

Stabilitätsuntersuchungen an Asteroidenbahnen in ausgewählten Bahnresonanzen des Edgeworth-Kuiper-Gürtels

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt von
Dipl.-Ing.(FH) Enrico Gerlach

Gutachter:

Prof. Dr. phil. nat. habil. Michael H. Soffel
Technische Universität Dresden

Apl. Prof. Dr. habil. Sergei A. Klioner
Technische Universität Dresden

Prof. Dr. Rudolf Dvorak
Universität Wien

Dresden, Oktober 2008

Erklärung des Promovenden

Die Übereinstimmung dieses Exemplars mit dem Original der Dissertation zum Thema:

„Stabilitätsuntersuchungen an Asteroidenbahnen in ausgewählten Bahnresonanzen des Edgeworth-Kuiper-Gürtels“

wird hiermit bestätigt.

Enrico Gerlach

Dresden, am 26.10.2008

Kurzfassung

Gegenstand dieser Dissertation ist eine umfassende Analyse der Stabilität von Asteroidenbahnen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel am Beispiel der 3:5-, 4:7- und der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun. Einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit bildet die Untersuchung der numerischen Berechenbarkeit der Lyapunov-Zeit von Asteroidenbahnen.

Ausgehend von einer allgemeinen Beschreibung der bei numerischen Berechnungen auftretenden Rundungs- und Diskretisierungsfehler wird deren Wachstum bei numerischen Integrationen ermittelt. Diese, teilweise maschinenabhängigen, Fehler beeinflussen die berechnete Trajektorie des Asteroiden ebenso wie die daraus abgeleitete Lyapunov-Zeit. Durch Beispielrechnungen mit unterschiedlichen Rechnerarchitekturen und Integrationsmethoden wird der Einfluss auf die erhaltenen Lyapunov-Zeiten eingehend untersucht. Als Maß zur Beschreibung dieser Abhängigkeit wird ein Berechenbarkeitsindex κ definiert. Weiterhin wird gezeigt, dass die allgemeine Struktur des Phasenraumes robust gegenüber diesen Änderungen ist.

Unter Nutzung dieser Erkenntnis werden anschließend ausgewählte Bahnresonanzen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel untersucht. Grundlegende Charakteristika, wie die Resonanzbreiten, werden dabei aus einfachen Modellen abgeleitet. Eine möglichst realitätsnahe Beschreibung der Stabilität wird durch numerische Integration einer Vielzahl von Testkörpern zusammen mit den Planeten Jupiter bis Neptun erreicht. Die erhaltenen Ergebnisse werden dabei mit der beobachteten Verteilung der Asteroiden im Edgeworth-Kuiper-Gürtel verglichen.

Abstract

This dissertation presents a comprehensive description of the stability of asteroid orbits in the Edgeworth-Kuiper belt taking the 3:5, 4:7 and 1:2 mean motion resonance with Neptune as example. Further emphasis is given to the numerical computability of the Lyapunov time of asteroids.

Starting with a general description of rounding and approximation errors in numerical computations, the growth of these errors within numerical integrations is estimated. These, partly machine-dependent errors influence the calculated trajectory of the asteroid as well as the derived Lyapunov time. Different hardware architectures and integration methods were used to investigate the influence on the computed Lyapunov time. As a measure of this dependence a computability index κ is defined. Furthermore it is shown, that the general structure of phase space is robust against these changes.

Subsequently, several selected mean motion resonances in the Edgeworth-Kuiper belt are investigated using these findings. Basic properties, like the resonance width, are deduced from simple models. To get a realistic description of the stability, a huge number of test particles was numerically integrated together with the planets Jupiter to Neptune. The obtained results are compared to the observed distribution of asteroids in the Edgeworth-Kuiper belt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation und Ziele der Arbeit	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Grundlagen	3
2.1	Der Edgeworth-Kuiper-Gürtel: Stand der Forschung	3
2.2	Resonanzen	9
2.2.1	Bahnresonanzen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel	9
2.2.2	Säkulare Resonanzen	13
2.3	Integrationsmethoden	14
2.3.1	Extrapolationsmethoden	15
2.3.2	Symplektische Integrationsmethoden	17
2.3.3	Ein Vergleich der Integrationsmethoden	21
2.4	Chaosindikatoren	23
2.4.1	Lyapunov-Indikatoren	23
2.4.2	Frequenzanalyse	27
3	Berechenbarkeit	31
3.1	Fehler numerischer Methoden	31
3.1.1	Repräsentation von Zahlen im Computer	31
3.1.2	Rundungsfehler	32
3.1.3	Diskretisierungsfehler	36
3.1.4	Optimale Schrittweiten	38
3.2	Die numerische Berechenbarkeit von Chaosindikatoren	39
3.2.1	Aufbau der Integrationen	40
3.2.2	Diskussion der Ergebnisse	42
3.2.3	Der Berechenbarkeitsindex κ	48
3.3	Schattenorbits	52
4	Stabilitätsuntersuchungen ausgewählter Bahnresonanzen	57
4.1	Das planare, eingeschränkte 3-Körper-Problem	57
4.2	Die Kozai-Resonanz	63
4.3	Das komplette N -Körper-Problem	66
4.3.1	Aufbau der Integrationen	66
4.3.2	Die 3:5-Bahnresonanz	68
4.3.3	Die 4:7-Bahnresonanz	75
4.3.4	Die 1:2-Bahnresonanz	81
5	Zusammenfassung und Ausblick	87
5.1	Resultate	87

5.2 Ausblick	88
A Rückwärtige Fehleranalyse	91
B Box-Whisker-Plots	95
C Getrimmtes Mittel und Standardabweichung	97
D Berechnung eines Schattenorbits	99
Literaturverzeichnis	103

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Abkürzungen

AE	Astronomische Einheit
EKG	Edgeworth-Kuiper-Gürtel
FA	Frequenzanalyse
KAM	Akronym für Kolmogorov, Arnold und Moser
<i>MEGNO</i>	Mean Exponential Growth of Nearby Orbits
MPC	Minor Planet Center http://cfa-www.harvard.edu/iau/mpc.html
<i>SABAn</i>	Symplektischer Integrator Hamiltonscher Systeme der Ordnung n .
<i>SV</i>	Störmer-Verlet

Symbole

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
ϕ_h	Diskrete Näherung einer Integrationsmethode für den Phasenfluss φ_t
φ_t	Phasenfluss eines dynamischen Systems
γ	maximaler Lyapunov-Exponent
γ_Y	γ , aus dem <i>MEGNO</i> -Indikator berechnet
$\gamma_{Y,R}$	γ , mittels linearer Regression aus <i>MEGNO</i> berechnet
$\sigma_{p+q;p}$	Resonanzwinkel der Resonanz $p + q : p$
h	Schrittweite einer numerischen Integrationsmethode
\mathcal{G}	Gravitationskonstante = $6.672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
\mathcal{H}	Hamilton-Funktion
$\tilde{\mathcal{H}}$	gemittelte Hamiltonsche Funktion
T_L	Lyapunov-Zeit

\mathbf{J}	Jacobi-Matrix
$\ \mathbf{x}\ $	L ₂ -Norm des Vektors \mathbf{x}
x_i	das i -te Element des Vektors \mathbf{x}

Abbildungsverzeichnis

2.1	Die dynamische Lebenszeit von Testpartikeln im EKG	4
2.2	Das Nice-Modell des EKG	8
2.3	Schematische Darstellung einer Bahnresonanz	10
2.4	Der minimale Abstand zu Neptun	12
2.6	Symplektizität (Flächenerhaltung) einer linearen Abbildung φ_t	19
2.7	Vergleich der Integrationsfehler zwischen <i>ODEX</i> und einer <i>SV</i> -Methode	22
2.8	Stabilitätskarte für das Arnold-Netz	26
2.9	Bestimmung von γ für das Arnold-Netz mit $p_2 = 0.2$	27
2.10	Frequenzanalyse für den EKG	30
3.1	Rundungsfehler der <i>SV</i> -Methode	35
3.2	Illustration der kompensierten Summation	36
3.3	Rundungsfehler mit kompensierter Summation	36
3.4	Diskretisierungsfehler der <i>SV</i> -Methode	37
3.5	Der <i>MEGNO</i> -Verlauf der Asteroiden 1981EY39 und Helga	44
3.6	<i>MEGNO</i> -Verlauf und minimaler Abstand des Asteroiden 1981EY39 zu Mars	45
3.7	Die große Halbachse und einige Resonanzwinkel des Asteroiden 1981EY39	46
3.8	Lyapunov-Zeiten der Umgebung der Asteroiden 1981EY39 und Helga	47
3.9	Maximaler Lyapunov-Exponent in der Region von 2.155-2.20 AE	49
3.10	Box-Whisker-Plot für die Asteroiden Helga und 1981EY39	51
3.11	Schematische Darstellung des Schattenlemmas	53
4.1	Isolinien für verschiedene Werte von N für die 3:5-Bahnresonanz	59
4.2	Kontourlinien der 1:2- und der 3:5-Bahnresonanz	60
4.3	Resonanzbreiten im EKG	61
4.4	Amplitude und Periode des Resonanzwinkels der 1:2- und 3:5-Bahnresonanz	62
4.5	Kozai-Resonanz innerhalb der 3:5- und der 4:7-Bahnresonanz	65
4.6	Kozai-Resonanz innerhalb der 1:2-Bahnresonanz im EKG	66
4.7	Positionsdifferenz in Abhängigkeit von der Schrittweite h	68
4.8	Die 3:5-Bahnresonanz für Körper niedriger Inklination	70
4.9	Stabile Bahn eines Testkörpers in der 3:5-Bahnresonanz	72
4.10	Die 3:5-Bahnresonanz für Körper hoher Inklination	73
4.11	Testkörper innerhalb der 3:5-Bahnresonanz und der Kozai-Resonanz	74
4.12	4:7-Bahnresonanz: Lyapunov-Exponent und Amplitude des Resonanzwinkels	76
4.13	Differenz der Exzentrizität zur anfänglichen Exzentrizität e_0	78
4.14	Säkulare Resonanz in der 4:7-Bahnresonanz	79
4.15	Der zeitliche Verlauf einiger Bahnelemente von 1999 HG12	80
4.16	1:2-Bahnresonanz: Lyapunov-Exponent und Amplitude des Resonanzwinkels	83
4.17	Der zeitliche Verlauf einiger Bahnelemente von 1996 TR66	86

A.1	Vergleich der exakten und numerischen Lösung der modifizierten Gleichung	93
B.1	Box-Whisker-Plot der Beispieldatenreihe.	95
B.2	Box-Whisker-Plot einer Normalverteilung	96

Tabellenverzeichnis

2.1	Position der untersuchten Bahnresonanzen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel . .	9
2.2	Das Langzeitverhalten verschiedener Integratoren im Vergleich	22
3.1	Optimale Schrittweite für <i>SV</i> -Methoden	39
3.2	Lyapunov-Zeiten einiger ausgewählter Asteroiden	41
3.3	Lyapunov-Zeiten in Abhängigkeit von der Berechnungsmethode	42
3.4	Mittelwert und Standardabweichung der errechneten Lyapunov-Zeiten . . .	43
3.5	Getrimmte Mittel für Intel und SGI	51
3.6	Der Berechenbarkeitsindex κ der untersuchten Asteroiden	52
3.7	Zeitliche Obergrenzen für das Auffinden einer Schattenbahn	55
4.1	Ephemeriden der großen Planeten für den 01.01.2000	67
4.2	Bahndaten einiger Asteroiden in der 1:2 Bahnresonanz für den 27.10.2007	84

1 Einführung

1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

Am 30. August 1992, nach 5 Jahren intensiver Suche, beobachteten Dave Jewitt und Jane Luu von der University of Hawaii den ersten trans-neptunischen Asteroiden: 1992 QB1 (Jewitt und Luu (1993)). Seitdem sind 1309 dieser Körper (Stand: Mai 2008) in dem nun als Edgeworth-Kuiper-Gürtel (EKG) bezeichneten Gebiet unseres Sonnensystems gefunden worden.

Die ersten theoretischen Arbeiten zur Existenz dieses Asteroidengürtels durch Edgeworth (1949) und Kuiper (1951) datieren auf die Mitte des letzten Jahrhunderts. Betrachtete man dieses Gebiet anfänglich lediglich als Herkunftsort kurzperiodischer Kometen am Rande unseres Sonnensystems, so änderte sich diese Sichtweise in den letzten Jahren stark. Die neuesten Beobachtungen und Forschungen zeigen eine sehr komplexe dynamische Struktur, welche viele Hinweise auf die Entstehungsgeschichte unseres Sonnensystems birgt. Der Versuch, die Verteilung der Asteroiden im Edgeworth-Kuiper-Gürtel zu verstehen und im Computer zu modellieren, führte schließlich unter anderem zu einem neuen und verbesserten Verständnis der Migration der großen Gasplaneten Jupiter bis Neptun und zur Erklärung des großen Bombardements (engl. *Late Heavy Bombardment*) des Mondes (siehe z. B. Morbidelli, Levison und Gomes (2007)).

Neben diesen Forschungen zur Entwicklungsgeschichte unseres Sonnensystems begannen schon bald nach der Entdeckung von 1992 QB1 eingehende Untersuchungen einzelner Resonanzgebiete. Viele dieser Arbeiten konzentrierten sich aufgrund der interessanten Dynamik und ihres prominenten Mitgliedes Pluto auf die 2:3-Bahnresonanz mit Neptun (z. B. Morbidelli (1997), Nesvorný und Roig (2000)).

Für viele andere Resonanzen, wie z. B. die 3:5-Bahnresonanz fehlen solche Untersuchungen bislang. Die Dynamik in einigen dieser Gebiete besser zu verstehen ist deshalb eines der Ziele dieser Arbeit. Vergleichend soll hier die Stabilität in der 3:5-, 4:7- und 1:2-Bahnresonanz mit Neptun mit numerischen Mitteln bestimmt und dargestellt werden. Mit Hilfe einfacher Modelle sollen dabei zunächst die grundlegenden Zusammenhänge beschrieben werden. Um eine möglichst realitätsnahe Darstellung der Dynamik zu bekommen sollen in weiteren Berechnungen die Störwirkungen aller großen Planeten berücksichtigt werden. Die erhaltenen Ergebnisse sollen anschließend interpretiert und mit der Verteilung der bereits bekannten trans-neptunischen Objekte in den entsprechenden Gebieten verglichen werden.

In der Asteroidendynamik wird für solche Stabilitätsuntersuchungen unter anderem der so genannte Lyapunov-Exponent benutzt. Trotz einer rigorosen mathematischen Definition findet man in der Literatur teilweise erhebliche Unterschiede in den numerisch bestimmten Werten für den selben Asteroiden. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist daher eine Untersuchung der Ursachen dieser Unterschiede. Konkret soll dabei der Einfluss der verwendeten Rechnerarchitektur und der benutzten Integrationsroutine betrachtet werden. Anhand repräsentativer Beispiele sollen diese Einflüsse belegt und, sofern möglich, erklärt

werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Ausgehend von den genannten Zielsetzungen gliedert sich diese Arbeit in 5 Kapitel. Die Arbeit beginnt im Anschluss an diese Einführung in Kapitel 2 mit der Darlegung wichtiger theoretischer Grundlagen. Zunächst erfolgt dabei ein kurzer geschichtlichen Überblick über die Entwicklung unseres heutigen Verständnisses des Edgeworth-Kuiper-Gürtels. Neben einer Klassifizierung der bisher bekannten Objekte wird geschildert, wie diese Forschung schließlich unsere heutige Sicht der Entwicklung des Sonnensystems beeinflusste. Eine Beschreibung grundlegender Mechanismen von Bahnresonanzen in der Himmelsmechanik schließt daran an. Diesem folgt eine Darstellung der in der Arbeit verwendeten Integrationsmethoden, welche mit einem Vergleich der Methoden abschließt. Ein Abschnitt über Chaosindikatoren beendet Kapitel 2, wobei neben dem klassischen Lyapunov-Indikator auch der neuartige *MEGNO*-Indikator und die Frequenzanalyse vorgestellt werden.

Kapitel 3 bildet den ersten Hauptteil dieser Arbeit. Hier erfolgt eine umfassende Untersuchung zur numerischen Berechenbarkeit von Lyapunov-Zeiten von Asteroiden. Das Kapitel beginnt mit einer Beschreibung, wie Zahlen in Computern gespeichert und verarbeitet werden. Im Anschluss daran werden einige der bei numerischen Rechnungen auftretenden Fehler beschrieben und deren Effekt für numerische Integrationen abgeschätzt. Ausgehend von diesen Betrachtungen wird am Ende des Abschnittes eine Formel für die optimale Schrittweite symplektischer Integratoren am Beispiel des Kepler-Problems angegeben.

Mit diesen optimalen Schrittweiten erfolgen dann in Kapitel 3.2 die eigentlichen Untersuchungen zur Berechenbarkeit. Dabei wird für vier ausgewählte Asteroiden die Lyapunov-Zeit unter Verwendung verschiedener Integrationsmethoden und Rechnerarchitekturen berechnet. Die erhaltenen Ergebnisse und die Gründe für die Unterschiede zwischen diesen werden im Anschluss diskutiert. Um zu entscheiden, wie sensibel die Ergebnisse bei einzelnen Asteroiden auf eine Änderung der Berechnungsmethode reagieren, wird abschließend der Berechenbarkeitsindex κ definiert, welcher als ein Maß für diese Sensibilität dienen kann.

Den zweiten Hauptteil dieser Arbeit stellt Kapitel 4 dar. Dieses beschreibt die Stabilität von Asteroidenbahnen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel am Beispiel der 3:5-, 4:7- und der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun. Das Kapitel beginnt mit einer Darstellung der Dynamik im eingeschränkten planaren 3-Körper-Problem. Mit Hilfe dieses einfachen Modells werden grundlegende Charakteristika der einzelnen Resonanzen, wie Resonanzbreite, Amplitude und Periode des Resonanzwinkels abgeleitet. Dieses Modell wird im folgenden Abschnitt erweitert, um die Kozai-Resonanz innerhalb einer Bahnresonanz zu beschreiben.

Im zweiten Teil von Kapitel 4 werden die Ergebnisse der numerischen Integrationen einer Vielzahl fiktiver Testkörper in den Bereichen der Bahnresonanzen geschildert und interpretiert. Unter Nutzung dieser Ergebnisse findet dann eine Beurteilung der Stabilität bekannter trans-neptunischer Objekte in diesen Gebieten statt.

Die erreichten Ergebnisse werden in Kapitel 5 zusammengefasst. Um die Arbeit in sich abzuschließen, finden sich im Anhang noch die Darstellungen einiger der verwendeten mathematischen Methoden. Das Literaturverzeichnis bildet den Abschluss der Arbeit.

2 Grundlagen

2.1 Der Edgeworth-Kuiper-Gürtel: Stand der Forschung

Angeregt durch seine Arbeiten zur Entstehung unseres Sonnensystems vermutete der Ire Kenneth Edgeworth (1949) als Erster, dass dieses nicht durch die Bahn von Pluto begrenzt sein kann, sondern sich sehr viel weiter ausdehnen muss. Er schlussfolgerte, dass sich daher in größerer Sonnenentfernung noch viele unentdeckte Körper befinden müssen. Ohne von den Arbeiten Edgeworths gewusst zu haben, kam der niederländische Astronom Gerard Kuiper (1951) bei der Suche nach der Herkunftsregion der Kometen zu dem gleichen Schluss. Ihnen zu Ehren bezeichnet man daher heute den Bereich unseres Sonnensystems, welcher sich außerhalb der Bahn Neptuns bis zu einer Entfernung von rund 50 Astronomischen Einheiten (AE) erstreckt, als Edgeworth-Kuiper-Gürtel (EKG).

Später griff Fernández (1980) die Idee eines ringförmigen Gebietes außerhalb der Neptunbahn erneut auf, um die Herkunft kurzperiodischer Kometen¹ zu erklären. Auslöser seiner Überlegungen war die Beobachtung, dass diese Kometen alle eine niedrige Inklination besitzen. Dies sprach gegen die bis dahin vermutete Oortsche Wolke als Quellregion, da in diesem Fall eine isotrope Verteilung zu erwarten wäre. Duncan, Quinn und Tremaine (1988) und Quinn, Tremaine und Duncan (1990) bestätigten die Überlegungen von Fernández mit ersten numerischen Simulationen. Um diese rechenintensiven Integrationen mit der ihnen zur Verfügung stehenden Computerleistung bewältigen zu können, nutzten sie dafür ein Modell mit überhöhten Planetenmassen. Dabei gingen sie von der Annahme aus, dass die statistischen Eigenschaften der Verteilung der Orbits von den Änderungen in den Planetenmassen nicht beeinflusst werden. Beide Gruppen kamen übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass nur ein flacher Asteroidengürtel außerhalb der Neptunbahn die beobachteten Charakteristika der bekannten kurzperiodischen Kometen erklären kann.

Bestätigung fanden all diese theoretischen Überlegungen dann in der Entdeckung des Asteroiden 1992 QB1 in der Region des EKG durch Jewitt und Luu (1993). Mittlerweile konnten 1309 trans-neptunischer Objekte² beobachtet werden - vermutet werden noch bis zu 10^5 Objekte mit einem Durchmesser größer als 100 km (Jewitt (1999)). Trotz dieser großen Zahl an Körpern beträgt deren Gesamtmasse lediglich rund 1/10 der Erdmasse, wie sich aus den Bahnstörungen Neptuns abschätzen lässt.

Die erste numerische Untersuchung der Resonanzgebiete des EKG fand durch Torbett und Smoluchowski (1990) statt. Durch Nutzung masseloser, zufällig verteilter Testpartikel konnten die Autoren zeigen, dass die meisten Bahnen mit einer Periheldistanz $q < 35$ AE instabil sind. Levison und Duncan (1993) und Holman und Wisdom (1993) verwendeten schnelle symplektische Integratoren und erhöhten den Integrationszeitraum dadurch auf über 10^9 Jahre, wobei sie sich in ihren Untersuchungen auf Objekte mit anfänglich

¹Kometen mit einer Periode von weniger als 200 Jahren. (Weissman, McFadden und Johnson (1999), S.520)

²Quelle: <http://www.boulder.swri.edu/ekonews/issues/past/n056/html/index.html>, Stand: Mai 2008.

niedriger Inklination i und kleiner Exzentrizität e beschränkten. Ihre Ergebnisse zeigten, dass vor allem im kompliziert strukturierten inneren Bereich des EKG die Bahnen schon innerhalb weniger Millionen Jahre destabilisiert werden. Dies würde einen permanenten Nachschub kurzperiodischer Kometen aus diesen Gebieten ermöglichen.

Duncan, Levison und Budd (1995) führten die Untersuchungen für Objekte mit anfänglich größerem e und i fort. Der Integrationszeitraum betrug dabei bis zu $4 \cdot 10^9$ Jahre, wobei für die Planeten ihre heutigen Bahnelemente angenommen wurden. Sie berechneten die dynamische Lebenszeit von vielen tausend fiktiven Testpartikeln im Bereich des EKG in Abhängigkeit von ihrer anfänglichen großen Halbachse a und der Exzentrizität e . Die Inklination wurde dabei für alle Testkörper zu Beginn der Integration zu 1° gesetzt und die restlichen Bahnelemente zufällig gewählt. Als dynamische Lebenszeit eines Körpers definierten sie den Zeitraum, bis entweder a) er sich Neptun auf weniger als einen Hill-Radius³ näherte, b) sein Perihel kleiner als 25 AE wurde, c) sein Apocenter größer als 100 AE war oder aber d) das Ende der Integration erreicht wurde. Ein Teil der Ergebnisse ist in Abbildung 2.1 zusammen mit den momentan bekannten EKG-Objekten dargestellt.

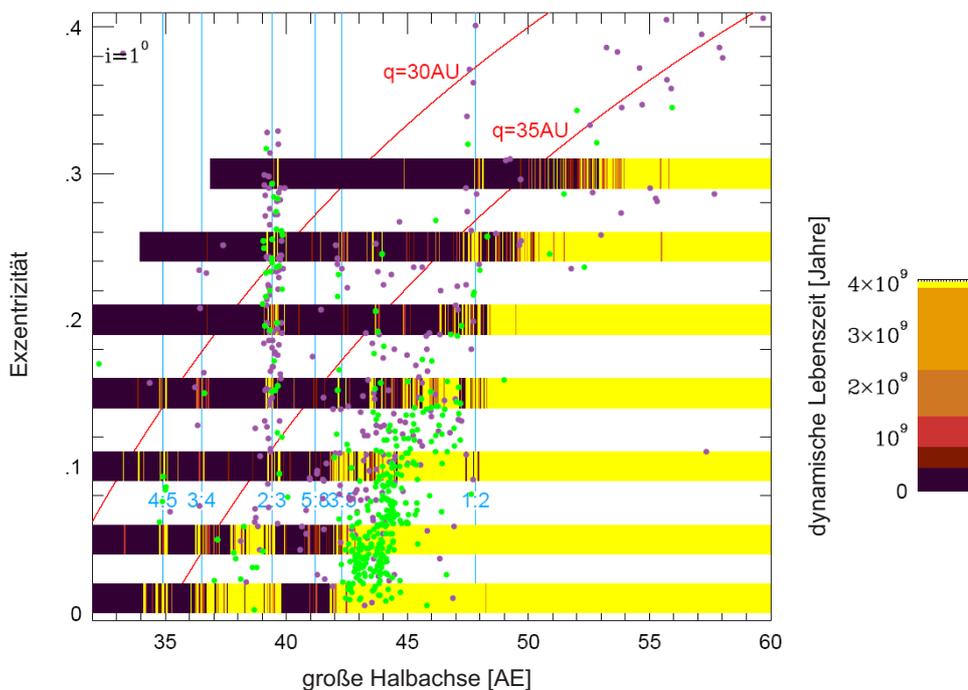


Abb. 2.1: Die dynamische Lebenszeit im EKG nach Duncan, Levison und Budd (1995) als Funktion der anfänglichen großen Halbachse und Exzentrizität (die anfängliche Inklination betrug 1°). Die mittleren Positionen wichtiger Bahnresonanzen mit Neptun sind in blau, 2 Kurven konstanter Periheldistanz ($q = 30$ bzw. $q = 35$ AE) in rot dargestellt. Zusätzlich dazu die Objekte des EKG, welche in min. 3 Oppositionen beobachtet wurden - grüne Punkte stehen dabei für eine Inklination $i < 4^\circ$, magenta-farbene für alle anderen.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich leicht einige generelle Merkmale des EKG ableiten: die meisten Objekte mit einer großen Halbachse $a < 40$ AE und einer Periheldistanz $q < 35$ AE sind instabil. Obwohl Neptun anfänglich fast 5 AE von diesen Körpern entfernt ist,

³Der Hill-Radius eines Körpers ist der Abstand, innerhalb dessen seine Gravitationskraft größer ist als die eines zweiten Körpers, welchen er umkreist.

bewirken sich überschneidende Resonanzgebiete in diesem Bereich eine Destabilisierung der Asteroidenbahn, welche sich in Sprüngen in a und e zeigt und in deren Folge es dann zu nahen Begegnungen⁴ mit Neptun kommt. Einzig tief innerhalb einer Bahnresonanz mit Neptun (z. B. der 2:3-Bahnresonanz) sind die Asteroiden aufgrund der resonanten Schutzmechanismen vor solchen zu großen Annäherungen bewahrt, weshalb hier auch viele der Testkörper den kompletten Integrationszeitraum überstanden. Eine detaillierte Untersuchung der 2:3-Bahnresonanz findet sich z. B. bei Nesvorný und Roig (2000) und Morbidelli (1997).

Weiterhin fällt eine instabile Zone im Bereich $40 < a < 42$ AE auf, welche sich auf das Vorhandensein säkularer Resonanzen in diesem Gebiet zurückführen lässt. Eine der ersten theoretischen Untersuchungen dieser Resonanzen geht auf Knežević u. a. (1991) zurück, welche u. a. ihre Positionen im EKG berechneten. Die Autoren konnten zeigen, dass selbst Körper auf einer anfänglichen Kreisbahn mit $i < 15^\circ$ in diesem Gebiet relativ große Exzentrizitäten erreichen können, in deren Folge nahe Begegnungen mit Neptun nicht mehr ausgeschlossen werden können. Wie anhand der magenta-farbenen Punkte in Abbildung 2.1 zu sehen ist, wurden lediglich Objekte mit einer Inklination $i > 4^\circ$ in diesem Gebiet gefunden.

Der äußere Bereich des EKG ($a > 42$ AE) ist generell stabil, selbst für Objekte, welche sich nicht in einer Resonanz befinden. Lediglich wenn deren Exzentrizität zu groß wird, kommt es zu einer Destabilisierung aufgrund des stärkeren Einflusses Neptuns, so dass dann nur noch die Bahnen von Körpern in Resonanzen stabil bleiben.

Die dargestellten Charakteristika der Objekte des EKG nutzten z. B. Gladman u. a. (2001), um diese in zwei dynamisch verschiedene Gruppen zu unterteilen: 1.) klassische Objekte mit einer großen Halbachse $42 < a < 48$ AE und einer geringen Exzentrizität und 2.) resonante Objekte. Beobachtungen ergaben, dass ca. 2/3 der EKG Population zur ersten Gruppe zählen - unter anderem auch 1992 QB1 und der 2002 entdeckte Quaoar. Durch ihre nahezu kreisförmige Bahn sind sie selbst im Perihel noch mehr als 10 AE von Neptun entfernt. Objekte mit einer niedrigen Inklination werden in diesem Zusammenhang daher auch als dynamisch *kalt*, diejenigen mit einer hohen Inklination (bis zu $i = 30^\circ$) im Gegensatz dazu als dynamisch *heiß* bezeichnet. Diese Bezeichnungen rühren unter anderem daher, dass die dynamisch kalte Population sehr wahrscheinlich in dem Bereich des EKG entstand, in welchem sie auch heute zu beobachten ist. Aufgrund der großen Entfernung zu Neptun werden die Bahnen der Asteroiden durch diesen auch kaum gestört. Im Gegensatz dazu geht man bei den dynamisch heißen Objekten davon aus, dass sie sehr viel weiter innen im Sonnensystem entstanden. Man nimmt an, dass sich ihre Inklinationen infolge des Transportes an ihre heutigen Positionen dann erhöhten.

In die Gruppe der resonanten Objekte fallen all diejenigen, welche sich in einer Bahnresonanz⁵ mit Neptun befinden. Speziell diejenigen in der 2:3-Bahnresonanz werden nach ihrem bekanntesten Vertreter Pluto Plutinos genannt. Aus Beobachtungen schätzt man den Anteil der Plutinos an der Gesamtmenge der EKG Objekte innerhalb 50 AE auf 10 bis 15 Prozent (Jewitt (1999)). Die Resonanzen bieten einen Schutzmechanismus vor Kollisionen mit Neptun, selbst wenn dessen Bahn, wie im Falle von Pluto, gekreuzt wird.

Durch die Entdeckung zahlreicher Körper des EKG in den letzten Jahren wurde dieser

⁴Unter einer nahen Begegnung seien in dieser Arbeit Begegnungen zwischen Körpern verstanden, in deren direkter Folge sich die Bahnelemente mindestens eines der beteiligten Körper signifikant ändern.

⁵Eine detaillierte Beschreibung findet sich in Kapitel 2.2.1.

Unterteilung eine weitere Gruppe hinzugefügt: die der so genannten verstreuten Objekte, von denen inzwischen über 200 beobachtet wurden.⁶ Diese zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Bahnen stark exzentrisch und stark gegen die Ekliptik geneigt sind, mit einem Perihelabstand von $q > 35$ AE und einer großen Halbachse $a > 50$ AE. Das bekannteste Mitglied dieser Gruppe ist der 2003 entdeckte Asteroid Sedna mit $a \approx 484$ AE und $e = 0.84$. Da sich Körper dieser Gruppe nicht in einer Resonanz mit Neptun befinden, werden ihre Bahnen durch wiederholte nahe Begegnungen mit diesem destabilisiert - als Folge ist ihre Verweildauer in diesen Bereichen kurz. Eine weitere Gruppe bilden die so genannten Centauren, deren Bahnen zwischen den großen Gasplaneten verlaufen. Sie sind mit sehr großer Sicherheit nach innen beförderte verstreute Objekte. Ihre Bahnen sind hochgradig instabil, ihre Verweildauer in diesen Bereichen liegt daher in der Größenordnung weniger Millionen Jahre. Danach werden sie durch einen nahen Vorbeiflug an einem der großen Planeten ins innere Sonnensystem oder nach außen in die Oortsche Wolke befördert.

Aber auch Widersprüche zwischen der dynamischen Analyse und der tatsächlich zu beobachtenden Verteilung der Asteroiden werden in Abbildung 2.1 deutlich. So finden sich z. B. kaum Asteroiden mit einer kleinen Exzentrizität und $a > 44$ AE. Dies kann nicht mit der leichteren Beobachtbarkeit der Objekte im Perihel erklärt werden, da in diesem Fall die Verteilung der bisher gefundenen Körper in der $a - e$ Ebene einer Kurve konstanter Periheldistanz folgen sollte. Tatsächlich scheint aber der EKG exakt an der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun eine Grenze zu besitzen, außerhalb deren lediglich einige verstreute Objekte vorkommen. Dies legt nahe, dass der beobachtete Mangel an Objekten trotz der von Duncan, Levison und Budd (1995) gefundenen Langzeitstabilität die wahre Verteilung in diesem Gebiet des EKG widerspiegelt.

Abbildung 2.1 zeigt weiterhin, dass viele Körper innerhalb von Bahnresonanzen relativ große Exzentrizitäten und Inklinationen besitzen. Die resonanten Mechanismen allein verhindern jedoch ein solches Anwachsen, wodurch zu nahe Begegnungen mit Neptun vermieden und die Bahn des Asteroiden über lange Zeit stabil gehalten wird. Da man annimmt, dass sich diese Körper zur Zeit der Entstehung unseres Sonnensystems alle in einer Ebene auf nahezu kreisförmigen Bahnen befanden, müssen die heute beobachteten Eigenschaften durch andere Vorgänge bewirkt worden sein.

Des weiteren wurde durch Beobachtungen (z. B. Delsanti und Jewitt (2006)) ein Unterschied in Größe und Farbe zwischen heißer und kalter Population festgestellt. Auch war z. B. durch die Arbeiten von Weissman und Levison (1997) schon sehr früh klar, dass die vorhandene Gesamtmasse, welche auf 0.01 bis 0.1 Erdmassen geschätzt wird, viel zu gering ist, als dass der EKG an dieser Stelle mit Körpern der beobachteten Größe hätte entstehen können. Modelle, wie z. B. Gladman u. a. (2001), gehen von einer erforderlichen Mindestmasse von 10 bis 30 Erdmassen aus - es fehlen somit mehr als 99 Prozent des ursprünglich vorhandenen Materials!

Diese anfänglich nicht zu erklärenden Differenzen führten schließlich zu einer völlig neuen Sichtweise auf einen Teil der Entstehungsgeschichte unseres Sonnensystems. Seit den Untersuchungen von Fernández und Ip (1984) war bekannt, dass Saturn, Uranus und Neptun nicht an ihren momentan beobachteten Positionen entstanden, sondern in der Entstehungsphase durch Wechselwirkungen mit Planetesimalen nach außen migrierten, während sich die große Halbachse von Jupiter dagegen leicht verkleinerte. Malhotra (1993)

⁶Quelle: <http://www.boulder.swri.edu/ekonews/issues/past/n056/html/index.html>, Stand: Mai 2008.

zeigte, dass Planetesimale unter dem gravitativen Einfluss eines migrierenden Planeten in den ebenfalls migrierenden Bahnresonanzen gefangen werden und sogar lange Zeiträume in diesen verbleiben können. Während des Aufenthaltes innerhalb der Resonanz wächst dabei die Exzentrizität der Bahn des Körpers kontinuierlich. Die Ergebnisse der genannten Autorin deuteten an, dass die sehr exzentrische und stark geneigte Plutobahn in der 2:3-Bahnresonanz mit Neptun, ebenso wie die hohen Exzentrizitäten der Bahnen von Objekten in anderen Neptunresonanzen (Malhotra (1995)), als Resultat einer solchen langsamen und nach außen gerichteten Migration Neptuns erklärbar sind.

Gomes (2003) integrierte die 4 großen Gasplaneten zusammen mit 10^4 Planetesimalen, welche mit den Planeten, nicht aber miteinander wechselwirkten. Die Ergebnisse dieser Simulationen zeigten erstmals, dass die dynamisch heiße Population des EKG ebenfalls als Folge einer Migration der Gasplaneten erklärbar ist. Kombiniert mit diesen Erkenntnissen entwickelten Tsiganis u. a. (2005) das so genannte Nice-Modell - die momentan aktuellste und vollständigste Migrationstheorie der Entwicklung unseres Sonnensystems, welche nahezu alle beobachteten Besonderheiten konsistent zu beschreiben vermag.⁷ Eine schematische Darstellung der Evolution des äußeren Sonnensystems nach den Simulationen des Nice-Modells findet sich in Abbildung 2.2. In den Untersuchungen von Tsiganis u. a. (2005) wurde die Migration der großen Planeten durch direkte N -Körper Integrationen mit 1000 bis 5000 Planetesimalen simuliert. Im Gegensatz dazu wurden in den in Abbildung 2.2 gezeigten Simulationen die Planetesimale als masselose Testkörper betrachtet. Durch Einführung zusätzlicher künstlicher Kräfte in die Bewegungsgleichungen wurde eine gezielte Änderung der großen Halbachse, der Exzentrizität und Inklination der Planeten erreicht (Levison u. a. (2007)).

Das Nice-Modell geht davon aus, dass die Planeten unseres Sonnensystems ursprünglich nah beieinander in einem Bereich zwischen 5.5 und 14 AE auf nahezu kreisförmigen und koplanaren Bahnen entstanden. Daran anschließend (bis ungefähr 34 AE) erstreckte sich eine Scheibe sehr viel kleinerer Körper (Planetesimale) mit einer Gesamtmasse von rund 35 Erdmassen. Anfänglich bewirkten die gravitativen Störungen am Rande dieser Scheibe einen langsamen, aber stetigen Strom der Planetesimale ins Innere des Sonnensystems - und als Folge des Energie- und Drehimpulsaustausches eine langsame Migration von Saturn, Uranus und Neptun nach außen. Während der Migration wurden viele der Planetesimale in den Bahnresonanzen Neptuns eingefangen und in diesen, unter einem stetigen Anwachsen ihrer Exzentrizität mit nach außen transportiert. Nach einer Zeitspanne von rund einer Milliarde Jahre⁸ durchquerte Saturn die 1:2-Bahnresonanz mit Jupiter. In Folge dessen kam es zu einem starken Anwachsen der Exzentrizitäten (auf $e \approx 0.3 - 0.4$) von Uranus und Neptun, deren Bahnen daraufhin instabil wurden und nun weit in den Bereich der Planetesimale hineinreichten. Die einsetzenden starken Wechselwirkungen mit den kleineren Körpern führte zu einer Dämpfung der Exzentrizitäten der Planeten innerhalb weniger Millionen Jahre und bewirkte, dass der weitaus größere Teil der Planetesimale auf stark exzentrischen Bahnen diesen Bereich verließen, während sich die Bahn von Uranus und Neptun wieder stabilisierten.

Der äußere Rand des EKG befindet sich am Ende der Simulationen, wie beobachtet, exakt bei der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun, in welcher viele der Körper während der

⁷Eine umfassende Darstellung dieser, sowie alternativer Theorien findet sich in Morbidelli, Levison und Gomes (2007).

⁸Gemäß den Simulationen von Gomes u. a. (2005).

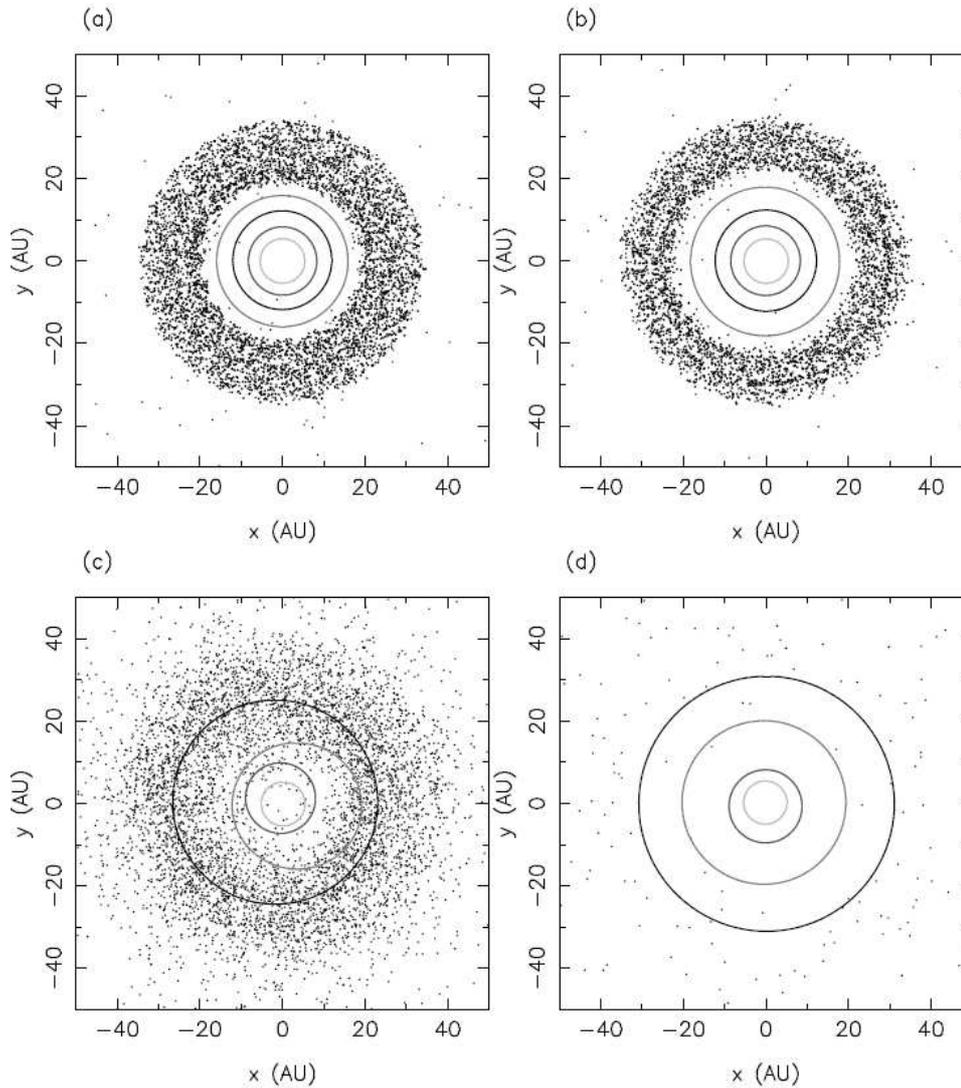


Abb. 2.2: Die Entwicklung des äußeren Sonnensystems entsprechend dem Nice-Modell (aus Morbidelli, Levison und Gomes (2007)). (a) Kurze Zeit nach der Entstehung des Sonnensystems. Die Planeten befinden sich im Bereich zwischen 5.5 und 14 AE nah beieinander und bewegen sich auf annähernd kreisförmigen Bahnen. Außerhalb dieses Gebietes befindet sich eine Scheibe mit Planetesimalen (bis rund 34 AE). (b) Kurze Zeit bevor Saturn die 1:2-Bahnresonanz mit Jupiter durchquert. (c) Saturn und Jupiter befinden sich in der 1:2-Bahnresonanz. Die Bahnen von Uranus und Neptun werden so stark gestört, dass sie nun tief in die Scheibe der Planetesimale hineinreichen. (d) Am Ende der starken Wechselwirkungen. Die Planeten befinden sich ungefähr an ihren momentan beobachtbaren Positionen. Die meisten Planetesimale haben das Gebiet verlassen. Der Rest bildet den heute beobachtbaren EKG.

Migration gefangen wurden. Durch diesen nach außen gerichteten Transport wuchsen die Exzentrizitäten der Planetesimale, wie von Malhotra (1995) beschrieben, an, was das offensichtliche Fehlen von Körpern mit $e \approx 0$ mit $a > 46$ AE in Abbildung 2.2 erklärt.

2.2 Resonanzen

Wie im vorangegangenen Kapitel schon erwähnt wurde, sind neben der Migration der großen Planeten primär Resonanzen für die Verteilung der Asteroiden im EKG verantwortlich. Eine Resonanz entsteht immer dann, wenn die Verhältnisse zwischen Frequenzen oder Perioden rationalen Zahlen entsprechen. Besteht beispielsweise zwischen der Umlaufperiode eines Asteroiden und einem oder mehreren Planeten eine solche rationale Beziehung, so spricht man von einer Bahnresonanz, welche im ersten Unterkapitel eingehender beschrieben wird. Im Gegensatz dazu sind bei den im zweiten Unterkapitel thematisierten säkularen Resonanzen die involvierten Zeitskalen sehr viel länger.

2.2.1 Bahnresonanzen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel

Von einer Bahnresonanz zwischen einem Asteroiden und einem Planeten⁹ spricht man, wenn deren mittlere Bewegungen n und n' in einem rationalen Verhältnis stehen

$$\frac{n}{n'} \approx \frac{k_1}{k_2} \quad \text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad k_1, k_2 \neq 0. \quad (2.1)$$

Verläuft die Bahn des Asteroiden innerhalb der des Störkörpers, so spricht man von einer *inneren*, andernfalls von einer *äußeren* Bahnresonanz. Die Bahnresonanzen im EKG mit Neptun sind sämtlich äußere Resonanzen.

Aus Gleichung (2.1) und dem dritten Keplerschen Gesetz ($n = \sqrt{\mu/a^3}$, wobei μ das Produkt zwischen der Gravitationskonstanten \mathcal{G} und der Sonnenmasse M bezeichnet), lässt sich die große Halbachse $a_{k_1:k_2}$ ableiten, für welche es zu einer Bahnresonanz $k_1 : k_2$ mit einem Planeten der Masse m kommt:

$$a_{k_1:k_2} = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{1 + \frac{m}{M}}\right)^{1/3} a'. \quad (2.2)$$

Aus dieser Gleichung erhält man für die zu untersuchenden Bahnresonanzen im EKG die in Tabelle 2.1 angegebenen Positionen.

Tabelle 2.1: Position der untersuchten Bahnresonanzen mit Neptun im Edgeworth-Kuiper-Gürtel. Für Neptun wurde dabei eine große Halbachse von $a' = 30.069$ AE angenommen.

Bahnresonanz	große Halbachse [AE]
3:5	42.27
4:7	43.66
1:2	47.73

Ist Gleichung (2.1) exakt erfüllt und nimmt man an, dass sich n und n' nicht ändern, führt eine Bahnresonanz dazu, dass sich die Stellung der Körper zueinander periodisch wiederholt. Die Periode P mit der dies geschieht, ist dabei $P = 2\pi/(n - n')$. Aufgrund dessen wirken auch die Störungen des Planeten auf den Asteroiden wiederholt in immer der gleichen Weise, wodurch sie sich mit der Zeit aufaddieren und verstärken.

⁹Um die Notation einfach zu halten, werden im Folgenden alle Orbitalelemente x , welche sich auf den Planeten beziehen, gestrichen dargestellt: x' .

Eine gute Beschreibung der dadurch hervorgerufenen Effekte auf die Bahn des Asteroiden findet sich in Peale (1976), welche an dieser Stelle kurz wiedergegeben werden soll. Betrachtet wird dabei die resonante Bewegung eines Asteroiden vernachlässigbarer Masse und eines Planeten, wobei $n/n' \approx 1/2$ ist - die Körper sich also in einer 1:2-Bahnresonanz befinden.¹⁰ Um die Darstellung nicht durch komplizierte Details zu belasten werde noch angenommen, dass sich der Planet auf einer Kreisbahn und in einer Ebene mit dem Asteroiden bewegt. Trotz dieser Vereinfachung lassen sich die grundlegenden Mechanismen innerhalb einer Bahnresonanz zeigen. Eine schematische Darstellung der Bahnen der Körper findet sich in Abbildung 2.3.

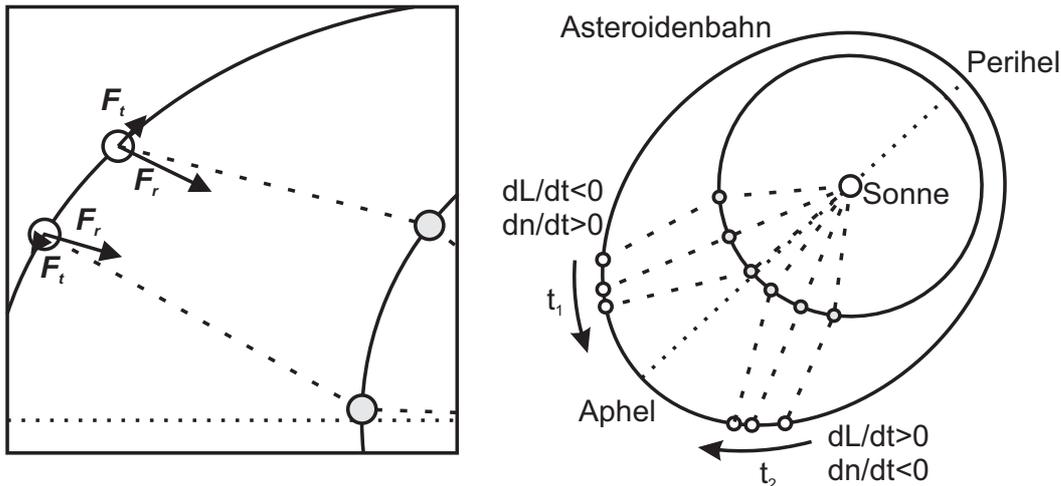


Abb. 2.3: Schematische Darstellung einer Bahnresonanz (nach Peale (1976)), bei welcher die elliptische Asteroidenbahn außerhalb der des Störkörpers verläuft. L bezeichnet den Drehimpuls und n die mittlere Bewegung der Asteroidenbahn; die Pfeile zeigen in Richtung des Ortes der nächsten Konjunktion zwischen den beiden Körpern. Links: Vergrößerte Darstellung der Konjunktion des Zeitpunktes t_1 : die tangentialen (F_t) und radialen Kräfte (F_r) vor und nach der Konjunktion sind ebenfalls eingetragen.

Ohne den Planeten würde sich der Asteroid entsprechend den Keplerschen Gesetzen auf einer elliptischen Bahn um die Sonne herum bewegen. Der Planet bewirkt durch seine Gravitationskraft eine Störung dieser Bahn. Zerlegt man diese Kraft in ihre Radial (F_r)- und Tangentialkomponente (F_t), so sieht man, dass letztere zwischen Opposition und Konjunktion den Drehimpuls des Asteroiden vermindert, zwischen Konjunktion und der nächsten Opposition den Drehimpuls erhöht. Als Konjunktion sei dabei der Zeitpunkt bezeichnet, zu welchem die mittlere Länge des Asteroiden λ der des Planeten λ' entspricht. Während einer Opposition gilt $\lambda = \lambda' + 180^\circ$.

Bei einer 1:2-Bahnresonanz umläuft der Planet den Zentralkörper zweimal, während der Asteroid diesen in der gleichen Zeit einmal umrundet. Beginnen die Körper in Opposition zueinander, so kommt es zu genau einer Konjunktion, bevor die Ausgangsposition der Körper zueinander wiederhergestellt ist. Erfolgt diese Konjunktion exakt im Aphel oder Perihel des Asteroiden, so ist aufgrund der Symmetrie der Bahn der Verlust an Dreh-

¹⁰Diese Beschreibung sei auf kleine Exzentrizitäten der Asteroidenbahn beschränkt, wobei diese Einschränkung am Ende dieses Kapitels näher erläutert wird.

impuls gleich dem Zugewinn an Drehimpuls zwischen Konjunktion und Opposition. Der Drehimpuls bleibt daher in der Summe unverändert. Diese Symmetrie ist gestört, wenn die Konjunktion an einem anderen Ort der Bahn des Asteroiden stattfindet.

Im linken Bild von Abbildung 2.3 sind die auf den Asteroiden wirkenden tangentialen und radialen Kräfte kurz vor und nach einer Konjunktion eingezeichnet. Die Konjunktion findet dabei zum Zeitpunkt t_1 statt, bevor der Asteroid seinen sonnenfernsten Punkt durchläuft. Vor der Konjunktion ist die durch den Planeten auf den Asteroiden ausgeübte Kraft aufgrund der geringeren Distanz größer als danach. Daher ist auch die wirkende Tangential- und Radialkraft vor der Konjunktion größer als danach. Weiterhin ist die Winkelgeschwindigkeit des Asteroiden vor der Konjunktion näher an der konstanten Winkelgeschwindigkeit des Planeten. Vergleicht man die Zeitpunkte vor und nach der Konjunktion so ergibt sich zusammenfassend, dass vor der Konjunktion eine stärkere Tangentialkraft entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Asteroiden über einen längeren Zeitraum wirkt.

Integriert man die Änderung des Drehimpulses zwischen zwei aufeinander folgenden Oppositionen auf, so sieht man, dass die zum Zeitpunkt t_1 stattfindende Konjunktion in der Summe einen Verlust an Drehimpuls, sowie ein leichtes Anwachsen der mittleren Bewegung des Asteroiden bewirkt. Dies hat zur Folge, dass die nächste Konjunktion etwas näher am Aphel stattfinden wird. Kommt es hingegen zu einer Konjunktion wenn der Asteroid das Aphel bereits durchlaufen hat (Zeitpunkt t_2), so resultiert dies in der Summe in einer Zunahme des Drehimpulses und einer Verminderung der mittleren Bewegung n , wodurch auch hier die folgende Konjunktion etwas näher am Aphel stattfindet. Auch bei Konjunktionen in der Nähe des Perihel bewirken diese Mechanismen, dass sich der Ort der nächsten Konjunktion in Richtung Aphel verschiebt. Diese Bewegungsrichtung wurde in Abbildung 2.3 durch die beiden Pfeile angedeutet.

Im naheliegenden Vergleich mit einem Pendel entspricht das Aphel bei äußeren Resonanzen dem stabilen, das Perihel dem instabilen Gleichgewichtspunkt. Die beschriebene Verschiebung der Orte der Konjunktionen stoppt nicht im Aphel, sondern führt aufgrund der Energieerhaltung dazu, dass diese um das Aphel librieren. Die Amplitude dieser Libration ist umso kleiner, je näher sich der Asteroid an der exakten Resonanz befindet. Als Folge einer solchen Libration bleibt das Verhältnis $n/n' \approx k_1/k_2$ erhalten. Der Bereich der großen Halbachse a , für welchen es noch zu einer Libration um einen solchen stabilen Punkt kommt, wird oft auch als Resonanzbreite bezeichnet.

Zur allgemeinen Beschreibung einer Resonanz wurde für diese Arbeit die Notation aus Murray und Dermott (2000) übernommen. Sei $k_1 = |p + q|$ und $k_2 = |p|$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$. Mit q wird die Ordnung einer Bahnresonanz $p + q : p$ bezeichnet. Es gelte $q \geq 1$ und p sei für innere Resonanzen positiv, für äußere negativ. Für die eben beschriebene 1:2-Bahnresonanz ist somit $p = -2$ und $q = 1$. Die Ordnung q gibt unter anderem an, wie oft es zu einer Konjunktion kommt, bevor die Körper wieder ihre ursprüngliche Stellung zueinander erreicht haben. Für $q = 2$ zeigt sich, dass die Konjunktionen im Aphel und Perihel nun den instabilen Gleichgewichtspunkten entsprechen und eine Libration bei einer mittleren Anomalie von 90° und 270° stabil ist.

Für eine Bahnresonanz der Ordnung q finden sich diese stabilen Punkte der Konjunktion allgemein bei einer mittleren Anomalie des Asteroiden $M = (2k + 1)\pi/q$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, q - 1$. Ist q ungerade, so befindet sich einer dieser Punkte im Aphel. Ist q hingegen gerade, so geschehen alle Konjunktionen bei $M \neq \pi$. Für Resonanzen erster Ordnung

ist der Asteroid somit der Bahn des Planeten immer dann am nächsten, wenn sich dieser in Opposition zu ihm befindet. Auch bei Resonanzen höherer Ordnung beschränkt dieser resonante Schutzmechanismus den minimal möglichen Abstand zwischen den Körpern. An den Rändern einer Resonanz¹¹ oder bei der Überlappung mehrerer Resonanzen kommt es hingegen zu einer resonanzbedingten Erhöhung der Exzentrizität und damit zu einer Destabilisierung der Asteroidenbahn durch zu nahe Begegnungen mit dem Planeten (siehe Nesvorný und Roig (2001)). Der Zusammenhang zwischen minimaler Neptundistanz und den Bahnresonanzen in einer Integration über 10^8 Jahre im Bereich des EKG ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

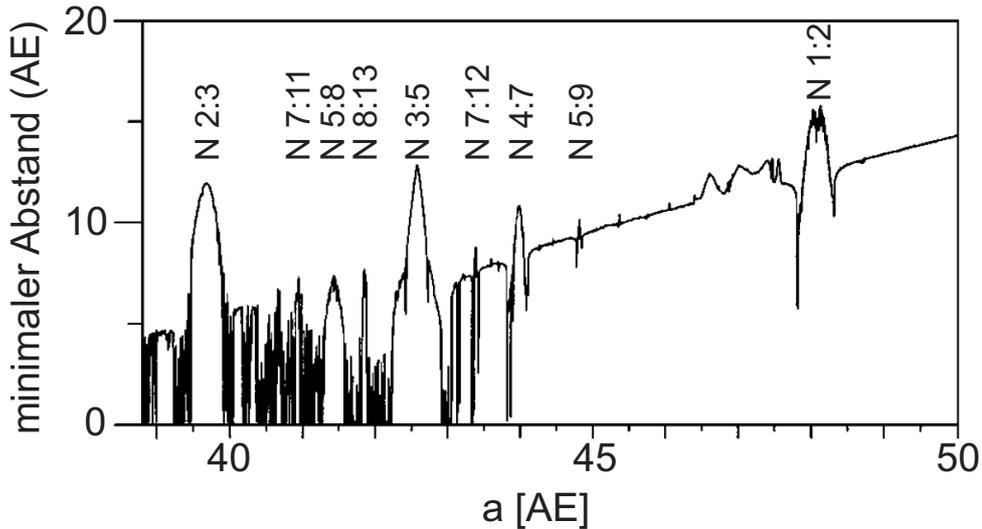


Abb. 2.4: Der minimale Abstand fiktiver Asteroiden mit $e_0 = 0.1$ und $i_0 = 0^\circ$ zu Neptun in einer Integration über 10^8 Jahre. Entnommen aus Nesvorný und Roig (2001). Wichtige Bahnresonanzen mit Neptun wurden beschriftet.

Aufgrund des rationalen Verhältnisses in den mittleren Bewegungen besteht das gleiche Verhältnis auch zwischen den mittleren Längen λ der Körper. Dieses besteht auch dann noch, wenn die Bahn des Störkörpers exzentrisch und gegenüber der Asteroidenbahn geneigt ist. Ein Winkel, welcher dies beschreibt und in der exakten Resonanz konstant ist, ist der so genannte Resonanzwinkel $\sigma_{p+q:p}$. Er sei so definiert, dass er den Winkel zwischen Perihel und dem Ort der Konjunktion angebe

$$\sigma_{p+q:p} = (1 + p/q)\lambda' - p/q\lambda - \varpi, \quad (2.3)$$

wobei ϖ die Länge des Perihels des Asteroiden bezeichnet. Für äußere Bahnresonanzen libriert $q\sigma_{p+q:p}$ um π . Beaugé (1994) zeigte, dass äußere Bahnresonanzen des Typs $1 : r$ mit $r \geq 2$ eine Ausnahme von dieser Regel bilden. Für diese ist das Aphel lediglich für kleine Exzentrizitäten ein stabiler Punkt. Die Lagen der Librationszentren sind bei diesen Bahnresonanzen abhängig von der Exzentrizität der Bahn. $\sigma_{1:r}(e)$ ist für die 1:2- und 1:3-Bahnresonanz in Beaugé (1994) angegeben, welcher für diese Resonanzen auch den Begriff der asymmetrischer Libration verwendet.

¹¹Definiert als Orte maximaler Resonanzbreite.

2.2.2 Säkulare Resonanzen

Befindet sich der Asteroid außerhalb einer Bahnresonanz und ist weit genug von einem Planeten entfernt, so dass nahe Begegnungen mit diesem ausgeschlossen werden können, lässt sich die Dynamik seiner Bahn mit Hilfe der säkularen¹² Störungstheorie beschreiben. Diese geht davon aus, dass sich alle kurzperiodischen Störungen der Bahn auf lange Sicht betrachtet gegenseitig aufheben und die Bewegung des Asteroiden lediglich von den Termen der Störungsgleichung bestimmt wird, welche unabhängig von der mittleren Anomalie sind (siehe z. B. Murray und Dermott (2000), Kapitel 7). Die einfachste lineare Lösung der sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen ist als Laplace-Lagrange-Lösung bekannt, welche bis zur zweiten Ordnung in der Exzentrizität (und der ersten Ordnung in den Massen) die zeitliche Änderung der Exzentrizität e , der Inklination i , der Knotenlänge Ω und des Perihelarguments ω der Asteroidenbahn unter dem störenden Einfluss eines Planeten beschreibt. Für einen Überblick über die verschiedenen aktuell verwendeten säkularen Störungstheorien einschließlich der Anwendung eines semi-numerischen Ansatzes auf ein System von 3 massereichen Körpern siehe Šidlichovský und Gerlach (2008).

Um die Bewegung des Asteroiden auch für den Fall mehrerer Planeten beschreiben zu können, ist zusätzlich noch die gegenseitige Störung (und Veränderung) der orbitalen Elemente der Planeten zu beachten. Zu einer säkularen Resonanz kann es immer dann kommen, wenn zwischen der Präzessionsrate des Perihels $\dot{\varpi}$ bzw. des Bahnknotens $\dot{\Omega}$ des Asteroiden und einer der Eigenfrequenzen des Systems ein rationales Verhältnis besteht. Diese Eigenfrequenzen können die Präzessionsraten der involvierten Planeten, aber auch Linearkombinationen dieser sein.

Eine säkulare Resonanz führt zu einem Anwachsen von e und i des Asteroiden, wobei eine säkulare Resonanz von $\dot{\varpi}$ eine Änderung der Exzentrizität, eine säkulare Resonanz von $\dot{\Omega}$ eine Änderung der Inklination bewirkt (z. B. Morbidelli und Henrard (1991)). In deren Folge kann es zu nahen Begegnungen mit einem der Planeten kommen, da im Gegensatz zu den Bahnresonanzen hier keine Schutzmechanismen existieren, welche dies verhindern würden. Dem entsprechend sind die Gebiete säkularer Resonanz frei von Asteroiden. Die Positionen der säkularen Resonanzen in $\dot{\varpi}$ bis zur zweiten Ordnung in den Massen wurden von Milani und Knežević (1992) berechnet und sind in Abbildung 2.5 für den Bereich des EKG dargestellt.

Eine weitere Form der säkularen Resonanz, welche aber nicht mit einer Eigenfrequenz der Planeten verbunden ist, ist die so genannte Kozai-Resonanz. Wie Kozai (1962) zeigte, kann es für Asteroiden mit großen Inklinationen zu starken, gegenläufigen Variationen der Exzentrizität e und Inklination i kommen, wobei die Größe $\sqrt{1-e^2} \cos i$ konstant bleibt. Weiterhin kommt es innerhalb der Resonanz zu einer Libration des Winkels ω : d. h. in der Kozai-Resonanz ist die Frequenz, mit welcher sich der Winkel ϖ ändert gleich der, mit welcher sich Ω ändert. Thomas und Morbidelli (1996) gaben für Körper im EKG außerhalb einer Bahnresonanz eine Inklination¹³ von 40° an, ab welcher der Kozai-Mechanismus wirksam wird. Innerhalb von Bahnresonanzen kommt es schon bei kleineren Inklinationen zu einer Kozai-Resonanz. Wie Wan und Huang (2007) zeigten, liegen die Librationszentren für kleine Exzentrizitäten bei $\omega = 90^\circ$ und 270° . In Kapitel 4.2 wird gezeigt, dass diese Librationszentren für größere Exzentrizitäten bei $\omega = 0^\circ$ und 180°

¹²lat. *saeculum*: hier: einen langen Zeitraum über andauernd.

¹³Dieser Wert definierte zusammen mit einer anfänglich kreisförmigen Bahn die Konstante $\sqrt{1-e^2} \cos i$.

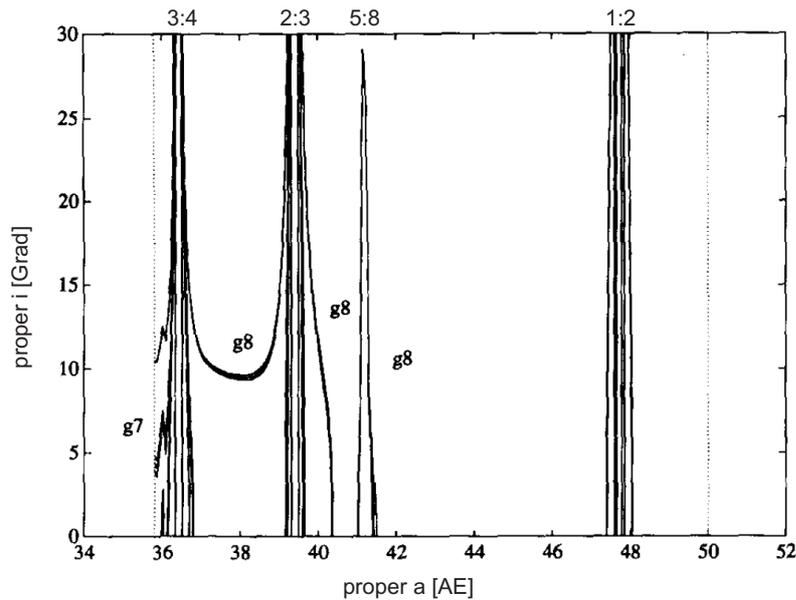


Abb. 2.5: Säkulare Resonanzen im Edgeworth-Kuiper-Gürtel. Dargestellt sind die Resonanzen des Perihelargumentes $\dot{\varpi}$ abgeleitet aus der Theorie 2. Ordnung nach Milani und Knežević (1992) für einen konstanten Wert von $\text{proper } e = 0.1$. Die Linien bezeichnen die Stellen, an denen die Präzessionsrate des Perihels $\dot{\varpi}$ gleich der Neptuns (g_8) oder der von Uranus (g_7) ist. Singularitäten treten an den Stellen auf, an denen eine säkulare Resonanz und eine Bahnresonanz (einige wichtige Resonanzen mit Neptun sind oberhalb der Abbildung angezeigt) zusammenfallen. Die gepunkteten Linien bezeichnen die von Milani und Knežević (1992) verwendeten Zonengrenzen.

liegen.

2.3 Integrationsmethoden

Die Untersuchung von Resonanzgebieten in der Himmelsmechanik birgt oft das Problem, dass sich in diesen mehrere der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Resonanzarten überlagern. Analytische Modelle können in diesen Fällen nur noch eine grobe Beschreibung der herrschenden Dynamik liefern, so dass man auf die Anwendung numerischer Integrationsverfahren angewiesen ist. Nach einer Definition der verwendeten Notation sollen aus der Vielzahl der existierenden Algorithmen die für diese Arbeit relevanten Einschrittverfahren vorgestellt werden: zum Einen die für ihre extrem hohe Genauigkeit bekannten Extrapolationsmethoden in Abschnitt 2.3.1 und im Vergleich dazu in Abschnitt 2.3.2 symplektische Verfahren, die schon aufgrund ihrer Konstruktion wichtige Eigenschaften Hamiltonscher Systeme erhalten. Die Darstellung schließt mit einer Gegenüberstellung der Eigenschaften der beiden Integrationsmethoden am Beispiel des Kepler-Problems.

Betrachtet werden sollen im Folgenden gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \quad (2.4)$$

Hierbei ist

t die Zeit, welche als unabhängige Variable betrachtet wird,

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ ein Spaltenvektor der Dimension d der abhängigen Variablen y_i mit $i = 1, \dots, d$ und

$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(t)$ die erste Ableitung von \mathbf{y} nach t .

Die Lösung der Differentialgleichung wird durch den Anfangswert $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ eindeutig festgelegt. Um die Notation einfach zu halten, wird im Folgenden $t_0 = 0$ angenommen.

Die Variablen \mathbf{y} spannen den so genannten Phasenraum ($\subseteq \mathbb{R}^d$) auf, wobei ein bestimmter Wert dieser Variablen einem Punkt im Phasenraum entspricht. Ihre zeitliche Änderung beschreibt eine Kurve im Phasenraum: die *Trajektorie*. Als Phasenfluss in der Zeit t bezeichnet man diejenige Abbildung φ_t , welche einen beliebigen Punkt $\mathbf{y}(t)$ im Phasenraum mit den Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 verknüpft:

$$\mathbf{y}(t) = \varphi_t(\mathbf{y}_0). \quad (2.5)$$

Eine diskrete Näherung für φ_t kann mit Hilfe eines Einschrittverfahrens ϕ_h mit der Schrittweite $h > 0$ berechnet werden, welches die allgemeine Gestalt

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\phi_h(\mathbf{y}_n) \quad (2.6)$$

hat. Hierbei bezeichnet \mathbf{y}_n den Zustand des Vektors \mathbf{y} zum Zeitpunkt t_n und \mathbf{y}_{n+1} die Näherung der Lösung an der Stelle $t_{n+1} = t_n + h$. Eine numerische Methode ist von Ordnung p , wenn für die Differenz zwischen der exakten und der numerisch berechneten Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} , den so genannten lokalen Fehler, für $h \rightarrow 0$

$$\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}(t) - h\phi_h(\mathbf{y}(t)) = \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad (2.7)$$

gilt.

2.3.1 Extrapolationsmethoden

Extrapolationsmethoden gehören zur Klasse der Einschrittverfahren zur numerischen Lösung allgemeiner Differentialgleichungen. Das Grundprinzip basiert auf der *Richardson-Extrapolation* (Berechnung einer numerischen Näherung durch Kombination der Lösung verschiedener Schrittweiten) und anschließender Extrapolation der Ergebnisse für eine theoretische Schrittweite $h = 0$. Im Folgenden wird speziell die Variante von Gragg, Bulirsch und Stoer beschrieben. Eine allgemeine Darstellung der Extrapolationsmethoden findet sich z. B. in Hairer, Nørsett und Wanner (1987).

Gesucht wird die Lösung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt $t_0 + h_B$ mit einer Basisschrittweite $h_B > 0$. Dazu wird das Gesamtintervall in Teilintervalle konstanter Schrittweite $h_i = h_B/n_i$, $n_i \in \mathbb{N}$ mit $i = 1, \dots, N$ und $n_{i-1} < n_i$ unterteilt. Die Anzahl N der verschiedenen Schrittweiten ist abhängig von der gewünschten Genauigkeit, der Basisschrittweite, der zu integrierenden Funktion und anderen Faktoren.

Für jedes h_i wird mit einem einfachen Integrationsalgorithmus niedriger Ordnung eine Approximation der Lösung (\mathbf{y}_{h_B, h_i}) errechnet, wobei keines der h_i notwendigerweise so klein sein muss, dass die geforderte Genauigkeit direkt erreicht wird. Da es wichtig ist, diese Näherungen mit möglichst wenig Rechenzeit zu erhalten, bedeutet dies für die Wahl der Integrationsroutine, dass selbst eine Methode erster Ordnung, wie z. B. die Euler-Methode, ausreichend wäre. Wie Gragg (1965) zeigte, erweist es sich jedoch als günstig,

eine Routine gerader Ordnung in Kombination mit einer geraden Schrittzahl n_i zu verwenden. Er konnte beweisen, dass in diesem Fall die Differenz zwischen der numerischen und der exakten Lösung $\varphi_{h_B}(\mathbf{y}_0)$ nur gerade Potenzen der Schrittweite enthält

$$\mathbf{y}_{h_B, h_i} - \varphi_{h_B}(\mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_i^{2k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

und empfahl aus diesem Grund die explizite Mittelpunktsregel. Diese symmetrische Methode zweiter Ordnung beginnt mit einem Euler-Schritt um den Wert zum Zeitpunkt $t_0 + h_i$ zu finden und ist definiert als:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{y}_0 + h_i \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_{k-1} + 2h_i \mathbf{f}(t_0 + kh_i, \mathbf{z}_k), \quad k = 1, \dots, n_i - 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Man erhält dann die numerische Lösung zum Zeitpunkt $t_0 + h_B$ als Funktion der Schrittweite h_i aus:

$$\mathbf{y}_{h_B, h_i} = \frac{1}{4} (\mathbf{z}_{n_i-2} + 2\mathbf{z}_{n_i-1} + \mathbf{z}_{n_i}) \approx \varphi_{h_B}(\mathbf{y}_0). \quad (2.10)$$

Berechnet man nun eine zweite Näherung mit einer Schrittweite $h_i/2$, so ergibt sich aus Gleichung (2.8), dass die Kombination dieser beiden

$$\frac{4\mathbf{y}_{h_B, h_i} - \mathbf{y}_{h_B, h_i/2}}{3} + \mathcal{O}(h_B^5) \quad (2.11)$$

von Ordnung 4 ist. Für Extrapolationsmethoden nutzt man diese Eigenschaft und betrachtet hierfür die Lösung der Differentialgleichung an der Stelle $t_0 + h_B$ als Funktion eines Polynoms in der Schrittweite h . Die einzelnen Schrittweiten h_i werden als Stützstellen desselben gesehen, durch welche dann ein Polynom der entsprechenden Ordnung definiert wird.

Sei die mit der Schrittweite h_i erhaltene Lösung \mathbf{y}_{h_B, h_i} so lassen sich die Kombinationen höherer Ordnung unter Nutzung des Algorithmus von Aitken und Neville kompakt als dividierte Differenzen schreiben:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{y}_{h_B, h_1} & = & \mathbf{y}_{1,1} & & & & \\ & & & \searrow & & & \\ \mathbf{y}_{h_B, h_2} & = & \mathbf{y}_{2,1} & \rightarrow & \mathbf{y}_{2,2} & & \\ & & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbf{y}_{h_B, h_3} & = & \mathbf{y}_{3,1} & \rightarrow & \mathbf{y}_{3,2} & \rightarrow & \mathbf{y}_{3,3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \searrow \end{array} \quad (2.12)$$

Diese berechnen sich ganz allgemein als

$$\mathbf{y}_{i,j+1} = \mathbf{y}_{i,j} + \frac{\mathbf{y}_{i,j} - \mathbf{y}_{i-1,j}}{(n_i/n_{i-j})^2 - 1} \quad \text{mit } 1 \leq j \leq i - 1. \quad (2.13)$$

Das numerische Resultat zum Zeitpunkt $t_0 + h_B$ erhält man dann durch die Extrapolation von $h \rightarrow 0$ mit

$$\varphi_{h_B}(\mathbf{y}_0) \approx \mathbf{y}_{h_B, 0} = \mathbf{y}_{k,k}. \quad (2.14)$$

Durch den Vergleich der höchsten mit der zweithöchsten Approximation lässt sich der lokale Fehler abschätzen zu

$$e_{k,k} \approx |\mathbf{y}_{k,k-1} - \mathbf{y}_{k,k}| = \mathcal{O}(h_B^{2k+1}). \quad (2.15)$$

Dieser Fehler wird dann mit einer vom Nutzer vorgegebenen Obergrenze für den lokalen Fehler verglichen. Liegt die Abschätzung des Fehlers unterhalb dieser Grenze, gilt der Schritt als erfolgreich und $\mathbf{y}_{k,k}$ wird als numerische Lösung akzeptiert. Ist dies nicht der Fall, wird die Rechnung mit einer neuen Schrittweite h_{i+1} gestartet und eine neue Zeile der Extrapolationstabelle berechnet. Um aus Effizienzgründen zu vermeiden, dass die Schrittweiten zu klein werden, ist noch eine Obergrenze für die n_k definiert, oberhalb derer dann die Basisschrittweite h_B verkleinert wird.

Gleichzeitig erlaubt aber eine hohe Ordnung des Interpolationspolynoms eine große Schrittweite h_B . Daher wird eine optimale Ordnung k dergestalt definiert, dass die Anzahl der Funktionsaufrufe dividiert durch die Schrittweite h_B minimal wird. Details der praktischen Realisierung einer kombinierten Schrittweiten- und Ordnungskontrolle können in Hairer, Nørsett und Wanner (1987) gefunden werden.

Der Vorteil der Extrapolationsmethoden liegt in dieser automatischen Genauigkeitskontrolle und Schrittweitenanpassung, welche eine sehr effiziente und exakte numerische Lösung der Differentialgleichungen ermöglicht. Geeignet sind Extrapolationsmethoden für die Integration von nicht-steifen Differentialgleichungen, unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Ist diese nicht erfüllt, z. B. wenn die Funktionswerte aus einer Tabelle interpoliert werden müssen, so führt dies dazu, dass eine Lösung mit sehr kleinen Schrittweiten und somit nur mit sehr viel Rechenzeit gefunden werden kann. Ebenso sind Singularitäten innerhalb des Integrationsintervalles zu vermeiden (Press u. a. (1992), Kapitel 16.4).

2.3.2 Symplektische Integrationsmethoden

Während allgemeine Integrationsmethoden, wie die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Extrapolationsmethoden, versuchen, die Differentialgleichungen mit größtmöglicher Genauigkeit zu integrieren, entstanden Mitte der 1980er Jahre erste Verfahren mit dem Ziel, zusätzlich dazu noch spezielle Eigenschaften und Invarianten der zu untersuchenden Systeme zu erhalten. Unter einer Invarianten¹⁴ der Differentialgleichung (2.4) versteht man eine zeitlich konstante Funktion $I(\mathbf{y})$, für welche

$$\frac{dI(\mathbf{y})}{dt} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial I(\mathbf{y})}{\partial y_k} \dot{y}_k = 0 \quad (2.16)$$

für alle \mathbf{y} gilt. Als Beispiele solcher Invarianten seien hier z. B. die Gesamtenergie oder der Gesamtdrehimpuls eines Systems oder die Gesamtmasse bei chemischen Reaktionen angeführt. Eine umfassende Darstellung der Aspekte strukturerhaltender numerischer Algorithmen findet sich in Hairer, Lubich und Wanner (2002).

Besondere Bedeutung für die Integration Hamiltonscher Systeme erlangten die so genannten symplektischen Integratoren. Unter einem Hamiltonschen System $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ versteht man eine Funktion der generalisierten Orte \mathbf{q} und der generalisierten Impulse

¹⁴auch erstes Integral oder Erhaltungsgröße genannt

\mathbf{p} , deren Bewegungsgleichungen sich als $2d$ -Differentialgleichungen erster Ordnung der Struktur

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots d \quad (2.17)$$

darstellen lassen.¹⁵ Im Folgenden sollen lediglich konservative, d. h. nicht explizit von der Zeit t abhängige, Hamiltonsche Systeme betrachtet werden. Die getroffenen Aussagen bleiben allgemein gültig, da sich jedes nicht-konservative System durch Erweiterung des Phasenraumes in ein konservatives überführen lässt (siehe z. B. Rebhan (2006), Kapitel 8.3.1).

Mit Gleichung (2.16) ergibt sich für ein konservatives Hamiltonsches System \mathcal{H}

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \dot{p}_k = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_k \partial p_k} - \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_k \partial q_k} = 0. \quad (2.18)$$

\mathcal{H} ist somit eine Invariante, welche im Allgemeinen mit der Gesamtenergie des Systems gleichgesetzt wird. Für eine symplektische Formulierung der Bewegungsgleichungen fasst man die Koordinaten und Impulse in einem einzigen Vektor $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ zusammen,¹⁶ wodurch sich dann (2.17) besonders einfach als

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \nabla \mathcal{H} \quad (2.19)$$

schreiben lässt, wobei

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

eine aus zwei quadratischen, d -dimensionalen Null- ($\mathbf{0}$) und Einheitsmatrizen (\mathbf{E}) bestehende antisymmetrische Matrix der Dimension $2d$ ist.

Poincaré zeigte 1899, dass der Phasenfluss eines Hamiltonschen Systems φ_t einer symplektischen Abbildung für alle t entspricht.¹⁷ Eine eindeutige und umkehrbare Abbildung φ_t ist genau dann symplektisch (und erhält somit die spezielle Form der Bewegungsgleichungen), wenn ihre Jacobi-Matrix ($\mathbf{J}_t(\mathbf{y}) = \partial \varphi_t / \partial \mathbf{y}(t)$) für alle t folgende Bedingung erfüllt

$$\mathbf{J}_t^T \mathbf{M} \mathbf{J}_t = \mathbf{M}. \quad (2.21)$$

Betrachtet man im eindimensionalen Fall ($d = 1$) das von den beiden Vektoren $\mathbf{a}(q_a, p_a)$ und $\mathbf{b}(q_b, p_b)$ aufgespannte Parallelogramm, dann beschreibt man mit $\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b}$ das Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ der beiden Vektoren und somit die Fläche dieses Parallelogrammes. Die Gleichung (2.21) repräsentiert somit die Flächenerhaltung unter der Abbildung φ_t (siehe auch Abbildung 2.6).

Für Systeme höherer Dimension ($d > 1$) bedeutet Symplektizität, dass die Summe der in die d zweidimensionalen Koordinatenebenen (q_i, p_i) projizierten orientierten Flächen des Parallelogrammes unter der Abbildung φ_t konstant bleibt. Diese Eigenschaft Hamiltonscher Systeme schränkt die Bewegungen des Systems sehr viel stärker ein als alleinige Konstanz der Energie dies tut. Ein Zitat dazu aus Sanz-Serna (1992):

¹⁵Eine allgemeine Einführung in die Theorie Hamiltonscher Systeme und ihrer Eigenschaften findet sich z. B. in Goldstein (1991) oder Rebhan (2006).

¹⁶daher die Bezeichnung symplektisch, von altgriech. *symplektikos* = mit einflechtend; aus Rebhan (2006).

¹⁷Ein Beweis dieser und der nächsten Aussage in moderner Notation findet sich z. B. in Hairer, Lubich und Wanner (2002)

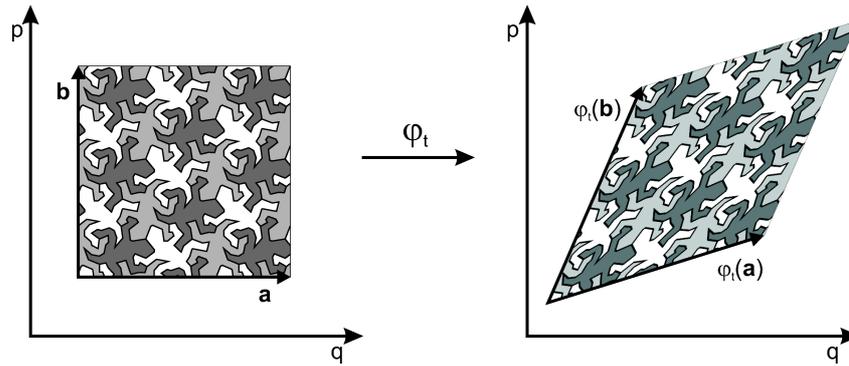


Abb. 2.6: Symplektizität (Flächenerhaltung) einer linearen Abbildung φ_t .

“Conservation of energy restricts the dynamics of the numerical solution by forcing the computed points to be on the correct $(2d-1)$ -dimensional manifold $\mathcal{H} = \text{const.}$, but otherwise poses no restriction to the dynamics: within the manifold the points are free to move anywhere and only motions orthogonal to the manifold are forbidden. When d is large this is clearly a rather weak restriction. On the other hand, symplecticness restricts the dynamics in a more global way: all directions in phase space are taken into account.“

Unter einem symplektischen Integrator versteht man all diejenigen Integrationsmethoden, deren numerischer Fluss ϕ_h , angewandt auf ein Hamiltonsches System, ebenfalls die Bedingung (2.21) erfüllt. Es handelt sich dabei meist um Einschrittverfahren,¹⁸ wobei die Spanne von symplektischen Runge-Kutta und Kollokationsverfahren, über Runge-Kutta-Nyström Algorithmen bis hin zu Verfahren, welche einen speziellen Aufbau der Hamilton-Funktion \mathcal{H} benötigen, reicht.

Für viele dieser Verfahren zerlegt man \mathcal{H} in mehrere Teile, welche für sich genommen jeweils exakt lösbar sind. Die, vom verwendeten Algorithmus abhängige, Kombination dieser Einzellösungen ergibt dann eine Approximation der Gesamtlösung nach einem Schritt der Schrittweite h . Lässt sich das Hamiltonsche System z. B. in einen nur von den generalisierten Impulsen und einen nur von den Koordinaten abhängigen Teil zerlegen: $\mathcal{H} = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q})$, bietet sich die Anwendung des so genannten Störmer-Verlet (SV)-Schemas¹⁹ an. Beschreibt man z. B. Positionen und Geschwindigkeiten in einem baryzentrischen Koordinatensystem, vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (2.17) zu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial T(\mathbf{p})}{\partial p_i} = p_i \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (2.22)$$

und ein Schritt dieses expliziten Verfahrens, welches auch an einigen Stellen in dieser Arbeit benutzt wurde, ist dann definiert als

¹⁸Für eine Beschreibung symplektischer Mehrschrittverfahren siehe Hairer, Lubich und Wanner (2002).

¹⁹auch unter dem Namen *Leap-frog-Methode* bekannt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{n+1/2} &= \mathbf{p}_n + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{q}_n) \\
\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h \mathbf{p}_{n+1/2} \\
\mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_{n+1/2} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Durch Einsetzen lässt sich zeigen, dass Bedingung (2.21) erfüllt ist (siehe auch Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel VI).

Ein weiteres in dieser Arbeit verwendetes symplektisches Verfahren eignet sich besonders für die Integration von leicht gestörten Hamiltonschen Systemen der Form $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \varepsilon \mathcal{H}_B$, wobei ε ein kleiner Störparameter sei - es gelte somit $\mathcal{H}_A \gg \varepsilon \mathcal{H}_B$. Für die Integration von Körpern unseres Sonnensystems, bei welchem die dominierende Kraft die Gravitationskraft der Sonne ist, ordnet man die Teile \mathcal{H}_A und \mathcal{H}_B wie folgt zu:

\mathcal{H}_A : beschreibt die ungestörte Keplerbewegung der einzelnen Körper um die Sonne

\mathcal{H}_B : beschreibt die auf jeden Körper wirkenden Störungen aufgrund der gravitativen Wechselwirkungen mit den anderen massereichen Objekten.

Der Parameter ε entspricht dabei der Summe der Planetenmassen m_i , ausgedrückt in Sonnenmassen M : $\varepsilon = \sum_i m_i/M$. Ein Integrator 2. Ordnung für ein solches System definiert sich analog Gleichung (2.23):

1. Für einen halben Zeitschritt erfolgt die ungestörte Bewegung des Körpers entlang der durch \mathcal{H}_A beschriebenen Keplerbahn.
2. Mit den damit erhaltenen Positionen und Geschwindigkeiten werden die wechselseitigen Störungen über einen Zeitschritt der Länge h berechnet.
3. Mit diesen neuen Koordinaten bewegt sich der Körper analog zum ersten Schritt erneut für $h/2$ entlang einer Keplerbahn.

Im Folgenden werden Integratoren dieses Types mit *SABAn* abgekürzt werden, wobei das S darauf verweisen soll, dass diese Integratoren symmetrisch sind; n bezeichnet die Ordnung des Integrators. Bei dem eben beschriebenen Verfahren handelt es sich demnach um *SABA2*. Die Koeffizienten, mit welchen sich basierend auf diesem Grundschemata Integratoren höherer Ordnung erzeugen lassen, finden sich in Laskar und Robutel (2001).

Da für die Beschreibung der Bewegung des Zentralkörpers in einem baryzentrischen Koordinatensystem $\mathcal{H}_A \gg \varepsilon \mathcal{H}_B$ nicht mehr gilt, ist die Hamilton-Funktion für diese Integratoren in ein geeigneteres Koordinatensystem zu transformieren. Wisdom und Holman (1991) wählten Jacobi-Koordinaten, um die Hamilton-Funktion zu beschreiben; aufgrund ihrer leichteren Programmierbarkeit empfehlen andere Autoren (z. B. Chambers (1999)) so genannte Poincaré-Variablen²⁰, wie sie auch in dieser Arbeit verwendet wurden. Bei diesen werden die kanonischen Impulse baryzentrisch, die Koordinaten hingegen heliozentrisch definiert. Durch die entsprechende Wahl der generalisierten Koordinaten kann

²⁰Für eine Definition siehe z. B. Morbidelli (2002), welcher sie unter dem Namen *demokratisch-heliozentrische* Koordinaten einführt.

sichergestellt werden, dass im Allgemeinen $\mathcal{H}_A \gg \varepsilon \mathcal{H}_B$ gilt. Diese Forderung ist lediglich dann nicht mehr erfüllt, wenn es zu nahen Begegnungen zwischen einzelnen Körpern kommt. Der Störterm, welcher proportional zur Inversen des Abstandes zwischen den Körpern ist, kann in diesem Fall beliebig groß werden, wodurch die numerische Lösung für diesen Körper entscheidend an Genauigkeit verliert. Eine Lösung hierfür im Bereich der Himmelsmechanik stellen die sogenannten hybriden Integratoren, wie z. B. *Mercury* von Chambers (1999), dar, welche nur im Falle naher Begegnungen den Orbit mit einer konventionellen Methode berechnen, während die restliche Zeit ein symplektischer Algorithmus benutzt wird.²¹

Neben der Symplektizität erhalten symplektische Integratoren meist auch noch weitere Invarianten des Systems. So halten z. B. viele Methoden zusätzlich noch quadratische Invarianten konstant - als Beispiel sei der Drehimpuls in N -Körper-Systemen genannt.

Der Wert der Hamiltonschen Funktion selbst, \mathcal{H} , wird nicht exakt konstant gehalten, weist aber dennoch bei der Integration keine säkularen Trends auf. Der Grund hierfür liegt darin, dass die numerische Lösung einer symplektischen Methode der Ordnung p über exponentiell lange Zeiträume von Ordnung $\mathcal{O}(e^{-1/h})$ in der Nähe der um h leicht gestörten Hamilton-Funktion \mathcal{H}' liegt, welche bis auf kleine Fehler exakt erhalten wird (siehe Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel IX.8). \mathcal{H}' unterscheidet sich dabei von \mathcal{H} in $\mathcal{O}(h^p)$ und ist mit den Methoden der rückwärtigen Fehleranalyse (siehe Anhang A und Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel IX) unter der Annahme einer konstanten Schrittweite h exakt berechenbar.

Der Nachteil symplektischer Methoden liegt ganz klar in der Forderung einer konstanten Schrittweite, welche es nicht erlaubt diese entsprechend den momentanen Anforderungen zu variieren. Während die Standardmethoden der Schrittweitenkontrolle (Abschätzung des lokalen Fehlers und Berechnung einer neuen Schrittweite) die symplektische Struktur zerstören, zeigen andere Lösungsansätze, wie z. B. eine Transformation der unabhängigen Variable, im Moment noch nicht die gewünschten Stabilitätseigenschaften. Eine Übersicht der verschiedenen Methoden einer Änderung der Schrittweite bei gleichzeitiger Erhaltung der Struktur des Systems findet sich in Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel VIII.

2.3.3 Ein Vergleich der Integrationsmethoden

In diesem Kapitel sollen die Eigenschaften der in den letzten beiden Abschnitten beschriebenen Integrationsmethoden anhand des Kepler-Problems noch einmal gegenübergestellt werden. Das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Relativbewegung eines Körpers in Bezug auf den zweiten lautet

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ \dot{y}_3 &= -\kappa y_1 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \\ \dot{y}_4 &= -\kappa y_2 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

²¹Da diese Programmpakete aber nur schwer zu modifizieren und den eigenen Anforderungen anzupassen sind und diese Arbeit eine qualitative Beschreibung des Phasenraumes und nicht die genaue Beschreibung einzelner Bahnen zum Ziel hatte, wurden sie im Folgenden nicht weiter untersucht.

wobei κ eine von den verwendeten Distanz- und Masseneinheiten abhängige positive reelle Zahl ist.

Integriert wurde über 10^5 Perioden mit doppelter Genauigkeit (64 Bit) und einer Exzentrizität von $e = 0.4$. Als Extrapolationsschema wurde *ODEX*²² mit einer relativen und absoluten Fehlertoleranz von 10^{-16} benutzt. Als symplektischer Integrator wurde eine Variante des Störmer-Verlet-Algorithmus benutzt. Mit diesem als Basismethode und durch geeignete Wahl der Koeffizienten $\gamma_i, i = 1, \dots, 17, \gamma_i \in \mathbb{R}$ und $\sum_i \gamma_i = 1$ lässt sich eine Kompositionsmethode ψ_h 8. Ordnung erzeugen, welche für die Rechnungen verwendet wurde.²³ Diese ist definiert als Sequenz 17 einzelner Störmer-Verlet-Schritte mit der Schrittweite $\gamma_i h$

$$\psi_h = \phi_{\gamma_{17}h} \circ \dots \circ \phi_{\gamma_1 h}. \quad (2.25)$$

Die Schrittweite wurde so gewählt, dass sie 50 Integrationsschritten pro Periode entspricht.

Um beide Methoden miteinander zu vergleichen, wurde der relative Energie-, Drehimpuls- und Positionsfehler (durch Vergleich mit der analytischen Lösung) berechnet. Die Ergebnisse dieses Vergleiches finden sich in Abbildung 2.7 und in Tabelle 2.2.

Tabelle 2.2: Langzeitverhalten verschiedener Integratoren in Abhängigkeit von der Integrationszeit t und der Schrittweite h . Dargestellt ist der aus eigenen Berechnungen ermittelte Fehler in der Energie (\mathcal{H}), dem Drehimpuls (L) und globale Positionsfehler.

Methode	Fehler in \mathcal{H}	Fehler in L	globaler Fehler
<i>ODEX</i>	$\propto t$	$\propto t$	$\propto t^2$
<i>SV</i> (8.Ordnung)	$\propto h^8$	0	$\propto t^{3/2}$

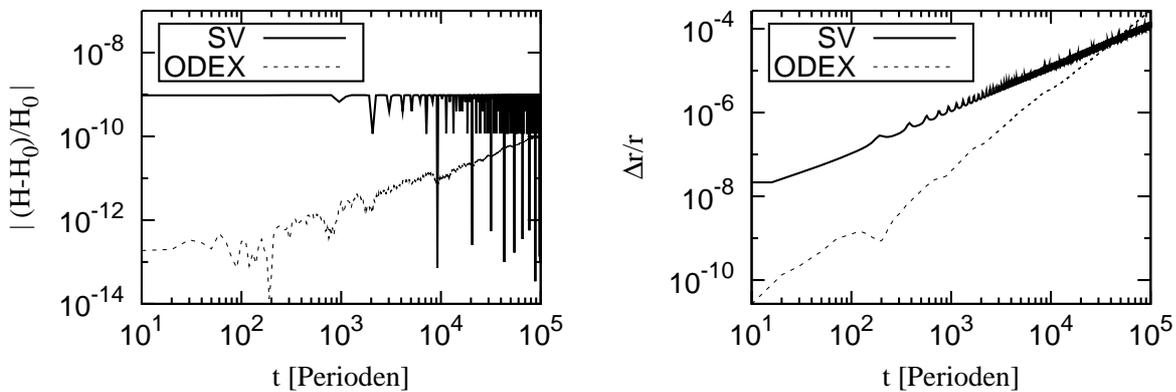


Abb. 2.7: Relativer Energie- und Positionsfehler des Kepler-Problems mit $e = 0.4$ für *ODEX* und einer Störmer-Verlet-Methode 8.Ordnung.

Die schon erwähnten Eigenschaften der Integratoren zeigen sich deutlich. Während *ODEX* im Kurzzeitbereich der *SV*-Methode weit überlegen ist, zeigt diese ein weniger starkes Anwachsen des Positionsfehlers, so dass beide Algorithmen nach 10^5 Perioden etwa die gleiche Positionsgenauigkeit besitzen. Der Energiefehler, welcher bei symplektischen

²²Der Quellcode ist frei unter <http://www.unige.ch/~hairer/prog/nonstiff/odex.f> verfügbar.

²³Die numerischen Werte der Koeffizienten finden sich in Kahan und Li (1997).

Methoden lediglich von der Schrittweite abhängig und somit konstant ist, wächst bei der Extrapolationsmethode linear mit der Zeit. Das gleiche gilt für den Drehimpuls, welcher (bis auf Rundungsfehler) für die symplektische Methode konstant bleibt.

Des weiteren sieht man in Abbildung 2.7, dass der relative Energiefehler bei *ODEX* während der ersten ≈ 200 Perioden mit $\propto t^{1/2}$ und der Positionsfehler mit $\propto t^{3/2}$ anwächst. Dieses Wachstum entspricht dem von Brouwer (1937) prognostizierten stochastischen Anwachsen aufgrund von Rundungsfehlern. Erst danach werden diese Fehler systematisch und zeigen das in Tabelle 2.2 dargestellte Langzeitverhalten, welches auch viele andere Integrationsmethoden aufweisen (siehe z. B. Milani und Nobili (1988)), sofern diese nicht speziell im Hinblick auf die Minimierung der Rundungs- und Diskretisierungsfehler programmiert wurden (siehe z. B. Graziar u. a. (2005)). Dass der Positionsfehler der *SV*-Methode selbst ohne spezielle Algorithmen zur Minimierung des Rundungsfehlers mit $\propto t^{3/2}$ anwächst, kann damit begründet werden, dass durch die erzwungene Beibehaltung der symplektischen Struktur einem stärkeren Anwachsen der Fehler entgegengewirkt wird (Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel X.3). Eine ausführlichere Darstellung der Fehlereinflüsse bei numerischen Integrationen findet sich in Kapitel 3.1.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass symplektische Integratoren sehr viel besser als konventionelle Integratoren für Langzeitintegrationen Hamiltonscher Systeme geeignet sind. Während ein nicht-symplektischer Integrator aus einem konservativen ein dissipatives System macht, was über lange Integrationszeiträume zu einer Zerstörung der ursprünglichen Phasenraumeigenschaften führt, erhalten symplektische Integratoren *per definitionem* bestimmte qualitative Eigenschaften des Systems. Ist man daher eher an einer qualitativ korrekten Beschreibung als an einer hochgenauen, und oft auch rechenzeitintensiven, Ermittlung der Trajektorien interessiert, sind symplektische Verfahren anderen Methoden vorzuziehen.

2.4 Chaosindikatoren

Um zu entscheiden, ob die Bahn eines Asteroiden chaotisch ist, ist die Nutzung präziser und mathematisch fundierter Hilfsmittel unerlässlich, von welchen drei in diesem Kapitel dargestellt werden sollen. Dabei soll im Folgenden dann eine Bewegung als chaotisch bezeichnet werden, wenn sich im Phasenraum anfänglich infinitesimal benachbarte Trajektorien mit der Zeit exponentiell voneinander entfernen.

Im ersten Teil wird der traditionelle Lyapunov-Indikator und der neuere *MEGNO*-Indikator, ein sogenannter schneller Indikator, einschließlich ihrer Eigenschaften dargestellt und einander gegenübergestellt. Besonders gut geeignet zur Untersuchung nur leicht gestörter Hamiltonscher Systeme ist die in Kapitel 2.4.2 beschriebene Methode der Frequenzanalyse.

2.4.1 Lyapunov-Indikatoren

Die Bahn des zu untersuchenden Körpers sei gegeben durch ein System von Differentialgleichungen (2.4). Betrachtet man zu gewissen Anfangsbedingungen \mathbf{y}_0 eine im Phasenraum in der Nähe liegende Bahn $\mathbf{y}_0 + \delta\mathbf{y}_0$ und berücksichtigt dabei lediglich die linearen Terme der Taylorentwicklung, so wird das zeitliche Verhalten ihrer relativen Entfernung

beschrieben durch

$$\delta \dot{y}_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_i(\mathbf{y})}{\partial y_k} \delta y_k = \sum_{k=1}^d J_{ik} \delta y_k. \quad (2.26)$$

In (2.26), welche auch als Variationsgleichungen bezeichnet werden, steht \mathbf{J} für die Matrix der partiellen Ableitungen, die sogenannte Jacobi-Matrix. Die mittlere Wachstumsrate, mit welcher sich die anfänglich benachbarten Bahnen voneinander entfernen, sei definiert als

$$\lambda(\delta \mathbf{y}(t_0), \mathbf{e}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right) \ln \frac{\|\delta \mathbf{y}(t)\|}{\|\delta \mathbf{y}(t_0)\|} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} = \frac{\delta \mathbf{y}(t_0)}{\|\delta \mathbf{y}(t_0)\|}. \quad (2.27)$$

Es kann gezeigt werden, dass λ existiert und endlich ist (Lichtenberg und Liebermann (1992)). Weiterhin existiert eine Basis von d -nicht notwendigerweise orthogonalen- Richtungsvektoren \mathbf{e}_i , für welche $\lambda(\delta \mathbf{y}(t_0), \mathbf{e})$ die Werte λ_i annimmt. Diese λ_i werden als Lyapunov-Exponenten bezeichnet, wobei einige der λ_i auch gleich sein können. Ein d -dimensionales System besitzt maximal d verschiedene Lyapunov-Exponenten. Liegen die Bewegungsgleichungen in kanonischer Form vor (Gleichung 2.17), dann lässt sich nachweisen (Benettin u. a. (1980)), dass stets Paare von Lyapunov-Exponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten, wovon mindestens zwei den Wert Null annehmen.

Der größte Lyapunov-Exponent $\gamma = \max(\lambda_i)$ dominiert dabei das Verhalten des Systems in allen Richtungen \mathbf{e}_i , in welchen er angeregt wurde. Es gilt daher

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right) \ln \frac{\|\delta \mathbf{y}(t)\|}{\|\delta \mathbf{y}(t_0)\|}. \quad (2.28)$$

Es kann gezeigt werden, dass der Wert von γ unabhängig von den gewählten Anfangsvariationen $\delta \mathbf{y}_0$ ²⁴ und der Metrik des Phasenraumes ist.²⁵ Der Zeitraum, innerhalb dessen $\delta \mathbf{y}_0$ um den Faktor $e^1 \approx 2.718$ anwächst, wird als Lyapunov-Zeit T_L bezeichnet und ist definiert als

$$T_L = \gamma^{-1}. \quad (2.29)$$

Da γ nur in den seltensten Fällen analytisch bestimmt werden kann, ist Gleichung (2.26) numerisch zu integrieren. Da diese Integrationen nur über einen endlichen Zeitraum erfolgen können, erhält man lediglich eine Abschätzung (man spricht in diesem Zusammenhang häufig von einem Lyapunov-Indikator) $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta \mathbf{y}(t)\|}{\|\delta \mathbf{y}(t_0)\|}. \quad (2.30)$$

wobei man annimmt, dass $\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ gilt. Mit diesem Vorgehen lassen sich all diejenigen Lyapunov-Zeiten finden, welche kleiner als eine (zur Integrationszeit proportionalen) Obergrenze sind. Des weiteren ist noch zu beachten, dass die linearisierten Gleichungen nur gelten, solange $\delta \mathbf{y}$ klein ist. Aus diesem Grund ist der Vektor zu gegebenen Zeitpunkten zu renormieren.²⁶

²⁴Die Menge der Anfangsvariationen, welche keinen Anteil in Richtung des zu γ gehörigen Eigenvektors haben, ist vom Maße 0.

²⁵Für eine ausführliche Darstellung der Theorie der Lyapunov-Exponenten siehe z. B. Lichtenberg und Liebermann (1992).

²⁶Details der numerischen Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten finden sich z. B. in Benettin u. a. (1980) oder Morbidelli (2002).

Der Lyapunov-Exponent von Gleichung (2.30) nach einem endlichen Integrationszeitraum t lässt sich als Integral schreiben als

$$\gamma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\delta \dot{\mathbf{y}}(s)}{\delta \mathbf{y}(s)} ds, \quad (2.31)$$

mit $\delta \mathbf{y} = \|\delta \mathbf{y}\|$ und $\delta \dot{\mathbf{y}}(s) = \delta \dot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} / \delta \mathbf{y}$.

In Anlehnung an diese Gleichung definieren Cincotta und Simó (2000) den *MEGNO*-Indikator $Y(t)$ -das Akronym steht dabei für *Mean Exponential Growth of Nearby Orbits*- und dessen Mittelwert $\bar{Y}(t)$ als

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\delta \dot{\mathbf{y}}(s)}{\delta \mathbf{y}(s)} s ds \quad \text{und} \quad \bar{Y}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds. \quad (2.32)$$

$Y(t)$ kann daher als eine gewichtete Variante des Integrals (2.31) angesehen werden, wodurch erreicht wird, dass die anfängliche Einschwingphase der Variationsvektoren weniger Bedeutung für die Bestimmung der Dynamik erhält. Der zeitliche Verlauf von $Y(t)$ erlaubt dabei Aussagen über die Stabilität der Bewegung. Es lässt sich zeigen, dass \bar{Y} im Fall quasi-periodischer Bewegung (bei welcher $\delta \mathbf{y}$ linear mit der Zeit anwächst) für $t \rightarrow \infty$ gegen 2 konvergiert (und dies umso langsamer, je näher man einem stabilen Orbit ist), während sich \bar{Y} für chaotische Bewegungen wie $\gamma t/2$ verhält. Der maximale Lyapunov-Exponent ist direkt aus \bar{Y} durch Umstellen dieser Gleichung durch

$$\gamma_Y = 2\bar{Y}/t \quad (2.33)$$

berechenbar. Cincotta und Simó (2000) schlagen vor, γ aus \bar{Y} mittels linearer Regression abzuleiten. Dies hat den Vorteil, dass dabei die gesamte Information über die Dynamik des Systems, welche in \bar{Y} enthalten ist, in die Bestimmung von γ eingeht. Der dergestalt berechnete maximale Lyapunov-Exponent soll im Folgenden mit $\gamma_{Y,R}$ bezeichnet werden.

Für chaotische Orbits konvergiert γ_Y mit der gleichen Geschwindigkeit wie Gleichung (2.31) gegen den gesuchten Wert. Für quasi-periodische Orbits hingegen ist die Konvergenz gegen 0 mit $2/t$ im Gegensatz zu $\ln t/t$ für (2.31) wesentlich schneller. Eine umfassende Darstellung der Eigenschaften des *MEGNO*-Indikators, einschließlich der Anwendung für diskrete dynamische Systeme, wie sie für die Berechnung des *MEGNO* mit symplektischen Integratoren notwendig ist, findet sich in Cincotta, Giordano und Simó (2003).

Die hier dargestellten Eigenschaften der vorgestellten Indikatoren sollen anhand der Froeschlé, Guzzo und Lega (2000) entnommenen Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_3 + \epsilon(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3 + 4)^{-1} \quad (2.34)$$

untersucht werden, wobei der Parameter ϵ eine Störung des integrablen Systems \mathcal{H}_0 darstellt.

Für $\epsilon = 0$ sind die Impulse p_i konstant. Jedes Paar (p_1, p_2) definiert dann einen Torus, auf dessen Oberfläche die Bewegung mit den Frequenzen $\omega_1 = p_1$, $\omega_2 = p_2$, $\omega_3 = 1$ stattfindet. Resonanzen finden sich an den Stellen, an welchen $\sum_i k_i \omega_i = 0$ für $k_i \in \mathbb{Z}$ gilt, wobei ihre Stärke mit wachsendem $|k_i|$ abnimmt. Die Resonanzen füllen daher die Ebene der Anfangsbedingungen für jedes rationale Frequenzverhältnis dicht mit einem Netz: dem sogenannten Arnold-Netz.

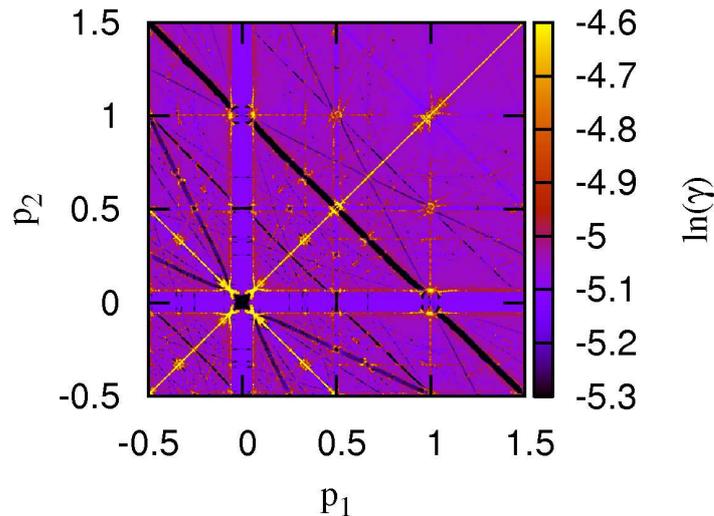


Abb. 2.8: Das Arnold-Netz von Gleichung (2.34) für $\varepsilon = 0.04$. Die Stabilität der Anfangsbedingungen wurde mit Gleichung (2.31) berechnet und ist farbkodiert dargestellt. Um die Strukturen besser sichtbar zu machen wurde die Farbskala auf den dargestellten Bereich begrenzt.

Stört man dieses System um $\varepsilon \mathcal{H}_1$, so ist es nicht mehr integrabel. Durch die Resonanzen, welche sich in der (p_1, p_2) -Ebene als Linien der Gestalt $k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 = 0$ darstellen, zeigt sich in den Überlappungsbereichen und an ihren Rändern chaotisches Verhalten. Für $\varepsilon = 0.04$ ist dies in Abbildung 2.8 dargestellt.

Die Auflösung, mit welcher einzelne Resonanzen noch voneinander unterschieden werden können, ist ein Maß für die Güte eines Chaosindikators. Um diese für die vorgestellten Indikatoren zu untersuchen, wurde Gleichung (2.34) mit $\varepsilon = 0.04$ zusammen mit den Variationsgleichungen mit dem *ODEX*-Integrator²⁷ über $t = 1000$ Zeiteinheiten integriert und γ , γ_Y und $\gamma_{Y,R}$ berechnet. Die Werte der Winkelvariablen wurden anfänglich, wie in Froeschlé, Guzzo und Lega (2000), zu Null gesetzt.

Abbildung 2.8 zeigt farbkodiert in der (p_1, p_2) -Ebene für jeden der Anfangswerte mit einer Auflösung von 500 mal 500 Punkten dessen Stabilität anhand des natürlichen Logarithmus von γ . In Abbildung 2.9 wurden die maximalen Lyapunov-Exponenten als Funktion von p_1 für $p_2 = 0.2$ für alle drei Berechnungsmethoden einander gegenübergestellt. Hier lässt sich feststellen, dass alle drei Methoden deutlich die beiden Spitzen bei $p_1 = \pm 0.2$ zeigen, dessen Wert des maximalen Lyapunov-Exponenten auch von allen gleich abgeschätzt wird. Für die anderen Anfangsbedingungen zeigt die aus Gleichung (2.31) erhaltene Kurve (γ) eine mehr oder minder variationsarme Linie um den theoretisch für einen stabilen Orbit für diesen Integrationszeitraum aus $\ln t/t$ errechenbaren Wert von -4.97 (in logarithmischen Einheiten). γ_Y , für welchen dieser Wert bei $\ln(2/t) = -6.21$ liegt, zeigt im Vergleich dazu mehr Strukturen und weist dabei gleichzeitig einen Großteil der Anfangsbedingungen als stabiler aus. Ein Überschlag zeigt, dass die Integrationszeit vervierfacht werden muss, um mit Gleichung (2.31) ein ähnliches Niveau zu erreichen.

Die größte Strukturiertheit zeigt der aus \bar{Y} durch lineare Regression gewonnene maximale Lyapunov-Exponent $\gamma_{Y,R}$. Durch Wiederholung der Rechnungen für längere Integrationszeiten konnte jedoch festgestellt werden, dass nur ein Teil der damit erhalte-

²⁷Siehe Kapitel 2.3.1.

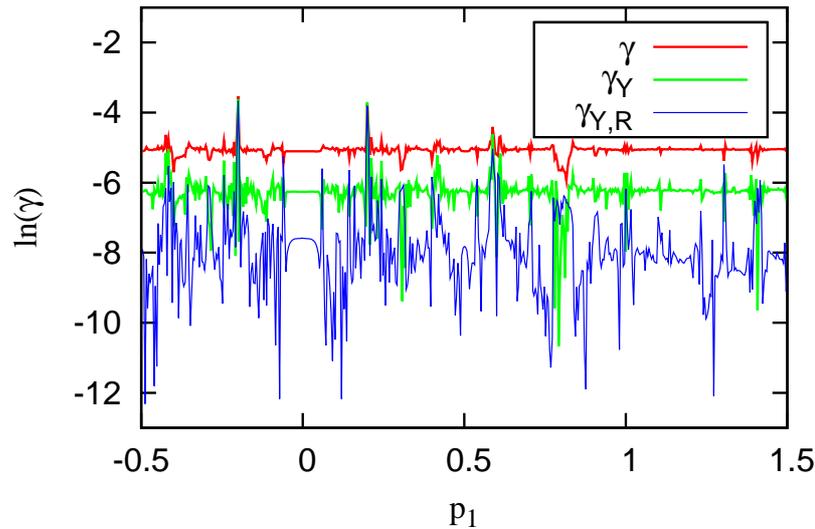


Abb. 2.9: Das Arnold-Netz von Gleichung (2.34) für $p_2 = 0.2$. Der Lyapunov-Exponent wurde für diesen Vergleich mittels Gleichung (2.31) ($= \gamma$), aus *MEGNO* ($= \gamma_Y$) und aus γ_Y durch lineare Regression ($= \gamma_{Y,R}$) bestimmt .

nen Lyapunov-Exponenten real war. Es zeigte sich, dass mit *MEGNO* sichere Erkenntnisse über die Stabilität lediglich bis zur Grenze $\ln(2/t)$ möglich sind. Die Lyapunov-Exponenten von Anfangsbedingungen, welche unterhalb dieser Grenze liegen, lassen sich nur durch längere Integrationszeiten bestimmen.

Generell ließ sich mit dieser Untersuchung feststellen, dass man durch *MEGNO* sehr viel mehr Information über die innere Struktur eines dynamischen Systems bei gleichen Kosten der Berechnung im Vergleich zur traditionellen Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten nach Gleichung (2.31) erhält. Für die Ermittlung des Lyapunov-Exponenten aus *MEGNO* ist Gleichung (2.33) ausreichend. Die zusätzliche Berechnung einer linearen Regression scheint keinen verlässlichen Erkenntnisgewinn zu bringen.

2.4.2 Frequenzanalyse

Die Frequenzanalyse (FA), d. h. die Analyse der grundlegenden Frequenzen eines Systems mit Hilfe numerischer Verfahren, ist eine weitere Methode zur Unterscheidung zwischen chaotischer und regulärer Dynamik in konservativen Systemen. Erstmals angewandt wurde sie von Laskar (1990) zur Untersuchung der säkularen Dynamik der Planeten unseres Sonnensystems. Eine umfassende Darstellung der Grundlagen und der algorithmischen Umsetzung der FA findet sich z. B. in Laskar (1993) und Robutel und Laskar (2001), aus welchem auch die folgende kurze Darstellung der Grundzüge der Methode entnommen ist.

Betrachtet werden soll eine um einen kleinen Parameter ε gestörte Hamiltonsche Funktion \mathcal{H} der Form $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, wobei die Dimension der Vektoren der Wirkungs- (\mathbf{p}) und Winkelvariablen (\mathbf{q}) der Anzahl der Freiheitsgrade d des Systems entspricht. Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich dieses System auf $\mathcal{H}_0(\mathbf{p})$ und ist damit integrierbar.

Die Bewegungsgleichungen dieses Systems lauten dann

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0(\mathbf{p})}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \nu_i \quad \text{für } i = 1, \dots, d. \quad (2.35)$$

Die Winkel q_i des damit beschriebenen Systems ändern sich linear in der Zeit im Intervall $[0, 2\pi]$ mit den Frequenzen $\nu_i(\mathbf{p})$, wobei die Bewegung im Phasenraum auf der Oberfläche eines n -dimensionalen Torus, gebildet aus Kreisen mit den Radien p_i , stattfindet.

Gilt für die Matrix \mathbf{A} der partiellen zweiten Ableitungen von \mathcal{H}_0 mit den Elementen $A_{i,j} = \partial^2 \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) / \partial p_i \partial p_j$ die Bedingung

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0, \quad (2.36)$$

dann ist durch das KAM-Theorem (siehe z. B. Arnold (1988)) sichergestellt, dass für ausreichend kleine Werte der Störung ε die Bewegungen des gestörten Systems auf der Oberfläche eines Torus²⁸ stattfinden, welcher gegenüber dem des ungestörten Problems lediglich leicht deformiert ist und für $\varepsilon \rightarrow 0$ in diesen übergeht. Diese KAM-Tori bleiben umso länger erhalten, je irrationaler die Verhältnisse der Frequenzen des Systems sind.

Die FA nutzt die Tatsache, dass Trajektorien auf KAM-Tori konstante Frequenzen besitzen. Dabei hat ein System mit d Freiheitsgraden d voneinander unabhängige Frequenzen ν_i , welche durch die FA numerisch bestimmt werden sollen. Gegeben sei dafür die komplexe zeitabhängige Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\nu_k t}, \quad (2.37)$$

wobei für die Amplituden $a_k > a_{k+1}$ und $i^2 = -1$ gelte. Das Ziel der FA ist es, numerisch eine Approximation $\hat{f}(t)$ mit

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{a}_k e^{\hat{\nu}_k t} \quad (2.38)$$

zu finden, welche $f(t)$ mit N Termen innerhalb eines gewissen Zeitintervalls T bestmöglich approximiert. Die Frequenzen $\hat{\nu}_k$ und die komplexen Amplituden \hat{a}_k werden dabei iterativ berechnet. Generell sollte das Zeitintervall T größer sein als die Inverse der langsamsten Frequenz, um noch eine genaue Bestimmung derselben zu ermöglichen.

Diese Berechnungsalgorithmen sind für Anwendungen in der Himmelsmechanik relativ komplex, da hohe (z. B. die mittlere Bewegung n) und niedrige Frequenzen (z. B. die zeitliche Änderung des Perihelargumentes $\dot{\omega}$) gleichzeitig vorkommen. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist das Herausfiltern aller kurzperiodischen Terme vor Anwendung der FA, wodurch sich die Frequenzen der langperiodischen Winkel sehr viel besser berechnen lassen. Der Vorteil der FA gegenüber einer einfachen Fourier-Transformation ist, dass die Frequenzen der komplexen Funktion $f(t)$ (welche im Allgemeinen nicht periodisch im Intervall T sind) sehr viel genauer bestimmt werden können - proportional zu T^{-4} im Vergleich zu T^{-1} bei einer Fourier-Transformation (Robutel und Laskar (2001)).

Um die dynamischen Eigenschaften eines Hamiltonschen Systems mittels FA zu untersuchen, kann man z. B. dessen Frequenzen als Funktion der Anfangsbedingungen berechnen. Dabei werden die Winkelvariablen zum Anfangszeitpunkt t_0 konstant gehalten

²⁸auch KAM-Torus genannt

und die Frequenzen $\hat{\nu}_i$ als Funktion der Wirkungsvariablen $\mathbf{p}(t_0)$ berechnet. Laskar (1993) zeigte, dass diese Frequenzen mittels einer stetigen Funktion von $\mathbf{p}(t_0)$ abhängen, so lange die Bewegung auf KAM-Tori stattfindet. In chaotischen Gebieten sind die Tori zerstört - die Frequenzen sind nicht mehr eindeutig berechenbar, wodurch diese Stetigkeit dann verloren geht.

Dieses Verfahren soll benutzt werden, um die mittlere Bewegung n als Funktion der großen Halbachse a des Asteroiden im EKG zu berechnen. Wie in Robutel und Laskar (2001) angegeben, lassen sich so mittels FA die einzelnen Bahnresonanzen identifizieren. Dazu wurden die großen Halbachsen a von 200 masselosen Testkörpern mit einer Exzentrizität von $e_0 = 0.15$ gleichmäßig zwischen 40 und 50 AE verteilt. Alle anderen Bahnelemente wurden anfänglich zu Null gesetzt: $i_0 = \Omega_0 = \omega_0 = M_0 = 0$. Diese Körper wurden zusammen mit den 4 Gasplaneten über einen Zeitraum T von 10^6 Jahren mit einem symplektischen SV -Algorithmus 4. Ordnung integriert. Die Berechnung der Frequenzen geschah mit dem frei verfügbaren Programm $FMFT$ von David Nesvorný.²⁹

Die zu untersuchende komplexe Funktion ist $f(t) = a(t)e^{i\lambda(t)}$, welche die FA durch

$$\hat{f}(t) = \alpha_0 e^{i\nu_0 t} + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{i\nu_k t}. \quad (2.39)$$

im Intervall $[0, T]$ approximiert. $\lambda = M + \omega + \Omega$ bezeichnet die mittlere Länge des Testkörpers. Im Fall einer ungestörten Keplerbewegung ist $|\alpha_0|$ gleich dem Wert der großen Halbachse des Anfangszeitpunktes und ν_0 entspricht der mittleren Bewegung n des Körpers. Alle weiteren vorkommenden Frequenzen sind lediglich Vielfache von ν_0 . Aufgrund der Störungen der Bahn durch die Planeten (wobei Neptun aufgrund seiner Nähe den größten Anteil besitzt) enthält Gleichung (2.39) noch weitere periodische Terme, deren Amplituden α_k aber um den Faktor 100 bis 1000 kleiner sind. Ist der Testkörper weit genug von Neptun entfernt, d. h. ist die Störung ε klein genug, dann bleibt ν_0 immer noch die größte Eigenfrequenz des Systems ($\nu_0 > \nu_k$), welche stetig (durch das 3. Keplersche Gesetz $n^2 a^3 = \mu$ bestimmt) allein von der großen Halbachse abhängt. Befindet sich der Körper hingegen in einer Bahnresonanz $p + q : p$ mit Neptun, so besteht zwischen den mittleren Bewegungen der Körper ein rationales Verhältnis $n/n' = (p + q)/p$, welches innerhalb des Resonanzgebietes konstant bleibt.

Dieses Verhältnis der aus der FA erhaltenen mittleren Bewegung n des Testkörpers und der mittleren Bewegung Neptuns n' als Funktion der anfänglichen großen Halbachse des Testkörpers wurde in Abbildung 2.10 dargestellt.

Klar heben sich die Resonanzbereiche als Plateaus von der sonst stetigen Kurve ab. Die einzelnen Resonanzen lassen sich dadurch leicht identifizieren, wobei die wichtigsten in Abbildung 2.10 beschriftet wurden. Der Anstieg der Kurve außerhalb der Resonanzbereiche wird durch das 3. Keplersche Gesetz definiert und beträgt $dn/da \approx -3/2\sqrt{\mu}a^{-5/2}$. Werden die Störungen durch Neptun zu stark, so kommt es zu den bereits beschriebenen Problemen in der Berechnung der Frequenzen, wie am linken Rand der Abbildung zu erkennen ist.

Im Vergleich zu dem im letzten Kapitel beschriebenen Lyapunov-Exponenten, welcher als Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ definiert wurde, benötigt die FA sehr viel kürzere Integrationszeiten. Die einzelnen Frequenzen lassen sich schon nach wenigen Perioden der niedrigsten

²⁹Quelle: <http://www.boulder.swri.edu/~davidn/fmft/fmft.html>.

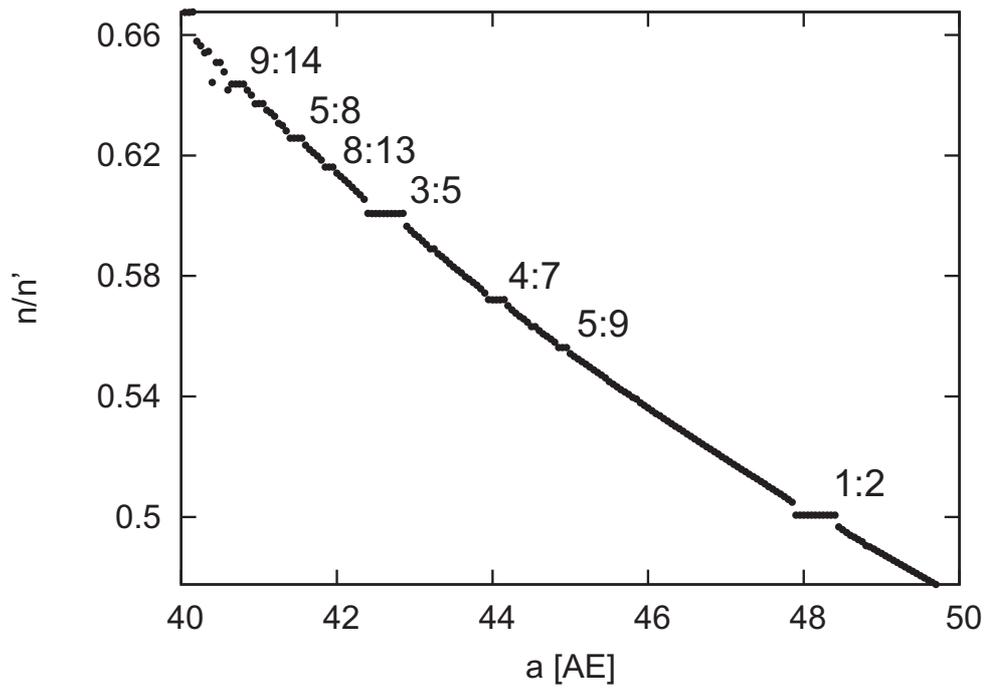


Abb. 2.10: Das Frequenzverhältnis der aus der FA bestimmten mittleren Bewegung n eines Testkörpers und Neptuns n' als Funktion der anfänglichen großen Halbachse a . Die wichtigsten Bahnresonanzen mit Neptun wurden beschriftet.

zu ermittelnden Frequenz genau bestimmen. Anhand der berechneten Frequenzen ist es dann z. B. leicht möglich, die genaue Resonanz anzugeben, in welcher sich der Testkörper befindet. Dies ist allein mit dem Lyapunov-Exponenten nicht möglich. Da die FA aber nur brauchbare Ergebnisse liefert, wenn das zu untersuchende Hamiltonsche System nur leicht gestört und der Phasenraum somit zum Großteil mit KAM-Tori ausgefüllt ist (siehe z. B. Cincotta, Giordano und Simó (2003)), ist für eine eingehende Untersuchung immer eine Kombination dieser Methoden angeraten.

3 Berechenbarkeit

Bis auf die wenigen einfachen Fälle, bei denen sich die Lyapunov-Exponenten eines dynamischen Systems analytisch berechnen lassen, ist man auf die Unterstützung eines Computers zur Analyse der Stabilität desselben angewiesen.

Bedingt durch die Numerik kommt es zur Einführung von Fehlern, wovon zwei, der Rundungsfehler und der Diskretisierungsfehler, im folgenden Kapitel beschrieben und ihre Größe abgeschätzt werden sollen. Die Auswirkungen dieser Fehler auf die errechneten Lyapunov-Zeiten am Beispiel einiger ausgewählter Asteroiden sind dann Gegenstand des zweiten Teiles.

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der Verlässlichkeit numerischer Ergebnisse mittels so genannter Schattenorbits soll dann im letzten Teil erläutert werden.

3.1 Fehler numerischer Methoden

3.1.1 Repräsentation von Zahlen im Computer

Bedingt durch den endlichen Speicherplatz kann eine reelle Zahl x im Computer lediglich durch eine rationale Zahl r , eine so genannte *Gleitkommazahl*, approximiert werden. r setzt sich dabei zusammen aus:

- einem Vorzeichen v ,
- dem Absolutbetrag $|r|$, bestehend aus der Integermantisse M mit einer festen Anzahl Stellen d_i mit $i = 1, \dots, m$ und $d, i \in \mathbb{N}$ im Zahlensystem der verwendeten Basis β ¹ und
- einem Integerexponenten e ebenfalls zur Basis β , mit $\beta \in \mathbb{N}$ und $\beta \geq 2$.

Mit diesen Festlegungen lässt sich r schreiben als

$$r = v M \beta^{e-m+1} = v(d_1 + d_2\beta^{-1} + \dots + d_m\beta^{-(m-1)})\beta^e, \quad (3.1)$$

wobei $0 \leq d_i < \beta$ gilt.

Da damit die Darstellung von r im Computer noch nicht eindeutig bestimmt ist, wird zusätzlich noch der Begriff der *normierten* Gleitkommazahl eingeführt. Eine Gleitkommazahl r wird normiert genannt, wenn ihre signifikanteste Stelle d_1 ungleich 0 ist. Die normierte Darstellung einer Zahl mit $e = 0$ ist daher entsprechend (3.1): $1 \leq |r| < \beta$.

Die kleinste Gleitkommazahl welche, zu 1 addiert, ein Ergebnis ungleich 1 ergibt, wird Maschinengenauigkeit ϵ_m genannt. Sie bestimmt den kleinstmöglichen Abstand zweier Gleitkommazahlen und somit direkt die Genauigkeit einzelner Berechnungen.² Weitere Besonderheiten der Gleitkommaarithmetik sowie FORTRAN-Programme zur Analyse hardwarespezifischer Parameter finden sich z. B. in Press u. a. (1992).

¹Heutige Computer verwenden nahezu ausschließlich das Dualsystem mit $\beta = 2$.

²Für den Standarddatentyp für Gleitkommazahlen mit 64 Bit und einer Mantissenlänge $m = 53$ gilt z. B. $\epsilon_m = 2^{-52} \approx 2 \cdot 10^{-16}$.

Da die Ergebnisse von Fließkommaoperationen für gewöhnlich mehr Stellen haben als in der zur Verfügung stehenden Mantisse gespeichert werden können, ist es notwendig das erhaltene Resultat x auf die nächstgelegene rationale Zahl r mit m Stellen zu runden. Die dabei auftretenden Fehler und deren Fortpflanzung in numerischen Integrationen sind Gegenstand des folgenden Kapitels.

3.1.2 Rundungsfehler

Korrektes Runden sollte so geschehen, dass der Erwartungswert $E(r)$ dem exakten Ergebnis x der Fließkommaoperation entspricht. Dies ist in allen modernen Rechnerarchitekturen durch den IEEE Standard *round to nearest* festgelegt³, welcher dafür sorgt, dass mathematisch korrekt immer zur nächstgelegenen, im Rechner darstellbaren Zahl gerundet wird. Liegt x genau in der Mitte zwischen zwei darstellbaren Zahlen, so ist auf diejenige Zahl zu runden, deren letzte Stelle der Mantisse gerade (entspricht der Null bei $\beta = 2$) ist. Diese Festlegung sorgt für eine Gleichverteilung des Auf- und Abrundens, wodurch ein künstlicher systematischer Fehler in längeren Rechnungen vermieden wird. Durch dieses Vorgehen ist garantiert, dass der durch Rundung verursachte Fehler einer Rechenoperation maximal der halben Maschinengenauigkeit entspricht:

$$|x - r| \leq \frac{\epsilon_m \beta^e}{2}. \quad (3.2)$$

Der Rundungsfehler ist zufällig und gleichmäßig im Intervall $\pm \epsilon_m \beta^e / 2$ verteilt, wobei sich dessen quadratischer mittlerer Fehler, die Varianz des gerundeten Wertes $\text{var}(r)$ einer einzelnen Fließkommaoperation, zu

$$\text{var}(r) = \text{var}(x - r) = E((x - r)^2) = \frac{1}{\epsilon_m \beta^e} \int_{-\epsilon_m \beta^e / 2}^{\epsilon_m \beta^e / 2} s^2 ds = \frac{\epsilon_m^2}{12} \beta^{2e} \quad (3.3)$$

ergibt. s sei dabei die Differenz $x - r$. Gleichung (3.3) ist Ausgangspunkt einer statistischen Behandlung von Rundungsfehlern.

Die genaue Größe dieses Fehlers ist abhängig von der für den jeweiligen Zahlentyp zur Verfügung stehenden Länge der Mantisse, der verwendeten Basis β und der Reihenfolge der arithmetischen Operationen in einem numerischen Algorithmus, um nur einige zu nennen.

Im Prinzip ist es möglich, ausgehend von Gleichung (3.3) mit den entsprechenden Gesetzen der Fehlerfortpflanzung die Rundungsfehler, die bei jeder Operation einer numerischen Integration auftreten, zu berechnen und damit den rundungsbedingten Gesamtfehler einer Rechnung zu bestimmen. Im Hinblick auf die Komplexität moderner Integrationsverfahren und der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen vieler Probleme muss dies aber als nicht praktikabel verworfen werden.

Um dennoch Aussagen über die Fortpflanzung von Rundungsfehlern treffen zu können, sind einige vereinfachende Annahmen notwendig. Hierbei nutzt man den hierarchischen Aufbau numerischer Integrationsverfahren:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \delta_k, \quad (3.4)$$

³Zu finden im *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic* (IEEE 754).

wobei das Inkrement δ_k normalerweise sehr viel kleiner ist als die numerische Approximation der Lösung \mathbf{y}_k zu diesem Zeitpunkt. Aufgrund dessen sind auch die bei der Berechnung von δ_k entstehenden Rundungsfehler vernachlässigbar im Vergleich zu denen, welche bei der Addition in Gleichung (3.4) auftreten. Durch Rundungsfehler bei dieser Addition verliert man daher gewöhnlich auch mehr signifikante Stellen als bei der Berechnung von δ_k vorher. Nimmt man daher vereinfachend an, dass alle Zwischenrechnungen fehlerfrei durchgeführt werden können und betrachtet die Rundungsfehler als voneinander unabhängig, beschränkt sich das Auftreten von Rundungsfehlern innerhalb einer numerischen Integration auf die Addition in Gleichung (3.4), wodurch eine Abschätzung des rundungsbedingten Gesamtfehlers möglich wird.

Beutler (2005) folgend soll nach diesen Vorüberlegungen beispielhaft das rundungsbedingte Wachstum des Positionsfehlers im Kepler-Problem abgeschätzt werden. Geht man dabei von einer Kreisbahn (mit Radius a) aus, so ergibt sich der Positionsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ eines Körpers auf dieser Bahn zu einem Zeitpunkt t_0 einfach als $\hat{\mathbf{r}} = (a \cos M, a \sin M)$. Hier bezeichnet $M = nt_0$ die mittlere Anomalie und n die konstante mittlere Bewegung des Körpers. n ist dabei über das 3.Keplersche Gesetz $n = \sqrt{\mu/a^3}$ mit der großen Halbachse der Bahn des Körpers verbunden, wobei μ einer Konstanten entspricht.

Ein zum Zeitpunkt t_k auftretender Rundungsfehler resultiert in einer Differenz zwischen $\hat{\mathbf{r}}$ und dem Positionsvektor der gerundeten Position \mathbf{r} . Für die Differenz $\Delta\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}$ gilt Gleichung (3.2). Zerlegt man $\Delta\mathbf{r}$ in eine radiale (δa) und eine tangential (δM) Fehlerkomponente, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} a \cos(M) - (a + \delta a) \cos(M + \delta M) \\ a \sin(M) - (a + \delta a) \sin(M + \delta M) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} a \sin(M)\delta M - \delta a \cos(M) \\ -a \cos(M)\delta M - \delta a \sin(M) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der Winkelfehler δM zu einem späteren Zeitpunkt t setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: zum einen aus dem rundungsbedingten Winkelfehler δM_k zum Zeitpunkt t_k . Zum anderen lässt sich auch δa_k in einen Winkelfehler übersetzen. Der gesamte Winkelfehler nach einem Zeitraum $t - t_k$ ergibt sich dann zu

$$\delta M = \delta M_k + \frac{\partial M}{\partial a} \delta a_k = \delta M_k + \frac{\partial(n(t - t_k))}{\partial a} \delta a_k = \delta M_k - \frac{3n}{2a} (t - t_k) \delta a_k. \quad (3.6)$$

Unter Vernachlässigung von δM_k (dieser bleibt in der Größenordnung des Rundungsfehlers) und Termen zweiter Ordnung bewirkt ein Rundungsfehler zum Zeitpunkt t_k einen Positionsfehler nach dem Zeitraum $t - t_k$ von

$$\|\Delta\mathbf{r}(t)\| \approx \delta a_k \frac{3}{2} n (t - t_k). \quad (3.7)$$

Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass es bei jedem Integrationsschritt $k = 1, \dots, N$ zu einem solchen Rundungsfehler⁴ kommt. Ist die Bahn annähernd kreisförmig, so sind die Beträge der Fehler in radialer Richtung $|\delta a_k|$ alle ungefähr gleich groß und daher unabhängig vom Zeitpunkt t_k . Für diese Abschätzung werden weiterhin Aspekte der Fehlerfortpflanzung vernachlässigt und die Rundungsfehler als voneinander

⁴mit einem Erwartungswert von $E(\delta a_k) = 0$

unabhängig betrachtet. Der allein durch Rundungsfehler verursachte mittlere, quadratische Positionsfehler beträgt somit

$$\text{var}(\|\Delta\mathbf{r}(t)\|) = \text{var}(\delta a) \frac{9}{4} n^2 \sum_{k=1}^N (t - t_k)^2. \quad (3.8)$$

Für konstante Schrittweiten $h = t/N$ vereinfacht sich obige Summe zu

$$\sum_{k=1}^N (t - t_k)^2 = h^2 \sum_{k=1}^N (N - k)^2 \approx h^2 \frac{N^3}{3}. \quad (3.9)$$

Beutler (2005) gibt für $\text{var}(\delta a)$ pro Integrationsschritt die Näherung⁵

$$\text{var}(\delta a) = \frac{2}{3} \epsilon_m^2 \beta^{2e_{\max}(\mathbf{r})}. \quad (3.10)$$

$e_{\max}(\mathbf{r})$ bezeichnet dabei den größten, während eines Umlaufes auftretenden Exponenten des Positionsvektors \mathbf{r} zur Basis β - es gilt daher $\|\mathbf{r}\| \leq \beta^{e_{\max}(\mathbf{r})}$. Noch anzumerken sei, dass Gleichung (3.10) auch für symplektische Integratoren gilt. Obwohl diese definitionsgemäß keinen säkularen Trend in der Energie (und somit auch nicht in a) aufweisen, führen auch hier Rundungsfehler zu einer Differenz in radialer Richtung, welche dann ebenfalls entsprechend Gleichung (3.6) in einem Winkelfehler resultiert.

Der rundungsbedingte Gesamtfehler σ am Ende einer Integration nach N Schritten konstanter Schrittweite h kann nun abgeschätzt werden zu

$$\sqrt{\text{var}(\|\Delta\mathbf{r}(t)\|)} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} n h \epsilon_m \beta^{e_{\max}(\mathbf{r})} N^{3/2}. \quad (3.11)$$

Nimmt man an, dass die einzelnen Rundungsfehler unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit sowohl positiv als auch negativ sein können, dann sollten unter Annahme einer Normalverteilung des Gesamtfehlers rund 66% in den Fehlergrenzen $\pm\sigma$ zu finden sein.

Um diese Abschätzung zu testen wurde das Kepler-Problem mit einer Exzentrizität $e = 0.4$ mit einer Störmer-Verlet-Kompositionsmethode achter Ordnung⁶ mit verschiedenen Schrittweiten über 10^6 Perioden integriert. Die Integrationen wurden dabei mit doppelter Genauigkeit ($\epsilon_m \approx 2 \cdot 10^{-16}$) durchgeführt und dann ein zweites Mal mit vierfacher⁷ Genauigkeit wiederholt. Die Differenz zwischen den mit doppelter und vierfacher Genauigkeit erhaltenen Resultaten ergibt dann den Rundungsfehler dieser Integration. Die euklidische Norm des so ermittelten relativen Positionsfehlers ist in Abbildung 3.1 für zwei verschiedene Schrittweiten zusammen mit der auf Gleichung (3.11) basierenden Abschätzung dargestellt. Das Anwachsen des relativen Positionsfehlers proportional zu $t^{3/2}$ aufgrund der Rundungsfehler ist deutlich zu sehen. Weiterhin fällt auf, dass dieser Fehler umso größer wird, je kleiner die Schrittweite ist.

⁵Für eine Herleitung dieser Beziehung sei aus Platzgründen auf Beutler (2005), Kapitel 7.7.2 verwiesen.

⁶Eine Beschreibung des Aufbaus der *SV*-Kompositionsmethode findet sich in Kapitel 2.3.3.

⁷Die Mantissenlänge beträgt in diesem Fall $m = 113$, woraus sich für $\epsilon_m \approx 2 \cdot 10^{-34}$ ergibt.

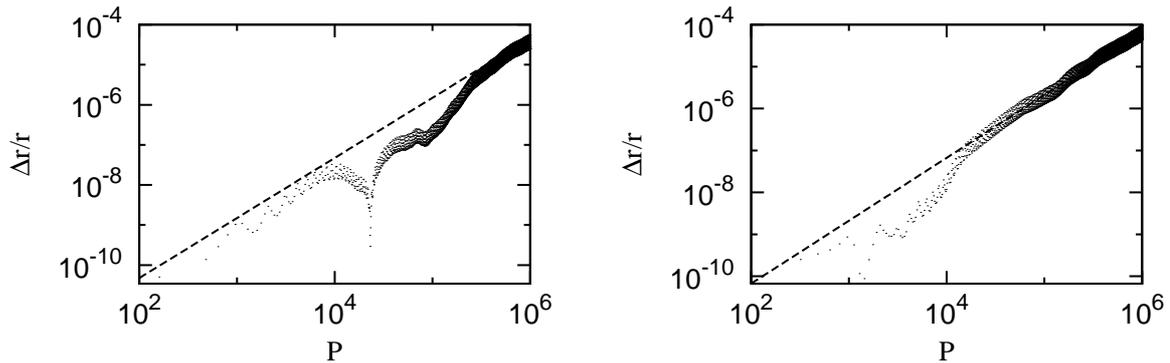


Abb. 3.1: Der durch Rundungsfehler bedingte relative Positionsfehler für das Kepler-Problem mit $e = 0.4$ für eine SV -Methode 8. Ordnung mit 50 (links) und 100 (rechts) Schritten pro Periode (P). Die Linie bezeichnet zusätzlich die sich aus Gleichung (3.11) ergebende Abschätzung für 3σ .

Wie gezeigt wurde, ist das rundungsbedingte Wachstum von Fehlern in numerischen Rechnungen unvermeidlich. Softwaretechnisch lassen sich zwar beliebig große Mantissenlängen und damit beliebige Genauigkeiten erzeugen, was aber mit einer, in der Praxis nur in den wenigsten Fällen vertretbaren, Erhöhung der Rechenzeit einhergeht.

Eine Möglichkeit zur Minimierung der Rundungsfehler mit nur einem geringen Mehraufwand an CPU-Zeit ist die so genannte *kompensierte Summation*. Die Grundidee dabei ist, den während einer Summation bei jeder einzelnen Addition

$$y_{n+1} = y_n + \delta_n \quad \text{für} \quad n = 0, \dots, N \quad (3.12)$$

entstehenden Rundungsfehler zu speichern und als Korrektur bei der nächsten Addition an die Lösung anzubringen. Besteht eine numerische Berechnung nur aus Additionen und Subtraktionen lassen sich mit diesem einfachen Algorithmus mit der zur Verfügung stehenden Mantissenlänge exakte Resultate unabhängig von der verwendeten Hardware erzielen.

Mit einem anfänglichen Korrekturwert $k = 0$, einem gegebenen Anfangswert y_0 und bekannten δ_n lautet der Algorithmus für N Additionen

```

for  $n = 0, \dots, N$  do
   $a = y_n$ 
   $k = k + \delta_n$ 
   $y_{n+1} = a + k$ 
   $k = k + (a - y_{n+1})$ 
end do

```

Die Wirkungsweise des Algorithmus soll anhand von Abbildung 3.2 (entnommen aus Hairer, Lubich und Wanner (2002)) verdeutlicht werden. Die darin dargestellten Rechtecke symbolisieren die für den verwendeten Datentyp zur Verfügung stehende Mantisse. Die vertikalen Striche innerhalb eines Rechteckes repräsentieren die Größe des Exponenten der Zahl. Je weiter links sich dieser Strich befindet, umso größer ist deren Exponent. Der exakte Wert der Zahl entspricht der Summe von y_n und k . δ'' , welches aufgrund der

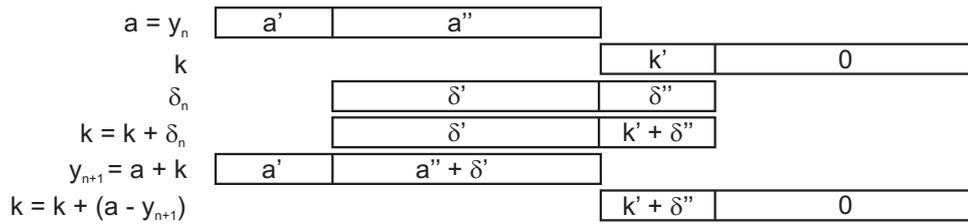


Abb. 3.2: Illustration der kompensierten Summation. Aus Hairer, Lubich und Wanner (2002).

begrenzten Mantissenlänge bei einer normalen Addition verloren geht, wird bei der kompensierten Summation zwischengespeichert und bei der nächsten Addition mit berücksichtigt. Der dargestellte Algorithmus funktioniert ebenso bei vektoriellen Größen. Hier ist die Summation lediglich komponentenweise durchzuführen.

Theoretisch lässt sich dieses Vorgehen auch auf alle anderen Fließkommaoperationen anwenden. Um den Mehraufwand an Rechen- und Programmierzeit aber in vertretbaren Grenzen zu halten, nutzt man den schon erwähnten hierarchischen Aufbau numerischer Integrationen aus, und korrigiert einzig Gleichung (3.4). Allein durch die Anwendung der kompensierten Summation auf diese eine Addition lässt sich der Rundungsfehler um mehrere Zehnerpotenzen reduzieren.

Um die Leistungsfähigkeit des Algorithmus zu testen wurde dieser implementiert und das Kepler-Problem von Abbildung 3.1 noch einmal mit kompensierter Summation integriert. Die Norm des sich damit ergebenden relativen Positionsfehlers wurde vergleichend den Resultaten ohne kompensierte Summation in Abbildung 3.3 gegenübergestellt. Durch die Verwendung der kompensierten Summation bei der Addition in Gleichung (3.4) verringert sich der Positionsfehler in diesem Beispiel nach 10^6 Perioden somit um den Faktor 100.

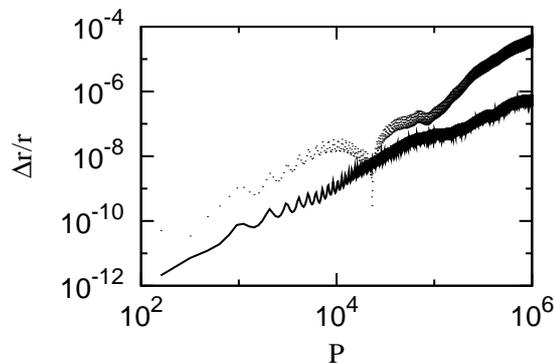


Abb. 3.3: Der rundungsbedingte relative Positionsfehler des Kepler-Problems ($e = 0.4$) für eine *SV*-Methode 8.Ordnung mit 50 Schritten pro Periode (P) ohne (Punkte) und mit (durchgezogene Linie) kompensierter Summation.

3.1.3 Diskretisierungsfehler

Vergleicht man die numerischen Resultate der Integrationen des letzten Kapitels mit der analytischen Lösung (Abbildung 3.4), so stellt man fest, dass diese Differenz im Allgemei-

nen sehr viel größer ist als die in Abbildung 3.1 und 3.3 gezeigten Fehler. Es gibt daher in numerischen Berechnungen noch eine weitere Fehlerquelle, welche die Genauigkeit der Rechnungen beeinflusst: den so genannten Diskretisierungsfehler, auch *truncation error* oder Approximationsfehler genannt. Darunter wird die Differenz zwischen der numerisch berechneten, ungerundeten Lösung zu einem Zeitpunkt t_k und der exakten Lösung zum gleichen Zeitpunkt verstanden.

Der Diskretisierungsfehler ist direkt mit der verwendeten numerischen Methode verknüpft. Hervorgerufen wird er zum Beispiel dadurch, dass iterative Verfahren an einer bestimmten Stelle abgebrochen werden - als Beispiel sei hier die Lösung der Keplergleichung genannt. Auch besitzt ein Computer lediglich endlichen Speicherplatz, so dass die gespeicherten und verwendeten Koeffizienten und Konstanten (z. B. π) oftmals nicht mit ihren wahren Werten übereinstimmen. Neben diesen beiden genannten Ursachen des Diskretisierungsfehlers gibt es noch viele weitere. Eine Zusammenstellung der bei Langzeitintegrationen in der Himmelsmechanik wichtigen Fehlerquellen findet sich in Milani und Nobili (1988).

Die einfachste Möglichkeit, die Größe des Diskretisierungsfehlers ε_D nach einem Integrationsschritt abzuschätzen ist die Entwicklung in eine Taylorreihe. Für eine Methode der Ordnung p und einen Zeitschritt der Länge h ergibt sich eine Fehlerabschätzung aus dem ersten vernachlässigten Term der Taylorentwicklung der Funktion:

$$\varepsilon_D(t_k) = c_D(t_k) \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}. \quad (3.13)$$

Der Faktor c_D hängt dabei von der verwendeten Integrationsmethode, der Ordnung des

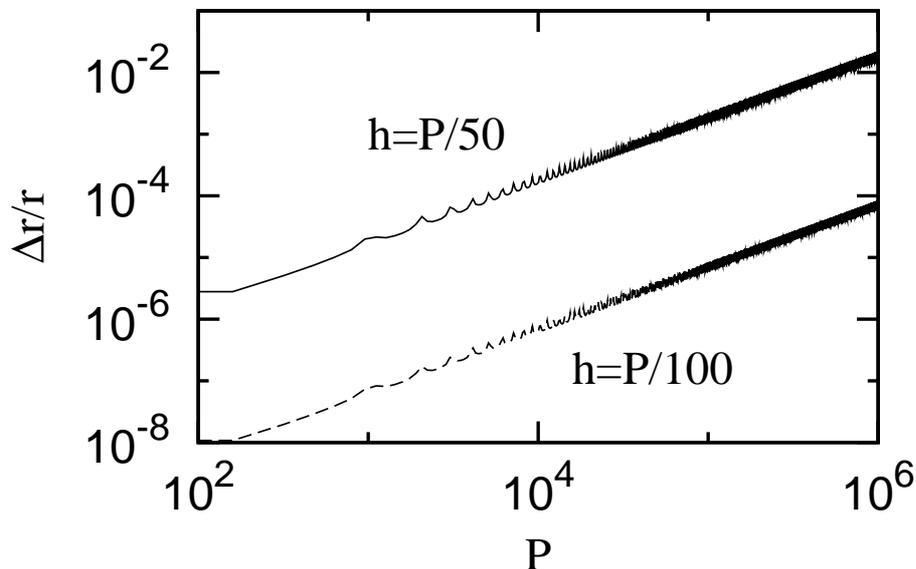


Abb. 3.4: Der durch Diskretisierungsfehler der *SV*-Methode 8.Ordnung bedingte relative Positionsfehler für das Kepler-Problem für $e = 0.4$ und verschiedene Schrittweiten. Der Positionsfehler wurde als Differenz zwischen der numerischen Lösung vierfacher Genauigkeit und der analytischen Lösung berechnet.

Integrators und den Ableitungen des untersuchten dynamischen Systems zum Zeitpunkt t_k ab. Diese Fehlerschätzung ist natürlich nur gültig unter der Voraussetzung, dass $\varepsilon_D(t_k)$ größer ist als die weiteren, vernachlässigten Terme der Taylorentwicklung. Da der Diskretisierungsfehler bei jedem Integrationsschritt auftritt, wächst dieser linear mit der Zeit, wie in Abbildung 3.4 zu sehen ist. Der dort dargestellte Diskretisierungsfehler wurde als Differenz zwischen der numerischen Lösung vierfacher Genauigkeit ($\epsilon_m \approx 2 \cdot 10^{-34}$) und der analytischen Lösung berechnet.

Um dieses Kapitel allgemein zu halten, soll auf die Darstellung des Faktors c_D einzelner Integrationsmethoden verzichtet werden. Für Mehrschritt- und Kollokationsmethoden sei an dieser Stelle daher stellvertretend z. B. auf Milani und Nobili (1988) und Beutler (2005) verwiesen. Eine Möglichkeit, den Diskretisierungsfehler für *SV*-Methoden zu berechnen, wird im Anhang A beschrieben.

Für eine bestimmte Integrationsmethode und ein konkretes dynamisches Problem gibt es, wie leicht aus Gleichung (3.13) ersichtlich ist, zwei Möglichkeiten den Diskretisierungsfehler zu minimieren: zum einen kann die Schrittweite h verringert, zum anderen die Ordnung p des Integrators erhöht werden. Im Allgemeinen verspricht die letztgenannte Option den größeren Genauigkeitsgewinn. Um dies zu belegen, soll das zu integrierende System so skaliert sein, dass $c_D/(p+1)! = 1$ gilt, wodurch sich Gleichung (3.13) zu $\varepsilon_D = h^{p+1}$ reduziert. Für eine Integrationsmethode siebenter Ordnung und ein $\varepsilon_D = 10^{-16}$ ergibt sich eine Schrittweite $h = 10^{-2}$. Um die Genauigkeit auf $\varepsilon_D = 10^{-32}$ zu steigern und dabei die Ordnung p konstant zu halten, ist eine Schrittweite $h = 10^{-4}$ notwendig - die Anzahl der Schritte erhöht sich damit um den Faktor 100. Lässt man hingegen h konstant und verdoppelt die Ordnung, so wächst der Berechnungsaufwand lediglich um den Faktor 4, da der Aufwand der zusätzlichen Berechnung der Ableitungen von Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ ist (siehe Jorba und Zou (2001)).

3.1.4 Optimale Schrittweiten

Mit den in den vorangegangenen Kapiteln gemachten Abschätzungen für die einzelnen Fehlerarten und deren Fortpflanzung ist es möglich, eine optimale Schrittweite für die Integration des Kepler-Problems abzuschätzen. Die Abschätzung gilt dabei für alle Integratoren mit konstanter Schrittweite - für Integratoren mit automatischer Schrittweitenkontrolle treffen die nachfolgenden Aussagen daher nicht zu.

Zur Berechnung der optimalen Schrittweite einer numerischen Integration sind der Rundungsfehler und der Diskretisierungsfehler am Ende des Integrationszeitraumes in Abhängigkeit von der Schrittweite zu bestimmen. Für $h \rightarrow 0$ geht der Diskretisierungsfehler ebenfalls gegen Null. Dadurch, dass aber mehr Schritte gemacht werden müssen, wächst der Rundungsfehler gleichzeitig mit kleiner werdendem h . Eine Schrittweite h soll daher im Folgenden als optimal bezeichnet werden, wenn am Ende der Integration die Summe von Rundungs- und Diskretisierungsfehler mit dieser Schrittweite minimal ist. Dies entspricht der Forderung

$$\bar{c}_D N \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} = \sqrt{\frac{1}{2}} n h \epsilon_m \beta^{\epsilon_{\max}(\mathbf{r})} N^{3/2}. \quad (3.14)$$

\bar{c}_D sei dabei der über eine Periode gemittelte, im letzten Kapitel erwähnte Faktor für die konkrete Integrationsmethode. Bei gegebener Ordnung p und Gesamtintegrationsdauer t

ergibt sich dann die optimale Schrittweite h_{opt} zu

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{1}{2\bar{c}_D^2} \epsilon_m^2 \beta^{2e_{\text{max}}(r)} n^2 t (p+1)!^2 \right)^{\frac{1}{2p+1}}. \quad (3.15)$$

Wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist, beschränkt der rundungsbedingte Positionsfehler für eine feste Integrationszeit t die maximal erreichbare Genauigkeit. Eine Verminderung des Diskretisierungsfehlers durch die Verwendung einer kleineren Schrittweite kann daher die maximal erreichbare Endgenauigkeit nicht weiter steigern, bewirkt im Gegenteil noch einen leicht größeren Rundungs- und damit Gesamtfehler. Dies erklärt, weshalb sich nach Gleichung (3.15) für längere Integrationszeiträume auch größere optimale Schrittweiten ergeben.

Mit Gleichung (3.15) ist es ebenfalls möglich, eine geeignete Schrittweite für die Integration des allgemeinen N -Körper-Problems abzuschätzen. Um alle Objekte korrekt integrieren zu können, muss sich die Berechnung dabei an der Umlaufzeit des innersten Körpers orientieren. Da diese Schrittweite jedoch für alle weiter außen liegenden Körper kleiner als ihre jeweilig optimale Schrittweite ist, werden für diese nach einer gewissen Zeit die Rundungsfehler überwiegen.

Gleichung (3.15) erlaubt damit erstmalig die direkte Berechnung einer optimalen Schrittweite für symplektische Integratoren. Die sonst in Publikationen angeführten Schrittweiten beruhen nach Wissen des Autors lediglich auf Erfahrungswerten. In Tabelle 3.1 sind einige optimale Schrittweiten für verschiedene Ordnungen und verschiedene innere Planeten für die in Kapitel 3.2 verwendeten symplektischen Störmer-Verlet-Methoden angegeben. Als Faustregel lässt sich generell für diese beiden Ordnungen eine Schrittweite zwischen 50 und 100 Schritten pro Umlaufperiode angeben, was auch den in vielen Publikationen angegebenen Werten entspricht. Der Faktor \bar{c}_D in Gleichung (3.15) wurde dabei durch den Vergleich der Taylor-Entwicklung der numerischen Methode mit der analytischen Lösung für das Kepler-Problem⁸ abgeschätzt, wobei die linearen Terme der Fehlerfortpflanzung ebenfalls berücksichtigt wurden.

Tabelle 3.1: Optimale Schrittweiten (in Tagen) für SV -Methoden verschiedener Ordnungen und Planeten berechnet nach Gleichung (3.15) für einen Integrationszeitraum von 10^6 Jahren.

	Venus	Mars
$p = 6$	2.0	3.0
$p = 8$	5.0	10.0

Anzumerken sei noch, dass bei zu groß gewählter Schrittweite im Allgemeinen nicht garantiert werden kann, dass die numerischen Lösungen die Dynamik des realen Systems korrekt widerspiegeln.

3.2 Die numerische Berechenbarkeit von Chaosindikatoren

Gegenstand dieses Kapitels soll es sein zu ermitteln, ob und wenn ja wie stark eine numerisch berechnete Lyapunov-Zeit (T_L) von Asteroiden von der Methode der Berechnung

⁸In Form der so genannten F und G -Funktionen. Siehe z. B. Beutler (2005), Kapitel 7.4.3.

selbst abhängt. Das heißt, es soll ermittelt werden, welchen Einfluss Faktoren haben, die eigentlich unabhängig vom zu untersuchenden physikalischen Problem (der Ermittlung der Bahnstabilität des Asteroiden) sein sollten. Diese Faktoren seien: der verwendete Integrationsalgorithmus, die verwendete Hardware oder die Wahl der Ephemeriden um nur einige zu nennen, wobei diese Untersuchung auf die beiden Erstgenannten beschränkt wurde.

3.2.1 Aufbau der Integrationen

Um die Lyapunov-Zeit zu berechnen, wurden die Bewegungsgleichungen für das rein gravitative N -Körper-Problem zusammen mit den Variationsgleichungen der als masselos angenommenen Asteroiden über einen Zeitraum von rund einer Million Jahren integriert. Aus den Variationen und ihren zeitlichen Änderungen wurde des weiteren der *MEGNO*-Indikator⁹ berechnet, aus welchem dann die Lyapunov-Zeit der einzelnen Asteroiden durch lineare Regression abgeleitet werden konnte.

Die Auswahl der Asteroiden wurde beschränkt durch zwei Forderungen: zum einen sollten die erhaltenen Resultate mit bereits veröffentlichten Lyapunov-Zeiten verglichen werden können. Zum anderen sollte der Lyapunov-Exponent groß genug sein, so dass er garantiert innerhalb des Integrationszeitraumes gegen einen endlichen Wert konvergiert.¹⁰ Dies beschränkte die Wahl auf Asteroiden des Hauptgürtels.

Gewählt wurden:

- im äußeren Asteroidengürtel der Asteroid Atalante, für den man je nach Veröffentlichung ganz unterschiedliche Lyapunov-Zeiten findet,
- der Asteroid Helga, für welchen in verschiedenen, voneinander unabhängigen Publikationen übereinstimmend eine Lyapunov-Zeit von rund 7000 Jahren zu finden ist und
- zwei Asteroiden aus dem inneren Asteroidengürtel (1981EY39 und 1994EL), welche von Knežević und Ninković (2005) als schlecht berechenbar eingestuft wurden.

Die großen Halbachsen der Asteroiden sowie eine Auswahl der veröffentlichten Lyapunov-Zeiten ist in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Diese Asteroiden wurden zusammen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Planeten integriert: zum einen mit allen Planeten von Mars bis Neptun, zum anderen zusätzlich zu diesen noch mit Venus und Erde. Für die Referenzepoche J2000.0 wurden die Orbitalelemente des JPL Horizons Systems bezogen auf den 01.01.2000 benutzt.

Um zu testen, ob die Resultate von den für die Berechnung benutzten Integrationsmethoden abhängen, wurden die Körper zum einen mit einer Extrapolationsmethode, zum anderen mit einem symplektischen Verfahren unterschiedlicher Ordnung berechnet.¹¹ Integriert wurde konkret mit

⁹Siehe Kapitel 2.4.1.

¹⁰Mathematisch ist der Lyapunov-Exponent nur für t gegen Unendlich definiert (Gleichung 2.28). Nahe Begegnungen zwischen dem Asteroiden und einem Planeten, welche außerhalb des betrachteten Integrationszeitraumes stattfinden und den Lyapunov-Exponenten ändern, sind nicht auszuschließen, sollen im Folgenden aber nicht betrachtet werden.

¹¹Für eine Beschreibung der einzelnen Integrationsmethoden siehe Kapitel 2.3 und die darin angegebenen Referenzen.

Tabelle 3.2: Lyapunov-Zeiten in 10^3 Jahren der verwendeten Asteroiden aus verschiedenen Literaturquellen. Im Einzelnen sind dies \circ = Šidlichovský (1999), \bullet = Holman und Murray (1996), \diamond = Schmidt (2001) und \triangleright = <http://hamilton.dm.unipi.it/cgi-bin/astdys/astibo>. Die Zahlen direkt unterhalb der Quelle verweisen auf die Anzahl der in der jeweiligen Publikation verwendeten Planeten.

	a [AE]	\circ	\bullet	\diamond	\triangleright		
		4	7	4	4	7	7
Atalante	2.749	5	4	-	35	36	8.37
Helga	3.633	-	-	7.2	9	5	6.86
1981EY39	2.238	-	-	-	-	-	57.4
1994EL	2.324	-	-	-	-	-	24.3

- *ODEX*, einem Bulirsh-Stoer-Gragg-Algorithmus mit Richardson-Extrapolation variabler Ordnung und Schrittweite, wobei als Obergrenze des zulässigen lokalen Fehlers 10^{-16} gewählt wurde und
- einer symplektischen und symmetrischen Kompositionsmethode auf Grundlage des Störmer-Verlet (*SV*)-Algorithmus mit konstanter Schrittweite und Ordnung. Verwendet wurden dabei die Ordnungen 6 und 8 und die in Tabelle 3.1 angegebenen Schrittweiten.

Um zu untersuchen, welchen Einfluss die verwendete Hardware auf das Ergebnis hat, wurden alle Rechnungen auf zwei unterschiedlichen Computern durchgeführt. Da auf den verschiedenen Rechnerarchitekturen leider nicht die gleichen Compiler zur Verfügung standen, bedeutete ein Wechsel der Hardware gleichzeitig auch einen Wechsel des Compilers. Benutzt wurden

- zwei Intel[®] Computer mit Pentium 4 Prozessor und Intel[®] Fortran Compiler für EM64T-basierende Applikationen, Version 9.1 und
- SGI[®] Origin3800, 64 Prozessoren MIPS R120000, Betriebssystem IRIX 6.5 und f90 MIPSpro Compiler, Version 7.41.

In Tabelle 3.3 ist eine Auswahl der unter den verschiedensten Konfigurationen erzielten Ergebnisse zusammengestellt. Die Lyapunov-Zeiten wurden dabei ebenso wie im folgenden Kapitel durch lineare Regression aus dem *MEGNO*-Wert berechnet.

Neben den genannten Einflussgrößen ändert sich die errechnete Lyapunov-Zeit ebenfalls in Abhängigkeit von den Optimierungseinstellungen des Compilers, des genutzten Chaosindikators oder der Position der Planeten zum Startzeitpunkt der Integration - um nur einige zu nennen. Da dies zu qualitativ den gleichen Aussagen führt, soll auf eine Gegenüberstellung der Auswirkungen all dieser Einflußgrößen aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet werden.

Tabelle 3.3: Lyapunov-Zeiten in 10^3 Jahren für verschiedene Berechnungsmethoden. Mit 5 Planeten sind die Planeten unseres Sonnensystems von Mars bis Neptun bezeichnet. Bei 7 Planeten wurden zusätzlich dazu noch Venus und Erde mit den Asteroiden integriert.

		5 Planeten		7 Planeten	
		Intel	SGI	Intel	SGI
Atalante	<i>ODEX</i>	39.64	43.80	52.43	64.90
	<i>SV 6</i>	56.44	33.30	54.26	41.94
	<i>SV 8</i>	41.18	48.32	56.95	111.20
Helga	<i>ODEX</i>	6.69	5.77	5.87	5.98
	<i>SV 6</i>	6.25	12.67	7.06	6.64
	<i>SV 8</i>	6.16	6.33	7.87	7.45
1981EY39	<i>ODEX</i>	27.73	29.59	54.63	116.80
	<i>SV 6</i>	29.55	50.10	156.40	46.68
	<i>SV 8</i>	28.93	49.80	67.62	44.16
1994EL	<i>ODEX</i>	57.95	198.20	49.31	36.55
	<i>SV 6</i>	73.33	150.70	25.34	25.43
	<i>SV 8</i>	72.92	70.32	28.23	38.68

3.2.2 Diskussion der Ergebnisse

Obwohl alle Lyapunov-Exponenten gegen einen endlichen Wert konvergierten (der Integrationszeitraum somit lang genug war, um eine hinreichende Berechnung zu ermöglichen) zeigt sich, dass die Ergebnisse je nach Art und Weise der Berechnung variieren. An den teilweise starken Differenzen zwischen den einzelnen Werten ist zu erkennen, dass die verwendete Hardware offensichtlich ebenso einen Einfluss auf die resultierende Lyapunov-Zeit hat wie der benutzte Integrationsalgorithmus, wobei aber keine der beiden Einflussgrößen konsistente Ergebnisse zeigt - Aussagen, dass beispielsweise mit einer bestimmten Integrationsroutine generell längere Lyapunov-Zeiten erhalten werden, sind nicht zu treffen. Des weiteren lässt sich im Hinblick auf die Berechenbarkeit keine Entscheidung treffen, ob symplektische Methoden *besser* sind als nicht-symplektische. Obwohl sie per Definition die symplektische Struktur des Systems erhalten, ließ sich nicht feststellen, dass dadurch die Werte der einzelnen Lyapunov-Zeiten einheitlicher über verschiedene Konfigurationen hinweg sind. Anzumerken sei noch, dass der in vielen Publikationen angeführte *Beweis* für die Güte einer Integration, die Energieerhaltung, bei allen Rechnungen gleichermaßen gegeben ist. Der relative Energiefehler war für alle Integrationen kleiner als 10^{-11} .

Der Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse ist offensichtlich: da das N -Körper-Problem chaotisch ist, kann jede kleine Störung der Anfangsbedingungen (sei sie physikalischen oder numerischen Ursprungs) dazu führen, dass sich ursprünglich benachbarte Asteroiden am Ende der Integration in grundsätzlich verschiedenen Gebieten des Phasenraumes mit unterschiedlichen Stabilitätseigenschaften befinden.

So werden z. B. am Anfang einer Integration die Keplerelemente der Körper in ihre

kartesischen Bahnelemente umgerechnet. Bedingt durch Rundungsfehler, welche bei dieser Transformation auftreten, können sich somit die kartesischen Anfangsbedingungen auf verschiedenen Rechnern leicht voneinander unterscheiden. Dieser kleine Unterschied Δx wächst dann exponentiell an. Eine kurze Rechnung soll dies verdeutlichen: für Helga mit einer Lyapunov-Zeit von rund 7000 Jahren ergibt sich über einen Zeitraum von $T = 10^6$ Jahren eine Differenz $\varepsilon(T)$ in der Größenordnung von

$$\varepsilon(T) \approx e^{1e6/7e3} \Delta x \approx 10^{62} \Delta x. \quad (3.16)$$

Um sicherzustellen, dass sich die auf zwei verschiedenen Rechnern berechneten Bahnen nach dieser Integrationszeit lediglich um wenige Nachkommastellen unterscheiden, darf die Anfangsdifferenz somit nicht größer als $\Delta x \approx 10^{-63}$ sein. Dies bedeutet aber auch, dass die verwendeten Computer Zahlen auf rund 65 dezimale Stellen genau speichern müssen.¹² Neben dieser riesigen Mantissenlänge und einer geeigneten Integrationsmethode müssten sämtliche Anfangsbedingungen aller Körper sowie alle für die Bewegung signifikanten physikalischen Einflüsse in dieser Größenordnung bekannt sein. In diesem Fall kann dann davon ausgegangen werden, dass die Berechnungen auch die gleichen Lyapunov-Zeiten ergeben werden. Die genannten Forderungen sind natürlich weit entfernt von jeglicher praktischen Realisierbarkeit.

Doch trotz dieser Zusammenhänge zeigt sich für den Asteroiden Helga eine gute Reproduzierbarkeit seiner Lyapunov-Zeit, wie ein Vergleich von Tabelle 3.2 und Tabelle 3.3 zeigt. Im verbleibenden Teil dieses Kapitels soll versucht werden die Frage zu beantworten, warum die berechneten Lyapunov-Zeiten für manche Asteroiden unabhängig von der Berechnungsmethode und der verwendeten Hardware sehr ähnlich sind und sie sich für andere wiederum stark unterscheiden. Um ein objektives Maß für die Stabilität der Lyapunov-Zeiten gegenüber Veränderungen in den Berechnungsmethoden zu bekommen, wurde die Standardabweichung der Resultate bestimmt. Da keine der Konfigurationen als *geeigneter* zur Berechnung des Lyapunov-Exponenten angesehen werden kann, wurden alle Ergebnisse aus Tabelle 3.3 als zufällige und voneinander unabhängige Versuche gewertet und somit gleichwertig gemittelt. Diese Resultate einschließlich der sich daraus ergebenden Standardabweichungen sind in Tabelle 3.4 dargestellt. Wie man darin sieht, besteht keine Korrelation in dem Sinne, dass die Bestimmung der Lyapunov-Zeit umso ungewisser wird je, chaotischer der Asteroid ist.

Tabelle 3.4: Arithmetisches Mittel und Standardabweichung der errechneten Lyapunov-Zeiten in 10^3 Jahren.

	5 Planeten			7 Planeten		
Atalante	43.78 ±	7.93	(18%)	63.61 ±	24.47	(39%)
Helga	7.31 ±	2.64	(36%)	6.81 ±	0.80	(12%)
1981EY39	35.95 ±	10.87	(30%)	81.05 ±	45.55	(56%)
1994EL	103.90 ±	56.95	(55%)	33.92 ±	9.54	(28%)

Um die Frage zu klären, worin sich der Asteroid Helga, für den die Ergebnisse unter den unterschiedlichsten Bedingungen nahezu gleich sind, z. B. von Asteroid 1981EY39

¹²Dies entspricht einer Mantissenlänge von über 210 Stellen im Binärsystem

unterscheidet, für welchen trotz wesentlich größerer Lyapunov-Zeiten die Unterschiede nahezu in der Größenordnung des gesuchten Wertes selbst liegen, seien in Abbildung 3.5 die *MEGNO*-Verläufe für beide Asteroiden für Integrationen mit 7 Planeten in Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der Integration (obere Reihe der Abbildung) und der benutzten Rechnerarchitektur (untere Reihe) gegenübergestellt.

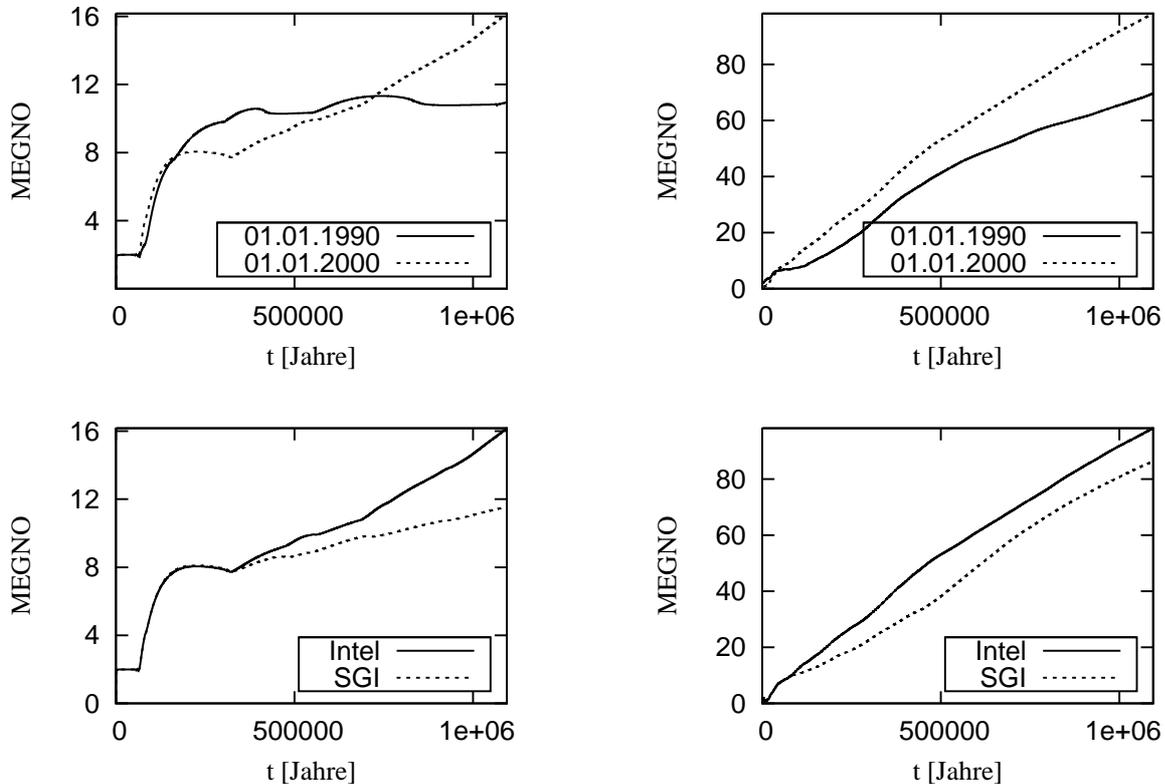


Abb. 3.5: Die *MEGNO*-Verläufe für Asteroid 1981EY39 (links) und Asteroid Helga (rechts) vergleichend für verschiedene Startzeitpunkte der Integration (1.Reihe) und gerechnet auf verschiedenen Computern (2.Reihe). Die Störung der Asteroidenbahn erfolgte bei den dargestellten Integrationen durch die Planeten Venus bis Neptun.

Auffällig beim Vergleich der verschiedenen *MEGNO*-Kurven ist, dass diese für Helga nach kurzer Zeit leicht voneinander divergieren, dann aber sehr gleichmäßig und nahezu parallel zueinander mit der Zeit anwachsen. Da der aus *MEGNO* abgeleitete Lyapunov-Exponent gerade durch diesen Anstieg definiert ist, erklärt dies somit auch die Ähnlichkeit in den ermittelten Lyapunov-Zeiten. Bei 1981EY39 entfernen sie sich ebenfalls nach einer kurzen transienten Phase voneinander, zeigen aber danach sehr unterschiedliche Verläufe, was auf verschiedene dynamische Gegebenheiten hindeutet. Auch lassen sie an einigen Stellen sehr abrupte Änderungen in den Anstiegen (und somit im Lyapunov-Exponenten) erkennen, welche bei Helga gänzlich fehlen.

Um die Ursache für diese starken Änderungen zu finden, wurden in Abbildung 3.5 zusätzlich noch diejenigen Zeitpunkte eingetragen, zu denen der Asteroid einem Planeten näher als 0.3 Astronomische Einheiten war. Das Ergebnis für 1981EY39 (Helga kam während der gesamten Integrationsdauer keinem der Planeten so nahe) ist in Abbildung

3.6 zu sehen - bedingt durch die Lage von 1981EY39 im inneren Asteroidengürtel geschahen all diese Begegnungen mit einem einzigen Planeten, Mars.

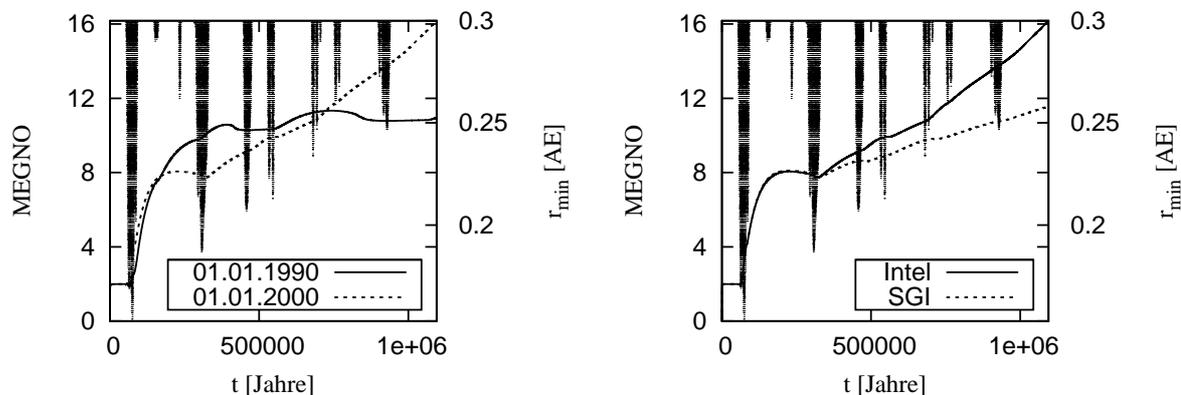


Abb. 3.6: *MEGNO*-Verlauf und minimaler Abstand r_{\min} zu Mars (in AE) vergleichend für verschiedene Startzeitpunkte der Integration und gerechnet auf verschiedenen Computern. Die Zeitpunkte, an denen der Abstand kleiner als 0.3 AE war, sind mit einem Punkt in der Abbildung gekennzeichnet.

Aus dieser Abbildung lässt sich entnehmen, dass die Sprünge in den *MEGNO*-Kurven immer dann auftraten, wenn der Abstand zu Mars minimal war. Vergleicht man dies mit dem zeitlichen Verlauf der Exzentrizität von 1981EY39, so sieht man, dass diese einer langperiodischen Schwingung folgt, in deren Maxima es dann zu den beobachteten Begegnungen mit Mars kommt. Mit 0.2 AE sind diese Begegnungen jedoch nicht nah genug (die Hill-Sphäre von Mars hat einen Radius von $7.25 \cdot 10^{-3}$ AE), als dass sie die direkte Ursache der Änderungen in den Anstiegen sein könnten.

Wie die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit zeigten, liegt die Ursache der schlechten Berechenbarkeit der Bahn von 1981EY39 in der starken Strukturiertheit der direkten Phasenraumumgebung aufgrund des gleichzeitigen Auftretens verschiedener Bahnresonanzen mit Mars, Jupiter und Saturn und säkularer Resonanzen. Wie in Morbidelli und Nesvorný (1999) beschrieben, ist dieses Gebiet des Asteroidengürtels dicht gefüllt mit solchen gemischten Resonanzen und Resonanzen hoher Ordnung mit Mars. Die Autoren zeigten, dass Mars trotz seiner geringen Masse aufgrund seiner geringen Entfernung die Dynamik im inneren Asteroidengürtel stark beeinflusst. Auch bewirkt die relativ große Exzentrizität der Marsbahn, welche in der Größenordnung der Asteroidenbahnen liegt, starke Störungen und somit ein langsames Anwachsen der Exzentrizität des Asteroiden. In Kombination mit verschiedenen 3-Körper-Resonanzen führen diese Resonanzen dazu, dass der Asteroid schließlich die Marsbahn kreuzt (Morbidelli und Nesvorný (1999)). Da diese Resonanzen sehr dicht liegen und sich oft überlappen, wechselt der Asteroid zwischen diesen hin und her, was in Sprüngen in der großen Halbachse sichtbar ist. Wie die Bahn des Asteroiden verläuft, ist dabei sehr von seiner Position abhängig. Kleine Unterschiede in dieser (hervorgerufen z. B. durch Rundungsfehler) werden als Folge der kontinuierlichen Störungen verstärkt und führen anfänglich benachbarte Teilchen in unterschiedliche Gebiete des Phasenraumes mit unterschiedlichen Stabilitätseigenschaften (bedingt durch andere, an diesen Stellen wirkende Resonanzen), was dann in den verschiedenen Verläufen der *MEGNO*-Kurven sichtbar wird.

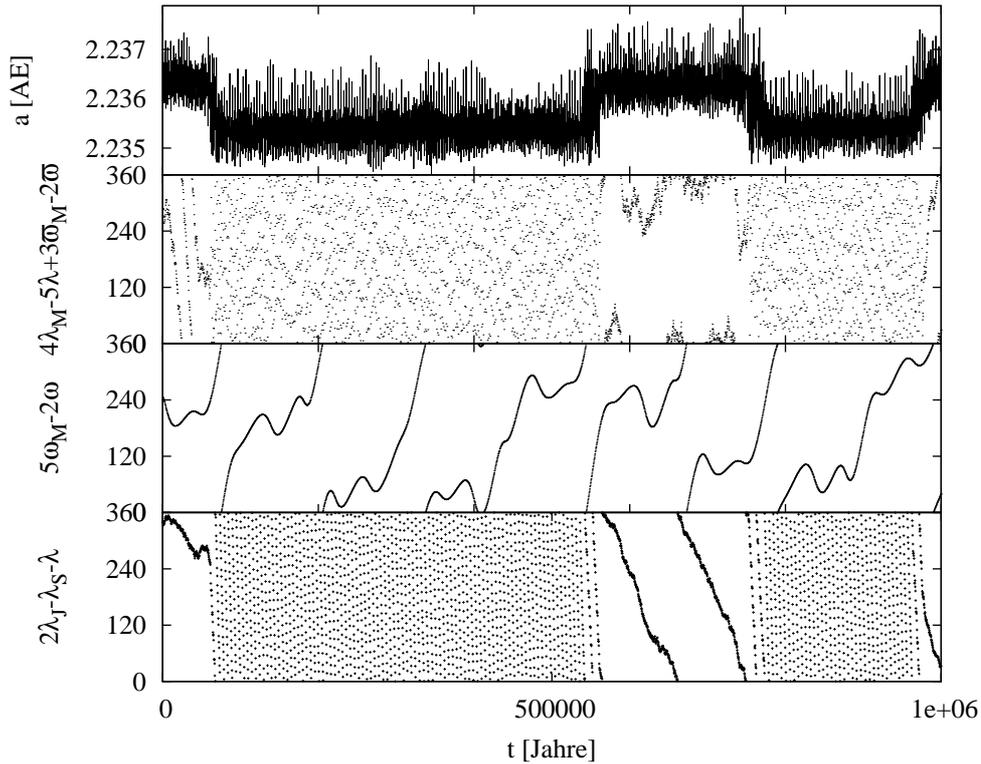


Abb. 3.7: Die große Halbachse und einige Resonanzwinkel des Asteroiden 1981EY39 bei einer Integration mit den Planeten Mars bis Neptun über den angegebenen Zeitraum. Die Indizes der Winkelargumente stehen dabei für: M=Mars, J=Jupiter und S=Saturn. 1981EY39 wurde ohne Index angegeben. Alle Winkel sind in der Einheit Dezimalgrad.

Durch Berechnung verschiedener Linearkombinationen der Bahnwinkel (Abbildung 3.7) konnten einige dieser Resonanzen ermittelt werden. Es zeigte sich, dass sich 1981EY39 über lange Zeiträume in einer Resonanz mit Mars befindet, wobei das Winkelargument $4\lambda_M - 5\lambda + 3\omega_M - 2\omega$ um 0° libriert.¹³ Des weiteren besteht zwischen der zeitlichen Änderung der Perihelargumente dieser Körper die Beziehung $5\dot{\omega}_M \approx 2\dot{\omega}$. Außerdem wurde noch festgestellt, dass sich 1981EY39 an der Grenze einer 3-Körper-Resonanz mit Jupiter und Saturn befindet. D. h. in Teilen des Integrationszeitraumes besteht ein rationales Verhältnis zwischen den mittleren Bewegungen n von Jupiter (J), Saturn (S) und dem Asteroiden, dergestalt, dass $2n_J - n_S - n \approx 0$ gilt.

Auch Helga befindet sich in der Nähe einer Resonanz - konkret der 12:7 Resonanz mit Jupiter. Milani und Nobili (1993) fanden heraus, dass hier eine Kopplung zwischen Exzentrizität und Perigäumslänge zu nahe Begegnungen mit dem Planeten und damit zu große Störungen verhindert. Auch in den für diese Arbeit durchgeführten Integrationen ließ sich klar erkennen, dass der Winkel $\varpi - \varpi_J$ entweder um 0° libriert oder aber die Exzentrizität der Bahn von Helga minimal ist, während dieser Winkel zirkuliert. Durch diesen Effekt werden zu starke Störungen der Bahn vermieden. Statt der theoretisch möglichen 0.9 AE nähert sich Helga dem Planeten Jupiter nie mehr als 1.3 AE. Des weiteren sind vor allem bei kleinen Exzentrizitäten die Resonanzgebiete im äußeren Teil des Asteroidengürtels, in welchem sich Helga befindet, klar voneinander getrennt. Der Phasenraum

¹³Der Index M verweist dabei auf die Winkel, welche sich auf Mars beziehen.

in der unmittelbaren Umgebung ist aus diesem Grund relativ homogen: die aufgrund von z. B. Rundungsfehlern anfänglich leicht unterschiedlichen Bahnen auf verschiedenen Rechnern erfahren dennoch ähnlich geartete Störungen, was dann schließlich auch zu ähnlichen *MEGNO*-Kurven, und damit auch zu ähnlichen Lyapunov-Zeiten führt.

Um diese Aussagen zu belegen, wurde für jeden der beiden Asteroiden ein regelmäßiges Gitter von insgesamt $11 \times 11 = 121$ Testpartikeln um die bisher benutzten Anfangskoordinaten herum erzeugt. Dafür wurden die kartesischen x - und y -Koordinaten ihrer Anfangsbedingungen in den letzten Stellen variiert. Die z -Koordinate, sowie der Geschwindigkeitsvektor wurden unverändert beibehalten. Die so erhaltenen Klone wurden dann zusammen mit den Planeten von Mars bis Neptun über einen Zeitraum von einer Million Jahre auf dem gleichen Rechner mit der *ODEX*-Routine integriert. Die erhaltenen Lyapunov-Zeiten sind farbkodiert in Abbildung 3.8 dargestellt, wobei die Gebiete zwischen den Datenpunkten linear interpoliert wurden.

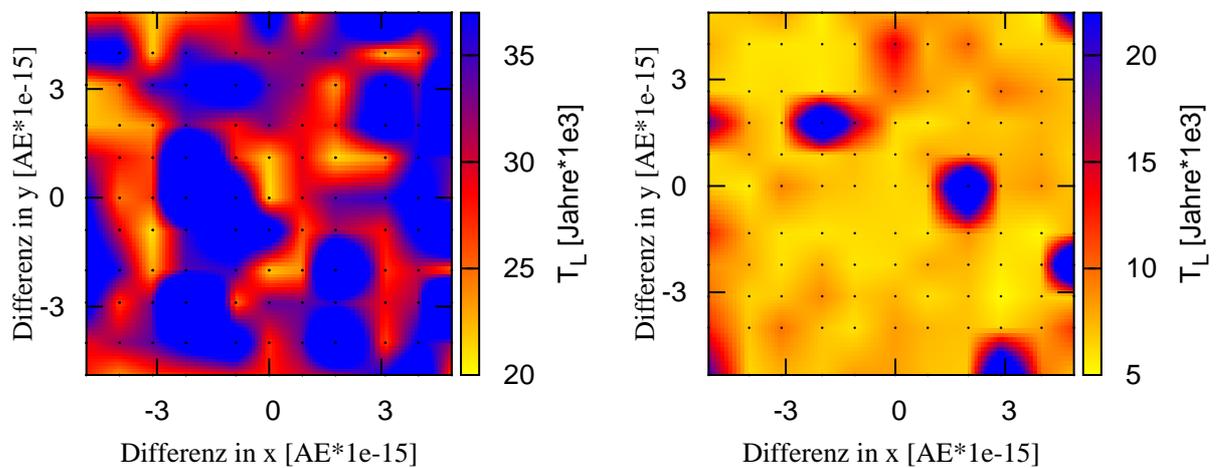


Abb. 3.8: Farbkodierte Darstellung der Lyapunov-Zeiten T_L der direkten Umgebung der Asteroiden 1981EY39 (links) und Helga (rechts). Die schwarzen Punkte kennzeichnen die Anfangsbedingungen der für die Integration verwendeten Testpartikel.

Bei 1981EY39 wird noch einmal die extreme Sensibilität gegenüber den Anfangsbedingungen offensichtlich: Unterschiede von 10^{-15} AE resultieren in Lyapunov-Zeiten, welche sich um fast $2 \cdot 10^4$ Jahre unterscheiden. Aber auch in der Umgebung von Helga finden sich einige Gebiete mit deutlich unterschiedlichen Lyapunov-Zeiten, wobei der Unterschied hier sogar bis zu einem Faktor 4 betragen kann. Betrachtet man diese Stellen genauer, so stellt man fest, dass sie jeweils nur von einem einzigen konkreten Wert der Anfangsbedingungen herrühren (in Abbildung 3.8 als schwarze Punkte gekennzeichnet). Der flächige Eindruck ist bedingt durch die Interpolation zwischen den einzelnen Anfangsbedingungen. Um herauszufinden, wie groß dieser Bereich tatsächlich ist, wäre eine weitere Berechnung der Lyapunov-Zeiten in der Umgebung dieser Punkte notwendig. Eine solche Untersuchung würde dann jedoch für die Integration einen Datentyp mit einer Mantissenlänge $m > 53$ verlangen, um zwischen den dargestellten Punkten noch interpolieren zu können.

Wie gezeigt wurde, hängt die numerische Berechenbarkeit von Chaosindikatoren direkt mit dem umgebenden Phasenraum zusammen. Ist dieser stark inhomogen, z. B. durch das Überlappen mehrerer verschiedener Resonanzen, erhält man auch für nahe beieinander

liegende Anfangsbedingungen sehr unterschiedliche Lyapunov-Zeiten. Diese Variation in den Anfangsbedingungen wird u. a. durch kleinste Unterschiede in der numerischen Berechnung bewirkt, wobei die hier getesteten Einflussgrößen nur eine Auswahl darstellen. Da diese Einflüsse selbst bei größter Sorgfalt in numerischen Rechnungen nicht zu vermeiden sind, lässt sich mit einer einzigen Integration lediglich die Größenordnung der Lyapunov-Zeit des Asteroiden bestimmen. Eine kleine Lyapunov-Zeit bleibt trotz eines Unsicherheitsfaktors von z. B. 2 klein. Um zu klären, wie verlässlich diese Angaben sind, ist eine detaillierte Untersuchung der Phasenraumumgebung notwendig.

Die qualitativen Merkmale des Phasenraumes sind jedoch von diesen Einflüssen unabhängig, wie durch weitere Berechnungen belegt werden konnte. So wurden z. B. einzelne Stabilitätsbereiche aus Abbildung 3.8 leicht verschoben, wenn die Rechnung auf einem anderen Rechner wiederholt wurde - die starke Bewegtheit des Phasenraumes von 1981EY39 im Vergleich zu Helga blieb dennoch erhalten. Aufgrund dessen ist es trotzdem möglich, unabhängig vom verwendeten Chaosindikator oder der benutzten Integrationsroutine verlässliche Ergebnisse über die Stabilität bestimmter Bereiche des Asteroidengürtels zu erhalten, um daraus z. B. Resonanzbreiten zu ermitteln.

Um dies zu verdeutlichen wurden die von Morbidelli und Nesvorný (1999) im Bereich des inneren Asteroidengürtels durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen wiederholt. Dabei wurde die gleiche Anzahl von Testpartikeln zusammen mit den Planeten von Mars bis Neptun (mit den oskulierenden Elementen des 01.01.2000) mit der *ODEX*-Routine auf einem Intel-Rechner über 10^6 Jahre integriert und aus dem *MEGNO*-Ergebnis der Lyapunov-Exponent berechnet. Morbidelli und Nesvorný (1999) verwendeten für ihre Berechnungen einen symmetrischen Mehrschritt-Integrator (*SNAIL*¹⁴); die benutzte Hardware wurde nicht angegeben. In Abbildung 3.9 erkennt man, dass alle von den genannten Autoren gefundenen Resonanzen ebenfalls (in nahezu identischer Stärke) identifiziert werden konnten. Das unterschiedliche Hintergrundniveau des Lyapunov-Exponenten ist durch die Verwendung von *MEGNO* bedingt.¹⁵

3.2.3 Der Berechenbarkeitsindex κ

Wie im letzten Kapitel dargelegt wurde, bestimmt die Strukturiertheit der unmittelbaren Phasenraumumgebung eines Asteroiden, wie gut berechenbar dessen Lyapunov-Zeit T_L ist. Unter Berechenbarkeit soll hierbei verstanden werden, wie reproduzierbar die Ergebnisse bei Variation nicht-problemspezifischer Einflussgrößen¹⁶ und vorgegebener Mantisenlänge sind.

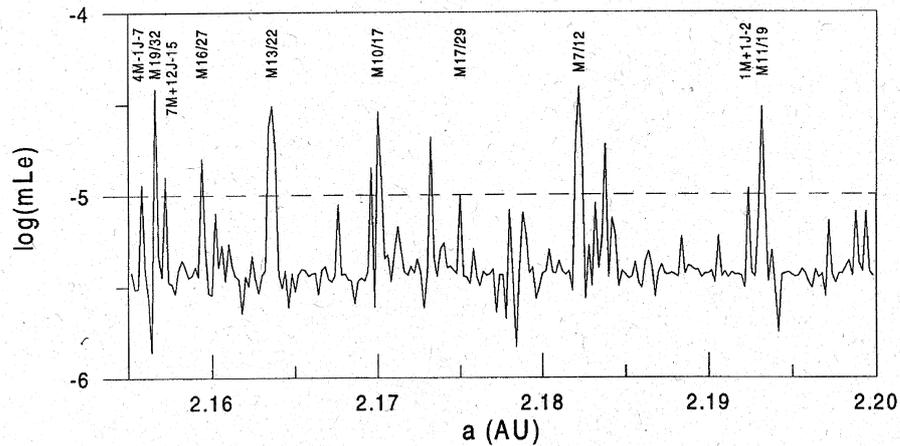
Ist der Phasenraum in der Umgebung der Anfangsbedingungen homogen, dann sollten die einzelnen Werte der Lyapunov-Zeiten mit nur wenigen Abweichungen um eine mittlere Lyapunov-Zeit streuen. Ist der Phasenraum hingegen stark inhomogen, sind, wie gezeigt wurde, sehr viele, große Abweichungen zu beobachten. In diesem Abschnitt soll daher eine Methode aufgezeigt werden, mit deren Hilfe es möglich ist, die Berechenbarkeit der Lyapunov-Zeit eines bestimmten Asteroiden abzuschätzen.

Die Bestimmung der Berechenbarkeit sollte dabei auch möglich sein, wenn lediglich ein Rechner und nur ein Compiler zur Verfügung stehen. Dies ist z. B. gegeben, wenn man

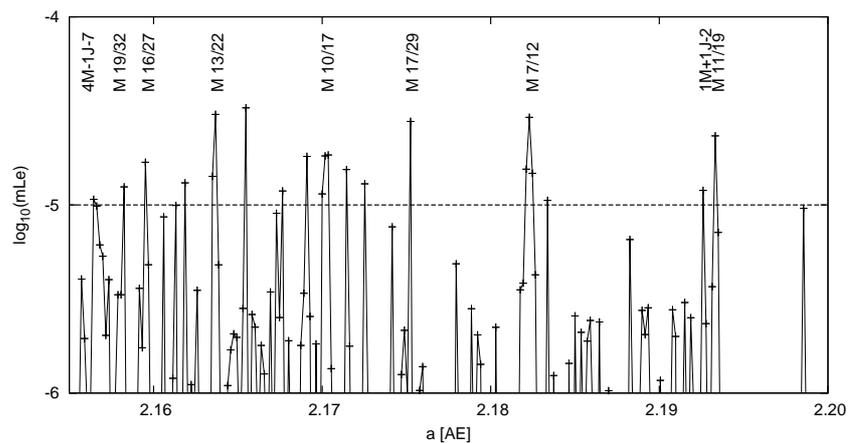
¹⁴Frei verfügbar unter: <http://www.boulder.swri.edu/~davidn/Snail.tar.gz>

¹⁵Zur Erklärung sei auf Kapitel 2.4.1 verwiesen.

¹⁶Damit seien all diejenigen Faktoren gemeint, welche unabhängig vom untersuchten Problem der Berechnung der Stabilität der Asteroidenbahn sind.



(a) FIG.4 aus Morbidelli und Nesvorný (1999). Gekennzeichnet sind die von ihnen gefundenen 3-Körper-Resonanzen mit Mars (M) und Jupiter (J) und Bahnresonanzen hoher Ordnung mit Mars. Zur Berechnung der Bahnen und Variationsgleichungen nutzten die Autoren einen symmetrischen Mehrschritt-Integrator.



(b) Der maximale Lyapunov-Exponent (mLe) berechnet mit dem *ODEX*-Integrator auf einem Intel-Computer.

Abb. 3.9: Maximaler Lyapunov-Exponent (mLe) in der Region von 2.155-2.20 AE. Die Berechnung des oberen Bildes wurde im Rahmen dieser Arbeit auf einem Intel-Rechner wiederholt und ist im unteren Bild dargestellt. Die von Morbidelli und Nesvorný (1999) gefundenen und im unteren Bild identifizierbaren Resonanzen wurden ebenfalls markiert.

die schon für Abbildung 3.8 verwendete Methode der Untersuchung der Phasenraumumgebung benutzt. Um jedoch wirklich nur die unmittelbare Umgebung des Asteroiden zu erfassen, wird im Folgenden lediglich ein 5×5 Gitter durch Variation in der letzten Stelle der x - und y -Koordinate der Anfangsbedingungen des Asteroiden erzeugt. Dieser künstlich eingeführte kleine Fehler entspricht etwa der Differenz, welche z. B. bei der Umrechnung

von Keplerelementen in kartesische Koordinaten durch Rundung auf verschiedenen Hardwareplattformen auftreten kann.¹⁷

Um zu entscheiden, wie stark die Lyapunov-Zeiten dieser 25 Testpartikel streuen, wird neben einem mittleren Wert die Standardabweichung berechnet. Wie in Abbildung 3.8 zu beobachten war, können sich die einzelnen Werte stark voneinander unterscheiden, wobei aber nicht von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann. Je nach Dichte der sich überlappenden Resonanzbereiche und Beschaffenheit des Phasenraumes unterliegt jeder Testpartikel unterschiedlichen dynamischen Gegebenheiten - die erhaltenen Lyapunov-Zeiten sind daher grundsätzlich voneinander unabhängig. Um dennoch die Stärke der Streuung mathematisch zu fassen, wurden Methoden der robusten Statistik, konkret das getrimmte Mittel und dessen Standardabweichung (siehe Anhang C), verwendet. Andere robuste Methoden, wie z. B. der Median und dessen Standardabweichung oder der Huber-Schätzer, wurden im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls getestet. Es zeigte sich, dass diese für die untersuchten Datenreihen qualitativ zu den gleichen Aussagen führen. Aus diesem Grund wurde für die folgende Darstellung ausschließlich das getrimmte Mittel verwendet.

Robuste Methoden haben den Vorteil, dass einige wenige stark abweichende Werte die qualitativen Eigenschaften der Verteilung kaum beeinflussen. Ein gut berechenbarer Asteroid wird mit dem getrimmten Mittel auch als solcher identifiziert, selbst wenn sich die Lyapunov-Zeit eines der 25 Testkörper aufgrund des stark veränderten Phasenraumes an dieser Stelle um ein Vielfaches vom Rest unterscheidet. Wie sensibel das Verfahren dabei gegenüber solchen abweichenden Werten ist, lässt sich mit dem Parameter γ bestimmen, wobei $0 \leq \gamma \leq 0.5$ gilt. Wilcox (1997) empfiehlt einen Wert von $\gamma = 0.2$ als optimal für die meisten Fälle. Für $\gamma = 0$ geht der getrimmte Mittelwert in das arithmetische Mittel über. Je größer γ ist, desto robuster ist der damit bestimmte Mittelwert gegenüber abweichenden Werten.

Die 25 Testpartikel in der Umgebung eines jeden der im letzten Kapitel untersuchten Asteroiden wurden mit *ODEX* über einen Zeitraum von 10^6 Jahren zusammen mit den Planeten auf den beiden zur Verfügung stehenden Rechnerarchitekturen integriert. Für die erhaltenen Lyapunov-Zeiten wurde anschließend der getrimmte Mittelwert für $\gamma = 0.2$ und dessen Standardabweichung berechnet. Andere γ Werte führen qualitativ zu den gleichen im Folgenden getroffenen Aussagen zur Berechenbarkeit der Asteroiden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.5 dargestellt. Um schnell qualitative Unterschiede in den Ergebnissen überblicken und darstellen zu können, bieten sich so genannte Box-Whisker-Plots¹⁸ an, welche in Abbildung 3.10 verwendet wurden, um die Asteroiden Helga und 1981EY39 einander gegenüberzustellen.

Sehr gut ist in Abbildung 3.10 zu sehen, dass bei beiden Asteroiden eine Änderung in der letzten Stelle der x - und y -Koordinate zu Lyapunov-Zeiten führen kann, welche das 5 bis 10-fache des Medianwertes erreichen können. Selbst die Phasenraumumgebung des Asteroiden Helga, welcher als sehr gut berechenbar gilt, besitzt, mit den verwendeten Eingangsdaten, solche Stellen. Der Unterschied zu 1981EY39 besteht allerdings darin, dass diese stark abweichenden Werte auf einige wenige beschränkt sind und der weitaus größere Teil der Anfangsbedingungen zu nah beieinander liegenden Lyapunov-Zeiten führt. In

¹⁷Dass es bei dieser Umrechnung neben einer Differenz in den Asteroidenkoordinaten auch zu einer solchen in den Planetenkoordinaten kommt, das System als Ganzes auf verschiedenen Plattformen also unterschiedlich ist, soll hierbei aber unbeachtet bleiben.

¹⁸Siehe Anhang B.

Tabelle 3.5: Getrimmte Mittelwerte und Standardabweichung für $\gamma = 0.2$ der errechneten Lyapunov-Zeiten in 10^3 Jahren für Intel und SGI.

	Intel		SGI	
	5 Planeten	7 Planeten	5 Planeten	7 Planeten
Atalante	57.66 ± 2.54	54.53 ± 3.99	48.80 ± 2.55	47.29 ± 3.01
Helga	6.88 ± 0.33	7.73 ± 0.42	6.77 ± 0.23	7.30 ± 0.23
1981EY39	31.33 ± 1.45	133.66 ± 37.04	29.13 ± 1.28	71.32 ± 14.69
1994EL	49.39 ± 6.32	36.90 ± 2.49	57.74 ± 16.70	31.55 ± 1.88

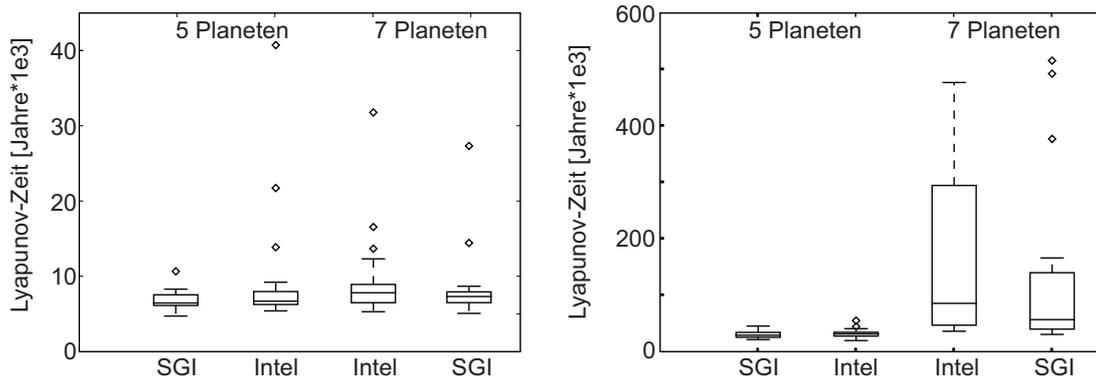


Abb. 3.10: Box-Whisker-Plot für die Asteroiden Helga (links) und 1981EY39 (rechts).

Abbildung 3.10 sieht man dies daran, dass sich die Box, innerhalb welcher 50 Prozent der Daten zu finden sind und mit ihr der Medianwert im selben schmalen Bereich der Lyapunov-Zeit befindet.

Aber auch 1981EY39 zeigt eine überraschend gute Berechenbarkeit mit getrimmten Mittelwerten, welche auch auf verschiedenen Rechnern nah beieinander liegen - wenn als Störkörper lediglich die Planeten von Mars bis Neptun wirken. Fügt man noch Venus und Erde hinzu, verschlechtert sich die Berechenbarkeit sehr stark - die Standardabweichung liegt dann zwischen 20 und 30 Prozent des berechneten Mittelwertes. Dass mehr Planeten aber nicht zwangsläufig eine größere Störung bedeuten zeigt Asteroid 1994EL, welcher mit 5 Planeten sehr viel schlechter berechenbar ist als mit 7 (siehe Tabelle 3.5).

Als Maß für die Berechenbarkeit wird vom Autor ein Berechenbarkeitsindex κ eingeführt. Mit der unter verschiedensten Bedingungen berechneten und anschließend gemittelten Lyapunov-Zeit T_L und deren Standardabweichung σ_{T_L} ist dieser definiert als Differenz der relativen Standardabweichung zu 1:

$$\kappa = 1 - \frac{\sigma_{T_L}}{T_L}, \quad \text{mit } \kappa \leq 1. \quad (3.17)$$

Je näher κ bei 1 liegt, desto berechenbarer ist seine Lyapunov-Zeit, d. h. desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich für einen Asteroiden trotz Änderung der Berechnungsmethoden konsistente Resultate ergeben. Eine Gegenüberstellung der aus Tabelle 3.5 auf Intel (\bullet) und auf SGI (\diamond) gewonnenen Berechenbarkeitsindizes findet sich in Tabelle 3.6.

Mit Hilfe dieser Tabelle ist es nun möglich, die Asteroiden grob als gut bzw. schlecht

Tabelle 3.6: Der Berechenbarkeitsindex κ der untersuchten Asteroiden

	5 Planeten		7 Planeten	
	●	◇	●	◇
Atalante	0.96	0.95	0.93	0.94
Helga	0.95	0.97	0.95	0.97
1981EY39	0.95	0.96	0.72	0.79
1994EL	0.87	0.71	0.93	0.94

berechenbar einzuteilen. Die konkreten Zahlenwerte dienen dabei lediglich als Orientierung, da sich ihr Wert durch die Verwendung anderer Integrationsmethoden etc. leicht ändern kann. Dennoch lässt sich z. B. ablesen, dass für den Asteroiden 1981EY39 mit 5 Planeten relativ konsistente Lyapunov-Zeiten ermittelt werden können, während durch Hinzunahme der Planeten Erde und Venus die Berechenbarkeit stark zurückgeht.

Mit obiger Definition des Berechenbarkeitsindex κ sollen abschließend drei grobe Kategorien für die numerische Berechenbarkeit von Lyapunov-Zeiten von Asteroiden vorgeschlagen werden:

- $\kappa > 0.95$ als sehr gut,
- $0.9 \leq \kappa \leq 0.95$ als gut und
- $\kappa < 0.9$ als schlecht berechenbar.

Durch die Verwendung eines relativ strengen Trimming-Faktors von $\gamma = 0.2$ für die Berechnung des getrimmten Mittels sind Werte $\kappa < 0.5$ kaum zu erwarten. Die vorgeschlagene Klassifikation der Asteroiden gilt daher auch nur in der Verbindung mit diesem γ - für einen anderen Wert sind die Grenzen neu zu bestimmen. Dies gilt ebenfalls bei Anwendung anderer robuster statistischer Verfahren zur Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichung. Für konkrete Parameterwerte einer bestimmten Methode liefert das hier vorgeschlagene Verfahren für die zu untersuchenden Asteroiden dann konsistente Aussagen zur numerischen Berechenbarkeit ihrer Lyapunov-Zeit, wobei die Untersuchung lediglich auf einem bestimmten Rechner mit nur einer Integrationsmethode etc. erfolgen muss.

3.3 Schattenorbits

Wie in Kapitel 3.1 ausgeführt wurde, ist die mittels numerischer Integration berechnete Bahn eines Asteroiden aufgrund unvermeidbarer Rundungs- und Diskretisierungsfehler stets fehlerbehaftet. Im Gegensatz zu anderen chaotischen Systemen ist die Lyapunov-Zeit von Asteroidenbahnen im Vergleich zur Umlaufperiode im Allgemeinen relativ groß. Es ist somit eine lange Integrationszeit notwendig, bis eine Konvergenz des Lyapunov-Exponenten gegen einen endlichen Wert zu sehen ist. Während dieser Zeit wachsen die numerischen Fehler an und beeinflussen somit auch entscheidend das Ergebnis. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit den Ergebnissen numerischer Simulationen chaotischer Systeme Vertrauen geschenkt werden kann. Gibt es vielleicht eine Grenze, bis zu welcher die

berechnete Bahn und die daraus abgeleiteten Größen, wie z. B. der Lyapunov-Exponent, die wahre Dynamik des Systems wiedergeben und ab derer dann die Fehler so groß sind, dass man nur noch das numerische Rauschen der Rechnung selbst sieht. Ist z. B. eine Mantissenlänge von 16 Stellen für eine Bahnintegration über 10^6 Jahre ausreichend oder sollte man besser 18 Stellen benutzen um aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen? Oder provozierend gefragt: Wie *schlecht* darf man integrieren, damit das erhaltene Ergebnis immer noch etwas mit der Wirklichkeit zu tun hat?

Antworten auf diese Fragen lassen sich mit Hilfe des so genannten *Schattenlemmas* von Grebogi u. a. (1990) geben. Dazu sei $\varphi_t(\mathbf{y}_0)$ die exakte Abbildung der Anfangsbedingungen $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ auf den Zeitpunkt t und $\mathbf{y}(t)$ eine numerisch berechnete Bahn, deren Einschrittfehler Gleichung (2.7) genügen soll. Das Schattenlemma besagt, dass in der Nähe dieser numerisch berechneten (also fehlerbehafteten) Trajektorie ein wahrer Orbit des Systems, der so genannte Schattenorbit $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ liegt, so dass $\|\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \delta$ für einen gewissen Zeitraum $t_0 \leq t \leq T_S$ gilt. Der Schattenorbit sei dabei eine exakte Lösung des gegebenen Differentialgleichungssystems, dessen Anfangsbedingungen in einer Umgebung δ der gegebenen Anfangsbedingungen liegen (siehe Abbildung 3.11).

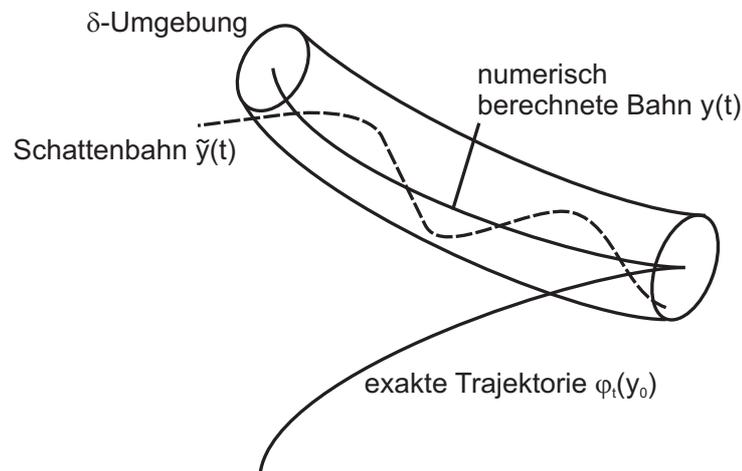


Abb. 3.11: Schematische Darstellung der Beziehung zwischen numerischer und exakter Lösung und dem Schattenorbit.

Es lässt sich feststellen, dass die numerische Lösung sehr viel länger in der Nähe des Schattenorbits als in der Nähe der exakten Lösung des Systems bleibt, welche mit den gleichen Anfangsbedingungen startet. Dem Lemma folgend können numerisch ermittelte Lösungen als repräsentativ für ein System angesehen werden, wenn für sie ein Schattenorbit gefunden werden kann.

Der exakte Algorithmus zum Auffinden eines Schattenorbits ist im Anhang D erläutert, weshalb an dieser Stelle lediglich eine kurze Beschreibung desselben erfolgen soll. Ausgangspunkt ist ein numerisch über einen Zeitraum $0 \leq t \leq T$ berechneter Orbit $\mathbf{y}(t)$ mit N Zwischenpunkten. Mit Hilfe eines weiteren, sehr viel genaueren Integrationsverfahrens wird eine Näherung des Einschrittfehlers $\mathbf{e}(t+h) = \mathbf{y}(t+h) - \varphi_h(\mathbf{y}(t))$ für jeden dieser Zwischenpunkte berechnet. Es werden dann für jeden Zeitpunkt die instabilen und stabilen Richtungen des Phasenraumes ermittelt, d. h. die Richtungen, in welche sich benachbarte Bahnen exponentiell voneinander entfernen bzw. einander annähern. Mit der

Kenntnis dieser Richtungen werden die einzelnen Zwischenpunkte¹⁹ dann iterativ verbessert und dadurch mit jeder Iteration δ verkleinert. Diese Bahn, welcher man sich damit annähert, besitzt einen Einschrittfehler $e(t+h) = 0$ und ist eine exakte Bahn des Systems - die so genannte Schattenbahn. Da diese von der ursprünglichen Bahn $\mathbf{y}(t)$, von der Anzahl der Zwischenschritte, der Länge des Integrationszeitraumes T und noch vielen anderen Faktoren abhängt, ist klar, dass der gefundene Schattenorbit nicht eindeutig ist.

Anosov (1967) konnte als erster für hyperbolische Systeme zeigen, dass bei diesen für alle Zeiten für alle Anfangsbedingungen ein Schattenorbit existiert. Die Anwendung dieser Erkenntnisse auf nicht-hyperbolische Systeme geschah durch Grebogi u. a. (1990) und Quinlan und Tremaine (1992), wobei letztere den Algorithmus zur Suche eines Schattenorbits auf beliebige Dimensionen erweiterten.²⁰ Im Gegensatz zu hyperbolischen Systemen ist es für nicht-hyperbolische Systeme nicht möglich, für alle Zeiten einen Schattenorbit zu finden. Dies zeigt sich dann daran, dass der Algorithmus ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr in der Lage ist, den Einschrittfehler zu verbessern. Dieser wird dann von einem Iterationsschritt zum nächsten größer statt kleiner. Für die numerisch berechnete Bahn existiert damit ab diesem Zeitpunkt keine Schattenbahn mehr. Die numerischen Fehler sind nun so groß, dass die wahre Dynamik des Systems durch rein numerisches Rauschen überdeckt ist.

Auch wenn sich der Einschrittfehler mit jeder Iteration verkleinert, ist die zur Abschätzung desselben verwendete genauere Integrationsroutine selbst auch fehlerbehaftet, wobei diese Fehler bei Verwendung der üblichen Computergenauigkeit im Bereich von 10^{-16} liegen. Es stellt sich damit die Frage, ob garantiert ist, dass dieses Verfahren letztlich wirklich (zu einem wahren Orbit) konvergiert? Da die Verfahren, mit denen sich diese Frage beantworten ließe,²¹ für das N -Körper-Problem zu rechenaufwendig sind, implementierten Quinlan und Tremaine (1992) den Algorithmus im Computeralgebrasystem *MAPLE* mit einer softwaremäßig erzeugten Genauigkeit von 100 Stellen. In ihren Untersuchungen einfacher chaotischer Abbildungen konnten sie zeigen, dass, wenn der Einschrittfehler auf 10^{-16} gesenkt werden konnte, die Iteration auch bis zu 10^{-100} fortgeführt werden konnte. Lässt sich mit dem Algorithmus der Einschrittfehler iterativ senken, so schlussfolgerten Quinlan und Tremaine (1992) daraus, existiert mit hoher Wahrscheinlichkeit auch eine zugehörige Schattenbahn.

Da das Schattenlemma bisher in der Himmelsmechanik nur auf die Galaxiendynamik angewandt wurde, sollte in dieser Arbeit untersucht werden, inwiefern sich die Erkenntnisse auch auf das Feld der Asteroidendynamik, im Speziellen auf die Berechenbarkeit von Chaosindikatoren übertragen lassen. Um dies zu entscheiden sollte untersucht werden, ob die Ergebnisse einer Integration über einen Zeitraum von 10^6 Jahren noch zuverlässig im Sinne des Schattenlemmas sind. Dafür wurden die Bahnen für verschiedene Asteroiden zusammen mit den Planeten Jupiter bis Neptun mit *ODEX* und mit einem symplektischen Integrator mit doppelter Genauigkeit auf verschiedenen Computern berechnet. Anschließend wurden die erhaltenen Zwischenpunkte mit den von Quinlan und Tremaine (1992) angegebenen Algorithmen iterativ bis hin zu einem δ von 10^{-15} verbessert. Da, wie in Kapitel 2.3.3 gezeigt wurde, über kurze Zeitskalen eine Integration mit *ODEX* sehr viel

¹⁹Dies können z. B. die Koordinaten und Geschwindigkeiten eines Asteroiden sein.

²⁰Quinlan und Tremaine (1992) untersuchten Probleme der Galaxiendynamik mit sehr großem N .

²¹Mit dem von Grebogi u. a. (1990) angegebenen Verfahren (*containment*) lässt sich streng beweisen, ob ein Schattenorbit gefunden wurde, oder nicht.

genauer ist, wurde dieser für die Verbesserung benutzt. Gelang diese Iteration, wurde davon ausgegangen, dass ein Schattenorbit für die numerisch berechnete Bahn existiert.

Als Ergebnis dieser Untersuchung zeigte sich, dass es bei den mit *ODEX* durchgeführten Integrationen von dem gewählten zulässigen lokalen Fehler ε abhängig war, ob ein Schattenorbit gefunden werden konnte, oder nicht. Lag dieser unter 10^{-14} war dies generell der Fall (siehe Tabelle 3.7). War der Wert größer, führten Diskretisierungsfehler dazu, dass für die numerisch berechnete Bahn lediglich für einen begrenzten Zeitraum ein Schattenorbit gefunden wurde. Aus Tabelle 3.7 lässt sich entnehmen, dass dieser Zeitraum umso größer ist, je kleiner ε gewählt wird. Diese Beobachtung passt gut zu dem in Tabelle 2.2 gezeigten Anwachsen des globalen Fehlers $\propto t^2$ für *ODEX*. Die Grenze für Integrationen liegt somit bei ungefähr 10^6 Jahre. Nach diesem Zeitraum konnte in dieser Untersuchung numerisch mit *ODEX* im Sinne des Schattenlemmas kein für das dynamische System repräsentativer Orbit mehr gefunden werden.

Tabelle 3.7: Zeitspanne T_S , für welche bei einer Integration mit *ODEX* eine Schattenbahn gefunden wurde in Abhängigkeit von der gewählten zulässigen Obergrenze des lokalen Fehlers ε . Integriert wurde der Asteroid Atalante zusammen mit den Planeten Jupiter bis Neptun über einen Zeitraum von 10^6 Jahre.

ε	T_S [Jahre]	$\varepsilon \cdot T_S^2$
1.0e-3	3.4e0	0.01
1.0e-5	1.0e2	0.10
1.0e-7	1.0e3	0.10
1.0e-9	3.4e3	0.01
1.0e-11	2.7e5	0.73
1.0e-14	1.0e6	0.01

Für die symplektische Methode zeigte die Untersuchung, dass unter Verwendung einer als optimal abgeschätzten Schrittweite (Kapitel 3.1.4) während der gesamten Integrationsdauer ein Schattenorbit gefunden werden konnte. Begründet werden kann dies damit, dass, wie in Anhang A gezeigt wird, symplektische Integratoren so integrieren, dass ihre numerische Lösung anstatt der gegebenen Differentialgleichung einer leicht gestörten (modifizierten) Differentialgleichung folgt und sich nur sehr langsam von dieser entfernt. Da die modifizierte Gleichung ebenfalls symplektisch ist, bleiben die Ergebnisse in sich konsistenter und es ist daher auch möglich, über lange Zeiträume noch eine Schattenbahn für diese zu finden.

Die Ergebnisse dieses Kapitels zeigten, dass alle Integrationen des vorangegangenen Kapitels mögliche wahre Orbits des untersuchten Systems repräsentieren. Keine dieser Berechnungen konnte aufgrund des Schattenlemmas verworfen werden. Somit sind auch die mit diesen Integrationen erhaltenen Lyapunov-Zeiten exakt in dem Sinne, dass sie die Stabilität eines Asteroiden mit in der Nähe liegenden Anfangsbedingungen beschreiben. Ist die δ -Umgebung dieser Anfangsbedingungen homogen, so sind dies auch die zu diesen Anfangsbedingungen gehörigen Lyapunov-Zeiten; selbst wenn für verschiedene Integrationen verschiedene Schattenbahnen innerhalb dieser Umgebung gefunden werden.

4 Stabilitätsuntersuchungen ausgewählter Bahnresonanzen

In diesem Kapitel soll die Stabilität innerhalb einzelner Resonanzen des Edgeworth-Kuiper-Gürtels, konkret der 1:2-, 3:5- und der 4:7-Bahnresonanz mit Neptun, untersucht werden.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Bestimmung der Resonanzbreite im eingeschränkten 3-Körper-Problem. Die Ergebnisse für den planaren Fall werden im ersten Abschnitt dargestellt. Wie die Beobachtungen zeigen, sind die Bahnen vieler Objekte des EKG stark gegen die Ekliptik geneigt. Aus diesem Grund wird die Dynamik von Objekten mit hoher Inklination innerhalb der Bahnresonanzen im zweiten Abschnitt ebenfalls im Rahmen des eingeschränkten 3-Körper-Problems behandelt. In den daran anschließenden Abschnitten wird diese Einschränkung aufgehoben. Unter dem Einfluss der vier großen Gasplaneten (Jupiter bis Neptun) werden die Lyapunov-Zeiten innerhalb der Bahnresonanzen numerisch berechnet und die erhaltenen Ergebnisse interpretiert.

4.1 Das planare, eingeschränkte 3-Körper-Problem

Um einen ersten Eindruck der zu untersuchenden Bahnresonanzen im EKG zu erhalten, soll die Dynamik der Asteroidenbahn modellhaft im eingeschränkten 3-Körper-Problem beschrieben werden. Bei diesem wird die durch Neptun gestörte Bewegung des als masselos angesehenen Asteroiden um die Sonne betrachtet. Die Bahn Neptuns ist dabei ungestört und definiert die Bezugsebene. Setzt man die Summe der Sonnen- und Neptunmasse ebenso wie die Distanz zwischen diesen beiden und die Gravitationskonstante zu 1, so ergibt sich die Hamiltonsche Funktion \mathcal{H} des eingeschränkten 3-Körper-Problems zu

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1 = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} - \frac{1-\mu}{\|\mathbf{r}\|} - \mu \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^3} \right). \quad (4.1)$$

In diesen Einheiten ist μ das Produkt aus der Masse des Planeten und der Gravitationskonstanten und beträgt $\mu \approx 1/19\,400$. \mathcal{H}_0 beschreibt die ungestörte Keplerbewegung des Asteroiden um die Sonne und $\mu\mathcal{H}_1$ die durch Neptun verursachte Störung. \mathbf{r} ist der heliozentrische Positionsvektor und $\dot{\mathbf{r}}$ dessen zeitliche Änderung. Gestrichene Größen beziehen sich dabei auf den Störkörper (Neptun).

Unter Nutzung kanonischer Delaunay - Variablen¹ lautet die Hamiltonsche Funktion \mathcal{H} dieses Systems bis zur ersten Ordnung des kleinen Parameters μ

$$\mathcal{H} = L' - \frac{(1-\mu)^2}{2L^2} + \mu\mathcal{H}_1(L, G, H, l, g, h, \lambda'). \quad (4.2)$$

Um zu erreichen, dass \mathcal{H} nicht explizit von der Zeit t abhängt, wurde der Phasenraum erweitert und $\lambda' = n't$ (n' ist die konstante mittlere Bewegung Neptuns) und der dazu konjugierte Impuls L' eingeführt. Dabei ist

¹Für eine Definition dieser Variablen siehe z. B. Morbidelli (2002).

a die große Halbachse des Asteroiden in diesen Einheiten,
 e die Exzentrizität der Asteroidenbahn,
 i die Inklination der Asteroidenbahn gegenüber der Bezugsebene,
 l die mittlere Anomalie des Asteroiden,
 L der zu l konjugiert kanonische Impuls ($= \sqrt{(1 - \mu)a}$),
 g das Argument des Pericenters ($= \omega$),
 G der zu g konjugiert kanonische Impuls ($= L\sqrt{1 - e^2}$),
 h die Länge des aufsteigenden Bahnknotens ($= \Omega$) und
 H der zu h konjugiert kanonische Impuls ($= G \cos i$).

Befindet sich der Asteroid in einer Bahnresonanz $p+q : p$ mit dem Planeten, bietet sich unter Verwendung der mittleren Länge $\lambda = l + g + h$, der Länge des Perihels $\varpi = g + h$ und des Resonanzwinkels $\sigma_{p+q:p}$ der Übergang zu folgenden kanonischen Variablen (siehe z. B. Šidlichovský (1999)) an

$$\begin{aligned}
 \lambda', & & \Lambda' &= L' + (1 + q/p)L, \\
 \sigma_{p+q:p} &= (1 + p/q)\lambda' - (p/q)\lambda - \varpi, & S &= L - G, \\
 \sigma_z &= (1 + p/q)\lambda' - (p/q)\lambda - \Omega, & S_z &= G - H \\
 \nu &= -(1 + p/q)\lambda' + (p/q)\lambda + \varpi', & N &= (1 + q/p)L - H.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Das durch diese Transformation entstandene System besitzt 4 Freiheitsgrade. Um dies zu verringern, sei in diesem Kapitel angenommen, dass sich der Asteroid in der Bezugsebene bewege. S_z ist Null, da nun $G = H$ gilt. Des weiteren soll sich der Planet auf einer kreisförmigen Bahn ($e' = 0$) bewegen. Der einzige in \mathcal{H} verbliebene, sich schnell ändernde Winkel ist λ' . Dessen Periode ist sehr viel kleiner als die Periode des Resonanzwinkels $\sigma_{p+q:p}$. Zur Beschreibung der Dynamik innerhalb einer Bahnresonanz bietet es sich daher an, die Störungen Neptuns auf den Asteroiden über eine synodische Periode² zu mitteln.

Als Resultat erhält man ein System mit nur noch einem Freiheitsgrad. Dieses wird beschrieben durch die Hamiltonsche Funktion $\tilde{\mathcal{H}}$ und besitzt als einzige generalisierte Koordinate den Resonanzwinkel $\sigma_{p+q:p}$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(N, S, \sigma_{p+q:p}) = -\frac{p+q}{q}(N - S) - \frac{(1 - \mu)^2 q^2}{2p^2(N - S)^2} + \mu \tilde{\mathcal{H}}_1. \tag{4.4}$$

mit

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(N, S, \sigma_{p+q:p}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} \mathcal{H}_1(N, S, \sigma_{p+q:p}, \lambda') d\lambda'. \tag{4.5}$$

²Die Umlaufperiode des Planeten ist in den gewählten Einheiten 2π . Nach einem Zeitraum von $2\pi p$ -einer synodischen Periode- befinden sich die Körper wieder in der gleichen Stellung zueinander.

Die Integration von Gleichung (4.5) wurde im Folgenden immer numerisch durchgeführt, wobei \mathcal{H}_1 die in Gleichung (4.1) gegebene Form hatte. Durch dieses Vorgehen ließen sich Konvergenzprobleme der sonst üblichen Reihenentwicklungen vermeiden.

Auf Grund der Beschränkung auf $e' = 0$ ist der kanonische Impuls N konstant und in der gemittelten Hamiltonschen Funktion ein Parameter

$$N = \sqrt{(1 - \mu)a} \left(\frac{p + q}{p} - \sqrt{1 - e^2} \right) = \text{const.} \quad (4.6)$$

Diese Beziehung für verschiedene Werte von N in der (a, e) -Ebene ist in Abbildung 4.1 am Beispiel der 3:5-Bahnresonanz dargestellt. Zeitliche Änderungen der großen Halbachse und der Exzentrizität erfolgen damit immer entlang einer konkreten Isolinie von N , welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist. Wie im Folgenden gezeigt wird, zirkuliert außerhalb einer Bahnresonanz der Resonanzwinkel $\sigma_{p+q:p}$, während die Exzentrizität nahezu konstant bleibt. Innerhalb der Resonanz ändert sich e periodisch mit einer Amplitude $\Delta e/2$. Der zeitliche Mittelwert der Exzentrizität lässt sich direkt aus der Beziehung (4.6) ableiten, wobei für die große Halbachse der exakte Resonanzwert einzusetzen ist.

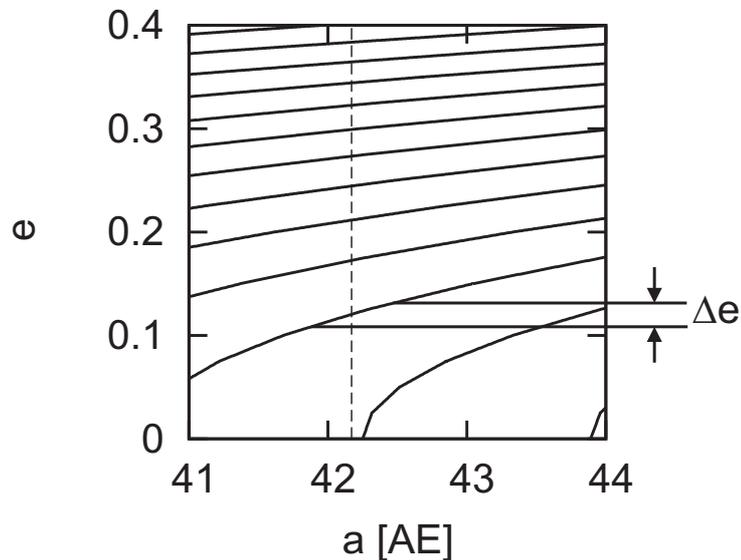
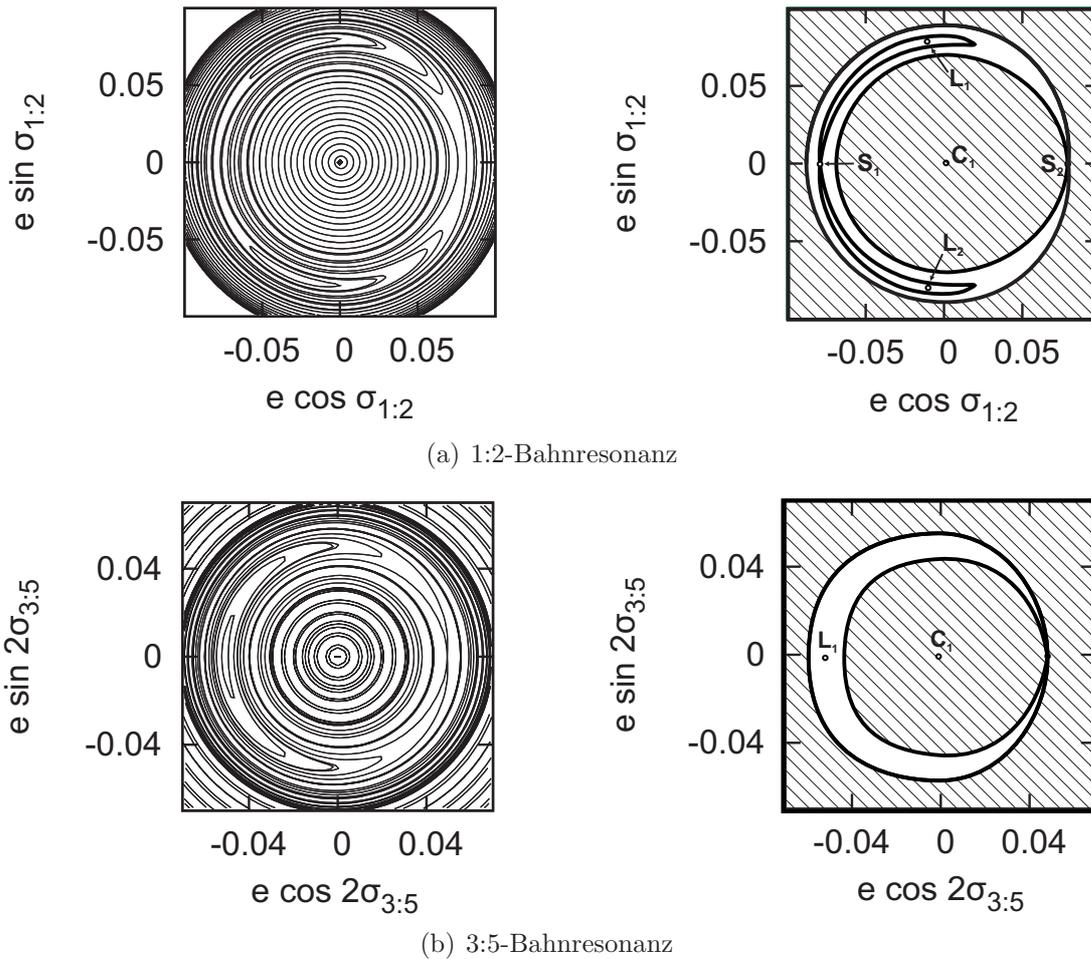


Abb. 4.1: Isolinien für verschiedene Werte von N (Gleichung (4.6)) der 3:5-Bahnresonanz. Innerhalb einer Bahnresonanz kommt es zu einer periodischen Änderung der Exzentrizität mit einer Amplitude $\Delta e/2$. Der Ort der exakten Resonanz wurde als gestrichelte Linie eingetragen.

Für einen konkreten Wert von N bewegt sich das gemittelte System entlang einer Isolinie $\tilde{\mathcal{H}} = \text{const.}$ Abbildung 4.2 zeigt in der Ebene der nicht-kanonischen Variablen $(e \cos q\sigma_{p+q:p}, e \sin q\sigma_{p+q:p})$ für die 1:2- und die 3:5-Bahnresonanz den durch Gleichung (4.4) definierten Phasenraum. Zur leichteren Erkennbarkeit der topologisch wichtigen Merkmale wurde auf der rechten Seite der Abbildung jeweils noch eine schematische Skizze hinzugefügt.

Um Abbildung 4.2 zu erzeugen, wurde zu Beginn ein konkreter Wert für N fixiert. Dieser kann beispielsweise aus Abbildung 4.1 entnommen werden. Anschließend wurde für ein Gitter mit 200×200 Punkten in der $(e \cos q\sigma_{p+q:p}, e \sin q\sigma_{p+q:p})$ -Ebene für jeden Gitterpunkt der Wert von $\tilde{\mathcal{H}}$ berechnet. Aus dieser Datenreihe konnten danach die Isolinien für verschiedene Werte von $\tilde{\mathcal{H}} = \text{const.}$ berechnet werden.



(a) 1:2-Bahnresonanz

(b) 3:5-Bahnresonanz

Abb. 4.2: Die Isolinien des durch Gleichung (4.4) definierten Phasenraumes zweier Bahnresonanzen im EKG. Die wichtigsten Merkmale sind auf den rechten Seiten schematisch dargestellt. Für die 1:2-Bahnresonanz wurde $N = -3.428$ und für die 3:5-Bahnresonanz $N = -2.589$ gewählt.

Klar erkennt man die schon in Kapitel 2.2.1 angeführten grundlegenden Unterschiede zwischen der asymmetrischen Libration der 1:2-Bahnresonanz und der symmetrischen Libration im Fall der 3:5-Bahnresonanz. Die 1:2-Bahnresonanz besitzt zwei stabile Sattelpunkte L_1 und L_2 , welche gleichabständig zu beiden Seiten der Linie $e \sin \sigma_{1:2} = 0$ ungefähr bei $\sigma_{1:2} = \pm 95^\circ$ und $e \approx 0.08$ liegen. Das Aphel (S_1) ist ebenso wie das Perihel (S_2) der Asteroidenbahn ein Sattelpunkt - Konjunktionen mit Neptun, welche in diesen Punkten stattfinden sind daher instabil. Durch diese zwei Sattelpunkte verlaufen die beiden Separatrizen³ des Systems. Die erste durch S_1 trennt die beiden Librationszentren von den Orbits, deren Resonanzwinkel mit großer Amplitude um den Punkt $\sigma_{1:2} = \pi$ librieren - obwohl das Aphel selbst instabil ist. Diejenigen Bahnen, welche eine Libration um L_1 oder L_2 vollführen, werden als *Tadpole*-, die mit einer Libration um S_1 als *Horseshoe*-Orbits bezeichnet. Die zweite, durch S_2 verlaufende Separatrix trennt diese Zone der Libration von dem inneren und dem äußeren, in der schematischen Skizze schraffiert dargestellten

³Als Separatrizen (Plural von lat. *separatrix* = Trennende) werden diejenigen Trajektorien eines Systems bezeichnet, welche die Grenze zwischen Libration und Rotation des Resonanzwinkels markieren.

Bereich. In diesen zirkuliert der Resonanzwinkel $\sigma_{1:2}$. Asteroiden, deren Bewegung entlang dieser Isolinien verläuft, befinden sich außerhalb der 1:2-Bahnresonanz.

Auch auf der rechten Seite von Abbildung 4.2(b) zirkuliert der Resonanzwinkel in den schraffierten, durch eine Separatrix voneinander getrennten Bereichen. Im Gegensatz zu den asymmetrischen Resonanzen der Form $1:r$ mit $r \geq 2$, besitzen alle anderen äußeren Bahnresonanzen des EKG nur eine Separatrix, wobei der Resonanzwinkel $q\sigma_{p+q:p}$ bei diesen immer um den stabilen Punkt L_1 libriert.

Da durch eine Separatrix die Gebiete eines zirkulierenden von denen eines librierenden Resonanzwinkels getrennt werden, lässt sich mit ihrer Hilfe auch die Breite einer Resonanz bestimmen. Dies wurde in Abbildung 4.3 für die drei in dieser Arbeit zu untersuchenden Resonanzen getan. Zusätzlich dazu wurden noch die beiden Linien $r_p = 30$ AE und $r_p = 35$ AE eingetragen. Erstere bezeichnet die Grenze, oberhalb derer die Exzentrizität der Asteroidenbahn so groß ist, dass das Perihel innerhalb der Neptunbahn liegt - die beiden Bahnen sich also schneiden. Oberhalb der mit $r_p = 35$ AE bezeichneten Linie beginnt die Schwerkraft Neptuns die Bahn der Asteroiden so stark zu stören, dass eine stabile Bewegung über längere Zeitskalen lediglich innerhalb von Resonanzen möglich ist (siehe z. B. Duncan, Levison und Budd (1995)).

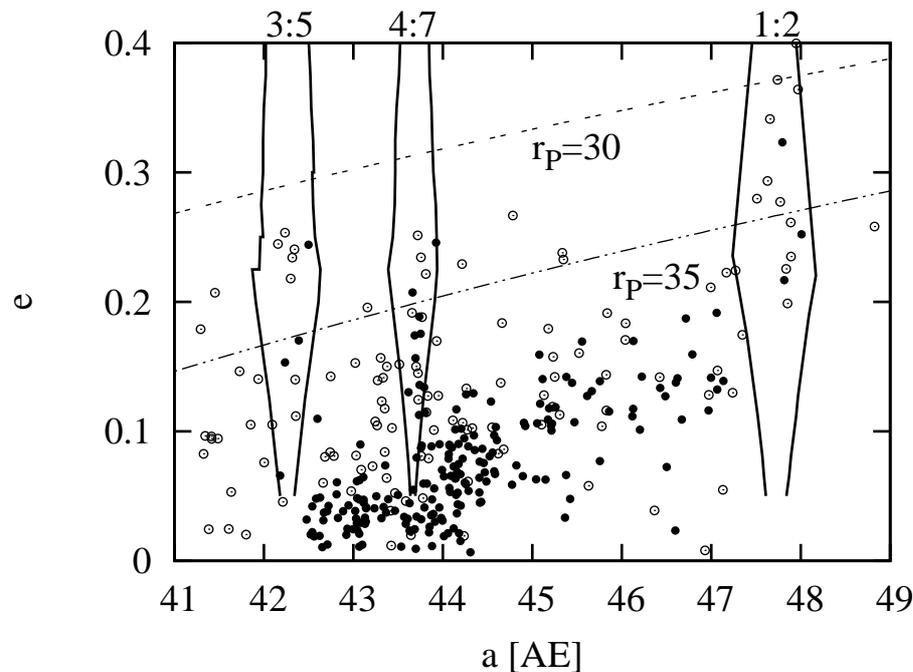


Abb. 4.3: Die aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem abgeleiteten Resonanzbreiten im EKG. Als Punkte dargestellt sind die mittleren Elemente beobachteter Asteroiden des EKG, wobei gefüllte Punkte eine Inklination $i < 5^\circ$, ungefüllte $i > 5^\circ$ anzeigen. Bei den Unstetigkeiten in den Linien, welche die Resonanzbreite markieren, handelt es sich um numerische Artefakte, welche durch die Art der Berechnung bedingt sind.

Weiterhin wurden in Abbildung 4.3 alle bisher beobachteten Asteroiden des EKG hinzugefügt. Die großen Halbachsen (in geringerem Maße auch e und i) dieser Körper schwanken aufgrund gravitativer Störungen Jupiters mit einer Periode von rund 12 Jahren und einer Amplitude von 0.3 bis 0.4 AE (Nesvorný und Roig (2001)) um einen mittleren Wert. Um

die Asteroiden an der korrekten Stelle in der Abbildung darzustellen, war es erforderlich, die mittleren Bahndaten dieser Körper zu berechnen. Sie wurden daher mit den vom MPC angegebenen oskulierenden Bahnelementen einer bestimmten Epoche zusammen mit den Planeten Jupiter bis Neptun über einen Zeitraum von 100 Jahren integriert und ihre Bahndaten einmal pro Jahr gespeichert. Ein mittleres Bahnelement \bar{x} ergibt sich dann als

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t'=t}^{t'+100 \text{ Jahre}} x(t'), \quad (4.7)$$

mit $N = 100$. Die Mittelung über diesen kurzen Zeitraum ist ausreichend, um die Körper an ihrer korrekten Position innerhalb der Resonanzgebiete darzustellen und gleichzeitig kurz genug, um zu vermeiden, dass resonante Wechselwirkungen diese Position wieder verändern könnten.

Deutlich sieht man in Abbildung 4.3, dass die mit schwarzen Punkten dargestellte dynamisch kalte Population⁴ des EKG weit unterhalb der Linie $r_P = 35$ AE zu finden ist, wobei sich die meisten auf den Bereich zwischen 42 und 45 AE konzentrieren. Die wenigen, bisher beobachteten Asteroiden dieser Population, welche oberhalb dieser Linie liegen, befinden sich innerhalb der zu untersuchenden Resonanzgebiete. Die anderen an diesen Stellen beobachteten Objekte besitzen eine Inklination $i > 5^\circ$ und gehören damit zur dynamisch heißen Population.

Des weiteren erkennt man in Abbildung 4.3, wie das Gebiet, innerhalb dessen der Resonanzwinkel libriert, anfänglich mit wachsender Exzentrizität immer breiter wird. Mit größerem e verringert sich aber gleichzeitig die Distanz zu Neptun, so dass sich die Breite der Resonanz ab einem bestimmten Exzentrizitätswert wieder verringert. Deutlich wird in allen Fällen der Schutzmechanismus einer Bahnresonanz - je größer die Exzentrizität ist, desto näher muss sich der Asteroid in der exakten Resonanz befinden, um noch vor zu nahen Begegnungen mit Neptun geschützt zu sein. Der Zusammenhang zwischen Amplitude und Periode des Resonanzwinkels wurde für die 1:2- und die 3:5-Bahnresonanz für verschiedene Exzentrizitätswerte in Abbildung 4.4 dargestellt.

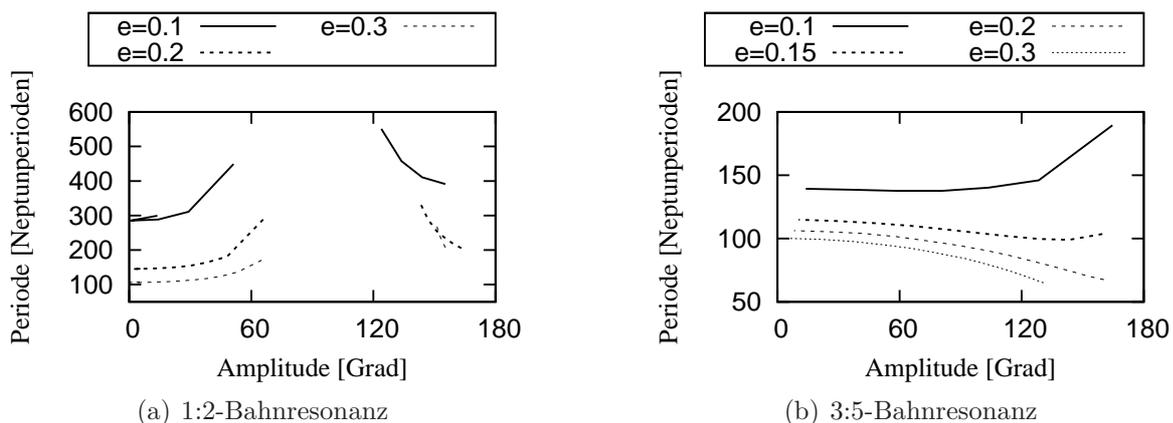


Abb. 4.4: Die Periode in Abhängigkeit von der Amplitude des Resonanzwinkels für verschiedene Exzentrizitätswerte.

⁴Für eine Klassifikation der Objekte des EKG siehe Kapitel 2.1.

Die Amplitude und Periode wurde dabei numerisch durch Bahnintegration des planaren, eingeschränkten 3-Körper-Problems über einen Zeitraum von 10^6 Jahren berechnet. Neptun bewegte sich auf einer kreisförmigen Bahn mit einer großen Halbachse $a' = 30.069$ AE. Für verschiedene Werte der großen Halbachse und mit der in der Abbildung angegebenen anfänglichen Exzentrizität wurde der Resonanzwinkel der entsprechenden Bahnresonanz berechnet. Librierte dieser Winkel wurde anschließend noch die Amplitude und Periode dieser Libration bestimmt.

Die Resonanzperiode liegt im Bereich zwischen 10^4 und 10^5 Jahren. Allgemein lässt sich feststellen, dass die Periode des Resonanzwinkels umso kleiner ist, je größer die Exzentrizität der Bahn des Asteroiden ist - die abnehmende Distanz zu Neptun bewirkt also eine Beschleunigung der resonanten Dynamik. Sehr deutlich wird auch der Unterschied zwischen Tadpole- und Horseshoe-Orbits der 1:2-Bahnresonanz im linken Teil der Abbildung. Während Tadpole-Orbits eine maximale Amplitude von etwas mehr als 60° besitzen können, finden sich keine Horseshoe-Orbits unterhalb 120° . Zwischen diesen beiden Werten ist in der 1:2-Bahnresonanz keine Libration des Resonanzwinkels möglich. Die maximale Amplitude, welche innerhalb der Bahnresonanzen möglich ist, liegt bei beiden Bahnresonanzen bei ungefähr 160° .

4.2 Die Kozai-Resonanz

Wie in Abbildung 4.3 zu sehen ist, besitzen rund die Hälfte der bisher bekannten Objekte des EKG eine Bahnneigung $i > 5^\circ$. Bei 28% der Körper ist die Inklination der Bahn sogar größer als 10° , wobei viele der sich in den in Abbildung 4.3 eingezeichneten Resonanzgebieten befindlichen Objekte mit einem Perihelabstand $r_p < 35$ AE zu dieser Gruppe gehören. Die Herkunft dieser so genannten heißen Population lässt sich mit den heutigen Modellen der Entstehung unseres Sonnensystems sehr gut erklären.⁵ In diesem Abschnitt soll nun die Dynamik der Körper mit großen Inklinationen innerhalb einer Bahnresonanz untersucht werden.

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Resonanzbreiten im planaren Fall des eingeschränkten 3-Körper-Problems abgeschätzt wurden, wird in diesem Abschnitt die Beschränkung der Asteroidenbewegung auf die Planetenebene aufgehoben. Ausgangspunkt sei dafür wiederum die Hamiltonsche Funktion von Gleichung (4.2). Auch hier soll sich Neptun als einziger Störkörper auf einer Kreisbahn bewegen. Für eine Untersuchung der Dynamik innerhalb einer Bahnresonanz $p+q : p$ kann weiterhin angenommen werden, dass die beiden mittleren Längen der Körper nicht unabhängig voneinander sind. Aufgrund der Resonanz gilt $(p+q)\lambda' \approx p\lambda$. Diese Beziehung wurde z. B. bei der Definition des entsprechenden Resonanzwinkels $\sigma_{p+q:p}$ berücksichtigt. Wie in Kapitel 4.1 gezeigt wurde, ist dieser Winkel exakt im Zentrum der Resonanz konstant und libriert ansonsten innerhalb des Resonanzgebietes mit einer Amplitude A_σ um diesen konstanten Wert.

Auch bei der Kozai-Resonanz ist eine Mittelung über die schnellen Winkel sinnvoll um die Freiheitsgrade des Systems zu vermindern. Ein schneller Winkel ist dabei wiederum die mittlere Länge des Planeten λ' . Auch die Librationsperiode des Resonanzwinkels ist deutlich kleiner als die der Kozai-Resonanz, welche in diesem Abschnitt untersucht werden soll und typischerweise im EGK eine Periode im Bereich einiger Millionen Jahre besitzt. Die gemittelte Hamiltonsche Funktion $\tilde{\mathcal{H}}$ außerhalb einer Bahnresonanz erhält man durch

⁵Siehe Kapitel 2.1 und z. B. Morbidelli, Levison und Gomes (2007).

Mittelung über die mittleren Längen des Planeten und des Asteroiden (siehe z. B. Thomas und Morbidelli (1996)). Befinden sich die beiden Körper exakt in einer Bahnresonanz (mit $A_\sigma = 0$), so reduziert sich das Problem durch die Kopplung der mittleren Längen auf die Lösung eines einfachen Integrals. Berücksichtigt man die Libration des Resonanzwinkels σ um den exakten Punkt der Resonanz σ_0 erhält man erneut ein Doppelintegral. Diese Libration soll dabei sinusförmig mit der Amplitude A_σ und einer Periode P erfolgen, wodurch sich der Resonanzwinkel zu $\sigma = A_\sigma \sin 2\pi t/P + \sigma_0$ ergibt. Die gemittelte Störfunktion erhält man durch

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(H, S, S_z, \sigma_{p+q:p}, \sigma_z) = \frac{1}{4\pi^2 p} \int_0^{2\pi p} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(H, S, S_z, \sigma_{p+q:p}, \sigma_z, \lambda') d\lambda' dt. \quad (4.8)$$

Für \mathcal{H}_1 wurde die in Gleichung (4.1) gegebene Form benutzt. Damit ließen sich die z. B. bei Wan und Huang (2007) beobachteten Konvergenzprobleme einer Entwicklung der Störfunktion vermeiden. Mit dem in dieser Arbeit benutzten Vorgehen ist es möglich, die Dynamik der Kozai-Resonanz innerhalb von Bahnresonanzen auch für große Exzentrizitäten und Inklinationen, wie sie im EKG gefunden werden können, korrekt zu beschreiben.

Aus der Invarianz der gemittelten Hamiltonschen Funktion gegenüber einer Rotation der Bezugsrichtung folgt, dass diese unabhängig von Ω ist. Der dazu konjugierte Impuls $H = \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)} \cos i$ ist in diesem Fall eine Konstante, welche die Exzentrizität und die Inklination des Asteroiden koppelt. Die große Halbachse hat dabei den Wert der exakten Bahnresonanz.

Die sich daraus ergebende gemittelte Hamiltonsche Funktion $\tilde{\mathcal{H}}$ besitzt lediglich einen Freiheitsgrad und ist nur noch von $\omega = \sigma_z - \sigma_{p+q:p}$ abhängig. Die Darstellung der Isolinien von $\tilde{\mathcal{H}} = \text{const.}$ in Abhängigkeit von dem Parameter H erfolgt üblicherweise in der Ebene $(e \cos \omega, e \sin \omega)$. Da durch H die Exzentrizität und die Inklination gekoppelt sind, wird oft in Publikationen statt H die maximal mögliche Inklination i_{\max} angegeben.⁶ Solche Isolinien der gemittelten Hamiltonschen Funktion für $i_{\max} = 35^\circ$ für die 3:5- und die 4:7-Bahnresonanz sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

Für Abbildung 4.5 wurde ein aus 200×200 Punkten bestehendes Gitter in der Ebene $(e \cos \omega, e \sin \omega)$ erzeugt. Unter Annahme einer Librationsamplitude des Resonanzwinkels von $A_\sigma = 15^\circ$ wurde für jeden dieser Punkte numerisch der Wert für $\tilde{\mathcal{H}}$ berechnet. Die große Halbachse a erhielt dabei den Wert der exakten Bahnresonanz. Einige Isolinien für $\tilde{\mathcal{H}} = \text{const.}$ wurden dann in der Abbildung dargestellt.

Zusätzlich wurden vom Autor dieser Arbeit noch die Stellen berechnet und in die Abbildung eingetragen, an welchen eine Kollision zwischen dem Asteroiden und Neptun möglich ist. Eine solche Kollision kann dabei nur für Bahnen erfolgen, deren Perihelabstand kleiner als die große Halbachse des Planeten a' ist, d. h. für Exzentrizitäten $e > 1 - a'/a$. Aus diesem Grund finden sich die Linien einer möglichen Kollision nur in den äußeren Bereichen von Abbildung 4.5. Da sich die Asteroidenbahn nicht in der Ebene der Planetenbahn befindet, sind Kollisionen prinzipiell nur im Bereich der Bahnknoten des Asteroiden möglich. Legt man die Referenzrichtung durch den aufsteigenden Bahnknoten des Asteroiden ($\Omega = 0^\circ$), so finden sich diese Punkte bei einer mittleren Länge λ' des Planeten von 0° und 180° . Da zwischen den mittleren Längen des Asteroiden und des

⁶Die Exzentrizität erhält dabei den minimalen Wert $e = 0$.

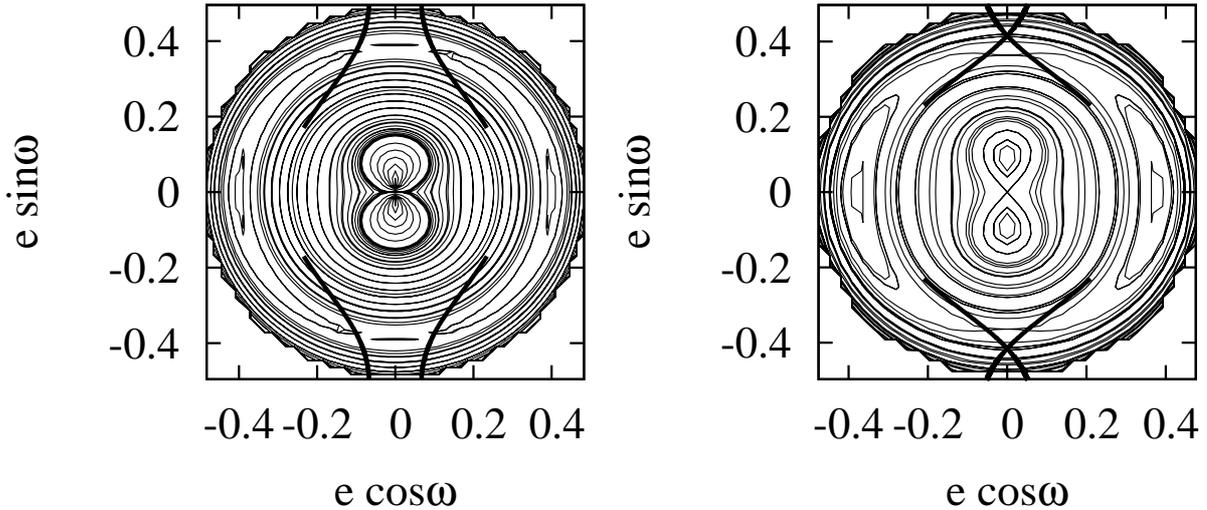


Abb. 4.5: Kozai-Resonanz innerhalb der 3:5- (links) und der 4:7-Bahnresonanz (rechts) mit $i_{\max} = 35^\circ$ und $A_\sigma = 15^\circ$. Die breiten Linien kennzeichnen die Stellen, an welchen eine Kollision mit dem Planeten möglich ist.

Planeten die Beziehung $q\sigma_{p+q:p} = (p+q)\lambda' - p\lambda - q\omega$ besteht, ergeben sich für ω zwei verschiedene Werte einer möglichen Kollision für eine bestimmte Exzentrizität

$$\omega_1 = -\frac{q\sigma_{p+q:p} + pl}{p+q} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \pi - \frac{q\sigma_{p+q:p} + pl}{p+q}, \quad (4.9)$$

wobei l die mittlere Anomalie des Asteroiden bezeichnet.

In Abbildung 4.5 ist zu sehen, dass es bei beiden Resonanzen für kleine Exzentrizitäten zu einer Libration von ω um 90° und 270° kommt. Für größere e zirkuliert ω , bis ab einer genügend großen Exzentrizität zwei neue Librationszentren, diesmal bei 0° und 180° auftreten. Die Lage dieser Librationszentren mit großen Amplituden des Winkels ω unterscheidet die Kozai-Resonanz im EKG von denen innerhalb einer Bahnresonanz im Asteroidenhauptgürtel. Für letztere zeigten Morbidelli und Moons (1993), dass ω um 90° und 270° libriert. Librationszentren für diese Werte sind für noch größere Exzentrizitäten auch im EKG zu finden, wie sie sich in Abbildung 4.5 für die 3:5-Bahnresonanz andeuten. Sie sind dabei aber auf ein sehr kleines Gebiet des Phasenraumes beschränkt und nur für sehr kleine Amplituden des Winkels ω möglich. Generell lässt sich feststellen, dass die Lage der Librationszentren der Kozai-Resonanz und die Amplituden, mit welchen ω libriert, sehr stark von der jeweiligen Bahnresonanz abhängen.

Eine weitere Besonderheit im EKG ist die Lage der Librationszentren innerhalb einer Bahnresonanz des Typs $1:r$ mit $r \geq 2$. Bei diesen ist die Lage des Librationszentrums des Resonanzwinkels $q\sigma_{1:r}$ abhängig von der Exzentrizität der Bahn und liegt im Allgemeinen nicht bei 180° .⁷ Diese Verschiebung der Librationszentren bewirkt, dass auch die Librationszentren der Kozai-Resonanz nicht mehr symmetrisch zu den Achsen $e \cos \omega = 0$ und $e \sin \omega = 0$ liegen, sondern gegen diese verschoben sind. Beispielhaft wurden die Isolinien der gemittelten Hamiltonschen Funktion für die Kozai-Resonanz innerhalb der

⁷Siehe Kapitel 2.2.1.

1:2-Bahnresonanz für $i_{\max} = 35^\circ$ in Abbildung 4.6 dargestellt. Die Librationszentren finden sich hier ungefähr bei $\omega = 144^\circ$ und $\omega = 324^\circ$, in Übereinstimmung mit Nesvorný und Roig (2001), welche diese Werte mit Hilfe eines einfachen analytischen Modelles ermittelten.

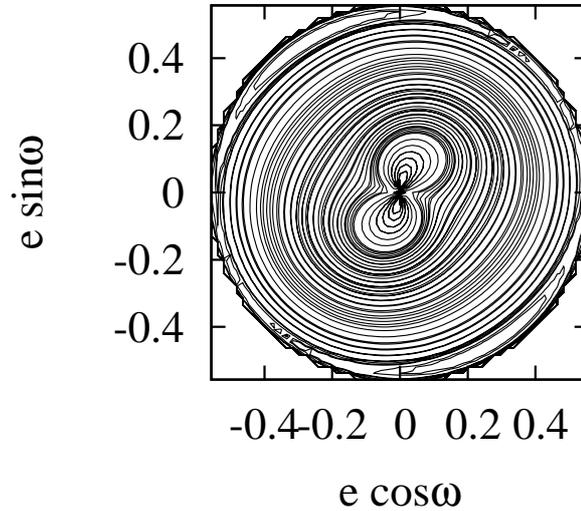


Abb. 4.6: Kozai-Resonanz innerhalb der 1:2-Bahnresonanz im EKG.

4.3 Das komplette N -Körper-Problem

4.3.1 Aufbau der Integrationen

Um neben den gravitativen Auswirkungen Neptuns auch noch die Einflüsse der anderen Planeten auf die Dynamik innerhalb bestimmter Resonanzgebiete des EKG zu untersuchen, wurden die in diesem Abschnitt beschriebenen Integrationen durchgeführt. Integriert wurden dabei die 4 großen Planeten: Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Da Pluto lediglich die Asteroiden in seiner direkten Umgebung der 2:3-Bahnresonanz stört (Nesvorný, Roig und Ferraz-Mello (2000)), sonst die Dynamik im EKG nicht weiter beeinflusst, wurde er nicht mitintegriert. Die Bahnelemente der Planeten zum Anfang der Integration (Tabelle 4.1) beziehen sich auf den 01.01.2000⁸, mit der mittleren Epoche des Bezugssystems J2000 und wurden den JPL Ephemeriden DE405 entnommen. Der Integrationszeitraum wurde auf 10^8 Jahre festgelegt, um auch die säkularen und gemischten Resonanzen in diesem Bereich mit Periodenlängen von einigen Millionen Jahren sicher bestimmen zu können.

Zusammen mit den Planeten wurden für jede Resonanz noch eine unterschiedliche Anzahl von Testkörpern integriert. Diese wurden als masselos betrachtet und unterlagen somit zwar den gravitativen Kräften der Planeten, beeinflussten sich aber weder gegenseitig, noch die Bahn der Planeten. Für die Integrationen wurden alle Körper als Punktmassen betrachtet.

Für die Berechnungen wurde in FORTRAN ein N -Körper Integrator geschrieben, welcher die Bewegungsgleichungen der Planeten und der Testkörper integrierte. Außerdem

⁸Julianisches Datum: 2451545.00.

Tabelle 4.1: Heliozentrische Bahnelemente der für die Integration verwendeten Planeten für den 01.01.2000 (auf 6 Nachkommastellen gerundete Werte).

Planet	a [AE]	e	i [°]	Ω [°]	ω [°]	M [°]
Jupiter	5.204336	4.878760e-2	1.304631	100.491109	275.069107	18.815631
Saturn	9.581930	5.563821e-2	2.484242	113.699521	335.865775	320.425500
Uranus	19.230134	4.439270e-2	0.772626	73.999934	96.592423	142.890811
Neptun	30.093976	1.120268e-2	1.770203	131.784318	267.308421	266.111880

wurden noch für jeden dieser Testkörper die Variationsgleichungen berechnet. Mit dem daraus abgeleiteten *MEGNO*-Indikator konnte der Lyapunov-Exponent γ_Y (siehe Gleichung (2.33)) jedes einzelnen Testkörpers und damit dessen Stabilität abgeschätzt werden. Für Testkörper, welche im Laufe der Integration einem der Planeten näher als 3 Hill-Radien kamen, wurde γ_Y für diesen Zeitpunkt angegeben und die weitere Berechnung der Variationsgleichungen für diesen Testkörper gestoppt. Der kleinste über den gewählten Integrationszeitraum von 10^8 Jahren ermittelbare Lyapunov-Exponent ist $\log_{10}(2/10^8) \approx -7.7$ (die Herleitung dieser Abschätzung findet sich in Kapitel 2.4.1).

Als Integrationsmethode wurde eine symplektische *SABA*-Routine⁹ benutzt. Um die Rechenzeit aufgrund der begrenzten zur Verfügung stehenden Ressourcen in Grenzen zu halten, wurde ein Verfahren 4.Ordnung (*SABA4*) gewählt. Gleichung (3.15) zur Berechnung einer optimalen Schrittweite ergibt für dieses Verfahren eine Schrittweite von wenigen Tagen, welche aber aufgrund der begrenzten Ressourcen realisierbar war.

Da primär eine Untersuchung qualitativer Aspekte der einzelnen Resonanzen im Vordergrund stand und nicht eine optimale Bahnberechnung, wurde die Schrittweite auf einem anderen Wege bestimmt. Dafür wurde die in Kapitel 2.3.3 gemachte Beobachtung benutzt, dass *ODEX* über kurze Zeitskalen sehr viel genauer integriert als ein symplektischer Algorithmus. Es wurden die 4 großen Planeten zusammen mit 100 Testkörpern über 10^4 Jahre zum einen mit *ODEX*, zum anderen mit *SABA4* und verschiedenen Schrittweiten integriert. Die anfängliche große Halbachse der Testkörper wurde dabei gleichmäßig im Bereich zwischen 42 und 44 AE verteilt, die anfängliche Exzentrizität wurde zu $e = 0.1$ gesetzt. Am Ende einer symplektischen Integration wurde für jede Schrittweite die Differenz zur *ODEX*-Endposition der Testkörper als Betrag des Vektors zwischen den jeweiligen kartesischen Koordinaten gebildet. Das Ergebnis dieser Berechnungen ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Die Positionsdifferenzen verkleinern sich mit kleiner werdenden Schrittweiten, wie zu erwarten ist. Ab einer Schrittweite von $h = 100$ Tagen führt eine weitere Verkleinerung der Schrittweite nur noch zu sehr geringen Verbesserungen. Diese Schrittweite wurde somit für alle nachfolgenden Integrationen benutzt. Sie entspricht rund 40 Schritten pro Umlauf für Jupiter und rund 600 pro Neptunperiode.

Alle Integrationen wurden auf der schon für Kapitel 3.2 verwendeten SGI[®] Origin3800 durchgeführt. Jede Berechnung wurde dabei linear auf jeweils einem Prozessor durchgeführt, wobei eine einzelne Integration im Folgenden immer die 4 Planeten und 101 Testkörper umfasste. Mit einer Taktrate von 400MHz dauerte eine solche Integration auf

⁹Eine detaillierte Beschreibung findet sich in Kapitel 2.3.2.

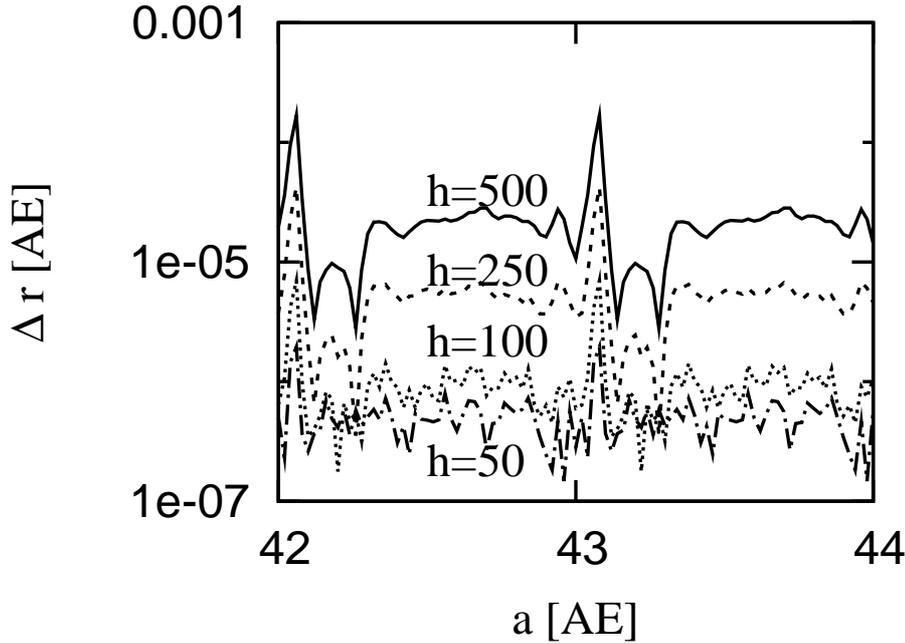


Abb. 4.7: Positionsdifferenz Δr für 100 Testkörper in Abhängigkeit von der anfänglichen großen Halbachse a . Die Testkörper wurden zusammen mit den 4 großen Planeten über einen Zeitraum von 10^4 Jahren mit einer symplektischen *SABA4*-Routine mit verschiedenen Schrittweiten h integriert. Die Schrittweiten sind dabei in der Einheit Tage angegeben. Am Ende der Integration wurde Δr als Differenz zu einer mit *ODEX* berechneten Referenzlösung bestimmt.

dem verwendeten Rechner rund 11 Tage. Um ausreichend Daten für eine Frequenzanalyse der Bahnelemente zu haben, wurden diese für die Testkörper aller 10 Umläufe gespeichert. Dies führte zu einem Speicherbedarf eines einzelnen Testkörpers von ungepackt rund 12MB inklusive der Werte des Chaosindikators. Insgesamt wurden rund 150GB an Rohdaten für die nachfolgenden Kapitel erzeugt. Für die Frequenzanalyse wurde das frei verfügbare Programm *FMFT* von David Nesvorný benutzt.¹⁰

4.3.2 Die 3:5-Bahnresonanz

Für die Untersuchung der 3:5-Bahnresonanz wurden insgesamt 4040 Testpartikel zusammen mit den 4 großen Planeten integriert. Die Berechnungen können dabei in zwei voneinander verschiedene Simulationen unterteilt werden. In der ersten Simulation wurde die Stabilität der Testkörper niedriger Inklination in Abhängigkeit von ihrer anfänglichen großen Halbachse a_0 und ihrer Exzentrizität e_0 untersucht. Die Anfangsbedingungen dieser Testkörper wurden so gewählt, dass in der Ebene der Anfangsbedingungen (a_0, e_0) für jeden Wert der Exzentrizität $0.05 \leq e_0 \leq 0.40$ ($\Delta e_0 = 0.0175$) die großen Halbachsen a_0 der Testkörper gleichmäßig im Intervall $a_0 = 42.1$ bis 42.8 AE ($\Delta a_0 = 0.007$ AE) verteilt wurden. Die Inklination sämtlicher Partikel wurde zu Null gesetzt, die Längen der Bahnknoten sowie die Argumente der Perihelie wurden hingegen gleich denen Neptuns gesetzt: $\Omega = \Omega_N$ und $\omega = \omega_N$. Die mittlere Anomalie M eines jeden Testkörpers wurde so gewählt, dass sich ein Resonanzwinkel $2\sigma_{3:5} = 180^\circ$ (d. h. $\sigma_{3:5} = 90^\circ$ bzw. 270°) ergab.

¹⁰Quelle: <http://www.boulder.swri.edu/~davidn/fmft/fmft.html>.

Mit der ersten Simulation wurde das a_0 der Testkörper, welche sich in der exakten 3:5-Bahnresonanz befinden, bestimmt. Für die zweite große Simulation wurde dann mit diesem $a_0 = 42.4$ AE die Stabilität der Testkörper in Abhängigkeit von e_0 und ihrer anfänglichen Inklination i_0 innerhalb der Resonanz berechnet. Die Anfangsbedingungen wurden dabei so gewählt, dass in der (e_0, i_0) Ebene für jeden Exzentrizitätswert $0.05 \leq e_0 \leq 0.40$ ($\Delta e = 0.0175$) die Inklinationen der Testkörper gleichmäßig im Intervall $i_0 = 5^\circ$ bis 30.0° ($\Delta i_0 \approx 0.035^\circ$) verteilt wurden. Die Länge der Bahnknoten sowie die Argumente der Perihelie wurden wie in der ersten Simulation gleich denen Neptuns gesetzt: $\Omega = \Omega_N$ und $\omega = \omega_N$. Die mittlere Anomalie M eines jeden Testkörpers wurde wieder so gewählt, dass sich ein Resonanzwinkel $2\sigma_{3:5} = 180^\circ$ ergab.

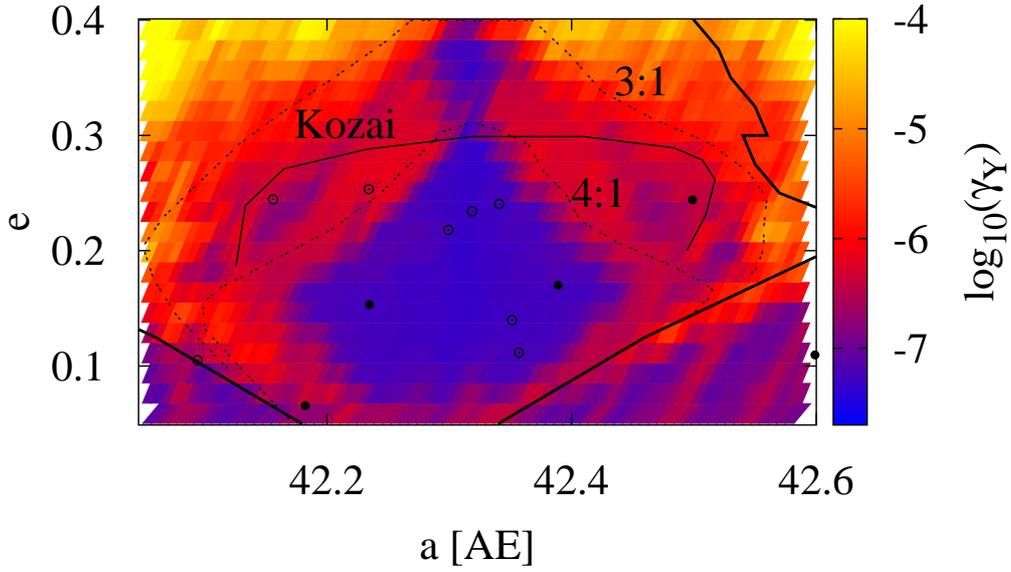
Die 3:5-Bahnresonanz für Körper niedriger Inklination

Die Ergebnisse der ersten Simulation sind farbkodiert in Abbildung 4.8(a) dargestellt und zeigen die Stabilität der Bahnen der Testkörper, ausgedrückt mittels Lyapunov-Exponenten γ_Y , in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Die Farbgebung wurde so gewählt, dass der kleinste über diesen Integrationszeitraum ermittelbare Lyapunov-Exponent $\log_{10}(2/10^8) \approx -7.7$ blau, die am stärksten irregulären Bahnen gelb dargestellt sind.

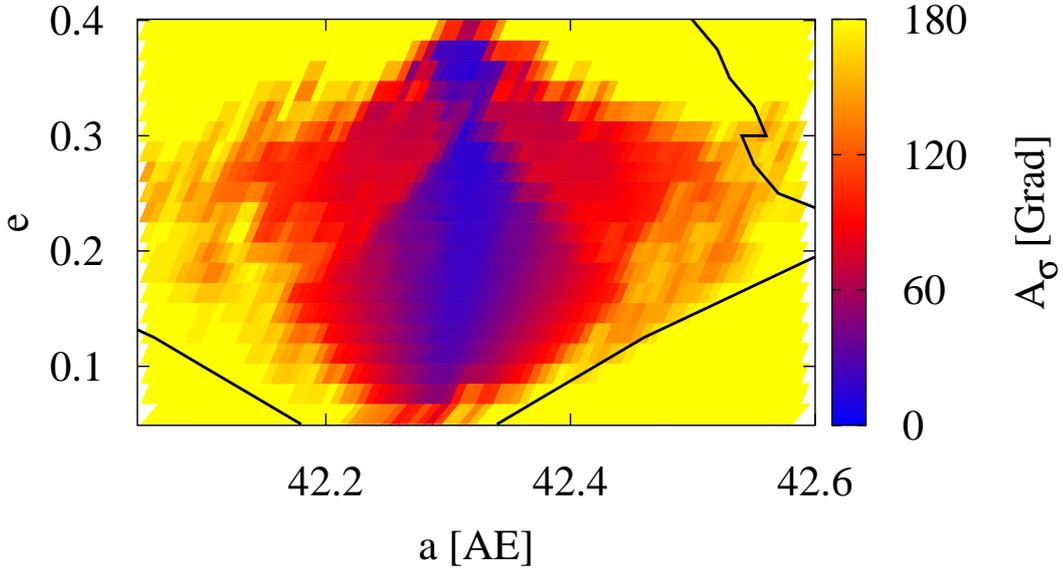
In Abbildung 4.8(b) sind die maximalen Amplituden A_σ des Resonanzwinkels $2\sigma_{3:5}$ während des Integrationszeitraumes aufgetragen. Testkörper, welche während der gesamten Integrationszeit in der Resonanz verblieben, zeigen eine Libration um $2\sigma_{3:5} = 180^\circ$, wobei die stabilsten Körper mit einer Amplitude von fast 0° blau dargestellt wurden. Die maximale Amplitude, welche noch eine stabile Libration ermöglicht, liegt bei ungefähr 120° . Testkörper mit einer anfänglich größeren Amplitude verließen im Laufe der Integration die Resonanz und zeigten dann die mit gelb dargestellte Zirkulation des Resonanzwinkels. Hier zeigt sich deutlich der Unterschied zu den vereinfachenden Annahmen von Kapitel 4.1, in welchem die maximale Amplitude noch rund 160 Grad betrug (Abbildung 4.4).

Die oskulierenden großen Halbachsen der Testkörper schwanken aufgrund von kurzperiodischen, vor allem durch Jupiter hervorgerufenen, Störungen mit einer Periode von rund 12 Jahren und einer Amplitude von 0.3 bis 0.4 AE um ihren mittleren Wert. Damit die Körper mit der kleinsten Amplitude des Resonanzwinkels in den Abbildungen in der Nähe des wahren Librationszentrums bei $a = 42.29$ AE liegen, wurden diese um einen Wert Δa korrigiert. Dafür wurde für verschiedene Werte der Exzentrizität die gemittelte resonante große Halbachse berechnet, um diesen Korrekturwert zu erhalten. Es zeigte sich, dass sich Δa in Abhängigkeit von der Exzentrizität änderte. Daher wurde dessen Wert linear zwischen -0.22 AE für $e = 0$ und -0.10 AE für $e = 0.3$ interpoliert. Dies ist der Grund für die leicht schräge Gitterstruktur in Abbildung 4.8(b). Die Amplituden der Schwankungen in den Exzentrizitäten und Inklinationen waren so gering, dass diese nicht korrigiert wurden.

Zusätzlich wurden in Abbildung 4.8(a) noch weitere Linien eingetragen, um andere sich in diesem Gebiet befindliche Resonanzen anzuzeigen. Der ganze Bereich der Resonanz wird begrenzt durch die Separatrix, welche aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem abgeleitet wurde und als breite Linie dargestellt ist. Weiterhin befinden sich Uranus und Neptun fast in einer 1:2-Bahnresonanz. Mit den Umlaufperioden P der beiden Körper ($P_U \approx 84.01$ und $P_N \approx 164.79$ Jahre) lässt sich abschätzen, dass sie nach einem Zeitraum



(a) Der aus *MEGNO* abgeleitete Lyapunov-Exponent γ_Y in der Einheit $\log_{10}(1/\text{Jahre})$.



(b) Die maximale Amplitude A_σ des Resonanzwinkels $2\sigma_{3:5} = -3\lambda' + 5\lambda - 2\varpi$.

Abb. 4.8: Der Lyapunov-Exponent und die Amplitude des Resonanzwinkels für Testkörper in der 3:5-Bahnresonanz für Körper niedriger Inklination. Die anfängliche große Halbachse der Testkörper wurde dabei um einen Wert Δa (abhängig von e_0) korrigiert, um der Differenz zwischen oskulierenden und mittleren Bahnelementen Rechnung zu tragen. Die aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem (Kapitel 4.1) abgeleitete Separatrix ist mit einer breiten Linie angedeutet. Weiterhin wurden in Abbildung (a) die Kozai-Resonanz und die beiden 3-Körper-Resonanzen (3:1, 4:1) mit Uranus und Neptun dargestellt. Die Punkte markieren die mittleren Elemente beobachteter Asteroiden, wobei gefüllte Punkte eine Inklination $i < 5^\circ$, ungefüllte $i > 5^\circ$ anzeigen.

von $P_U P_N / (P_N - 2P_U) \approx 4280$ Jahren wieder die gleiche Stellung zueinander einnehmen. Untersucht man die Bewegung dieser beiden Planeten mittels Frequenzanalyse, so ergibt sich ein genauerer Wert von 4130 Jahren, welcher auch bei den folgenden Rechnungen verwendet wurde. An bestimmten Stellen innerhalb der 3:5-Bahnresonanz beträgt die Periode des Resonanzwinkels $\sigma_{3:5}$ ein Vielfaches von diesen 4130 Jahren. Diese Stellen werden im Folgenden als 3-Körper-Resonanzen bezeichnet, wobei für die Benennung einer konkreten Resonanz jeweils nur das Verhältnis zwischen den Perioden der beiden Bahnresonanzen angegeben wird. Innerhalb der 3:5-Bahnresonanz finden sich die 3:1- und die 4:1-3-Körper-Resonanz, welche mit dünneren gestrichelten Linien kenntlich gemacht wurden. Die Frequenz des Resonanzwinkels f_σ wurde dabei mittels Frequenzanalyse bestimmt. Aufgrund der vielen ähnlichen Frequenzen im Spektrum von $a \exp i\sigma_{3:5}$ (mit $i^2 = -1$) ist die Bestimmung dieser Frequenz nicht trivial (siehe Nesvorný und Ferraz-Mello (1997)) und wurde daher so gewählt, dass die Frequenz möglichst nahe an der aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem ermittelten Periode liegt.

Weiterhin wurden innerhalb der 3:5-Bahnresonanz noch Bereiche gefunden, in denen das Argument des Perihels der Asteroidenbahn ω für eine bestimmte Zeit libriert. Gleichzeitig zu dieser Libration zeigte sich eine periodische Änderung in e und i , weshalb diese Stellen als Kozai-Resonanz identifiziert wurden. Die entsprechenden Gebiete wurden mit einer dünnen durchgezogenen Linie gekennzeichnet. Es zeigte sich, dass diese Resonanz erst auftrat, nachdem die Inklination, z. B. durch nahe Begegnungen mit Neptun, auf Werte größer als 5 Grad angewachsen war. Auch konnte die Kozai-Resonanz nur für Körper mit einer anfänglichen Exzentrizität $e > 0.2$ festgestellt werden. Es wurden keine Testkörper gefunden, welche permanent in der Kozai-Resonanz verblieben. Die Position der Kozai-Resonanz wurde mit Hilfe der Frequenzanalyse als $f_\varpi(a, e) - f_\Omega(a, e) = 0$ numerisch berechnet. $f_\varpi(a, e)$ und $f_\Omega(a, e)$ sind dabei die stärksten Frequenzen in den Spektren von $e \exp i\varpi$ und $i \exp i\Omega$.

In Abbildung 4.8(a) sieht man, dass die innersten Bereiche der Resonanz die stabilsten sind, mit einer Lyapunov-Zeit, welche größer als der hier untersuchte Integrationszeitraum ist. In diesem Bereich findet sich auch der Großteil der bisher im Gebiet der 3:5-Bahnresonanz beobachteten Asteroiden. Er wird begrenzt durch die 4:1-3-Körper-Resonanz zwischen dem Testpartikel, Uranus und Neptun. Deutlich sieht man, wie der Lyapunov-Exponent dadurch größer wird, die Bahnen also destabilisiert werden - im Mittel liegt γ_Y nun bei 10^{-6} . Für $e \approx 0.3$ ist das Resonanzgebiet der 3:5-Bahnresonanz so weit geschrumpft, dass sich fast keiner der Testkörper mehr in Resonanz befindet. Der Grund ist zum einen die 4:1-3-Körper-Resonanz. Zum anderen haben Körper mit dieser Exzentrizität nun einen Perihelabstand von ungefähr 30 AE, schneiden also die Neptunbahn. Dies erklärt, weshalb nur noch die Testkörper, welche sich tief in der Resonanz befinden, vor zu nahen Begegnungen mit Neptun geschützt sind. In Abbildung 4.8(b) entspricht dies den Körpern mit einer Amplitude des Resonanzwinkels von 0 Grad.

Nach außen wird die 3:5-Bahnresonanz ungefähr durch die 3:1-3-Körper-Resonanz begrenzt. Da diese als Resonanz 2. Ordnung etwas stärker ist als die 4:1-3-Körper-Resonanz, liegt das mittlere Niveau des Lyapunov-Exponenten bei ihr erwartungsgemäß noch höher: bei ungefähr $\gamma_Y = 10^{-5.5}$. Sie begrenzt die Resonanz nach oben hin bei schätzungsweise $e = 0.42$. Dadurch, dass die anfängliche Exzentrizität dieser Untersuchung maximal 0.4 betrug, wurde dieser Wert lediglich visuell abgeschätzt. Außerhalb der 3:1-3-Körper-Resonanz zirkuliert der Resonanzwinkel (Abbildung 4.8(b)).

Zwischen der 4:1- und der 3:1-3-Körper-Resonanz bei $a \approx 42.3$ AE liegt noch ein kleines Gebiet stabiler Anfangsbedingungen. Trotz der hohen Exzentrizität, welche dazu führt, dass die Bahnen dieser Körper innerhalb der Neptunbahn verlaufen, bewirken die resonanten Schutzmechanismen der 3:5-Bahnresonanz hier offensichtlich eine Stabilisierung. Eine langfristig stabile Bahn ist in diesem Bereich nur für kleine Amplituden des Resonanzwinkels möglich, wie dies auch in Abbildung 4.8(b) zu sehen ist. Als Beispiel wurde die zeitliche Entwicklung einiger Bahnelemente und des Resonanzwinkels eines Testkörpers in diesem Gebiet in Abbildung 4.9 dargestellt.

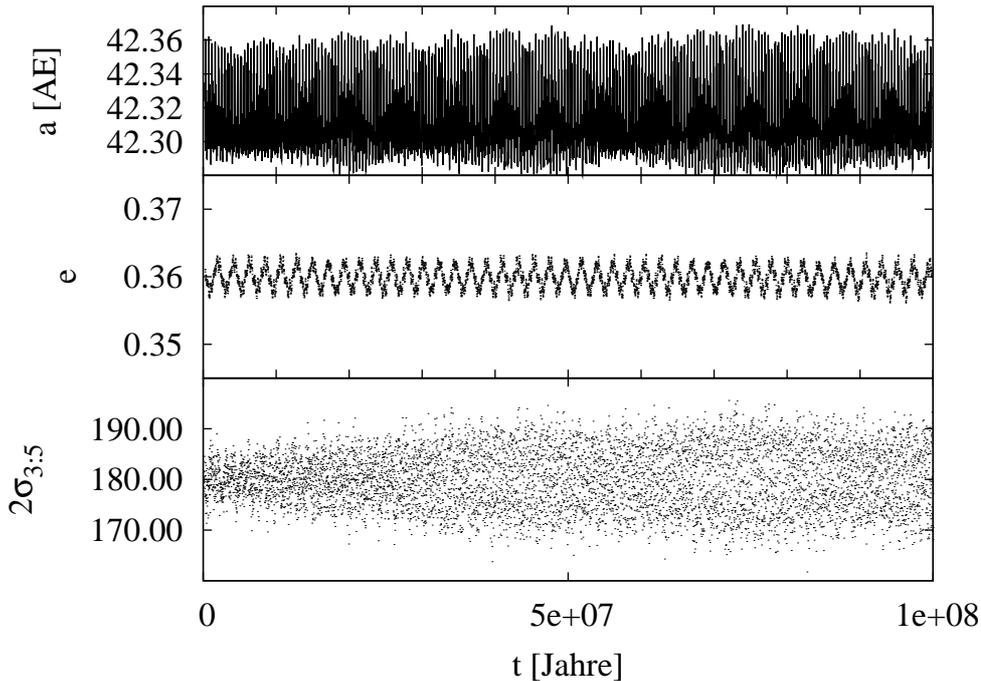


Abb. 4.9: Der zeitliche Verlauf der großen Halbachse a , der Exzentrizität e und des Resonanzwinkels für einen Testkörper innerhalb der 3:5-Bahnresonanz mit Neptun, dessen Perihel innerhalb der Neptunbahn liegt. $\sigma_{3:5}$ ist in der Einheit Dezimalgrad angegeben.

Reale Asteroiden wurden in diesem Gebiet noch nicht gefunden. Da der sonnenfernste Punkt ihrer Bahn bei fast 60 AE liegt, sind Beobachtungen jedoch lediglich während ihres Periheldurchganges wahrscheinlich, so dass es nicht unwahrscheinlich ist, solche in Zukunft noch zu entdecken.

Gut sichtbar wird auch im Bereich kleiner Exzentrizitäten (bis $e = 0.2$) die Trennung zwischen dem Resonanzgebiet der 3:5-Bahnresonanz und den Anfangsbedingungen, welche außerhalb dieser Resonanz liegen. Letztgenannte sind allein durch ihre annähernd kreisförmige Bahn vor zu nahen Begegnungen mit Neptun geschützt. Daher kommen sie diesem näher als die Körper innerhalb der Resonanz und weisen aus diesem Grunde auch ein gegenüber dem Hintergrundniveau von $10^{-7.7}$ leicht erhöhtes γ_Y von 10^{-7} auf.

Die 3:5-Bahnresonanz für Körper hoher Inklination

Die Ergebnisse der zweiten großen Simulation für Testkörper innerhalb der 3:5-Bahnresonanz sind farbkodiert in Abbildung 4.10 in der Ebene der Anfangsbedingungen (e_0, i_0)

dargestellt. Zur Beschreibung der Stabilität wurde auch hier γ_Y benutzt, wobei die Farbgebung identisch mit Abbildung 4.8(a) ist.

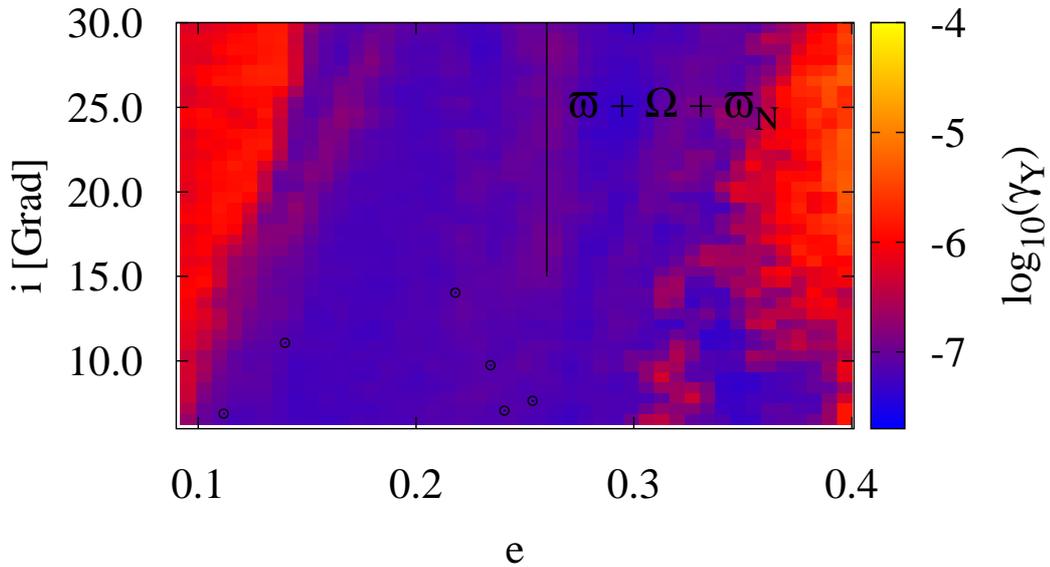


Abb. 4.10: Der Lyapunov-Exponent in der Einheit $\log_{10}(1/\text{Jahre})$ für Testkörper innerhalb der 3:5-Bahnresonanz in Abhängigkeit von der anfänglichen Exzentrizität und Inklination. Gekennzeichnet wurde außerdem noch die säkulare Resonanz des Winkels $\varpi + \Omega + \varpi_N$ mit Neptun. Die Punkte markieren bekannte EKG-Objekte innerhalb der 3:5-Bahnresonanz mit einer Inklination $i > 5^\circ$.

Bei der Betrachtung dieser Abbildung lassen sich zwei markante Gebiete geringerer Stabilität ausmachen. Das eine befindet sich im Bereich kleiner Exzentrizitäten und zeigt sehr homogen ein γ_Y von ungefähr 10^{-6} . Für anfängliche Inklinationen von rund 10° liegt es bei $e_0 = 0.1$ und verbreitert sich auf $e_0 = 0.15$ für $i_0 = 30^\circ$. Das zweite Gebiet befindet sich am rechten Rand der Abbildung. Hier liegt γ_Y im Mittel bei $10^{-5.5}$.

Beide Strukturen werden durch die Kozai-Resonanz hervorgerufen. Die Mechanismen sind in beiden Fällen zwar ähnlich, führen aber zu sehr unterschiedlichen Entwicklungen der Bahnelemente innerhalb der linken Struktur am Beispiel eines Testkörpers mit $e_0 = 0.1$ und $i_0 = 23.75^\circ$ ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

Deutlich sind die Merkmale einer Kozai-Resonanz zu erkennen. Während ω im ersten Drittel des Integrationszeitraumes um 0° libriert, wächst die Exzentrizität stark an, um im Mittel dann einen Wert von 0.25 zu erreichen. Die Inklination vermindert sich und schwankt dann periodisch und gegenläufig zu e um einen mittleren Wert von rund 20° . Nach einer kurzen Phase der Zirkulation des Winkels ω libriert dieser anschließend um 90° . Der Mittelwert der Exzentrizität sinkt gleichzeitig leicht ab. Sehr gut zu sehen ist, dass der Resonanzwinkel $\sigma_{3:5}$ nun immer dann zu zirkulieren beginnt, wenn e ein Minimum erreicht. Das sich daran anschließende periodische Anwachsen der Exzentrizität aufgrund der Kozai-Resonanz bringt den Testkörper immer wieder zurück in die 3:5-Bahnresonanz mit Neptun. Im letzten Drittel der Integration libriert ω erneut - diesmal um $\omega = 180^\circ$. Der Testkörper befindet sich nun wieder permanent in der 3:5-Bahnresonanz, wobei der Resonanzwinkel mit einer Amplitude A_σ von rund 80° libriert.

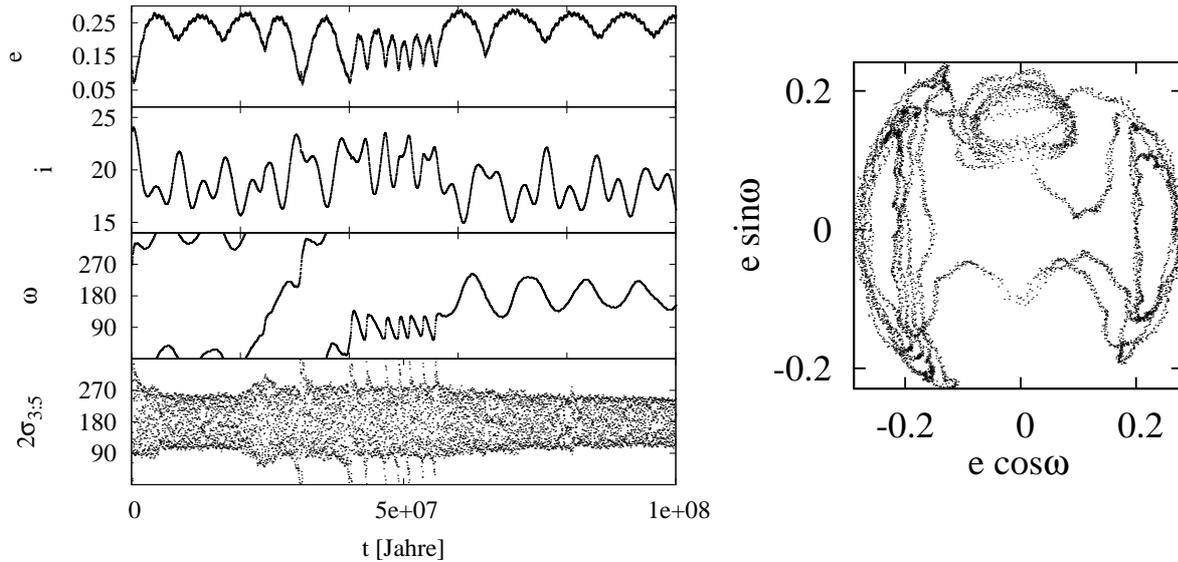


Abb. 4.11: Testkörper mit $e_0 = 0.1$ und $i_0 = 23.75^\circ$ innerhalb der 3:5-Bahnresonanz und der Kozai-Resonanz. Auf der linken Seite wurde die zeitliche Entwicklung einiger Bahnelemente und des Resonanzwinkels $\sigma_{3:5}$ abgebildet. Um besser mit Abbildung 4.5 vergleichen zu können, wurde auf der rechten Seite die zeitliche Entwicklung von e und ω des Testkörpers in den Achsen $e \cos \omega$ und $e \sin \omega$ dargestellt. Alle Winkel wurden in der Einheit Dezimalgrad angegeben.

Um das Verhalten des Testkörpers leichter mit den Isolinien des in Kapitel 4.2 (vgl. Abbildung 4.5) entwickelten Modells vergleichen zu können, wurde auf der rechten Seite von Abbildung 4.11 noch die zeitliche Entwicklung von e und ω in den Achsen $e \cos \omega$ und $e \sin \omega$ dargestellt. Sehr deutlich sind die einzelnen Librationszentren bei $\omega = 0^\circ, 90^\circ$ und 180° zu unterscheiden. Auch die unterschiedliche Form der Isolinien -eher rund für $\omega = 90^\circ$ und langgezogen mit einer größeren Amplitude von ω bei den beiden anderen Librationszentren- lässt sich gut erkennen. Im Vergleich zu Kapitel 4.2 sind die einzelnen Librationszentren leicht verschoben. Während sie sich für $\omega = 90^\circ$ nun um $e \approx 0.15$ finden, treten sie für $\omega = 0^\circ$ und 180° nun schon ab einer Exzentrizität von $e \approx 0.22$ auf. Der Grund für diese Differenzen zu Abbildung 4.5 ist zum einen, dass sich Neptun nicht auf einer Kreisbahn, sondern auf einer leicht exzentrischen Bahn bewegt. Zum anderen unterliegt die Neptunbahn säkularen Änderungen aufgrund der Störungen der anderen Planeten, was in Kapitel 4.2 ebenfalls nicht berücksichtigt wurde.

Auch die Struktur auf der rechten Seite von Abbildung 4.10 wird durch die Kozai-Resonanz bewirkt. Hier libriert der Winkel ω ebenfalls anfänglich um 0° . Aufgrund der schon anfänglich hohen Exzentrizitäten liegt das Perihel, welches sich in der Ebene der Ekliptik befindet, weit innerhalb der Neptunbahn. Wiederholte nahe Begegnungen mit Neptun führen hier meist nach kurzer Zeit dazu, dass die Testkörper den Bereich der 3:5-Bahnresonanz verlassen. Die weitere Entwicklung dieser Körper ist sehr unterschiedlich, im allgemeinen sind die Bahnen aber instabil.

Zwischen den beiden beschriebenen markanten Strukturen findet sich in Abbildung 4.10 noch eine Struktur verminderter Stabilität. Durch Frequenzanalyse der betreffenden Winkel konnte diese als säkulare Resonanz mit Neptun identifiziert werden. Es zeigt sich, dass in diesem Bereich der Winkel $\varpi + \Omega + \varpi_N$ sehr langsam zirkuliert und für einige der

Testkörper über einen gewissen Zeitraum sogar um 0° libriert.

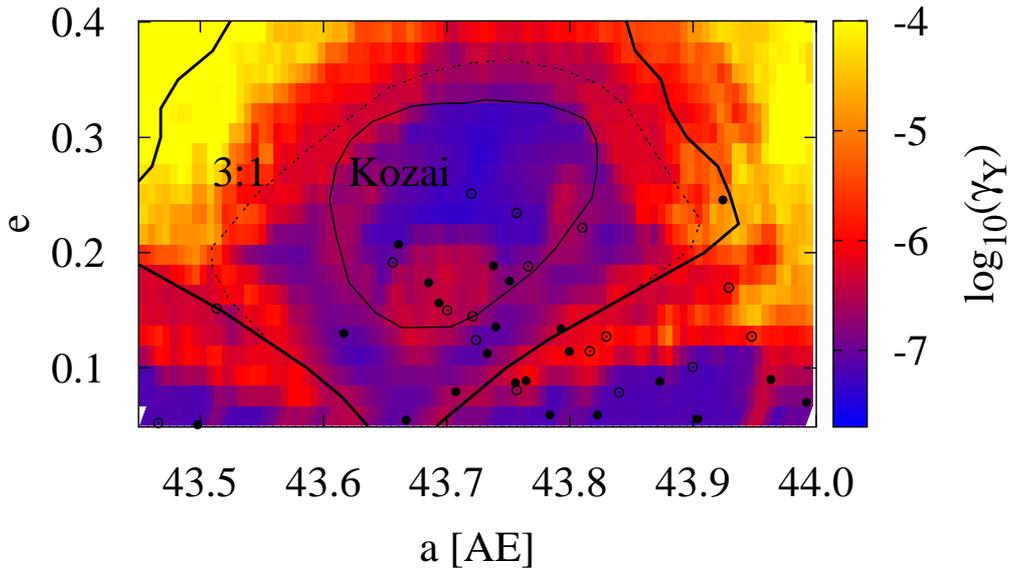
4.3.3 Die 4:7-Bahnresonanz

Zur Untersuchung der 4:7-Bahnresonanz wurden insgesamt 2020 Testpartikel zusammen mit den 4 großen Planeten über einen Zeitraum von 10^8 Jahren integriert. Da die Dynamik innerhalb der 4:7-Bahnresonanz für hohe Inklinationen schon in Lykawka und Mukai (2005) diskutiert wurde, konzentrierten sich diese Berechnungen auf die Dynamik von Körpern mit einer anfänglichen Bahnneigung von $i_0 = 0^\circ$. Die Anfangsbedingungen der Testkörper bildeten dabei ein regelmäßiges Gitter in der (a_0, e_0) Ebene, wobei die großen Halbachsen a_0 zwischen 43.8 und 44.4 AE ($\Delta a_0 = 0.006$ AE) und die Exzentrizitäten zwischen $0.05 \leq e_0 \leq 0.40$ ($\Delta e_0 = 0.0175$) variiert wurden. Das Argument des Perihels ω sowie der Winkel des Bahnknotens Ω der Asteroidenbahn wurden gleich den entsprechenden Winkeln Neptuns gewählt. Die mittlere Anomalie wurde so berechnet, dass der Resonanzwinkel zu Beginn der Integration $3\sigma_{4:7} = 180^\circ$ betrug.

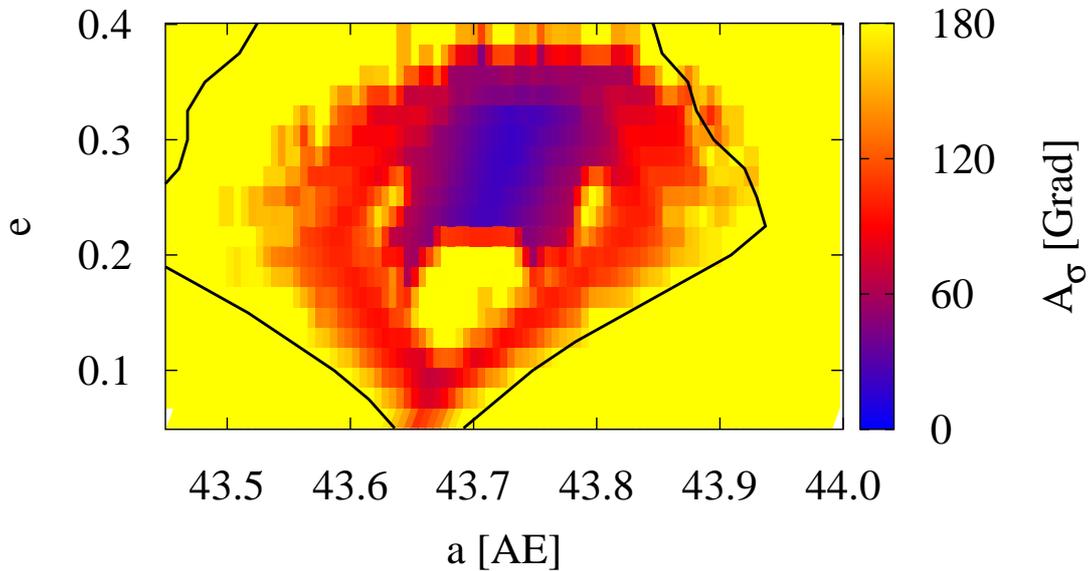
Aus den Ergebnissen der Integration lässt sich die Stabilität der einzelnen Anfangsbedingungen mit Hilfe des Lyapunov-Exponenten abschätzen, welcher farbkodiert in Abbildung 4.12(a) in der (a_0, e_0) Ebene dargestellt wurde. Die Farbgebung ist identisch mit der von Abbildung 4.8(a): blau entspricht den stabilsten, gelb den instabilsten Bereichen. Auch hier wurde, wie für die 3:5-Bahnresonanz, um den Unterschied zwischen den mittleren und oskulierenden Elementen der Testkörper korrigiert. Da sich Δa aufgrund der größeren Entfernung zu Neptun nahezu unabhängig von e zeigte, wurde für alle Exzentrizitäten ein einheitlicher Wert von $\Delta a = -0.355$ AE gewählt.

In Abbildung 4.12(b) findet sich die maximale, während der Integration erreichte Amplitude des Resonanzwinkels $\sigma_{4:7}$. Hier entspricht blau einer Amplitude von 0° , während gelb die Zirkulation des Winkels repräsentiert. Die maximale Amplitude, für welche $\sigma_{4:7}$ noch eine Libration zeigt, liegt bei rund 100° - die maximale Amplitude im eingeschränkten 3-Körper-Problem betrug zum Vergleich rund 30 Grad mehr. Aufgrund der stark kontrastierenden Farbwahl tritt hier noch deutlicher als in Abbildung 4.12(a) die sehr markante Struktur dieser Resonanz zwischen $43.65 \leq a \leq 43.75$ AE und für $e \leq 0.2$ hervor. Offensichtlich sind die Anfangsbedingungen in diesem Bereich, in welchem eigentlich das Zentrum der Resonanz mit sehr stabilen Bewegungen und kleinen Amplituden des Resonanzwinkels zu finden sein sollte, weniger stabil als Anfangsbedingungen, welche sich etwas außerhalb dieses Bereiches aber noch innerhalb der 4:7-Bahnresonanz befinden. Aus Abbildung 4.12(b) wird ebenfalls deutlich, dass für dieses Gebiet, zumindest für einen Teil des Integrationszeitraumes, der Resonanzwinkel zirkuliert.

Um die unterschiedlichen Stabilitäten in Abbildung 4.12(a) erklären zu können, wurden mit Hilfe der Frequenzanalyse die Frequenzen f_ϖ , f_Ω und $f_{\sigma_{4:7}}$, wie schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben, bestimmt. Der Bereich, für welchen $f_\varpi = f_\Omega$ gilt, konnte als Kozai-Resonanz identifiziert werden und wurde entsprechend beschriftet und als durchgezogene dünne Linie gekennzeichnet. Eine 3-Körper-Resonanz zwischen dem Resonanzwinkel $\sigma_{4:7}$ und der Periode der mittleren Längen $\lambda_U - 2\lambda_N$ von Uranus und Neptun konnte gefunden werden. Die 3:1-3-Körper-Resonanz umschließt die stabilen Gebiete der 4:7-Bahnresonanz mit einer Lyapunov-Zeit $T_L > 10^6$ Jahre. Zur Orientierung wurde die mit Hilfe des eingeschränkten 3-Körper-Problems bestimmte Resonanzbreite als breitere Linie zusätzlich noch eingefügt. Sehr deutlich markiert sie die Trennung im Bereich der kleinen Exzentrizitäten ($e < 0.2$) zwischen den stabilen Bereichen innerhalb



(a) Der aus *MEGNO* abgeleitete Lyapunov-Exponent γ_Y in der Einheit $\log_{10}(1/\text{Jahre})$.



(b) Die maximale Amplitude A_σ des Resonanzwinkels $3\sigma_{4:7} = -4\lambda' + 7\lambda - 3\varpi$.

Abb. 4.12: Der Lyapunov-Exponent und die Amplitude des Resonanzwinkels für Testkörper in der 4:7-Bahnresonanz mit niedriger Inklination. Die anfängliche große Halbachse der Testkörper wurde dabei um einen Wert $\Delta a = -0.355$ AE (unabhängig von e_0) korrigiert, um der Differenz zwischen oskulierenden und mittleren Bahnelementen Rechnung zu tragen. Die aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem (Kapitel 4.1) abgeleitete Separatrix ist mit einer breiten Linie angedeutet. Weiterhin wurden in Abbildung (a) die Kozai-Resonanz und die 3:1-3-Körper-Resonanzen mit Uranus und Neptun dargestellt. Die Punkte markieren die mittleren Elemente beobachteter Asteroiden, wobei gefüllte Punkte eine Inklination $i < 5^\circ$, ungefüllte $i > 5^\circ$ anzeigen.

der 4:7-Bahnresonanz und denen außerhalb.

Die Integrationen ergaben, dass γ_Y lediglich für das Gebiet zwischen 43.63 und 43.76 AE und $0.22 \leq e \leq 0.32$ nicht gegen einen endlichen Wert innerhalb des Integrationszeitraumes konvergierte. Es fällt auf, dass dieser Bereich sehr hoher Stabilität vollständig von der Kozai-Resonanz umschlossen ist. Die Testpartikel, deren Anfangsbedingungen in diesem Gebiet liegen, besitzen aufgrund der hohen Exzentrizität einen Perihelabstand zwischen 30 und 35 AE. Sie sind daher allein durch die Resonanz vor zu starken Störungen Neptuns geschützt.

Deutlich lassen sich die Bereiche verminderter Stabilität der Kozai-Resonanz und der 3-Körper-Resonanz zuordnen, wie dies schon für die 3:5-Bahnresonanz im vorangegangenen Kapitel getan wurde. Sehr interessant ist der Bereich im Zentrum der 4:7-Bahnresonanz mit anfänglichen Exzentrizitäten $e_0 < 0.2$. Hier zeigt der Lyapunov-Exponent eine geringere Stabilität, ganz entgegen dem generellen Trend, dass gerade die inneren Bereiche die größte Stabilität und die geringste Libration des Resonanzwinkels aufweisen. Um die Änderungen der Bahnelemente der Körper in diesem Bereich besser untersuchen und verstehen zu können, wurden numerisch die Eigenelemente¹¹ nach der Methode von Morbidelli und Nesvorný (1999) berechnet. Die Berechnung erfolgt dabei analog zu Gleichung (4.7) - lediglich der Zeitraum, über welchen gemittelt wird, wurde verlängert. Dies ist notwendig, um alle quasi-periodischen Änderungen in den oskulierenden Elementen herauszumitteln. Körper auf stabilen Bahnen zeigen zeitlich konstante Eigenelemente, während sich Instabilität in einer zeitlichen Entwicklung der Eigenelemente äußert, welche auch als *chaotische Diffusion* bezeichnet wird. Für die numerische Mittelung wurde der Integrationszeitraum in 10 Teilintervalle unterteilt - die Differenz zwischen der mittleren Exzentrizität e_m eines Teilintervalles (gemittelt über eine Zeitspanne von 10^7 Jahren) und der anfänglichen Exzentrizität e_0 findet sich in Abbildung 4.13.

Man erkennt, dass sich in dem Bereich, welcher mit Hilfe von Abbildung 4.12 als sehr stabil identifiziert werden konnte, die Exzentrizität im Laufe der Zeit kaum ändert. Im Bereich $e_0 < 0.2$, für welchen eine verminderte Stabilität gefunden wurde, scheint die mittlere Exzentrizität hingegen stark zu sinken - die Bahnen werden nahezu kreisförmig. Dieses ungewöhnliche Verhalten im Zentrum dieser Bahnresonanz wurde schon von Lykawka und Mukai (2005) beobachtet. Diese Autoren zeigten ebenfalls, dass dieser Trend sich auch bei längeren Integrationszeiträumen¹² fortsetzt, führten aber keine Begründung für diese Beobachtung an.

Im Rahmen dieser Arbeit konnten die Ursachen dieses Verhaltens geklärt werden. Eine Untersuchung der beteiligten Frequenzen legt nahe, dass der Grund ein Zusammenspiel verschiedener Resonanzen ist. Einige grundlegende Zusammenhänge sollen beispielhaft anhand eines Testkörpers mit anfänglichem $a_0 = 44.064$ AE und $e_0 = 0.1725$ beschrieben werden. Der Verlauf einzelner Bahnelemente und Resonanzwinkel dieses Testkörpers ist in Abbildung 4.14 dargestellt. Zur besseren Erkennbarkeit wurden in der Darstellung alle kurzperiodischen Schwankungen mit einer Periode kleiner als 1000 Jahre herausgefiltert.

Es lässt sich feststellen, dass die Exzentrizität des Körpers nicht dauerhaft sinkt, sondern für gewisse Zeiträume auch wieder auf ihr Anfangsniveau anwachsen kann. Während dieser Zeiten libriert der Resonanzwinkel $3\sigma_{4:7}$ um 180° , während er die restliche Zeit retrograd zirkuliert. Weiterhin lässt sich eine säkulare Resonanz zwischen dem Testkörper

¹¹Englisch: *proper elements*.

¹²Die Integrationen von Lykawka und Mukai (2005) umfassten eine Zeitspanne bis zu $4.5 \cdot 10^9$ Jahren

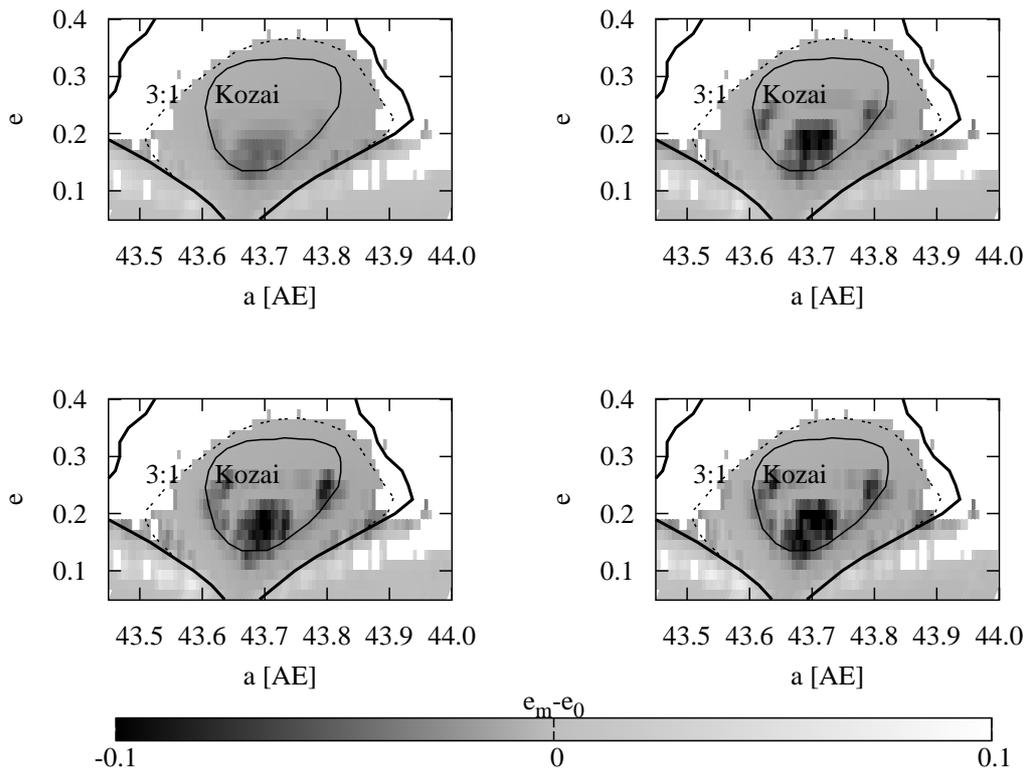


Abb. 4.13: Differenz zwischen der mittleren Exzentrizität e_m eines Teilintervalles und der anfänglichen Exzentrizität e_0 . Der Verlauf der Exzentrizität über einen Zeitraum von 10^8 Jahren wurde dafür in 10 Teilintervalle unterteilt und für jedes dieser Teilintervalle eine mittlere Exzentrizität (als einfaches arithmetisches Mittel) berechnet. Die Abbildung zeigt $e_m - e_0$ von links oben im Uhrzeigersinn für das 1., das 2., das 6. und das 10. Teilintervall.

in diesem Bereich und Neptun finden, dergestalt, dass die Winkelkombination $2\varpi - \Omega - \Omega_N$ (Ω_N bezeichnet dabei die Länge des Bahnknotens von Neptun) um 0° libriert. Die Libration dieses Winkels fällt zeitlich mit der Libration des Resonanzwinkels der 4:7-Bahnresonanz zusammen. Während die 4:7-Bahnresonanz allein, z. B. zwischen 1.5 und $2 \cdot 10^7$ Jahren ein Ansteigen der Exzentrizität bewirkt, führt die Kombination der beiden Resonanzwinkel zu einer Zirkularisierung des Orbits.

Es bleibt die Frage zu klären, ob die bisher in diesem Bereich entdeckten Asteroiden sich ebenso verhalten. Dazu wurden die Körper¹³ zusammen mit den Planeten Jupiter bis Neptun integriert. Der Integrationszeitraum wurde für diese Untersuchung auf rund 10^9 Jahre verlängert. In den Ergebnissen zeigt sich für alle Asteroiden der starke Einfluss der Kozai-Resonanz in Kombination mit säkularen Resonanzen mit Neptun. Bei diesen säkularen Resonanzen dominierten vor allem eine 1:1 Resonanz der Frequenzen der beiden Bahnknoten: $f_\Omega = f_{\Omega_N}$ und der Frequenzen der Perihellängen: $f_\varpi = f_{\varpi_N}$. Bei 2001 KP76 führte letztgenannte Resonanz zusammen mit einer Libration von ω um 180° nach $2 \cdot 10^8$ Jahren zu einer nahen Begegnung mit Neptun in deren Folge dieser Asteroid den EKG verließ. Alle anderen Körper blieben während des gesamten Integrationszeitraumes im

¹³Integriert wurden dabei konkret: 1999 HG12, 1999 KR18, 1999 RH215, 2001 KP76 und 2002 PA149.

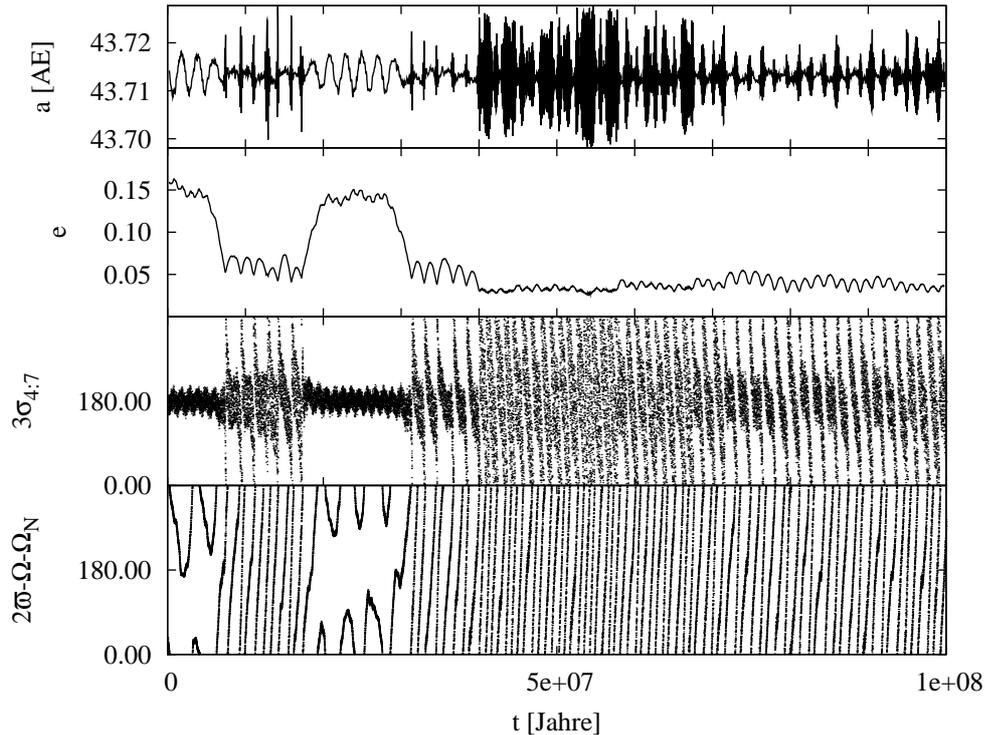


Abb. 4.14: Verlauf der großen Halbachse a , der Exzentrizität e , des Resonanzwinkels $3\sigma_{4:7}$ und des Winkels der säkularen Resonanz $2\varpi - \Omega - \Omega_N$ (N verweist auf den entsprechenden Winkel der Neptunbahn) eines Testkörpers mit anfänglichem $a_0 = 44.064$ AE und $e_0 = 0.1725$. Die kurzperiodischen Schwankungen wurden herausgefiltert. Alle Winkel sind in Dezimalgrad angegeben.

Bereich der 4:7-Bahnresonanz. Stellvertretend sei das zeitliche Verhalten einiger Bahnelemente für 1999 HG12 in Abbildung 4.15 gezeigt. Dieser Asteroid ist in Abbildung 4.12(a) im Zentrum des instabilen Bereiches bei $a = 43.69$ AE und $e = 0.156$ zu finden.

Sehr deutlich sieht man in Abbildung 4.15 das Zusammenspiel verschiedener Resonanzen, welches ähnlich auch bei den anderen Körpern beobachtbar ist. Es ist zu erkennen, dass zu Beginn der Integration zwischen dem Knotenwinkel der Bahn von 1999 HG12 und der Neptuns eine 1:1 Resonanz besteht. Diese bewirkt eine Verkleinerung der Exzentrizität der Asteroidenbahn. Nach einer gewissen Zeit beginnt der Winkel $\Omega - \Omega_N$ zu zirkulieren, während das Perihelargument ω des Körpers um 270° libriert. Der Körper befindet sich nun in einer Kozai-Resonanz, als deren Folge e für lange Zeit stabil bleibt. Nach rund $8.5 \cdot 10^8$ Jahren beginnt $\Omega - \Omega_N$ erneut für einen kurzen Zeitraum zu librieren. Als dessen Folge verkleinert sich die Exzentrizität des Asteroiden bis dieser nahezu eine Kreisbahn erreicht hat. Der Übergang zur Zirkulation des Resonanzwinkels zeigt an, dass 1999 HG12 gegen Ende der Integration die 4:7-Bahnresonanz verlässt. Die verschiedenen einzelnen säkularen Resonanzen wurden dabei mit Hilfe der Frequenzanalyse identifiziert. Die Integration ergab für 1999 HG12 einen Lyapunov-Exponenten von rund 10^{-5} .

Beim Betrachten von Abbildung 4.12(a) fällt weiterhin auf, dass in dem durch die Integrationen als sehr stabil ausgewiesenem Gebiet bisher lediglich 2 Asteroiden, 2000 OY51 und 2003 QX91, beobachtet wurden. Da sich die Eigen-elemente von Objekten in

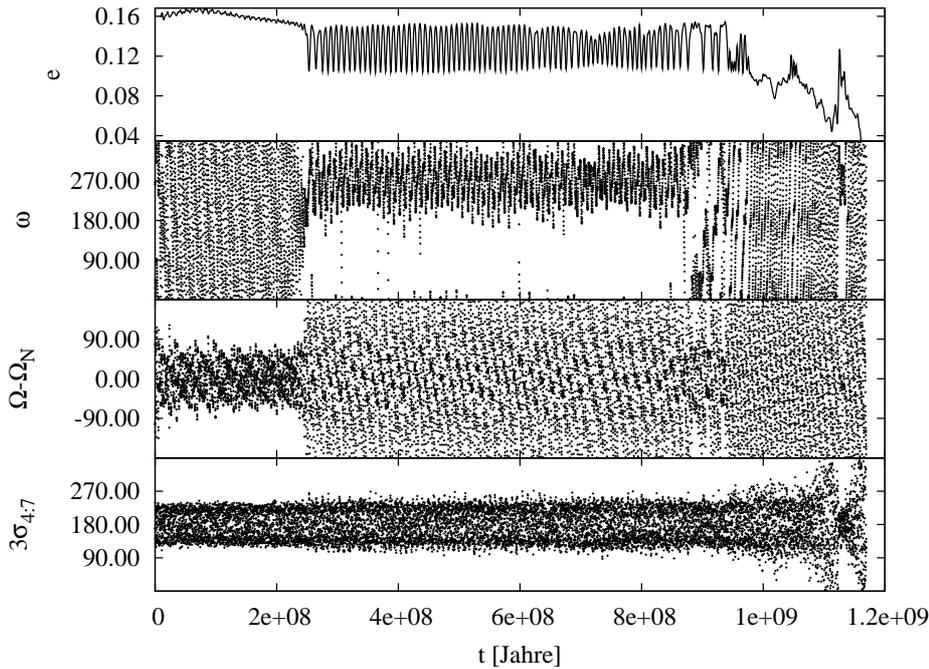


Abb. 4.15: Der zeitliche Verlauf einiger Bahnelemente von 1999 HG12. Die Bahnelemente mit Index N beziehen sich auf Neptun. Alle Winkel sind in Dezimalgrad angegeben.

diesem Gebiet auch über lange Zeiträume nicht ändern sollten, wie Abbildung 4.13 für die Exzentrizität zeigt, stellt sich die Frage, warum bisher noch nicht mehr gefunden wurden?

Betrachtet man die Ergebnisse von Simulationen der Entwicklung unseres Sonnensystems¹⁴ für diesen Abschnitt des EKG, so finden sich in den simulierten Verteilungen auch in diesem Bereich hoher Exzentrizitäten viele Körper. Unter der Annahme der Korrektheit dieser Modelle sollten daher genügend Objekte aus der Entstehungszeit des EKG vorhanden sein, welche, wie die in dieser Arbeit durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen nahelegen, dieses Gebiet auch nicht verlassen haben und daher immer noch in diesem Bereich zu finden sein sollten. Es erscheint daher wahrscheinlicher, dass in diesem Gebiet in Zukunft noch viele Objekte gefunden werden, was im Folgenden begründet werden soll.

Ein Körper in der 4:7-Bahnresonanz mit Neptun besitzt eine große Halbachse von rund $a = 43.7$ AE. Bei einer Exzentrizität von $e = 0.25$ ist sein Perihel 32.8 AE und sein Aphel rund 54.6 AE von der Sonne entfernt. Da mit wachsender Sonnenentfernung auch die scheinbare Helligkeit der Objekte abnimmt,¹⁵ ist die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung im Perihel am größten - auch die beiden bisher gefundenen Asteroiden befanden sich zum Zeitpunkt ihrer Entdeckung nahe der Perihels. 2003 QX91 besaß zum 1.1.2000 eine mittlere Anomalie von rund $\approx 6^\circ$, 2000 OY51 von $\approx 310^\circ$.

Wie in Kapitel 2.2.1 gezeigt wurde, befinden sich die Librationszentren einer Bahnresonanz der Ordnung q bei einer mittleren Anomalie von $M = (2k + 1)\pi/q$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, q-1$. Im Fall der 4:7-Bahnresonanz mit $q = 3$ bedeutet dies, dass, wenn sich

¹⁴Z.B. des Nice-Modells (siehe Kapitel 2.1 und z.B Morbidelli, Levison und Gomes (2007)).

¹⁵Die Helligkeitsabnahme ist dabei proportional zu $1/r^4$, wobei r den Abstand des Asteroiden von der Sonne bezeichnet.

ein Teil der resonanten Objekte momentan im Perihel befindet, sich die anderen beiden Teile 120° versetzt dazu aufhalten: bei $M = 120^\circ$ und $M = 240^\circ$. Unter der Annahme obiger Bahnparameter besitzen diese Objekte eine Entfernung von rund 46.8 AE zur Sonne. Beträgt die scheinbare Helligkeit eines solchen Körpers im Perihel noch 23.4 mag, verringert sich dies in dieser Entfernung auf rund 25 mag.¹⁶ Vergleicht man dies mit der Grenzhelligkeit des *Deep Ecliptic Survey (DES)*¹⁷ von 23.5 mag (Buie u. a. (2003)), so erscheint es wahrscheinlich, dass 2/3 der Population dieses Gebietes aufgrund ihrer geringen Helligkeit mit erdgebundenen Teleskopen im Moment nicht beobachtbar ist.

4.3.4 Die 1:2-Bahnresonanz

Als eines der wichtigsten Indizien für unsere heutige Sicht auf die Entstehungsgeschichte unseres Sonnensystems ist die 1:2-Bahnresonanz mit Neptun sicherlich eine der interessantesten Resonanzen des EKG. Entsprechend dem in Kapitel 2.1 beschriebenen momentanen Wissensstand markiert sie die äußere Grenze des klassischen EKG, wobei sich weiter außer nur noch die so genannten verstreuten Objekte befinden, wie Beobachtungen bisher bestätigen. Aufgrund ihrer besonderen Merkmale wurde die Stabilität von Asteroidenbahnen in der Umgebung der 1:2-Bahnresonanz schon von Nesvorný und Roig (2001) mit Hilfe numerischer Integrationen untersucht und beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wurden diese Integrationen wiederholt und konnten verifiziert werden. Da zum Zeitpunkt der Untersuchung von Nesvorný und Roig (2001) lediglich zwei Körper in diesem Gebiet bekannt waren, soll nach einer kurzen Beschreibung und Zusammenfassung der Ergebnisse in diesem Kapitel dann die Dynamik der seit 2001 in diesem Gebiet gefundenen Körper beschrieben werden.

Zur Untersuchung der dynamischen Gegebenheiten in der Umgebung der 1:2-Bahnresonanz wurden zusammen mit den 4 großen Planeten 2020 Testpartikel integriert, wobei sich die Berechnungen auf Testkörper mit einer anfänglichen Bahnneigung $i_0 = 0^\circ$ beschränkten. Die Dynamik von Körpern in Abhängigkeit von der anfänglichen Inklination ist sehr gut in Nesvorný und Roig (2001) beschrieben, weshalb hier auf eine weitere Untersuchung verzichtet wurde.

Die Anfangsbedingungen der Testkörper wurden so gewählt, dass in der Ebene der Anfangsbedingungen (a_0, e_0) für jeden Exzentrizitätswert $0.05 \leq e_0 \leq 0.40$ ($\Delta e_0 = 0.0175$) die großen Halbachsen a_0 der Testkörper gleichmäßig im Intervall $a_0 = 47.2$ bis 48.2 AE ($\Delta a_0 = 0.01$ AE) verteilt wurden. Die Länge der Bahnknoten sowie der Argumente der Perihelie wurden gleich denen Neptuns gesetzt: $\Omega = \Omega_N$ und $\omega = \omega_N$. Wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben wurde, ist für die 1:2-Bahnresonanz $\sigma_{1:2} = 180^\circ$ kein stabiler Fixpunkt. Die Librationszentren des Resonanzwinkels $\sigma_{1:2}$ sind bei dieser Bahnresonanz abhängig von der anfänglichen Exzentrizität. Die mittlere Anomalie M der Testkörper zu Beginn wurde daher so gewählt, dass $\sigma_{1:2}(e)$ dem Librationszentrum im eingeschränkten 3-Körper-Problem (Kapitel 4.1) entsprach.

Die Stabilität der Testkörper in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und ausgedrückt mittels Lyapunov-Exponenten γ_Y findet sich farb kodiert in Abbildung 4.16(a).

¹⁶Für die Berechnung der scheinbaren Helligkeit, welche ein solcher Körper von der Erde aus gesehen haben würde, wurde angenommen, dass sich der Körper in Opposition zur Erde befindet. Die absolute Helligkeit H wurde gleich der von 2003 QX91 zu $H = 8.3$ mag gesetzt.

¹⁷Der DES des Lowell Observatory führt viele der Beobachtungen im EKG zur Entdeckung neuer Körper durch.

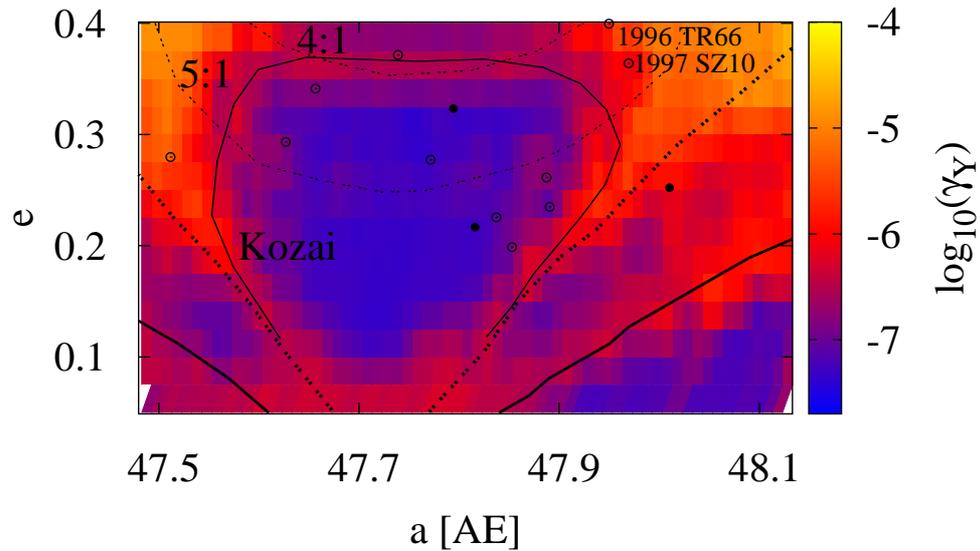
Die Farbgebung entspricht dabei der auch schon in den vorangegangenen Kapiteln benutzten: der kleinste über diesen Integrationszeitraum ermittelbare Lyapunov-Exponent wurde blau und die am stärksten irregulären Bahnen gelb dargestellt.

Die aus den Integrationen abgeleitete dynamische Struktur, einschließlich der Lage der Kozai und der beiden 3-Körper-Resonanzen, stimmt sehr gut mit den Ergebnissen von Nesvorný und Roig (2001) überein. Da diese beiden Autoren die Stabilität der 1:2-Bahnresonanz schon eingehend untersucht und beschrieben haben, seien an dieser Stelle lediglich die grundlegenden Eigenschaften noch einmal zusammengefasst: Die stabilsten Gebiete der 1:2-Bahnresonanz finden sich im Zentrum der Resonanz für $e < 0.35$, unterbrochen bei $e \approx 0.25$ durch die Überlagerung mit der 5:1-3-Körper-Resonanz. Tadpole-Orbits, welche eine maximale Amplitude des Resonanzwinkels A_σ von rund 60° zeigen, sind auf stabilen Bahnen zwischen $0.1 \leq e \leq 0.35$ zu finden. Die aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem abgeleitete Separatrix zwischen den Tadpole und Horseshoe Orbits gibt auch im untersuchten N -Körper-Problem sehr gut die Trennung zwischen diesen beiden möglichen resonanten Bahnformen der 1:2-Bahnresonanz wieder. In Abbildung 4.16(b) sieht man weiterhin, dass Horseshoe-Orbits bis zu einer maximalen anfänglichen Exzentrizität von $e \approx 0.3$ vorkommen können, wobei die maximale Amplitude von $\sigma_{1:2}$ bei ihnen rund 150° beträgt. Die Lage der Kozai-Resonanz und die der beiden 3-Körper-Resonanzen wurde dabei mit Hilfe der Frequenzanalyse berechnet. Die Vorgehensweise war dabei analog zu der schon in Kapitel 4.3.2 beschriebenen. Neben den in Abbildung 4.16(a) angedeuteten Resonanzen fanden Nesvorný und Roig (2001) mittels Frequenzanalyse noch zwei säkulare Resonanzen der Art $f_\omega - f_{\Omega_N} = 0$ und $2f_\omega - f_\Omega - f_{\Omega_N} = 0$, welche die Dynamik der Testkörper mit höherer Inklination stark beeinflussen.

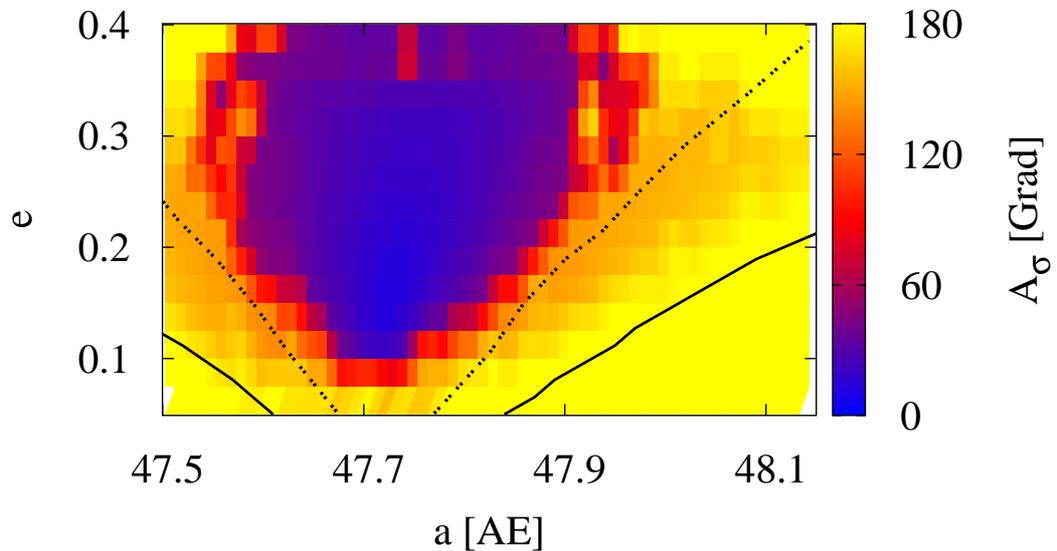
Zur Zeit der Untersuchung von Nesvorný und Roig (2001) waren lediglich zwei Körper in der Umgebung der 1:2-Bahnresonanz mit hinreichend genauen Bahndaten bekannt: 1997 SZ10 und 1996 TR66. Die mittleren Positionen¹⁸ der zum Januar 2008 bekannten Objekte wurde in Abbildung 4.16(a) mit Punkten markiert, wobei 1997 SZ10 und 1996 TR66 noch zusätzlich beschriftet wurden. Es fällt auf, dass im Bereich sehr kleiner Exzentrizitäten bisher keine Asteroiden gefunden wurden. Obwohl für $e < 0.07$ praktisch keine Tadpole-Orbits mehr möglich sind (Nesvorný und Roig (2001)), zeigen die numerischen Simulationen die Möglichkeit einer stabilen Libration um $\sigma_{1:2} = 180^\circ$ in diesem Gebiet. Unter der Annahme einer absoluten Helligkeit $H = 7$ mag,¹⁹ ergibt sich für die Körper eine scheinbare Helligkeit von 23.5 mag im Perihel und 24.0 mag im Aphel. Sie sollten daher mit Beobachtungskampagnen wie dem *Deep Ecliptic Survey* während der meisten Zeit ihrer Umlaufperiode entdeckt werden können. Es ist daher unwahrscheinlich, dass dies, im Gegensatz zur 4:7-Bahnresonanz, darauf hindeutet, dass viele Objekte momentan nicht beobachtbar sind und daher noch nicht gefunden werden konnten. Diese Konzentration von Objekten auf den Bereich hoher Exzentrizitäten sollte vielmehr die tatsächliche Verteilung widerspiegeln, wenn die heutigen Vorstellungen zur Entstehung des EKG korrekt sind. Diese Körper repräsentieren dann die Überreste der Planetesimale, welche von Neptun in der 1:2-Bahnresonanz eingefangen wurden, worauf während seiner nach außen gerichteten Migration die Exzentrizitäten dieser Planetesimale stetig anstieg.

¹⁸Gemittelt wurde über einen Zeitraum von 100 Jahren.

¹⁹Dies entspricht dem Median der absoluten Helligkeiten der bisher im Bereich der 1:2-Bahnresonanz gefundenen Asteroiden.



(a) Der aus *MEGNO* abgeleitete Lyapunov-Exponent γ_Y in der Einheit $\log_{10}(1/\text{Jahre})$.



(b) Die maximale Amplitude A_σ des Resonanzwinkels $\sigma_{1:2} = -\lambda' + 2\lambda - \varpi$.

Abb. 4.16: Der Lyapunov-Exponent und die Amplitude des Resonanzwinkels für Testkörper in der 1:2-Bahnresonanz. Die anfängliche große Halbachse der Testkörper wurde dabei um einen Wert $\Delta a = 0.273$ AE korrigiert, um der Differenz zwischen oskulierenden und mittleren Bahnelementen Rechnung zu tragen. Die aus dem eingeschränkten 3-Körper-Problem abgeleitete Separatrix für Horseshoe-Orbits ist mit einer durchgezogenen, die Separatrix für Tadpole-Orbits mit einer unterbrochenen breiten Linie angedeutet. Weiterhin wurden die Kozai-Resonanz und zwei 3-Körper-Resonanzen (4:1, 5:1) mit Uranus und Neptun in Abbildung (a) dargestellt. Die Punkte markieren die mittleren Elemente beobachteter Asteroiden, wobei gefüllte Punkte eine Inklination $i < 5^\circ$, ungefüllte $i > 5^\circ$ anzeigen. Zwei EKG-Objekte der 1:2-Bahnresonanz, 1996 TR66 und 1997 SZ10, welche in diesem Abschnitt eingehender beschrieben werden, wurden zusätzlich beschriftet.

Zum Zeitpunkt des Entstehens dieser Arbeit waren 14 trans-neptunische Objekte bekannt, welche sich in der Umgebung der 1:2-Bahnresonanz befinden. Ihre aus der Datenbank des Minor Planet Center entnommenen Bahnelemente, der Resonanzwinkel $\sigma_{1:2}$, dessen Amplitude A_σ und das Librationszentrum der Kozai-Resonanz (falls vorhanden), sowie die Anzahl der Beobachtungen wurden in Tabelle 4.2 zusammengestellt. Die Amplitude des Resonanzwinkels wurde dabei durch eine numerische Integration der Asteroiden zusammen mit den 4 großen Planeten über einen Zeitraum von 10^5 Jahren bestimmt. Dieser Zeitraum umfasst mehrere Perioden des Resonanzwinkels $\sigma_{1:2}$, ist aber gleichzeitig kurz genug, um Änderungen aufgrund säkularer Effekte auszuschließen. Nach der Integration wurde die Amplitude A_σ visuell geschätzt. Zeigte sich bei der Integration eine Libration des Perihelargumentes ω , so wurde das Zentrum dieser Libration ebenfalls visuell abgeschätzt und in der Tabelle angegeben.

Tabelle 4.2: Die Bahnelemente der momentan bekannten und in der 1:2 Bahnresonanz befindlichen Asteroiden für den 27.10.2007. Die Bahnelemente wurden dabei der Datenbank des Minor Planet Center entnommen. Aus diesen wurde dann der Resonanzwinkel $\sigma_{1:2}$ berechnet. Mit einer numerischen Integration über 10^5 Jahre wurde die Amplitude des Resonanzwinkels A_σ abgeschätzt. Falls die Integration zeigte, dass sich der Körper in einer Kozai-Resonanz befand, wurde ω des Librationszentrums angegeben. Obs. bezeichnet die Anzahl der unabhängigen Beobachtungen des Objektes.

Asteroid	a [AE]	e	i [°]	M [°]	$\sigma_{1:2}$ [°]	A_σ [°]	Kozai [°]	Obs.
1996 TR66	47.9	0.40	12.42	44.21	58.85	25	330	22
1997 SZ10	47.8	0.36	11.80	20.63	70.18	34	326	21
1998 SM165	47.6	0.37	13.50	36.16	54.35	12	144	48
1999 RB215	47.6	0.34	7.86	15.51	61.66	25	327	17
1999 RB216	47.5	0.29	12.69	353.07	48.33	60	-	38
2000 JG81	47.8	0.29	23.42	11.90	278.20	158	-	18
2000 QL251	47.8	0.22	3.68	25.44	51.10	40	-	16
2002 VD130	47.5	0.32	3.91	350.18	110.93	38	-	12
2002 WC19	47.6	0.26	9.20	305.84	84.91	27	-	61
2003 FE128	48.3	0.26	3.38	357.45	256.55	57	-	25
2004 PS107	48.0	0.24	24.50	18.89	12.26	180	-	10
2004 TV357	47.5	0.27	9.78	337.52	85.02	17	-	22
2005 CA79	47.7	0.22	11.67	8.90	169.78	142	-	14
2005 RS43	47.8	0.20	10.02	42.60	76.48	18	-	80

Es fällt auf, dass sich alle Objekte innerhalb eines Winkels von $\pm 55^\circ$ um ihr Perihel befinden. Der Grund dafür liegt sicherlich in der Schwierigkeit der Beobachtung dieser Körper. Während ein solcher mit einer absoluten Helligkeit von $H = 7$ mag bei einer Exzentrizität von $e = 0.3$ im Perihel noch eine scheinbare Helligkeit von 22 mag besitzt, steigt diese auf rund 25 mag im Aphel an. Aufgrund dessen liegt die Exzentrizität der Körper relativ hoch: zwischen 0.2 und 0.4.

Obwohl einige der Objekte im Gebiet der 1:2-Bahnresonanz seit mehr als 10 Jahren beobachtet werden, ist dies nur ein Bruchteil ihrer mehr als 300 Jahre währenden Umlaufperiode. Daher ist auch der mittlere Fehler der großen Halbachse relativ groß und beträgt 0.1 bis 0.2 AE (Virtanen u. a. (2008)). Aufgrund dieser großen Unsicherheit ist es einfacher, den Resonanzwinkel $\sigma_{1:2} = -\lambda_N + 2\lambda - \varpi$ zu berechnen, um zu entscheiden, welche der Körper sich momentan in der 1:2-Bahnresonanz befinden. Diese Berechnung zeigt, dass sich einzig 2004 PS107 außerhalb der Resonanz befindet, da für diesen Körper $\sigma_{1:2}$ zirkuliert (siehe Tabelle 4.2). Aufgrund der hohen Inklination kann vermutet werden, dass dieser der Gruppe der verstreuten Objekte zuzuordnen ist. Wie schon die vorangegangenen Stabilitätsuntersuchungen vermuten ließen, befindet sich ein Großteil der Objekte in einem stabilen Tadpole-Orbit mit relativ kleiner Librationsamplitude. Lediglich zwei der 13 sich in Resonanz befindlichen Asteroiden libriert um $\sigma_{1:2} = 180^\circ$. Bedingt durch die asymmetrische Anordnung der Librationszentren der 1:2-Bahnresonanz²⁰ verschieben sich die stabilen Fixpunkte der Kozai-Resonanz ebenfalls und liegen nicht bei 90° und 270° , sondern bei 145° und 325° . Diese Werte lassen sich schon mit Hilfe des eingeschränkten 3-Körper-Problems (siehe Kapitel 3.4, Abbildung 4.6) ableiten und passen sehr gut zu den beobachteten Werten aus Tabelle 4.2. Bei den Asteroiden außerhalb der Kozai-Resonanz lässt sich beobachten, dass ω sehr langsam zirkuliert.

Integrationen zeigten, dass die Dynamik aller Körper sehr stark durch ein Zusammenspiel der Kozai-Resonanz und säkularen Resonanzen in der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun bestimmt wird. Als ein repräsentatives Beispiel ist das zeitliche Verhalten einiger Bahnelemente von Asteroid 1996 TR66 während einer Integration über 10^8 Jahre in Abbildung 4.17 dargestellt.

Während der ersten Hälfte der Integration zeigt dieses Objekt eine stabile Bewegung, wobei die Bahnelemente lediglich periodische Änderungen mit einer kleinen, nahezu gleichbleibenden Amplitude zeigen. Die Exzentrizität schwankt periodisch zwischen 0.3 und 0.4; gekoppelt mit der Periode von ω , wobei sich der Körper ganz offensichtlich in einer Kozai-Resonanz befindet. Mit dem Modell des eingeschränkten 3-Körper-Problems²¹ lässt sich das Zentrum der Libration des Resonanzwinkels für einen Asteroiden mit $e_0 = 0.40$ zu rund 65° abschätzen - in sehr guter Übereinstimmung mit den in Abbildung 4.17 zu beobachtenden Werten. Der Resonanzwinkel libriert dabei mit einer Periode von rund 17000 Jahren, mit kurzen Unterbrechungen, in welchen sich die Periode stark erhöht. Für diese Zeitpunkte ließ sich zeigen, dass sich der Asteroid zusätzlich noch in der schon von Nesvorný und Roig (2001) identifizierten säkularen Resonanz mit Neptun befindet und der Winkel $2\varpi - \Omega - \Omega_N$ libriert. Dieses wiederholte Zusammenwirken der verschiedenen Resonanzen führt schließlich dazu, dass der Körper die Kozai-Resonanz verlässt. Des Weiteren verringert sich die Exzentrizität von 1996 TR66 soweit, dass der Resonanzwinkel zu zirkulieren beginnt. Da der Körper nun nicht mehr durch die Resonanz geschützt ist, verringern sich die Abstände zu Neptun, was unter anderem im Anwachsen der Amplituden der großen Halbachse a festzustellen ist. Bedingt durch die nun nahezu kreisförmige Bahn reichen die Störungen nicht aus, um die Bahn grundlegend zu ändern. Wenig später befindet sich 1996 TR66 erneut in der 1:2-Bahnresonanz mit Neptun, wobei $\sigma_{1:2}$ diesmal um den zweiten stabilen Fixpunkt bei rund 280° libriert.

²⁰Siehe Kapitel 2.2.1.

²¹Siehe Kapitel 4.1.

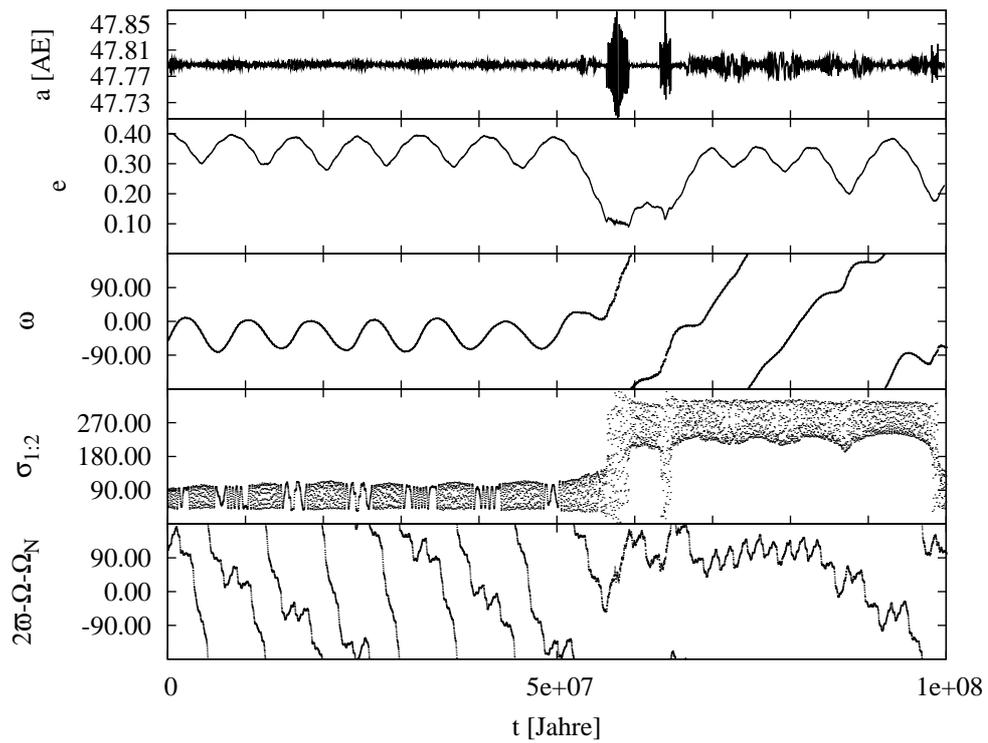


Abb. 4.17: Der zeitliche Verlauf einiger Bahnelemente des Asteroiden 1996 TR66. Ω_N bezeichnet den Bahnknoten Neptuns. Alle Winkel sind in Dezimalgrad angegeben.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war eine umfassende numerische Untersuchung der Dynamik im Edgeworth-Kuiper-Gürtel innerhalb der 1:2-, 3:5- und der 4:7-Bahnresonanz mit Neptun. Die Stabilität der einzelnen Gebiete sollte dabei mit Hilfe der Lyapunov-Zeit charakterisiert werden. Für die Bearbeitung dieser Fragestellung wurde die Arbeit in zwei große Teile gegliedert: Kapitel 3 untersucht allgemein die numerische Berechenbarkeit einer Lyapunov-Zeit von Asteroiden, während in Kapitel 4 mit Hilfe einfacher Modelle und einer Vielzahl numerischer Integrationen die Phasenraumstruktur innerhalb der einzelnen Bahnresonanzen beschrieben und mit der beobachteten Verteilung der Asteroiden in diesen Gebieten verglichen wird.

5.1 Resultate

Zentrales Thema von Kapitel 3 war die Untersuchung des Einflusses der Numerik auf die Berechnung der Lyapunov-Zeit von Asteroidenbahnen. Dazu wurden in Kapitel 3.1 zunächst allgemein der Rundungs- und Diskretisierungsfehler bei numerischen Rechnungen und deren Wachstum während einer numerischen Integration beschrieben. Auf Grundlage dieser Erkenntnisse konnte im Anschluss eine Formel zur Abschätzung der optimalen Schrittweite für symplektische Integratoren angegeben werden. Mit dieser Formel ist es möglich, unter Berücksichtigung des Fehlerhaushaltes numerischer Integrationen eine optimale Schrittweite für ein gegebenes himmelsmechanisches Problem direkt abzuschätzen. Die in Publikationen oft angegebene Faustregel von 100 Schritten des innersten Körpers als geeignete Schrittweite für symplektische Integratoren beruht nach Wissen des Autors einzig auf Erfahrungswerten und konnte als Ergebnis dieser Arbeit verifiziert und verbessert werden.

Mit diesen Erkenntnissen wurde dann in Kapitel 3.2 am Beispiel einiger ausgewählter Asteroiden untersucht, wie sich die numerischen Fehler auf die Berechnung der Lyapunov-Zeit auswirken. Es konnte gezeigt werden, dass die ermittelte Lyapunov-Zeit unter anderem abhängig von der Hardware und der verwendeten Integrationsroutine ist. Ändert man die Art der Berechnung, so führen die dadurch bedingten minimalen Änderungen in den Anfangsbedingungen stellenweise zu Unterschieden von einem Faktor 5 und mehr in den Lyapunov-Zeiten. Es konnte aber ebenfalls im gleichen Kapitel gezeigt werden, dass die qualitative Struktur des Phasenraumes einschließlich der Größenordnung der Lyapunov-Zeiten robust gegenüber diesen Änderungen ist und korrekt wiedergegeben wird. Um diese Sensibilität gegenüber Einflussgrößen, welche unabhängig vom eigentlich untersuchten Problem der Berechnung der Lyapunov-Zeit von Asteroidenbahnen sind, zu quantifizieren, wurde am Ende des Kapitels der Berechenbarkeitsindex κ definiert und beispielhaft für die näher untersuchten Asteroiden berechnet.

Ebenfalls neu war die Anwendung des Schattenlemmas in Kapitel 3.3 auf den Bereich der Asteroidendynamik. Es konnte gezeigt werden, dass numerische Untersuchungen trotz sensitiver Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen geeignet sind, die Dynamik von

Asteroiden qualitativ korrekt zu bestimmen.

Kapitel 4 umfasst den zweiten Teil der Arbeit und beschreibt die Untersuchung einiger ausgewählter Bahnresonanzen innerhalb des Edgeworth-Kuiper-Gürtels. In den ersten beiden Abschnitten wurden dazu grundlegende Eigenschaften dieser Resonanzen, wie z.B. die Resonanzbreite und die Amplitude und Periode des Resonanzwinkels, mit Hilfe des eingeschränkten 3-Körper-Problems bestimmt. Neben dem einfachen planaren Fall wurde auch die Kozai-Resonanz bei geneigten Bahnen innerhalb der Bahnresonanzen beschrieben.

Wie sich die Dynamik innerhalb der einzelnen Bahnresonanzen durch die gravitativen Einflüsse der Planeten Jupiter bis Neptun ändert, ist daran anschließend Gegenstand von Kapitel 4.3. Mit Hilfe von numerischen Integrationen wurden die Bahnen einer Vielzahl von Testkörpern über einen Zeitraum von 10^8 Jahren untersucht und die zugehörigen Lyapunov-Zeiten berechnet. Der Fokus lag dabei auf einer qualitativen Beschreibung des Phasenraumes. Wie schon in Kapitel 3.2 gezeigt werden konnte, ist für eine solche Zielstellung die Berechnung mit nur einem Computer und einer Integrationsmethode ausreichend.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde in Kapitel 4.3.2 erstmals die 3:5-Bahnresonanz mit Neptun eingehend untersucht. Aus den Ergebnissen der Integrationen ließ sich das Zentrum der Resonanz und dessen Ausdehnung in der (a, e) -Ebene der Anfangsbedingungen angeben. Die dabei ermittelte große Halbachse der exakten Resonanz wurde in einer zweiten großen Integration benutzt, um die Stabilität der Bahnen fiktiver Testkörper in Abhängigkeit von der anfänglichen Bahnneigung zu bestimmen. Die dabei gefundenen Strukturen des Phasenraumes konnten durch das Wirken weiterer Resonanzen erklärt und anhand von Beispielen belegt werden.

Die numerischen Untersuchungen der 4:7-Bahnresonanz zeigten ein Gebiet kleinerer Lyapunov-Zeiten im Zentrum der Resonanz für Exzentrizitäten $e < 0.2$. Die dort auftretende starke Verminderung der anfänglichen Exzentrizität wurde schon von Lykawka und Mukai (2005) beschrieben, aber nicht erklärt. Durch die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten eingehenden Untersuchungen konnte als Grund das Zusammenwirken verschiedener säkularer Resonanzen an dieser Stelle identifiziert werden.

Den Abschluss dieser Arbeit bildete eine Beschreibung der 1:2-Bahnresonanz. Die Ergebnisse der von Nesvorný und Roig (2001) durchgeführten Untersuchung der Dynamik konnten dabei mit den Mitteln der hier vorliegenden Arbeit verifiziert werden. Weiterhin wurden alle zum Zeitpunkt des Entstehens dieser Arbeit bekannten Asteroiden in diesem Gebiet des EKG klassifiziert. Dazu wurden ihre Bahnen integriert und daraus dann die Amplitude des Resonanzwinkels und für einige Asteroiden auch das Librationszentrum der Kozai-Resonanz bestimmt.

5.2 Ausblick

Mit der Einführung des Berechenbarkeitsindex κ wurde ein Maß definiert, mit welchem die Sensibilität der errechneten Lyapunov-Zeit gegenüber kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen abgeschätzt werden kann. In dieser Arbeit wurde anhand von vier Beispielen die Anwendung und Verlässlichkeit des Berechenbarkeitsindex demonstriert. Für weitergehende Untersuchungen der Nutzbarkeit ist κ jedoch für eine sehr viel größere Grundgesamtheit mit verschiedenen Methoden und auf verschiedenen Rechnerarchitek-

turen zu berechnen. Als Referenz bieten sich dabei z. B. die Arbeiten von Šidlichovský (1999) und Knežević und Ninković (2005) an.

Weiterhin wurde die Dynamik innerhalb der einzelnen Bahnresonanzen im Rahmen dieser Arbeit umfassend untersucht und mit der Verteilung der momentan bekannten Asteroiden in den entsprechenden Gebieten verglichen. Für alle Integrationen wurde angenommen, dass sich die Planeten auf ihren heutigen Bahnen bewegen. Wie aber die neuesten Forschungen zeigen (z. B. Morbidelli, Levison und Gomes (2007)), wurde die Struktur des EKG durch die Migration der großen Planeten entscheidend beeinflusst. Diese Migration sollte daher auch in zukünftigen Arbeiten berücksichtigt werden. Interessant wäre z. B. eine Untersuchung, wie sich die Charakteristika der einzelnen Bahnresonanzen während einer solchen Migration ändern. Mit einem Vergleich des Verhältnisses der in den Bahnresonanzen verbleibenden und der sich anfänglich darin befindlichen Testkörper in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und Stetigkeit der Migration könnten zusätzliche Informationen über die Stabilität innerhalb der Bahnresonanzen gewonnen werden.

A Rückwärtige Fehleranalyse

Der Ursprung der rückwärtigen Fehleranalyse (engl. backward error analysis) liegt in der numerischen Linearen Algebra und lässt sich auf Arbeiten von Wilkinson (1960) zurückführen. Die mathematischen Grundlagen auf dem Gebiet geometrischer Integrationsmethoden wurden Anfang der 1990er Jahre z. B. durch Feng (1991), Sanz-Serna (1992) und Yoshida (1993) geschaffen. Mit dieser Art der Fehleranalyse ist es möglich, das qualitative Verhalten numerischer Methoden zu untersuchen, sowie Aussagen über das Fehlerverhalten über sehr lange Zeiträume zu erhalten.

Betrachtet wird eine beliebige Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (\text{A.1})$$

und eine beliebige numerische Methode allgemein definiert als

$$\mathbf{y}_{n+1} = \Phi_h(\mathbf{y}_n). \quad (\text{A.2})$$

Der Grundgedanke der rückwärtigen Fehleranalyse ist es, eine *modifizierte* Differentialgleichung $\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}_h(\tilde{\mathbf{y}})$ der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}}) + h\mathbf{f}_2(\tilde{\mathbf{y}}) + h^2\mathbf{f}_3(\tilde{\mathbf{y}}) + \dots \quad (\text{A.3})$$

zu finden, deren exakte Lösung der numerischen Lösung der Integrationsmethode entspricht: $\mathbf{y}_n = \tilde{\mathbf{y}}(nh)$.¹ Der Vergleich der Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ und $\mathbf{f}_h(\mathbf{y})$ erlaubt dann Rückschlüsse auf das qualitative Verhalten der numerischen Methode sowie den globalen Fehler nach n Schritten der Schrittweite h :

$$\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(nh) = \tilde{\mathbf{y}}(nh) - \mathbf{y}(nh). \quad (\text{A.4})$$

Gleichung (A.3) konvergiert im Allgemeinen nicht (Hairer, Lubich und Wanner (2003)). Aus diesem Grund ist die Entwicklung bei einer geeigneten Ordnung abzurechnen. Generell kann gezeigt werden (siehe z. B. Hairer, Lubich und Wanner (2003), Theorem 4.1), dass für alle $N \geq 1$ eine modifizierte Differentialgleichung gefunden werden kann, so dass der Unterschied zwischen der Taylorentwicklung der numerischen Methode und exakten Lösung der modifizierten Gleichung von Ordnung $\mathcal{O}(h^{N+1})$ ist.

Für symplektische Integratoren gilt weiterhin, dass die modifizierte Gleichung ebenfalls symplektisch ist. Die modifizierte Gleichung separabler Hamiltonscher Funktionen $\mathcal{H} = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q})$ ist im Allgemeinen jedoch nicht mehr separabel.

Dies soll am Beispiel des Kepler-Problems noch einmal verdeutlicht werden. In Polarkoordinaten mit der entsprechenden Normierung lautet deren Hamiltonsche Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r}. \quad (\text{A.5})$$

¹Ein Algorithmus zur Berechnung der modifizierten Gleichung für beliebige Ordnungen und für beliebige numerische Integratoren findet sich in Hairer, Lubich und Wanner (2002), Kapitel IX.1.

\mathcal{H} ist unabhängig vom Winkel φ , so dass der dazu konjugierte Impuls p_φ eine weitere Invariante dieses Systems ist - der Polarausdruck für den Drehimpuls. Für die Methode von Störmer-Verlet (siehe Gleichung 2.23) ergibt sich allgemein eine modifizierte Hamiltonsche Funktion $\tilde{\mathcal{H}}$ von

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{h^2}{12} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial p_j} \right) + \mathcal{O}(h^3). \quad (\text{A.6})$$

Für das Kepler-Problem bis zur 2. Ordnung in h ergibt dies

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} + \frac{h^2}{12} \left[p_r^2 \left(\frac{3p_\varphi^2}{r^4} - \frac{2}{r^3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{p_\varphi^2}{r^3} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.7})$$

Mit diesen zusätzlichen Termen proportional zu r^{-3} lässt sich Gleichung (A.7) als Bewegung eines Teilchens interpretieren, welches sich im Gravitationsfeld eines leicht abgeplatteten Körpers befindet. Die Abweichung von einem sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld ist dabei proportional zu h^2 und resultiert in einer Präzession des Orbits - eine Eigenschaft, welche bei allen symplektischen Integratoren zu beobachten ist. Anhand der Bewegungsgleichungen lässt sich ihre Größe leicht berechnen.² Für eine Bahnellipse mit einer Periode P und einer Exzentrizität von $e = 0.4$ verschiebt sich das Perizentrum nach einem Umlauf z. B. bei einer Schrittweite von $h = P/21$ um rund 2.9 Grad. In Abbildung A.1 ist in der (x, y) -Ebene für diese Parameter die numerische Lösung des Störmer-Verlet-Verfahrens 2.Ordnung zusammen mit der exakten Lösung der modifizierten Gleichung, abgebrochen nach den h^2 - und h^4 -Termen, gezeigt.

²Eine sehr gute Beschreibung der dafür notwendigen Methoden am Beispiel des ungestörten Kepler-Problems findet sich in Arnold (1989), Kapitel 2.8.

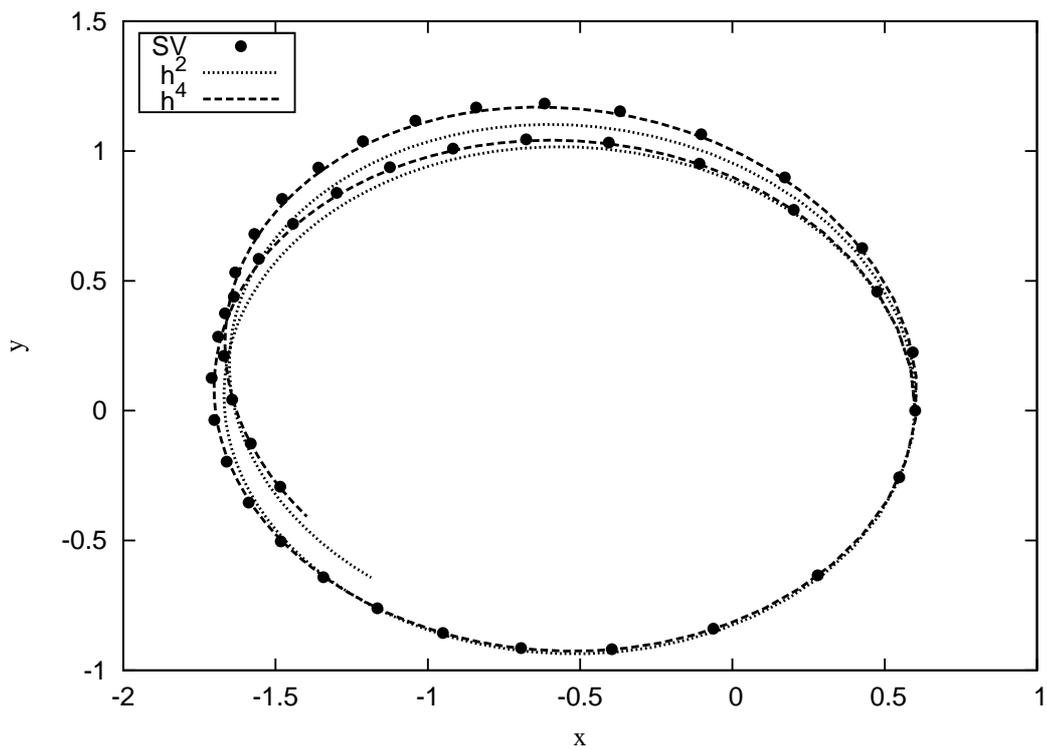


Abb. A.1: Numerische Lösung des Kepler-Problems für $e = 0.4$ mit dem Störmer-Verlet-Verfahren 2.Ordnung (Punkte) mit einer Schrittweite h von 21 Schritten pro Periode. Außerdem wurde die modifizierte Gleichung, abgebrochen nach h^2 (punktiert) und h^4 (gestrichelt), dargestellt.

B Box-Whisker-Plots

Ein Box-Whisker-Plot ist eine graphische Darstellungsform für Datensätze. Dabei werden Methoden der robusten Statistik verwendet, um wichtige Kenngrößen der Datenreihe zu bestimmen, welche dann kompakt mittels eines solchen Plots visualisiert werden können. Um die Erklärung anschaulich zu gestalten, soll sie anhand einer Beispieldatenreihe $\mathbf{x} =$

(11.0, 11.2, 11.5, 11.6, 11.9, 12.0, 12.2, 12.8, 12.9, 12.9, 13.1, 13.3, 13.4, 13.8, 13.9, 14.0, 14.0, 14.1, 14.6, 15.3, 15.5, 19.0) erfolgen.

Der sich daraus ergebende Box-Whisker-Plot ist in Abbildung B.1 dargestellt.

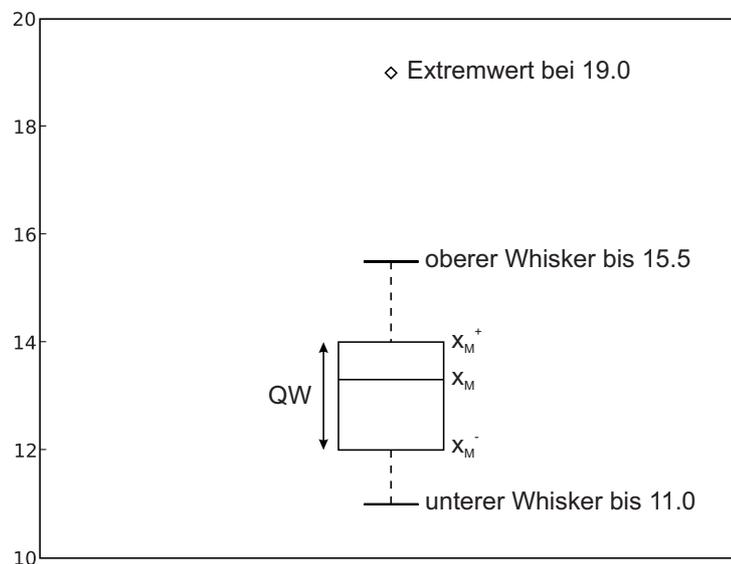


Abb. B.1: Box-Whisker-Plot der Beispieldatenreihe.

Ausgangspunkt dabei ist die Berechnung des Medians. Dieser ist der mittlere Wert der nach Größe geordneten Datenreihe x_i mit $i = 1, \dots, N$ Elementen. Der Median x_M wird allgemein wie folgt berechnet

$$x_M = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & \text{für ungerade } N \\ \frac{1}{2}(x_{N/2} + x_{N/2+1}) & \text{für gerade } N. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Für die angegebene Beispieldatenreihe mit 22 Elementen beträgt $x_M = 13.2$.

Eine weiterer wichtiger Parameter eines Box-Whisker-Plots ist die Quartilsweite (QW). Mit dieser wird die Streuung der Daten beschrieben, wobei zwischen dem oberen (x_M^+) und unterem (x_M^-) Quartilswert 50% der Daten liegen. Mit dieser Definition ist der obere Quartilswert der Median aller Daten $x_i > x_M$; für den unteren Quartilswert ist dies der Median der Daten $x_i < x_M$. Für den Beispieldatensatz sind dies 14.0 und 12.0 - die

Quartilsweite beträgt $14.0 - 12.0 = 2.0$. Durch diese Werte ist nun die Länge der Box des Box-Whisker-Plottes definiert, der Median des Datensatzes wird innerhalb der Box als Strich gekennzeichnet. Bei Normalverteilung der Daten liegt der Median exakt in der Mitte zwischen x_M^+ und x_M^- .

Der Whisker dient dazu, zusätzlich noch den Gesamtumfang der Daten darzustellen und wird im Allgemeinen an beiden Enden der Box als vertikale Linie mit einem kleinen Querstrich am Ende gezeichnet. Man weicht von dieser Darstellung ab, wenn der Datensatz so genannte *extreme Werte* umfasst. Als extreme Werte werden dabei all diejenigen interpretiert, welche außerhalb des ± 1.5 -fachen der QW liegen. Für das Beispiel liegen die Grenzen, ab welchen die Werte als extrem eingestuft werden, bei $14.0 + 1.5 * 2.0 = 17.0$ und $12.0 - 1.5 * 2.0 = 9.0$. Enthält die Datenreihe Daten außerhalb dieser Grenzen, so werden diese als Punkte dargestellt (im Beispiel der Wert 19.0) und der Whisker bis zu den Werten gezeichnet, welche noch innerhalb dieser Grenzen liegen. Mit diesem Vorgehen sind Ausreißer in einer Datenreihe auch visuell sehr leicht zu identifizieren.

Bei normalverteilten Daten spricht man in der Regel von einem Ausreißer, wenn die Werte um mehr als das 3-fache der Standardabweichung σ vom Mittelwert \bar{x} abweichen. Die Normalverteilung ist definiert mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{B.2}$$

wobei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt. Innerhalb der 3σ Grenzen liegen somit rund 99.7% der Daten. Im Vergleich dazu werden bei einer Normalverteilung mit einem Box-Whisker-Plot Werte als extrem identifiziert, wenn diese außerhalb von $\approx \pm 2.698\sigma$ liegen. Innerhalb dieser Grenzen finden sich bei dieser Darstellungsform dann 99.3% der Daten. Die Bewertung als Extremwert ist bei einem Box-Whisker-Plot somit leicht restriktiver als die üblichen Ausreißertests nach der 3σ Regel. Ein Box-Whisker-Plot für eine Normalverteilung findet sich in Abbildung B.2.

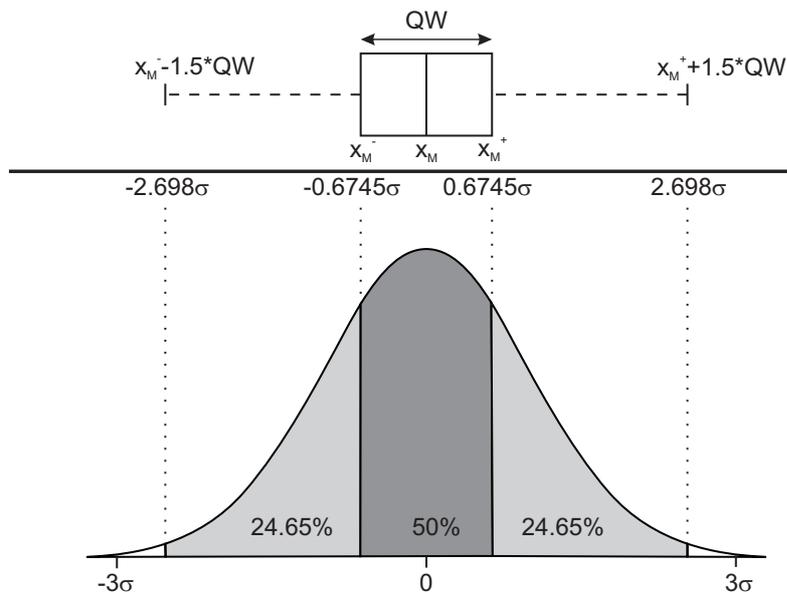


Abb. B.2: Box-Whisker-Plot einer Normalverteilung.

C Getrimmtes Mittel und Standardabweichung

Zur Charakterisierung einer Datenreihe dienen unter anderem deren Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ . Bei normalverteilten Daten (siehe Gleichung (B.2)) werden diese beiden Werte berechnet mittels

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (\text{C.1})$$

Kann der Datenreihe jedoch keine Normalverteilung zugrunde gelegt werden, sind diese beiden Werte zu ihrer Charakterisierung wenig geeignet. Ein einziger, stark abweichender Wert (an manchen Stellen auch Ausreißer genannt) kann z. B. schon zu einer starken Änderung des Mittelwertes führen. Um dies zu verhindern, werden Methoden der so genannten robusten Statistik, wie z. B. das getrimmte Mittel, angewandt. Für eine umfassende Einführung in Methoden der robusten Statistik sei zum Beispiel auf Wilcox (1997) verwiesen.

Gegeben sei eine geordnete Datenreihe x_i mit $i = 1, \dots, N$ und $x_i \leq x_{i+1}$. Um die Verständlichkeit zu erhöhen, soll dabei die Berechnung des getrimmten Mittels an der Beispieldatenreihe von Anhang B nachvollzogen werden. Für diese ist $N = 22$. Der getrimmte Mittelwert dieser Reihe ergibt sich dadurch, dass man an deren unterem und oberem Ende einige Werte entfernt. Die Anzahl, wieviele Werte entfernt werden sollen, bestimmt der so genannte Trimming-Faktor γ , wobei $0 \leq \gamma \leq 0.5$ gilt. Wilcox (1997) gibt einen Wert von $\gamma = 0.2$ als optimal für die meisten Anwendungen an. Dieser Wert soll auch im Folgenden verwendet werden. Sei g das auf die nächste ganze Zahl abgerundete Produkt von γ und N (hier $0.2 \cdot 22 = 4.4$, somit ist $g = 4$), dann berechnet sich der getrimmte Mittelwert \bar{x}_t einer Datenreihe x_i als Mittelwert derselben ohne die g kleinsten und g größten Werte:

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N-2g} \sum_{i=g+1}^{N-g} x_i. \quad (\text{C.2})$$

Für $\gamma = 0$ geht der getrimmte Mittelwert in Gleichung (C.1) über. Für die Beispieldatenreihe lautet diese Summe konkret

$$\bar{x}_t = \frac{1}{14} \sum_{i=5}^{18} x_i \approx 13.12. \quad (\text{C.3})$$

Um die Standardabweichung des getrimmten Mittelwertes zu berechnen, ist der Datenvektor \mathbf{x} in den Vektor \mathbf{y} zu transformieren, mit:

$$y_i = \begin{cases} x_{g+1}, & \text{für } x_i \leq x_{g+1} \\ x_i, & \text{für } x_{g+1} \leq x_i \leq x_{N-g} \\ x_{N-g}, & \text{für } x_i \geq x_{N-g}. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Für das Beispiel ändert sich die Datenreihe daher zu $\mathbf{y} =$

(11.9, 11.9, 11.9, 11.9, 11.9, 12.0, 12.2, 12.8, 12.9, 12.9, 13.1,
13.3, 13.4, 13.8, 13.9, 14.0, 14.0, 14.1, 14.1, 14.1, 14.1, 14.1).

Der Mittelwert dieses Vektors ist $\bar{y} = 13.07$. Die Standardabweichung des getrimmten Mittel σ_t ergibt sich dann zu

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}{(1 - 2\gamma)\sqrt{N}\sqrt{N-1}}. \quad (\text{C.5})$$

Für die Beispieldatenreihe ist dies

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{22} (y_i - 13.07)^2}}{0.6\sqrt{22}\sqrt{21}} \approx 0.346. \quad (\text{C.6})$$

D Berechnung eines Schattenorbits

Die an dieser Stelle beschriebene numerische Methode zur Berechnung einer Schattenbahn ist Quinlan und Tremaine (1992) entnommen. Um die Beschreibung einfach zu halten und die Verständlichkeit nicht durch unnötige Details zu erschweren, wurde die Erklärung auf 2-dimensionale dynamische Systeme beschränkt. Ein solches System kann dabei sowohl durch eine Abbildung als auch durch gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben sein. Für die Berechnung eines Schattenorbits für Systeme höherer Dimension (auch Hamiltonsche Systeme) sei auf die gleiche Quelle verwiesen.

Ausgangspunkt ist eine numerisch berechnete Bahn $\mathbf{y}(t)$, für welche eine zugehörige Schattenbahn berechnet werden soll. Die Bewegungsgleichungen dieser Bahn seien als Differentialgleichungssystem zusammen mit den Anfangswerten zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Mittels numerischer Integration wurde $\mathbf{y}(t)$ über den Zeitraum $0 \leq t \leq T$ berechnet und mit N Zwischenpunkten gespeichert. Der Einschrittfehler \mathbf{e}_{n+1} dieser Bahn nach $n + 1$ Schritten ist gegeben durch

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1} - \varphi(\mathbf{y}_n). \quad (\text{D.1})$$

\mathbf{y}_n sei hierbei der Zustand des Systems nach n Schritten, mit $n \leq N$ und $\varphi(\mathbf{y}_n)$ die exakte Abbildung dieses Zustandes auf den Zeitpunkt nach $n + 1$ Schritten. Für die Differenz zwischen der exakten Abbildung und der numerischen Lösung gilt außerdem für die gesamte Integrationszeit T : $\|\mathbf{y}_{n+1} - \varphi(\mathbf{y}_n)\| < \delta$. Innerhalb dieser δ -Umgebung befindet sich daher neben der numerisch berechneten Bahn auch immer eine exakte Lösung des Systems. Die Ursache für diese Differenz liegt u. a. in den unvermeidlichen numerischen Fehlern bei der Berechnung und wird in Quinlan und Tremaine (1992) ganz allgemein als Rauschen (*noise*) bezeichnet. Dabei ändert ein Fehler zum Zeitpunkt n gleichzeitig die Anfangsbedingungen für den darauf folgenden Schritt und beeinflusst somit die Entwicklung des gesamten Systems. Ziel der Berechnung einer Schattenbahn ist es, einen verbesserten Orbit $\tilde{\mathbf{y}}$ mit weniger Rauschen zu finden - für $\delta = 0$ entspricht dies einem wahren Orbit des Systems. Dieser verbesserte Orbit wird berechnet mit

$$\tilde{\mathbf{y}}_n = \mathbf{y}_n + \delta \mathbf{y}_n. \quad (\text{D.2})$$

Die Verbesserung $\delta \mathbf{y}_n$ ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (D.1) und (D.2) zu

$$\delta \mathbf{y}_{n+1} = \tilde{\mathbf{y}}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1} = \varphi(\tilde{\mathbf{y}}_n) - \mathbf{e}_{n+1} - \varphi(\mathbf{y}_n) \quad (\text{D.3})$$

Unter der Annahme, dass der Einschrittfehler nur sehr klein ist, kann $\varphi(\tilde{\mathbf{y}}_n)$ in eine Taylor-Reihe um \mathbf{y}_n entwickelt werden. Berücksichtigt man lediglich die linearen Terme erhält man

$$\varphi(\tilde{\mathbf{y}}_n) = \varphi(\mathbf{y}_n) + \mathbf{J}_n \cdot \delta \mathbf{y}_n, \quad (\text{D.4})$$

wobei mit \mathbf{J} die Jacobi-Matrix des Differentialgleichungssystems bezeichnet werden soll. Gleichung (D.3) lässt sich nun schreiben als

$$\delta \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{J}_n \cdot \delta \mathbf{y}_n - \mathbf{e}_{n+1}. \quad (\text{D.5})$$

Der Einschrittfehler wird üblicherweise mit einer numerischen Methode berechnet, welche sehr viel genauer ist als diejenige, mit welcher $\mathbf{y}(t)$ ursprünglich berechnet wurde. Mit dieser Methode wird das System erneut vom Zwischenpunkt n zum jeweils nächsten Zwischenpunkt integriert. Mit Gleichung (D.1) lässt sich dann \mathbf{e}_{n+1} abschätzen. Ist das zu untersuchende System nicht chaotisch, dann können mit diesem Vorgehen mit Hilfe von Gleichung (D.5) die Verbesserungen $\delta\mathbf{y}$ und damit auch eine verbesserte Bahn $\tilde{\mathbf{y}}$ berechnet werden. Bei chaotischen Systemen hingegen werden kleine Fehler in Gleichung (D.5) verstärkt, so dass die abgeleiteten Verbesserungen nach wenigen Schritten durch diese numerischen Fehler bestimmt werden.

Es zeigt sich, dass der Phasenraum eines 2-dimensionalen Systems zwei ausgezeichnete, zeitabhängige Richtungen besitzt: eine *expandierende* (oder instabile) und eine *kontrahierende* (oder stabile) Richtung. Während infinitesimal kleine Fehler in expandierender Richtung exponentiell anwachsen, werden Fehler in kontrahierender Richtung mit der Zeit kleiner. Integriert man rückwärts in der Zeit, dann vertauschen diese beiden Richtungen ihre Rollen. Da alle infinitesimalen Fehler anwachsen, sofern sie nicht exakt in der kontrahierenden Richtung liegen, sei im folgenden unter der expandierenden Richtung die maximal instabile Richtung verstanden. Wie schnell die Fehler im Mittel in den einzelnen Richtungen anwachsen, wird dabei durch die beiden Lyapunov-Exponenten (siehe Kapitel 2.4.1) beschrieben.

Für das weitere Vorgehen wird angenommen, dass die durch die Jacobi-Matrix repräsentierte Abbildung eine solche expandierende und eine kontrahierende Richtung besitzt. Diese beiden Richtungen stehen dabei nicht zwangsläufig senkrecht aufeinander, der Winkel zwischen ihnen ist aber ungleich Null. Die Einheitsvektoren in stabiler (\mathbf{s}) und instabiler (\mathbf{u}) Richtungen seien

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \frac{\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{s}_n}{\|\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{s}_n\|} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \frac{\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_n}{\|\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_n\|}. \end{aligned} \tag{D.6}$$

Für hyperbolische Systeme lässt sich zeigen (Anosov (1967)), dass diese beiden Vektoren niemals in die gleiche Richtung zeigen. Für nicht-hyperbolische Systeme kann ein Schattenorbit gefunden werden, so lange der Winkel zwischen \mathbf{u}_n und \mathbf{s}_n ungleich Null ist.

Das Ziel ist es, die Verbesserungen $\delta\mathbf{y}$ unter Berücksichtigung der stabilen und instabilen Richtung für alle N Zwischenpunkte zu finden und damit dann die berechnete Bahn zu verbessern. Die Einschrittfehler \mathbf{e}_n und $\delta\mathbf{y}_n$ lassen sich mit den beiden Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{s} und entsprechenden Koeffizienten α, β, η und ζ schreiben als

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{y}_n &= \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_n \mathbf{s}_n \\ \mathbf{e}_n &= \eta_n \mathbf{u}_n + \zeta_n \mathbf{s}_n. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Den Vektor \mathbf{u}_n findet man dabei durch Vorwärtsiteration ($n = 0, \dots, N$) von (D.6) mit einem zufälligen Anfangsvektor \mathbf{u}_0 . Für \mathbf{s}_n iteriert man rückwärts ($n = N, \dots, 0$). Die Vektoren richten sich dabei nach einer kurzen transienten Phase sehr schnell nach der stabilen bzw. instabilen Richtung aus. Die Koeffizienten η_n und ζ_n lassen sich dann direkt aus der obigen Gleichung bestimmen. Mit Hilfe von Gleichung (D.5) lässt sich die

Beziehung zwischen diesen Koeffizienten angeben als

$$\alpha_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} + \beta_{n+1}\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{J}_n \cdot (\alpha_n\mathbf{u}_n + \beta_n\mathbf{s}_n) - (\eta_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} + \zeta_{n+1}\mathbf{s}_{n+1}). \quad (\text{D.8})$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Vektoren (Gleichung (D.6)) ein, so ergibt sich eine Rekursionsformel für die Berechnung von α_n und β_n . Da auch bei der Berechnung der Koeffizienten die Fehler in Richtung von \mathbf{u} verstärkt werden, beginnt man für α_n bei $n = N$, da diese der stabilen Richtung bei einer Integration rückwärts in der Zeit entspricht. Für β_n ist bei $n = 0$ zu beginnen. Die entsprechenden Formeln lauten dann

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 0, & \alpha_n &= \frac{\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}}{\|\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_n\|} \\ \beta_0 &= 0, & \beta_{n+1} &= \|\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{s}_n\| \beta_n - \zeta_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Die Festlegung $\alpha_N = 0$ und $\beta_0 = 0$ wurde dabei entsprechend Quinlan und Tremaine (1992) gewählt, ist aber nicht zwingend. Die beiden Startwerte müssen lediglich klein sein - kleiner als die maximal zulässige δ -Umgebung. Durch die nahezu beliebige Wahl der Anfangswerte der Koeffizienten ergibt sich, dass auch unendlich viele Schattenbahnen zu einer numerisch berechneten Bahn $\mathbf{y}(t)$ existieren.

Nach Verbesserung der numerischen Bahn $\mathbf{y}(t)$ kann dieser Vorgang wiederholt werden. In Folge dessen konvergiert die berechnete Bahn gegen einen Schattenorbit. Sind die Ein-schrittfehler klein genug, dann verdoppeln sich die signifikanten Stellen der verbesserten Bahn bei jeder Iteration (Quinlan und Tremaine (1992)).

Literaturverzeichnis

- Anosov, V. (1967): *Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature*, Proc. Steklov Inst. Math, **90**.
- Arnold, V. I. (1988): *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, Berlin.
- Arnold, V. I. (1989): *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics)*. 2. Auflage, Springer-Verlag.
- Beaugé, C. (1994): *Asymmetric liberations in exterior resonances*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **60**, S. 225–248.
- Benettin, G. u. a. (1980): *Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory*, Meccanica, **15**, S. 9–20, Heft 1.
- Beutler, G. (2005): *Methods of celestial mechanics. Vol. I: Physical, mathematical, and numerical principles*. Springer, Berlin Astronomy and Astrophysics Library.
- Brouwer, D. (1937): *On the accumulation of errors in numerical integration*, Astron. J., **46**, S. 149–153.
- Buie, M. W. u. a. (2003): *Procedures, Resources and Selected Results of the Deep Ecliptic Survey*, Earth Moon and Planets, **92**, S. 113–124.
- Chambers, J. E. (1999): *A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **304**, S. 793–799.
- Cincotta, P. M., Giordano, C. M. und Simó, C. (2003): *Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **182**, S. 151–178.
- Cincotta, P. M. und Simó, C. (2000): *Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I*, Astron. Astrophys., **147**, S. 205–228.
- Delsanti, A. und Jewitt, D. (2006): *The Solar System Beyond The Planets*. Solar System Update, S. 267–293.
- Duncan, M. J., Levison, H. F. und Budd, S. M. (1995): *The Dynamical Structure of the Kuiper Belt*, Astron. J., **110**, S. 3073–3081.
- Duncan, M. J., Quinn, T. und Tremaine, S. (1988): *The origin of short-period comets*, Astrophys. J., **328**, S. 69–73.
- Edgeworth, K. E. (1949): *The origin and evolution of the Solar System*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **109**, S. 600–609.

- Feng, K. (1991): *Formal power series and numerical algorithms for dynamical systems*. In: Chan, T. und Sh, Z.-C. (Hrsg.): Proceedings of international conference on scientific computation, Hangzhou, China.
- Fernández, J. A. (1980): *On the existence of a comet belt beyond Neptune*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **192**, S. 481–491.
- Fernández, J. A. und Ip, W.-H. (1984): *Some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune - The exchange of orbital angular momentum with planetesimals*, Icarus, **58**, S. 109–120.
- Froeschlé, C., Guzzo, M. und Lega, E. (2000): *Graphical Evolution of the Arnold Web: From Order to Chaos*, Science, **289**, S. 2108–2110, Heft 5487.
- Gladman, B. u. a. (2001): *The Structure of the Kuiper Belt: Size Distribution and Radial Extent*, Astron. J., **122**, S. 1051–1066.
- Goldstein, H. (1991): *Klassische Mechanik*. 11. Auflage, AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden.
- Gomes, R. S. (2003): *The origin of the Kuiper Belt high-inclination population*, Icarus, **161**, S. 404–418.
- Gomes, R. S. u. a. (2005): *Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets*, Nature, **435**, S. 466–469.
- Gragg, W. (1965): *On Extrapolation Algorithms for Ordinary Initial Value Problems*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Series B, Numerical Analysis, **2**, S. 384–403, Heft 3.
- Grazier, K. R. u. a. (2005): *Achieving Brouwer's law with high-order Störmer multistep methods*. In: May, R. und Roberts, A. J. (Hrsg.): Proc. of 12th Computational Techniques and Applications Conference CTAC-2004, S. 786–804.
- Grebogi, C. u. a. (1990): *Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement*, Phys. Rev. Lett., **65**, S. 1527–1530, Heft 13.
- Hairer, E., Lubich, C. und Wanner, G. (2002): *Geometric Numerical Integration*. Springer Series in Computational Mathematics.
- Hairer, E., Lubich, C. und Wanner, G. (2003): *Geometric numerical integration illustrated by the Stormer-Verlet method*, Acta Numerica.
- Hairer, E., Nørsett, S. P. und Wanner, G. (1987): *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer-Verlag.
- Holman, M. J. und Murray, N. W. (1996): *Chaos in High-Order Mean Resonances in the Outer Asteroid Belt*, Astron. J., **112**, S. 1278–1293.
- Holman, M. J. und Wisdom, J. (1993): *Dynamical stability in the outer solar system and the delivery of short period comets*, Astron. J., **105**, S. 1987–1999.

- Jewitt, D. (1999): *Kuiper Belt Objects*, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, **27**, S. 287–312.
- Jewitt, D. und Luu, J. (1993): *Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB1*, Nature, **362**, S. 730–732.
- Jorba, A. und Zou, M. (2001): *A software package for the numerical integration of ODE by means of high-order Taylor methods*, Experimental Mathematics, **14**, S. 99–117.
- Kahan, W. und Li, R.-C. (1997): *Composition constants for raising the orders of unconventional schemes for ordinary differential equations*, Math. Comput., **66**, S. 1089–1099, Heft 219.
- Knežević, Z. und Ninkovic, S. (2005): *On the reliability of computation of maximum Lyapunov Characteristic Exponents for asteroids*. In: Knezevic, Z. und Milani, A. (Hrsg.): IAU Colloq. 197: Dynamics of Populations of Planetary Systems, S. 187–194.
- Knežević, Z. u. a. (1991): *Secular resonances from 2 to 50 AU*, Icarus, **93**, S. 316–330.
- Kozai, Y. (1962): *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*, Astron. J., **67**, S. 591–598.
- Kuiper, G. P. (1951): *On the Origin of the Solar System*. In: Hynek, J. A. (Hrsg.): Proceedings of a topical symposium, New York: McGraw-Hill, 1951, edited by Hynek, J.A., p.357, S. 357–371.
- Laskar, J. (1990): *The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones*, Icarus, **88**, S. 266–291.
- Laskar, J. (1993): *Frequency analysis for multi-dimensional systems: global dynamics and diffusion*, Physica D, **67**, S. 257–281.
- Laskar, J. und Robutel, P. (2001): *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **80**, S. 39–62.
- Levison, H. F. und Duncan, M. J. (1993): *The gravitational sculpting of the Kuiper belt*, Astrophys. J., **406**, S. 35–38.
- Levison, H. F. u. a. (2007): *Origin of the Structure of the Kuiper Belt during a Dynamical Instability in the Orbits of Uranus and Neptune*, ArXiv e-prints, **712**.
- Lichtenberg, A. J. und Leibermann, M. A. (1992): *Regular and Chaotic Dynamics*, Jg. 38 of Applied Mathematical Sciences. 2. Auflage.
- Lykawka, P. S. und Mukai, T. (2005): *Exploring the 7:4 mean motion resonance I: Dynamical evolution of classical transneptunian objects*, Planetary and Space Science, **53**, S. 1175–1187.
- Malhotra, R. (1993): *The Origin of Pluto's Peculiar Orbit*, Nature, **365**, S. 819–821.
- Malhotra, R. (1995): *The Origin of Pluto's Orbit: Implications for the Solar System Beyond Neptune*, Astron. J., **110**, S. 420–429.

- Milani, A. und Knežević, Z. (1992): *Asteroid proper elements and secular resonances*, Icarus, **98**, S. 211–232.
- Milani, A. und Nobili, A. M. (1988): *Integration error over very long time spans*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **43**, S. 1–34.
- Milani, A. und Nobili, A. M. (1993): *Asteroid 522 Helga is Chaotic and Stable*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **56**, S. 323–324.
- Morbidelli, A. (1997): *Chaotic Diffusion and the Origin of Comets from the 2/3 Resonance in the Kuiper Belt*, Icarus, **127**, S. 1–12.
- Morbidelli, A. (2002): *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*. Advances in Astronomy and Astrophysics, London: Taylor & Francis.
- Morbidelli, A. und Henrard, J. (1991): *The main secular resonances ν_6 , ν_5 and ν_{16} in the asteroid belt*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **51**, S. 169–197.
- Morbidelli, A., Levison, H. F. und Gomes, R. S. (2007): *The Dynamical Structure of the Kuiper Belt and its Primordial Origin*, ArXiv Astrophysics e-prints.
- Morbidelli, A. und Moons, M. (1993): *Secular resonances in mean motion commensurabilities - The 2/1 and 3/2 cases*, Icarus, **102**, S. 316–332.
- Morbidelli, A. und Nesvorný, D. (1999): *Numerous Weak Resonances Drive Asteroids toward Terrestrial Planets Orbits*, Icarus, **139**, S. 295–308.
- Murray, C. D. und Dermott, S. F. (2000): *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- Nesvorný, D. und Ferraz-Mello, S. (1997): *Chaotic diffusion in the 2/1 asteroidal resonance. an application of the frequency map analysis.*, Astron. Astrophys., **320**, S. 672–680.
- Nesvorný, D. und Roig, F. (2000): *Mean Motion Resonances in the Trans-neptunian Region I. The 2:3 Resonance with Neptune*, Icarus, **148**, S. 282–300.
- Nesvorný, D. und Roig, F. (2001): *Mean Motion Resonances in the Transneptunian Region Part II: The 1 : 2, 3 : 4, and Weaker Resonances*, Icarus, **150**, S. 104–123.
- Nesvorný, D., Roig, F. und Ferraz-Mello, S. (2000): *Close Approaches of Trans-Neptunian Objects to Pluto Have Left Observable Signatures on Their Orbital Distribution*, Astron. J., **119**, S. 953–969.
- Peale, S. J. (1976): *Orbital resonances in the solar system*, Annual review of astronomy and astrophysics, **14**, S. 215–246.
- Poincaré, H. (1899): *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*. Paris: Gauthier-Villars.
- Press, W. H. u. a. (1992): *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. 2. Auflage, Cambridge: University Press.

- Quinlan, G. D. und Tremaine, S. (1992): *On the reliability of gravitational N-body integrations*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **259**, S. 505–518.
- Quinn, T., Tremaine, S. und Duncan, M. J. (1990): *Planetary perturbations and the origins of short-period comets*, Astrophys. J., **355**, S. 667–679.
- Rebhan, E. (2006): *Theoretische Physik*, Jg. 1. Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag, München.
- Robutel, P. und Laskar, J. (2001): *Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. Short Period Dynamics of Massless Particles*, Icarus, **152**, S. 4–28.
- Sanz-Serna, J. (1992): *Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview*, Jg. 1. Acta Numerica, S. 243–286.
- Schmidt, S. (2001): *Die Berechnung der Lyapunov-Zeit für viele Asteroiden*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2001.
- Thomas, F. und Morbidelli, A. (1996): *The Kozai Resonance in the Outer Solar System and the Dynamics of Long-Period Comets*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **64**, S. 209–229.
- Torbett, M. V. und Smoluchowski, R. (1990): *Chaotic motion in a primordial comet disk beyond Neptune and comet influx to the solar system*, Nature, **345**, S. 49–51.
- Tsiganis, K. u. a. (2005): *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System*, Nature, **435**, S. 459–461.
- Šidlichovský, M. (1999): *Resonances and chaos in the asteroid belt*. In: IAU Colloq. 173: Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets, S. 297–308.
- Šidlichovský, M. und Gerlach, E. (2008): *Secular evolution of exoplanetary systems and close encounters*. In: IAU Symposium Nr. 249 - EXOPLANETS: Detection, Formation and Dynamics, S. 479–484.
- Virtanen, J. u. a. (2008): *Transneptunian Orbit Computation*, Kapitel I. The Solar System Beyond Neptune, S. 25–40.
- Wan, X.-S. und Huang, T.-Y. (2007): *An exploration of the Kozai resonance in the Kuiper Belt*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **377**, S. 133–141.
- Weissman, P. R. und Levison, H. F. (1997): *The Population of the Trans-Neptunian Region: the Pluto-Charon Environment*. Pluto and Charon, S. 559 ff.
- Weissman, P. R., McFadden, L.-A. und Johnson, T. V. (1999): *Encyclopedia of the solar system*. San Diego: Academic Press.
- Wilcox, R. R. (1997): *Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing*. Statistical Modelling and Decision Science, 1. Auflage.
- Wilkinson, J. H. (1960): *Error analysis of floating-point computation*, Numerische Mathematik, **2**, S. 319–340, Heft 1.

Wisdom, J. und Holman, M. (1991): *Symplectic maps for the n -body problem*, *Astron. J.*, **102**, S. 1528–1538.

Yoshida, H. (1993): *Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators*, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **56**, S. 27–43.

Danksagung

Diese Arbeit entstand im Rahmen eines kooperativen Promotionsverfahrens zwischen der TU Dresden und der HTW Dresden. Bedanken möchte ich mich daher in erster Linie bei meinen beiden Betreuern von diesen Institutionen. Bei Herrn Prof. Dr. phil. nat. habil. Michael Soffel für die kontinuierliche Unterstützung und Förderung meiner Arbeit, für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Geduld beim Erklären der höheren Mathematik. Und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Teichert, welcher in mir das Interesse an astronomischer Forschung weckte und die Betreuung von Seiten der HTW Dresden übernahm.

Mein Dank gilt allen meinen Kollegen vom Institut für Astronomie und dem Lohrmann-Observatorium der TU Dresden. Insbesondere bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. habil. Sergei A. Klioner für die vielen sehr hilfreichen Diskussionen und den Beistand bei den großen und kleinen “Kämpfen” und bei Herrn Dr.-Ing. Helfried Potthoff für das Auffinden zahlreicher Schreibfehler und grammatikalischer Mängel dieser Arbeit.

Ich bedanke mich bei Herrn Dr. Miloš Šidlichovký vom Astronomischen Institut Prag für die geduldige Einführung in die verschiedenen himmelsmechanischen Methoden, für die fruchtbare, sehr angenehme Zusammenarbeit und die vielen Tassen Espresso.

An dieser Stelle bedanken möchte ich mich auch beim Kanzler der HTW Dresden, Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Ihme und bei Herrn Dipl.-Ing. Friedhard Förster vom Dezernat für Personalangelegenheiten der HTW Dresden, für die finanzielle Förderung dieser Arbeit aus Mitteln des Hochschul- und Wissenschaftsprogrammes im Kalenderjahr 2006.

Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin Julia für die Aufmunterung und Energieerhaltung in den letzten Monaten und unserer Tochter Liv für jedes einzelne Lächeln.