$\|(L^s)^{-1}g_h\|_{X_h^{\alpha-\sigma}} \leq C\|g_h\|_{Y_h^\alpha} \quad \text{für alle } g_h \in Y_h^\alpha \text{ und ein } \sigma \geq 0.$$

(ii) *Das durch L^s repräsentierte Verfahren sei konsistent von der Ordnung p_s , d. h., es gilt*

$$\|\widehat{\mathcal{L}}v - L^s\hat{v}\|_{Y_h^\alpha} \leq Ch^\beta\|v\|_{X^{\alpha+\beta}} \quad \text{für alle } v \in X^{\alpha+\beta}, \beta \in [0, p_s].$$

(iii) *Das durch L^z repräsentierte Verfahren sei konsistent von der Ordnung p_z , d. h., es gilt*

$$\|\widehat{\mathcal{L}}v - L^z\hat{v}\|_{Y_h^\alpha} \leq Ch^\beta\|v\|_{X^{\alpha+\beta}} \quad \text{für alle } v \in X^{\alpha+\beta}, \beta \in [0, p_z].$$

(iv) *Es gelte die Ungleichung*

$$\|(L^s - L^z)v_h\|_{Y_h^\alpha} \leq Ch^\beta\|v_h\|_{X_h^{\alpha+\beta}} \quad \text{für alle } v_h \in X_h^{\alpha+\beta}, \beta \in [0, p_s].$$

Dann genügt die k -te Iterierte des Defektkorrekturalgorithmus (3.5) für $k = 1, 2, \dots$ der Abschätzung

$$\|u_h^k - \hat{u}\|_{X_h^\omega} \leq C_k h^{\min\{p_z, (k+1)p_s\}} \|u\|_{X^{\omega+(k+1)(p_s+\sigma)}}. \quad (3.10)$$

Beweis: Für $k=0$ ist $u_h^0 = u^s$ und nach Voraussetzungen (i) und (ii) gilt

$$\|u_h^0 - \hat{u}\|_{X_h^\omega} \leq C\|L^s(u_h^0 - \hat{u})\|_{Y_h^{\omega+\sigma}} = C\|\widehat{\mathcal{L}}u - L^s\hat{u}\|_{Y_h^{\omega+\sigma}} \leq Ch^{p_s}\|u\|_{X^{\omega+\sigma+p_s}}.$$

⁶Eine mögliche Wahl von X^α und Y^α zu einem Differentialoperator 2. Ordnung sind die Sobolev-Räume $X^\alpha = H_0^{2+\alpha}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $Y^\alpha = H^\alpha(\Omega)$ für $\alpha > -2$.

⁷Für Räume von Gitterfunktionen $X_h^\alpha, Y_h^\alpha \in \mathbb{R}^{N^d}$ werden die Normen mit Hilfe von Differenzenquotienten gebildet. Der Parameter h entspricht dabei CN^{-1} .

Angenommen, die Ungleichung (3.10) gälte für $k-1$. Aus (3.6) und den Voraussetzungen (i)–(iv) folgt

$$\begin{aligned} \|u_h^k - \hat{u}\|_{X_h^\omega} &\leq C \|L^s(u_h^k - \hat{u})\|_{Y_h^{\omega+\sigma}} \leq C (\|(L^s - L^z)(u_h^k - \hat{u})\|_{Y_h^{\omega+\sigma}} + \|\widehat{\mathcal{L}}u - L^z\hat{u}\|_{Y_h^{\omega+\sigma}}) \\ &\leq Ch^{p_s} \|u_h^{k-1} - \hat{u}\|_{X_h^{\omega+\sigma+p_s}} + Ch^{p_z} \|u\|_{X_h^{\omega+\sigma+p_z}} \\ &\leq Ch^{\min\{p_z, (k+1)p_s\}} \|u\|_{X^{\min\{\omega+(k+1)(p_s+\sigma), p_z+\sigma\}}}. \end{aligned}$$

Vollständige Induktion liefert nun die Abschätzung (3.10) für alle $k \in \mathbb{N}$. ■

Bemerkung 3.4 Mit fortschreitender Iteration werden die Bedingungen an die Glattheit der Lösung u und die Ordnung der Differenzenquotienten, die angewendet auf $(u_h^k - \hat{u})$ beschränkt sein müssen, immer strenger. Diese „Fehlerrglattheit“ wird durch wachsende Indizes α widergespiegelt.

Der Satz 3.1 stellt keine Voraussetzungen an das Gitter. Differenzenquotienten–Normen etwa können auf beliebigen Gittern sinnvoll definiert werden. Die entscheidenden (und gegebenenfalls schwierig nachzuweisenden) Voraussetzungen des Satzes 3.1 sind (i) und (iv). □

3.3 Defektkorrekturverfahren für singular gestörte Probleme

In diesem Abschnitt soll ein Überblick über die in bisher publizierten Arbeiten untersuchten Defektkorrekturalgorithmen bei der Diskretisierung singular gestörter Differentialgleichungen und die dabei verwendeten Beweistechniken gegeben werden.

3.3.1 Defektkorrekturalgorithmen für Finite–Differenzen–Verfahren

Die ersten Vorschläge zur Anwendung des Defektkorrekturprinzips auf singular gestörte Randwertprobleme vom Typ (1.8) gehen auf Hemker [45, 47, 46] zurück. Sein Ziel ist es, ein – wenigstens für den glatten Anteil der Lösung der Differentialgleichung außerhalb der Grenzschichtregion – von höherer Ordnung konvergentes Verfahren zu entwickeln, das unabhängig von der Konvektionsrichtung \mathbf{b} ist. Er kombiniert auf einem äquidistanten Gitter Ω^N der Schrittweite h das zentrale Differenzenverfahren (2.70) mit einem zentralen Differenzenverfahren mit künstlicher Diffusion, das für positive Vektorfunktionen \mathbf{b} dem Upwind–Verfahren (2.50) entspricht:

$$L^u u^0 = \hat{f}, \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^0 = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N, \quad (3.11a)$$

$$L^u u^{k+1} = L^u u^k - (L^c u^k - \hat{f}) \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u^{k+1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma^N. \quad (3.11b)$$

Hemker analysiert dieses Verfahren mittels Fourieranalysis für eine Zweipunkt–Randwertaufgabe (1.1) mit konstanten Koeffizienten und weist für den glatten Anteil der Lösung Konvergenz von u^1 gegen u von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ in der diskreten Maximumnorm außerhalb der Grenzschichtregion nach, während sich der Fehler $|u(x_i) - u_i^1|$ innerhalb der Grenzschicht nur wie $\mathcal{O}(1)$ verhält. Ferner zeigt er, daß jede weitere Iterierte des Verfahrens (3.11) eine zusätzliche physikalisch inadäquate Oszillation aufweist und somit eine Fortsetzung der Iteration nicht sinnvoll ist.

Hemker beschreibt weiterhin, daß das Verfahren (3.11), angewandt auf zweidimensionale Randwertaufgaben, nicht konvergiert und schlägt stattdessen die Anwendung eines

sogenannten *mixed defect correction process* mit Jacobi-Relaxationsschritt vor:

$$L^u u^{k+1/2} = L^u u^k - (L^c u^k - \hat{f}) \quad (3.12a)$$

$$D^u u^{k+1} = D^u u^{k+1/2} - (L^u u^{k+1/2} - \hat{f}), \quad (3.12b)$$

wobei $D^u = 2 \operatorname{diag}(L^u)$. Hemkers numerische Experimente deuten auf gute Konvergenzeigenschaften des Verfahrens außerhalb der Grenzschichtregionen hin.

Das Defektkorrekturverfahren (3.11) analysieren Ervin und Layton [25] für eine Aufgabe vom Typ (1.1) (mit variablen Koeffizienten) auf einem äquidistanten Gitter und geben ε -gleichmäßige Fehlerschranken von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ in Teilgebieten $[\delta, 1]$ für $\delta > 0$ an. Sie definieren einen zum Diskretisierungsverfahren passenden stetigen Defektkorrekturprozess mit einer Differentialgleichung mit dem Störungsparameter $\varepsilon_0 = \varepsilon + B \frac{h}{2}$, wobei $B := \max_{x \in \Omega} b(x)$, und spalten den Fehler in einen stetigen Iterationsfehler und einen Diskretisierungsfehler auf. Zur Analyse des Diskretisierungsfehlers benutzen sie das Prinzip der asymptotischen Fehlerentwicklung und setzen somit eine hohe Glattheit der exakten Lösung voraus.

Axelsson und Nikolova untersuchen in [8, 78, 79] ebenfalls den Defektkorrekturalgorithmus (3.11), angewandt auf ein zweidimensionales Problem vom Typ (1.8) auf einem Shishkin-Gitter. In [8] versuchen sie zunächst, ε -gleichmäßige Konvergenz von fast zweiter Ordnung mittels asymptotischer Fehlerentwicklung nachzuweisen. Die Konstruktion der asymptotischen Entwicklung berücksichtigt allerdings weder die nichtäquidistante Struktur des Gitters noch die ε -Abhängigkeit der Terme μ_k (vgl. (3.9)). Einen alternativen Zugang, basierend auf Ideen aus [36], den wir in Abschnitt 5.2.3 diskutieren werden, verfolgt Nikolova in [78].

Heinrichs [44] untersucht neben der Verfahrenskombination (3.11) für die Zweipunkt-Randwertaufgabe (1.1) noch Defektkorrekturverfahren, in denen das zentrale Differenzenverfahren L^c durch ein Upwind-Verfahren zweiter Ordnung bzw. das Chebyshev-Pseudospektralverfahren ersetzt wird. Er interpretiert den Algorithmus (3.11) als Vorkonditionierung der Verfahren höherer Ordnung mit Hilfe des Upwind-Verfahrens und analysiert die Eigenwerte des diskreten Operators $(L^u)^{-1} L^c$ auf einem äquidistanten Gitter. Da er die Null als Infimum der Eigenwerte ermittelt, rät er von der Methode ab. Im Gegensatz zu Heinrichs Betrachtungen gehen wir in unseren Untersuchungen davon aus, daß wir die entstehenden diskreten Systeme exakt lösen können und nur einen Iterationsschritt ausführen.

Auch in [34, 35, 36] werden Defektkorrekturverfahren vom Typ (3.11) für ein- bzw. zweidimensionale Konvektions-Diffusions-Probleme auf Shishkin(-Typ)-Gittern analysiert. Der Konvergenzbeweis in [34] basiert auf dem Stabilitätsresultat aus Satz 2.4 für das Upwind-Verfahren (2.15) und ist Gegenstand von Kapitel 4. Unter verhältnismäßig schwachen Voraussetzungen an die Glattheit der Lösung der Differentialgleichung (1.1) und das verwendete Gitter wird dort Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung gleichmäßig in ε nachgewiesen. Einen alternativen Beweis desselben Resultates findet man in [62]. Linß konstruiert dort - ebenfalls unter essentieller Verwendung des Satzes 2.4 - eine asymptotische Entwicklung für den Fehler des Upwind-Verfahrens (2.15).

In [35] und [36] wurde versucht, die Schwierigkeiten bei der Konstruktion einer asymptotischen Fehlerentwicklung auf nichtäquidistanten Gittern zu umgehen, indem man anstelle einer solchen die Taylor-Entwicklung des Konsistenzfehlers des Upwind-Verfahrens

ausnutzt. Dazu ist einerseits eine hohe Glattheit der exakten Lösung notwendig. Andererseits müssen die Differenzenoperatoren L^u und L^c kommutieren. Folglich läßt sich diese Beweisidee nur auf Probleme mit konstanten Koeffizienten und Diskretisierungen auf (stückweise) äquidistanten Gittern anwenden. Details darüber, welche Konvergenzaussagen man auf der Grundlage dieser Technik zeigen kann und welche Schwierigkeiten auftreten, werden in Kapitel 5 erörtert.

3.3.2 Finite–Elemente–basierte Defektkorrekturalgorithmen

Über Defektkorrekturalgorithmen auf der Grundlage von an singular gestörte Probleme angepaßten Finite–Elemente–Methoden wurden bisher nur wenige Arbeiten publiziert.

Reinhardt veröffentlichte eine Serie von drei Arbeiten [85, 86, 87] über Defektkorrekturmethode für ein allgemeines nichtlineares singular gestörtes Randwertproblem. Einerseits wendet er einen Defektkorrekturalgorithmus zur Konstruktion einer angepaßten asymptotischen Entwicklung der exakten Lösung des Ausgangsproblems an. Andererseits konstruiert er ein Verfahren höherer Ordnung unter Benutzung der von ihm in [88] vorgestellten symmetrisierten Variationsformulierung⁸.

Axelsson schlägt ohne Analyse in [6, Abschnitt 5] einen Defektkorrekturalgorithmus vor, der ein mit künstlicher Diffusion stabilisiertes Stromliniendiffusionsverfahren (mit lokalen Parametern $\tilde{\varepsilon}$) mit einer üblichen Stromliniendiffusions–Finite–Elemente–Methode kombiniert. Der Parameter $\tilde{\varepsilon}$ soll lokale Residuen auf einem Element T der Triangulierung berücksichtigen.

In [7] analysieren Axelsson und Layton einen Defektkorrekturalgorithmus, der ein mit künstlicher Diffusion $\varepsilon_0 = \varepsilon + h_T$ stabilisiertes Galerkin–Verfahren mit dem Standard–Galerkin–Verfahren kombiniert⁹. Unter starken Forderungen an die Regularität der rechten Seite f der Differentialgleichung (und entsprechenden Kompatibilitätsbedingungen) beweisen die Autoren die Konvergenz des Algorithmus. Es ist zu beachten, daß die verwendeten Sobolev–Normen der exakten Lösung nicht gleichmäßig in ε beschränkt sind. Auf der Grundlage derselben Verfahrenskombination wird in [18] ein residualer a posteriori–Fehlerschätzer zur adaptiven Gitterkonstruktion hergeleitet. Die ε –Abhängigkeit geht dabei nicht klar aus der Analysis hervor. Anwendungsbeispiele indizieren die Wirksamkeit des Fehlerschätzers.

In Kapitel 6 wollen wir kurz einige Aspekte der Konstruktion von Defektkorrekturverfahren auf der Basis von Finite–Elemente–Methoden und ihrer Konvergenzanalyse unter Berücksichtigung unserer Erfahrungen bei der Analyse von Finite–Differenzen–Verfahren skizzieren.

⁸Man beachte [91, S.93] zu dieser Variationsformulierung

⁹vgl. hierzu Kapitel 6

Kapitel 4

Ein Defektkorrekturverfahren für ein eindimensionales Problem

Wir untersuchen in diesem Kapitel ein Finite-Differenzen-basiertes Defektkorrekturverfahren für die Zweipunkt-Randwertaufgabe

$$\mathcal{L}u(x) := -\varepsilon u''(x) - (b(x)u(x))' + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1) \quad (4.1a)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4.1b)$$

Die Daten des Problems sollen folgende Voraussetzungen erfüllen:

- (i) $b(x) \geq \beta > 0$ für alle $x \in (0, 1)$, $b \in C^3[0, 1]$,
- (ii) $c \in C^2[0, 1]$ und
- (iii) $f \in C^2[0, 1]$.

Dann existiert eine Lösung $u \in C^4[0, 1]$, die für $k = 0, 1, 2, 3$ der Abschätzung (1.7) genügt (vgl. Abschnitt 1.1).

4.1 Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren und die Konvergenzaussage sollen zuerst in möglichst allgemeiner Form angegeben werden. Für spezielle Gitter vom Shishkin-Typ leiten wir entsprechende Folgerungen ab¹.

Zunächst definieren wir auf dem Grundgebiet $\bar{\Omega} = [0, 1]$ ein Gitter

$$\Omega^N = \{x_i : 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1\}$$

und seinen Abschluß $\bar{\Omega}^N = \Omega^N \cup \{0, 1\}$ wie in Abschnitt 2.3.1, das der Voraussetzung (2.23) genügt und rekapitulieren die Definition des Index $\iota = \iota(C_0)$ aus (2.24) für beliebiges, aber festes $C_0 > 0$ sowie die Ungleichung (2.25).

Wir verwenden das Upwind-Differenzenverfahren (2.15) und das zentrale Differenzenverfahren (2.45) in folgender jeweils äquivalenter Formulierung:

$$\bar{L}^u u^u := D^u L^u u^u = D^u \hat{f}^u =: \bar{f}^u \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u_0^u = u_N^u = 0, \quad (4.2)$$

¹Wir verwenden die in Kapitel 2 eingeführten Bezeichnungen.

wobei $D^u = (d_{ij}^u)$ eine Diagonalmatrix mit $d_{ii}^u = h_{i+1} > 0$ bezeichnet, und

$$\bar{L}^c u^c := D^c \tilde{L}^c \tilde{u}^c = D^c \tilde{f}^c =: \bar{f}^c \quad \text{auf } \Omega^N, \quad u_0^c = u_N^c = 0, \quad (4.3)$$

mit $D^c = \text{diag}(\bar{h}) > 0$. Der Defektkorrekturalgorithmus hat die Gestalt:

1. Berechne mit Hilfe von (4.2) eine Ausgangsapproximation u^u mittels

$$\bar{L}^u u_i^u = \bar{f}_i^u \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1, \quad u_0^u = u_N^u = 0.$$

2. Bestimme den Defekt gegenüber dem zentralen Differenzenverfahren:

$$d_i = \bar{f}_i^c - \bar{L}^c u_i^u \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1.$$

3. Berechne den Korrekturterm k gemäß

$$\bar{L}^u k_i = d_i \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1, \quad k_0 = k_N = 0$$

und damit die endgültige Approximation $u^{dc} = u^u + k$.

Bemerkung 4.1 Der Vorteil der Schreibweise (4.2) bzw. (4.3) besteht darin, daß wir Aussagen in den an das jeweilige Verfahren angepaßten Normen $\|\cdot\|_{*,1,d}$ bzw. $\|\cdot\|_{*,1/2,d}$ bezüglich derselben Norm $\|\cdot\|_{*,d}$ mit

$$\|g\|_{*,d} := \max_{i=1,\dots,N-1} \left| \sum_{k=1}^i g_k \right|$$

formulieren können. Man überzeugt sich leicht, daß die Aussagen von Satz 2.4, Satz 2.8 und Satz 2.10 für die in (4.2) bzw. (4.3) definierten Verfahren bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{*,d}$ gezeigt werden können. \square

4.2 Konvergenzanalyse

Unter Verwendung des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Konzeptes korrespondierender Normen (vgl. Satz 3.1) werden wir folgende Konvergenzaussage für dieses Verfahren beweisen:

Theorem 4.1 *Das Gitter Ω^N genüge der Voraussetzung (2.23). Es sei β_0 eine beliebige Konstante mit $0 < \beta_0 \leq q\beta, q \in (0, 1)$. Dann gilt für den Fehler $e^{dc} = u^{dc} - \hat{u}$ des beschriebenen Defektkorrekturalgorithmus für $i = 1, \dots, \iota$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned} |e_i^{dc}| &\leq C \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(2\varepsilon))] d\xi \right)^2 + \mathcal{O}(N^{-2}) + \\ &C \frac{h_i}{\varepsilon} \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + |u'(s)|) ds + \frac{h_i}{\varepsilon} \right) \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) + \\ &h_i \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + |u'(s)|) ds \end{aligned} \quad (4.4a)$$

und für $i = \iota + 1, \dots, N$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |e_i^{dc}| &\leq C \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(2\varepsilon))] d\xi \right)^2 + \mathcal{O}(N^{-2}) + \\ &C \left([h_i \exp(\beta_0 x_\iota / \varepsilon) + 1] \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + |u'(s)|) ds + 1 \right) \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Beweis von Theorem 4.1: Gemäß Satz 2.4 ist der Upwind-Operator \bar{L}^u aus (4.2) $\|\cdot\|_{\infty,d} - \|\cdot\|_{*,d}$ -stabil, d. h., für alle Gitterfunktionen v auf Ω^N gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{\infty,d} \leq \frac{2}{\beta} \exp\left(\frac{\bar{\gamma}}{\beta}\right) \|\bar{L}^u v\|_{*,d}. \quad (4.5a)$$

Also ist die Abbildung $(\bar{L}^u)^{-1} : (\mathbb{R}^{N+1}, \|\cdot\|_{*,d}) \rightarrow (\mathbb{R}^{N+1}, \|\cdot\|_{\infty,d})$ stetig. Ferner gilt die Konsistenzaussage aus Satz 2.8:

$$\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} := \|\bar{L}^u(u^u - \hat{u})\|_{*,d} \equiv \|\tau^u\|_{*,1,d} \leq C \max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (1 + |u'(s)|) ds. \quad (4.5b)$$

Für das zentrale Differenzenverfahren in der Form (4.3) gilt nach Satz 2.10 die Ungleichung

$$\|\tilde{\tau}^c\|_{*,1/2,d} \equiv \|\bar{f}^c - \bar{L}^c \hat{u}\|_{*,d} \leq C \left(\max_{j=1,\dots,N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta s / (2\varepsilon))] ds \right)^2. \quad (4.5c)$$

Wir führen genau einen Defektkorrekturschritt aus. Gemäß (3.6) ist

$$\bar{L}^u e^{dc} = (\bar{L}^u - \bar{L}^c) e^u + (\bar{f}^c - \bar{L}^c \hat{u}), \quad (4.6)$$

wobei der relative Konsistenzfehler $(\bar{L}^u - \bar{L}^c) e^u$ die Darstellung

$$\begin{aligned} & (\bar{L}^u - \bar{L}^c) e^u \\ &= -\frac{(be^u)_{i+1} - 2(be^u)_i + (be^u)_{i-1}}{2} + h_{i+1}(ce^u)_i - \bar{h}_i \frac{(ce^u)_{i+1} + 2(ce^u)_i + (ce^u)_{i-1}}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \left([(be^u)_{i+1} - (be^u)_i] - [(be^u)_i - (be^u)_{i-1}] \right) \\ & \quad + h_{i+1} \left(\frac{3(ce^u)_i}{4} - \frac{(ce^u)_{i+1} + (ce^u)_{i-1}}{8} \right) - h_i \frac{(ce^u)_{i+1} + 2(ce^u)_i + (ce^u)_{i-1}}{8} \end{aligned}$$

besitzt. Um unter Anwendung von (4.5a) schließlich eine Abschätzung für $\|e^{dc}\|_{\infty}$ zu erhalten, wollen wir $\|\bar{L}^u e^{dc}\|_{*,d}$ abschätzen. Mit (4.5c) liegt uns bereits eine Abschätzung des zweiten Summanden aus (4.6) vor. Wenden wir nun die Norm $\|\cdot\|_{*,d}$ auf den ersten Summanden an, dann erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \|(\bar{L}^u - \bar{L}^c) e^u\|_{*,d} &= \max_{i=1,\dots,N-1} \left| \sum_{k=1}^i \left\{ -\frac{1}{2} \left([(be^u)_{k+1} - (be^u)_k] - [(be^u)_k - (be^u)_{k-1}] \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{h_{k+1}}{8} \left(6(ce^u)_k - (ce^u)_{k+1} - (ce^u)_{k-1} \right) - \frac{h_k}{8} \left((ce^u)_{k+1} + 2(ce^u)_k + (ce^u)_{k-1} \right) \right\} \right|. \end{aligned} \quad (4.7a)$$

Die Summation über k liefert zusammen mit der Voraussetzung (i) an die Differenzierbarkeit von b die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i \left([(be^u)_{k+1} - (be^u)_k] - [(be^u)_k - (be^u)_{k-1}] \right) &= [(be^u)_{i+1} - (be^u)_i] - [(be^u)_1 - (be^u)_0] \\ &\leq \|b\|_{\infty} \max_{i=0,\dots,N-1} |e_{i+1}^u - e_i^u| + \max_{i=1,\dots,N} h_i \|b'\|_{\infty} \|e^u\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (4.7b)$$

Mit einer Indexverschiebung und bei geeigneter Zusammenfassung der Absolutterme (ce^u) folgt weiterhin

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^i \frac{h_{k+1}}{8} \left(6(ce^u)_k - (ce^u)_{k+1} - (ce^u)_{k-1} \right) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{h_{k+1}}{8} \left((ce^u)_{k+2} + 2(ce^u)_{k+1} + (ce^u)_k \right) \\ &= -\frac{h_1}{8} \left((ce^u)_0 + 2(ce^u)_1 + (ce^u)_2 \right) + \frac{h_{i+1}}{8} \left(6(ce^u)_i - (ce^u)_{i-1} - (ce^u)_{i+1} \right) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{h_{k+1}}{8} \left(-(ce^u)_{k-1} + 5(ce^u)_k - 3(ce^u)_{k+1} - (ce^u)_{k+2} \right). \end{aligned}$$

Um die ersten beiden Summanden der rechten Seite in dieser Gleichung abzuschätzen, wenden wir die Dreiecksungleichung an und erhalten

$$\left| -\frac{h_1}{8} \left((ce^u)_0 + 2(ce^u)_1 + (ce^u)_2 \right) + \frac{h_{i+1}}{8} \left(6(ce^u)_i - (ce^u)_{i-1} - (ce^u)_{i+1} \right) \right| \leq 2 \max_i h_i \|ce^u\|_\infty. \quad (4.7c)$$

Die verbleibende Summe schreiben wir vor Anwendung der Dreiecksungleichung um:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{i-1} \frac{h_{k+1}}{8} \left(-(ce^u)_{k-1} + 5(ce^u)_k - 3(ce^u)_{k+1} - (ce^u)_{k+2} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{i-1} \frac{h_{k+1}}{8} \left([(ce^u)_k - (ce^u)_{k-1}] - 4[(ce^u)_{k+1} - (ce^u)_k] - [(ce^u)_{k+2} - (ce^u)_{k+1}] \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{i-1} h_{k+1} \frac{3}{4} \max_{j=0, \dots, N-1} |(ce^u)_{j+1} - (ce^u)_j| \leq \frac{3}{4} \max_{j=0, \dots, N-1} |(ce^u)_{j+1} - (ce^u)_j| \\ &\leq \frac{3}{4} \left(\|c\|_\infty \max_{j=0, \dots, N-1} |e_{j+1}^u - e_j^u| + \max_j h_j \|c'\|_\infty \|e^u\|_\infty \right). \quad (4.7d) \end{aligned}$$

Die Ungleichungen (4.7a) – (4.7d) zusammenfassend erhalten wir die Abschätzung

$$\|(\bar{L}^u - \bar{L}^c)e^u\|_{*,d} \leq C \left(\max_{j=0, \dots, N-1} |e_{j+1}^u - e_j^u| + \max_j h_j \|e^u\|_\infty \right) \quad (4.8)$$

des relativen Konsistenzfehlers $(\bar{L}^u - \bar{L}^c)e^u$. Wir werden in Unterabschnitt 4.2.1 in Anlehnung an ein Resultat aus [34] bzw. [55] den Satz 4.1 beweisen, der besagt, daß unter den getroffenen Voraussetzungen die Beziehung

$$\begin{aligned} |e_{j+1}^u - e_j^u| &\leq Ch_j \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \mathcal{O}(N^{-2}) \\ &+ \begin{cases} C \frac{h_j}{\varepsilon} \left(\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{h_j}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_j / \varepsilon) \right) & \text{für } j = 1, \dots, \iota, \\ C (\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + 1) \exp(-\beta_0 x_\iota / \varepsilon) & \text{für } j = \iota, \dots, N \end{cases} \quad (4.9) \end{aligned}$$

gilt. Bei geeigneter Wahl von C ist unter Einbeziehung von (4.5a) und (4.5b) dieselbe Abschätzung für $\|(\bar{L}^u - \bar{L}^c)e^u\|_{*,d}$ nachweisbar und somit auch eine der Voraussetzung (iv) von Satz 3.1 entsprechende Aussage. Mittels (4.5a) folgt aus (4.5c), (4.6) und (4.9) die Behauptung von Theorem 4.1. ■

Aus Theorem 4.1 folgern wir

Folgerung 4.1 *Es existiere eine positive Konstante $C_0 > 0$ derart, daß die Ungleichung $\varepsilon < C_0 N^{-1}$ gilt. Das Gitter Ω^N sei ein Shishkin-Typ-Gitter mit dem Parameter $\lambda_0 \geq 2\frac{\beta}{\beta_0}$, wobei β_0 wie in Theorem 4.1 gewählt sei. Die gittererzeugende Funktion φ genüge für ein spezielles $C = C(\beta_0)$ der Bedingung (2.10) und der Ungleichung (2.11). Außerdem besitze φ eine nichtfallende erste Ableitung. Dann gilt auf Ω^N für den Fehler des Defektkorrekturverfahrens für alle $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung*

$$\|e^{dc}\|_{\infty,d} \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Beweis von Folgerung 4.1: Unter den getroffenen Voraussetzungen genügt das Shishkin-Typ-Gitter der Bedingung (2.23) (vgl. Lemma 2.3). Nach Lemma 2.2 gilt ferner $h_i \leq C\varepsilon$ für $i = 1, \dots, N/2$. Da $\varepsilon < C_0 N^{-1}$ ist, ergibt sich für alle $N \geq 2C_0 \frac{\lambda_0}{\beta}$ der

Übergangspunkt $\lambda_S = \frac{\lambda_0}{\beta} \varepsilon \ln N$. Folglich gilt für alle $i = N/2 + 1, \dots, N$ die Abschätzung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} = 2 \frac{1 - \lambda_S}{N\varepsilon} \geq C_0^{-1}, \text{ und wir setzen } \iota = N/2.$$

Nun zeigen wir, daß alle Summanden in (4.4) durch $C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2$ beschränkt sind. Nach Lemma 2.1 ist für alle $k \in (0, \lambda_0]$ die Ungleichung

$$\max_{j=1, \dots, N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(k\varepsilon))] d\xi \leq CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|$$

erfüllt. Für $k = 2 \leq \lambda_0$ folgt daraus die Beziehung

$$\left(\max_{j=1, \dots, N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(2\varepsilon))] d\xi \right)^2 \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Ebenso schlußfolgert man die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + |u'(s)|) ds &\leq \max_{j=1, \dots, N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/\varepsilon)] d\xi \\ &\leq CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|. \end{aligned} \quad (4.10a)$$

Ferner folgt aus der Voraussetzung $\lambda_0 \geq 2\beta/\beta_0$ die Beziehung

$$\exp(-\beta_0 x_\iota/\varepsilon) = \exp(-\beta_0 x_{N/2}/\varepsilon) = \exp(-\beta_0 \frac{\lambda_0}{\beta} \ln N) \leq CN^{-2}.$$

Für $i = N/2 + 1, \dots, N$ folgt daraus bereits die Abschätzung

$$|e_i^{dc}| \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)^2.$$

Es bleibt, für $i = 1, \dots, N/2$ den Ausdruck

$$C \frac{h_i}{\varepsilon} \left(\max_{j=1, \dots, N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + |u'(s)|) ds + \frac{h_i}{\varepsilon} \right) \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon)$$

abzuschätzen. Nach Lemma 2.2 gilt die Ungleichung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_i/(\lambda_0 \varepsilon)) \leq CN^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|.$$

Unter Hinzunahme der Voraussetzung $\lambda_0 \geq 2\beta/\beta_0$, also $\beta_0 \geq 2\beta/\lambda_0$, erhält man die Abschätzung

$$\frac{h_i^2}{\varepsilon^2} \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) \leq \frac{h_i^2}{\varepsilon^2} [\exp(-\beta x_i/(\lambda_0 \varepsilon))]^2 \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2. \quad (4.10b)$$

Dasselbe Argument liefert unter Hinweis auf die Beschränktheit von $\exp(-\beta x_i/(\lambda_0 \varepsilon))$ die Beziehung

$$\frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) \leq C \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_i/(\lambda_0 \varepsilon)) \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|. \quad (4.10c)$$

Setzt man die Abschätzungen (4.10a)–(4.10c) zusammen, dann folgt die Beziehung

$$|e_i^{dc}| \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2$$

auch für alle $i = 1, \dots, N/2$. ■

4.2.1 Abschätzung der Fehlerdifferenz

In diesem Abschnitt werden wir in Anlehnung an entsprechende Resultate aus [34] und [55] den folgenden Satz beweisen:

Satz 4.1 *Das Gitter Ω^N erfülle die Voraussetzung (2.23). Dann gilt für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ sowie $\beta_0 \in (0, q\beta)$ und für $i = 1, \dots, \iota$ die Ungleichung,*

$$|\eta_i^u| := |e_i^u - e_{i-1}^u| \leq C \frac{h_i}{\varepsilon} \left(\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) \right) + Ch_i \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \mathcal{O}(N^{-2}),$$

während für $i = \iota + 1, \dots, N$ die Abschätzung

$$|\eta_i^u| \leq C(\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + 1) \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) + Ch_i \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \mathcal{O}(N^{-2})$$

erfüllt ist.

Vorüberlegungen zum Beweis

Wir rekapitulieren zunächst einige Details aus den Beweisen von Satz 2.4 bzw. Satz 2.8. Der Upwind-Operator L^u gestattet gemäß (2.21) für jede Gitterfunktion v eine Darstellung

$$L^u v_i = -D^+(A^u v)_i,$$

wobei der Differenzenoperator A^u für $i = 1, \dots, N$ durch die Gleichung

$$A^u v_i = \varepsilon D^- v_i + (bv)_i - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (cv)_j$$

gegeben ist. Dementsprechend gilt für den in (4.2) definierten Operator \bar{L}^u die Gleichung

$$\bar{L}^u v_i = -[A^u v_{i+1} - A^u v_i]. \quad (4.11)$$

Auch das stetige Problem (4.1) liegt in konservativer Form vor, d. h., es kann in der Form (1.3c) mit \mathcal{A} gemäß (1.3d) geschrieben werden. Integriert man – wie im Beweis von Satz 2.8 – die Gleichung (4.1) über $[x_i, x_{i+1}]$, dann erhält man

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\mathcal{A}u)'(x) dx = -[(\mathcal{A}u)(x_{i+1}) - (\mathcal{A}u)(x_i)].$$

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_i^u &= \bar{L}^u(u_i^u - u(x_i)) \\
&= \bar{f}_i^u - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \left([A^u \hat{u}_{i+1} - A^u \hat{u}_i] - [(\mathcal{A}u)(x_{i+1}) - (\mathcal{A}u)(x_i)] \right) \\
&= [A^u \hat{u}_{i+1} - (\mathcal{A}u)(x_{i+1})] - [A^u \hat{u}_i - (\mathcal{A}u)(x_i)] + \left(h_{i+1}f(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ist $f \in C^1(\Omega)$, dann zeigt man mittels Taylor-Entwicklung leicht die Ungleichung

$$|h_{i+1}f(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx| = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)(x_{i+1} - x)dx \right| \leq Ch_i^2 \leq CN^{-2}. \tag{4.13}$$

Andererseits ist

$$A^u \hat{u}_i - (\mathcal{A}u)(x_i) = \varepsilon [D^- \hat{u}_i - u'(x_i)] - \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1} \left[(cu)(x_j) - \frac{1}{h_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (cu)(s)ds \right]. \tag{4.14}$$

Gemäß Satz 1.3 besitzt u eine Zerlegung $u = S + E$ in einen glatten Anteil S und einen Grenzschnittanteil E . Wir definieren zur Abkürzung der Bezeichnung die Gitterfunktionen σ und ρ für $i = 1, \dots, N$ gemäß

$$\sigma_i := D^- S_i - S'(x_i) \quad \text{und} \tag{4.15a}$$

$$\rho_i := \varepsilon (D^- E_i - E'(x_i)). \tag{4.15b}$$

Eine Restgliedabschätzung der Taylor-Entwicklung liefert die Ungleichungen

$$|\sigma_i| \leq Ch_i \|S''\|_\infty \leq CN^{-1} \tag{4.16a}$$

$$|\rho_i| = \frac{\varepsilon}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} E''(s)(s - x_{i-1})ds \leq C \min\left\{\frac{h_i}{\varepsilon}, 1\right\} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon). \tag{4.16b}$$

Weiterhin definieren wir einen Differenzenoperator M^u erster Ordnung für beliebige Gitterfunktionen v und $i = 1, \dots, N$ durch die Gleichung

$$M^u v_i := \varepsilon \left(\frac{v_i}{h_i} - \frac{v_{i-1}}{h_{i-1}} \right) + (\hat{b}v)_i. \tag{4.17}$$

Offenbar generiert M^u eine L_0 -Matrix. Für die Gitterfunktion g mit $g_i := h_i > 0$ für $i = 0, \dots, N$ (wobei $h_0 := 1$ sei) gilt

$$M^u g_i = \hat{b}_i h_i > 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, N.$$

Folglich erzeugt M^u sogar eine M -Matrix, und es gilt das diskrete Vergleichsprinzip aus Lemma 2.5.

Bezüglich der im Beweis von Satz 4.1 zu untersuchenden Differenz $\eta_i^u = e_i^u - e_{i-1}^u$ besitzt

M^u folgende nützliche Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
(M^u \eta^u)_i &= \varepsilon(D^- e_i^u - D^- e_{i-1}^u) + \hat{b}_i(e_i^u - e_{i-1}^u) \\
&= -\bar{L}^u e_{i-1}^u + h_i(\hat{c}e^u)_{i-1} - h_i(D^+ \hat{b})_{i-1} e_{i-1}^u \\
&= -\left([(A^u \hat{u})_i - \widehat{A}u_i] - [(A^u \hat{u})_{i-1} - \widehat{A}u_{i-1}] + [h_i \hat{f}_{i-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s) ds] \right) \\
&\quad + h_i(\hat{c}e^u)_{i-1} - h_i(D^+ \hat{b})_{i-1} e_{i-1}^u \\
&= -\left[\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1}) + (\rho_i - \rho_{i-1}) \right] + \left[h_i \widehat{c}u_{i-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (cu)(s) ds \right] + h_i(\hat{c}e^u)_{i-1} \\
&\quad - h_i(D^+ \hat{b})_{i-1} e_{i-1}^u - \left[h_i \hat{f}_{i-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s) ds \right], \tag{4.18}
\end{aligned}$$

wobei in der Herleitung auf die Gleichungen (4.11), (4.12), (4.14), (4.15a) und (4.15b) zurückgegriffen wurde. Für

$$R := \left[h_i(\widehat{c}u_{i-1} - \hat{f}_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (cu - f)(s) ds \right] + h_i(\hat{c}e^u)_i - h_i(D^+ \hat{b})_{i-1} e_{i-1}^u$$

zeigt man unter Einbeziehung der Voraussetzungen (i) und (ii) sowie der Beziehungen (4.13), (4.5a), (4.5b) und (1.7) leicht die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|R| &\leq C \left(N^{-2} + \max_{i=1, \dots, N} (h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 + |u'(s)|) ds) \right) \\
&\leq CN^{-2} + h_i \min\left\{ \frac{h_i}{\varepsilon}, 1 \right\} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon). \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir die Gitterfunktion

$$\bar{B}_i := \prod_{j=2}^i \left(1 + \frac{q\beta h_j}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad \bar{B}_1 := 1$$

definieren. Wie im Beweis von Lemma 2.6 zeigt man, daß für beliebiges $\beta_0 \in (0, q\beta)$ ein $\iota = \iota(\beta_0)$ existiert, so daß die Beziehungen

$$\bar{B}_i \leq \begin{cases} C \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) & \text{für } i = 1, \dots, \iota \\ C \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) \left(1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \right)^{-1} & \text{für } i = \iota + 1 \\ C \exp(-\beta_0 x_i/\varepsilon) \left(1 + \frac{q\beta h_{i-1}}{\varepsilon} \right)^{-1} \left(1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \right)^{-1} & \text{für } i = \iota + 2, \dots, N \end{cases}$$

erfüllt sind und für alle $q \in (0, 1)$ die Ungleichungen $\exp(-\beta x_i/\varepsilon) \leq \exp(-q\beta x_i/\varepsilon) \leq \bar{B}_i$ gelten. Unter Benutzung von \bar{B} werden wir eine Schrankenfunktion w mit $w_i := Ch_i \bar{B}_i$ ($i = 0, \dots, N$) konstruieren, für die die Abschätzung

$$M^u w_i = C \bar{B}_i \left(\varepsilon - (\varepsilon + q\beta h_i) + b_i h_i \right) \geq Ch_i \bar{B}_i (1 - q)\beta \geq Ch_i \bar{B}_i \tag{4.20}$$

gilt.

Beweis von Satz 4.1

Nach obigen Vorüberlegungen besteht der Beweis von Satz 4.1 im wesentlichen darin, für alle $i = 1, \dots, N$ den Ausdruck

$$|M^u \eta_i^u| = |-\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1}) - (\rho_i - \rho_{i-1}) + R| \quad (4.21)$$

abzuschätzen. Basierend auf einem Ansatz aus [55] zerlegen wir die Gitterfunktion ρ in die Anteile

$$\bar{\rho}_i = \begin{cases} \rho_i & \text{für } i = 0, \dots, \iota, \\ 0 & \text{für } i = \iota + 1, \dots, N \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{\rho}_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, \dots, \iota, \\ \rho_i & \text{für } i = \iota + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Offenbar gilt dann $\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}$. Wir definieren ferner eine Hilfsgitterfunktion $\bar{\eta}^u$ gemäß

$$\bar{\eta}_i^u := \eta_i^u + h_i \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\varepsilon} + \sigma_i \right) \quad (i = 0, \dots, N). \quad (4.22)$$

Für diese Gitterfunktion gelten wegen (4.18) und (4.21) die Gleichungen

$$\begin{aligned} M^u \bar{\eta}_i^u &= M^u \eta_i^u + (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_{i-1}) + \varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1}) + b_i h_i \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\varepsilon} + \sigma_i \right) \\ &= -(\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{i-1}) + b_i h_i \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\varepsilon} + \sigma_i \right) + R \quad \text{für } i = 2, \dots, N \quad \text{und} \end{aligned} \quad (4.23a)$$

$$\bar{\eta}_1^u = \eta_1^u + h_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1}{\varepsilon} + \sigma_1 \right). \quad (4.23b)$$

Zur Abschätzung von $M^u \bar{\eta}^u$ betrachten wir die Fälle $1 \leq i \leq \iota$ und $\iota + 1 \leq i \leq N$ unter Berücksichtigung von (2.24) getrennt:

- (a) Für $1 \leq i \leq \iota$ ist $\tilde{\rho}_i = 0$. Unter Verwendung von (4.16a), (4.16b) und (4.19) zeigt man

$$\begin{aligned} |M^u \bar{\eta}_i^u| &\leq C \left(\frac{h_i}{\varepsilon} + h_i \right) \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon) + Ch_i N^{-1} + CN^{-2} \\ &\leq C \frac{h_i^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \right) \bar{B}_i + Ch_i N^{-1} + CN^{-2}. \end{aligned}$$

- (b) Für $i \in \{\iota + 1, \dots, N\}$ ist $\bar{\rho}_i = 0$. Unter Benutzung von (2.24) und denselben Beziehungen wie unter (a) folgt nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Differenz $\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{i-1}$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} |M^u \bar{\eta}_i^u| &\leq C \exp(-\beta x_{i-2}/\varepsilon) + Ch_i N^{-1} + CN^{-2} \\ &\leq C \left(1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \right) \left(1 + \frac{q\beta h_{i-1}}{\varepsilon} \right) \bar{B}_i + Ch_i N^{-1} + CN^{-2}. \end{aligned}$$

Da für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ die Ungleichungen

$$\min\left\{ \frac{h_i}{\varepsilon}, 1 \right\} \left(1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon} \right) \leq C \frac{h_i}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{q\beta h_{i-1}}{\varepsilon} \right) \geq 1$$

erfüllt sind, können wir für $|M^u \bar{\eta}_i^u|$ die einheitliche Abschätzung

$$|M^u \bar{\eta}_i^u| \leq C \frac{h_i}{\varepsilon} \min\left\{ \frac{h_i}{\varepsilon}, 1 \right\} \left(1 + \frac{q\beta h_{i-1}}{\varepsilon} \right) \bar{B}_i + Ch_i N^{-1} + CN^{-2} \quad (4.24a)$$

schlußfolgern. Außerdem leiten wir aus (4.23b) die Ungleichung

$$|\bar{\eta}_1^u| \leq C|\eta_1^u| + Ch_1 \min\left\{\frac{h_1}{\varepsilon}, 1\right\} + Ch_1 N^{-1} \quad (4.24b)$$

ab. Wir sind nun in der Lage, das in Lemma 2.5 angegebene diskrete Vergleichsprinzip auf $\bar{\eta}^u$ und die Schrankenfunktion w^j , die für beliebiges, aber festes $j \in \{1, \dots, N\}$ durch die Gleichung

$$w_i^j := C \left[\frac{h_i}{h_1} |\eta_1^u| B_i + \frac{h_i}{\varepsilon} \min\left\{\frac{h_j}{\varepsilon}, 1\right\} \left(1 + \frac{q\beta h_{j-1}}{\varepsilon}\right) \bar{B}_i + h_i N^{-1} + CN^{-2} \right] \quad (i = 1, \dots, j)$$

definiert ist, anzuwenden. Offenbar gilt für eine geeignet gewählte Konstante $C > 0$ und alle $j \in \{1, \dots, N\}$ und $i = 1, \dots, j$ unter Beachtung von (4.20) die Abschätzung

$$M^u w_i^j \geq C \left[\frac{h_i}{h_1} |\eta_1^u| B_i + \frac{h_i}{\varepsilon} \min\left\{\frac{h_j}{\varepsilon}, 1\right\} \left(1 + \frac{q\beta h_{j-1}}{\varepsilon}\right) \bar{B}_i + h_i N^{-1} \right] \geq |M^u \bar{\eta}_i^u|.$$

Außerdem ist für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ die Ungleichung

$$w_1^j \geq C \left(|\eta_1^u| + \frac{h_1}{\varepsilon} \min\left\{\frac{h_j}{\varepsilon}, 1\right\} + h_1 N^{-1} \right) \geq |\bar{\eta}_1^u|$$

erfüllt. Nach Lemma 2.5 folgt daraus für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ und $i = 1, \dots, j$ die Beziehung $|\bar{\eta}_i^u| \leq w_i^j$, insbesondere also

$$|\bar{\eta}_j^u| \leq w_j^j.$$

Somit ergibt sich aus den Abschätzungen (4.22), (4.16a), (4.16b), den Eigenschaften (4.20) von \bar{B} sowie den Gittereigenschaften (2.23) und (2.24) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} |\eta_j^u| &\leq C \left[w_j^j + \frac{h_j}{\varepsilon} |\bar{\rho}_j| + N^{-2} \right] \\ &\leq Ch_i |D^- e_1^u| \bar{B}_i + CN^{-2} + C \begin{cases} \frac{h_i^2}{\varepsilon^2} \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) & \text{für } 1 \leq i \leq \iota \\ \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i \varepsilon) (1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon})^{-1} & \text{für } i = \iota + 1 \\ \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i \varepsilon) (1 + \frac{q\beta h_i}{\varepsilon})^{-1} & \text{für } \iota + 2 \leq i \leq N \end{cases} \\ &\leq Ch_i |D^- e_1^u| \bar{B}_i + CN^{-2} + C \begin{cases} \frac{h_i^2}{\varepsilon^2} \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) & \text{für } 1 \leq i \leq \iota \\ \exp(-\beta_0 x_i \varepsilon) & \text{für } \iota + 1 \leq i \leq N. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25a)$$

Aus den Sätzen 2.4 und 2.8 sowie Ungleichung (4.20) schließen wir für den ersten Summanden die Abschätzung

$$\begin{aligned} Ch_i |D^- e_1^u| \bar{B}_i &\leq C \frac{h_i}{\varepsilon} \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) \\ &\leq C \begin{cases} \frac{h_i}{\varepsilon} \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} & \text{für } 1 \leq i \leq \iota \\ \exp(-\beta_0 x_i \varepsilon) \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} & \text{für } \iota + 1 \leq i \leq N. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25b)$$

Aus (4.25a) und (4.25b) folgt die Behauptung von Satz 4.1. ■

Folgerung 4.2 Auf einem Shishkin-Typ-Gitter, das denselben Voraussetzungen wie in Folgerung 4.1 genügt, gilt für die Fehlerdifferenz η^u und alle Indizes $i \in \{1, \dots, N\}$ die Abschätzung

$$|\eta_i^u| \leq C(N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|)^2, \quad (4.26)$$

während der Differenzenquotient D^-e^u des Verfahrensfehlers den Beziehungen

$$|D^-e_i^u| \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-1}N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| & \text{für } 1 \leq i \leq N/2 \\ CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| & \text{für } N/2 + 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (4.27)$$

genügt.

Beweis: Die Argumentation zum Beweis von (4.26) gleicht der im Beweis von Folgerung 4.1. Um die Gültigkeit von (4.27) nachzuweisen, folgern wir zunächst aus Satz 4.1 für $i = 1, \dots, \iota$ die Abschätzung

$$|D^-e_i^u| = \left| \frac{\eta_i^u}{h_i} \right| \leq C \frac{1}{\varepsilon} \left(\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) \right) + \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{1}{h_i} \mathcal{O}(N^{-2}) \quad (4.28a)$$

sowie für $i = \iota + 1, \dots, N$ die Ungleichung

$$|D^-e_i^u| \leq C \frac{1}{h_i} (\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + 1) \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) + \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (4.28b)$$

Daraus schließt man wie im Beweis von Folgerung 4.1 die Gültigkeit von (4.27). \blacksquare

Folgerung 4.3 Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 und für beliebige, aber feste Werte $q \in (0, 1)$ und $\beta_0 \in (0, q\beta)$ gilt die Abschätzung

$$|D^-u_i^u - u'(x_{i-1/2})| \leq C \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \left(\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{h_i}{\varepsilon} \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) \right) + \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \frac{1}{h_i} \mathcal{O}(N^{-2}) & \text{für } 1 \leq i \leq \iota \\ \frac{1}{h_i} (\|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + 1) \exp(-\beta_0 x_i / \varepsilon) + \|\bar{\tau}^u\|_{*,d} + \mathcal{O}(N^{-1}) & \text{für } \iota + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Auf einem Shishkin-Typ-Gitter, das den Voraussetzungen von Folgerung 4.1 genügt, folgt daraus

$$|D^-u_i^u - u'(x_{i-1/2})| \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-1}N^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| & \text{für } 1 \leq i \leq N/2 \\ CN^{-1} & \text{für } N/2 + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Beweis: Es ist $D^-u^u = D^-e^u + D^-û$ und folglich

$$|D^-u_i^u - u'(x_{i-1/2})| \leq |D^-e^u| + |D^-û_i - u'(x_{i-1/2})|.$$

Für den ersten Summanden wurde die Abschätzung bereits in (4.28a) und (4.28b) angegeben. Aus einer Taylor-Entwicklung mit Restglied erster Ordnung an der Stelle $x_{i-1/2}$ folgt unter Benutzung von (1.7) und (2.24) für $i = 1, \dots, \iota$ die Ungleichung

$$|D^-û_i - u'(x_{i-1/2})| \leq \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta s / \varepsilon)] ds \leq C \left[h_i + \frac{h_i}{\varepsilon^2} \exp(-\beta x_i / \varepsilon) \right].$$

Für $i = \iota + 1, \dots, N$ ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung in ähnlicher Weise die Beziehung

$$\begin{aligned} |D^- \hat{u}_i - u'(x_{i-1/2})| &\leq C \left[\frac{1}{h_i} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta x_{i-1/2}/\varepsilon) \right] \\ &\leq C \frac{1}{h_i} \exp(-\beta x_{i-1}/\varepsilon), \end{aligned}$$

denn es gilt $\frac{h_i}{2\varepsilon} \exp(-\frac{h_i}{2\varepsilon}) \leq C$. Ersetzen wir den Index $i - 1$ durch ι und β durch $\beta_0 < \beta$, so folgt die Behauptung.

Wie im Beweis der Folgerung 4.1 leiten wir daraus die Abschätzung auf dem Shishkin-Typ-Gitter ab. ■

4.3 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt wollen wir unsere theoretischen Resultate anhand von numerischen Experimenten illustrieren. Wir wenden das beschriebene Defektkorrekturverfahren auf verschiedenen Shishkin-Typ-Gittern (vgl. Tabelle 2.1) zur Approximation der exakten Lösung u des Problems

$$-\varepsilon u'' - u' + 2u = e^{x-1} \quad \text{in } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (4.29)$$

an. In der folgenden Tabelle weist das Superskript ε von $e_N^{dc, \varepsilon}$ darauf hin, daß der Fehler $u - u^{dc}$ sowohl von N als auch von ε abhängt. Die ε -gleichmäßige Konvergenz wird durch den Term

$$e_N^{dc} := \max_{k=2, \dots, 10} \|e_N^{dc, 10^{-k}}\|_{\infty, d}$$

veranschaulicht. Die Konvergenzraten werden mit Hilfe der Vorschrift

$$r_N^{dc} = \log_2(e_N^{dc}/e_{2N}^{dc})$$

berechnet.

Bei den numerischen Testrechnungen wurden die Parameter $\lambda_0 = 3$ and $\beta = 1$ zur Definition des Übergangspunktes verwendet.

Bemerkung 4.2 Die Ergebnisse der Testrechnungen auf einem Gitter, dessen gittercharakterisierende Funktion ψ rational ist, deuten darauf hin, daß die Voraussetzung an φ in Folgerung 4.1, eine nichtfallende erste Ableitung zu besitzen, notwendig für die Gültigkeit der Konvergenzaussage ist.

N	Shishkin-Gitter		Bakhvalov-Shishkin-Gitter		Vulanovičs verbessertes Shishkin-Gitter		Gitter mit rationalem ψ $\ell = 2$	
	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}
16	5.326e-3	1.10	3.829e-3	1.75	4.587e-3	1.48	3.869e-3	0.70
32	2.493e-3	1.40	1.137e-3	1.86	1.648e-3	1.42	2.381e-3	0.50
64	9.432e-4	1.34	3.125e-4	1.93	6.145e-4	1.61	1.682e-3	0.72
128	3.718e-4	1.50	8.203e-5	1.96	2.015e-4	1.72	1.020e-3	0.82
256	1.317e-4	1.61	2.103e-5	1.98	6.131e-5	1.79	5.759e-4	0.88
512	4.323e-5	1.67	5.323e-6	1.99	1.776e-5	1.83	3.128e-4	0.92
1024	1.357e-5	1.72	1.339e-6	2.00	4.982e-6	1.87	1.653e-4	0.95
2048	4.133e-6	1.75	3.359e-7	2.00	1.367e-6	1.89	8.575e-5	0.96
4096	1.229e-6	—	8.416e-8	—	3.694e-7	—	4.400e-5	—

Tabelle 4.1: Numerische Experimente zur Defektkorrektur für das Zweipunkt-Randwertproblem (4.29)

Kapitel 5

Ein Defektkorrekturverfahren für zweidimensionale Probleme

Wir wollen in diesem Kapitel Techniken zur Konvergenzanalyse eines Defektkorrekturverfahrens für Randwertaufgaben vom Typ (1.8) diskutieren. Ähnlich wie im vorangegangenen Kapitel betrachten wir den Defektkorrekturalgorithmus, der das Upwind-Differenzenverfahren (2.50) und das zentrale Differenzenverfahren (2.70) kombiniert, auf Shishkin-Typ-Gittern. Wir werden anhand der numerischen Resultate eine Hypothese zur Konvergenz des Verfahrens formulieren und die Anwendbarkeit der in Kapitel 3 vorgestellten Techniken zu deren Beweis behandeln.

Für eine spezielle Problemklasse vom Typ (1.8) mit konstanten Konvektionskoeffizienten b_1 und b_2 sowie verschwindendem Reaktionsterm ($c = 0$) können wir auf stückweise äquidistanten Gittern mit Hilfe eines bereits in [36] benutzten Ansatzes Teilresultate zum Nachweis der Konvergenz von fast zweiter Ordnung erzielen.

5.1 Beschreibung des Verfahrens

Es seien $\bar{\Omega}_x^N \subset [0, 1]$ und $\bar{\Omega}_y^N \subset [0, 1]$ zwei eindimensionale Shishkin-Typ-Gitter mit jeweils $N - 1$ inneren Gitterpunkten, derselben gittererzeugenden Funktion φ und den Übergangspunkten

$$\lambda_x := \frac{\lambda_{0,1}\varepsilon}{\beta_1} \ln N \quad \text{und} \quad \lambda_y := \frac{\lambda_{0,2}\varepsilon}{\beta_2} \ln N,$$

wobei $\lambda_{0,\nu} > 0$ ($\nu = 1, 2$) Gitterparameter sind, die im folgenden genauer spezifiziert werden. Zur Diskretisierung des Grundgebietes Ω verwenden wir das Tensorproduktgitter $\bar{\Omega}^N = \bar{\Omega}_x^N \times \bar{\Omega}_y^N$.

Mit Hilfe der in (2.50) und (2.70) definierten Differenzenverfahren formulieren wir auf dem Gitter $\bar{\Omega}^N$ den Defektkorrekturalgorithmus:

1. Berechne mit Hilfe von (2.50) eine Ausgangsapproximation u^u mittels

$$L^u u_{ij}^u = \hat{f}_{ij} \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N, \quad u_{ij}^u = 0 \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N.$$

2. Bestimme den Defekt gegenüber dem zentralen Differenzenverfahren (2.70):

$$d_{ij} = \hat{f}_{ij} - L^c u_{ij}^u \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N.$$

3. Berechne den Korrekturterm k gemäß

$$L^u k_{ij} = d_{ij} \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N, \quad k_{ij} = 0 \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N$$

und ermittle die Approximation $u^{dc} = u^u + k$.

Dieser Defektkorrekturalgorithmus kann auch in der Form

$$\begin{aligned} L^u u_{ij}^u &= \hat{f}_{ij} & \text{in } \bar{\Omega}^N \setminus \Gamma^N, & \quad u_{ij}^u = 0 \text{ auf } \Gamma^N \\ L^u u_{ij}^{dc} &= (L^u - L^c)u_{ij}^u + \hat{f}_{ij} & \text{in } \bar{\Omega}^N \setminus \Gamma^N, & \quad u_{ij}^{dc} = 0 \text{ auf } \Gamma^N. \end{aligned} \quad (5.1)$$

geschrieben werden.

5.1.1 Numerische Resultate

Bevor wir die bekannten Methoden zur Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren und die Schwierigkeiten bei deren Anwendung auf den Algorithmus (5.1) erläutern, wollen wir die Vermutung, daß Konvergenz von fast zweiter Ordnung, gleichmäßig im Störungsparameter ε , vorliegt, anhand von numerischen Testrechnungen untermauern.

Wir betrachten zuerst das Beispielpblem

$$-\varepsilon \Delta u(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \quad (5.2a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad (5.2b)$$

dessen rechte Seite f so gewählt ist, daß die Funktion

$$u(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \cdot (1 - y)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right)\right) \quad (5.2c)$$

die gestellte Randwertaufgabe löst.

Wir wenden den Defektkorrekturalgorithmus (5.1) auf verschiedenen Shishkin-Typ-Gittern auf das Problem (5.2) an und geben in Tabelle 5.1 für $N = 2^n, n = 2, \dots, 9$ die Fehler

$$e_N^{dc} = \max_{k=2, \dots, 8} \|e_N^{dc, 10^{-k}}\|_{\infty, d}$$

und die Konvergenzraten

$$r_N^{dc} = \log_2(e_N^{dc}/e_{2N}^{dc})$$

an, wobei $e_N^{dc, \varepsilon}$ den Verfahrensfehler $\hat{u} - u^{dc}$ auf einem Gitter $\bar{\Omega}^N$ mit $(N + 1)^2$ Gitterpunkten, berechnet für den Störungsparameter ε , bezeichnet. Als Gitterparameter wählen wir $\lambda_{0,1} = \lambda_{0,2} = 3$.

Weiterhin betrachten wir das Beispielpblem

$$-\varepsilon \Delta u(x, y) - (2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - (3 - y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \sin((1 - x^2)(1 - y)) \quad (5.3a)$$

für $(x, y) \in \Omega = (0, 1)^2$ mit den Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \quad (5.3b)$$

N	Bakhvalov–Gitter		Bakhvalov– Shishkin–Gitter		Shishkin–Gitter		Vulanovićs verbessertes Shishkin–Gitter	
	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}	e_N^{dc}	r_N^{dc}
4	7.9299e-01	1.19	5.1357e-01	1.06	5.1332e-01	0.77	5.0693e-01	1.07
8	3.4699e-01	1.80	2.4670e-01	1.43	3.0164e-01	1.03	2.4200e-01	1.02
16	9.9819e-02	1.88	9.1585e-02	1.77	1.4781e-01	0.93	1.1944e-01	1.25
32	2.7145e-02	1.87	2.6797e-02	1.85	7.7697e-02	1.17	5.0292e-02	1.38
64	7.4321e-03	1.92	7.4223e-03	1.92	3.4570e-02	1.31	1.9351e-02	1.52
128	1.9608e-03	1.96	1.9606e-03	1.96	1.3913e-02	1.45	6.7635e-03	1.64
256	5.0494e-04	1.98	5.0490e-04	1.98	5.0966e-03	1.55	2.1717e-03	1.74
512	1.2815e-04	—	1.2807e-04	—	1.7453e-03	—	6.5197e-04	—

Tabelle 5.1: Berechnete Verfahrensfehler und Konvergenzraten für das Testproblem (5.2)

Die exakte Lösung u von (5.3) ist uns nicht bekannt. Deshalb ermitteln wir eine Näherung für den Verfahrensfehler nach dem Zwei–Gitter–Prinzip. Zu vorgegebenen Werten ε und N betrachten wir die Differenz

$$\tilde{e}_N^{dc,\varepsilon} := u_N^{dc,\varepsilon} - u_{2N}^{dc,\varepsilon}$$

zwischen der ermittelten Approximation auf einem Gitter mit $(N+1)^2$ Gitterpunkten und auf einem durch Bisektion daraus hervorgegangenen Gitter mit $(2N+1)^2$ Punkten. In Tabelle 5.2 wird die ε –gleichmäßige Konvergenz des Defektkorrekturalgorithmus (5.1) angewendet auf das Problem (5.3) durch die Fehler

$$\tilde{e}_N^{dc} = \max_{k=2,\dots,8} \|\tilde{e}_N^{dc,10^{-k}}\|_{\infty,d}$$

und die Konvergenzraten

$$\tilde{r}_N^{dc} = \log_2(\tilde{e}_N^{dc}/\tilde{e}_{2N}^{dc})$$

veranschaulicht. Für die betrachteten Shishkin–Typ–Gitter wählen wir die Gitterparameter $\lambda_{0,1} = \lambda_{0,2} = 2$.

Weitere numerische Tests des Defektkorrekturverfahrens (5.1) für zweidimensionale konvektionsdominierte Konvektions–Diffusions–Gleichungen auf Shishkin–Gittern findet man in [78, Kapitel 2] und [67].

N	Bakhvalov–Gitter		Bakhvalov– Shishkin–Gitter		Shishkin–Gitter		Vulanovićs verbessertes Shishkin–Gitter	
	\tilde{e}_N^{dc}	\tilde{r}_N^{dc}	\tilde{e}_N^{dc}	\tilde{r}_N^{dc}	\tilde{e}_N^{dc}	\tilde{r}_N^{dc}	\tilde{e}_N^{dc}	\tilde{r}_N^{dc}
4	7.9199e-02	1.14	2.2252e-02	0.45	2.1763e-02	0.66	2.5369e-02	0.73
8	3.5860e-02	1.75	1.6287e-02	1.07	1.3768e-02	1.07	1.5245e-02	1.29
16	1.0637e-02	1.96	7.7363e-03	1.54	6.5782e-03	1.22	6.2192e-03	1.45
32	2.7251e-03	1.94	2.6677e-03	1.80	2.8195e-03	1.28	2.2692e-03	1.53
64	7.1168e-04	1.94	7.6687e-04	1.95	1.1628e-03	1.42	7.8406e-04	1.66
128	1.8516e-04	1.98	1.9871e-04	2.01	4.3435e-04	1.54	2.4833e-04	1.76
256	4.7028e-05	—	4.9413e-05	—	1.4961e-04	—	7.3243e-05	—

Tabelle 5.2: Nach dem Zwei–Gitter–Prinzip ermittelte Konvergenzraten und Fehler zum Problem (5.3)

Bemerkung 5.1 Numerische Tests indizieren, daß die Glattheit der Lösung tatsächlich einen Einfluß auf die Konvergenz des Defektkorrekturverfahrens (5.1) ausübt. Erfüllt die rechte Seite des Randwertproblems die Kompatibilitätsbedingungen (1.9) auf dem Abschluß des Einströmrandes nicht, so beobachtet man nur Konvergenz erster Ordnung (vgl. Beispiel 2 in [78, Kapitel 2]).

Auf Shishkin–Typ–Gittern, deren gittererzeugende Funktion φ nicht der Voraussetzung von Lemma 2.3 genügt, z. B. auf solchen mit einer rationalen Funktion ψ , beobachtet man – wie im eindimensionalen Fall – nur Konvergenz von (fast) erster Ordnung. \square

5.1.2 Konvergenzhypothese

Die in Abschnitt 5.1.1 vorgestellten numerischen Resultate geben Anlaß zu der folgenden Vermutung über die Konvergenzordnung des Defektkorrekturverfahrens (5.1):

Hypothese 5.1 *Das Defektkorrekturverfahren (5.1), angewendet auf ein Problem vom Typ (1.8) mit hinreichend glatten Daten b, c und f , konvergiert auf einem Shishkin–Typ–Gitter, dessen gittererzeugende Funktion φ den Voraussetzungen (2.10) und (2.11) genügt und eine nichtfallende erste Ableitung besitzt, von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-2} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|^2)$, gleichmäßig im Störungsparameter ε .*

Im folgenden Abschnitt wollen wir die Schwierigkeiten bei der Anwendung der in Kapitel 3 vorgestellten Techniken zum Beweis der Hypothese 5.1 erörtern. In Abschnitt 5.3 sollen schließlich unter strengeren Voraussetzungen einige Aussagen über die Konvergenz des Verfahrens (5.1) für die Grenzschichtanteile und den glatten Anteil der Lösung u bewiesen werden.

5.2 Diskussion von Techniken zur Konvergenzanalyse

Ausgangspunkt der Konvergenzanalyse des Defektkorrekturverfahrens (5.1) ist die Abschätzung des Konsistenzfehlers $\tau^{dc} := L^u(u - u^{dc})$. Aus Gleichung (3.6) folgt die Darstellung

$$\tau^{dc} = (L^u - L^c)(\hat{u} - u^u) + (\widehat{\mathcal{L}}u - L^c\hat{u}), \quad (5.4)$$

die oft zur Untersuchung des Konsistenzfehlers des Verfahrens herangezogen wird. Wie bereits in Abschnitt 3.2 erläutert, besteht die wesentliche Schwierigkeit bei der Analyse von Defektkorrekturalgorithmen auf der Basis von Finite–Differenzen–Verfahren in der Behandlung des *relativen Konsistenzfehlers*

$$\begin{aligned} \tau^{rel} &:= (L^u - L^c)(\hat{u} - u^u) \\ &= -\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}} \left(D_x^+(\hat{u} - u^u)_{ij} - D_x^-(\hat{u} - u^u)_{ij} \right) \\ &\quad - \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}} \left(D_y^+(\hat{u} - u^u)_{ij} - D_y^-(\hat{u} - u^u)_{ij} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir wollen im folgenden – wie bereits in Kapitel 4 – die Bezeichnungen $e^u = \hat{u} - u^u$ für den Fehler des Upwind–Verfahrens und $e^{dc} = \hat{u} - u^{dc}$ für den Verfahrensfehler des Defektkorrekturalgorithmus (5.1) verwenden.

5.2.1 Das Konzept korrespondierender Normen

In Kapitel 4 wurde das Konzept korrespondierender Normen erfolgreich benutzt, um für das in Abschnitt 4.1 definierte Defektkorrekturverfahren Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung auf Shishkin–Typ–Gittern nachzuweisen. Die entscheidende Grundlage des Beweises bildete die Stabilitätsaussage aus Satz 2.4 für das eindimensionale Upwind–Verfahren (2.15). Aufbauend auf dieser Aussage wird die Beschränktheit der Differenzenquotienten erster Ordnung des Upwind–Fehlers bewiesen (vgl. Satz 4.1).

Aus Abschnitt 2.4.1 wissen wir, daß die stärkste derzeit bekannte Stabilitätsaussage für das zweidimensionale Upwind–Verfahren (2.50) die in Satz 2.12 konstatierte anisotrope Stabilität ist. Gemäß Definition (vgl. Satz 2.12) werden zur Berechnung der anisotropen Normen $\|\cdot\|_{1\otimes\infty,d}$ bzw. $\|\cdot\|_{\infty\otimes 1,d}$ zunächst linienweise Maxima über die Beträge der lokalen Fehler gebildet. Bei der anschließenden Anwendung der diskreten L_1 –Norm in der verbleibenden Richtung können deshalb – anders als bei der Verwendung der Norm $\|\cdot\|_{*,d}$ in Kapitel 4 – keine Summationseffekte auftreten, die die Ordnung der in (5.5) enthaltenen Differenzenquotienten reduzieren.

Wir benötigen folglich explizite Abschätzungen für Terme der Art

$$h_{x,i}|\delta_x^2 e_{ij}^u| \quad \text{bzw.} \quad h_{y,j}|\delta_y^2 e_{ij}^u| \quad (5.6)$$

von im allgemeinen zweiter Ordnung. (Gemäß Bemerkung 2.19 darf die Ordnung entlang einer festen Anzahl von Ausnahmelinien um Eins reduziert sein.) Techniken, um eine derartige Abschätzung nachzuweisen, sind uns bislang nicht bekannt¹.

5.2.2 Asymptotische Fehlerentwicklung

Zwei wesentliche Schwierigkeiten bei der Konstruktion einer asymptotischen Fehlerentwicklung für die Upwind–Diskretisierung singular gestörter Randwertaufgaben sind in Bemerkung 3.3 herausgearbeitet worden: die Verwendung hochgradig nichtuniformer Gitter und die ε –Abhängigkeit der Koeffizienten μ_k der Entwicklung.

Bemerkung 5.2 Linß konstruiert in [62] auf der Grundlage der in Satz 2.4 beschriebenen starken Stabilität des eindimensionalen Upwind–Verfahrens mit ähnlichen Techniken, wie sie in Kapitel 4 verwendet werden, eine asymptotische Fehlerentwicklung mit der Eigenschaft²

$$\|\hat{u} - u^u - \hat{\Psi}\|_{\infty,d} \leq \left(\max_{i=1,\dots,N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta\xi/(2\varepsilon))] d\xi \right)^2.$$

Er zeigt unter anderem, daß die konstruierte Funktion Ψ stetig ist und ihre stückweise definierte Ableitung für alle $x \in [0, 1] \setminus \Omega^N$ der Abschätzung

$$|\Psi'(x)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp(-\beta x/\varepsilon) \right)$$

genügt. Wiederum auf der Grundlage des Satzes 2.4 leitet Linß aus dieser asymptotischen Entwicklung erster Ordnung die Aussage des Theorems 4.1 ab. \square

¹Bei Verwendung der Normen $\|\cdot\|_{1\otimes\infty,d}$ bzw. $\|\cdot\|_{\infty\otimes 1,d}$ erwiesen sich selbst zu den im Satz 4.1 angegebenen Schranken vergleichbare Abschätzung der Differenzenquotienten erster Ordnung im zweidimensionalen Fall nicht als ausreichend. Dies liegt wiederum daran, daß bei der Berechnung der anisotropen Normen die Bildung des Maximums der Beträge eine Ordnungsreduktion der Differenzenquotienten bei Summation verhindert.

²Man vergleiche z.B. Lemma 2.1 zur Interpretation der rechten Seite dieser Ungleichung auf Shishkin–Typ–Gittern.

Da uns eine Aussage wie Satz 2.4 für das zweidimensionale Upwind-Verfahren (2.50) nicht zur Verfügung steht, müssen die in Bemerkung 5.2 zitierten Ergebnisse bei den nachstehenden Betrachtungen unberücksichtigt bleiben. Wir wollen im folgenden die ε -Abhängigkeit der Koeffizienten μ_k einer nach dem in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Prinzip konstruierten asymptotischen Entwicklung des Upwind-Verfahrensfehlers genauer erläutern. Der Einfachheit halber legen wir unseren Betrachtungen ein uniformes Gitter Ω_ε^N mit Schrittweiten $h_x = h_y = h$ zugrunde.

Wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, ergibt sich die Koeffizientenfunktion $\mu_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in der asymptotischen Entwicklung

$$e_{ij}^u = h\mu(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.7)$$

als Lösung des (singulär gestörten) Randwertproblems

$$\mathcal{L}\mu_1 = -\frac{b_1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{b_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{in } \Omega \quad (5.8a)$$

$$\mu_1 = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \quad (5.8b)$$

Folglich weist μ_1 eine exponentielle Grenzschicht bei $x = 0$ auf³ (vgl. Abschnitt 1.2.3). Hinreichend glatte Daten des Problems (5.8) vorausgesetzt, genügen die zweiten partiellen Ableitungen von μ_1 den Abschätzungen

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} \leq C(1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 x/\varepsilon)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y^2} \leq C(1 + \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_2 y/\varepsilon)).$$

Nun wollen wir die (formale) asymptotische Entwicklung (5.7) in die Gleichung (5.5) einsetzen. Unter Verwendung der Gleichung (2.49d) erhalten wir eine Abschätzung der Art

$$\begin{aligned} |(L^u - L^c)e_{ij}^u| &\leq \left| -\frac{b_{1,ij}h^2}{2} \delta_x^2 \mu_1(x_i, y_j) - \frac{b_{2,ij}h^2}{2} \delta_y^2 \mu_1(x_i, y_j) \right| \\ &\quad + Ch(\delta_x^2 + \delta_y^2)R_{ij} \\ &\leq Ch^2 \left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{x_{i-1}}^\xi \int_{x_{i-1}}^t \frac{\partial^3 \mu_1}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \\ &\quad + Ch^2 \left(\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y^2} + \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{y_{j-1}}^\xi \int_{y_{j-1}}^t \frac{\partial^3 \mu_1}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi \right) + \mathcal{O}(h), \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei gemäß (5.7) die Ungleichung $|R_{ij}| \sim \mathcal{O}(h^2)$ gilt. Der letzte Summand in der Ungleichungskette (5.9) ergibt sich infolge der Anwendung der Dreiecksungleichung auf den Term $Ch(\delta_x^2 + \delta_y^2)R_{ij}$.

Wir lesen aus (5.9) zunächst ab, daß die Beschränktheit der zweiten partiellen Ableitungen von μ_1 , gleichmäßig in ε , eine entscheidende Rolle für den Nachweis von robuster Konsistenz des Defektkorrekturverfahrens (5.1) spielt⁴. Ferner legt der – bei Verwendung einer Norm, in die punktweise Maxima eingehen (L_∞ -, L_p -Norm) – verbleibende Term der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ nahe, die asymptotische Entwicklung (5.7) bis zur Ordnung 2 zu erweitern:

$$e_{ij}^u = h\mu_1(x_i, y_j) + h^2\mu_2(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^3).$$

³Dies ist auch dann der Fall, wenn wir – z. B. durch die Wahl geeigneter Randbedingungen – garantieren können, daß die partiellen Ableitungen der Lösung u des Ausgangsproblems bis zur zweiten Ordnung gleichmäßig in ε beschränkt sind.

⁴Lokal kann auf Shishkin-Typ-Gittern die Gitterschrittweite negative Potenzen von ε kompensieren.

Der Koeffizient μ_2 weist dabei bestenfalls dieselben Glattheitseigenschaften wie μ_1 auf.

Die obigen Betrachtungen zusammenfassend ist uns nach gegenwärtigem Erkenntnisstand im zweidimensionalen Fall die Verwendung einer direkten asymptotischen Fehlerentwicklung wie (5.7) zur Abschätzung des relativen Konsistenzfehlers (5.5) und schließlich zum Nachweis der robusten Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung für das Defektkorrekturverfahren (5.1) unklar.

5.2.3 Asymptotische Entwicklung des Konsistenzfehlers τ^u

In Anbetracht der in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Unklarheiten bei der Konstruktion einer direkten asymptotischen Fehlerentwicklung für e^u wurde in [36] (zunächst eindimensional) versucht, die bekannte asymptotische Entwicklung (2.55) des Konsistenzfehlers τ^u zur Abschätzung des relativen Konsistenzfehlers τ^{rel} heranzuziehen. Die Konvergenzanalyse für ein Defektkorrekturverfahren wie (5.1) in [78, Kapitel 2] beruht auf demselben Ansatz. Die Grundidee ist folgende:

Wir setzen voraus, daß die Differenzenoperatoren L^u und $L^u - L^c$ für die Gitterfunktion e^u im Gitterpunkt (x_i, y_j) kommutieren, d. h., es gilt die Gleichung

$$L^u(L^u - L^c)e_{ij}^u = (L^u - L^c)L^ue_{ij}^u. \quad (5.10)$$

Wenden wir den $\|\cdot\|_{\infty,d}$ - $\|\cdot\|_{\infty,d}$ -stabilen Upwind-Operator L^u im Punkt (x_i, y_j) auf τ^{rel} an und benutzen (5.10), dann können wir den Konsistenzfehler $\tau^u = L^ue_{ij}^u$ des Upwind-Verfahrens durch seine exakte asymptotische Darstellung (2.55) ersetzen. Auf die darin enthaltenen glatten Funktionen wenden wir den Differenzenoperator $L^u - L^c$ an. Die entstehenden Differenzenausdrücke glatter Funktionen sollen schließlich durch Ausdrücke mit höheren Ableitungen derselben repräsentiert werden.

In [78, Kapitel 2] wurde die Notwendigkeit der Kommutativität von L^u und $L^u - L^c$ völlig außer acht gelassen. In [36] wurde gezeigt, daß die Differenzenoperatoren L^u und $L^u - L^c$ genau dann in einem Gitterpunkt x_i ($i = 2, \dots, N - 2$) kommutieren, wenn die Schrittweiten der Bedingung

$$h_{i-1} = h_i = h_{i+1} = h_{i+2}$$

genügen und die Koeffizienten des betrachteten Randwertproblems die Forderungen

$$\mathbf{b} = \text{const} \quad \text{und} \quad c = 0 \quad (5.11)$$

erfüllen (vgl. Lemma 5.1 der vorliegenden Arbeit). Um zumindest innerhalb der äquidistanten Teilbereiche eines Shishkin-Gitters das oben beschriebene Beweisprinzip anwenden zu können, wurde das im Defektkorrekturalgorithmus verwendete zentrale Differenzenverfahren im Übergangspunkt des Shishkin-Gitters sowie in seinen Nachbarpunkten und in Randnähe durch das Upwind-Verfahren ersetzt. Zwar gleicht die Verwendung der L_∞ - L_1 -Stabilität des Upwind-Verfahrens den Konsistenzverlust dieses modifizierten zentralen Differenzenverfahrens L^{mc} aus. Nicht beachtet wurde in [36] (und der darauf aufbauenden Arbeit [35]) allerdings, daß der so definierte Operator L^{mc} nicht mehr der Kommutativitätsbedingung (5.11) genügt⁵.

⁵Infolge der Modifikation von L^c ist jeweils in den Nachbarpunkten der Ausnahmepunkte die Bedingung (5.11) verletzt.

Setzt man die Gültigkeit der Bedingung (5.11) und die Existenz einer geeigneten Shishkin–Typ–Zerlegung

$$u = S + E_1 + E_2 + E_{12}$$

(vgl. Voraussetzung 2 in Abschnitt 5.3) voraus, so kann man mit Hilfe der angegebenen Idee dennoch folgende Aussagen über die Konvergenz des Defektkorrekturverfahrens (5.1), angewandt auf ein Problem des Typs (1.8), beweisen:

- Die mittels (5.1) ermittelte Approximation S^{dc} des glatten Anteils S der exakten Lösung u konvergiert auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite $H \sim \mathcal{O}(N^{-1})$ gegen S . Es gilt die Ungleichung

$$\|\hat{S} - S^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}.$$

- Die Approximation E_1^{dc} des Grenzschichtanteils E_1 von u konvergiert auf dem Tensorprodukt $\Omega_1^N = \Omega_{x,S}^N \times \Omega_{y,u}^N$ eines Shishkin–Gitters in x –Richtung und eines äquidistanten Gitters in y –Richtung gegen E_1 . Es gilt die Abschätzung

$$\|\hat{E}_1 - E_1^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

- Symmetrisch zur eben beschriebenen Situation konvergiert die Approximation E_2^{dc} des Grenzschichtanteils E_2 von u auf einem Gitter $\Omega_2^N = \Omega_{x,u}^N \times \Omega_{y,S}^N$, das sich als Tensorprodukt eines uniformen Gitters $\Omega_{x,u}^N$ in x –Richtung und eines Shishkin–Gitters $\Omega_{y,S}^N$ ergibt, gegen E_2 , und es gilt

$$\|\hat{E}_2 - E_2^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

- Für den Eckgrenzschichtanteil E_{12} und seine Approximationen E_{12}^{dc} gilt auf einem stückweise äquidistanten Shishkin–Gitter die Abschätzung

$$\|\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

Dem Beweis dieser Aussagen ist der folgende Abschnitt gewidmet. Die Abbildung 5.2 auf Seite 112 veranschaulicht die verwendeten Gitter für $N = 8$.

5.3 Teilresultate zur Konvergenzanalyse

5.3.1 Voraussetzungen

Wir beschränken unsere Untersuchungen des Defektkorrekturverfahrens (5.1) auf das zweidimensionale Konvektions–Diffusions–Problem

$$\mathcal{L}u = -\varepsilon\Delta u - \mathbf{b} \cdot \nabla u = f \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \quad (5.12a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad (5.12b)$$

das folgenden Voraussetzungen genüge:

Voraussetzung 1: Der Konvektionskoeffizient $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2)^T$ sei konstant und positiv.

Voraussetzung 2: Die Lösung u von (5.12) gestatte eine Shishkin–Typ–Zerlegung⁶

$$u = S + E_1 + E_2 + E_{12}.$$

⁶vgl. Satz 1.7 und die Bemerkungen 1.10 und 1.11

Dabei sollen für alle $(x, y) \in \bar{\Omega}$ die Beziehungen

$$\left| \frac{\partial^{i+j} S}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \right| \leq C \quad \text{für } i + j \leq 4, \quad (5.13a)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_1}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-i} \exp(-\beta_1 x / \varepsilon) \quad \text{für } i + j \leq 6, \quad (5.13b)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_2}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-j} \exp(-\beta_2 y / \varepsilon) \quad \text{für } i + j \leq 6 \quad \text{und} \quad (5.13c)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{12}}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \right| \leq C \varepsilon^{-(i+j)} \exp(-\beta_1 x / \varepsilon) \exp(-\beta_2 y / \varepsilon) \quad \text{für } i + j \leq 6, \quad (5.13d)$$

sowie

$$|\mathcal{L}E_1(x, y)| \leq C \varepsilon e^{-\beta_1 x / \varepsilon}, \quad (5.13e)$$

$$|\mathcal{L}E_2(x, y)| \leq C \varepsilon e^{-\beta_2 y / \varepsilon} \quad \text{und} \quad (5.13f)$$

$$|\mathcal{L}E_{12}(x, y)| \leq C \varepsilon e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y) / \varepsilon} \quad (5.13g)$$

gelten.

Zur Diskretisierung des Grundgebietes Ω wollen wir das Tensorprodukt der stückweise äquidistanten Shishkin-Gitter $\Omega_{x,S}^N$ und $\Omega_{y,S}^N$ mit jeweils $N - 1$ inneren Gitterpunkten verwenden und stellen die schwache

Voraussetzung 3: Es gelte $\varepsilon < CN^{-1}$.

Wir definieren die Übergangspunkte

$$\lambda_{S,x} := \frac{\lambda_{0,1}\varepsilon}{\beta_1} \ln N \quad \text{und} \quad \lambda_{S,y} := \frac{\lambda_{0,2}\varepsilon}{\beta_2} \ln N$$

und teilen das Grundgebiet Ω in die Teilgebiete

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= [0, \lambda_{S,x}] \times [0, \lambda_{S,y}], & \Omega_{21} &= [\lambda_{S,x}, 1] \times [0, \lambda_{S,y}], \\ \Omega_{22} &= [\lambda_{S,x}, 1] \times [\lambda_{S,y}, 1] \quad \text{und} \quad \Omega_{12} &= [0, \lambda_{S,x}] \times [\lambda_{S,y}, 1]. \end{aligned}$$

auf (vgl. Abbildung 5.1). Das Shishkin-Gitter $\bar{\Omega}_S^N$ umfaßt nun für $i, j = 0, \dots, N$ alle Punkte $(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}$ mit

$$x_i = \begin{cases} 2i\lambda_{S,x}N^{-1} & \text{für } i = 0, \dots, N/2 \\ \lambda_{S,x} + 2(N-i)(1-\lambda_{S,x})N^{-1} & \text{für } i = N/2 + 1, \dots, N \end{cases}$$

und

$$y_j = \begin{cases} 2j\lambda_{S,y}N^{-1} & \text{für } j = 0, \dots, N/2 \\ \lambda_{S,y} + 2(N-j)(1-\lambda_{S,y})N^{-1} & \text{für } j = N/2 + 1, \dots, N \end{cases}$$

Die Gitterschrittweiten sind $h_{x,i} := x_i - x_{i-1}$ und $h_{y,j} := y_j - y_{j-1}$. Da die Shishkin-Gitter $\Omega_{x,S}^N$ und $\Omega_{y,S}^N$ stückweise äquidistant sind, wählen wir für $i, j = 1, \dots, N/2$ die Kurznotation $h_x := h_{x,i}$ bzw. $h_y := h_{y,j}$ und $H_x := h_{x,i+N/2}$ bzw. $H_y := h_{y,j+N/2}$. Es gelten die Beziehungen

$$H_x = 2(1 - \lambda_{S,x})/N, \quad h_x = 2\lambda_{S,x}/N \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N, \quad (5.14a)$$

$$H_y = 2(1 - \lambda_{S,y})/N, \quad h_y = 2\lambda_{S,y}/N \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N. \quad (5.14b)$$

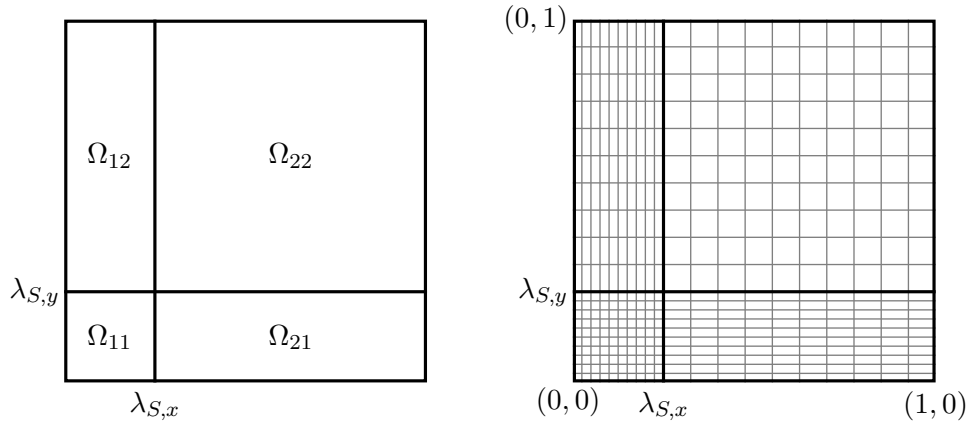


Abbildung 5.1: Die Aufteilung des Gebietes Ω (Bild links) und das Shishkin-Gitter Ω_S^N für $N = 20$ (Bild rechts).

Damit die Grenzschichtanteile der exakten Lösung u von (5.12) außerhalb ihrer jeweiligen Einflußgebiete bereits klein von der im Beweis der Sätze 5.2, 5.3 bzw. 5.4 benötigten Ordnung $\mathcal{O}(N^{-3})$ sind, treffen wir

Voraussetzung 4: Für $\nu = 1, 2$ gelte $\lambda_{0,\nu} \geq 3$.

Auf dem Shishkin-Gitter Ω_S^N können wir nur für die Eckgrenzschicht E_{12} und ihre Approximation E_{12}^{dc} ein Konvergenzresultat beweisen. Für alle anderen Lösungsanteile werden wir formal geeignete Tensorproduktgitter mit Shishkin-Gitter-Struktur in Grenzschichtrichtung konstruieren (vgl. Abbildung 5.2) und die Konvergenz der (formal) darauf gewonnenen Approximationen gegen den entsprechenden Lösungsanteil zeigen. Diese Einschränkungen sind unserer mangelhaften Beweistechnik geschuldet. Für praktische Rechnungen wäre die Verwendung derartiger Gitter nur dann sinnvoll, wenn wir die definierenden Gleichungen für S , E_1 und E_2 mit Lösungen von der benötigten Glätte explizit angeben – und somit einzeln numerisch behandeln – könnten.

Bemerkung 5.3 Die explizite Konstruktion einer Shishkin-Typ-Zerlegung wird in [90] für Probleme mit parabolischen Grenzschichten behandelt. Die dort nachgewiesene Glätte bzw. Beschränktheit der Lösungsanteile im Sinne der Ungleichungen (5.13b)–(5.13d) genügt nicht den in der vorliegenden Arbeit benötigten Voraussetzungen. Mit relativ hohem technischen Aufwand lassen sich nach dem in [90] verwendeten Prinzip möglicherweise auch explizite Vorschriften zur Berechnung von Lösungsanteilen herleiten, die strengeren Glattheitsforderungen genügen. \square

5.3.2 Der Kommutant von L^u und $L^u - L^c$ und andere Hilfsmittel

In Analogie zur Shishkin-Typ-Zerlegung (5.13) für die exakte Lösung u von (5.12) zerlegen wir die Upwind-Approximation u^u aus (2.50) wie in Gleichung (2.57) angegeben. Aufgrund der Linearität des Defektkorrekturverfahrens existiert weiterhin eine Aufspaltung

$$u^{dc} = S^{dc} + E_1^{dc} + E_2^{dc} + E_{12}^{dc} \quad (5.15a)$$

der korrigierten Approximation u^{dc} aus (5.1). Die Summanden $S^{dc}, E_1^{dc}, E_2^{dc}$ und E_{12}^{dc} ergeben sich als Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} L^u S_{ij}^{dc} &= (L^u - L^c)S_{ij}^u + \widehat{\mathcal{L}}\widehat{S}_{ij} && \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N, \\ S_{ij}^{dc} &= S(x_i, y_j) && \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N \quad \text{und} \end{aligned} \quad (5.15b)$$

$$\begin{aligned} L^u E_{\nu,ij}^{dc} &= (L^u - L^c)E_{\nu,ij}^u + \widehat{\mathcal{L}}\widehat{E}_{\nu,ij} && \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega^N, \\ E_{\nu,ij}^{dc} &= E_\nu(x_i, y_j) && \text{für } (x_i, y_j) \in \Gamma^N, \quad (\nu = 1, 2, 12). \end{aligned} \quad (5.15c)$$

Die Voraussetzung 2 und die Darstellung (5.15a) erlauben uns folgende Aufspaltung des Verfahrensfehlers:

$$|\hat{u} - u^{dc}| \leq |\hat{S} - S^{dc}| + |\hat{E}_1 - E_1^{dc}| + |\hat{E}_2 - E_2^{dc}| + |\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}|. \quad (5.16)$$

Für die Summanden der rechten Seite von (5.16) werden wir im folgenden unter Ausnutzung ihrer spezifischen Eigenschaften im Rahmen der Gültigkeit des Beweisprinzips aus Abschnitt 5.2.3 Oberschranken von (fast) zweiter Ordnung nachweisen.

Bemerkung 5.4 Wir verwenden in (5.15) die allgemeine Bezeichnung Ω^N für das Gitter, da wir formal bei der folgenden Konvergenzanalyse vier verschiedene Diskretisierungen auf unterschiedlichen Gittern betrachten. Jeweils nur für einen Anteil der erhaltenen Approximation u^{dc} können wir auf dem aktuellen Gitter Konvergenz nachweisen. \square

Ausgangspunkt der Konvergenzanalyse für die Fehleranteile des Defektkorrekturverfahrens (5.1) ist die Abschätzung des Konsistenzfehlers $\tau^{dc} = L^u(u - u^{dc})$. Aus Gleichung (3.6) folgt die Darstellung (5.4), die wir meist zur Analyse des Konsistenzfehlers heranziehen werden.

Gemäß den Voraussetzungen 2 und 4 sind die Grenzschnittfunktionen E_1, E_2 und E_{12} auf Teilen der zugehörigen Gitter durch $CN^{-\lambda_{0,\nu}}$ ($\nu = 1, 2$) nach oben beschränkt. In diesen Fällen werden wir

$$\tau^{dc} := L^u(\hat{u} - u^{dc})$$

unmittelbar mit Hilfe der Dreiecksungleichung abschätzen.

Der Kommutant von L^u und $L^u - L^c$

Für die Differenzenoperatoren L^u , definiert in (2.50), und $L^u - L^c$, definiert in (5.5), beweisen wir auf einem beliebigen Gitter $\Omega_b^N = \{(x_i, y_j) \in \Omega, i, j = 1, \dots, N-1\}$ und für variable, positive Koeffizienten b_1 und b_2 (wie in (1.8)) folgende Kommutativitätsaussage:

Lemma 5.1 *Für eine beliebige Gitterfunktion g gilt im Gitterpunkt $(x_i, y_j) \in \Omega_b^N$*

$$L^u(L^u - L^c)g_{ij} = (L^u - L^c)L^u g_{ij}$$

genau dann, wenn die Bedingungen

$$(a) \quad \begin{aligned} h_{x,i+2} &= h_{x,i+1} = h_{x,i} = h_{x,i-1} \quad \text{und} \\ h_{y,j+2} &= h_{y,j+1} = h_{y,j} = h_{y,j-1} \end{aligned}$$

sowie

$$(b) \quad \begin{aligned} D_x^+ b_{1,ij} &= D_x^- b_{1,ij} = D_y^+ b_{1,ij} = D_y^- b_{1,ij} = 0 \quad \text{und} \\ D_x^+ b_{2,ij} &= D_x^- b_{2,ij} = D_y^+ b_{2,ij} = D_y^- b_{2,ij} = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Vorbereitend zum Beweis von Lemma 5.1 tragen wir einige Aussagen zur Arithmetik von Differenzenoperatoren zusammen:

Lemma 5.2 *Es seien v und w Gitterfunktionen über einem beliebigen Rechteckgitter. Dann gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & D_x^+(v_{ij}w_{ij}) = w_{i+1,j}D_x^+v_{ij} + v_{ij}D_x^+w_{ij} && \text{und} \\
& D_y^+(v_{ij}w_{ij}) = w_{i,j+1}D_y^+v_{ij} + v_{ij}D_y^+w_{ij}, \\
(ii) \quad & D_x^-(v_{ij}w_{ij}) = w_{i-1,j}D_x^-v_{ij} + v_{ij}D_x^-w_{ij} && \text{und} \\
& D_y^-(v_{ij}w_{ij}) = w_{i,j-1}D_y^-v_{ij} + v_{ij}D_y^-w_{ij}, \\
(iii) \quad & h_{x,i+1}D_x^+D_x^-w_{ij} = h_{x,i}D_x^-D_x^+w_{ij} && \text{und} \\
& h_{y,j+1}D_y^+D_y^-w_{ij} = h_{y,j}D_y^-D_y^+w_{ij}
\end{aligned}$$

sowie

$$(iv) \quad D_x^+D_y^-w_{ij} = D_y^-D_x^+w_{ij} \quad \text{und} \quad D_x^+D_y^+w_{ij} = D_y^+D_x^+w_{ij}.$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die Gültigkeit der jeweils ersten Beziehung:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & D_x^+(v_{ij}w_{ij}) = h_{x,i+1}^{-1}(v_{i+1,j}w_{i+1,j} - \mathbf{v}_{ij}\mathbf{w}_{i+1,j} + \mathbf{v}_{ij}\mathbf{w}_{i+1,j} - v_{ij}w_{ij}) \\
& = w_{i+1,j}D_x^+v_{ij} + v_{ij}D_x^+w_{ij}, \\
(ii) \quad & D_x^-(v_{ij}w_{ij}) = h_{x,i}^{-1}(v_{ij}w_{ij} - \mathbf{v}_{ij}\mathbf{w}_{i-1,j} + \mathbf{v}_{ij}\mathbf{w}_{i-1,j} - v_{i-1,j}w_{i-1,j}) \\
& = w_{i-1,j}D_x^-v_{ij} + v_{ij}D_x^-w_{ij}, \\
(iii) \quad & D_x^+D_x^-w_{ij} = h_{x,i+1}^{-1}(D_x^-w_{i+1,j} - D_x^-w_{ij}) = h_{x,i+1}^{-1}(D_x^+w_{ij} - D_x^+w_{i-1,j}) \\
& = h_{x,i+1}^{-1}h_{x,i}D_x^-D_x^+w_{ij}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
(iv) \quad & D_x^+D_y^-w_{ij} = h_{x,i+1}^{-1}h_{y,j}^{-1}(w_{i+1,j} - w_{i+1,j-1} - w_{ij} + w_{i,j-1}) \\
& = h_{x,i+1}^{-1}h_{y,j}^{-1}(w_{i+1,j} - w_{ij} - w_{i+1,j-1} + w_{i,j-1}) = D_y^-D_x^+w_{ij}.
\end{aligned}$$

Die verbleibenden Aussagen werden in gleicher Weise bewiesen. ■

Beweis von Lemma 5.1: Wir benutzen Lemma 5.2, um den Term $L^u(L^u - L^c)g_{ij}$ umzuformen und erhalten die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
L^u(L^u - L^c)g_{ij} = & \\
& \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}}(D_x^+ - D_x^-) \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}}(D_x^+g_{ij} - D_x^-g_{ij}) + \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}}(D_y^+g_{ij} - D_y^-g_{ij}) \right) + \\
& \frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}}(D_y^+ - D_y^-) \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}}(D_x^+g_{ij} - D_x^-g_{ij}) + \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}}(D_y^+g_{ij} - D_y^-g_{ij}) \right) + \\
& b_{1,ij}D_x^+ \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}}(D_x^+g_{ij} - D_x^-g_{ij}) + \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}}(D_y^+g_{ij} - D_y^-g_{ij}) \right) + \\
& b_{2,ij}D_y^+ \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}}(D_x^+g_{ij} - D_x^-g_{ij}) + \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}}(D_y^+g_{ij} - D_y^-g_{ij}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} \left\{ D_x^+ \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i+1,j} - D_x^- g_{i+1,j}) + \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_x^+ D_x^+ g_{ij} - D_x^+ D_x^- g_{ij}) - \right. \\
&D_x^- \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i-1,j} - D_x^- g_{i-1,j}) - \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_x^- D_x^+ g_{ij} - D_x^- D_x^- g_{ij}) + \\
&D_x^+ \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i+1,j} - D_y^- g_{i+1,j}) + \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_x^+ D_y^+ g_{ij} - D_x^+ D_y^- g_{ij}) - \\
&D_x^- \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i-1,j} - D_y^- g_{i-1,j}) - \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_x^- D_y^+ g_{ij} - D_x^- D_y^- g_{ij}) \left. \right\} + \\
&\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} \left\{ D_y^+ \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i,j+1} - D_x^- g_{i,j+1}) + \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_y^+ D_x^+ g_{ij} - D_y^+ D_x^- g_{ij}) - \right. \\
&D_y^- \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i,j-1} - D_x^- g_{i,j-1}) - \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_y^- D_x^+ g_{ij} - D_y^- D_x^- g_{ij}) + \\
&D_y^+ \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i,j+1} - D_y^- g_{i,j+1}) + \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_y^+ D_y^+ g_{ij} - D_y^+ D_y^- g_{ij}) - \\
&D_y^- \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i,j-1} - D_y^- g_{i,j-1}) - \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_y^- D_y^+ g_{ij} - D_y^- D_y^- g_{ij}) \left. \right\} + \\
&b_{1,ij} \left\{ D_x^+ \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i+1,j} - D_x^- g_{i+1,j}) + \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_x^+ D_x^+ g_{ij} - D_x^+ D_x^- g_{ij}) + \right. \\
&D_x^- \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i+1,j} - D_y^- g_{i+1,j}) + \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_x^+ D_y^+ g_{ij} - D_x^+ D_y^- g_{ij}) \left. \right\} + \\
&b_{2,ij} \left\{ D_y^+ \left(\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i,j+1} - D_x^- g_{i,j+1}) + \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_y^+ D_x^+ g_{ij} - D_y^+ D_x^- g_{ij}) + \right. \\
&D_y^- \left(\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i,j+1} - D_y^- g_{i,j+1}) + \frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_y^+ D_y^+ g_{ij} - D_y^+ D_y^- g_{ij}) \left. \right\}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

In derselben Weise behandeln wir $(L^u - L^c)L^u g_{ij}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&(L^u - L^c)L^u g_{ij} = \\
&\frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} (D_x^+ - D_x^-) \left\{ \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} (D_x^+ g_{ij} - D_x^- g_{ij}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} (D_y^+ g_{ij} - D_y^- g_{ij}) \right\} + \\
&\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} (D_y^+ - D_y^-) \left\{ \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} (D_x^+ g_{ij} - D_x^- g_{ij}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} (D_y^+ g_{ij} - D_y^- g_{ij}) \right\} \\
&= \frac{b_{1,ij} h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \left\{ D_x^+ \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i+1,j} - D_x^- g_{i+1,j}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} (D_x^+ D_x^+ g_{ij} - D_x^+ D_x^- g_{ij}) - \right. \\
&D_x^- \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+ g_{i-1,j} - D_x^- g_{i-1,j}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} (D_x^- D_x^+ g_{ij} - D_x^- D_x^- g_{ij}) + \\
&\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} (D_x^+ D_y^+ g_{ij} - D_x^+ D_y^- g_{ij} - D_x^- D_y^+ g_{ij} + D_x^- D_y^- g_{ij}) \left. \right\} + \\
&\frac{b_{2,ij} h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \left\{ \frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} (D_y^+ D_x^+ g_{ij} - D_y^+ D_x^- g_{ij} - D_y^- D_x^+ g_{ij} + D_y^- D_x^- g_{ij}) - \right. \\
&D_y^+ \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i,j+1} - D_y^- g_{i,j+1}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} (D_y^+ D_y^+ g_{ij} - D_y^+ D_y^- g_{ij}) + \\
&D_x^- \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+ g_{i,j-1} - D_y^- g_{i,j-1}) + \frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} (D_y^- D_y^+ g_{ij} - D_y^- D_y^- g_{ij}) \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \left\{ D_x^+(b_{1,ij})D_x^+g_{i+1,j} + b_{1,ij}D_x^+D_x^+g_{ij} + D_x^+(b_{2,ij})D_y^+g_{i+1,j} + b_{2,ij}D_x^+D_y^+g_{ij} - \right. \\
& D_x^-(b_{1,ij})D_x^+g_{i-1,j} - b_{1,ij}D_x^-D_x^+g_{ij} - D_x^-(b_{2,ij})D_y^+g_{i-1,j} - b_{2,ij}D_x^-D_y^+g_{ij} \left. \right\} + \\
& \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \left\{ D_y^+(b_{1,ij})D_y^+g_{i,j+1} + b_{1,ij}D_y^+D_x^+g_{ij} + D_y^+(b_{2,ij})D_y^+g_{i,j+1} + b_{2,ij}D_y^+D_y^+g_{ij} - \right. \\
& D_y^-(b_{1,ij})D_x^+g_{i,j-1} - b_{1,ij}D_y^-D_x^+g_{ij} - D_y^-(b_{2,ij})D_y^+g_{i,j-1} - b_{2,ij}D_y^-D_y^+g_{ij} \left. \right\}. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Aus (5.17) und (5.18) ergibt sich nach geeigneter Zusammenfassung passender Terme folgende Darstellung des Kommutanten:

$$\begin{aligned}
L^u(L^u - L^c)g_{ij} - (L^u - L^c)L^u g_{ij} = & \\
& \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} D_x^+ \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) - \varepsilon \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} D_x^+ \left(\frac{1}{\hbar_{x,i}} \right) \right) (D_x^+g_{i+1,j} - D_x^-g_{i+1,j}) - \\
& \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{x,i}} D_x^- \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) - \varepsilon \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} D_x^- \left(\frac{1}{\hbar_{x,i}} \right) \right) (D_x^+g_{i-1,j} - D_x^-g_{i-1,j}) + \\
& \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} D_y^+ \left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) - \varepsilon \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} D_y^+ \left(\frac{1}{\hbar_{y,j}} \right) \right) (D_y^+g_{i,j+1} - D_y^-g_{i,j+1}) - \\
& \left(\frac{\varepsilon}{\hbar_{y,j}} D_y^- \left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) - \varepsilon \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} D_y^- \left(\frac{1}{\hbar_{y,j}} \right) \right) (D_y^+g_{i,j-1} - D_y^-g_{i,j-1}) + \\
& \frac{\varepsilon h_{y,j}}{\hbar_{x,i}\hbar_{y,j}} (D_x^+(b_{2,ij})(D_y^+g_{i+1,j} - D_y^-g_{i+1,j}) - D_x^-(b_{2,ij})(D_y^+g_{i-1,j} - D_y^-g_{i-1,j})) + \\
& \frac{\varepsilon h_{x,i}}{\hbar_{x,i}\hbar_{y,j}} (D_y^+(b_{1,ij})(D_x^+g_{i,j+1} - D_x^-g_{i,j+1}) - D_y^-(b_{1,ij})(D_x^+g_{i,j-1} - D_x^-g_{i,j-1})) + \\
& b_{1,ij} \left(D_x^+ \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+g_{i+1,j} - D_x^-g_{i+1,j}) + D_x^+ \left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+g_{i+1,j} - D_y^-g_{i+1,j}) \right) \\
& + b_{2,ij} \left(D_y^+ \left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \right) (D_x^+g_{i,j+1} - D_x^-g_{i,j+1}) + D_y^+ \left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \right) (D_y^+g_{i,j+1} - D_y^-g_{i,j+1}) \right) \\
& - \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\hbar_{x,i}} \left(D_x^+(b_{1,ij})D_x^+g_{i+1,j} + D_x^+(b_{2,ij})D_y^+g_{i+1,j} - D_x^-(b_{1,ij})D_x^+g_{i-1,j} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - D_x^-(b_{2,ij})D_y^+g_{i-1,j} \right) \\
& - \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\hbar_{y,j}} \left(D_y^+(b_{1,ij})D_x^+g_{i,j+1} + D_y^+(b_{2,ij})D_y^+g_{i,j+1} - D_y^-(b_{1,ij})D_x^+g_{i,j-1} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - D_y^-(b_{2,ij})D_y^+g_{i,j-1} \right). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Bevor wir den Beweis von Lemma 5.1 fortsetzen, gestatten wir uns folgende

Bemerkung 5.5 Betrachtet man die einzelnen Summanden des in (5.19) beschriebenen Kommutanten näher, so stellt man fest, daß sie eine ähnliche Struktur bezüglich der Gitterfunktion g aufweisen wie $(L^u - L^c)g_{ij}$ in (5.5) selbst. Für allgemeine Gitter und beliebige (positive) Vektorfunktionen \mathbf{b} wird unser „Trick“ der erneuten Anwendung von L^u auf $(L^u - L^c)g_{ij}$ offenbar nicht zu einer einfacheren Darstellung des relativen Konsistenzfehlers führen. \square

Wir wollen nun die Frage beantworten, unter welchen Voraussetzungen an b_1, b_2 und das Gitter Ω^N die Operatoren L^u und $(L^u - L^c)$ angewendet auf eine beliebige Gitterfunktion g vertauschbar sind, d. h., es gilt $L^u(L^u - L^c)g_{ij} - (L^u - L^c)L^u g_{ij} = 0$: Gemäß den Voraussetzungen an die Koeffizienten von Problem (1.8) (in Verallgemeinerung von (5.12)) sind die Ungleichungen $b_{1,ij} > 0$ und $b_{2,ij} > 0$ für alle $i, j \in \{0, \dots, N\}$

sowie $\varepsilon > 0$ erfüllt. Ferner ist klar, daß die Schrittweiten $h_{x,i}$ und $h_{y,j}$ stets positiv sind. Ein Koeffizientenvergleich der Differenzenquotienten von g in (5.19) liefert folgende Bedingungen für die Kommutativität von L^u und $(L^u - L^c)$:

$$D_x^+(b_{1,ij}) = D_x^-(b_{1,ij}) = 0 \quad \text{und} \quad D_y^+(b_{1,ij}) = D_y^-(b_{1,ij}) = 0, \quad (5.20a)$$

$$D_x^+(b_{2,ij}) = D_x^-(b_{2,ij}) = 0 \quad \text{und} \quad D_y^+(b_{2,ij}) = D_y^-(b_{2,ij}) = 0, \quad (5.20b)$$

$$D_x^+\left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad D_y^+\left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}}\right) = 0, \quad (5.20c)$$

$$D_x^+\left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad D_y^+\left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}}\right) = 0 \quad (5.20d)$$

sowie

$$\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{x,i}} D_x^+\left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}}\right) - \varepsilon \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}} D_x^+\left(\frac{1}{\bar{h}_{x,i}}\right) = 0, \quad (5.21a)$$

$$\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{x,i}} D_x^-\left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}}\right) - \varepsilon \frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}} D_x^-\left(\frac{1}{\bar{h}_{x,i}}\right) = 0, \quad (5.21b)$$

$$\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{y,j}} D_y^+\left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}}\right) - \varepsilon \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}} D_y^+\left(\frac{1}{\bar{h}_{y,j}}\right) = 0, \quad (5.21c)$$

$$\frac{\varepsilon}{\bar{h}_{y,j}} D_y^-\left(\frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}}\right) - \varepsilon \frac{b_{2,ij}h_{y,j}}{2\bar{h}_{y,j}} D_y^-\left(\frac{1}{\bar{h}_{y,j}}\right) = 0. \quad (5.21d)$$

Die Gleichungen (5.20a) und (5.20b) entsprechen der Bedingung (b) des Lemmas 5.1. Sie gelten genau dann, wenn

$$b_{1,i-1,j} = b_{1,ij} = b_{1,i+1,j} = b_{1,i,j-1} = b_{1,i,j+1} \quad \text{und} \quad (5.22a)$$

$$b_{2,i-1,j} = b_{2,ij} = b_{2,i+1,j} = b_{2,i,j-1} = b_{2,i,j+1}. \quad (5.22b)$$

Aus (5.22) und (5.20c) ergibt sich auf folgende Weise eine Schrittweitenbedingung: Die Beziehung

$$D_x^+\left(\frac{b_{1,ij}h_{x,i}}{2\bar{h}_{x,i}}\right) = \frac{b_{1,ij}}{\bar{h}_{x,i+1}} \left(\frac{h_{x,i+1}}{\bar{h}_{x,i+1}} - \frac{h_{x,i}}{\bar{h}_{x,i}}\right) = 0$$

ist äquivalent zur Gleichung

$$(h_{x,i+1})^2 = h_{x,i}h_{x,i+2}. \quad (5.23a)$$

Analog leitet man aus (5.22) und (5.20d) die Beziehung

$$(h_{y,j+1})^2 = h_{y,j}h_{y,j+2} \quad (5.23b)$$

ab. Nach kurzer Rechnung erhalten wir aus (5.21a) und (5.22) die Bedingung

$$\frac{\varepsilon b_{1,ij}}{\bar{h}_{x,i}h_{x,i+1}} \left(\frac{h_{x,i+1} - h_{x,i}}{\bar{h}_{x,i+1}}\right) = 0,$$

also $h_{x,i+1} = h_{x,i}$. In derselben Weise schließen wir aus (5.21b) und (5.22) die Beziehung $h_{x,i-1} = h_{x,i}$ und aus (5.21c) bzw. (5.21d) und (5.22) die Gleichung $h_{y,j+1} = h_{y,j} = h_{y,j-1}$. Zusammen mit (5.23a) und (5.23b) ergeben sich die Bedingungen

$$h_{x,i+2} = h_{x,i+1} = h_{x,i} = h_{x,i-1} \quad \text{und} \quad (5.24a)$$

$$h_{y,j+2} = h_{y,j+1} = h_{y,j} = h_{y,j-1}. \quad (5.24b)$$

Wir haben also durch äquivalente Umformungen nachgewiesen, daß L^u und $(L^u - L^c)$, angewendet auf eine beliebige Gitterfunktion g in einem Gitterpunkt (x_i, y_j) , genau dann kommutieren, wenn die Bedingungen (a) und (b) von Lemma 5.1 erfüllt sind. ■

Bemerkung 5.6 Für die in Abschnitt 5.2.3 vorgeschlagene Beweistechnik ist es notwendig, daß L^u und $(L^u - L^c)$ vertauschbar sind. Für Bedingung (b) ist die Voraussetzung 1 hinreichend. Wegen Bedingung (a) können wir für den glatten Anteil S der exakten Lösung von Problem (5.12) mittels der beschriebenen Idee nur auf einem äquidistanten Gitter die Konvergenz des Verfahrens (5.1) nachweisen. Die Grenzschichtanteile der exakten Lösung sind gemäß Lemma 2.11 und Voraussetzung 4 außerhalb ihrer Einflußregionen klein. Folglich können wir – dem Grenzschichtverhalten angepaßt – für die Analyse dieser Lösungsanteile Tensorproduktgitter mit Shishkin-Gittern in Grenzschichtrichtung verwenden. Im Inneren des zugehörigen feinen Gitters ($i \in \{1, \dots, N/2 - 2\}$ oder $j \in \{1, \dots, N/2 - 2\}$), wo Bedingung (a) erfüllt ist, ist die in Abschnitt 5.2.3 beschriebene Technik zum Nachweis der Konvergenz des Verfahrens (5.1) anwendbar. \square

Integraldarstellungen

Wir werden im folgenden mehrfach von den in Lemma 5.3 beschriebenen Integraldarstellungen Gebrauch machen:

Lemma 5.3 Die Funktion $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

(i) Dann gelten die Beziehungen

$$(D_x^+ - D_x^-) \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} g(t, y) dt d\xi \right] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} (D_x^+ - D_x^-) g(t, y) dt d\xi, \quad (5.25a)$$

$$(D_x^+ - D_x^-) \left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} g(x, t) dt d\xi \right] = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} (D_x^+ - D_x^-) g(x, t) dt d\xi, \quad (5.25b)$$

$$(D_y^+ - D_y^-) \left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} g(x, t) dt d\xi \right] = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} (D_y^+ - D_y^-) g(x, t) dt d\xi, \quad (5.25c)$$

und

$$(D_y^+ - D_y^-) \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} g(t, y) dt d\xi \right] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} (D_y^+ - D_y^-) g(t, y) dt d\xi. \quad (5.25d)$$

(ii) Existieren ferner alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von g und sind diese stetig, dann gibt es Konstanten $\theta_1, \dots, \theta_4 \in (0, 1)$ so, daß die Gleichungen

$$D_x^+ g(x_i, y) - D_x^- g(x_i, y) = \int_{x_i - \theta_1 h_{x,i}}^{x_i + \theta_2 h_{x,i+1}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\xi, y) d\xi \quad \text{und} \quad (5.26a)$$

$$D_y^+ g(x, y_j) - D_y^- g(x, y_j) = \int_{y_j - \theta_3 h_{y,j}}^{y_j + \theta_4 h_{y,j+1}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, \eta) d\eta \quad (5.26b)$$

erfüllt sind.

Beweis. (i) Die zweite und vierte Gleichung ergeben sich unmittelbar. Um die erste Gleichung zu erhalten, transformiert man zunächst die Variable $t \rightarrow t + h_{x,i+1}$ bzw.

$t \mapsto t - h_{x,i}$ und erhält somit

$$\begin{aligned}
& (D_x^+ - D_x^-) \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} g(t, y) dt d\xi \right] \\
&= \frac{1}{h_{x,i+1}} \left(\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \int_{x_{i+1}}^{\xi+h_{x,i+1}} g(t, y) dt d\xi - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} g(t, y) dt d\xi \right) \\
&\quad - \frac{1}{h_{x,i}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} g(t, y) dt d\xi - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_{i-1}}^{\xi-h_{x,i}} g(t, y) dt d\xi \right) \\
&= \frac{1}{h_{x,i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} (g(t + h_{x,i+1}, y) - g(t, y)) dt d\xi \\
&\quad - \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} (g(t, y) - g(t - h_{x,i}, y)) dt d\xi \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} (D_x^+ - D_x^-) g(t, y) dt d\xi.
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung leitet man analog her.

(ii) Die Gleichungen (5.26) folgen aus dem Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung, denn es gilt

$$\begin{aligned}
D_x^+ g(x_i, y) - D_x^- g(x_i, y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_i + \theta_2 h_{x,i+1}, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_i - \theta_1 h_{x,i}, y) \\
&= \int_{x_i - \theta_1 h_{x,i}}^{x_i + \theta_2 h_{x,i+1}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\xi, y) d\xi
\end{aligned}$$

und eine entsprechende Beziehung für $D_y^+ g(x, y_j) - D_y^- g(x, y_j)$. ■

In Vorbereitung der folgenden Beweise führen wir der Übersichtlichkeit halber schließlich die Bezeichnungen

$$\mathcal{L}_x = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_y = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.27a)$$

sowie

$$L_x^u = -\varepsilon \delta_x^2 + b_1 D_x^- \quad \text{und} \quad L_y^u = -\varepsilon \delta_y^2 + b_2 D_y^- \quad (5.27b)$$

ein. Es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_y$ und $L^u = L_x^u + L_y^u$.

5.3.3 Konvergenzaussagen für die Lösungsanteile von u

Eine Konvergenzaussage für den glatten Anteil S

Wie bereits in Bemerkung 5.6 erläutert, müssen wir unsere Betrachtungen bezüglich des glatten Anteils S der Lösung u von (5.12) und seiner gemäß (5.15b) definierten Approximation S^{dc} auf ein Gitter $\bar{\Omega}_u^N \subset \bar{\Omega}$ beschränken, das sich als Tensorprodukt zweier äquidistanter Gitter $\bar{\Omega}_{x,u}^N$ mit Schrittweite $\bar{h}_x \leq CN_x^{-1}$ und $\bar{\Omega}_{y,u}^N$ mit Schrittweite $\bar{h}_y \leq CN_y^{-1}$ ($C > 0$) ergibt. Dabei genügen N_x und N_y der Voraussetzung 3, und wir setzen $N := \min\{N_x, N_y\}$.

Satz 5.1 *Auf dem uniformen Gitter $\bar{\Omega}_u^N$ genügt der Fehler $\hat{S} - S^{dc}$ des Defektkorrekturverfahrens (5.1) der Abschätzung*

$$\|\hat{S} - S^{dc}\|_{\infty, d} \leq CN^{-2}.$$

Beweis: Wir gehen von der Darstellung (5.4) des Konsistenzfehlers $\tau^{dc,S}$ des Defektkorrekturverfahrens aus. Voraussetzung 2 liefert uns die erforderliche Glattheit von S , um auf dem uniformen Gitter Ω_u^N aus Lemma 2.15 und Voraussetzung 3 die Konsistenz zweiter Ordnung des zentralen Differenzenverfahrens (2.70) abzuleiten. Es gilt

$$|(L^c \hat{S} - \widehat{\mathcal{L}S})_{ij}| = |L^c(\hat{S} - S^c)_{ij}| \leq CN^{-2}. \quad (5.28)$$

Wir wenden uns nun der Abschätzung des relativen Konsistenzfehlers $\tau^{rel,S}$ zu. Wegen Voraussetzung 1 und der Verwendung von Ω_u^N sind die Voraussetzung der Kommutativitätsaussage aus Lemma 5.1 zunächst für $i = 2, \dots, N-2$ erfüllt. Wir erweitern das Gitter $\widehat{\Omega}_u^N$ zu

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_u^N &= \bar{\Omega}_u^N \cup \{(x_{-1}, y_j) = (-\hbar_x, y_j), (x_{N+1}, y_j) = (1 + \hbar_x, y_j) : j = 0, \dots, N\} \\ &\cup \{(x_i, y_{-1}) = (x_i, -\hbar_y), (x_i, y_{N+1}) = (x_i, 1 + \hbar_y) : i = 0, \dots, N\} \end{aligned}$$

und setzen die Gitterfunktion $\hat{S} - S^u$ antisymmetrisch auf den Rand von $\widehat{\Omega}_u^N$ fort⁷, d.h., wir definieren

$$\begin{aligned} (\hat{S} - S^u)_{-1,j} &:= -(\hat{S} - S^u)_{1,j} \text{ und } (\hat{S} - S^u)_{N+1,j} := -(\hat{S} - S^u)_{N-1,j} \quad \text{für } j = 0, \dots, N, \\ (\hat{S} - S^u)_{i,-1} &:= -(\hat{S} - S^u)_{i,1} \text{ und } (\hat{S} - S^u)_{i,N+1} := -(\hat{S} - S^u)_{i,N-1} \quad \text{für } i = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Auf dem erweiterten Gitter $\widehat{\Omega}_u^N$ gilt die Bedingung (a) des Lemmas 5.1 in jedem inneren Punkt von Ω_u^N , also für $i, j = 1, \dots, N-1$. Außerdem ist die Fortsetzung von $\hat{S} - S^u$ auf den Rand von $\widehat{\Omega}_u^N$ so gewählt, daß $\tau^{rel,S}$ dort der Bedingung

$$\tau^{rel,S} = (L^u - L^c)(\hat{S} - S^u) = 0 \quad (5.29)$$

genügt.

Der in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Idee folgend, wenden wir auf den relativen Konsistenzfehler $\tau^{rel,S}$ den Upwind-Operator L^u an. Aus Lemma 5.1 und Gleichung (5.5) folgt unter Verwendung der Notation (5.27) die Gültigkeit der Darstellung

$$\begin{aligned} |L^u(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)_{ij}| &= |(L^u - L^c)L^u(\hat{S} - S^u)_{ij}| \\ &= \left| \left(-\frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-) - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-) \right) (L^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}S}_{ij}) \right| \\ &= \left| -\frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-)(L_x^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}_x S}_{ij}) - \frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-)(L_y^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}_y S}_{ij}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-)(L_x^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}_x S}_{ij}) - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-)(L_y^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}_y S}_{ij}) \right|. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Setzen wir nun die Gleichung (2.55) für den Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens $L^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}S}_{ij}$ ein und wenden dann Lemma 5.3 an, so ergeben sich für die einzelnen

⁷Per Definition von S^u gilt $\hat{S} - S^u = 0$ auf $\Gamma_u^N = \partial\Omega_u^N$.

Summanden in (5.30) die Ungleichungsketten

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_x^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x S_{ij}) \right| \\
&= \left| -\frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) \left\{ -\frac{b_1}{\hbar_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, y_j) dt d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\hbar_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right) \right\} \right| \\
&= \left| \frac{b_1^2}{2\hbar_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{t-\theta_1\hbar_x}^{t+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^4 S}{\partial x^4}(\tau, y_j) d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_1\varepsilon}{2\hbar_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{\tau-\theta_1\hbar_x}^{\tau+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^5 S}{\partial x^5}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{\tau-\theta_1\hbar_x}^{\tau+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^5 S}{\partial x^5}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \right| \\
&\leq C \left\| \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} \right\|_{\infty} (\hbar_x^2 + \varepsilon\hbar_x) \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{5.31a}$$

und

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_y^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y S_{ij}) \right| \\
&= \left| -\frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) \left\{ -\frac{b_2}{\hbar_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x_i, t) dt d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\hbar_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 S}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi + \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \frac{\partial^3 S}{\partial y^3}(x_i, \tau) d\tau dt d\xi \right) \right\} \right| \\
&= \left| \frac{b_1 b_2}{2\hbar_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{x_i-\theta_1\hbar_x}^{x_i+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2}(\eta, t) d\eta dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_1\varepsilon}{2\hbar_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i-\theta_1\hbar_x}^{x_i+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^5 S}{\partial x^2 \partial y^3}(\eta, \tau) d\eta d\tau dt d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i-\theta_1\hbar_x}^{x_i+\theta_2\hbar_x} \frac{\partial^5 S}{\partial x^2 \partial y^3}(\eta, \tau) d\eta d\tau dt d\xi \right) \right| \\
&\leq C \left\| \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{\infty} (\hbar_x \hbar_y + \varepsilon\hbar_x) \\
&\leq CN^{-2}.
\end{aligned} \tag{5.31b}$$

Dabei können θ_1 und θ_2 an jeder Stelle ihres Auftretens verschiedene Werte aus dem Intervall $(0, 1)$ annehmen. In derselben Weise leitet man die Abschätzungen

$$\left| \frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_x^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x S_{ij}) \right| \leq C \left\| \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{\infty} (\hbar_x \hbar_y + \varepsilon\hbar_y) \leq CN^{-2}. \tag{5.31c}$$

und

$$\left| -\frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_y^u \hat{S}_{ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y S_{ij}) \right| \leq C \left\| \frac{\partial^4 S}{\partial y^4} \right\|_{\infty} (\hbar_y^2 + \varepsilon\hbar_y) \leq CN^{-2} \tag{5.31d}$$

her. Fassen wir (5.31a) – (5.31d) zusammen, so erhalten wir in jedem inneren Gitterpunkt von Ω_u^N die Abschätzung

$$|L^u(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq CN^{-2}. \quad (5.32)$$

Der Upwind-Operator L^u erfüllt gemäß Satz 2.11 ein diskretes Vergleichsprinzip. Wir wählen die Schrankenfunktion w , definiert durch

$$w_{ij} := C_w N^{-2}(1 + x_i)(1 + y_j). \quad (5.33)$$

Es gilt laut (5.29) die Ungleichung $|(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq w_{ij}$ für alle $(x_i, y_j) \in \Gamma_u^N$. Ferner folgt aus (5.32) für eine geeignet gewählte Konstante $C_w > 0$ die Abschätzung

$$|L^u(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq L^u w_{ij} = CN^{-2}.$$

Mit Hilfe des Satzes 2.11 erhalten wir somit für $i, j = 1, \dots, N - 1$ die Beziehung

$$|\tau_{ij}^{rel,S}| = |(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)_{ij}| \leq CN^{-2}. \quad (5.34)$$

Aus (5.4), (5.28) und (5.34) leiten wir für $i, j = 1, \dots, N - 1$ die Ungleichung

$$|L^u(\hat{S} - S^{dc})_{ij}| \leq CN^{-2}$$

ab. Wir wenden nun auf die Gitterfunktion $\hat{S} - S^{dc}$ und die in (5.33) definierte Schrankenfunktion w erneut Satz 2.11 an. Aus der Definition von S^{dc} in (5.15b) folgt $\hat{S} - S^{dc} = 0$ auf Γ_u^N . Wir schließen wie oben für geeignetes $C_w > 0$ die Gültigkeit der Abschätzung

$$\|\hat{S} - S^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}.$$

Damit ist die Behauptung von Satz 5.1 bewiesen. ■

Nun wenden wir uns den Grenzschichtanteilen E_1, E_2 und E_{12} der Lösung u von (5.12) und ihren gemäß (5.15c) definierten Approximationen E_1^{dc}, E_2^{dc} und E_{12}^{dc} zu.

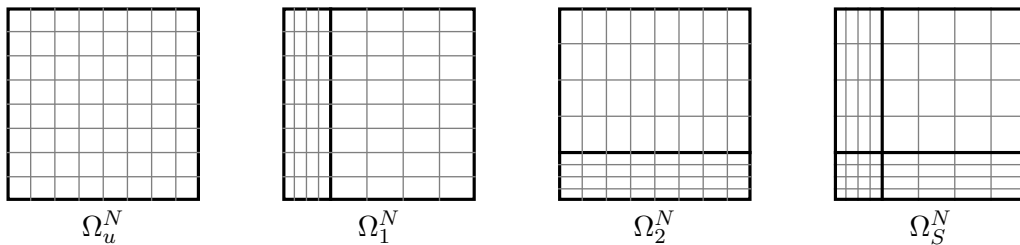


Abbildung 5.2: Die Gitter $\Omega_u^N, \Omega_1^N, \Omega_2^N$ und Ω_S^N für $N = 8$

Wir gehen jeweils davon aus, daß das Grundgebiet Ω in Einflußrichtung der betrachteten Grenzschichtfunktion durch eines der in Abschnitt 5.3.1 definierten Shishkin-Gitter $\Omega_{x,S}^N$ bzw. $\Omega_{y,S}^N$ diskretisiert wird. Senkrecht dazu verwenden wir ein äquidistantes Gitter $\Omega_{y,u}^N$ bzw. $\Omega_{x,u}^N$ mit $N - 1$ inneren Gitterpunkten, dessen Schrittweite \tilde{h}_x bzw. \tilde{h}_y von der Größenordnung $\mathcal{O}(N^{-1})$ ist. Es ergeben sich die in Abbildung 5.2 dargestellten Gitter Ω_1^N für E_1 , Ω_2^N für E_2 und das zweidimensionale Shishkin-Gitter Ω_S^N für E_{12} .

Die Voraussetzungen 1 bis 4 sollen im folgenden stets ihre Gültigkeit behalten.

Der Grenzschnittanteil E_1 auf Ω_1

Wir wollen für den Grenzschnittanteil E_1 von u und seine Approximation E_1^{dc} den folgenden Satz beweisen:

Satz 5.2 *Auf dem Gitter $\Omega_1^N = \Omega_{x,S}^N \times \Omega_{y,u}^N$ genügt der Fehler $\hat{E}_1 - E_1^{dc}$ des Defektkorrekturverfahrens (5.1) der Abschätzung*

$$\|\widehat{E}_1 - E_1^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

Beweis: Außerhalb der Grenzschnittregion, d. h. für alle $x_{ij} \in \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$, schätzen wir den Konsistenzfehler des Defektkorrekturverfahrens unter Ausnutzung von Lemma 2.11 direkt ab. Aus der Dreiecksungleichung und der Definition (5.15c) von E_1^{dc} folgt die Darstellung

$$|L^u(\hat{E}_1 - E_1^{dc})_{ij}| \leq |L^u \hat{E}_{1,ij}| + |(L^u - L^c)E_{1,ij}^u + \widehat{\mathcal{L}}E_{1,ij}|.$$

Wir benutzen Lemma 2.11, Voraussetzung 3 und die Dreiecksungleichung, um für den ersten Summanden für alle $j = 1, \dots, N-1$ die Abschätzungen

$$|L^u \hat{E}_{1,ij}| \leq \begin{cases} CN^{-\lambda_{0,1}+1} & \text{für } i > N/2, \\ CN^{-\lambda_{0,1}+2} & \text{für } i = N/2 \end{cases}$$

herzuleiten. Um den verbleibenden Summanden abzuschätzen, verwenden wir die in (5.13e) angegebene Schranke für $\mathcal{L}E_1$, die Aussage (b) von Lemma 2.11 und die Darstellung (5.5). Wir erhalten für $i = N/2, \dots, N$ und $j = 1, \dots, N-1$ unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung die Beziehung

$$|(L^u - L^c)E_{1,ij}^u + \widehat{\mathcal{L}}E_{1,ij}| \leq CN^{-\lambda_{0,1}+1}.$$

Folglich genügt der Konsistenzfehler des Defektkorrekturverfahrens für alle $x_{ij} \in \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$ der Ungleichung

$$|L^u(\hat{E}_1 - E_1^{dc})_{ij}| \leq \begin{cases} CN^{-\lambda_{0,1}+1} & \text{für } i > N/2, \\ CN^{-\lambda_{0,1}+2} & \text{für } i = N/2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Wir wenden uns nun dem verbleibenden Teilgitter

$$\Omega_{1,f}^N := \{x_{ij} \in \Omega_1 : i = 0, \dots, N/2 - 1, j = 0, \dots, N\} \subset \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$$

zu. Das Teilgitter $\Omega_{1,f}^N$ ist in jeder Richtung äquidistant. Die Schrittweite h_x in x -Richtung ist von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon N^{-1} \ln N)$. Wir legen den folgenden Betrachtungen die der Gleichung (5.4) entsprechende Darstellung

$$L^u(\hat{E}_1 - E_1^{dc}) = (L^u - L^c)(\hat{E}_1 - E_1^u) + (\widehat{\mathcal{L}}E_1 - L^c \hat{E}_1)$$

zugrunde. Aus der Gleichung (2.72) und Voraussetzung 2 erhalten wir für den Konsistenzfehler des zentralen Differenzenverfahrens die Abschätzung

$$\left| \widehat{\mathcal{L}}E_{1,ij} - L^c \hat{E}_{1,ij} \right| \leq C\varepsilon^{-1}N^{-2}(\ln N)^2. \quad (5.36)$$

Um eine Schranke für den relativen Konsistenzfehler $\tau^{rel,E_1} = (L^u - L^c)(\hat{E}_1 - E_1^u)$ zu gewinnen, wenden wir – wie bereits zur Abschätzung von $(L^u - L^c)(\hat{S} - S^u)$ im vorangehenden Unterabschnitt – das Lemma 5.1 an.

Wir erweitern zunächst $\Omega_{1,f}^N$ zu einem Gitter

$$\widehat{\Omega}_{1,f}^N := \Omega_{1,f}^N \cup \{(x_{-1}, y_j) = (-h_x, y_j), (x_{N/2}, y_j) : j = 0, \dots, N\} \\ \cup \{(x_i, y_{-1}) = (x_i, -\tilde{h}_y), (x_i, y_{N+1}) = (x_i, 1 + \tilde{h}_y) : i = 0, \dots, N/2 - 1\}$$

und definieren den Upwind-Fehler $\hat{E}_1 - E_1^u$ in den zusätzlichen Randpunkten, die nicht zu $\Omega_{1,f}^N$ gehören, als antisymmetrische Fortsetzung von $\hat{E}_1 - E_1^u$, d. h. durch

$$\begin{aligned} (\hat{E}_1 - E_1^u)_{-1,j} &:= -(\hat{E}_1 - E_1^u)_{1,j} \quad \text{für } j = 0, \dots, N, \\ (\hat{E}_1 - E_1^u)_{i,-1} &:= -(\hat{E}_1 - E_1^u)_{i,1} \quad \text{und} \\ (\hat{E}_1 - E_1^u)_{i,N+1} &:= -(\hat{E}_1 - E_1^u)_{i,N-1} \quad \text{für } i = 0, \dots, N/2 - 1. \end{aligned}$$

Demnach gilt $\tau_{ij}^{rel, E_1} = 0$, falls die Indizes die Werte $i = 0$ oder $j = 0$ bzw. $j = N$ annehmen. Um auf dem verbleibenden Rand von $\Omega_{1,f}^N$ eine Abschätzung für τ^{rel, E_1} herzuleiten, schließen wir zunächst aus (5.13b), Lemma 2.10 und in Analogie zum Beweis von Folgerung 2.10, daß der Fehler des Upwind-Verfahrens für alle $i, j = 1, \dots, N$ der Ungleichung

$$|(\hat{E}_1 - E_1^u)_{ij}| \leq CB_{1,ij}$$

genügt. Insbesondere gilt also für alle j die Abschätzung

$$|(\hat{E}_1 - E_1^u)_{N/2-2,j}| \leq C \left(1 + \frac{\beta_1 h_x}{\varepsilon}\right)^2 B_{1,N/2,j} \leq CN^{-\lambda_{0,1}}.$$

Wir wenden auf die Darstellung (5.5) von τ^{rel, E_1} die Dreiecksungleichung an und erhalten auf dem rechten Rand von $\Omega_{1,f}^N$ die Schranke

$$|\tau_{N/2-1,j}^{rel, E_1}| \leq C\varepsilon^{-1}N^{-\lambda_{0,1}+1}. \quad (5.37)$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, das in Abschnitt 5.2.3 beschriebene Vorgehen zur Abschätzung von τ^{rel, E_1} auf $\Omega_{1,f}^N$ anzuwenden. Auf dem richtungsweise äquidistanten Gitter $\widehat{\Omega}_{1,f}^N$ sind für $i = 1, \dots, N/2 - 2$ und $j = 1, \dots, N - 1$ die Voraussetzungen von Lemma 5.1 erfüllt. Wir wenden den Upwind-Operator L^u auf τ^{rel, E_1} an und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} |L^u(L^u - L^c)(\hat{E}_{1,ij} - E_{1,ij}^u)| &= |(L^u - L^c)L^u(\hat{E}_{1,ij} - E_{1,ij}^u)| \\ &= \left| \left(-\frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-) - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-) \right) (L^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}} E_{1,ij}) \right| \\ &= \left| -\frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-)(L_x^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{1,ij}) - \frac{b_1}{2}(D_x^+ - D_x^-)(L_y^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{1,ij}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-)(L_x^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{1,ij}) - \frac{b_2}{2}(D_y^+ - D_y^-)(L_y^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{1,ij}) \right|. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die vier Summanden von $(L^u - L^c)L^u(E_1 - E_1^u)$ untersuchen wir der Übersicht halber getrennt. Die auftretenden partiellen Ableitungen von E_1 werden durch die in Voraussetzung 2, Ungleichung (5.13b) angegebene Schranke abgeschätzt. Wir integrieren jeweils

zweimal nach x und erhalten die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_x^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{1,ij}) \right| \\
&= \left| \frac{b_1^2}{2h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^4 E_1}{\partial x^4}(\sigma, y_j) d\sigma dt d\xi \right. \\
&\quad + \frac{b_1 \varepsilon}{2h_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^5 E_1}{\partial x^5}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^5 E_1}{\partial x^5}(\sigma, y_j) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \right| \\
&\leq \frac{b_1^2}{2h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{t - \theta_1 h_x}^{t + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \tau / \varepsilon) d\tau dt d\xi \\
&\quad + \frac{b_1}{2h_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{\tau - \theta_1 h_x}^{\tau + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \sigma / \varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\xi}^{x_i} \int_t^{x_i} \int_{\tau - \theta_1 h_x}^{\tau + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \sigma / \varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \\
&\leq C \varepsilon^{-2} \sinh\left(\frac{\beta_1 h_x}{\varepsilon}\right) \sinh\left(\frac{\beta_1 h_x}{2\varepsilon}\right) \exp(-\beta_1 x_{i+1/2} / \varepsilon) \\
&\leq C \varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{1,ij}. \tag{5.39a}
\end{aligned}$$

Einmalige Ausführung der Integration nach x und die Verwendung der Voraussetzung 2 führen zur Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_y^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{1,ij}) \right| \\
&= \left| \frac{b_1 b_2}{2\bar{h}_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^4 E_1}{\partial x^2 \partial y^2}(\eta, t) d\eta dt d\xi \right. \\
&\quad + \frac{b_1 \varepsilon}{2\bar{h}_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^5 E_1}{\partial x^2 \partial y^3}(\eta, \tau) d\eta d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{y_j}^{y_{j-1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \frac{\partial^5 E_1}{\partial x^2 \partial y^3}(\eta, \tau) d\eta d\tau dt d\xi \right) \right| \\
&\leq \frac{b_1 b_2}{2\bar{h}_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \eta / \varepsilon) d\eta dt d\xi \\
&\quad + \frac{b_1 \varepsilon}{2\bar{h}_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \eta / \varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{\xi}^{y_j} \int_t^{y_j} \int_{x_i - \theta_1 h_x}^{x_i + \theta_2 h_x} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \eta / \varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right) \\
&\leq C \bar{h}_y \varepsilon^{-1} N^{-1} \ln N \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) \\
&\leq C \varepsilon^{-1} N^{-2} \ln N B_{1,ij}. \tag{5.39b}
\end{aligned}$$

Nach dem gleichen Prinzip erhalten wir die Ungleichungsketten

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_x^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{1,ij}) \right| \\
&= \frac{b_1 b_2}{2 h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{y_j - \theta_1 h_y}^{y_j + \theta_2 h_y} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 t / \varepsilon) d\eta dt d\xi \\
&\quad + \frac{b_2}{2 h_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{y_j - \theta_1 h_y}^{y_j + \theta_2 h_y} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \tau / \varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\xi}^{x_i} \int_t^{x_i} \int_{y_j - \theta_1 h_y}^{y_j + \theta_2 h_y} \varepsilon^{-2} \exp(-\beta_1 \tau / \varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right) \\
&\leq C \varepsilon^{-1} h_y N^{-1} \ln N \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) \\
&\leq C \varepsilon^{-1} N^{-2} \ln N B_{1,ij}
\end{aligned} \tag{5.39c}$$

und

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_y^u \hat{E}_{1,ij} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{1,ij}) \right| \\
&= \frac{b_2^2}{2 h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{t - \theta_1 h_y}^{t + \theta_2 h_y} \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) d\tau dt d\xi \\
&\quad + \frac{b_2 \varepsilon}{2 h_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{\tau - \theta_1 h_y}^{\tau + \theta_2 h_y} \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{\xi}^{y_j} \int_t^{y_j} \int_{\tau - \theta_1 h_y}^{\tau + \theta_2 h_y} \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \\
&\leq C (h_y^2 + \varepsilon h_y) \exp(-\beta_1 x_i / \varepsilon) \\
&\leq C N^{-2} B_{1,ij}.
\end{aligned} \tag{5.39d}$$

Nun bilden wir das Maximum über die in den Abschätzungen (5.39a)–(5.39d) hergeleiteten Schranken und erhalten für $i = 1, \dots, N/2 - 2, j = 1, \dots, N - 1$ unter Berücksichtigung von Voraussetzung 3 die Beziehung

$$\left| L^u (L^u - L^c) (\hat{E}_{1,ij} - E_{1,ij}^u) \right| \leq C \varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{1,ij}. \tag{5.40}$$

Wir wenden das diskrete Vergleichsprinzip aus Satz 2.11 auf die Gitterfunktionen τ^{rel, E_1} und w , punktweise definiert durch die Gleichung

$$w_{ij} = C \varepsilon^{-1} \left(N^{-\lambda_{0,1}+1} + N^{-2} (\ln N)^2 B_{1,ij} \right),$$

an. Aus (5.40) und (5.37) folgt demnach für $i = 1, \dots, N/2 - 1, j = 1, \dots, N - 1$ die Abschätzung

$$|(L^u - L^c) (\hat{E}_1 - E_1^u)_{ij}| \leq C \varepsilon^{-1} \left(N^{-\lambda_{0,1}+1} + N^{-2} (\ln N)^2 B_{1,ij} \right), \tag{5.41}$$

und somit ergibt sich aus (5.35) sowie (5.4), (5.36) und (5.41) für $j = 1, \dots, N - 1$ die Ungleichung

$$|L^u (\hat{E}_1 - E_1^{dc})_{ij}| \leq \begin{cases} C \varepsilon^{-1} (N^{-\lambda_{0,1}+1} + N^{-2} (\ln N)^2) & \text{für } i = 1, \dots, N/2 - 1, \\ C N^{-\lambda_{0,1}+2} & \text{für } i = N/2 \text{ und} \\ C N^{-\lambda_{0,1}+1} & \text{für } i = N/2 + 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Nun wenden wir Satz 2.12 an. Wir setzen $f_1^{E_1} := L^u(\hat{E}_1 - E_1^{dc})$, $f_2^{E_1} := 0$ und $f_0^{E_1} := 0$ und erinnern daran, daß $(\hat{E}_1 - E_1^{dc})$ auf Ω_1^N per Definition (5.15c) homogenen Randbedingungen genügt. Folglich erhalten wir unter Verwendung von Voraussetzung 4 und Lemma 2.14 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\hat{E}_1 - E_1^{dc}\|_{\infty,d} &\leq C \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{h}_{x,i} \max_{j=1,\dots,N-1} |L^u(\hat{E}_1 - E_1^{dc})| \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^{N/2-1} h_x \varepsilon^{-1} N^{-2} (\ln N)^2 B_{1,ij} + \sum_{i=1}^{N/2-1} h_x \varepsilon^{-1} N^{-2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_x + H_x}{2} N^{-1} + \sum_{i=N/2+1}^{N-1} H_x N^{-2} \right) \\ &\leq C(N^{-2}(\ln N)^2 + N^{-2}) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung des Satzes 5.2. \blacksquare

Der Grenzschnittanteil E_2 auf Ω_2

Analog zu Satz 5.2 beweist man

Satz 5.3 *Auf dem Gitter $\Omega_2^N = \Omega_{x,u}^N \times \Omega_{y,S}^N$ genügt der Fehler $\hat{E}_2 - E_2^{dc}$ des Defektkorrekturverfahrens (5.1) der Abschätzung*

$$\|\hat{E}_2 - E_2^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

\blacksquare

Die Eckgrenzschnitt E_{12} auf dem Shishkin-Gitter Ω_S^N

Für den Fehler des Defektkorrekturverfahrens (5.1) bezüglich der Eckgrenzschnitt E_{12} können wir auf dem zur Lösung des Problems (5.12) passenden Shishkin-Gitter Ω_S^N folgende Konvergenzaussage beweisen:

Satz 5.4 *Auf dem Shishkin-Gitter $\Omega_S^N = \Omega_{x,S}^N \times \Omega_{y,S}^N$ mit den Parametern $\lambda_{0,\nu} \geq 4$ für $\nu = 1, 2$ genügt der Fehler $\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}$ des Defektkorrekturverfahrens (5.1) der Abschätzung*

$$\|\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}\|_{\infty,d} \leq CN^{-2}(\ln N)^2.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst die in Ω_{12}, Ω_{21} und Ω_{22} enthaltenen Teilgitter. Gemäß Lemma 2.11 gelten die Beziehungen

$$|(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq \begin{cases} CN^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})} & \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega_{22}, \\ CN^{-\lambda_{0,1}} & \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega_{21}, \\ CN^{-\lambda_{0,2}} & \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega_{12}. \end{cases} \quad (5.42)$$

Für den Konsistenzfehler $\tau^{dc, E_{12}}$ des Defektkorrekturverfahrens erhalten wir aus (5.42), den Voraussetzungen 2 und 3 sowie Gleichung (5.13g) mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $i, j = N/2 + 1, \dots, N - 1$ die Abschätzung

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc})_{ij}| \leq |L^u \hat{E}_{12,ij}| + |(L^u - L^c)E_{12,ij}^u + \widehat{\mathcal{L}}E_{12,ij}| \leq CN^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2})+1}, \quad (5.43a)$$

während für $i = N/2$ oder $j = N/2$ bei gleicher Wahl des jeweils verbleibenden Index die Ungleichung

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc})_{ij}| \leq CN^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}) + 2} \quad (5.43b)$$

gilt. Auf den in Ω_{12} bzw. Ω_{21} enthaltenen Teilgittern erzeugt die Gitterschrittweite h_x bzw. h_y bei Anwendung der Dreiecksungleichung einen Faktor ε^{-1} in der Abschätzung des Konsistenzfehlers $\tau^{dc, E_{12}}$. Wir erhalten für $i = 1, \dots, N/2 - 1$ und $j = N/2, \dots, N - 1$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc})_{ij}| &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{h_x^2} + \frac{1}{h_x} + \frac{\varepsilon}{H_y^2} + \frac{1}{H_y} \right) \exp(-[\beta_1 x_{i-1} + \beta_2 y_{j-1}]/\varepsilon) \\ &\leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,2} + 2} \end{aligned} \quad (5.43c)$$

sowie für $j = 1, \dots, N/2 - 1$ und $i = N/2, \dots, N - 1$ in derselben Weise

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc})_{ij}| \leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,1} + 2}. \quad (5.43d)$$

Auf dem verbleibenden Gitter

$$\Omega_{S,f}^N := \{(x_i, y_j) \in \Omega_S^N : i, j = 0, \dots, N/2 - 1\} \subset \Omega_{11}$$

wollen wir die in Abschnitt 5.2.3 beschriebene Beweisstrategie anwenden. Wir zerlegen den Konsistenzfehler $\tau^{dc, E_{12}}$ gemäß Darstellung (5.4) und betrachten die Summanden der Gleichung

$$\tau^{dc, E_{12}} = (L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12}^u) + (L^c \hat{E}_{12} - \widehat{\mathcal{L}} E_{12}).$$

Aus (2.72) folgt unter Verwendung von (5.13d) auf $\Omega_{S,f}^N$ die Abschätzung

$$|L^c \hat{E}_{12,ij} - \widehat{\mathcal{L}} E_{12,ij}| \leq C\varepsilon^{-1} N^{-2} (\ln N)^2. \quad (5.44)$$

Um den relativen Konsistenzfehler abzuschätzen, betrachten wir zunächst sein Verhalten auf dem Rand des Teilgitters $\Omega_{S,f}^N$, d. h. für $i = 0, N/2 - 1$ bzw. $j = 0, N/2 - 1$. Damit $\tau^{rel, E_{12}}$ dort definiert ist, erweitern wir – wie bereits in den Beweisen der Sätze 5.1 und 5.2 – das Gitter $\Omega_{S,f}^N$ zu

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega_{S,f}^N} &:= \Omega_{S,f}^N \cup \{(x_{-1}, y_j) = (-h_x, y_j), (x_{N/2}, y_j) : j = 0, \dots, N/2 - 1\} \\ &\cup \{(x_i, y_{-1}) = (x_i, -h_y), (x_i, y_{N/2}) : i = 0, \dots, N/2 - 1\} \end{aligned}$$

und setzen $\tau^{rel, E_{12}}$ in bekannter Weise antisymmetrisch auf die nicht in Ω_S^N enthaltenen Randpunkte von $\widehat{\Omega_{S,f}^N}$ so fort, daß für $j = 0, \dots, N/2 - 1$ bzw. $i = 0, \dots, N/2 - 1$

$$(L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{0,j} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{i,0} = 0$$

gilt. Aus Lemma 2.11 folgt für alle $i, j = 1, \dots, N - 1$ die Ungleichung

$$|(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij}| \leq CB_{12,ij}.$$

Daraus schließen wir unter Anwendung der Dreiecksungleichung für $j = 0, \dots, N/2 - 1$ die Gültigkeit der Beziehung

$$|(L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{N/2-1,j}| \leq C \left(\frac{1}{h_x} + \frac{1}{h_y} \right) B_{12, N/2-2, j} \leq C\varepsilon^{-1} N^{-\lambda_{0,1} + 1} \quad (5.45a)$$

und in derselben Weise für $i = 0, \dots, N/2 - 1$

$$|(L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{i,N/2-1}| \leq C\varepsilon^{-1}N^{-\lambda_{0,2}+1}. \quad (5.45b)$$

Im Inneren von $\Omega_{S,f}^N$, d. h. für $i, j = 1, \dots, N/2 - 2$, sind die Voraussetzungen des Lemmas 5.1 erfüllt. Wir wenden auf $\tau^{rel, E_{12}}$ den Upwind-Operator L^u an und erhalten eine Darstellung analog zu (5.38). Die Beträge von deren Summanden schätzen wir unter Verwendung der in (5.13d) angegebenen Schranke für E_{12} einzeln ab. Zweimalige Integration nach x liefert wie bei der Herleitung von (5.39a) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} & \left| \frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_x^u \hat{E}_{12} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{12})_{ij} \right| \\ & \leq \frac{b_1^2}{2h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{t-\theta_1 h_x}^{t+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \tau/\varepsilon) \exp(-\beta_2 y_j/\varepsilon) d\tau dt d\xi \\ & \quad + \frac{b_1}{2h_x^2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{\xi} \int_{x_i}^t \int_{\tau-\theta_1 h_x}^{\tau+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \sigma/\varepsilon) \exp(-\beta_2 y_j/\varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right. \\ & \quad \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\xi}^{x_i} \int_t^{x_i} \int_{\tau-\theta_1 h_x}^{\tau+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \sigma/\varepsilon) \exp(-\beta_2 y_j/\varepsilon) d\sigma d\tau dt d\xi \right) \\ & \leq C\varepsilon^{-2} \sinh\left(\frac{\beta_1 h_x}{\varepsilon}\right) \sinh\left(\frac{\beta_1 h_x}{2\varepsilon}\right) \exp(-\beta_1 x_{i+1/2}/\varepsilon) \exp(-\beta_2 y_j/\varepsilon) \\ & \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij}. \end{aligned} \quad (5.46a)$$

Zur Abschätzung des zweiten Summanden aus der zu (5.38) analogen Darstellung führen wir jeweils eine Integration nach x und y aus und erhalten die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} & \left| \frac{b_1}{2} (D_x^+ - D_x^-) (L_y^u \hat{E}_{12} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{12})_{ij} \right| \\ & \leq \frac{b_1 b_2}{2h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{x_i-\theta_1 h_x}^{x_i+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \eta/\varepsilon) \exp(-\beta_2 t/\varepsilon) d\eta dt d\xi \\ & \quad + \frac{b_1}{2h_y^2} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{\xi} \int_{y_j}^t \int_{x_i-\theta_1 h_x}^{x_i+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \eta/\varepsilon) \exp(-\beta_2 \tau/\varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right. \\ & \quad \left. + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{\xi}^{y_j} \int_t^{y_j} \int_{x_i-\theta_1 h_x}^{x_i+\theta_2 h_x} \varepsilon^{-4} \exp(-\beta_1 \eta/\varepsilon) \exp(-\beta_2 \tau/\varepsilon) d\eta d\tau dt d\xi \right) \\ & \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 \exp(-\beta_1 x_i/\varepsilon) \exp(-\beta_2 y_j/\varepsilon) \\ & \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij}. \end{aligned} \quad (5.46b)$$

Symmetrisch zu Abschätzung (5.46b) ergibt sich die Beziehung

$$\left| \frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_x^u \hat{E}_{12} - \widehat{\mathcal{L}}_x E_{12})_{ij} \right| \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij}. \quad (5.46c)$$

Ersetzt man x durch y , dann erhält man schließlich analog zu Ungleichung (5.46a) die Oberschranke

$$\left| \frac{b_2}{2} (D_y^+ - D_y^-) (L_y^u \hat{E}_{12} - \widehat{\mathcal{L}}_y E_{12})_{ij} \right| \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij}. \quad (5.46d)$$

Wir fassen die hergeleiteten Schranken aus (5.46a)–(5.46d) zur Ungleichung

$$\left| L^u (L^u - L^c) (\hat{E}_{12} - E_{12}^u)_{ij} \right| \leq C\varepsilon^{-2} N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij} \quad (5.47)$$

zusammen. Nun wird in gewohnter Weise das diskrete Vergleichsprinzip aus Satz 2.11 angewendet. Als geeignete Schrankenfunktion erweist sich die punktweise durch die Gleichung

$$w_{ij} = C_w \varepsilon^{-1} (N^{-\min\{\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}\}+1} + N^{-2} (\ln N)^2 B_{12,ij})$$

definierte Gitterfunktion w . Aus (5.45), (5.47) und Satz 2.11 folgt

$$|(L^u - L^c)(\hat{E}_{12} - E_{12,ij}^u)_{ij}| \leq w_{ij}. \quad (5.48)$$

Auf dem Shishkin-Gitter Ω_S^N genügt also der Konsistenzfehler des Defektkorrekturverfahrens für $\lambda_{0,\nu} \geq 4$, ($\nu = 1, 2$) gemäß (5.43a)–(5.43d), (5.44) und (5.48) den Abschätzungen

$$|L^u(\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc})_{ij}| \leq \begin{cases} CN^{-2} & \text{für } x_{ij} \in \bar{\Omega}_{22}, \\ C\varepsilon^{-1}N^{-2} & \text{für } x_{ij} \in \Omega_{12} \cup \Omega_{21}, \\ C\varepsilon^{-1}(N^{-2} + N^{-2}(\ln N)^2 B_{12,ij}) & \text{für } x_{ij} \in \Omega_{11} \cap \Omega_{S,f}^N. \end{cases} \quad (5.49)$$

Auf dem Rand des Gitters erfüllt der Fehler $\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}$ per Definition (5.15c) homogene Randbedingungen. Wir wollen den Satz 2.12 anwenden, um aus (5.49) eine Abschätzung dieses Fehlers abzuleiten. Dazu zerlegen wir das Gitter Ω_S^N in drei Teilgitter, wie in (2.65) angegeben (siehe auch Abbildung 2.2), und setzen für $z \in \{x, y, 0\}$

$$\tau_z^{E_{12,dc}} := \chi(\Omega_z^N) \tau^{E_{12,dc}}. \quad (5.50)$$

Es gilt

$$\tau^{E_{12,dc}} = \tau_x^{E_{12,dc}} + \tau_y^{E_{12,dc}} + \tau_0^{E_{12,dc}}.$$

Aus Satz 2.12 folgt unter Berücksichtigung von Lemma 2.14

$$\begin{aligned} \|\hat{E}_{12} - E_{12}^{dc}\|_{\infty,d} &\leq \sum_{i=1}^{N/2} h_{x,i} \max_{j=1,\dots,N-1} |\tau_{x,ij}^{E_{12,dc}}| + \sum_{j=1}^{N/2} h_{y,j} \max_{i=N/2+1,\dots,N-1} |\tau_{y,ij}^{E_{12,dc}}| \\ &\quad + \|\tau_0^{E_{12,dc}}\|_{\infty,d} \\ &\leq C_x N^{-2} (\ln N)^2 + C_y N^{-2} \ln N + C_0 N^{-2} \\ &\leq CN^{-2} (\ln N)^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung von Satz 5.4 bewiesen. ■

5.3.4 Abschließende Bemerkung

Wir können die Aussagen der Sätze 5.1–5.4 **nicht** zu einer einheitlichen Konvergenzaussage von der Art der Hypothese 5.1 zusammenfassen. Explizite Vorschriften zur Berechnung der Lösungsanteile S , E_1 , E_2 und E_{12} von der benötigten Glattheit sind uns bisher nicht bekannt⁸. Wir verstehen die in Abschnitt 5.3 bewiesenen Teilergebnisse zur Konvergenzanalyse als Aussagen, die gemeinsam mit den numerischen Testrechnungen die Plausibilität der Hypothese 5.1 untermauern. Der Beweis dieser Aussage bleibt für die betrachtete Verfahrenskombination (5.1) von einfachem Upwind- und zentralem Differenzenverfahren ein ungelöstes Problem.

⁸vgl. Bemerkung 5.3

Kapitel 6

Einige Bemerkungen zu Finite–Elemente–Methoden und Defektkorrektur

Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Konvergenzanalyse von Defektkorrekturverfahren auf der Grundlage von Finite–Differenzen–Methoden für singular gestörte Randwertaufgaben vom Typ (1.1) bzw. (1.8). In diesem abschließenden Kapitel wollen wir uns kurz Finite–Elemente–basierten Defektkorrekturprozessen zuwenden.

Wir betrachten die Randwertaufgaben (1.1) bzw. (1.8) mit der zugeordneten schwachen Formulierung:

Finde ein $u \in V := H_0^1(\Omega)$ so, daß die Gleichung

$$a(u, v) := \varepsilon(\nabla u, \nabla v) - (b \cdot \nabla u - cu, v) = (f, v) \quad (6.1)$$

für alle $v \in V$ gilt. Dabei bezeichnet (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt in $L_2(\Omega)$. Bezüglich der Energienorm, die für alle $v \in H^1(\Omega)$ durch

$$\|v\|_\varepsilon := (\varepsilon\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2)^{1/2}$$

definiert ist, erweist sich die Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ als V -elliptisch, wenn die Voraussetzung

$$c + \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq c_0 > 0$$

erfüllt ist.

Wählen wir einen endlichdimensionalen Teilraum $V^N \subset V$, dann ergibt sich die Lösung des Galerkin–Verfahrens als diejenige Funktion $u^G \in V^N$, die für alle Testfunktionen $v^N \in V^N$ der Gleichung

$$a(u^G, v^N) = (f, v^N) \quad (6.2)$$

genügt. Im folgenden sei V^N der Raum der bilinearen Funktionen über einem Gitter vom Shishkin–Typ mit $N + 1$ bzw. $(N + 1) \times (N + 1)$ Gitterpunkten. Das Galerkin–Verfahren (6.2) ähnelt in seinen Lösungseigenschaften dem zentralen Differenzenverfahren. Die generierten diskreten Systeme sind nicht leicht zu lösen. Die Verwendung grenzschichtangepaßter Gitter wirkt sich stabilisierend auf das Verfahren aus. Man beobachtet in numerischen Testrechnungen auf Shishkin–Typ–Gittern Konvergenz von (fast) zweiter Ordnung

bezüglich der Maximumnorm (siehe z. B. [59, 67]). Analytisch nachgewiesen wurden die Fehlerschranken

$$\|u - u^G\|_\varepsilon \leq CN^{-1} \max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)|$$

in [94] und

$$|(u - u^G)(x, y)| \leq \begin{cases} C \min\{1, \varepsilon^{-1/2} N^{-1} \ln N\} N^{-1} \left(\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \right)^2 \ln^{1/2} N, & \text{falls } (x, y) \in \Omega_{22}, \\ CN^{-3/2} \left(\max_{t \in [0, 1/2]} |\psi'(t)| \right)^2 \ln N, & \text{falls } (x, y) \in \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \end{cases}$$

in [59], wobei die Gebietsaufteilung wie in Kapitel 5, Abbildung 5.1, gewählt ist. Auf einem Shishkin-Gitter kann man ferner die Gültigkeit der Ungleichung

$$\|u - u^G\|_{L^\infty(\Omega_{11})} \leq CN^{-3/2} \ln^3 N$$

zeigen.

Nun stellt sich die Frage, ob die Schwierigkeiten bei der effizienten Lösung der durch das Galerkin-Verfahren (6.2) generierten diskreten Systeme mit Hilfe eines Defektkorrekturverfahrens überwunden werden können. Welche und in welchem Sinne stabilere Finite-Elemente-Methode eignet sich als Lösungsverfahren in einem solchen Algorithmus?

Im folgenden wollen wir kurz die Kombination des Standard-Galerkin-Verfahrens mit der Stromliniendiffusions-FEM und dem durch Addition künstlicher Viskosität generierten Finite-Elemente-Verfahren, kurz *Upwind-FEM* genannt, diskutieren.

Upwind-FEM

Bereits in [7] und [18] wurden Defektkorrekturverfahren untersucht, bei denen eine Finite-Elemente-Methode mit zusätzlicher künstlicher Diffusion, proportional zu lokalen Gitterparametern, als Lösungsverfahren eingesetzt wird, während der Korrekturterm mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens (6.2) ermittelt wird.

Wir verwenden wiederum den Finite-Elemente-Raum $V^N \subset V$ der bilinearen Ansatzfunktionen über einem Shishkin-Typ-Gitter. Als Lösung der Upwind-Finite-Elemente-Methode definieren wir diejenige Funktion $u^U \in V^N$, die für alle $v^N \in V^N$ die Gleichung

$$a_U(u^U, v^N) := (\gamma \mathbf{h} \nabla u^U, \nabla v^N) + a(u^U, v^N) = (f, v^N) \quad (6.3)$$

erfüllt. Dabei ist $\gamma = \text{diag}(\gamma_x, \gamma_y)^T$ eine 2×2 -Matrix mit konstanten, positiven Diagonalelementen. Die Matrixfunktion $\mathbf{h} = \text{diag}(h_x, h_y)$ ordnet jedem Punkt $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine 2×2 -Matrix mit den Einträgen

$$\begin{aligned} h_x &= h_x(x, y) = h_{x,i} && \text{für } x \in (x_{i-1}, x_i] \quad \text{und} \\ h_y &= h_y(x, y) = h_{y,j} && \text{für } y \in (y_{j-1}, y_j] \end{aligned}$$

zu. Falls $\Omega \subset \mathbb{R}$ gilt, ist γ eine positive Konstante, während \mathbf{h} der lokalen Gitterschrittweite entspricht. Die zu $a_U(\cdot, \cdot)$ assoziierte Energienorm ist für alle $v \in V$ durch

$$\|v\|_h := \{(\mathbf{h} \nabla v, \nabla v) + \varepsilon \|\nabla v\|_2 + \|v\|_2\}^{1/2}$$

definiert. Bezüglich dieser Norm ist die Bilinearform $a_U(\cdot, \cdot)$ koerzitiv.

In [97] wird gezeigt, daß das Verfahren (6.3) auf einem Shishkin-Typ-Gitter bezüglich der Energienorm $\|\cdot\|_\varepsilon$ von der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)| \ln^{1/2} N)$ gegen die exakte Lösung u von (1.8) konvergiert. Bezüglich der Maximumnorm beobachtet man in numerischen Testrechnungen Konvergenz der Ordnung $\mathcal{O}(N^{-1} \max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)|)$, kann aber nur eine pessimistischere Fehlerschranke analytisch nachweisen.

Das Upwind-Finite-Elemente-Verfahren generiert im eindimensionalen Fall unter der Bedingung, daß für alle $i = 1, \dots, N$ die Ungleichung $\gamma_i \geq b_i/2$ gilt, eine M -Matrix. Zweidimensional wird im allgemeinen keine M -Matrix erzeugt. Das Vorzeichen der Außerdiagonalelemente der generierten Systemmatrix hängt stark vom Verhältnis der orthogonalen Gitterschrittweiten h_x und h_y ab. Es ist folglich unklar, ob das Verfahren L_∞ - L_∞ -stabil ist.

Die Verfahren (6.3) und (6.2) wurden über demselben Finite-Elemente-Raum V^N definiert. Sie lassen sich daher leicht zu folgendem Defektkorrekturalgorithmus kombinieren:

1. Ermittle die Startapproximation $u^U \in V^N$, die für alle $v^N \in V^N$ der Beziehung

$$a_U(u^U, v^N) = (f, v^N) \quad (6.4a)$$

genügt.

2. Finde $u^{DC} \in V^N$ so, daß für alle $v^N \in V^N$ die Gleichung

$$a_U(u^{DC}, v^N) = a_U(u^U, v^N) + ((f, v^N) - a(u^U, v^N)) \quad (6.4b)$$

erfüllt ist.

Bemerkung 6.1 Wir erwarten eine Verkleinerung des Fehlers $\|u^{DC} - u^I\|_h$, wobei $u^I \in V^N$ die Interpolierende von u bezüglich des Raumes V^N bezeichnet. Die Fehlerkomponente $\|u - u^I\|_h$ des Verfahrensfehlers $\|u^{DC} - u\|_h$ kann sich nicht verringern, da wir denselben Ansatzraum V^N für beide Verfahren benutzen. \square

Ausgangspunkt unserer Fehlerbetrachtungen ist für alle $v^N \in V^N$ die Gleichung

$$\begin{aligned} a_U(u^{DC} - u^I, v^N) &= [a_U(u^U - u^I, v^N) - a(u^U - u^I, v^N)] + (f, v^N) - a(u^I, v^N) \\ &= (\gamma \mathbf{h} \nabla(u^U - u^I), \nabla v^N) + a(u^G - u^I, v^N). \end{aligned} \quad (6.5)$$

In [59] wurde die Superkonvergenz des Galerkin-Verfahrens (6.2) auf Shishkin-Typ-Gittern gezeigt. Es gilt demnach die Abschätzung

$$|a(u^G - u^I, v^N)| \leq CN^{-2} \left(\max_{t \in [0,1/2]} |\psi'(t)| \right)^2 \ln^{1/2} N \|v^N\|_\varepsilon.$$

Offen ist bislang, ob man für den ersten Summanden von (6.5), der für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Gestalt

$$\begin{aligned} (\gamma \mathbf{h} \nabla(u^U - u^I), \nabla v^N) &= \sum_{i=1}^N \gamma_x h_{x,i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial(u^U - u^I)}{\partial x} \frac{\partial v^N}{\partial x} dx dy + \\ &\quad \sum_{j=1}^N \gamma_y h_{y,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{\partial(u^U - u^I)}{\partial y} \frac{\partial v^N}{\partial y} dy dx \end{aligned}$$

aufweist, eine Abschätzung derselben Größenordnung herleiten kann.

Wir reduzieren unsere Betrachtungen auf den eindimensionalen Fall und ein Shishkin-Gitter $\Omega_S \subset [0, 1]$, auf dessen feinem Teil die Schrittweite der Beziehung $h \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N$ genügt. Dann liefert die Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf dem feinen Gitter $\Omega_{S,f} \subset \Omega_S$ zusammen mit der Fehlerabschätzung aus [97] unmittelbar die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{N/2} \gamma h_i ((u^U - u^I)', v^{N'}) \right| &\leq CN^{-1} \ln N \left[\varepsilon \int_{\Omega_{S,f}} (u^U - u^I)^2 \right]^{1/2} \|v^N\|_{\varepsilon, \Omega_{S,f}} \\ &\leq CN^{-2} \ln^{5/2} N \|v^N\|_{\varepsilon, \Omega_{S,f}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Auf dem groben Gitter $\Omega_{S,g} \subset \Omega_S$, wo die Schrittweite die Beziehung $H = \mathcal{O}(N^{-1})$ erfüllt, können wir keine vergleichbare Abschätzung herleiten. Wir benötigen eine Schranke folgender Art:

$$|u^U - u^I|_{1, \Omega_{S,g}} \leq CN^{-1} \ln N.$$

Eine solche mit Finite-Elemente-Techniken nachzuweisen, ist selbst im eindimensionalen Fall ein offenes Problem. Die Ähnlichkeit der Upwind-FEM zum Upwind-Differenzenverfahren gibt Anlaß zu der Vermutung, daß für den Gradienten des Fehlers der eindimensionalen Upwind-FEM eine Fehlerschranke wie in Satz 4.1 bewiesen werden kann.

Im eindimensionalen Fall deuten die Ergebnisse numerischer Testrechnungen darauf hin, daß das betrachtete Defektkorrekturverfahren auf grenzschichtangepaßten Gittern von (fast) zweiter Ordnung konvergiert. Die Tabellen 6.1 und 6.2 beinhalten die Energienorm und die Maximumnorm der Fehler $u - u^{DC}$ und $u^I - u^{DC}$ und Konvergenzraten zum Testproblem

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) - u'(x) + 2u(x) &= x - 1 \quad \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Störungsparameter $\varepsilon = 10^{-8}$.

N	$\ u - u^{DC}\ _{\varepsilon}$		$\ u^I - u^{DC}\ _{\varepsilon}$		$\ u - u^{DC}\ _{\infty}$		$\ u^I - u^{DC}\ _{\infty}$	
	Fehler	Rate	Fehler	Rate	Fehler	Rate	Fehler	Rate
4	9.122e-02	0.83	5.570e-02	0.57	7.679e-02	1.17	4.756e-02	0.66
8	5.141e-02	1.12	3.742e-02	1.20	3.401e-02	1.26	3.010e-02	1.33
16	2.370e-02	1.08	1.630e-02	1.14	1.424e-02	0.19	1.198e-02	-0.06
32	1.124e-02	0.96	7.383e-03	0.91	1.253e-02	0.88	1.253e-02	0.88
64	5.765e-03	1.12	3.938e-03	1.29	6.811e-03	1.38	6.811e-03	1.38
128	2.645e-03	1.17	1.607e-03	1.59	2.616e-03	1.64	2.616e-03	1.64
256	1.178e-03	1.10	5.357e-04	1.74	8.390e-04	1.77	8.390e-04	1.77
512	5.485e-04	1.04	1.603e-04	1.82	2.454e-04	1.84	2.454e-04	1.84
1024	2.661e-04	—	4.536e-05	—	6.846e-05	—	6.846e-05	—

Tabelle 6.1: Verfahrensfehler und Konvergenzraten zum Algorithmus (6.4) auf einem eindimensionalen Bakhvalov-Shishkin-Gitter mit $\lambda_0 = 2$ und $\alpha = 1$

Angewandt auf das zweidimensionale Testproblem (5.2) mit dem Störungsparameter $\varepsilon = 10^{-8}$ sind die numerischen Testrechnungen nicht eindeutig interpretierbar (vgl. Tabellen 6.3 und 6.4). Die Ergebnisse für andere Werte des Störungsparameters ähneln den

N	$\ u - u^N\ _\varepsilon$		$\ u^I - u^N\ _\varepsilon$		$\ u - u^N\ _\infty$		$\ u^I - u^N\ _\infty$	
	error	rate	error	rate	error	rate	error	rate
4	9.264e-02	0.60	5.459e-02	0.54	7.707e-02	1.06	4.773e-02	0.61
8	6.126e-02	0.66	3.746e-02	0.79	3.696e-02	0.96	3.134e-02	1.11
16	3.881e-02	0.75	2.161e-02	0.98	1.894e-02	1.05	1.454e-02	1.10
32	2.310e-02	0.81	1.092e-02	1.16	9.170e-03	1.24	6.764e-03	1.21
64	1.322e-02	0.83	4.882e-03	1.34	3.880e-03	1.39	2.927e-03	1.38
128	7.441e-03	0.84	1.928e-03	1.49	1.476e-03	1.53	1.122e-03	1.52
256	4.168e-03	0.84	6.884e-04	1.59	5.116e-04	1.62	3.926e-04	1.61
512	2.324e-03	0.85	2.287e-04	1.66	1.664e-04	1.68	1.282e-04	1.68
1024	1.287e-03	—	7.235e-05	—	5.196e-05	—	3.997e-05	—

Tabelle 6.2: Verfahrensfehler und Konvergenzraten zum Algorithmus (6.4) auf einem ein-dimensionalen Shishkin-Gitter mit $\lambda_0 = 2$

angegebenen. Defektkorrektur verbessert offenbar das Konvergenzverhalten im Vergleich zur Upwind-FEM. Die Konvergenzrate ist jedoch nicht klar ablesbar. Auch eine Variation der Gitterparameter verändert die Resultate nicht wesentlich.

In [18] wird dennoch ebendiese Verfahrenskombination zur Konstruktion eines a posteriori-Fehlerschätzers verwendet, der sich den numerischen Tests zufolge sehr gut zur Gitteradaption eignet¹.

N	$\ u^I - u^{DC}\ _\infty$			$\ u - u^{DC}\ _\infty$			$\ u^I - u^{DC}\ _\varepsilon$		
	Fehler	Rate	Konst	Fehler	Rate	Konst	Fehler	Rate	Konst
4	3.634e-01	0.52	3.02	4.789e-01	0.78	3.98	3.057e-01	0.69	2.54
8	2.537e-01	0.89	3.75	2.785e-01	0.90	4.12	1.890e-01	0.85	2.79
16	1.365e-01	1.15	4.54	1.493e-01	1.09	4.97	1.051e-01	0.96	3.49
32	6.160e-02	1.28	5.25	6.993e-02	1.28	5.96	5.397e-02	1.15	4.60
64	2.542e-02	1.42	6.02	2.886e-02	1.43	6.83	2.429e-02	1.33	5.75
128	9.470e-03	1.54	6.59	1.074e-02	1.54	7.47	9.661e-03	1.47	6.72
256	3.263e-03	—	6.95	3.698e-03	—	7.88	3.482e-03	—	7.42

Tabelle 6.3: Verfahrensfehler und Konvergenzraten zum Algorithmus (6.4) auf einem zwei-dimensionalen Shishkin-Gitter mit $\lambda_0 = 2$

N	$\ u^I - u^{DC}\ _\infty$			$\ u - u^{DC}\ _\infty$			$\ u^I - u^{DC}\ _\varepsilon$		
	Fehler	Rate	Konst	Fehler	Rate	Konst	Fehler	Rate	Konst
4	3.892e-01	0.72	6.22	5.005e-01	0.62	8.00	2.961e-01	1.05	4.73
8	2.357e-01	1.39	15.08	3.264e-01	0.90	20.88	1.431e-01	1.71	9.15
16	8.996e-02	1.44	23.02	1.750e-01	1.15	44.80	4.371e-02	1.61	11.19
32	3.310e-02	0.89	33.89	7.868e-02	1.20	80.56	1.430e-02	1.23	14.64
64	1.792e-02	0.68	73.39	3.425e-02	1.13	140.30	6.091e-03	1.16	24.94
128	1.117e-02	0.79	182.9	1.560e-02	1.06	255.6	2.727e-03	1.15	44.67
256	6.463e-03	—	423.5	7.495e-03	—	491.2	1.226e-03	—	80.33

Tabelle 6.4: Verfahrensfehler und Konvergenzraten zum Algorithmus (6.4) auf einem zwei-dimensionalen Bakhvalov-Shishkin-Gitter mit $\lambda_0 = 2$ und $\alpha = 1$

¹Die Analyse des Fehlerschätzers in [18] geht nicht näher auf das Problem der Robustheit ein.

Stromliniendiffusions-Finite-Elemente-Methode

Ein sehr häufig zur numerischen Lösung von Konvektions-Diffusions-Problemen angewendetes Verfahren ist die Stromliniendiffusions-Finite-Elemente-Methode (kurz: *SD-FEM*), die von Hughes und Brooks [16] eingeführt wurde.

Für alle $v \in H^1(\Omega)$ und alle $w \in H_0^1(\Omega)$, die für alle Elemente T der Triangulierung T^N zusätzlich in $H^2(T)$ liegen, definieren wir die Bilinearform

$$a_{SD}(w, v) = a(w, v) + \sum_{T \in T^N} \delta_T (-\varepsilon \Delta w - \mathbf{b} \cdot \nabla w + cw, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T.$$

Dabei bezeichnet δ_T einen noch zu wählenden positiven, elementweise konstanten Parameter. Wir verwenden denselben Finite-Elemente-Raum V^N der bilinearen Ansatzfunktionen über einem Shishkin-Gitter wie oben. Als Lösung u^{SD} ergibt sich diejenige Funktion aus V^N , die für alle $v^N \in V^N$ der Gleichung

$$a_{SD}(u^{SD}, v^N) = (f, v^N) + \sum_{T \in T^N} \delta_T (f, \mathbf{b} \cdot \nabla v^N) \quad (6.7)$$

genügt. Im Gegensatz zur Upwind-FEM besitzt dieses Verfahren die Projektionseigenschaft

$$a_{SD}(u - u^{SD}, v^N) = 0 \quad \forall v^N \in V^N.$$

Falls der Stromliniendiffusionsparameter für alle $T \in T^N$ die Bedingung

$$0 \leq \delta_T \leq \frac{c_0}{\max_{(x,y) \in T} |c(x,y)|}$$

erfüllt, dann gilt für alle $v^N \in V^N$ die Ungleichung

$$a_{SD}(v^N, v^N) \geq \frac{1}{2} \|v^N\|_{SD}^2,$$

wobei die Norm $\|\cdot\|_{SD}$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ durch

$$\|v\|_{SD} := \left(\varepsilon \|\nabla v\|_2^2 + \sum_{T \in T^N} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla v\|_{2,T}^2 + c_0 \|v\|_2^2 \right)^{1/2}$$

definiert ist.

Im eindimensionalen Fall ist es stets möglich, den Stromliniendiffusionsparameter δ_T so zu wählen, daß die Systemmatrix des resultierenden diskreten Systems einem diskreten Maximumprinzip genügt. In [111] und [92] wird gezeigt, daß das Verfahren auf Shishkin- bzw. Shishkin-Typ-Gittern gleichmäßig von fast zweiter Ordnung bezüglich der Maximumnorm konvergiert. Die SDFEM erweist sich im eindimensionalen Fall aufgrund ihrer Stabilität und Genauigkeit in gewissem Sinne als optimale Methode zweiter Ordnung (vgl. [92, Bemerkung 6.3]). Folglich sollte sie anstelle des reinen Galerkin-Verfahrens mit bilinearen Ansatzfunktionen angewendet werden. Eine Kombination mit demselben im Rahmen eines Defektkorrekturalgorithmus erscheint hingegen nicht sinnvoll.

Im Falle eines zweidimensionalen Grundgebietes Ω ist es im allgemeinen nicht möglich, durch passende Wahl des Parameters δ_T ein inversmonotones diskretes System zu generieren. Dennoch weist die SDFEM gute Stabilitätseigenschaften auf. Die diskreten Systeme

können mit Hilfe von Standard-Iterationstechniken effektiv gelöst werden. In [113] wird die Fehlerschranke

$$\|u^I - u^{SD}\|_{SD} \leq C \left(\varepsilon N^{-1} \ln^{1/2} N + N^{-2} \ln^2 N \right)$$

und eine vergleichbare Abschätzung für den Verfahrensfehler $u - u^{SD}$ bezüglich einer diskreten Version der Norm $\|\cdot\|_{SD}$ bewiesen. Gemäß [67, 110] beobachtet man – im Gegensatz zu pessimistischeren theoretischen Fehlerschranken aus [112] – in numerischen Experimenten auf einem Shishkin-Gitter Konvergenz von fast zweiter Ordnung bezüglich der Maximumnorm und somit ein ähnliches Konvergenzverhalten wie für das reine Galerkin-Verfahren bei höherer Stabilität. Wiederum ist keine signifikante Verbesserung der Genauigkeit durch eine Kombination von SDFEM und Galerkin-Verfahren in einem Defektkorrekturprozeß zu erwarten, wenn man dieselben Finite-Elemente-Räume für beide Verfahren verwendet.

Bezeichnungen

Mengen, Räume und Normen:

\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	Menge der (positiven) natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\Omega, \bar{\Omega}$	beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^d und sein Abschluß
$\Gamma = \partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω
$C^k(\Omega)$	Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen über Ω
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Raum der k -mal α -Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen über Ω
$L_p(\Omega), \ \cdot\ _p$	Raum der über Ω zur p -ten Potenz integrierbaren Funktionen, $1 \leq p < \infty$, und die zugehörige Norm
$L_\infty(\Omega), \ \cdot\ _\infty$	Raum der beschränkten Funktionen über Ω und die Maximumnorm
$W_p^k(\Omega), \ \cdot\ _{k,p}$	Sobolev-Raum der Funktionen über Ω , deren verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung k in $L_p(\Omega)$ liegen, $k \in \mathbb{Z}$, und seine Norm
$\ \cdot\ _{1 \otimes \infty}, \ \cdot\ _{\infty \otimes 1}$	anisotrope Normen, vgl. Satz 1.6
(\cdot, \cdot)	Skalarprodukt in $L_2(\Omega)$
$\ \cdot\ _{\infty, d}$	diskrete Maximumnorm
$\ \cdot\ _{1, \sigma, d}$	diskrete L_1 -Norm mit Parameter σ , vgl. Satz 2.3
$(\cdot, \cdot)_\sigma$	parametrisiertes diskretes L_2 -Skalarprodukt
$\ \cdot\ _{*, \sigma, d}, \ \cdot\ _{*, d}$	spezielle diskrete Normen, vgl. (2.19) und Bemerkung 4.1
$\ \cdot\ _{1 \otimes \infty, d}, \ \cdot\ _{\infty \otimes 1, d}$	diskrete Versionen der anisotropen Normen

Stetige und diskrete Operatoren:

$\mathcal{L}, \mathcal{L}_k, \mathcal{A}$	lineare Differentialoperatoren
Δ, ∇	Laplace-Operator, Nabla-Operator
L, L°, A°	Differenzenoperatoren
$D^-, D^+, D^{0,\xi}$	Differenzenquotienten erster Ordnung
$D_{x,y}^-, D_{x,y}^+, D_{x,y}^0$	gerichtete Differenzenquotienten erster Ordnung
$\delta_\sigma^2, \delta_{x,y}^2$	Differenzenquotienten zweiter Ordnung
$\text{diag}(L)$	Diagonalmatrix (d_{jk}) mit $d_{jj} = l_{jj}$, wobei (l_{jk}) die L zugeordnete Matrix bezeichnet
$\text{diag}(g), g \in \mathbb{R}^N$	Diagonalmatrix (d_{jk}) mit $d_{jj} = g_j$

Funktionen:

u	Lösung der Differentialgleichung
$b, \mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$	Koeffizienten der Konvektionsterme
c	Koeffizient des Reaktionsterms
f	rechte Seite der Differentialgleichung
\mathcal{G}	Greensche Funktion
δ	Dirac-Distribution
$S, E, E_\nu (\nu = 1, 2, 12)$	glatter und exponentielle(r) Anteil(e) der exakten Lösung

Gitterparameter:

$\Omega^N, \Omega^N_{\dots}$	Gitter mit $(N - 1)^d$ inneren Gitterpunkten über $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
Γ^N	Menge der Gitterpunkte auf dem Rand von Ω
$h_i, h_{x;i}, h_{y;j}$	Gitterschrittweiten
$\bar{h}_{\sigma,i}, \bar{h}_{1/2,x;i}, \bar{h}_{1/2,y;j}$	gewichtet gemittelte Schrittweiten
h, H	Schrittweite des feinen bzw. groben Teils eines Shishkin-Gitters
φ, ψ	gittererzeugende und gittercharakterisierende Funktionen
$\lambda_0, \lambda_{0,\nu} (\nu = 1, 2)$	Parameter des Übergangspunktes eines Shishkin-Typ-Gitters

Gitterfunktionen:

u^N, u^{\dots}	mit dem zu L^{\dots} assoziierten Diskretisierungsverfahren erzeugte Approximation von u
\hat{g}	Einschränkung der stetigen Funktion g auf das Gitter Ω^N
G, G^{\dots}	diskretes Analogon der Greenschen Funktion zum Diskretisierungsoperator L^{\dots}
δ_σ^N	parametrisiertes diskretes Analogon zur δ -Distribution
$S^{\dots}, E^{\dots}, E_\nu^{\dots}$	Approximationen der Funktionen S, E, E_ν
B, B_1, B_2, B_{12}	Schrankenfunktionen
e^{\dots}	Fehler des zu L^{\dots} assoziierten Diskretisierungsverfahrens, $e^{\dots} = \hat{u} - u^{\dots}$
η^{\dots}	Fehlerdifferenz, $\eta_i^{\dots} = e_i^{\dots} - e_{i-1}^{\dots}$
τ^{\dots}	Konsistenzfehler des zu L^{\dots} assoziierten Diskretisierungsverfahrens
$\chi(M^N)$	charakteristische Funktion eines Teilgitters $M^N \subset \Omega^N$

Konstanten und Parameter:

ε	Störungsparameter
β, β_1, β_2	Unterschranken für b, b_1, b_2
q, β_0	$q \in (0, 1)$ beliebig, $\beta_0 \in (0, q\beta)$
$C, C_\nu (\nu = 1, 2)$	von ε und N unabhängige Konstanten

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces.*, volume 65 of *Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks.* Academic Press , New York–San Francisco–London, 1975.
- [2] Andreev, V.B. Anisotropic estimates for the discrete Green’s function of a monotone difference operator in the singular perturbed case and its application. Technical Report MATH-NM-06-00, Technische Universität Dresden, 2000.
- [3] Andreev, V.B. A–priori–Abschätzungen monotoner singular gestörter Dreipunkt-Differenzenschemata. Technical report, Moskauer Staatliche Lomonossow–Universität, 2001.
- [4] Andreev, V.B., Kopteva, N.V. On the convergence, uniform with respect to a small parameter, of monotone three-point difference approximations. *Diff. Equations*, 34:921–929, 1998.
- [5] Andreev, V.B., Savin, I.A. The uniform convergence with respect to a small parameter of A.A. Samarskii’s monotone scheme and its modification. *Comp. Math. Math. Phys.*, 35(5):581–591, 1995.
- [6] Axelsson, O. Defect correction methods for convection dominated convection-diffusion problems. In *Mathematical methods in energy research, Proc. Spec. Year, Univ. Wyoming 1982-83*, pages 3–21, 1984.
- [7] Axelsson, O., Layton, W. On the numerical solution of convection dominated convection-diffusion problems. *RAIRO, Modelisation Math. Anal. Numer.*, 24(4):423–455, 1990.
- [8] Axelsson, O., Nikolova, M. Adaptive refinement for convection–diffusion problems based on a defect–correction technique and finite difference method. *Computing*, 58:1–30, 1997.
- [9] Bakhvalov, N.S. Zur Optimierung von Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben bei Vorhandensein der Grenzschicht. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 9:841–859, 1969.
- [10] Barrett, J.W., Moore, G., Morton, K.W. Optimal recovery in the finite-element method. II: Defect correction for ordinary differential equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 8(4):527–540, 1988.
- [11] Belukhina, I.G. Die Fundamentallösung von singular gestörten Differenzenverfahren auf einem äquidistanten zweidimensionalen Gitter. Technical report, Moskauer Staatliche Lomonossow–Universität, 2001.

- [12] Blum, H. Asymptotic Error Expansion and Defect Correction in the Finite Element Method. Habilitationsschrift, Universität Heidelberg, 1991.
- [13] Böhmer, K. Asymptotic expansion for the discretization error in linear elliptic boundary value problems on general regions. *Math. Z.*, 177:235–255, 1981.
- [14] Böhmer, K., Hemker, P., Stetter, H.J. The defect correction approach. In Böhmer, K., Stetter, H.J., editor, *Defect correction methods. Theory and applications*, volume 5 of *Comput. Suppl.*, 1984.
- [15] Böhmer, K., Stetter, H.J., editor. *Defect correction methods. Theory and applications*, volume 5 of *Comput. Suppl.*, 1984.
- [16] Brooks, A., Hughes, T. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259, 1982.
- [17] Butcher, J.C., Cash, J.R., Moore, G., Russell, R.D. Defect correction for two-point boundary value problems on nonequidistant meshes. *Math. Comput.*, 64(210):629–648, 1995.
- [18] Cawood, M.E., Ervin, V.J., Layton, W.J., Maubach, J.M. Adaptive defect correction methods for convection dominated, convection diffusion problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 116(1):1–21, 2000.
- [19] Chibi, A.-S., Moore, G. Defect correction and Galerkin’s method for second-order boundary value problems. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 8(5):469–491, 1992.
- [20] de Boor, C. Good approximation by splines with variable knots. In *Spline Functions Approx. Theory, Proc. Sympos.*, number 21 in ISNM, pages 57–72, Univ. Alberta, Edmonton, 1973.
- [21] Désidéri, J.-A., Hemker, P.W. Convergence analysis of the defect-correction iteration for hyperbolic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(1):88–118, 1995.
- [22] Dobrowolski, M., Roos, H.-G. Stability estimates for singular perturbed elliptic boundary value problems. Technical Report Informationen der TUD 07-17-90, Technische Universität Dresden, 1990.
- [23] Dobrowolski, M., Roos, H.-G. A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes. *Z. Anal. Anwend.*, 16(4):1001–1012, 1997.
- [24] Dörfler, W. Uniformly Convergent Finite-Element Methods for Singularly Perturbed Convection-Diffusion-Equations. Habilitationsschrift, Albert-Ludwig-Universität Freiburg, 1998.
- [25] Ervin, V., Layton, W. An analysis of a defect-correction method for a model convection-diffusion equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(1):169–179, 1989.
- [26] Ferreira, J.A. Supraconvergence of a class of moving grid methods for solving a nonlinear problem. *Appl. Numer. Math.*, 21(1):43–56, 1996.

- [27] Fox, L. Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 190:31–49, 1947.
- [28] Fox, L. The solution by relaxation methods of ordinary differential equations. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 45:50–68, 1949.
- [29] Fox, L. *The Numerical Solution of two-point Boundary Problems in Ordinary Differential Equations.*, volume 1 of *Monographs on Numerical Analysis*. London Clarendon Press: Oxford University Press XI, London, 1957.
- [30] Frank, R. The method of iterated defect-correction and its application to two-point boundary value problems. I. *Numer. Math.*, 25:409–419, 1976.
- [31] Frank, R. The method of iterated defect-correction and its application to two-point boundary value problems. II. *Numer. Math.*, 27:407–420, 1977.
- [32] Frank, R., Hertling, J., Überhuber, C.W. Iterated defect correction based on estimates of the local discretization error. Technical Report 18/76, Technische Universität Wien, 1976.
- [33] Frank, R., Ueberhuber, C.W. Collocation and iterated defect correction. In *Numer. Treat. Differ. Equat., Proc. Conf., Oberwolfach 1976*, volume 631 of *Lect. Notes Math.*, pages 19–34, 1978.
- [34] Fröhner, A., Linß, T., Roos, H.–G. Defect correction on Shishkin-type meshes. *Num. Algorithms*, 26:281–299, 2001.
- [35] Fröhner, A., Roos, H.–G. Defect correction on a twodimensional Shishkin-mesh. Technical Report MATH-NM-03-01, Technische Universität Dresden, 2001.
- [36] Fröhner, A., Roos, H.–G. The ε -uniform convergence of a defect correction method on a Shishkin mesh. *Appl. Numer. Math.*, 37:79–94, 2001.
- [37] Gao, J., Yang, Y., Shih, T.M. The defect iteration of the finite element for elliptic boundary value problems and Petrov-Galerkin approximation. *J. Comput. Math.*, 16(2):152–164, 1998.
- [38] Gartland, E.C. Strong uniform stability and exact discretizations of a model singular perturbation problem and its finite difference approximations. *Appl. Math. Comp.*, 31:473–485, 1989.
- [39] Gilbarg, D., Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd ed.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [40] Grigorieff, R.D. Some stability inequalities for compact finite difference schemes. *Math. Nachr.*, 135:93–101, 1988.
- [41] Großmann, Chr., Roos, H.–G. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1992.
- [42] Hackbusch, W. Bemerkungen zur iterierten Defektkorrektur und zu ihrer Kombination mit Mehrgitterverfahren. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 26:1319–1329, 1981.

- [43] Han, H., Kellogg, R.B. Differentiability properties of solutions of the equation $-\epsilon^2 \Delta u + ru = f(x, y)$ in a square. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(2):394–408, 1990.
- [44] Heinrichs, W. Defect correction for convection-dominated flow. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(5):1082–1091, 1996.
- [45] Hemker, P.W. Mixed defect correction iteration for the accurate solution of the convection diffusion equation. In *Multigrid methods, Proc. Conf., Kloen-Portz 1981*, volume 960 of *Lect. Notes Math.*, pages 485–501, 1982.
- [46] Hemker, P.W. The use of defect correction for the solution of a singularly perturbed o.d.e. Technical Report 139/82, Afdeling Numerieke Wiskunde, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1982.
- [47] Hemker, P.W. Mixed defect correction iteration for the solution of a singular perturbation problem. In Böhmer, K., Stetter, H.J., editor, *Defect correction methods. Theory and applications*, volume 5 of *Comput. Suppl.*, 1984.
- [48] Hemker, P.W. Lecture Notes on Defect Correction. Lecture Notes, University of Amsterdam, 1995.
- [49] Keller, H. B. Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 6:8–30, 1969.
- [50] Kellogg, R.B., Tsan, A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points. *Math. Comp.*, 32:1025–1039, 1978.
- [51] Königsberger, K. *Analysis 1*. Springer–Verlag, Berlin, 1999.
- [52] Kopteva, N.V. Uniform convergence with respect to a small parameter of a scheme with central difference on refining grids. *Comput. Math. Math. Phys.*, 39(10):1594–1610, 1999.
- [53] Kopteva, N.V. Maximum norm a posteriori error estimates for a one-dimensional convection-diffusion problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(2):423–441, 2001.
- [54] Kopteva, N.V., Linß, T. Uniform second order pointwise convergence of a central difference approximation for a quasilinear convection-diffusion problem. *J. Comp. Appl. Math.*, 137(2):257–267, 2001.
- [55] Kopteva, N.V., Stynes, M. Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem. *Appl. Numer. Math.*, 39:47–60, 2001.
- [56] Lenferink, W. Pointwise convergence of approximations to a convection-diffusion equation on a Shishkin mesh. *Appl. Numer. Math.*, 32(1):69–86, 2000.
- [57] Linß, T. Shishkin Meshes and Decompositions for Singularly Perturbed Convection–Diffusion–Problems. PhD-Thesis, University College Cork, 1998.
- [58] Linß, T. Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids / On the necessity of Shishkin decomposition . Technical Report MATH-NM-02-00, Technische Universität Dresden, 2000.
- [59] Linß, T. Uniform superconvergence of a Galerkin finite element method on Shishkin–type meshes. *Num. Methods for Partial Differential Equations*, 16(5):426–440, 2000.

- [60] Linß, T. Solution decomposition for convection-diffusion problems with boundary turning points and an application. Technical Report MATH-NM-05-01, Technische Universität Dresden, 2001.
- [61] Linß, T. Uniform pointwise convergence of finite difference schemes using grid equidistribution. *Computing*, 66(1):27–39, 2001.
- [62] Linß, T. Error expansion for a first-order upwind difference scheme applied to a model convection-diffusion problem. Technical Report MATH-NM-01-02, Technische Universität Dresden, 2002.
- [63] Linß, T., Roos, H.-G., Vulanović, R. Uniform pointwise convergence on Shishkin-type meshes for quasilinear convection-diffusion problems. *SIAM J. Num. Anal.*, 38(3):897–912, 2000.
- [64] Linß, T. persönliche Mitteilung, 2000.
- [65] Linß, T., Stynes, M. A hybrid difference scheme on a Shishkin mesh for linear convection-diffusion problems. *Appl. Numer. Math.*, 31(3):255–270, 1999.
- [66] Linß, T., Stynes, M. Asymptotic analysis and Shishkin-type decomposition for an elliptic convection-diffusion problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 261(2):604–632, 2001.
- [67] Linß, T., Stynes, M. Numerical methods on Shishkin meshes for linear convection-diffusion problems. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 190(28):3527–3542, 2001.
- [68] Liseikin, V.D., Yanenko, N.N. On the numerical solution of equations with interior and exterior boundary layers on a nonuniform mesh. In *BAIL III, Proc. 3rd Int. Conf. Boundary and interior layers*, pages 68–80, Dublin/Ireland, 1984.
- [69] Marchuk, G.I., Shajdurov, V.V. *Increasing the Accuracy of Solutions of Difference Schemes*. Nauka, Moscow, 1979.
- [70] Meister, A., Sonar, T. Asymptotische Entwicklungen und ihre Anwendungen in technischen Problemstellungen. Vorlesungsmanuskript, Universität Hamburg, 1997.
- [71] Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I. On piecewise-uniform meshes for upwind- and central-difference operators for solving singularly perturbed problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 15:89–99, 1995.
- [72] Miller, J.J.H., Shishkin, G.I., O’Riordan, E. *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in one and two Dimensions*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [73] Miranda, C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [74] Moore, G. Defect correction from a Galerkin viewpoint. *Numer. Math.*, 52(5):565–582, 1988.
- [75] Morton, K. W. *Numerical Solution of Convection-Diffusion-Problems*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [76] Natividad, M. C., Stynes, M. Richardson extrapolation for a convection-diffusion problem using a Shishkin mesh. Technical Report 2001-05, Departement of Mathematics, National University of Ireland, Cork, 2001.

- [77] Niederdrenk, K., Yserentant, H. The uniform stability of a singularly perturbed discrete and continuous boundary value problem. *Numer. Math.*, 41:223–253, 1983.
- [78] Nikolova, M. Adaptive Refinement Methods for Singularly Perturbed Convection–Diffusion–Problems. PhD-Thesis, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1999.
- [79] Nikolova, M. Error indicators for adaptive refinement of singularly perturbed convection-diffusion problems. In Neittaanmaeki, Pekka (ed.) et al., editor, *ENUMATH 99. Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of the 3rd European conference, Jyväskylä, Finland, July 26-30, 1999.*, pages 154–161, Singapore, 2000. World Scientific.
- [80] O’Malley, R.E.Jr. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [81] Pereyra, V. On improving an approximate solution of a functional equation by deferred corrections. *Numer. Math.*, 8:376–391, 1966.
- [82] Pereyra, V. Iterated deferred corrections for nonlinear operator equations. *Numer. Math.*, 10:316–323, 1967.
- [83] Protter, M.H., Weinberger, H.F. *Maximum–Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [84] Rannacher, R. Defect correction techniques in the finite element method. In *Progress in partial differential equations: the Metz surveys. Papers from the ‘Metz days’ conferences, held in Metz, France, during 1989-1990.*, number 249 in Pitman Res. Notes Math. Ser., pages 184–200. Harlow: Longman Scientific & Technical., 1991.
- [85] Reinhardt, H.-J. Defect correction and asymptotic expansions for the approximate solution of functional equations containing a small parameter. I: Basic perturbation theory. In *An introduction to computational and asymptotic methods for boundary and interior layers, Lect. Notes BAIL II Conf., Dublin 1982*, volume 4 of *Adv. Numer. Comput. Ser.*, pages 89–94. Boole Press, 1982.
- [86] Reinhardt, H.-J. Defect correction and asymptotic expansions for the approximate solution of functional equations containing a small parameter. II: Asymptotic expansions for a singular perturbation problem. In *An introduction to computational and asymptotic methods for boundary and interior layers, Lect. Notes BAIL II Conf., Dublin 1982*, volume 4 of *Adv. Numer. Comput. Ser.*, pages 95–99. Boole Press, 1982.
- [87] Reinhardt, H.-J. Defect corrections with finite element methods for singular perturbation problems. In *Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers, Proc. BAIL II Conf., Dublin 1982*, volume 4 of *Boole Press Conf. Ser.*, pages 348–356. Boole Press, 1982.
- [88] Reinhardt, H.-J. On a principle of direct defect correction based on a-posteriori error estimates. In *Defect correction methods. Theory and applications*, volume 5 of *Comput. Suppl.*, pages 43–66, 1984.
- [89] Roos, H.–G. Layer–adapted grids for singular perturbation problems. *Z. Angew. Math. Mech.*, 78(5):291–309, 1998.

- [90] Roos, H.-G. Optimal uniform convergence of basic schemes for elliptic problems with strong parabolic boundary layers. *J. Math. Anal. Appl.*, 267:194–208, 2002.
- [91] Roos, H.-G., Stynes, M., Tobiska, L. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [92] Roos, H.-G., Zarin, H. The streamline-diffusion method for a convection-diffusion problem with a point source. Technical Report MATH-NM-19-01, Technische Universität Dresden, 2001.
- [93] Roos, H.-G., Adam, D., Felgenhauer, A. A novel nonconforming uniformly convergent finite element method in two dimensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 201(3):715–755, 1996.
- [94] Roos, H.-G., Linß, T. Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids. *Computing*, 63(1):27–45, 1999.
- [95] Samarskij, A.A. *Theorie der Differenzenverfahren*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.-G., Leipzig, 1984.
- [96] Schneider, D. Die Analyse von Upwind-Verfahren zur Lösung singular gestörter Randwertprobleme auf grenschichtangepaßten Gittern. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 1999.
- [97] Schneider, D., Roos, H.-G., Linß, T. Uniform convergence of an upwind finite element method on layer-adapted grids. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 190:4519–4530, 2001.
- [98] Shishkin, G. I. Grid Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations. Second Doctoral Thesis, Keldysh Institute of Mathematics, Academy of Sciences, Moscow, 1990.
- [99] Shishkin, G. I. Discrete Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations. Russian Academy of Sciences, Ural Section, Ekatarinburg, 1992.
- [100] Skeel, R. D. A theoretical framework for proving accuracy results for deferred corrections. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:171–196, 1982.
- [101] Skeel, R.D. The order of accuracy for deferred corrections using uncentered end formulas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23:393–402, 1986.
- [102] Spijker, M.N. Convergence and stability of step-by-step methods for the numerical solution of initial-value problems. *Numer. Math.*, 8:161–177, 1966.
- [103] Stetter, H. J. *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*, volume 23 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [104] Stetter, H.J. Asymptotic expansions for the error of discretization algorithms for non-linear functional equations. *Numer. Math.*, 7:18–31, 1965.
- [105] Stetter, H.J. Economical global error estimation. In R.A. Willoughby, editor, *Stiff differential systems*, pages 245–258. Plenum Press, 1974.
- [106] Stetter, H.J. The defect correction principle and discretization methods. *Numer. Math.*, 29:425–443, 1978.

- [107] Stoer, J., Bulirsch, R. *Numerische Mathematik II*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [108] Stynes, M., O’Riordan, E. A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection–diffusion problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 214:36–54, 1997.
- [109] Stynes, M., Roos, H.–G. The midpoint upwind scheme. *Applied Numerical Math.*, 23:361–374, 1997.
- [110] Stynes, M., Tobiska, L. Error estimates and numerical experiments for streamline diffusion type method on arbitrary and shishkin meshes. *CWI Quaterly*, 10:337–352, 1997.
- [111] Stynes, M., Tobiska, L. A finite difference analysis of a streamline diffusion method on a Shishkin mesh. *Numer. Algorithms*, 18(3-4):337–360, 1998.
- [112] Stynes, M., Tobiska, L. Analysis of the streamline–diffusion finite element method on a Shishkin mesh for a convection–diffusion problem with exponential layers. Technical Report 17, Fakultät für Mathematik, Otto–von–Guericke–Universität Magdeburg, 1998.
- [113] Stynes, M., Tobiska, L. The SDFEM for a convection–diffusion problem with a boundary layer: optimal error analysis and enhancement of accuracy. Technical Report 9, Fakultät für Mathematik, Otto–von–Guericke–Universität Magdeburg, 2002.
- [114] Vulcanović, R. Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems. In *Numerical methods and approximation theory, Conf.*, pages 137–142, Nis/Yugosl., 1984.
- [115] Vulcanović, R. A priori meshes for singularly perturbed quasilinear two-point boundary value problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 21(1):349–366, 2001.
- [116] Wollstein, D., Linß, T., Roos, H.–G. A uniformly accurate finite volume discretization for a convection-diffusion problem. Technical Report MATH-NM-01-01, Technische Universität Dresden, 2001.
- [117] Zadunaisky, P.E. On the accuracy in the numerical computation of orbits. In *Periodic Orbits, Stability, Resonances, Proc. Sympos. Univ. Sao Paulo, Brasil 1969*, pages 216–227, 1970.
- [118] Zadunaisky, P.E. On the estimation of errors propagated in the numerical integration of ordinary differential equations. *Numer. Math.*, 27:21–39, 1976.

Versicherung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Erklärung

Die Dissertation mit dem Thema „Defektkorrekturverfahren für singulär gestörte Randwertaufgaben“ wurde an der Technischen Universität Dresden an der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften im Institut für Numerische Mathematik unter der Betreuung von Prof. Dr. H.-G. Roos angefertigt.