

Zur hierarchischen und simultanen Multi-Skalen-Analyse von Textilbeton

An der Fakultät Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Dresden
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) eingereichte
Dissertation

von

INGOLF G. LEPENIES

aus Dresden

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Bernd W. Zastrau
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Manfred Curbach
Mitberichter:	Prof. Christian Meyer, Ph.D.
Tag der mündlichen Prüfung:	15. November 2007

Für Doris

Worte des Dankes

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke der Technischen Universität Dresden in den Jahren 1999 bis 2007.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau für die umfassende Betreuung meiner Doktorarbeit, die Übernahme des Hauptreferates, die Förderung meiner wissenschaftlichen und persönlichen Entwicklung, seine Unterstützung bei außergewöhnlichen Problemstellungen und die fordernden und anregenden Diskussionen zu jeder Zeit.

Weiterhin bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Professor Dr.-Ing. Manfred Curbach für die Übernahme des Koreferates und die Schaffung des ausgezeichneten wissenschaftlichen Klimas, das ich während meiner Forschungstätigkeit in Dresden genießen durfte.

Herrn Professor Christian Meyer, Ph.D. danke ich für die Übernahme des Koreferates sowie für die wertvollen Anregungen und Diskussionen zu dieser Arbeit.

Allen derzeitigen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhles für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke danke ich für die sehr freundschaftliche Zusammenarbeit, die vielen wertvollen Ratschläge und die stete Hilfsbereitschaft. Das kollegiale Arbeitsklima hat sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich mich bei meinen Kollegen Prof. Dr.-Ing. Curt Neuberg, Dr.-Ing. Sabine Damme, Dr.-Ing. Norbert Donath, Dr.-Ing. Jan Matheas, Frau Isolde Piesche, Dr.-Ing. Günter Pohl, Dr.-Ing. Mike Richter, Dr.-Ing. Rainer Schlebusch und Dipl.-Ing. Wolfgang Weber für die vielen hilfreichen Diskussionen bedanken.

Mein ganz spezieller Dank gilt meinem Kollegen Mike Richter für die langjährige Zusammenarbeit in der Arbeitsgruppe Material. Herrn Rainer Schlebusch danke ich für die tatkräftige Unterstützung in allen Fragen im Zusammenhang mit \LaTeX sowie für die äußerst verständnisorientierten Diskussionen zu Fragen der Mechanik.

Bedanken möchte ich mich ausdrücklich bei den Kollegen im Sonderforschungsbereich 528 für die gute Zusammenarbeit im Rahmen der gemeinsamen interdisziplinären Forschung zum Thema Textilbeton. Mein spezieller Dank gilt den Brüdern Dr.-Ing. Frank Jesse und Dipl.-Ing. Dirk Jesse sowie dem Dipl.-Ing. Marko Butler für die Bereitstellung und Diskussion der extraordinären Experimentaldaten, welche maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Stellvertretend für alle Studenten, die im Laufe meiner Tätigkeit eine wertvolle Hilfe bei der Textilbeton-Forschung waren, danke ich den Herren Michael Huth und Andreas Franze für ihre unermüdliche Unterstützung. Mein Dank gilt auch Dr. Frank Schlaphof für die vielen fachgebietsübergreifenden Diskussionen im Zusammenhang mit dieser Arbeit. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchte ich für die finanzielle Unterstützung während meiner Tätigkeit an der TU Dresden danken.

Ein herzliches Dankeschön gilt meiner liebevollen Familie, vor allem meinen Eltern und meiner Frau Doris, für den außergewöhnlichen Rückhalt und die Unterstützung, die ich in allen Phasen der Promotion von ihnen erhalten habe.

Dresden, im August 2007

Ingolf G. Lepenies

Kurzfassung:

Die Arbeit widmet sich der Simulation und der Prognose des Materialverhaltens des Hochleistungsverbundwerkstoffes Textilbeton unter Zugbeanspruchungen. Basierend auf einer hierarchischen mechanischen Modellbildung (Multi-Skalen-Analyse) werden die Tragmechanismen des Verbundwerkstoffes auf drei Strukturebenen abgebildet. Damit lassen sich die den Verbundwerkstoff charakterisierenden mechanischen Kenngrößen aus experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten ableiten. Diese Kenngrößen sind mit heutiger Messtechnik nicht direkt experimentell bestimmbar.

Es wird ein **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell (MMM-Prognosemodell)** für Textilbeton entwickelt, das basierend auf der Simulation des Mikrostrukturverhaltens das makroskopische Materialverhalten prognostiziert. Die Grundlage dafür bildet die qualitative und quantitative Bestimmung der Verbundeigenschaften zwischen der Filamentbewehrung und der einbettenden Matrix. Für das Verbundverhalten von Rovings in einer Feinbetonmatrix wird, ausgehend von einer Rovingapproximation mit superelliptischem Querschnitt, die partielle Imprägnierung des Rovings und die daraus resultierende Verbundwirkung identifiziert und simuliert.

Auf Grundlage der mikro- und mesomechanischen Modelle sowie der Kalibrierung und Verifizierung des **MMM-Prognosemodells** durch die Simulation von Filament- und Rovingauszugsversuchen wird das makroskopische Zugverhalten von Textilbeton mit Mehrfachrissbildung prognostiziert. Die numerischen Ergebnisse werden durch die Ergebnisse der experimentellen Dehnkörperversuche validiert.

Das **MMM-Prognosemodell** für Textilbeton wird im Rahmen einer hierarchischen Multi-Skalen-Analyse auf Zugversuche von Textilbetonbauteilen angewendet. Weiterhin wird die Verstärkungswirkung einer Textilbetonschicht an Stahlbetonbauteilen unter Biegebeanspruchung zutreffend simuliert. Es wird das nichtlineare Bauteilverhalten abgebildet, wobei die Bauteildurchbiegung, die effektiven Rovingbeanspruchungen und die Beanspruchungen der Filamente im Roving abgebildet werden.

Schlüsselworte: Multi-Skalen-Methoden, Homogenisierung, Verbundwerkstoff, Faser-Matrix Verbund, Materialtheorie, Finite-Elemente-Methode, Rissmodelle

Abstract:

The present work deals with the simulation and the prediction of the effective material behavior of the high performance composite textile reinforced concrete (TRC) subjected to tension. Based on a hierarchical material model within a multi scale approach the load bearing mechanisms of TRC are modeled on three structural scales. Therewith, the mechanical parameters characterizing the composite material can be deduced indirectly by experimentally determined force displacement relations obtained from roving pullout tests. These parameters cannot be obtained by contemporary measuring techniques directly.

A micro-meso-macro-prediction model (MMM-PM) for TRC is developed, predicting the macroscopic material behavior by means of simulations of the microscopic and the mesoscopic material behavior. The basis is the qualitative and quantitative identification of the bond properties of the roving-matrix system. The partial impregnation of the rovings and the corresponding varying bond qualities are identified to characterize the bond behavior of rovings in a fine-grained concrete matrix. The huge variety of roving cross-sections is approximated by superellipses on the meso scale.

The macroscopic behavior of TRC subjected to tension including multiple cracking of the matrix material is correctly predicted on the basis of the micro- and meso-mechanical models. The calibration and verification of the MMM-PM is performed by simulations of roving pullout tests, whereas a first validation is carried out by a comparison of the numerical predictions with the experimental data from tensile tests.

The MMM-PM for TRC is applied to tensile tests of structural members made of TRC. Furthermore, a steel-reinforced concrete plate strengthened by a TRC layer is accurately simulated yielding the macroscopic deflection of the plate, the mesoscopic stress state of the roving and the microscopic stresses of the filaments.

Keywords: multi scale methods, homogenization, composite material, fiber-matrix composite, theory of materials, finite element method, crack models

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xxi
1 Einleitung	1
1.1 Ziele der Arbeit	1
1.2 Gliederung der Arbeit	2
2 Charakterisierung der Werkstoffe und des Werkstoffverhaltens von Textilbeton	3
2.1 Textilbeton – Begriffsbestimmung, Merkmale und Eigenschaften	3
2.2 AR-Glasfilamente	6
2.3 Rovings aus AR-Glasfilamenten	8
2.4 Feinbeton	10
2.5 Rovingeinbettung	15
2.6 Filament-Matrix-Verbundwirkung	18
2.7 Schädigungsmechanismen und Versagensarten von Textilbeton	20
2.8 Anwendungsgebiete für Textilbeton	21
3 Konzepte zur makroskopischen Materialbeschreibung von Textilbeton	25
3.1 Schädigungsmechanik	26
3.2 Plastizitätstheorie	27
3.2.1 Fließflächen	27
3.2.2 Fließregeln	27
3.2.3 Inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Abhängigkeiten	27
3.2.4 Integration der konstitutiven Beziehungen	29
3.2.5 Parameteranpassung für ein makroskopisches Materialmodell	29
3.3 Microplane-Modell	30
3.4 Bruchmechanik	31
4 Entwicklung einer Multi-Skalen-Analyse für Textilbeton	33
4.1 Aufgabenstellung	33
4.2 Lösungsweg	35
5 Hierarchisches Multi-Skalen-Materialmodell für Textilbeton	39
5.1 Definition der Strukturebenen für das Mikro-Meso-Makro-Materialmodell	39
5.2 Rovingapproximationen	41
5.2.1 Mikromechanische Rovingmodelle	41
5.2.2 Mesomechanische Rovingmodelle	43
5.3 Mehrskalennalysen	48
5.4 Homogenisierung	49
5.4.1 Fundamentale Mikro-Meso-Makro-Konzepte	50
5.4.2 Abgeleitete Zellmethoden mit repräsentativen Volumenelementen und Materialregionen	54

6	Bestimmung effektiver Materialeigenschaften von Textilbeton	57
6.1	Homogenisierung für den Meso-Makro-Skalenübergang	57
6.2	Analytische Homogenisierung	57
6.2.1	Homogenisierungsmethoden	58
6.2.2	ESHELBYs Einbettungsverfahren	60
6.2.3	Wechselwirkungsfreie Einschlüsse	63
6.2.4	Effektive-Feld-Theorie	64
6.3	Numerische Homogenisierung	65
6.3.1	Grundlastfälle	65
6.3.2	Bestimmung der effektiven Parameter des Elastizitätstensors	66
6.3.3	Randbedingungen	67
6.3.4	Diskretisierung der repräsentativen Volumenelemente	68
6.3.5	Materialabhängige Vernetzung der repräsentativen Volumenelemente	68
6.3.6	Materialunabhängige Vernetzung der repräsentativen Volumenelemente	69
6.3.7	Variation der Elementgröße	70
6.3.8	Effektive Eigenschaften von orthogonal bewehrtem Textilbeton	73
6.3.9	Ausblick auf inelastisches Materialverhalten - Induzierte Anisotropie	74
7	Hierarchische und simultane Multiskalenanalysen	75
7.1	Klassifikation der Multiskalenanalyse	75
7.2	Anwendung der simultanen Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode FE^2 auf Textilbeton	76
7.3	Anforderungen an ein mesomechanisches Modell für Textilbeton	79
8	Hierarchische Materialbeschreibung von Textilbeton durch das Mikro-Meso-Makro- Prognosemodell	81
8.1	Verbundmodelle	81
8.1.1	Herleitung der Verbund-Differentialgleichung	82
8.1.2	Lösung der Verbund-Differentialgleichung für konstante Schubspannungen	84
8.2	Semi-analytisches Verbundmodell	85
8.2.1	Definition der Randbedingungen bei Auszugsversuchen	85
8.2.2	Beschreibung des semi-analytischen Verbundmodells	86
8.2.3	Analyse des Auszugsverhaltens einer homogenen Bewehrung (Filament)	87
8.2.4	Simulation des Filamentauszugsversuches	90
8.3	Haftbrückenmodell	91
8.3.1	Diskontinuierliche Verbundbeschreibung	92
8.3.2	Kontinuierliche Verbundbeschreibung	93
8.4	Faserbündelmodelle	95
8.4.1	Pfropfenmodell	95
8.4.2	Filamentbündelmodell	100
8.5	Erweitertes semi-analytisches Verbundmodell	102
8.5.1	Charakterisierung des Auszugsversuchs von Rovings	102

8.5.2	Simulation des Auszugsversuchs von Rovings	104
8.6	Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell für das makroskopische Materialverhalten . .	108
8.6.1	Prognose des effektiven Materialverhaltens für uniaxiale Beanspruchungen	108
8.6.2	Simulation des effektiven Materialverhaltens für biaxiale Beanspruchungen	115
9	Anwendung des Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells für Textilbeton	123
9.1	Simulation von Dehnkörpern aus Textilbeton	123
9.1.1	Charakterisierung des Dehnkörperversuches	123
9.1.2	Rissabstände in Dehnkörpern	123
9.1.3	Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Berücksichtigung des Nachbruchverhaltens von Feinbeton	126
9.1.4	Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Filamentfestigkeitsvarianz	127
9.1.5	Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Filamentfestigkeitsmittelwerte	127
9.1.6	Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Matrixbruchspannung	128
9.1.7	Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der elastischen Eigenschaften des Fasermaterials	129
9.2	Simulation textilbetonverstärkter Platten unter Biegebeanspruchung	131
10	Zusammenfassung und Ausblick	137
10.1	Zusammenfassung	137
10.2	Ausblick	139
	Literaturverzeichnis	141
	Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	149
	Glossar	151
	Anhang	157
A	Elastizitätstheorie	157
A.1	Notation	157
A.2	Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	157
A.3	Anisotropie	158
A.4	Grafische Repräsentation des Elastizitätstensors	159
A.5	Monotropie	160
A.6	Orthotropie	161
A.7	Transversale Isotropie	162
A.8	Isotropie	163
B	Anmerkungen zur Finite-Elemente-Methode	164

C	Verbundgesetze	167
C.1	Verbundmodell nach SOH	167
C.2	Simulation des Stahlauszugsversuches	168
D	Superelliptische Rovingquerschnittsformen	170
E	Biaxiales Materialverhalten von Textilbeton	172
F	WEIBULL-Verteilung	177
G	Natürliche Tragstrukturen aus Glas – Der Glasschwamm	179

Abbildungsverzeichnis

2.1	Textile Struktur in Feinbeton [CURBACH ET AL. 2007]	3
2.2	Vergleich von unbewehrten, kurzfaserbewehrten und textilbewehrten Bauteilen unter einer Biegebeanspruchung nach [CURBACH ET AL. 2007]	4
2.3	Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten bei Variation des Bewehrungsgrades nach [JESSE 2004]	5
2.4	Unterschiedliche Tragwirkung von Rovings gleicher Garnfeinheit in Schuss- und Kettrichtung eines in einer Feinbetonmatrix eingebetteten Geleges	6
2.5	Verschiedene Molekularstrukturen des Glases	6
2.6	Querschnittsformen der Filamente in Abhängigkeit der Düsenform nach [WALCZAK 2002]	8
2.7	Textile Bewehrung nach [CURBACH ET AL. 2007]	8
2.8	Zugverhalten von Glas als Filament, als Roving und als textile Struktur nach [CURBACH ET AL. 2007]	9
2.9	Zusammensetzung der Betonmatrices nach [BUTLER et al. 2004]	10
2.10	Hydratationsprodukte des Portlandzementklinkers nach [BUTLER et al. 2004]	11
2.11	Uniaxiales Materialverhalten des Betons C20/25	12
2.12	Eingebettete Rovings in einer Feinbetonmatrix nach [JESSE 2004]	13
2.13	Nachbruchverhalten von Beton	14
2.14	Querschnittsformen von Rovings nach [JESSE 2004]	16
2.15	Tomographieaufnahme eines eingebetteten Rovings nach [SCHULZ 2005]	17
2.16	Matrixoberfläche nach Entfernen der Filamente [HEMPEL et al. 2005]	17
2.17	Rovinglängsschnitt	18
2.18	Versagensarten von Textilbeton	20
2.19	Unterscheidung der Verbund-Interfaces	21
2.20	Anwendungsbeispiele für Textilbeton	22
2.21	Verformungen und Rissuferverschiebungen für unterschiedliche Verzerrungszustände von gerissenem Textilbeton	23
3.1	Diagramm zur Veranschaulichung unterschiedlichen Materialverhaltens	25
3.2	Materialbeschreibung von Textilbeton mittels eines makroskopischen Materialmodells	29
3.3	Microplane-Modell nach [LEUKART 2005]	30
3.4	Bruchmechanische Rissmodi	31
4.1	Das MMM-Prognosemodell für Textilbeton	38
5.1	Definition der Strukturebenen für Textilbeton	39
5.2	Idealisierung der Materialstruktur von Textilbeton auf der Mikro-, Meso und Makroebene	40
5.3	Beispiel eines repräsentativen Volumenelementes	41
5.4	Theoretische Anordnungen der Filamente	41
5.5	Mikromechanische Approximation des Rovings (Mi-IIb-Modell) (Feinheit $Tt = 310 \text{ tex}$, Aspektverhältnis $a : b = 5$, dichteste Packung, 343 gerissene Filamente)	42

5.6	Darstellung des Umfangs einzelner Rovingschichten bei dichtester Packung . . .	42
5.7	Effektiv wirksamer Umfang eines Filamentes im Roving	43
5.8	Effektiv wirksamer Umfang eines Rovings	43
5.9	Superellipsen	44
5.10	Idealisierungen eines Rovings	44
5.11	Superellipsen ($a = 2, 0; b = 1, 0; r = 0, 5 \dots 40$)	45
5.12	Generalisierte Superellipsen mit unterschiedlichen Parametern	46
5.13	Geometrieapproximation von Rovings mittels Superellipsen	46
5.14	Geometrieapproximation eines Rovings mit generalisierten Superellipsen	47
5.15	Geometrieapproximation eines Rovingbündels (4 Einzelrovings)	47
5.16	Schema der Homogenisierung des $\mathcal{RV}\mathcal{E}$	49
5.17	Mögliche Einheitszellen bei Verbundmaterialien mit regelmäßiger Struktur	51
5.18	Visualisierung der Voraussetzungen bei der Wahl eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$	52
5.19	Mögliche Randbedingungen des Gebietes \mathcal{Y}	54
5.20	Schematische Darstellung zur Modellierung textilbewehrter Mikrostrukturen	54
6.1	Heterogene Mikrostruktur mit Einschluss	58
6.2	ESHELBYs Einbettungsverfahren nach [BAYREUTHER 2005]	61
6.3	Zelle mit periodischen Randbedingungen	67
6.4	Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen	67
6.5	Formen von $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ mit unterschiedlichen Gelegearten	69
6.6	Maßgebender Punkt für die Materialzuweisung	69
6.7	Beschreibung der Rovinggeometrie im $\mathcal{RV}\mathcal{E}$	70
6.8	Geometrieapproximation in Abhängigkeit von der Elementgröße	71
6.9	Stereografische Projektion der orthotropen Elastizitätstensoren	73
6.10	Induzierte Anisotropie infolge Schädigung des Verbundwerkstoffes	74
7.1	Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode nach [FEYEL & CHABOCHE 2001]	75
7.2	Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode	76
7.3	Beispielrechnung einer simultanen Multi-Skalen-Analyse mit dem Programm- paket ZSET	77
7.4	Roving-Matrix-Modell (Me-I-Modell)	79
8.1	Hysterese eines Filament-Pull-Push-Versuches nach [MÄDER et al. 2004]	82
8.2	Auszug eines homogenen Bewehrungselementes	83
8.3	Arten von Auszugsversuchen	86
8.4	Auszug mit unterschiedlichen Randbedingungen, Kraft-Verschiebungs-Abhängig- keiten	87
8.5	Auszug einer Faser mit $\tau(s) = \tau = const.$ pro Segment des Interface	88
8.6	Beanspruchungszustände im Faser-Matrix-Interface	89
8.7	Simulation des Filamentauszugsversuches mit dem Mi-I-Modell – Vergleich Experiment-Simulation	91
8.8	Mikroskopaufnahme eines Rovings im Längsschnitt [HEMPEL et al. 2005] und angenommene Haftbrückenverteilung im Roving	92
8.9	Spannungsprofil im unbeschichteten und beschichteten Roving	92

8.10	Haftbrückenmodell: Schichtenmodell mit diskontinuierlichem Verbund	93
8.11	Haftbrückenmodell: kontinuierliche Verbundbeschreibung	94
8.12	Faserbündelmodelle	95
8.13	Haftbrückenverteilung im Roving	96
8.14	Spannungsverteilung im Roving	97
8.15	Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit	98
8.16	Qualitative Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit	99
8.17	Versagen von Rovings mit und ohne Matrixeinbettung	100
8.18	Berücksichtigung der streuenden Filamentfestigkeiten bei der Bestimmung des effektiven Rovingverhaltens	100
8.19	Simulierte Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit eines imprägnierten Rovings inkl. Schädigungsevolution infolge Filamentversagen	101
8.20	Werte und Streubereiche von $\varepsilon_{F_{\max}}$ und ε_{\max} der Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit eines imprägnierten Rovings in Abhängigkeit vom Rovingaspektverhältnis $a : b$. . .	101
8.21	Probekörper für den doppelseitigen Auszugsversuch	102
8.22	Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit (1 Roving ($Tt = 310 \text{ tex}$))	103
8.23	Zerlegung der Kraft-Rissöffnungs-Kurve	103
8.24	F - v -Abhängigkeiten für elastische und plastische Entlastung	104
8.25	Vergleich Experiment - Simulation	105
8.26	Doppelseitiger Auszugsversuch (1 Roving - $Tt = 620 \text{ tex}$)	106
8.27	Auswertung der doppelseitigen Auszugsversuche – Experimentelle Ergebnisse [BUTLER 2000]	107
8.28	Abhängigkeit der Schubspannung τ vom Aspektverhältnis $a : b$ bei $\tau_{u_{\text{rov}}} = \text{const.}$	107
8.29	Identifizierte Verbundfestigkeit in (ungetauchten) Rovings (Abhängigkeit von dem Filamentdurchmesser)	108
8.30	Statistische Verteilung der Rissabstände	109
8.31	Numerische Simulationen des Dehnkörperversuches mit minimaler, mittlerer und maximaler Rissanzahl	110
8.32	Numerische Simulationen des effektiven Materialverhaltens	111
8.33	Einfluss des Rovingverhaltens und des Nachbruchverhaltens der Matrix auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton	112
8.34	Implementierte Schubspannungs-Schlupf-Modelle im Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell	114
8.35	Simulation von Textilbeton unter Schwellbelastung	114
8.36	Verschiebungsfeld $v(x, y)$ des Probekörpers bei Belastung in x -Richtung	115
8.37	Qualitative Darstellung der Hauptdehnungen $\varepsilon_I(x, y)$ im Probekörper für unterschiedliche Belastungspfade	115
8.38	Beanspruchung eines Risssystems	116
8.39	Biegung der Filamente infolge schräger Rissbildung	118
8.40	Schräge Rissüberbrückung	119
8.41	Einfluss der Neigung der Rovings gegenüber der Rissfläche auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton bei gleich bleibender Rovinganzahl im Riss	120
9.1	Uniaxialer Dehnkörperversuch	124

9.2	Dehnkörperversuch: Simulation und Experiment bei Variation der Rovinganzahl je Probekörper	125
9.3	Einfluss des Nachbruchverhaltens des Feinbetons auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation des Größtkorns der Matrix)	126
9.4	Einfluss der Filamentfestigkeitsverteilung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation des Formbeiwertes nach WEIBULL)	127
9.5	Einfluss der Filamentfestigkeitsverteilung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation der charakteristischen Festigkeit nach WEIBULL)	128
9.6	Einfluss der Matrixbruchspannung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton	129
9.7	Einfluss des Fasermaterials auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton	129
9.8	Biegung von Bauteilen mit Makrorissen	131
9.9	Textilbetonverstärkte Stahlbetonplatte [WEILAND et al. 2006]	132
9.10	Simulation des Verhaltens einer unverstärkten Stahlbetonplatte im 4-Punkt-Biegeversuch	133
9.11	Simulation des Verhaltens einer textilbetonverstärkten Platte im 4-Punkt-Biegeversuch	134
9.12	Sammelriss im Stahlbeton-Textilbetonverbund	135
10.1	Eingeführte Strukturebenen für das Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell für Textilbeton	137
A.1	Stereografische Projektion des Elastizitätstensors	159
A.2	Stereografische Projektion des monotropen Elastizitätstensors	160
A.3	Stereografische Projektion des orthotropen Elastizitätstensors	162
A.4	Stereografische Projektion des transversal-isotropen Elastizitätstensors	163
A.5	Stereografische Projektion des isotropen Elastizitätstensors	163
B.1	Kollokationspunkte im Finiten Element	165
B.2	Schublocking: Geometrie der Testplatte	165
B.3	ANS-Benchmark - Plattentest mit 8-Knoten-Volumen-Element	166
C.1	Verbundmodell nach [SOH et al. 1999]	168
C.2	Gemessene Größen im Stahlauszugsversuch	169
C.3	Simulation des Auszugsverhaltens von Stahl aus einer Betonmatrix	169
D.1	Schichtenmodell eines Rovings mit superelliptischem Querschnitt	170
D.2	Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 1,9 : 1; r = 2,1; 155\text{tex}$ (SFB528-B1-089-09-01)	170
D.3	Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 11 : 1; r = 2,2; 310\text{tex}$ (SFB528-B1-004-03-07)	171
D.4	Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 7 : 1; r = 1,8; 620\text{tex}$ (SFB528-B1-014-02-02)	171
D.5	Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 6 : 1; r = 2,2; 620\text{tex}$ (SFB528-B1-014-02-08)	171
D.6	Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 7 : 1; r = 2,1; 1100\text{tex}$ (SFB528-B1-021-02-07)	171
E.1	Probekörper für Biaxialversuche nach [JESSE et al. 2006]	172

E.2	Interpoliertes Verschiebungsfeld $v(x, y)$ des Probekörpers	173
E.3	Berechnete Verzerrungsfelder $\varepsilon_{11}(x, y)$	173
E.4	Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit unter biaxialer Zugbeanspruchung	174
E.5	Belastungspfade nach [JESSE et al. 2006]	175
E.6	Auswertung der Biaxialversuche (Experiment nach [JESSE et al. 2006])	175
F.1	WEIBULL-Verteilung	177
G.1	Der Glasschwamm Euplectella [FRATZL 2005b]	179

Tabellenverzeichnis

2.1	Mechanische Eigenschaften der AR-Glasfaser nach [CURBACH ET AL. 2007] . . .	7
2.2	Zusammensetzung von AR-Glasfasern [CEM-FIL 2001, GAO et al. 2003]	7
2.3	Mechanische Eigenschaften des Feinbetons (m . . . Matrix)	12
8.1	Übergangspunkte für quasi-duktilen Verhalten in Abhängigkeit vom Spannungsprofil im Roving	99
A.1	Dehnungs- und Spannungsnotationen	159

1 Einleitung

Der stete Wunsch, in der Bautechnik immer tragfähigere Bauwerke mit immer geringerem Materialaufwand zu realisieren, lenkte die Aufmerksamkeit auf Komposite, welche die positiven Eigenschaften verschiedener Materialien in einem Verbundwerkstoff vereinen. Es haben sich z. B. bewehrte Betonkonstruktionen durchgesetzt, welche die hohen Druckfestigkeiten des Betons und die hohen Zugfestigkeiten der Bewehrung kombinieren.

Eine starke Motivation bei der Entwicklung neuer Verbundwerkstoffe ging von den Erkenntnissen der Bionikforschung aus. Am Beispiel des Glasschwamms *Euplectella* konnte die enorme Stabilität von Glasfaserstrukturen studiert werden [FRATZL 2005b], vgl. Anhang G. Das Geheimnis der äußerst stabilen Tragstruktur des Glasschwamms liegt in der optimalen Anordnung von Materialien auf hierarchisch geordneten Strukturebenen, welche vom Nanometer- bis zum Zentimeterbereich reichen. Dies ist für die heutige (Bau-)Technik von großem Interesse.

Nachdem in der letzten Hälfte des 20. Jahrhunderts neue leistungsfähige Textilfasern entwickelt worden sind, ließen sich vor allem Ingenieure aus der Luft- und Raumfahrt, der Fahrzeugtechnik, dem Maschinenbau und dem Bauwesen von deren hervorragenden Eigenschaften inspirieren. Dies führte zu einer Vielzahl an erfolgreich eingesetzten Kompositen mit vorwiegend organischen Matrices, z. B. den faserverstärkten Kunststoffen.

Im Bauwesen kam es zur Entwicklung der neuartigen Baustoffe Kurzfaser- und Textilbeton. Der Kurzfaserbeton – auch Faserbeton genannt – konnte sich schnell durchsetzen. Der Textilbeton (TRC), welcher Glas-Filamentgarne als Bewehrung nutzt, fand auf Grund von anfänglichen Dauerhaftigkeitsproblemen noch keine großen Einsatzgebiete. Erst nach der Formulierung der speziellen Anforderungen an die Faserbewehrung und die zementgebundene Matrix wurde z. B. in der Textilindustrie eine für Textilbeton geeignete alkaliresistente Glasfaser (AR-Glasfaser) entwickelt.

Während das Verhalten einzelner Fasern plausibel mit mechanischen Modellen abbildbar ist, gilt das Verhalten eines Faserbündels in einer Betonmatrix als noch nicht vollständig verstanden. Neuartige textile Flächengebilde in Form multiaxialer textiler Bewehrungsstrukturen, eingebettet in einer zementgebundenen Matrix, waren bis 1999 nahezu unerforscht. Deshalb ist das Verhalten dieser relativ kostengünstigen anorganischen Glas- und Karbonfasern als Bewehrung einer Betonmatrix ein aktueller Schwerpunkt der Grundlagenforschung an der RWTH Aachen und an der TU Dresden (DFG Sonderforschungsbereiche 532 und 528).

1.1 Ziele der Arbeit

Im Zusammenhang mit diesen Aktivitäten soll die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur mechanischen Beschreibung des Verbundwerkstoffes Textilbeton (TRC) liefern. Ziel ist es, basierend auf einem hierarchischen Materialmodell das Materialverhalten von Textilbeton zu prognostizieren. Dafür sind die maßgeblichen Tragmechanismen auf unterschiedlichen Strukturebenen zu identifizieren und mit mechanischen Modellen abzubilden. Die Strukturebenen erstrecken sich dabei vom Mikrometer- bis zum Meter-Bereich. Dazu soll in dieser Arbeit eine Multiskalenanalyse entwickelt und angewendet werden, die das Filamentverhalten im Mikrometerbereich, das Rovingverhalten im Millimeterbereich und das Bauteilverhalten im Meterbereich verknüpft.

Um den Verbundwerkstoff Textilbeton als Standardmaterial in der Bautechnik etablieren zu können, bedarf es eines allgemeingültigen Bemessungskonzeptes. Zu dessen Entwicklung soll die vorliegende Arbeit die notwendigen Materialgesetze¹ liefern.

¹ konstitutive Beziehungen

Dementsprechend zielt die vorliegende Arbeit darauf ab, ein effizientes, modular aufgebautes Prognose-Werkzeug – nachfolgend als **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell (MMM-Prognosemodell)** bezeichnet – für das uniaxiale mechanische Verhalten von Textilbeton unter Zugbeanspruchung zu entwickeln. Die notwendigen Parameter für derartige Prognosen sollen auf experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten aus unterbewehrten Zugproben bei Auszugsversuchen basieren. Ziel ist die Simulation des Verbundverhaltens für beliebige schlupfbasierte Verbundgesetze.

Die Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton soll sich auf ein realitätsnahes Simulationsmodell stützen, das hierarchisch gegliederte Strukturmodelle verknüpft. Damit sollen sowohl die verschiedenartigen Schädigungs- und Versagensmechanismen als auch die für Textilbetonbauteile charakteristischen Beanspruchungen berücksichtigt werden. Dies beinhaltet die Simulation des sukzessiven Versagens der textilen Bewehrung, des Verbundes und des Versagens der Matrix. Eine Delamination einzelner Schichten des Textilbetons ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Im Hinblick auf zukünftige Entwicklungsschwerpunkte soll das MMM-Prognosewerkzeug für zwei zusätzliche Anwendungen einsetzbar sein. Zum Einen soll das Werkzeug Parameterstudien ermöglichen, mit denen sich die Möglichkeiten und Grenzen einer textilen Bewehrung in einer Feinbetonmatrix bestimmen lassen. Ziel ist dabei die Optimierung des Verbundwerkstoffes Textilbeton hinsichtlich bauspezifischer Anforderungen, z. B. der Traglast, der Materialausnutzung sowie der Quasi-Duktilität. Zum Anderen soll die Verstärkungswirkung bestehender Stahlbeton-Bauteile durch zusätzliche Textilbetonschichten realitätsnah im Rahmen einer hierarchischen bzw. einer integrierten Multi-Skalen-Analyse abgeschätzt werden.

1.2 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert.

Der Stand der Wissenschaft und Technik zum Thema Textilbeton wird in den Kapiteln 2 und 3 zusammengefasst. In Kapitel 2 wird das in Experimenten ermittelte Verhalten des Hochleistungsverbundwerkstoffes Textilbeton charakterisiert. Es werden die Besonderheiten von Textilbeton, seine Vor- und Nachteile im Vergleich zu anderen (Verbund-)Werkstoffen diskutiert. Ausgehend von der experimentellen Beschreibung der Einzelwerkstoffe wird das Gesamttragverhalten des Verbundwerkstoffes Textilbeton dargestellt. Hierbei sind für Textilbeton spezifische Phänomene zu beobachten, welche unterschiedlichen Strukturebenen des Verbundwerkstoffes zugeordnet werden können. Passend dazu existieren mechanische Modelle zur Abbildung der beobachteten Phänomene des Verbundwerkstoffes. In Kapitel 3 werden Modelle und Methoden zur Beschreibung von Materialien im Allgemeinen kurz vorgestellt und ihre Eignung für die Simulation von Textilbeton diskutiert.

Der zweite Teil der Arbeit widmet sich der Analyse von Textilbeton mit dem Ziel, ein Prognosewerkzeug für das Materialverhalten von Textilbeton (**Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell**) zu entwickeln. Basierend auf den dargestellten Erkenntnissen aus den Kapiteln 2 und 3 wird in den Kapiteln 4 ff. die Beschreibung von Textilbeton mittels hierarchischer und simultaner Multiskalenmodelle entwickelt. Eine detaillierte Übersicht über die entwickelten Modelle wird in Kapitel 4 gegeben. Das entwickelte **MMM-Prognosewerkzeug** wird anhand mikro- bzw. mesoskopischer Versuche kalibriert, bevor es anhand von zwei makroskopischen Bauteilversuchen validiert wird.

Auf Grund des interdisziplinären Themas ist der Leser vielleicht nur eingeschränkt mit dem verwendeten Fachvokabular vertraut. Ein Glossar mit den wichtigsten Begriffen ist deshalb beigelegt.

2 Charakterisierung der Werkstoffe und des Werkstoffverhaltens von Textilbeton

2.1 Textilbeton – Begriffsbestimmung, Merkmale und Eigenschaften

Der Textilbeton als Verbundwerkstoff gehört zu einer Generation neuer Werkstoffe, an deren Entwicklung seit wenigen Jahrzehnten intensiv gearbeitet wird, wie Glasfaser-Kunstharz-Verbund, Chemiefaser-Kunstharz-Verbund und Glasfaser-Chemiefaser-Verbund (z. B. Glasfaser und Polypropylen (PP), Whisker-Metall-Verbund).

Textilbeton ist ein Hochleistungsverbundwerkstoff, der der Bauindustrie neue Impulse verleihen soll, vor allem bei der Instandsetzung bzw. Verstärkung bestehender Stahlbetonbauwerke und bei den vielfältigen Bemühungen um Leichtbaukonstruktionen aus Beton.

Im Vergleich zu den anderen Verbundwerkstoffen befindet sich Textilbeton noch im Entwicklungsstadium und dementsprechend sind wesentliche Fragen ungeklärt. Angesichts der Kombination aus Bau- und Textiltechnik ist eine interdisziplinäre Betrachtung der Problemstellung notwendig.

Der Textilbeton, welcher Gegenstand dieser Arbeit ist, besteht aus einer Feinbeton-Matrix und einer flächigen Textilstruktur geringer Fadendichte (Abb. 2.1). Die Textilstruktur besteht aus Multifilamentgarnen in Rovingform (vgl. Abschnitt 2.3), wobei neben klassischen Gelegegeometrien auch multiaxiale Strukturen verwendet werden. Das Textil wirkt als Zugbewehrung, wobei die Textilstruktur hinsichtlich Bewehrungsmenge und Bewehrungsausrichtung für das spätere Einsatzgebiet optimiert werden kann.

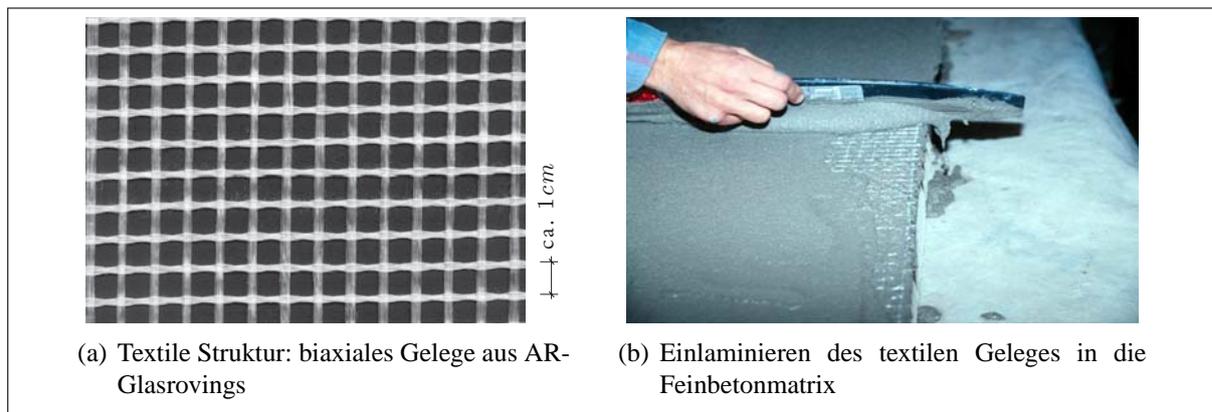


Abbildung 2.1: Textile Struktur in Feinbeton [CURBACH ET AL. 2007]

Textilbeton unterscheidet sich von einem Kurzfaserbeton durch die Aufmachung² der textilen Bewehrung. Textile Kurzfasern, die teilweise als geschnittene Rovings bündelförmig vorliegen, werden dem Zement bei der Kurzfaserbetonherstellung beigefügt [GRZYBOWSKI & MEYER 1993, FRIEDRICH 2000, THOMEE & SCHIKORA 2003]. Die gezielte Orientierung der Kurzfasern ist nur in sehr beschränktem Ausmaß möglich. Eine Herstellung mit dem Spritzbetonverfahren bzw. Laminierverfahren führt zu einer flächigen Anordnung der Kurzfasern senkrecht zur Spritzrichtung bzw. Betonierichtung.

Die textile Bewehrung durch Rovings wird gegenwärtig als Ergänzung oder auch als Ersatz der bisher verwendeten Stahlbewehrung für Betonkonstruktionen betrachtet. Der augenscheinliche Vorteil einer textilen Bewehrung liegt in der erheblich reduzierten Betondeckung, welche bei üblichen

² vgl. Glossar

Stahlbetonkonstruktionen zwischen 2, 5 und 5 cm liegt und bei Textilbetonbauteilen auf einen Millimeter verringert werden kann. Dadurch sind völlig neue, für Betonkonstruktionen bisher unübliche, filigrane Bauteilabmessungen realisierbar.

Von anderen Hochleistungsverbundwerkstoffen unterscheidet sich der Textilbeton durch charakteristische Merkmale. Zum Einen ist der vergleichsweise sehr geringe Bewehrungsanteil (1 – 10 Volumenprozent) zu erwähnen, welcher um ca. eine Größenordnung geringer ist als bei glasfaserverstärkten Kunststoffen. Zum Anderen ist die textile Struktur in einer heterogenen Matrix eingebettet, in der sich grobkörnige Anteile befinden, die um den Faktor 50 bis 100 größer sind als der Filamentdurchmesser.

In Übereinstimmung mit anderen Verbundwerkstoffen haben sich bei Textilbeton Textilgelege und spezielle Gewirke durchgesetzt, um die für Gewebe typischen festigkeitsreduzierenden Fadenkrümmungen zu vermeiden.

Die Vorteile von Textilbeton gegenüber Kurzfaserbeton bzw. unbewehrtem Beton sollen anhand von Abb. 2.2 erläutert werden. Im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 528 wurden u. a. Balken (Hohlkästen mit Rechteckquerschnitt) aus unbewehrtem, kurzfaserbewehrtem und textilbewehrtem Beton unter Biegebeanspruchung untersucht.

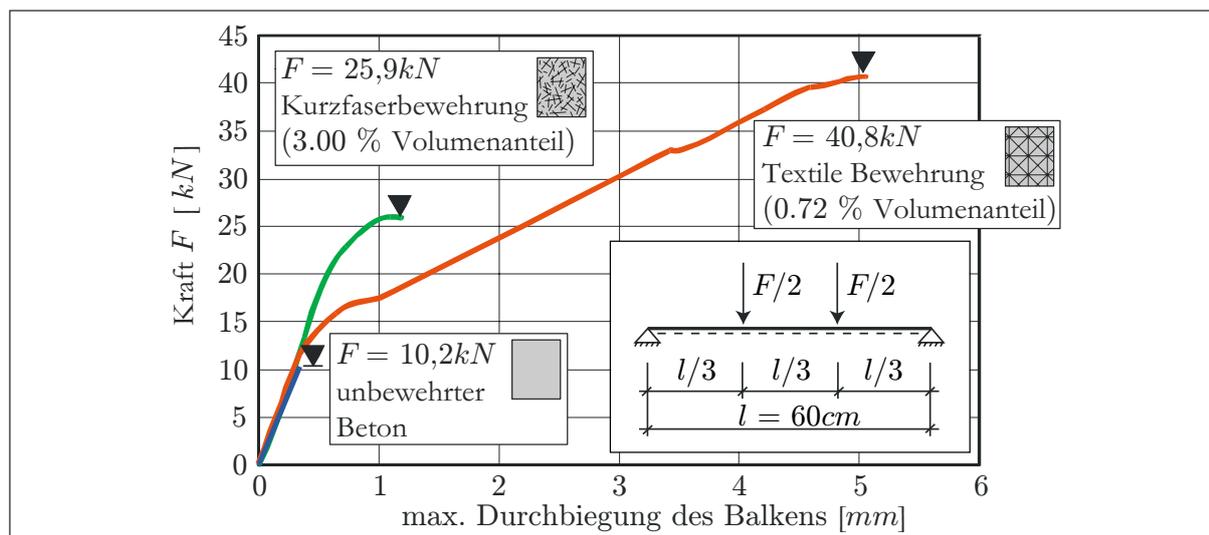


Abbildung 2.2: Vergleich von unbewehrten, kurzfaserbewehrten und textilbewehrten Bauteilen unter einer Biegebeanspruchung nach [CURBACH ET AL. 2007]

Während ein unbewehrter Betonprobekörper nach der Erstrissbildung im Beton komplett versagt, kann eine mit Kurzfasern bewehrte Betonprobe die 2, 6-fache Last abtragen. Der Textilbetonprobekörper zeichnet sich durch eine 4-fache Bruchlast gegenüber der unbewehrten Probe aus. Zudem ist die Quasi-Duktilität, d. h. die Verformbarkeit bis zum vollständigen Versagen, wesentlich größer als bei der Kurzfaserbetonprobe, obwohl nur etwa ein Viertel der Bewehrungsmenge verwendet wurde. Der Vorteil von Textilbeton gegenüber Kurzfaserbeton liegt darin, dass die Textilbewehrung beanspruchungsgerecht eingelegt werden kann und die textilen Bewehrungsstrukturen größere rissüberbrückende Kräfte übertragen können.

Textilbeton ist auf Grund seines schichtweisen Aufbaus mit multiaxialen Bewehrungslagen (vgl. Abb. 2.1(a)) immer dreidimensional anisotrop, d. h. er verhält sich richtungsabhängig, selbst wenn die Feinbetonmatrix als nahezu isotrop angenommen werden kann. Der Typ der Anisotropie kann

jedoch abhängig von der Bewehrungsstruktur eingegrenzt werden, d. h. die Anzahl der unabhängigen Materialparameter kann für bestimmte Symmetrien des Verbundmaterials bestimmt werden, vgl. Anhang A.3.

Von besonderem Interesse ist das Zugverhalten von Textilbeton. [JESSE 2004] untersuchte zahlreiche Einflussfaktoren auf das Zugverhalten von Textilbetonproben, u.a. die Rovinganzahl bei einer schichtweisen Anordnung der Rovings. Abbildung 2.3 zeigt beispielsweise die mittlere Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Abhängigkeit von schichtweise unidirektional angeordneten Rovings.

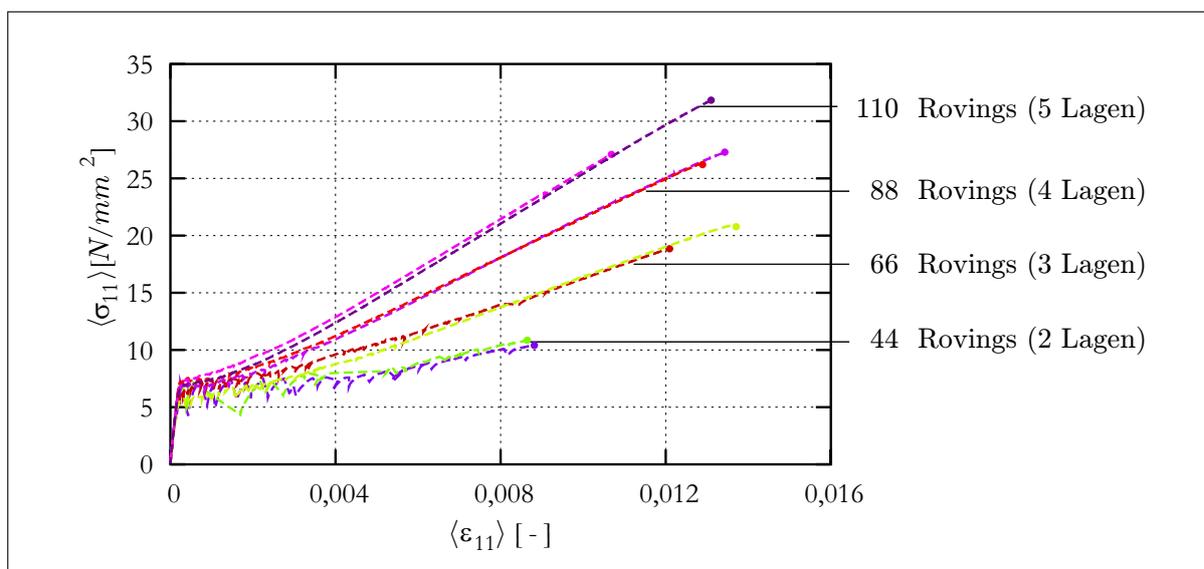


Abbildung 2.3: Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten bei Variation des Bewehrungsgrades nach [JESSE 2004]

Das Zugverhalten ist also durch die Bewehrungsmenge gezielt beeinflussbar. Kapitel 9.1 widmet sich dieser speziellen makroskopischen Materialeigenschaft. Wie [JESSE 2004, JESSE et al. 2006] zeigten, hängt die Bewehrungswirkung auch von der textilen Aufmachung ab. Beispielsweise verhalten sich Rovings in einem textilen Gelege anders als unidirektional angeordnete Rovings. Ebenso konnte auch eine unterschiedliche Bewehrungswirkung von Schuss- und Kettrovings gleicher Garnfeinheit bei den uni- und biaxialen Dehnkörperversuchen mit orthogonalen Gelegestrukturen beobachtet werden [JESSE et al. 2006], vgl. Abb. 2.4.

Dies läßt sich mit unterschiedlichen Rovingquerschnittsformen erklären, die sich aus den Herstellungsbedingungen der Gelege ergeben. [JESSE 2004] spricht auch von einer Verbundstörung infolge des Nähfadens. Das von [JESSE et al. 2006] experimentell bestimmte Verhalten von Textilbeton unter multiaxialer Beanspruchung ist in Anhang E zum Vergleich dargestellt.

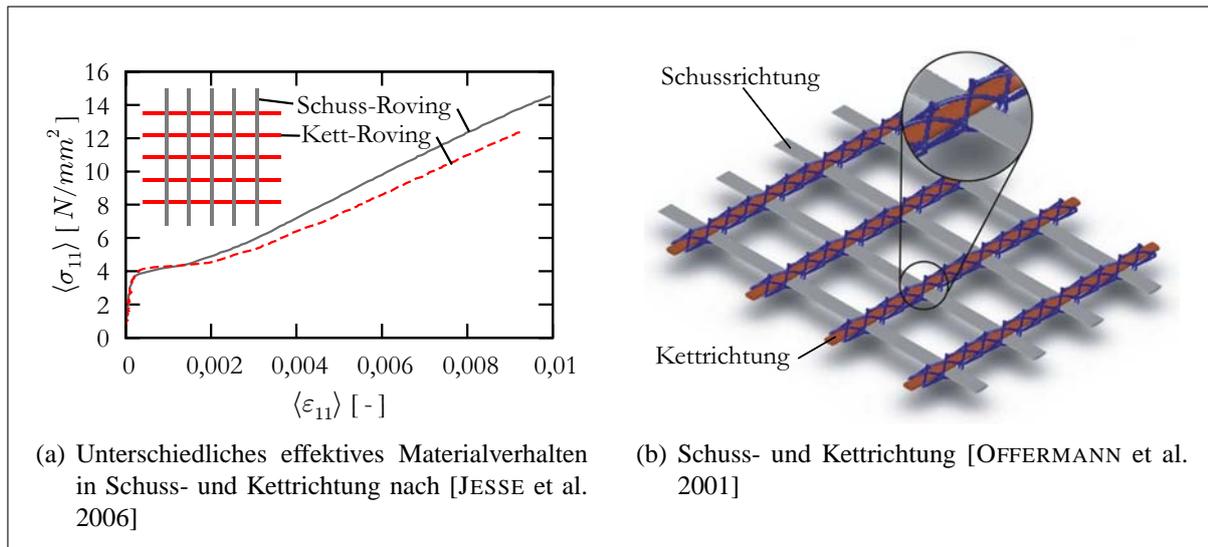


Abbildung 2.4: Unterschiedliche Tragwirkung von Rovings gleicher Garnfeinheit in Schuss- und Kettrichtung eines in einer Feinbetonmatrix eingebetteten Geleges

2.2 AR-Glasfilamente

Als Bewehrungsmaterial für Textilbeton wird vorwiegend AR-Glas verwendet. Die textile Bewehrung besteht z. B. aus AR-Glasfilamentbündeln. Ein einzelnes AR-Glas-Filament hat einen Durchmesser von ca. $10 - 30 \mu m$, abhängig von der Ziehgeschwindigkeit bei der Herstellung.

Glas ist als amorphes Fluid aufzufassen, d. h. es besteht aus einer nicht kristallinen Substanz [RENNERT 1988]. Die Struktur von Glas ist ein unregelmäßig angeordnetes Netzwerk des Oxides des Netzwerkbildners Silizium (Si).

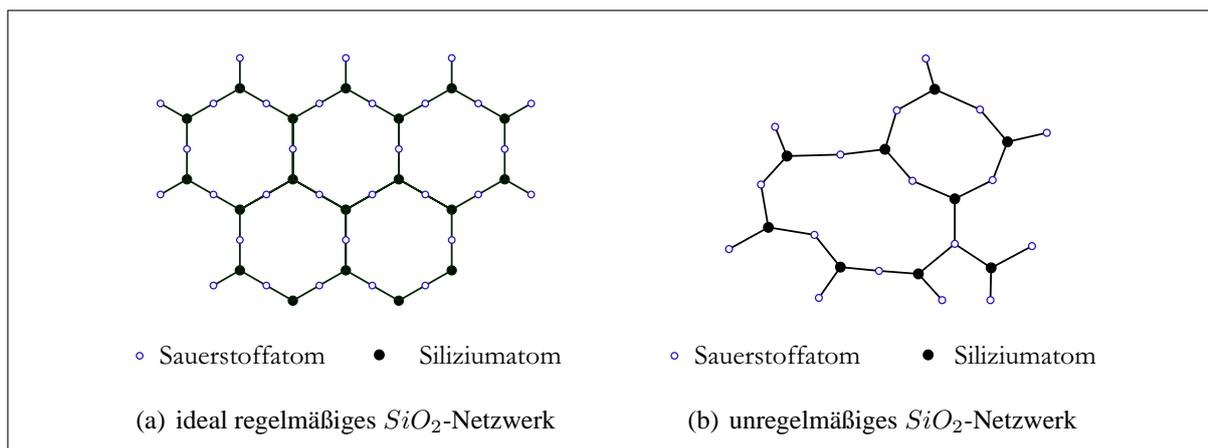


Abbildung 2.5: Verschiedene Molekularstrukturen des Glases

Die Glasfaser ist eine anorganische Faser (Abb. 2.5), welche aus geschmolzenem Glas einer bestimmten Zusammensetzung gezogen wird. Sie besteht im Wesentlichen aus Quarzsand, Kalkstein, Kaolin, Kalziumfluorid (Flussspat), Borsäure, Natriumsulfat und Tonerde [BERGER et al. 1993]. Verarbeiten lässt sich die Glasfaser auf diversen Textilmaschinen. Eine Glasfaser eignet sich aufgrund der hohen Zugfestigkeit von bis zu $4000 N/mm^2$ sehr gut als Bewehrungselement.

Die amorphe Siliziumdioxid-Struktur (SiO_2) strebt einen energetisch günstigeren Zustand an. Diese für Textilbeton unerwünschte Umwandlung (Hydrolyse) wird bei einer Einbettung in eine Betonmatrix, bedingt durch die $Ca(OH)_2$ -Phase der Matrix, zusätzlich angeregt [BUTLER et al. 2004]. Frühe Bestrebungen, Beton mit Glas zu bewehren, waren auf Grund der Hydrolyse des Glases in einer alkalischen Matrix nicht von Erfolg gekrönt, da das Bewehrungsmaterial innerhalb eines Jahres in ein Material mit einer relativ geringen Festigkeit umgewandelt wurde. Der Bewehrungseffekt der Glasfasern verschwand völlig.

Erst die Zugabe von Zirkoniumdioxid (ZrO_2) zur Glasschmelze bzw. in die Schlichte³ der Fasern verhinderte das Aufbrechen der $Si-O$ -Bindungen bzw. verzögerte die Hydrolyse in starkem Maße. Dies gewährleistet die Dauerhaftigkeit des Verbundwerkstoffes. Die Schlichte erlaubt nicht nur die textile Verarbeitbarkeit der relativ spröden Glasfasern, sie wirkt zusätzlich auch als Schutzschicht um die Faser, reduziert sogar durch Auffüllen kleiner Kerben in der Faseroberfläche die Kerbempfindlichkeit [MÄDER et al. 2004]. Der Zirkoniumanteil dieser modifizierten Glasfasern beträgt zwischen 15 – 18%. Auf Grund ihrer Resistenz gegenüber einer Hydrolyse⁴ in Beton wird diese Faserart als alkaliresistentes Glas (AR-Glas) bezeichnet.

Zusätzlich wurde der Beton der „2. Generation“ entwickelt, welcher sich durch einen niedrigeren pH-Wert und einen reduzierten Anteil an $Ca(OH)_2$ auszeichnet, vgl. Abschnitt 2.4.

Die mechanischen Eigenschaften der AR-Glasfaser sind in Tabelle 2.1 dargestellt. Die Glasfaser

E-Modul E_f	78000 N/mm ²
Querdehnzahl ν	0,25
Zugfestigkeit β_Z	1100 – 4000 N/mm ²

Tabelle 2.1: Mechanische Eigenschaften der AR-Glasfaser nach [CURBACH ET AL. 2007]

ist ein isotroper Werkstoff mit symmetrischem Materialverhalten unter Druck- und Zugbeanspruchung ($\sigma(\varepsilon) = -\sigma(-\varepsilon)$). Der Hersteller Saint-Gobain Vetrotex bietet z. B. eine alkali-resistente Glasfaser an. Die chemische Zusammensetzung für die AR-Glasfaser Cem-FIL[®] ist Tabelle 2.2 zu entnehmen.

Bestandteil	AR-Glasfaser	NEG AR-Glasfaser	CemFIL [®]
SiO_2	55 – 75 %	58,3 %	60,6 %
ZrO_2	15 – 20 %	21,2 %	18,1 %
Na_2O	11 – 21 %	13,0 %	14,1 %
K_2O	0 – 3 %	2,8 %	0,0 %
CaO, MgO	0 – 6 %	0,0 %	0,0 %
B_2O_3	0 – 2 %	0,0 %	0,0 %
Al_2O_3	0 – 5 %	0,2 %	0,2 %
TiO_2	0 – 3 %	2,8 %	0,1 %
F_2	0 – 2 %	0,0 %	0,0 %

Tabelle 2.2: Zusammensetzung von AR-Glasfasern [CEM-FIL 2001, GAO et al. 2003]

Der Querschnitt eines Filamentes ist entsprechend der Düsenform im Ziehprozess optimierbar, d. h. neben dem Kreisquerschnitt sind andere konvexe und konkave Querschnittsformen möglich (Abb. 2.6), vgl. [BERGER et al. 1993, ALBRECHT et al. 2000, WALCZAK 2002].

³ vgl. Glossar

⁴ Die Hydrolyse kann erst nach Auflösung der Schlichte erfolgen.

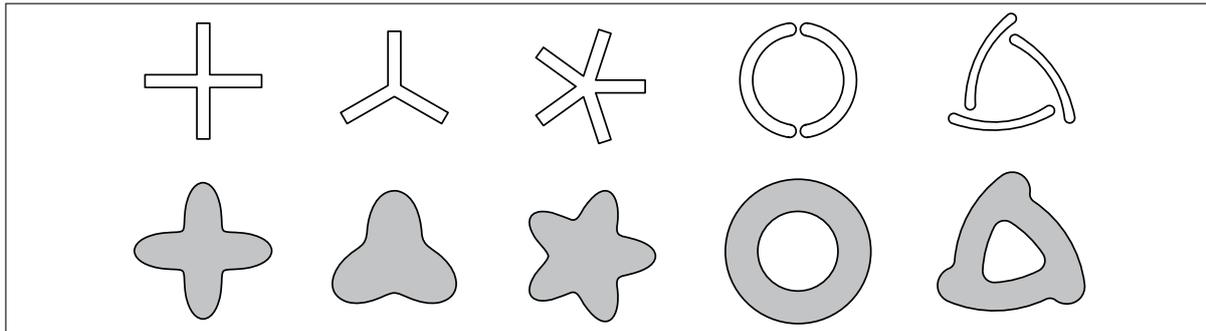


Abbildung 2.6: Querschnittsformen der Filamente in Abhängigkeit der Düsenform nach [WALCZAK 2002]

2.3 Rovings aus AR-Glasfilamenten

Ein Bündel von Filamenten wird im Allgemeinen als Multifilamentgarn bezeichnet. Von rovingförmigen Filamentgarnen – kurz Roving – spricht man, wenn ein ungedrehtes Bündel von Filamenten gemeint ist. Oft erhält der Roving zur besseren Verarbeitbarkeit einen Schutzdrall. Im Falle der hier betrachteten Rovings kann von ca. 5 Umdrehungen pro Meter Rovinglänge ausgegangen werden. Die Filamente sind ungekräuselt, also texturlos (z. B. keine Welligkeit).

Ein typischer Glasroving als Betonbewehrung besteht aus mindestens 400 und bis zu 2000 Filamenten (Endlosfasern), vgl. Abb 2.7. In der Textilindustrie werden typischerweise Filamentgarne mit 20 bis 200 Einzelfilamenten angewendet.

Im Unterschied zu der im Bauwesen üblichen Angabe eines Bewehrungsdurchmessers wird bei textilen Bewehrungen u. a. von Titer (Tt , $[Tt] = 1 \text{ tex}$) gesprochen (Abb. 2.7). Gemeint ist das spezifische Garngewicht, d. h. ein Roving mit einer Feinheit von 620 tex hat eine Masse von 620 g bei einer Länge von 1000 m ,

$$1 \text{ tex} = \frac{1 \text{ g}}{1000 \text{ m}}. \quad (2.1)$$

	Bezeichnung	Anzahl an Filamenten	Filamentdurchmesser	
	NEG 155 tex	400	$13.5 \mu\text{m}$	
	NEG 310 tex	800	$13.5 \mu\text{m}$	
	NEG 620 tex	1600	$13.5 \mu\text{m}$	
	NEG 1100 tex	2000	$16.1 \mu\text{m}$	
	NEG 2400 tex	1900	$24.3 \mu\text{m}$	
(a) Rovingfeinheit				(b) Rovingquerschnitt in der Feinbetonmatrix

Abbildung 2.7: Textile Bewehrung nach [CURBACH ET AL. 2007]

Abweichend zu der in dieser Arbeit verwendeten Definition hat ein Roving nach [WIKIPEDIA.DE-ROVING 2007] mindestens eine Garnfeinheit von 500 tex . Hier sollen auch Filamentgarne mit 400 Filamenten (155 tex) als Roving bezeichnet werden.

Die für Textilbeton wichtigste Eigenschaft ist die Verarbeitbarkeit der Rovings zu flächigen Textilstrukturen auf Textilmaschinen. 1995 präsentierte das Dresdner Textilinstitut eine spezielle Gelegetechnik zur Glasrovingverarbeitung [FRANZKE & BISCHOFF 1996]. Darauf basieren die in dieser Arbeit beschriebenen textilen Strukturen.

Die Rovings sind üblicherweise gerichtet angeordnet: entweder strangförmig, also unidirektional, oder flächenförmig mit bidirektionaler oder multidirektionaler Ausrichtung. Bevorzugt werden sie in Form von Textilstrukturen (z. B. Gelege und Gewirke) angewendet. Gewebe sind – wie bei anderen Verbundstoffen auch – von untergeordneter Bedeutung, weil die unvermeidliche Roving-Krümmung (bei der Umschlingung der Kettfäden um die Schussfäden und umgekehrt) die effektiv nutzbare Roving-Zugkraft erheblich mindert. Die Kreuzungsstellen der Rovings lassen sich bei Gelegen z. B. durch Nähfäden oder durch Bindemittel fixieren. Die in rascher Entwicklung befindliche Wirktechnik ermöglicht es beispielsweise, Rovings in beliebiger Position und Ausrichtung auf Trägerbahnen mittels Maschenbildung zu fixieren.

Die Sprödigkeit der Glasfasern und auch der alternativ eingesetzten Carbonfasern erfordert bei allen Verarbeitungsschritten zur textilen Struktur besondere Sorgfalt, damit möglichst wenige Filamente brechen.

Die verwendeten Flächengebilde zeichnen sich durch eine „offene Struktur“, also durch geringe Fadendichten (typische Größenordnung: 10 Rovings je 10 cm) aus. Dies fördert die gleichmäßige und vollständige Einbettung der Rovings in die pastöse Feinbetonmatrix.

Das Zugverhalten der textilen Bewehrung ist von der Aufmachung abhängig. Während der Zugversuch am Filament die Materialfestigkeit liefert, ergibt sich bei der Rovingprüfung eine sogenannte Bündelfestigkeit, die immer kleiner als die Filamentfestigkeit ist, i. d. R. muss mit einer Abminderung von mindestens 10% gerechnet werden (ein Maß für die Rovingqualität). Dies ist auf eine unterschiedliche Beanspruchung der Filamente im Roving zurückzuführen. Eine weitere Festigkeitsverringerung ergibt sich bei der Textilstrukturprüfung flächig angeordneter Rovings (Abb. 2.8). Anzumerken sind an dieser Stelle die unterschiedlichen Eigenschaften der Partien (Chargen), d. h. die textilmechanischen Eigenschaften und die Faseroberflächeneigenschaften unterliegen unvermeidlichen Streuungen. Außerdem ist eine Abhängigkeit der Prüfgeschwindigkeit bzw. der Probenlänge (freie Länge) auf die Zugfestigkeit feststellbar [FRANZKE et al. 2001].

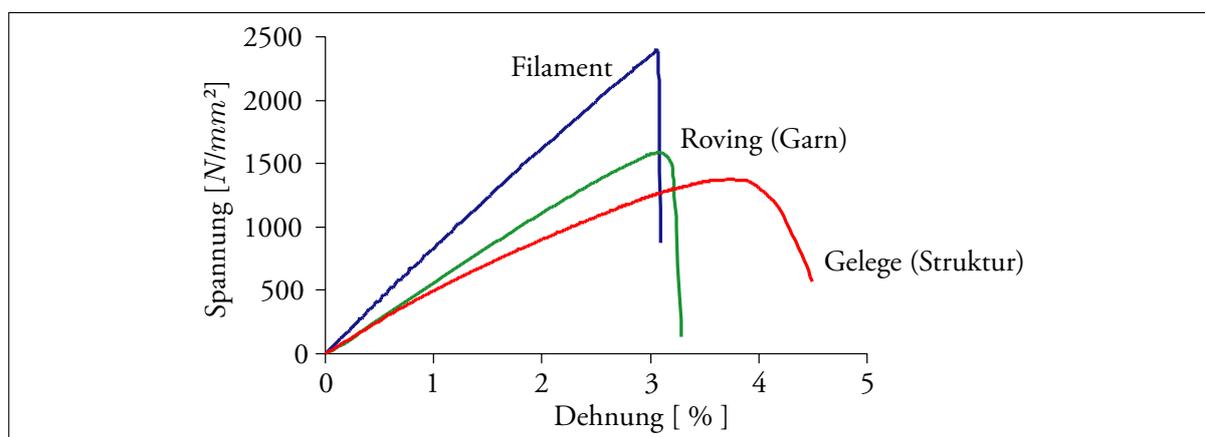


Abbildung 2.8: Zugverhalten von Glas als Filament, als Roving und als textile Struktur nach [CURBACH ET AL. 2007]

Fazit

Das Glasfilament hat eine hohe Zugfestigkeit und verhält sich spröde. Ein beständiger Verbundwerkstoff ist nur mit AR-Glas-Filamenten herstellbar. Der Filamentquerschnitt kann im Zuge einer Verbundwerkstoffoptimierung gewählt werden.

2.4 Feinbeton

Eigenschaften der Bulk-Materials

Die Eigenschaften des Verbundwerkstoffes Textilbeton hängen wesentlich von den Eigenschaften der Einzelkomponenten ab. Die Matrix im Verbundwerkstoff Textilbeton ist selbst ein Verbundwerkstoff, welcher aus Zuschlagstoffen, Zusatzstoffen, erhärtetem Zementleim und Poren besteht. [WITTMANN 1995] betrachtet Beton auf unterschiedlichen Strukturebenen, d. h. er idealisiert den Werkstoff entsprechend der Auflösung bei der Abbildung des Materials. Auf der Mikroebene unterscheidet er die Kristalle des Betons. Eine Betrachtung auf der Mesoebene unterscheidet Zementleim und Zuschlagstoffe, während auf der Makroebene der Beton als isotrop und homogen angenommen wird.

Für den Feinbeton sind eine Vielzahl von Betonrezepturen untersucht worden [HEGGER 2001, CURBACH 2003]. Die unterschiedlichen Zusammensetzungen der Betonmatrices seien hier exemplarisch an den Rezepturen *CEM I* und *CEM III B + Puzzolan* dargestellt, vgl. Abb. 2.9. Während *CEM I* eher ungeeignet für glasfaserbewehrten Textilbeton ist, hat sich Rezeptur *CEM III B + P* für die Einbettung von Glasfasern bewährt.

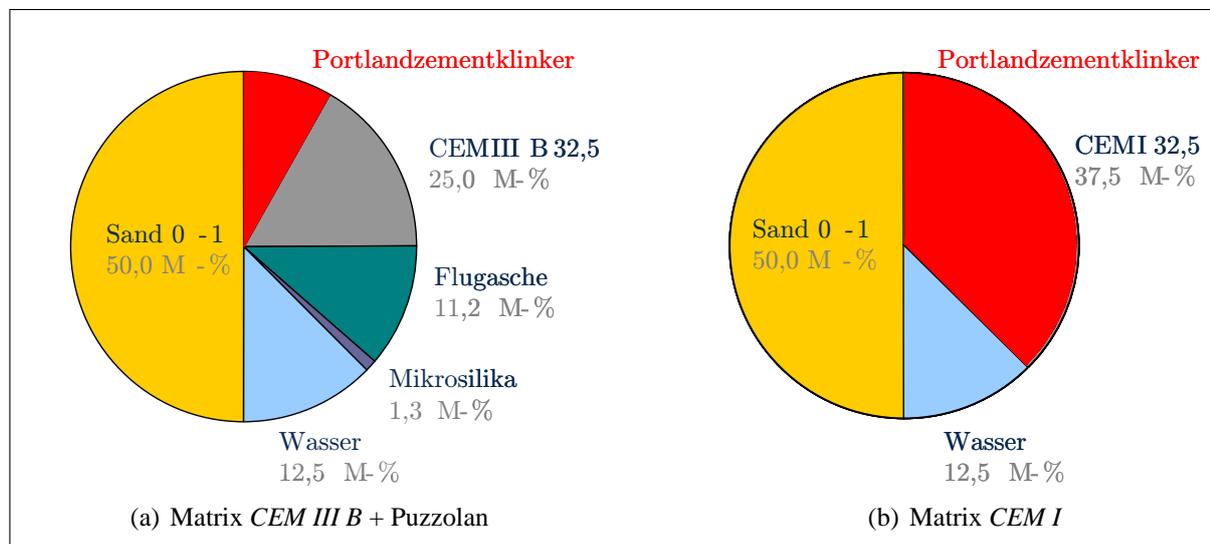


Abbildung 2.9: Zusammensetzung der Betonmatrices nach [BUTLER et al. 2004]

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Matrices liegt in den sich ausbildenden Hydrationsprodukten des Portlandzementklinkers. Untersuchungen von SCHORN, SCHIEKEL, HEMPEL und BUTLER zeigen dies eindrucksvoll, vgl. [SCHORN et al. 2004, BUTLER et al. 2004].

Die Rezeptur *CEM III B + Puzzolan* (*CEM III B+P*) lässt bei der Hydratation des Portlandzementklinkers mit Wasser vorwiegend CSH-Phasen entstehen, feingliedrige Nadeln mit einer Länge kleiner $1 \mu\text{m}$ (Abb. 2.10(a)). Dies wurde durch die Zugabe von Flugasche bzw. Mikrosilika erreicht. Fehlen diese Zusatzstoffe, bilden sich wie im Fall *CEM I* relativ große Kristalle, das sogenannte

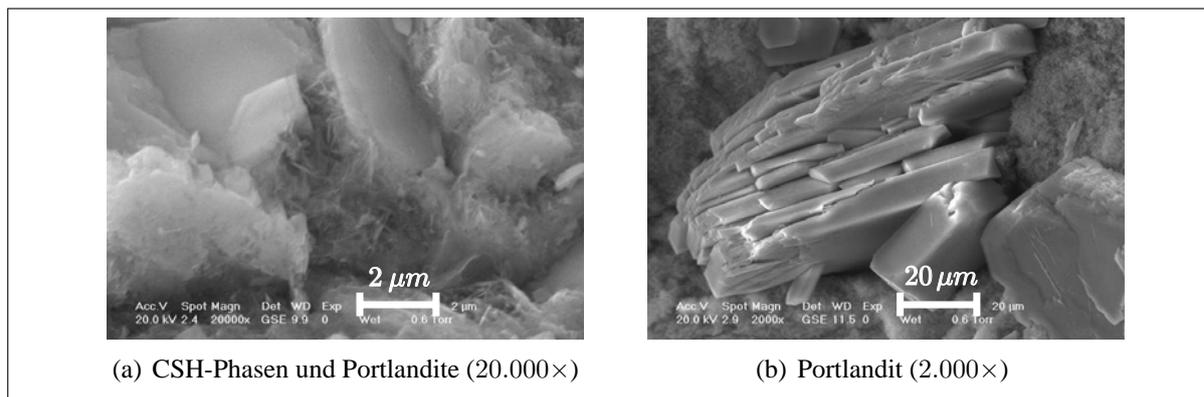


Abbildung 2.10: Hydratationsprodukte des Portlandzementklinkers nach [BUTLER et al. 2004]

Portlandit ($Ca(OH)_2$ oder CH -Phase), aus. Diese Kristalle sind durch ihren schichtweisen Aufbau sehr leicht spaltbar (Abb. 2.10(b)). Der pH -Wert ist größer als 12,5.

Neben den chemischen Aspekten sind auch physikalische Einflussfaktoren zu berücksichtigen. Die Matrix befindet sich während der Textilbeton-Herstellung in einem anderen Zustand als während der Textilbeton-Anwendung. Bei der Herstellung liegt eine pastöse, bei der Anwendung eine kristallisierte Form vor. Die pastöse Form gleicht einer Dispersion, in der sich körnige Anteile mit einer Korngröße bis zu $1000 \mu m$ befinden. Abhängig von der Roving-Packungsdichte penetriert der Feinbeton den Roving und kristallisiert dann sukzessiv aus. Wenn sich grobkörnige Anteile der Matrix bei der Textilbeton-Herstellung in den Roving einlagern, befinden sie sich zwischen Filamenten von lediglich 10 bis $30 \mu m$ Durchmesser. Lokale Filamentdeformationen und -beschädigungen sind dann nicht auszuschließen. Wenn solche grobkörnigen Matrixanteile nicht den Weg in den Roving finden, so muss mit ihrer Anreicherung in den Randbereichen des Rovings gerechnet werden.

Feinbeton verhält sich makroskopisch nahezu wie ein isotroper Werkstoff. Sein Materialverhalten ist asymmetrisch unter Druck- und Zugbeanspruchung, wobei er auf Zug sehr spröde reagiert, gepaart mit einer deutlich niedrigeren Festigkeit β_z auf Zug als auf Druck. Die Eigenschaften von Beton streuen relativ stark. Dies ist nach [LEONHARDT & MÖNNIG 1984] vorwiegend auf Eigenspannungen infolge Temperatur und Schwinden zurückzuführen. Der Prozess des Betonierens selbst beeinflusst die Eigenschaften des Bauteils. Die mechanischen Eigenschaften eines typischen ausgehärteten Feinbetons sind in Tabelle 2.3 dargestellt (Abb. 2.11(a)).

Die experimentell ermittelte effektive Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit (Abb. 2.11(b)) einer Betonprobe unter uniaxialer Zugbeanspruchung ist von der Länge und der Lage des Messbereiches auf der Probe abhängig (Abb. 2.11(c)), vgl. z. B. [SAOUMA 2000]. Ein Wegaufnehmer im Messbereich L_1 (Abb. 2.11(c)) zeichnet die elastischen Verschiebungen der Probe auf (identische Be- und Entlastungskurven). Die Längenänderung ΔL_2 des Messbereiches L_2 wächst mit abnehmender Kraft, d. h. das Nachbruchverhalten des Betons wird in Abhängigkeit von der Rissbreite gemessen. Eine Verlängerung des Messbereiches (L_3 bis L_5) führt zu einer überlagerten Messung einer wachsenden Rissöffnungsverschiebung mit einer elastischen Verkürzung (Entlastung) der ungerissenen Probenabschnitte nach Überschreitung der Maximallast.

Interface Transition Zone

Mikroskopische Beobachtungen an Verbundwerkstoffen mit einer Zementmatrix zeigen eine sogenannte *interface transition zone* (ITZ), eine Schicht mit abweichenden Eigenschaften der zwei

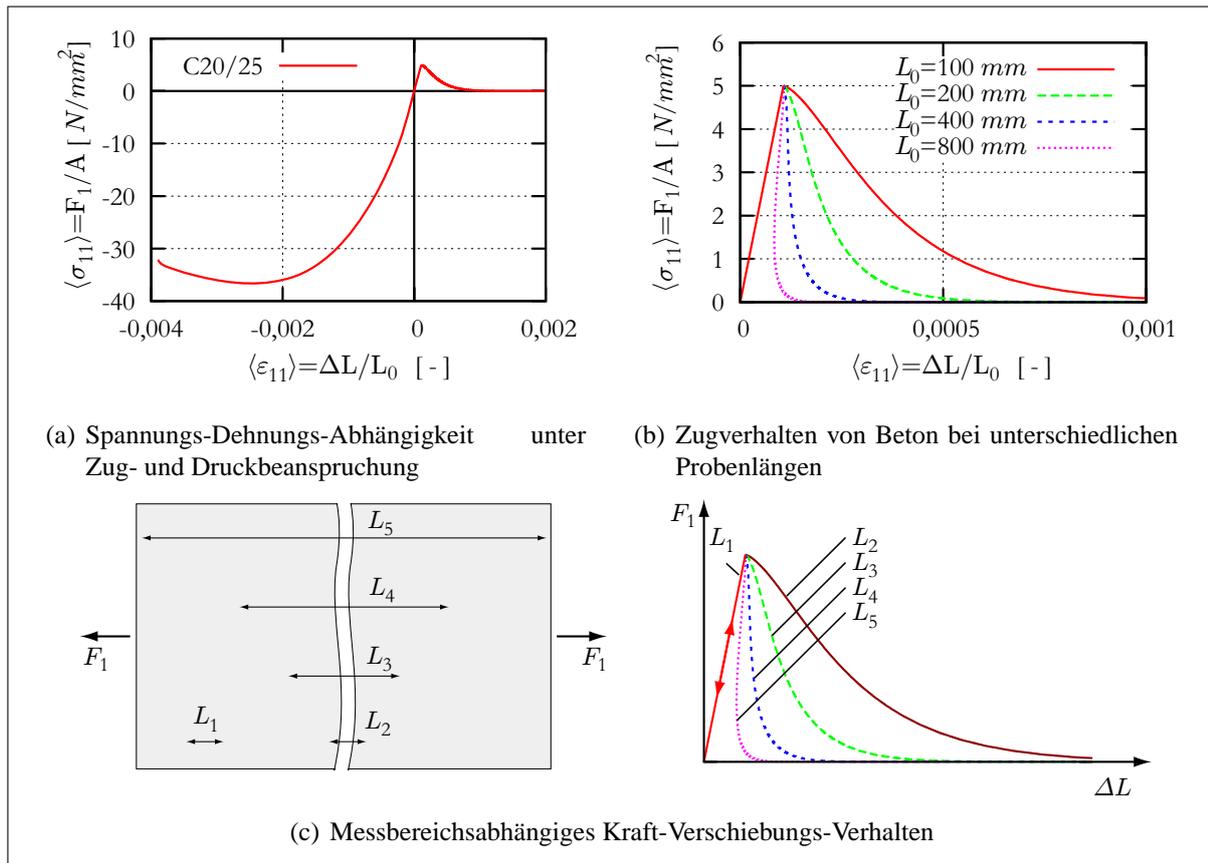


Abbildung 2.11: Uniaxiales Materialverhalten des Betons C20/25

E-Modul E_m	ca. 30000 N/mm^2
Querdehnzahl ν	0,2
Zugfestigkeit β_Z	ca. 5 N/mm^2
Druckfestigkeit β_D	ca. 35 N/mm^2

Tabelle 2.3: Mechanische Eigenschaften des Feinbetons (m . . . Matrix)

Verbundpartner. In Normalbeton wurden ITZ-Dicken zwischen $20 \mu\text{m} - 40 \mu\text{m}$ [JIN 1998, MINDESS & SHAH 1987, MINDESS 1995] am Übergang von Zementmatrix und Zuschlag gemessen. Matrices für Textilbeton können mit Silikastaub bzw. Flugasche so modifiziert werden, dass sich ITZ-Dicken (Glasfilament-Matrix) von $1 \mu\text{m} - 10 \mu\text{m}$ erreichen lassen [RASMUSSEN 1997].

In [JESSE 2004] wird eine Interphase zwischen der textilen Bewehrung und der Matrix beschrieben. Die Mikroskopaufnahmen (Abb. 2.12) von Dünnschliffen aus Textilbetonproben zeigen eine veränderte Struktur der Matrix in der Nähe der Bewehrung.

Fazit

Eine wesentliche Eigenschaft von Beton ist sein asymmetrisches Verhalten auf Druck- und Zugbeanspruchung. Auf Grund der geringen Zugfestigkeit und der Heterogenität des Feinbetons ist dem Bruchvorgang inklusive dem Nachbruchverhalten bei der Kombination mit einer textilen Bewehrung besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Um einen guten Verbund zwischen der Feinbetonmatrix und der Faserbewehrung zu gewährleisten, sind Betonrezepturen zu wählen, welche zu einem möglichst hohen Anteil an *CSH*-Phasen führen.

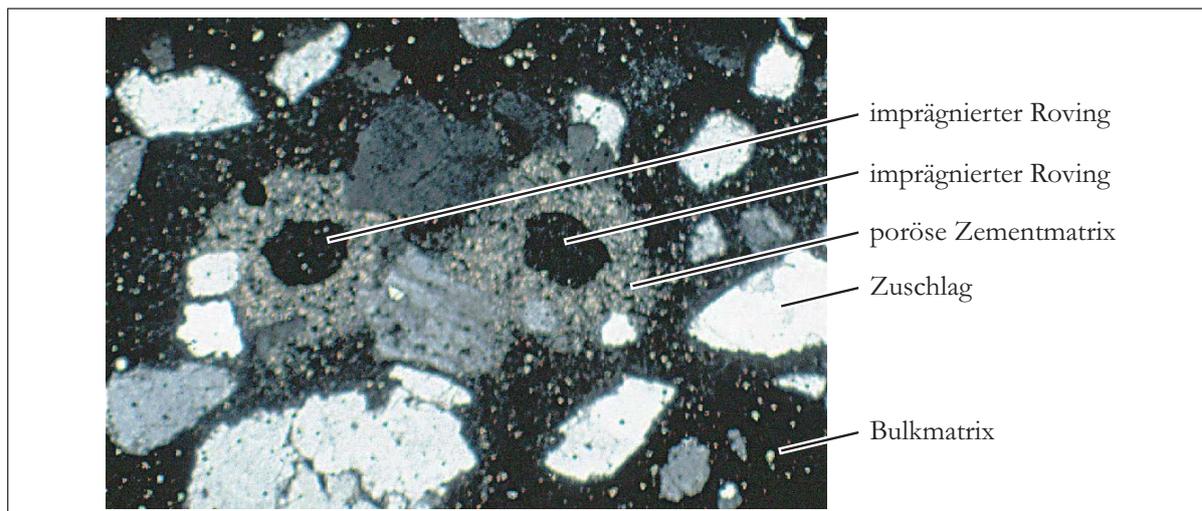


Abbildung 2.12: Eingebettete Rovings in einer Feinbetonmatrix nach [JESSE 2004]

Der Verbund zwischen der Faserbewehrung und der Matrix ist abhängig von der Zusammensetzung der Matrix und den Eigenschaften der Faseroberfläche. Eine nachträgliche Beschichtung bzw. Modifizierung der Schichte der Faserbewehrung kann den Verbund maßgeblich verändern und muss deshalb bei der Modellierung berücksichtigt werden.

Nachbruchverhalten des Feinbetons

Bemerkenswert für Beton ist die Tatsache, dass Poren und Mikrorisse vor einer aufgetragenen mechanischen Belastung in der Matrix existieren. Bei geringen Beanspruchungen verhält sich der Beton visko-elastisch mit einem geringen Kriechanteil. Infolge einer Belastung wachsen die initial vorhandenen Poren und Mikrorisse durch Spröbruch, wodurch ab einem signifikanten Lastniveau inelastische Verzerrungen auftreten. Zudem orientieren sich die Mikrorisse entsprechend den Hauptbeanspruchungsrichtungen und führen zu einer anisotropen Schädigung der Matrix. Im Bruchzustand vereinigen sich die Mikrorisse und bilden zusammenhängende Oberflächen (Rissflanken oder Rissufer), welche den Körper trennen. Dies führt zu einem Abfall der Spannungen. Bis kurz vor dem Bruch kann von einer Gleichverteilung von Mikrorissen in der Matrix ausgegangen werden.

Mikroskopische Untersuchungen der Rissflanken [MEYER & PENG 1997, SCHORN 2003] zeigen i. d. R. ein Interfaceversagen zwischen Zuschlag und Zementleim. Im Falle eines hochfesten Betons kann der Riss auch durch den Zuschlagstoff gehen.

Durch die heterogene Struktur des Betons existiert eine Art Rissverzahnung bzw. es existieren noch Materialbrücken zwischen den beiden Rissufern. Für kleine Rissbreiten können deshalb über die Rissflanken Schub- und Zugspannungen übertragen werden. Experimentell ist die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung $\sigma(w)$ schwer bestimmbar [MECHTCHERINE 2000]. In der Dissertation von BROCKMANN wurde speziell das Nachbruchverhalten von Feinbeton mit einem Größtkorn von $0,6\text{ mm}$ im Biegezugversuch untersucht [BROCKMANN 2005]. Weitere experimentell bestimmte Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen für unterschiedliche Größtkorndurchmesser zeigt Abb. 2.13(a).

Bei der Modellierung des Bruchverhaltens von Beton haben sich zwei Methoden durchgesetzt. Zum Einen wird von einem fiktiven Riss (Abb. 2.13(b)) mit der Rissöffnung w ausgegangen [HILLERBORG 1983, WEIHE & KRÖPLIN 1995], zum Anderen wird dem sich ausbildenden „Band“ von

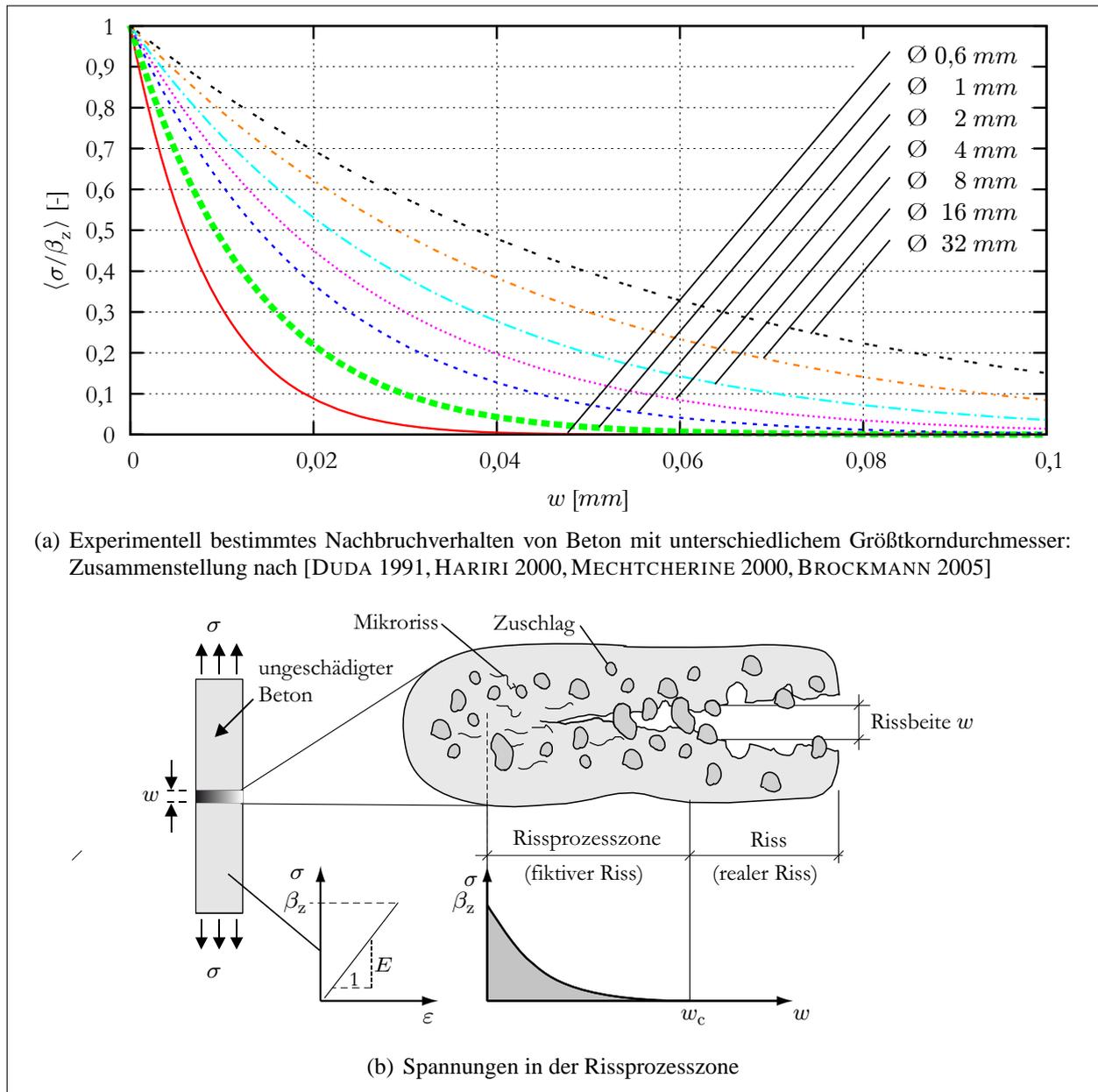


Abbildung 2.13: Nachbruchverhalten von Beton

Mikrorissen Rechnung getragen, d. h. die Rissverformung wird über einen Bereich⁵ h verschmiert betrachtet, man spricht von Rissbandmodellen.

Abbildung 2.13(a) zeigt typische Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen für Beton. Nach Erreichen der Grenzspannung β_z bildet sich der Transversalriss in der Matrix mit der Rissbreite w . Die Zugspannung in der Rissfläche fällt mit steigender Rissbreite ab.

In der Literatur existiert eine Vielzahl an vorgeschlagenen Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen für unbewehrten Beton, vgl. [v. MIER 2007]. Neben der linearen und bilinearen Approximation

⁵ Die Rissbandmodelle unterscheiden sich in den Annahmen über die Rissbandbreite h (entweder konstante bzw. veränderliche Rissbandbreiten h).

des Nachbruchverhaltens von Beton sind Exponential-Funktionen geeignet, z. B.

$$\frac{\sigma(w)}{\beta_z} = \left(1 - \frac{w}{w_c}\right)^n \quad (2.2)$$

mit $n > 0$.

Die auf die erzeugte Rissoberfläche bezogene Bruchenergie G_f ist nach [HILLERBORG 1983] mit

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (2.3)$$

angegeben. [DUDA 1991] schreibt:

„Die Bruchenergie ist die Energie, die zur Erzeugung und vollständigen Öffnung einer Rissfläche der Größe 'l' benötigt wird.“

Die Kenngröße Bruchenergie ist abhängig von dem Zuschlag (Größtkorndurchmesser, Sieblinie, Zuschlagart, Zuschlagfestigkeit), der Betonfestigkeit, dem Wasser/Zement-Wert, dem Betonalter, der Betonnachbehandlung, der Temperatur und der Belastungsgeschwindigkeit [DUDA 1991], wobei der Zuschlag (Korn) maßgeblich für die Rissüberbrückung ist. Für Normalbeton gilt: je größer der Größtkorndurchmesser (bzw. der Größtkornanteil) der Matrix ist, desto größer ist die Bruchenergie G_f .

Das Lokalisierungsverhalten beim Versagen von Beton ist u. a. auch für den experimentell nachgewiesenen Maßstabseffekt verantwortlich [BAZANT & NOVAK 2000, STURE et al. 1999, SAOUMA & NATEKAR 2002].

Fazit

Infolge der heterogenen Struktur des Feinbetons und der damit verbundenen Rauheit der Rissoberflächen, können über Materialbrücken im Riss Kräfte nach der Rissbildung übertragen werden. Diese rissüberbrückenden Kräfte sind um so größer, je kleiner die Rissbreiten im Feinbeton sind. Da durch die textile Bewehrung kleine Rissabstände induziert werden, verbunden mit kleinen Rissbreiten, kann das Nachbruchverhalten von Feinbeton einen deutlichen Einfluss auf die Gesamttragwirkung von Textilbeton haben.

2.5 Rovingeinbettung

Das Tragverhalten von Rovings ist abhängig von der Imprägnierung – auch als Penetration bezeichnet – mit Zementleim. Eine gezielte Steuerung der Rovingimprägnierung ist eine Methode zur Optimierung des Verbundwerkstoffverhaltens. Wesentliche Einflussfaktoren für die Rovingimprägnierung sind:

- die Packungsdichte des Rovings,
- die Viskosität der flüssigen Matrixphase,
- die Sieblinie der Feinbetonmischung,
- die Benetzbarkeit der Filamente,
- der Roving-Titer bzw. die Rovingquerschnittsform,

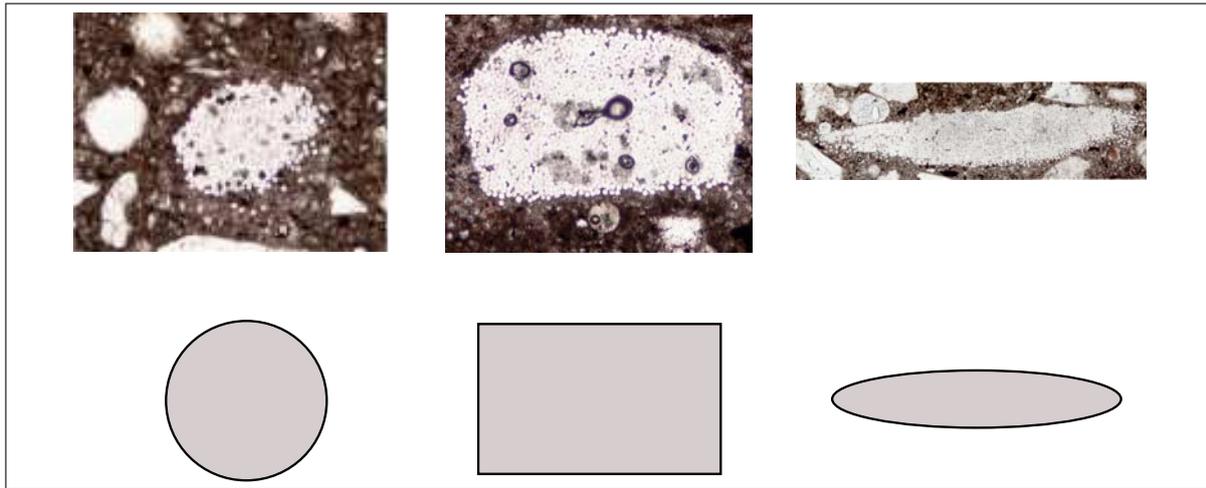


Abbildung 2.14: Querschnittsformen von Rovings nach [JESSE 2004]

- der Filament-Titer und
- die Vorspannung des Rovings.

Die Packungsdichte des Rovings ist abhängig von der Rovingverdrillung und der Feinheit des Rovings. Obwohl die untersuchten Rovings als unverdrillte Filamentgarne gelten, weisen sie aber herstellungsbedingt einen Schutzdrall von ca. 5 Umdrehungen pro Meter Garmlänge auf. Diese Vorverdrillung des Rovings beeinflusst auch die Rovingquerschnittsform (Abb. 2.14), d. h. je größer die Verdrillung des Rovings ist, desto kreisähnlicher wird der Rovingquerschnitt und um so größer ist die Packungsdichte. Die Packungsdichte des Bündels ist unbestimmt, solange der Roving unverdrillt ist bzw. auf den Roving keine Normalspannung wirkt. Im unverdrillten Zustand lässt sich der Rovingquerschnitt nahezu beliebig formen, wie sich an den Kreuzungsstellen von schlaff verlegten Gelegen erkennen lässt [JESSE 2004].

Die Packungsdichte kann weiter gesteigert werden, je größer die Vorspannung des Rovings ist. [KRÜGER 2004] untersuchte das Tragverhalten vorgespannter Textilbetonbauteile und dokumentierte die partielle Imprägnierung der Rovings unter Vorspannung. Mit wachsender Packungsdichte sinkt aber der Imprägnierungsgrad des Rovings und um so geringer ist der innere Verbund im Roving. Für unbeschichtete Rovings wurden in [JESSE 2004] Packungsdichten von ca. 60% ermittelt, wobei eine maximale Packungsdichte von ca. 91% erreicht werden könnte, vgl. Abschnitt 5.2.1.

Bei einer geringen mittleren Packungsdichte des Rovings ist mit einem ausgeprägten Kern-Mantel-Effekt zu rechnen, d. h. der Kern des Rovings weist eine höhere Packungsdichte auf als der äußere Teil des Rovings.

Der Roving selbst wirkt wie ein Sieb für die flüssige Feinbetonphase. In den unbeschichteten Roving wird auf Grund von Filamentdurchmessern von $10 - 25 \mu\text{m}$ wahrscheinlich kein Korn größer als $50 \mu\text{m}$ eindringen können. Je kleiner die Matrix-Teilchen sind, desto tiefer können diese in den Roving eindringen. Der imprägnierende Anteil der Matrix weist demzufolge einen sehr hohen Feinkornanteil auf, und es kommt zu einer Entmischung der flüssigen Matrix in der Umgebung des Rovings. Abbildung 2.12 zeigt eine Mikroskopaufnahme eines in Feinbeton eingebetteten Rovings. Deutlich ist eine veränderte Farbe der Betonstruktur in der Umgebung des Rovings gegenüber der Bulkmatrix (Abb. 2.12) zu erkennen, welche auf eine veränderte Matrixstruktur schließen lässt. Es ist demzufolge von drei Matrices auszugehen; der Bulkmatrix, der porösen Matrix

in der Umgebung des Rovings und einer sehr feinkörnigen Matrix im Roving. Im Rahmen der Grundlagenforschung innerhalb des SFB 528 in Dresden wurden auch vorbehandelte, d. h. in einer dünnflüssigen Matrix getauchte, Rovings verwendet, um die veränderten Tragmechanismen zu untersuchen [HEMPEL et al. 2005].

In Abbildung 2.15 ist eine Tomographieaufnahme eines Rovings in der Feinbetonmatrix dargestellt. Der aus ungekräuselten Filamenten bestehende Roving zeigt nach der Einbettung in der Zementmatrix keine signifikante Welligkeit.

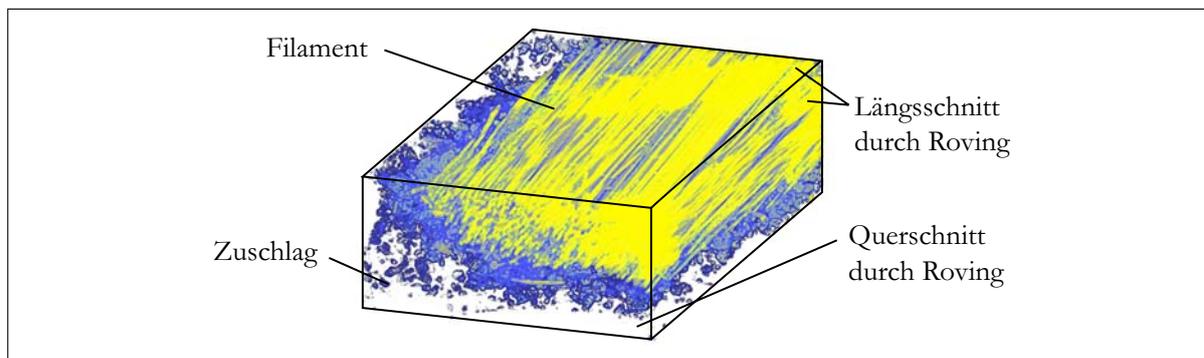


Abbildung 2.15: Tomographieaufnahme eines eingebetteten Rovings nach [SCHULZ 2005]

Unterschiedliche Betonrezepturen führen auch zu unterschiedlichen Roving- bzw. Filamenteinbettungen, vgl. Abb. 2.16. Das sich ausbildende Interface zwischen der Matrix und der Faserbewehrung kann kontinuierlich oder diskontinuierlich sein. Da von einer partiellen Imprägnierung

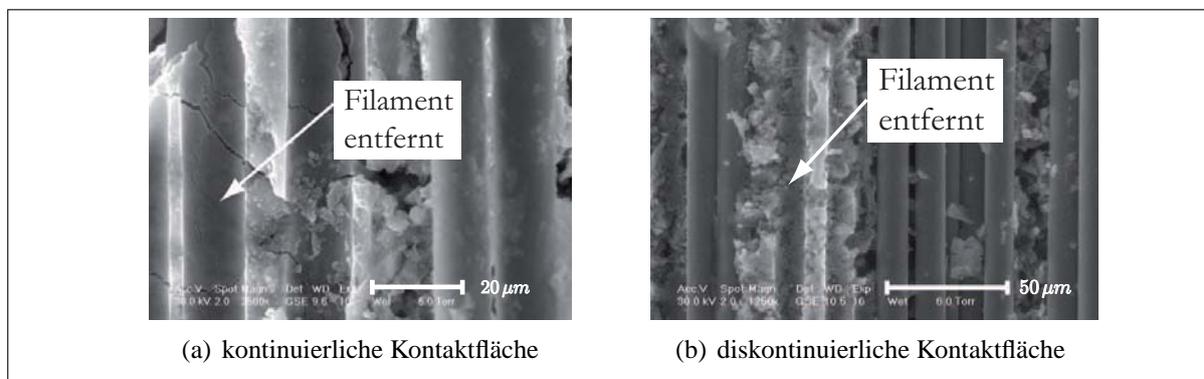


Abbildung 2.16: Matrixoberfläche nach Entfernen der Filamente [HEMPEL et al. 2005]

des Rovings ausgegangen werden muss, wurde von [SCHORN 2003] eine Verbundbeschreibung basierend auf sogenannten Haftbrücken vorgeschlagen, vgl. Abb. 2.17.

Außerdem muss auch von Luft einschließen in der Matrix und in den Rovings ausgegangen werden, welche die Tragfähigkeit des Komposites reduzieren.

Anders verhält es sich bei sekundär beschichteten Rovings. Diese werden vor der Einbettung in die Feinbetonmatrix mit einer Polymer-Lösung getränkt [BUTLER et al. 2004, SCHORN et al. 2004]. Der Vorteil liegt in der größeren Formstabilität des Rovings bzw. des textilen Flächengebildes. Das Interface zwischen der Polymerphase und der Feinbetonmatrix befindet sich ausschließlich am Rovingmantel und verhält sich anders als das Glasfilament-Matrix-Interface. Dafür bedarf es neuer

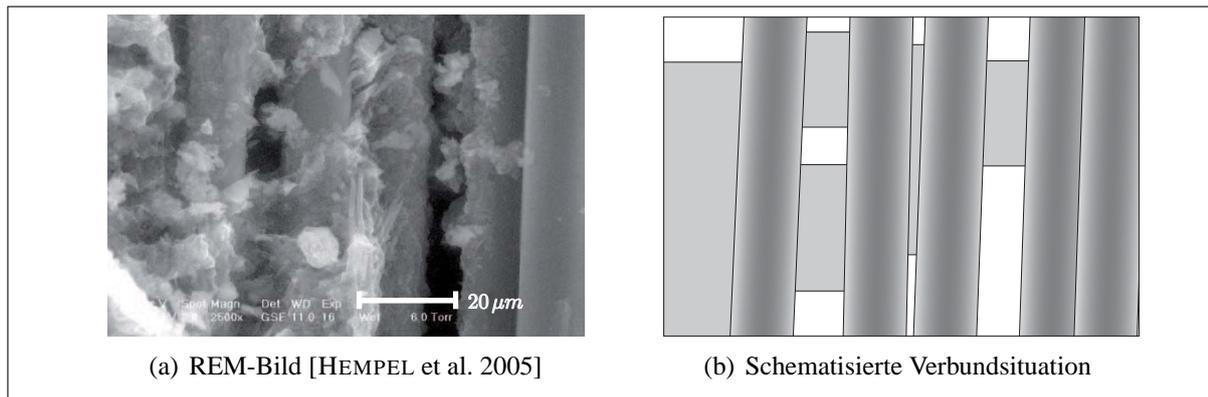


Abbildung 2.17: Rovinglängsschnitt

Interfacemodifikationen, die u. a. am Leibniz-Institut für Polymerforschung in Dresden erforscht werden [MÄDER et al. 2000].

Fazit

Mit der Imprägnierung des Rovings kann das Tragverhalten des Verbundwerkstoffes Textilbeton beeinflusst werden. Zur Steuerung der Imprägnierung kann die Packungsdichte des Rovings genutzt werden.

Unterschiedliche Feinbetonzusammensetzungen bzw. unterschiedliche Fasermodifikationen beeinflussen den Verbund der textilen Bewehrung mit der Feinbetonmatrix. Ein mechanisches Modell zur Abbildung des Verbundverhaltens von Textilbeton muss demzufolge die Verbundbeziehungen zuverlässig identifizieren und abbilden können. Infolge der ungleichmäßigen Imprägnierung unbeschichteter Rovings mit Zementleim ist mit einer ungleichmäßigen Beanspruchung der Filamente im Roving zu rechnen, welche bei der mechanischen Modellbildung berücksichtigt werden muss.

2.6 Filament-Matrix-Verbundwirkung

Der Haftverbund

Zwischen der Bewehrung und dem Zementleim existiert eine „Klebwirkung“ – der sogenannte Haftverbund – der auf Adhäsionskräfte zurückzuführen ist. Die Adhäsion⁶ hängt von chemischen (Bindungstyp), physikalischen (Oberflächenenergie), mechanischen (z. B. Verformbarkeit) Eigenschaften sowie von den geometrischen Gegebenheiten der Oberfläche (Oberflächenrauigkeiten) ab. Adhäsion tritt demzufolge nur auf, wenn sich zwei Kontaktpartner berühren. Dabei ist zwischen der geometrischen und der wahren Kontaktfläche zu unterscheiden. Während die geometrische (nominelle) Kontaktfläche die Summe aller möglichen Kontaktstellen bezogen auf die idealisierten Kontaktbereiche ist, stellt die wahre Kontaktfläche die Summe aus den tatsächlichen Kontaktbereichen mit der rauen Oberfläche dar.

Adhäsion weist i. d. R. ein quasi-elastisches Verhalten auf, welches für die Anwendung im Kontext der Schädigungsmechanik beschreibbar ist, vgl. Abschnitt 3.1. Schon bei kleinen Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Matrix kommt es zur Schädigung bzw. Zerstörung des Haftverbundes. Die Verbundwirkung geht vom Haft- zum Reibverbund über.

⁶ Grenzflächen-Haftverbindungen

Der Reibverbund

Der Reibverbund wird schon bei relativ kleinen Relativbewegungen zwischen Bewehrung und Matrix hervorgerufen [KRAGELSKI 1968]. Neben den Oberflächenrauigkeiten ist auch die Querverpressung (Normalspannung auf die Kontaktfläche) ein maßgeblicher Faktor für die Verbundwirkung. Eine Querverpressung $\sigma_n < 0$ kann z. B. aus einer äußeren Belastung bzw. vom Schwinden oder Quellen des Betons herrühren. Nach dem COULOMBSchen Reibgesetz besteht ein linearer Zusammenhang

$$|\tau| = \mu_R |\sigma_n| \quad \forall \quad \sigma_n < 0 \quad (2.4)$$

zwischen der übertragenen Schubspannung τ und der Querverpressung σ_n , wobei μ_R als Reibbeiwert bezeichnet wird. Das Vorzeichen der Schubspannung ist entgegengesetzt der Änderung der Relativbewegung.

Der Scherverbund

Im Stahlbetonbau wird der Begriff Scherverbund verwendet. Gemeint ist eine zusätzliche mechanische Verzahnung infolge einer Profilierung der Bewehrungsoberflächen. Den Stahlbewehrungsstäben wurden hierzu bei der Herstellung Rippen aufgewalzt, die in Form, Neigung und Abstand optimiert worden sind. Diese mechanische Verzahnung bewirkt ein Abscheren der Matrix zwischen den Rippen von der restlichen Matrix bei einer kritischen Beanspruchung des Verbundes. Betrachtet man die Matrix als homogen, könnte man von einem Kohäsionsbruch sprechen. Da Beton selbst ein Verbundwerkstoff ist, wird auch ein Adhäsionsversagen in den Interfaces stattfinden.

Für Textilbeton hat der Scherverbund eine untergeordnete Bedeutung, da die Glas- bzw. Kohlenstoffbewehrung keine Profilierungen aufweisen.

Ursachen für Verbundspannungen in Tragwerken

Jede Änderung der Normalspannungen in der Bewehrung ist mit auftretenden Schubspannungen verbunden, vgl. Abschnitt 8.1.1. Diese Änderung der Bewehrungsspannung kann:

- durch äußere Lasten,
- durch Transversalrisse in der Matrix,
- durch Temperaturänderung und
- durch das Schwinden und das Kriechen des Betons

hervorgerufen werden. Außerdem treten Schubspannungen an den Enden der Bewehrungselemente auf.

Fazit

Verbundspannungen in Verbundwerkstoffen haben vielfältige Ursachen. Auf mikroskopischer Ebene besitzen Glasfilamente eine glatte Oberfläche. Der Verbund zwischen der Faser und der Matrix lässt sich mit Haft- bzw. Reibverbundmodellen abbilden, es sei denn, es tritt ein Kohäsionsbruch in unmittelbarer Umgebung vom Faser-Matrix-Interface auf.

2.7 Schädigungsmechanismen und Versagensarten von Textilbeton

Ein textilbetonverstärktes Bauteil kann auf verschiedene Weise versagen. Neben dem Ablösen einer textilbewehrten Schicht von der Gesamtstruktur – auch Delamination genannt – und dem Versagen der Altkonstruktion, kann es zu einer Vielzahl von Schädigungs- bzw. Versagensmechanismen in der Verstärkungsschicht selbst kommen. Die wichtigsten Arten von Materialschädigungen in der textilbewehrten Verstärkungsschicht (Abb. 2.18 und Abb. 2.19) sind:

- Bildung von Mikrorissen längs, quer bzw. schräg zur Bewehrungsrichtung,
- Akkumulation vieler Mikrorisse zu einem Matrixriss,
- Ablösen zwischen Faserbewehrung und umgebender Feinbetonmatrix,
- Rutschen bzw. Reiben der Filamentbewehrung untereinander und relativ zur Matrix und
- Faserbruch.

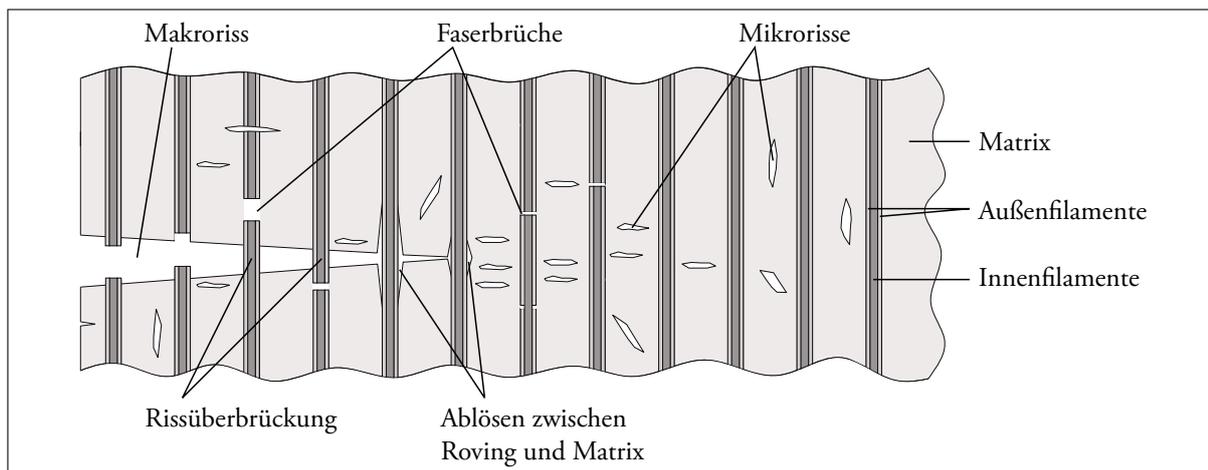


Abbildung 2.18: Versagensarten von Textilbeton

Ein vollständiger Versagensvorgang stellt dabei immer eine Kombination aus den Einzelversagensmechanismen dar. Besondere Beachtung ist – bei spröden Materialien wie Beton – der Rissprozesszone zu widmen. Die Größe und Gestalt der Rissprozesszone ist nicht genau bekannt, vgl. [SHAH et al. 1995], und kann sich auch während der Rissfortpflanzung nach [OTSUKA & DATE 2000] verändern.

Durch die Zugabe von Glasfilamenten (Endlosfasern) in den spröden Beton wird weniger eine Erhöhung der Steifigkeit des Verbundwerkstoffes erreicht, als vielmehr eine Quasi-Duktilität erzielt (Abb. 2.2). Dies ist hauptsächlich auf das sukzessiv versagende Interface zwischen Faser und Matrix zurückzuführen, nachdem der Beton eine Rissbildung erfährt. Die Faserbewehrung übernimmt die Übertragung der Zugkräfte am Riss. Infolge der Kraftübertragung von der Faser in die Matrix wird der Beton wieder zur Tragwirkung herangezogen und weitere Risse können im Beton entstehen. Ein Gesamtversagen tritt also nicht plötzlich auf, sondern ist mit nennenswerten Verformungen der Struktur verbunden. Der mechanischen Beschreibung des Verbundes muss somit besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden [ZASTRAU et al. 2001a, ZASTRAU et al. 2003].

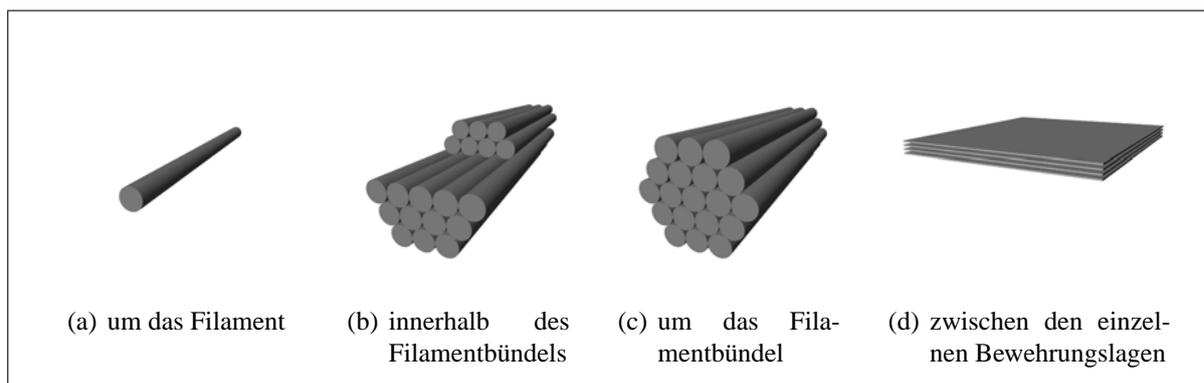


Abbildung 2.19: Unterscheidung der Verbund-Interfaces

Fazit

Das Textilbetonversagen unter Zugbeanspruchung kann durch eine Kombination der Versagensmechanismen der Einzelwerkstoffe und des Verbundes beschrieben werden. Das Hauptproblem bei einer mechanischen Modellierung der Schädigungs- und Versagensmechanismen von Textilbeton stellt das Skalenproblem dar, d. h. die gleichzeitige Abbildung der Delamination im Meterbereich und des Filamentversagens im Mikrometerbereich.

2.8 Anwendungsgebiete für Textilbeton

Textilbeton ist auf Grund der guten Drapierbarkeit der Bewehrung in weiten Grenzen modellierbar. Da im Gegensatz zu Stahlbetonbauteilen keine zusätzliche Betondeckung zum Schutz der Bewehrung notwendig ist, können ungewohnt filigrane Betonbauteile mit Dicken ab 2 mm hergestellt werden. Weil es noch keine genormte Bauweise für Textilbeton gibt (DIN oder EN), ist momentan für praktische Anwendungen eine Zulassung im Einzelfall notwendig. Abbildung 2.20 zeigt einige Anwendungsbeispiele aus der Vielfalt der Möglichkeiten, die Textilbeton eröffnet.

Trotz des relativ geringen Alters des Verbundwerkstoffes Textilbeton sind innovative Anwendungen sowohl bei der Ertüchtigung bestehender Betonkonstruktionen als auch bei der Verwirklichung neuer Textilbetonkonstruktionen realisiert worden, wie folgende Beispiele illustrieren:

- Textilbetonbauwerke, beispielsweise Brücken (Abb. 2.20(a)),
- Verstärkung von tragenden Bauelemente, wie Betonschalen, Gewölben, Platten, Balken und Plattenbalken sowie Stützen (Abb. 2.20(c)),
- integrierte Schalungssysteme für Fensterstürze oder Kabelkanäle (Abb. 2.20(d)),
- verstärkte Abwasserrohre,
- Fassadenplatten, Balkonplatten und leichte tragende Konstruktionselemente,
- Betonmöbel (Abb. 2.20(b)) und
- neuartige Sandwichstrukturen, bei denen Deck- und Unterschicht aus Textilbeton bestehen, die einen weichen Kern umschließen (z. B. Dämmstoffe).

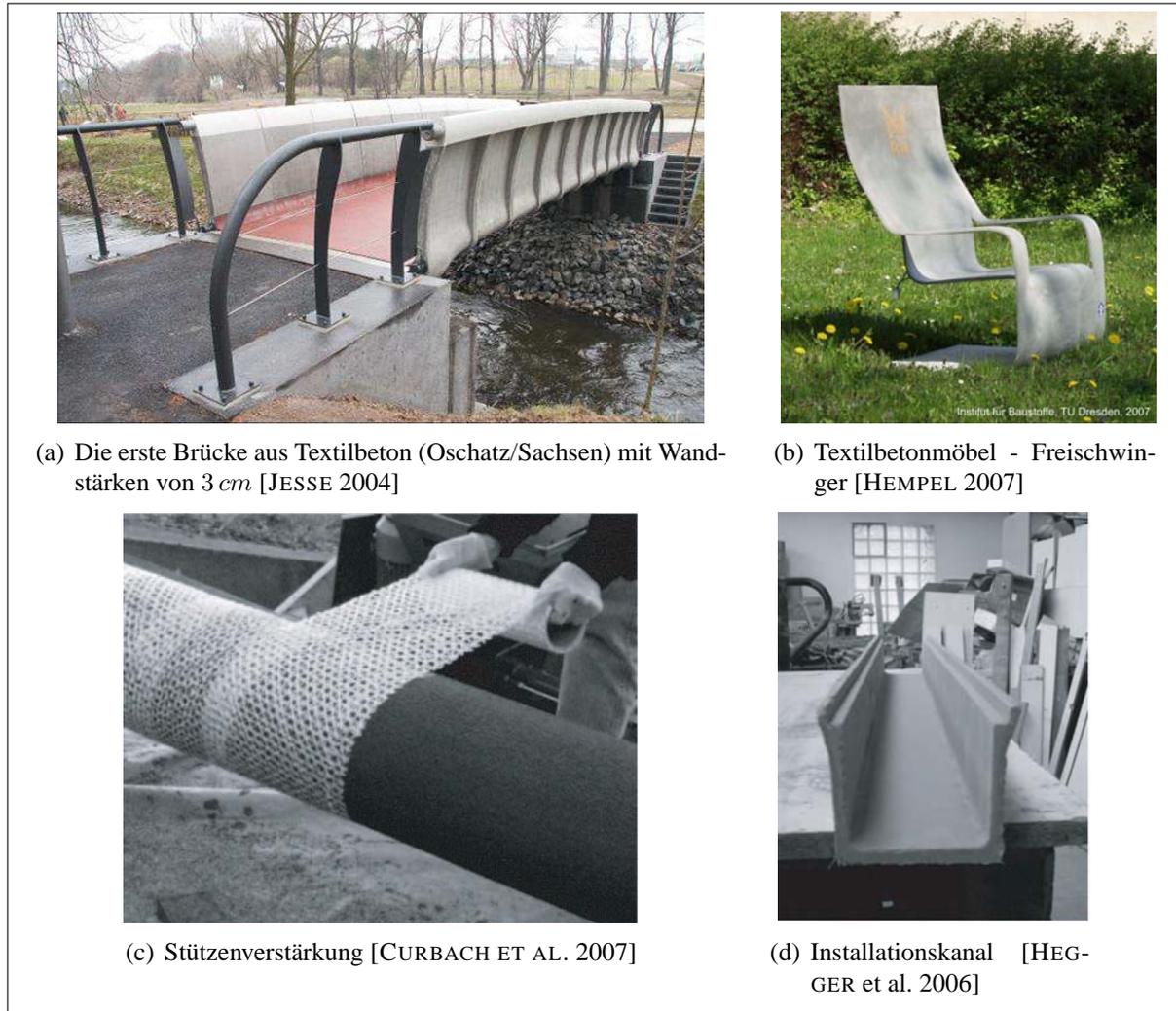


Abbildung 2.20: Anwendungsbeispiele für Textilbeton

Die Möglichkeiten einer filigranen Bauweise zeigt eindrucksvoll ein Betonmöbel (Freischwinger) in Abb. 2.20(b) [HEMPEL 2007]. Auf eine große Massereduzierung durch Verwendung von Leichtzuschlägen, wie z. B. geblähte Glaskugeln, weist [HEMPEL 2000] hin. Damit konnten Betonboote mit einem Gewicht von weniger als 20 kg hergestellt werden [BETONBOOTTEAM-TU-DRESDEN 2007]. Einen Überblick zu Textilbetonanwendungen gibt der aktuelle RILEM-Sachstandsbericht [HEGGER et al. 2006].

Fazit

Die bisher durchgeführten Untersuchungen an dem Komposit Textilbeton im Rahmen der beiden Sonderforschungsbereiche 528 und 532 haben viele Fragen zu dem Verbundwerkstoff beantwortet. Während die experimentelle Bestimmung des uniaxialen Materialverhaltens von Textilbeton unter Zugbeanspruchung sehr umfangreich durchgeführt wurde, vgl. [JESSE 2004], existieren noch keine mechanischen Materialformulierungen, die eine Prognose des Materialverhaltens von Textilbeton basierend auf den Eigenschaften der Einzelwerkstoffe des Verbundwerkstoffes liefern können.

Numerische Simulationen basieren i. d. R. auf der Beschreibung der experimentell bestimmten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mittels Näherungsfunktionen [STEINIGEN 2006]. Da diese nur für den uniaxialen Fall (Abb. 2.21(a)) für ausgewählte textile Strukturen vorliegen, sind die numerischen Modelle limitiert in ihrer Anwendung. Eine numerische Simulation von Tragwerken [ZASTRAU et al. 2001b] mit multiaxialen Beanspruchungen erfordert zusätzlich die Kenntnis des multiaxialen Verhaltens von gerissenem Textilbeton (Abb. 2.21). Die multiaxialen Materialgesetze sind jedoch selbst für biaxiale Beanspruchungen nur wenig experimentell untersucht worden. Validierte Prognosewerkzeuge zur Bestimmung des multiaxialen Verhaltens von Textilbeton existieren bisher noch nicht.

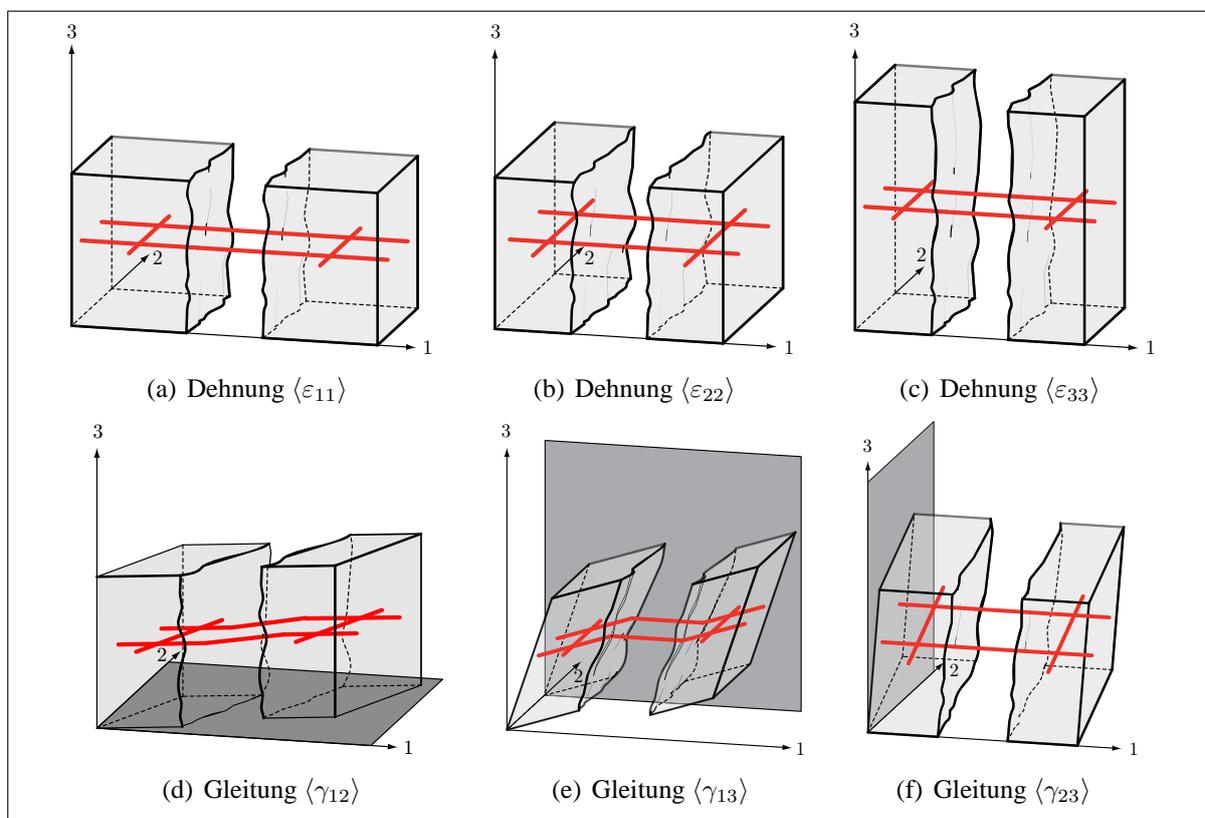


Abbildung 2.21: Verformungen und Rissuferverschiebungen für unterschiedliche Verzerrungszustände von gerissenem Textilbeton

Sobald ein leistungsfähiges Simulationswerkzeug verfügbar ist, könnten beispielsweise folgende Fragestellungen untersucht werden.

- Welche Rovingformen sind günstig für Textilbeton?
- Welche Modelle erlauben eine realitätsnahe Beschreibung der Rovingtragwirkung?
- Welche Verbundmechanismen wirken in Textilbeton und welchen Einfluss haben sie auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton?
- Welche Faktoren beeinflussen die Tragfähigkeit von Textilbeton in welchem Maße?
- Welchen Einfluss haben die Einzelwerkstoffe des Komposites auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton?
- Wie kann der Verbund in Textilbeton optimiert werden?

Es besteht demnach ein großer Forschungsbedarf zur Abbildung und Prognose des Materialverhaltens von Textilbeton.

3 Konzepte zur makroskopischen Materialbeschreibung von Textilbeton

In der Literatur ist eine Vielzahl von Materialmodellen dokumentiert [STEIN et al. 2004], die sich für die Behandlung von Materialien mit einer ausgeprägten Mikrostruktur eignen. Dabei wird unterschieden zwischen Modellen, welche das effektive Materialverhalten (homogenes Ersatzmaterial) abbilden, und Modellen, welche das Verhalten der heterogenen Mikrostruktur detailliert simulieren.

Prinzipiell können elastische und inelastische Materialbeschreibungen unterschieden werden (Abb. 3.1). Weist das Material ein zeitabhängiges Materialverhalten auf, finden viskoelastische bzw. viskoplastische Modelle Anwendung, die aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

Für die Beschreibung des heterogenen Textilbetons mittels eines effektiven Ersatzmaterials bieten sich Modelle aus der Schädigungsmechanik bzw. plastische Materialmodelle an, da der Verbundwerkstoff eine große Anzahl an Matrixrissen aufweist, die als „verschmiert“ betrachtet werden können. Das Materialverhalten wird auf Grund der orientierten Risse eine Anisotropie ausbilden, sodass nur anisotrope Schädigungs- bzw. Plastizitätsmodelle in Betracht kommen. Erschwerend ist zudem die Richtungsabhängigkeit des nichtlinearen Verhaltens der Materialregion (auch als lastungspfadabhängiges Verhalten bezeichnet).

Inelastisches Materialverhalten – z. B. plastisches Materialverhalten – ist im Gegensatz zu elastischen Materialverhalten u. a. durch eine partielle, irreversible Umwandlung mechanischer Arbeit in Wärme oder durch eine Rissbildung (Dissipation) charakterisiert. Dies führt bei einem plastischen Materialverhalten nach einer vollständigen Entlastung ($\sigma = 0$) zu plastischen Verzerrungen ϵ^{pl} . Aufgrund der Dissipation sind alle inelastischen Materialgesetze von der Belastungsgeschichte abhängig. Typische uniaxiale Materialgesetze sind in Abb. 3.1 dargestellt.

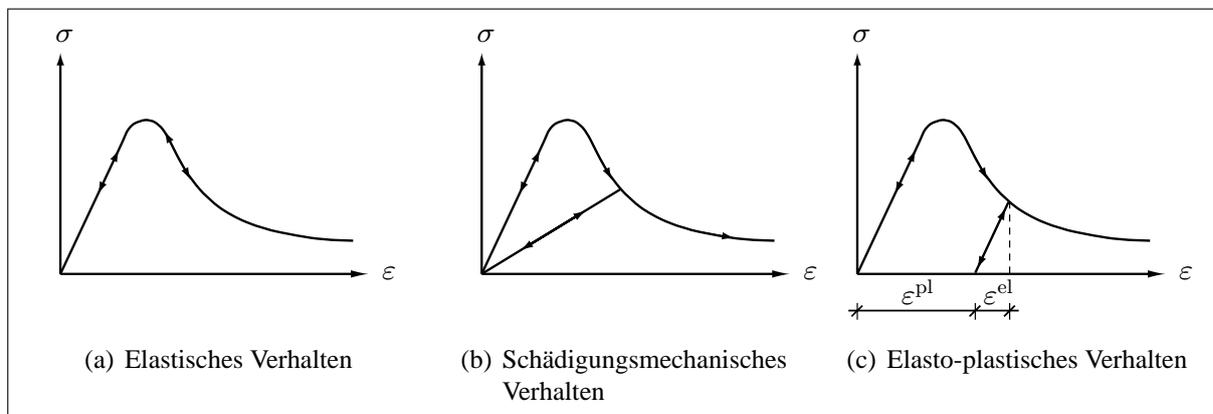


Abbildung 3.1: Diagramm zur Veranschaulichung unterschiedlichen Materialverhaltens

3.1 Schädigungsmechanik

Schädigungsmodelle werden oft zur Beschreibung des Verbundwerkstoffverhaltens eingesetzt. [LEMAITRE & DESMORAT 2005] leiten z. B. Schädigungsmodelle anhand der freien HELMHOLTZschen Energie Ψ her. Unter Annahme einer additiven Aufspaltung der elastischen und der plastischen Anteile in der freien HELMHOLTZschen Energie

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}, D, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}) = (1 - D)\Psi^{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}) + \Psi^{\text{pl}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}) \quad (3.1)$$

können durch Ableitung nach den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$ und der Schädigungsvariablen D die thermodynamisch konjugierten Variablen $\boldsymbol{\sigma}$ und Y hergeleitet werden. Für die detaillierte Herleitung sei auf [KRAJCINOVIC & LEMAITRE 1987, LEMAITRE & DESMORAT 2005] verwiesen. Eine Anwendung auf unbewehrten Beton ist z. B. in [PENG et al. 1997] zu finden. Die Behandlung einer Betonschädigung unter Zugbeanspruchung wird u. a. in [PRÖCHTEL & HÄUSSLER-COMBE 2007] angegeben.

Die Spannungen σ_{ij} lassen sich wie zuvor beschrieben als Funktionen der elastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}$ und der isotropen Schädigung D ausdrücken:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}, \quad (3.2)$$

wobei \boldsymbol{C} den Elastizitätstensor bzw. dessen Koeffizientenmatrix bezeichnet. Einige anisotrope Schädigungsmodelle nutzen Tensoren n -ter Stufe (z. B. 4. Stufe) anstelle der skalaren Schädigungsvariablen D [CAUVIN & TESTA 1999].

Für die Schädigungsvariable D werden Evolutionsgleichungen $\dot{D} = \dot{D}(\boldsymbol{\varepsilon})$ benötigt, um die Entwicklung der Schädigung bei Erreichen eines Grenzzustandes zu beschreiben. Die zulässigen Materialbeanspruchungen können nicht nur durch die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$, sondern auch durch die der Schädigung D thermodynamisch assoziierten Variable Y formuliert werden, vgl. [PRÖCHTEL & HÄUSSLER-COMBE 2007]. Ein Hauptproblem dieser Herangehensweise liegt in der zutreffenden Auswahl und der Beschreibung der Parameter, die die zulässigen Zustände eines materiellen Punktes bestimmen. Eine solche makroskopische Materialbeschreibung ist ineffizient und intransparent für die Beschreibung von Textilbeton, weil z. B. jede veränderte Bewehrungsmenge die Bestimmung neuer Modellparameter erforderlich macht. Eine zuverlässige Prognose des Materialverhaltens ist in der erforderlichen Effizienz daher kaum möglich. Hierbei bleibt der Zusammenhang zwischen einer gezielten Änderungen des Komposites (z. B. Bewehrungsgrad) und der makroskopischen Modellparameter offen.

3.2 Plastizitätstheorie

Die Plastizitätstheorie ist neben der Schädigungsmechanik die wohl am häufigsten angewendete Theorie zur Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens. Die klassische makroskopische Plastizitätstheorie basiert dabei auf der Formulierung einer Fließfunktion, einer Fließbedingung sowie einer Verfestigungsbeziehung für das jeweilige inelastische Materialverhalten, vgl. [KOJIC et al. 2005].

3.2.1 Fließflächen

Mittels Fließflächen – auch Versagensflächen oder Grenzflächen genannt – wird ein Gebiet in einem n -dimensionalen Raum (z. B. Spannungsraum) definiert, in welchem die Beanspruchungsgrößen, z. B. Spannungen, liegen dürfen. Die skalarwertige Fließfunktion $F \leq 0$ beschreibt die zulässigen Spannungszustände im Spannungsraum.

Häufig werden die aus Experimenten gewonnenen Fließflächen

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.3)$$

in Abhängigkeit von den Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ sowie von weiteren internen Parametern \mathbf{q} (z. B. Verfestigungsparameter $q_0 = h$) angegeben⁷. Die Fließbedingung $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ in Gl. (3.3) charakterisiert das mögliche Auftreten plastischer Verzerrungen, vgl. [SIMO et al. 1998].

3.2.2 Fließregeln

Liegt ein Spannungszustand auf der Fließfläche vor, können plastische Verzerrungen entstehen. Fließregeln beschreiben die Änderung der inelastischen Verzerrungen $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ bezüglich eines plastischen Potentials Q und des plastischen Multiplikators $d\lambda$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (3.4)$$

Ist dieses plastische Potential Q identisch mit der Fließfunktion F , so spricht man von einer assoziierten, andernfalls von einer nichtassoziierten Plastizität.

3.2.3 Inkrementelle Spannungs-Verzerrungs-Abhängigkeiten

Weitere Voraussetzung ist, dass sich infolge eines Spannungsinkrementes $d\boldsymbol{\sigma}$ das Verzerrungsincrement $d\boldsymbol{\varepsilon}$ als Addition des elastischen und des plastischen Verzerrungsincrementes $d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ und $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ ergibt:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (3.5a)$$

Dies lässt sich mit dem Spannungsincrement und der Fließregel ausdrücken

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (3.5b)$$

⁷ Hinweis: Hier und im Folgenden wird die Vektor- und Matrixschreibweise für die Maßzahlen der Tensoren herangezogen.

Bei einer Beanspruchung mit plastischen Verzerrungen definiert der Spannungszustand einen Punkt auf der Fließfläche $F = 0$. Soll bei weiterer Belastung des Materials plastisches Fließen vorliegen und der Spannungszustand nach wie vor auf der Fließfläche liegen, gilt zusätzlich $dF = 0$. Das totale Differential der Fließfunktion lässt sich durch

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}} d\sigma_{11} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} d\sigma_{12} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{13}} d\sigma_{13} + \dots + \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i \quad (3.6a)$$

angeben, was in matrizieller Form aus $dF = 0$ folgendes liefert:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} d\lambda \quad . \quad (3.6b)$$

In Matrixform lauten die Gleichungen (3.5b) und (3.6b) kompakt

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T & \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma} \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad , \quad (3.7)$$

was klar zeigt, dass ein lineares Gleichungssystem für das Spannungsinkrement $d\boldsymbol{\sigma}$ und den plastischen Multiplikator $d\lambda$ entsteht. Der plastische Multiplikator $d\lambda$ kann eliminiert werden, indem man Gleichung (3.5b) mit $(\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{C}$ von links multipliziert

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} - \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (3.8)$$

und in Gleichung (3.6b) einsetzt:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} \right) d\lambda, \quad (3.9)$$

um den plastischen Multiplikator

$$d\lambda = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.10)$$

in Gleichung (3.5b)

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda, \quad (3.11a)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{ep}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.11b)$$

zu ersetzen, wobei die elastoplastische Matrix

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C} - \mathbf{C} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda} \right)^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C} \quad (3.12)$$

eingeführt wurde. Die elastoplastische Matrix \mathbf{C}^{ep} ist symmetrisch, wenn eine assoziierte Plastizität vorliegt, d. h. die Fließfunktion identisch mit der Funktion des plastischen Potentials ist ($F \equiv Q$).

3.2.4 Integration der konstitutiven Beziehungen

Die Materialgleichungen der Fließtheorie stellen ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung dar, vgl. [PARISCH 2003]. Für die Lösung von Aufgabenstellungen mit nichtlinearem Materialverhalten werden numerische Näherungsverfahren verwendet, vorzugsweise die Finite-Elemente-Methode. Ziel ist es, für eine gegebene Belastung am System die Gleichgewichtskonfiguration zu finden. Das Gleichgewicht wird durch ein nichtlineares Gleichungssystem beschrieben, welches iterativ gelöst werden muss. Zur Lösung des Problems wird die Belastung inkrementell aufgebracht, wobei für jedes Lastinkrement eine iterative Lösung des algebraischen Gleichungssystems erfolgt, um die Verschiebung des Systems zu bestimmen.

Hierbei findet meistens das NEWTON-Verfahren Anwendung. Für die Konvergenz dieses Verfahrens ist die benutzte JACOBI-Matrix⁸ von entscheidender Bedeutung. Diese kann mittels der GÂTEAUX-Ableitung⁹ ermittelt werden und liefert die Linearisierung des Problems. Im Falle einer nichtlinearen Materialformulierung mittels Differentialgleichungen ist für den Aufbau der tangentialen Steifigkeitsmatrix für jeden Iterationsschritt die Integration der Evolutionsgleichung notwendig, vgl. [PARISCH 2003]. Neben den expliziten existieren implizite Verfahren bzw. Mischformen aus beiden, sogenannte semi-implizite Verfahren [MATZENMILLER 1988] für diese Integration.

3.2.5 Parameteranpassung für ein makroskopisches Materialmodell

Die Anwendung eines plastischen Materialmodells auf den Verbundwerkstoff Textilbeton wurde in [ZASTRAU et al. 2001b] demonstriert. Am Beispiel der Verstärkung einer Stahlbetonkuppel mit zusätzlichen Textilbetonschichten wurde das Materialverhalten von Textilbeton phänomenologisch auf der Makroebene beschrieben. Abbildung 3.2 zeigt das verwendete Materialverhalten im Vergleich zu der experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit unter zyklischer Belastung. Weitere Einzelheiten finden sich in der zuvor genannten Veröffentlichung.

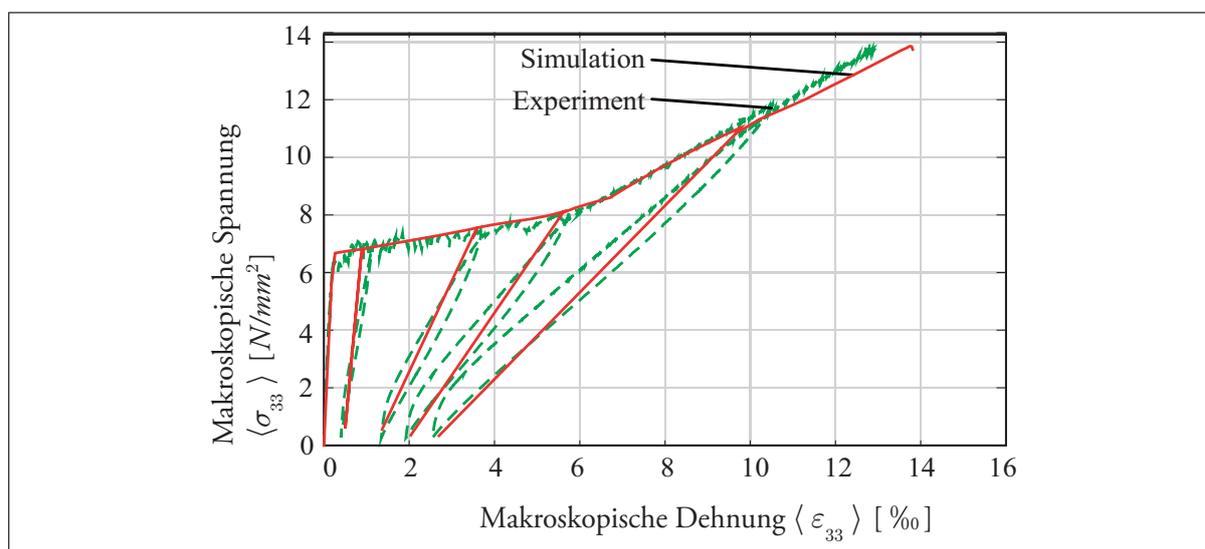


Abbildung 3.2: Materialbeschreibung von Textilbeton mittels eines makroskopischen Materialmodells

⁸ tangentielle Steifigkeitsmatrix

⁹ Richtungsableitung des Systems in Richtung der unbekanntlichen Verschiebungen

3.3 Microplane-Modell

Der Grundgedanke des Microplane-Modells besteht in der Formulierung dreidimensionaler Materialgesetze basierend auf der kumulativen Erfassung von eindimensional beschreibbaren konstitutiven Beziehungen auf elementaren Ebenen unterschiedlicher Orientierung, der Microplanes, vgl. [BAZANT & PRAT 1988, CAROL et al. 2001, LEUKART 2005]. Diese Microplanes sind Tangentialebenen an die Einheitskugel um den betrachteten Punkt.

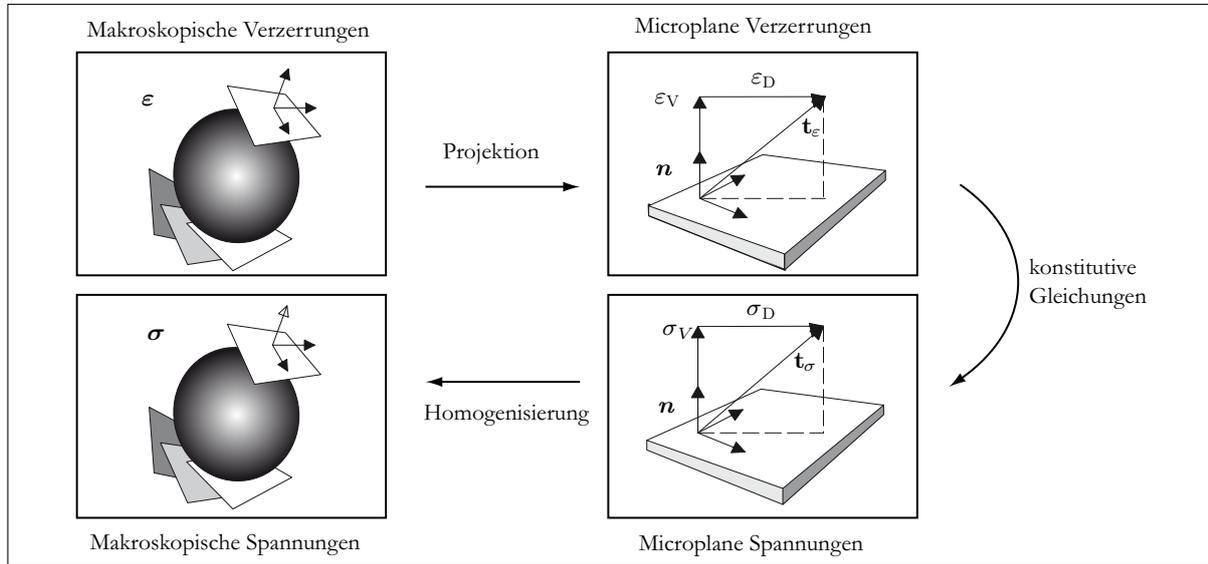


Abbildung 3.3: Microplane-Modell nach [LEUKART 2005]

Dies geht auf MOHR zurück, vgl. [MOHR 1900]. Der Vorteil liegt in der Formulierung von eindimensionalen konstitutiven Beziehungen auf der jeweiligen Microplane, vgl. Abb. 3.3. Der Verzerrungstensor ε wird auf die Microplane abgebildet. Der resultierende Verzerrungsvektor t_ε wird dann in skalare Verzerrungsmaße zerlegt, z. B. in eine volumetrische Verzerrung ε_V und eine deviatorische Verzerrung ε_D , wie in [LEUKART 2005] geschehen. Daraus lassen sich mittels eindimensionaler konstitutiver Beziehungen die zugehörigen skalaren Spannungen σ_V und σ_D berechnen.

Eine Homogenisierung aller Spannungsvektoren t_σ bzw. genauer aller zugehörigen Spannungstensoren über die Oberfläche der Einheitskugel liefert den zu ε zugehörigen makroskopischen Spannungstensor σ .

CAROL definiert im Rahmen eines thermodynamisch konsistenten Ansatzes, dass die freie Energie $\Psi^{\text{makro}}(\varepsilon, \mathbf{q})$ als Integral der freien Energien auf den Microplanes $\Psi_\Omega^{\text{mikro}}$ ausgedrückt werden kann:

$$\Psi^{\text{makro}}(\varepsilon, \mathbf{q}) = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \Psi_\Omega^{\text{mikro}}(t_\varepsilon, \mathbf{q}) d\Omega, \quad (3.13)$$

wobei \mathbf{q} die internen Variablen beschreibt, vgl. [CAROL et al. 2001]. Die makroskopischen Spannungen σ ergeben sich zu

$$\sigma = \frac{\partial(\varrho_0 \Psi^{\text{makro}})}{\partial \varepsilon} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial(\varrho_0 \Psi_\Omega^{\text{mikro}})}{\partial \varepsilon} d\Omega = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial(\varrho_0 \Psi_\Omega^{\text{mikro}})}{\partial t_\varepsilon} \frac{\partial t_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\Omega, \quad (3.14)$$

wobei ϱ_0 die Dichte des Materials darstellt. Diese Art von konstitutiver Beziehung bietet sich auch für Textilbeton an, wenn entsprechende uniaxiale Materialgesetze auf den Microplanes definiert sind.

3.4 Bruchmechanik

Die Bruchmechanik ist eine Methode zur Beschreibung von diskreten Rissen in Materialien. Die Grundlagen gehen auf GRIFFITH und RICE zurück [SHAH et al. 1995]. Ziel ist die Bestimmung von Kenngrößen, um Aussagen über die Rissbildung, das Risswachstum und die Stabilität eines Risses treffen zu können. Unterschieden werden drei verschiedene Rissmodi, vgl. Abb. 3.4.

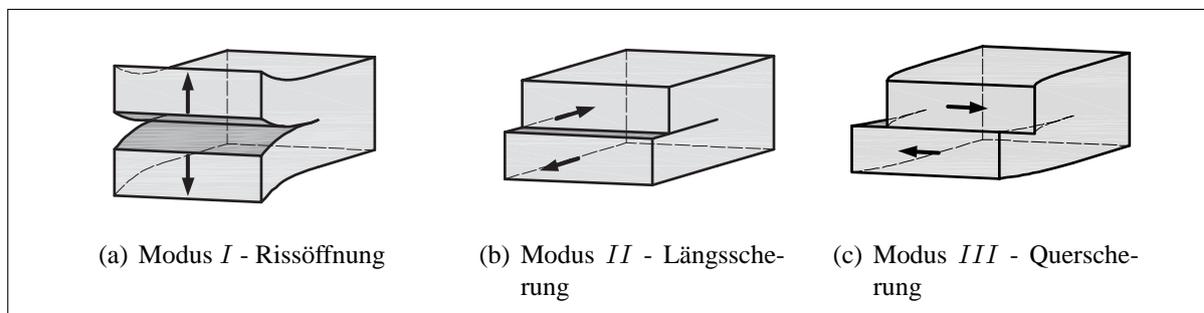


Abbildung 3.4: Bruchmechanische Rissmodi

Transversalrisse in der Matrix unter Zugbeanspruchung sind dem Modus *I* zuzuordnen, wogegen das Ablösen der Bewehrung von der Matrix bzw. Delamination dem Rissmodus *II* entsprechen. Prinzipiell können jedoch alle drei Modi gleichzeitig auftreten.

Unterschieden werden die lineare Bruchmechanik (LEBM) und die nichtlineare Bruchmechanik. Erstere beruht auf der Annahme eines elastischen Materialverhaltens, wobei theoretisch unendlich große Beanspruchungen an der Rissspitze auftreten. Die unmittelbare Umgebung an der Rissspitze wird als Rissprozesszone bezeichnet, die im Rahmen der LEBM als sehr klein angenommen wird. Diese Annahme mag für bestimmte Materialien näherungsweise zutreffen, jedoch nicht für Beton, zumindest gibt es in der Literatur Untersuchungen zur Rissprozesszonengröße, die in der Größenordnung der untersuchten Probengeometrie liegen, vgl. [OTSUKA & DATE 2000]. Die Anwendbarkeit der LEBM auf den Verbundwerkstoff ist also zu untersuchen. Dennoch werden aus der Bruchmechanik Definitionen von Kenngrößen – wie der Bruchenergie G_f – benutzt, um quantitative Aussagen über das Nachbruchverhalten von Beton zu machen, vgl. Abschnitt 2.4.

Die nichtlineare Bruchmechanik beschreibt zusätzlich das Materialverhalten in der Rissprozesszone. BARENBLATT und DUGDALE (vgl. [WITTMANN 1995]) führen z. B. eine sogenannte kohäsive Rissprozesszone ein, in der die Spannungen nicht unendlich groß werden können, um z. B. das Nachbruchverhalten der Matrix abzubilden (vgl. Abschnitt 2.4).

Fazit

Mit einem Microplane-Modell läßt sich ein dreidimensionales, isotropes Materialverhalten basierend auf uniaxialen Materialmodellen abbilden. Das Verhalten von Textilbeton ist maßgeblich von der Rissbildung der Matrix, des Verbundinterface und der Bewehrung beeinflusst. Für die Beschreibung des Verbundwerkstoffes Textilbeton können demnach Kenngrößen aus der Bruchmechanik Anwendung finden.

Materialformulierungen der Plastizitätstheorie bzw. aus der Schädigungsmechanik sind zur Abbildung inelastischen Materialverhaltens geeignet. Das Hauptproblem liegt in der Bestimmung der jeweiligen Modellparameter. Für den Verbundwerkstoff Textilbeton würde z. B. jede Änderung der Einzelmaterialeigenschaften, der Bewehrungsmenge oder der Bewehrungsorientierung zu einer neuen Bestimmung der makroskopische Modellparameter führen. Dies ist umso schwieriger, da diese makroskopischen Modellparameter i. d. R. nicht physikalisch interpretiert werden können.

Abhilfe könnte ein Materialmodell für Textilbeton bringen, bei dem die Materialeigenschaften der Einzelwerkstoffe und des Verbundes verwendet werden. Das effektive Verhalten des Materials würde basierend auf einem modular aufgebauten Gesamtmodell prognostiziert werden, bei dem die relevanten Tragmechanismen separat abgebildet werden.

4 Entwicklung einer Multi-Skalen-Analyse für Textilbeton

4.1 Aufgabenstellung

Angesichts des komplexen Aufbaus von Textilbeton muss eine Vielzahl verschiedenartiger Aufgaben gelöst werden, um ein effektives Simulations- und Prognosewerkzeug zu entwickeln. Dazu gehören die Analyse des mechanischen Verhaltens von zugbeanspruchtem Textilbeton, die Identifikation und Simulation der unterschiedlichen Schädigungs- und Versagensmechanismen auf hierarchischen Strukturebenen, die Entwicklung von Homogenisierungsmethoden zur Skalenintegration bzw. Skalenüberbrückung sowie eine effiziente Berechnungsmethodik im Rahmen einer integrierten Multiskalenmethode.

Die Lösung dieser Aufgaben führte zu dem **MMM-Prognosemodell** für Textilbeton, dessen Prognosegüte durch die Simulation realer Bauteilversuche nachzuweisen war.

Diese übergeordneten Aufgaben gliedern sich in folgende Teilaufgaben:

- Definition von Strukturebenen für Textilbeton für eine hierarchische Strukturierung der Idealisierungen des Verbundwerkstoffes (**Mi-, Me- und Ma-Modelle**)
- Identifikation der elastischen Eigenschaften von Textilbeton
 - Definition von repräsentativen Volumenelementen bzw. Materialregionen
 - Homogenisierung innerhalb der betrachteten Strukturebenen (**Me-FEM-Modelle**)
 - Qualitative Bestimmung des Typs der initialen Anisotropie von Textilbeton in Abhängigkeit von der textilen Struktur (**Me-FEM-Modelle**)
 - Quantitative Bestimmung der Parameter des Elastizitätstensors entsprechend des Typs der Anisotropie von Textilbeton (**Me-FEM-Modelle**)
- Identifikation und Beschreibung der Tragmechanismen zugbeanspruchter Textilbetonbauteile (**Ma-FEM-, Me-FEM- und Mi-FEM-Modell**)
- Analyse und Bewertung etablierter Materialmodelle hinsichtlich der Anwendbarkeit auf zugbeanspruchten Textilbeton, Anwendbarkeit auf verschiedenartige Strukturebenen, Bewertung des rechentechnischen Aufwands
- Eignungsuntersuchung der Finite-Elemente-Methode als weitverbreitetes numerisches Simulationswerkzeug unter Berücksichtigung der Anwendbarkeit auf den Strukturebenen (simultane FE^2 -Multiskalenanalyse, **Ma-FEM-, Me-FEM- und Mi-FEM-Modell**)
- Entwicklung des hierarchischen **MMM-Prognosemodells** (Filament - Roving - Bauteil) zur Simulation des komplexen inelastischen Verhaltens zugbeanspruchter Textilbetonproben:
 - Definition eines hierarchischen, integrierten Materialmodells auf Basis des Mikro-Meso-Makro-Modells (**Ma-I-, Me-I-, Mi-I- und Mi-II-Modelle**)
 - Modulare Entwicklung von Modellen zur Abbildung des Schädigungs- und Versagensverhaltens
 - ◊ Rissbildung in der Matrix (**Me-I-Modell**)
 - ◊ Reißen von Filamenten (**Mi-IIa- und Mi-IIb-Modell**)
 - ◊ Versagen des Rovings (**Me-I-, Mi-IIa- und Mi-IIb-Modell**)

- ◇ Verbundversagen an der Filament-Matrix- und an der Filament-Filament-Grenzfläche (**Me-I-** und **Mi-I-Modell**)
- ◇ ungleichförmige Beanspruchung der Filamente im Roving (**Me-I-** und **Mi-I-Modell**)
- ◇ Bündeltragverhalten inkl. Bündelfestigkeit (**Mi-IIa-** und **Mi-IIb-Modell**)
- ◇ rissüberbrückende Kräfte bei Matrixrissen (**Me-I-Modell**)
- ◇ Rovingquerschnittsapproximation
- Entwicklung effektiver Lösungsmethoden für alle Teilmodelle des **MMM-Prognosemodells**
- Kalibrierung, Verifizierung und Validierung des **MMM-Prognosemodells** anhand experimenteller Daten
- Anwendung des **MMM-Prognosemodells** auf die Simulation von Bauteilversuchen

4.2 Lösungsweg

Die Entwicklung des hierarchischen Materialmodells für Textilbeton gliedert sich in fünf Teile.

Definition der Strukturebenen von Textilbeton

Als Ausgangspunkt einer Modellierung wird die Struktur des Verbundwerkstoffes Textilbeton unter Nutzung des Mikro-Meso-Makro-Modells in drei Strukturebenen gegliedert. Hierfür werden in Kapitel 5 die Idealisierungen der Materialstruktur von Textilbeton auf den Strukturebenen eingeführt bzw. definiert.

Auf der Mikroebene werden einzelne Filamente sowie Bündel von Filamenten in der einbettenden Matrix betrachtet. Die Mesoebene beinhaltet den in die Zementmatrix eingebetteten idealisierten Roving. Auf der Makroebene wird ein homogenes Ersatzmaterial für den heterogenen textilbewehrten Beton betrachtet. Um die Modelle der drei Strukturebenen zu verknüpfen, werden bestehende Homogenisierungsmethoden für den Mikro-Meso- und den Meso-Makro-Skalenübergang weiterentwickelt. Dafür müssen Materialregionen (\mathcal{MR}) bzw. repräsentative Volumenelemente ($\mathcal{RV}\mathcal{E}$) definiert werden. Unter Berücksichtigung der $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ -Definition werden verschiedene Zellmethoden diskutiert.

Der Roving hat auf Grund textiler Einflussfaktoren keine streng definierte Form und ist nicht formstabil. Deshalb wird der Rovingquerschnitt als Superellipse betrachtet, die sich mit nur drei Parametern (Querschnittsfläche A_{rov} , Aspektverhältnis $a : b$ und ein Parameter r) beschreiben lässt und eine große Bandbreite an Querschnittsformen erfasst.

Bestimmung der effektiven Eigenschaften von Textilbeton

In Kapitel 6 wird durch die Simulation des mesoskopischen Strukturverhaltens des Verbundwerkstoffes das effektive elastische Materialverhalten von Textilbeton bestimmt.

Beginnend mit der Homogenisierung von mesoskopischen $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ werden die effektiven Elastizitätskonstanten für typische Textilstrukturen in einer Feinbetonmatrix ermittelt. Es werden analytische und numerische Homogenisierungsmethoden vorgestellt und angewendet. Während die Grundlösung nach ESHELBY elliptische Einschlüsse (z. B. Rovings oder Einschlüsse) bei der analytischen Homogenisierung berücksichtigt, basiert die numerische Homogenisierung auf der Berücksichtigung superelliptischer Rovingquerschnittsformen, wodurch sich die Mesostruktur genauer abbilden lässt. Dazu wird ein automatisiertes numerisches Werkzeug entwickelt, mit dem sich effektive Kenngrößen bei linearem und nichtlinearem Materialverhalten unter Nutzung von Parallelrechnern bestimmen lassen.

In diesem Zusammenhang wird ein Verfahren zur Bestimmung der Komponenten des ESHELBY-Tensors für Einschlüsse mit superelliptischem Querschnitt vorgeschlagen.

Neben der initialen Anisotropie von Textilbeton wird auch die induzierte Anisotropie infolge der nichtlinearen Eigenschaften des Verbundes zwischen den Komponenten untersucht (Abschnitt 6.3.9).

Anwendung einer simultanen Multi-Skalen-Methode

Kapitel 7 widmet sich den simultanen Multi-Skalen-Methoden zur Simulation des Verhaltens von Materialien mit einer Mikrostruktur.

Eine in der Literatur vorgeschlagene simultane Multi-Skalen-Methode wird auf ihre Anwendbarkeit auf den Werkstoff Textilbeton in Abschnitt 7.2 untersucht (Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode).

Aus der Diskussion der Vor- und Nachteile von Multi-Skalen-Methoden und der typischen Eigenschaften von Textilbeton leiten sich die Anforderungen an eine effiziente hierarchische Materialbeschreibung für Textilbeton ab. Diese bilden die Basis für das **MMM-Prognosemodell** für Textilbeton, welches nicht nur das Materialverhalten von Textilbeton simuliert, sondern basierend auf bekannten Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten aus Auszugsversuchen das effektive Materialverhalten von Textilbeton prognostiziert.

Hierarchische Materialbeschreibung von Textilbeton mit dem MMM-Prognosemodell

In Kapitel 8 wird das **MMM-Prognosemodell** zur Simulation des inelastischen Verhaltens von Textilbeton entwickelt (Abb. 4.1). Beginnend mit der Simulation des Auszugsverhaltens von Bewehrungselementen aus einer einbettenden Matrix wird ein semi-analytisches Verbundmodell hergeleitet (Abschnitt 8.2), welches das Auszugsverhalten ohne Einschränkungen bezüglich des Typs der Verbundbeziehung simuliert. Grundlage hierfür bildet ein schlupfbasiertes Verbundgesetz, welches die Identifikation der Verbundbeziehungen qualitativ und quantitativ erlaubt. Dazu wird das Verbundproblem bereichsweise analytisch exakt gelöst.

Anwendung findet das semi-analytische Verbundmodell (**Mi-I-Modell**) für die Simulation von Einzelfilamentauszugsversuchen (Abschnitt 8.2.4). Für unbeschichtete und beschichtete Filamente werden die jeweiligen Verbundbeziehungen identifiziert, um den Einfluss unterschiedlich nachbehandelter Filamente auf das Tragverhalten von Textilbeton abschätzen zu können.

Auf Grund der Bündeltragwirkung von Rovings werden in Abschnitt 8.4 zwei Faserbündelmodelle entwickelt, welche u. a. die partielle Imprägnierung von unbeschichteten Rovings und die damit verbundene ungleichförmige Beanspruchung der Filamente im Roving abbilden können. Begleitend werden detaillierte Finite-Elemente-Berechnungen zur Beschreibung der Rovingtragwirkung durchgeführt. Mittels Parameterstudien wird das effektive Bündeltragverhalten studiert. Daraus leiten sich Vorschläge zur gezielten Optimierung der Rovingtragwirkung ab. Im Hinblick auf die Simulation des Auszugsverhaltens von Rovings aus einer Feinbetonmatrix werden in Abschnitt 8.5.1 die Besonderheiten des Experimentes diskutiert.

In Abschnitt 8.5.2 wird das erweiterte semi-analytische Verbundmodell (**Me-I-Modell**) zur Simulation des Auszugsverhaltens von Rovings durch die superelliptischen Rovingquerschnittsapproximationen erweitert, um ein schichtweises Versagen der Rovings zu simulieren (vgl. Abschnitt 8.2). Grundlage bildet das in Abschnitt 8.4 modellierte effektive Rovingverhalten.

Mit dem erweiterten semi-analytischen Verbundmodell wird die sukzessive Schädigung der Rovings im Rovingauszugsversuch simuliert, um die unterschiedlichen Verbundbeziehungen zwischen den Filamenten des Rovings in Abhängigkeit vom Filamentdurchmesser zu bestimmen.

Basierend auf den **Mi-** und **Me-Modellen** wird das **MMM-Prognosemodell** erweitert, um das effektive Materialverhalten auf der Makroebene zu bestimmen. Hierzu wird zusätzlich die Mehrfachrissbildung im **Me-I-Modell** simuliert, wobei das Nachbruchverhalten der Feinbetonmatrix berücksichtigt wird.

Anschließend wird das biaxiale Verhalten von Textilbeton mit dem **MMM-Prognosemodell** für Textilbeton simuliert. Im ungerissenen Zustand wird mit dem **Ma-FEM-Modell** das elastische

Verhalten eines biaxial bewehrten Probekörpers berechnet. Hierbei werden die notwendigen effektiven Elastizitätskonstanten des orthotropen Textilbetons mit dem **Me-FEM-Modell** bestimmt. Das Materialverhalten von Textilbeton unter einer biaxialen Beanspruchung unter Berücksichtigung des inelastischen Verhaltens wird demonstriert.

Das uniaxiale Verhalten von Textilbeton unter einer zyklischen Belastung wird mit Hilfe des erweiterten semi-analytischen Verbundmodells (**Me-I-Modell**) simuliert, wobei ein elasto-plastisches Verbundverhalten angenommen wurde, um die Reibung im Interface zu modellieren.

Die Implementierung der Modelle erfolgt vorwiegend mit der modernen, objektorientierten Programmiersprache PYTHON, vgl. [PYTHON 2007, SCIPY 2007]. Mit der von ROSSUM entwickelten Programmiersprache PYTHON lassen sich relativ schnell, einfach und plattformunabhängig Programme entwickeln, welche zur Lösung der gestellten Aufgabenstellung notwendig sind.

Anwendung des Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells

Anhand der in Filament- und Rovingauszugsversuchen identifizierten Modellparameter wird schließlich das effektive inelastische Verhalten von Textilbeton prognostiziert und das **MMM-Prognosemodell** anhand der experimentellen Daten aus Dehnkörperversuchen validiert. Durch die Simulation der Mehrfachrissbildung in normalbewehrten Dehnkörpern werden mehrere Einflussfaktoren auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton untersucht. Zu diesen Faktoren gehören das Nachbruchverhalten der Feinbetonmatrix und der Einfluss der streuenden Filamentfestigkeiten.

Die Kopplung von Mikro-, Meso- und Makromodellen bildet den Abschluss der Arbeit. Untersucht wird eine Stahlbetonplatte, welche mit einer Textilbetonschicht verstärkt wurde. Unter einer Biegebeanspruchung wird das Bauteil- und das Materialverhalten auf allen drei Strukturebenen simuliert. Um auch das Zusammenwirken von Stahl- und Textilbeton (Abschnitt 9.2) abbilden zu können, wird das effektive Materialverhalten des Stahlbetons mit dem **MMM-Prognosemodell** simuliert. Dazu musste mit dem **Mi-I-Modell** die Verbundbeziehungen zwischen Stahlbewehrung und Betonmatrix anhand einer Auszugsversuchssimulation identifiziert werden (Anlage C.2). Zusätzlich wurde das Fließen der Stahlbewehrung berücksichtigt.

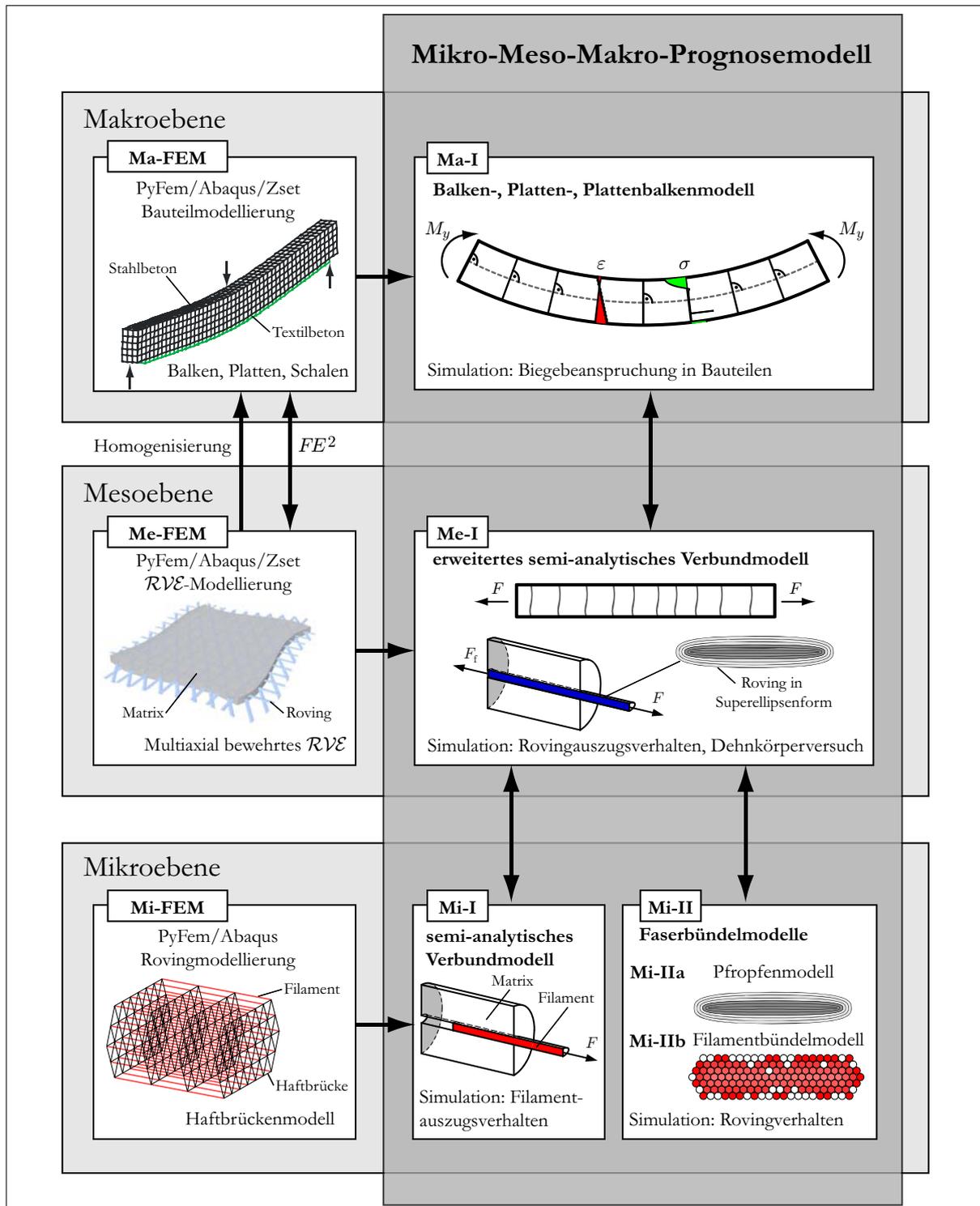


Abbildung 4.1: Das MMM-Prognosemodell für Textilbeton

5 Hierarchisches Multi-Skalen-Materialmodell für Textilbeton

5.1 Definition der Strukturebenen für das Mikro-Meso-Makro-Materialmodell

Das Hauptproblem bei einer Tragwerksanalyse stellen die Versagensmechanismen auf den unterschiedlichen Strukturebenen (Abb. 5.1) dar.

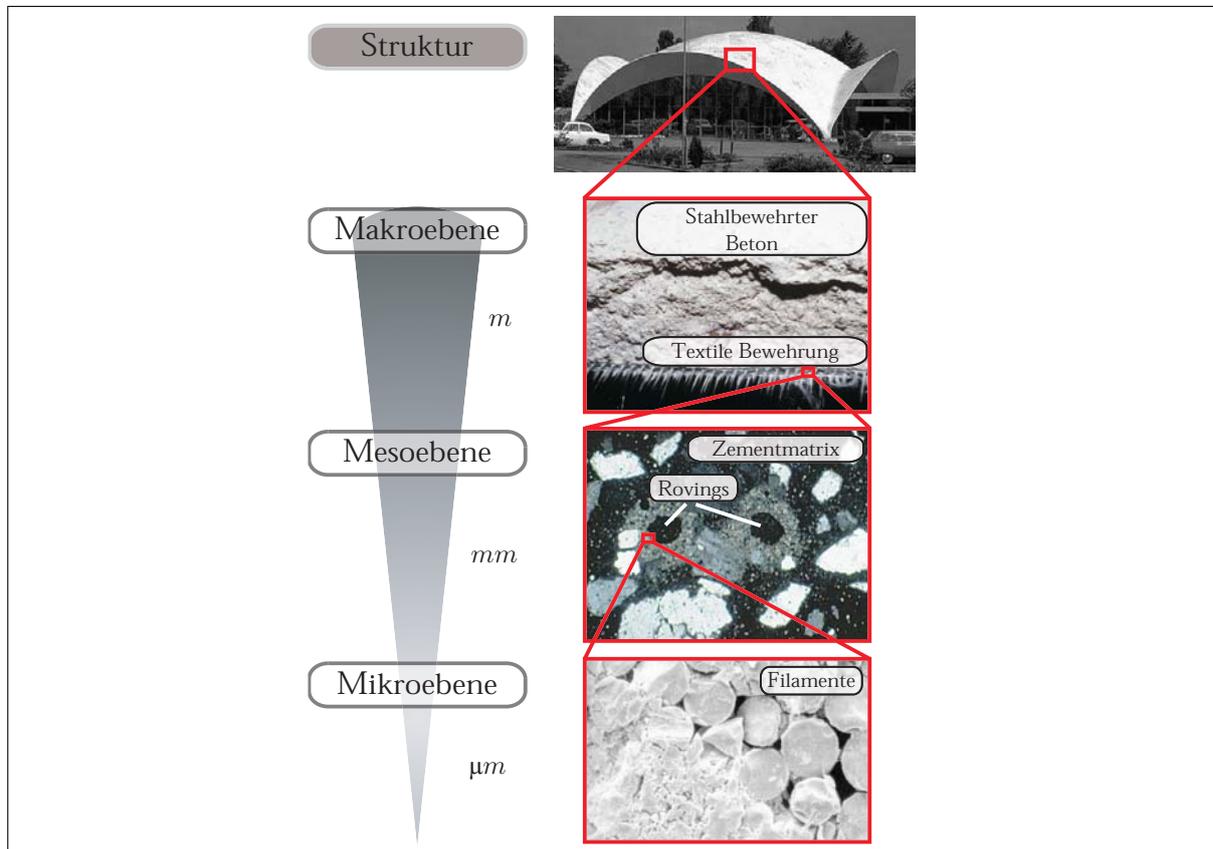


Abbildung 5.1: Definition der Strukturebenen für Textilbeton

Einerseits besitzen die Bewehrungselemente Durchmesser kleiner als einen Millimeter, andererseits gilt es, Tragwerke mit Abmessungen von mehreren Metern zu berechnen. Es werden deshalb Strukturebenen in einem hierarchischen Materialmodell eingeführt, welches die Materialstruktur auf unterschiedlichen Detaillierungsniveaus erfasst.

Während bei einer physikalischen bzw. chemischen Herangehensweise häufig auf der Atomebene gearbeitet wird, kommen für ingenieurmäßige Problemstellungen Modelle auf einer Mikro-, Meso- bzw. Makroebene zum Einsatz, vgl. Abb. 5.2. Mikro- und mesomechanische Modelle differenzieren dabei zwischen den Einzelkomponenten des Materials und beschreiben deren Interaktion, wobei mesomechanische Modelle die Struktur geringer auflösen. Für die mesomechanische Beschreibung des Verbundwerkstoffes Textilbeton wird die Betonmatrix als homogen angenommen, während mikromechanische Modelle z. B. zwischen Zementleim und Zuschlagstoff unterscheiden.

Ein Materialmodell auf der Makroebene beschreibt ggf. ein homogenes Ersatzmaterial, welches im gemittelten Sinne das Verhalten des heterogenen Werkstoffes widerspiegelt. Es erfolgt z. B. für den hier behandelten Textilbeton keine Unterscheidung mehr zwischen Matrix und Bewehrung. Die Kontinuumsmechanik lässt sich demnach nur auf der Makro- bzw. Mesoebene anwenden.

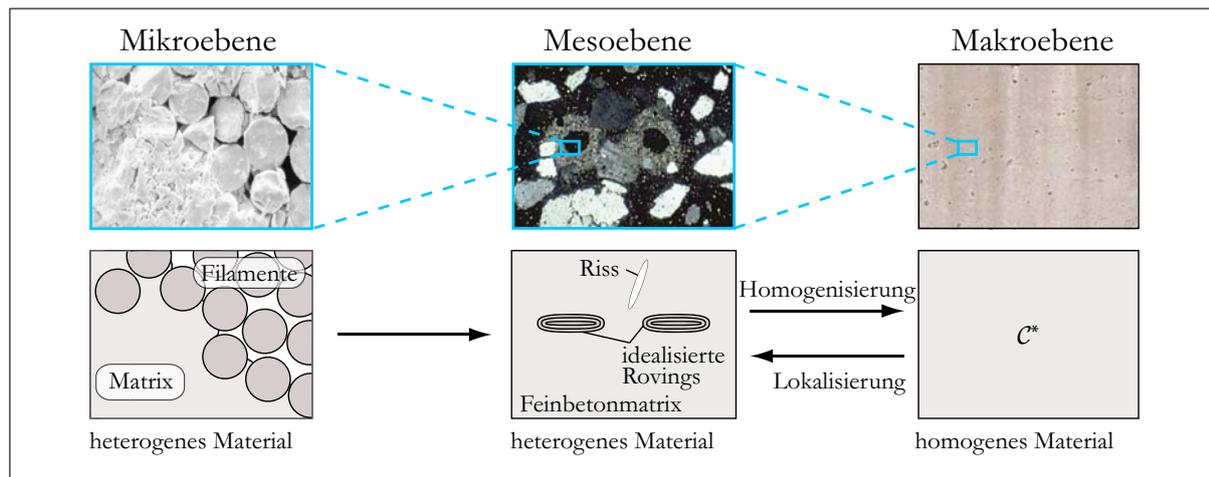


Abbildung 5.2: Idealisierung der Materialstruktur von Textilbeton auf der Mikro-, Meso- und Makroebene

Mikromechanische Modelle können erst nach einer Homogenisierung im Rahmen der Kontinuumsmechanik berücksichtigt werden.

Im Sonderforschungsbereich 528 [CURBACH ET AL. 2007] durchgeführte Versuche lassen den Schluss zu, dass der Verbund zwischen den inneren Filamenten geringer sein kann als der Verbund zwischen Filament und Zementmatrix. Untersuchungen am Institut für Polymerforschung Dresden e. V. zeigen, dass der Zementleim in die äußeren Schichten des Rovings eingedrungen und damit ein guter Verbund zwischen den äußeren Filamenten untereinander und zur Matrix vorhanden ist, dass aber zwischen die inneren Filamente auf Grund der geringen Filamentzwischenräume ($< 3 \mu\text{m}$) nahezu keine Zementpartikel eingedrungen sind.

Mikroskopische Untersuchungen an Probenquerschnitten (Abb. 2.12) zeigen, dass sich zwischen dem Faserbündel und der umgebenden Feinbetonmatrix eine Schicht ausbildet, die sich in ihren mechanischen Eigenschaften von denen der umgebenden Matrix unterscheidet.

Der Bereich der Matrix, welcher in unmittelbarer Umgebung der Glasfaserbewehrung liegt, weist eine relativ konstante Partikelgröße auf. Es handelt sich vornehmlich um Zementpartikel, die eine poröse Struktur bilden. Dies ist hauptsächlich auf Randeffekte an der Grenzfläche zwischen der Feinbetonmatrix und der Glasfaser während der Herstellung zurückzuführen. Die mechanischen Eigenschaften des Feinbetons in der Kontaktzone unterscheiden sich von den Eigenschaften des restlichen Betons. Diese Schicht bestimmt maßgebend die Verbundeigenschaften zwischen Matrix und Faserbewehrung [BENTUR & MINDESS 1990, JESSE 2004]. Das Ablösen der Glasfaserbewehrung vom Feinbeton vollzieht sich infolge einer aufgebrachten Belastung nicht direkt in der Kontaktfläche, sondern in einer Entfernung von ca. $1 - 40 \mu\text{m}$ von der Faser.

Die numerische Analyse von Tragwerken aus Verbundwerkstoffen (z.B. aus faserbewehrtem Feinbeton) ist mit extrem hohen Anforderungen an die Computer-Hardware verbunden, wenn eine Diskretisierung unter Berücksichtigung der Meso- oder gar der Mikrostruktur durchgeführt wird. Um die mechanischen Eigenschaften auf der entsprechenden Strukturebene abbilden zu können, sind im Rahmen einer Finite-Elemente-Analyse Elemente in der Größenordnung der zu berücksichtigenden Heterogenitäten anzuwenden. Im Allgemeinen ist aber eine Diskretisierung des Gesamtproblems in dieser Feinheit nicht möglich.

Deshalb wird eine Substitution der realen heterogenen Struktur durch ein homogenes Ersatzmaterial durchgeführt, welches makroskopisch ein äquivalentes Verhalten aufweist. Diese Vorgehenswei-

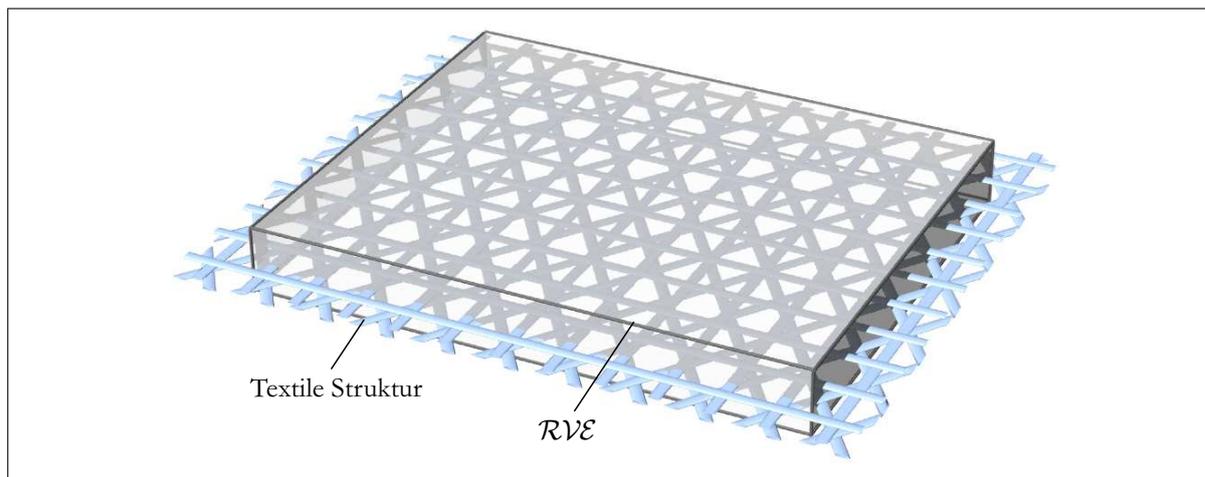


Abbildung 5.3: Beispiel eines repräsentativen Volumenelementes

se ist als Homogenisierung bekannt. Dazu wird die heterogene Struktur des Verbundwerkstoffes auf der Mesoebene mittels eines repräsentativen Volumenelementes (\mathcal{RVE}) erfasst (Abb. 5.3). Der Verbundwerkstoff wird – basierend auf den verwendeten Einzelmaterialien – auf der Mesoebene diskretisiert, wobei Menge, Ausrichtung und Struktur der textilen Bewehrung besondere Beachtung finden (Abb. 5.2). Anschließend werden die effektiven Materialeigenschaften mit Hilfe von Homogenisierungsmethoden ermittelt (Abschnitt 6).

Die Modellierung des \mathcal{RVE} erlaubt die Abbildung der lokalen Schädigungs- bzw. Versagensmechanismen in diskreter oder verschmierter Form, d. h. es werden u. a. Interfaceversagen eines einzelnen Bewehrungselementes (z. B. Roving), Matrixschädigung und Matrixversagen sowie Reißen der Bewehrung berücksichtigt.

5.2 Rovingapproximationen

5.2.1 Mikromechanische Rovingmodelle

In mikromechanischen Modellen werden die einzelnen Filamente eines Rovings unterschieden. Es sind demzufolge Aussagen über die Anordnungen der Filamente im Roving zu treffen. Abbildung 5.4 zeigt idealisierte Anordnungen von Filamenten.

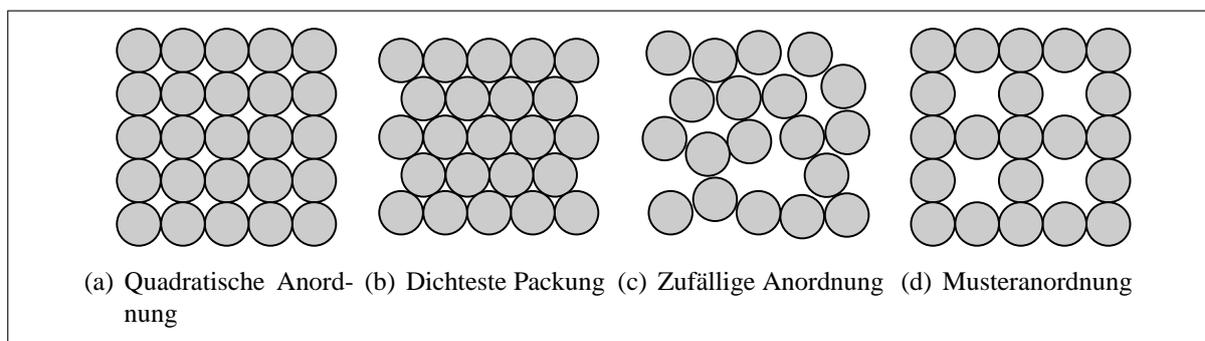


Abbildung 5.4: Theoretische Anordnungen der Filamente

Die maximale Packungsdichte ν_p eines Rovings (Abb. 5.5) ergibt sich zu

$$\nu_p = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,91. \quad (5.1)$$

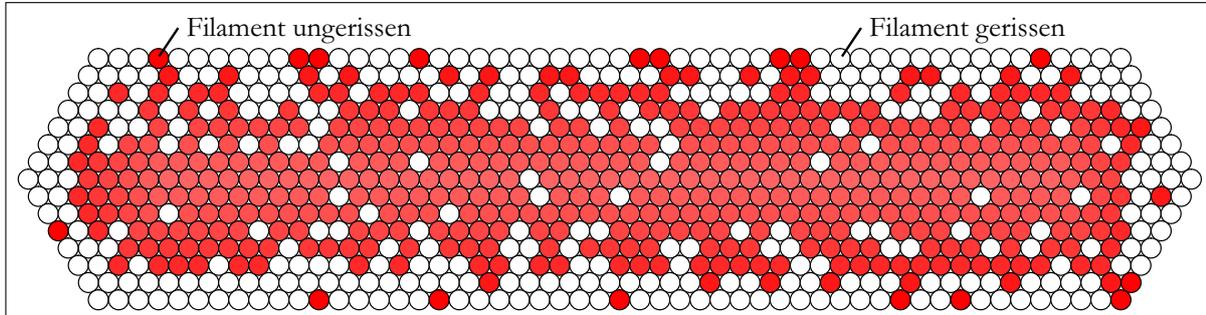


Abbildung 5.5: Mikromechanische Approximation des Rovings (**Mi-IIb-Modell**)
(Feinheit $Tt = 310 \text{ tex}$, Aspektverhältnis $a : b = 5$, dichteste Packung,
343 gerissene Filamente)

Ausgehend von der theoretisch dichtesten Packung der Filamente lassen sich Rovings schichtweise aufbauen. Durch Variation der Anzahl der Kernfilamente ergeben sich unterschiedliche Aspektverhältnisse der Halbachsen des Rovingquerschnittes, vgl. Abb. 5.6 mit 1 bzw. 11 Kernfilamenten. Der theoretische Umfang u_0 der Schicht i lässt sich mit

$$u_0^i = 6 \frac{2u_f}{3} + (n_f^i - 6) \frac{u_f}{2} \quad (5.2)$$

angeben, wobei u_f der Umfang eines Filamentes ist und n_f^i die Anzahl der Filamente der Schicht i beschreibt.

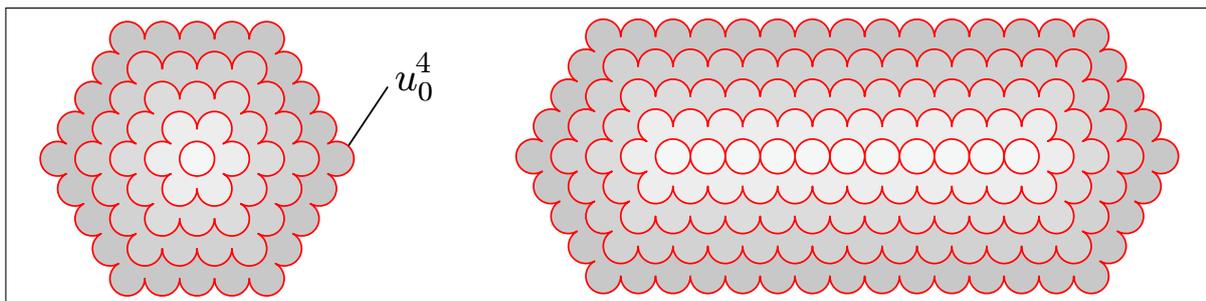


Abbildung 5.6: Darstellung des Umfangs einzelner Rovingsschichten bei dichtester Packung

Praktisch wird sich jedoch kein Verbundversagen entlang des theoretischen Umfangs einstellen, da die Festigkeit der Matrix unendlich groß sein müsste, um auch im Zwickel ein Interfaceversagen bewirken zu können (Abb. 5.7). Effektiv stellt sich eine Kombination eines Adhäsionsbruches (Faser-Matrix) und eines Kohäsionsbruches (Matrix-Matrix) ein (Abb. 5.7).

Der effektive Umfang kann mit

$$u_{\text{eff}} = d_f \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (5.3)$$

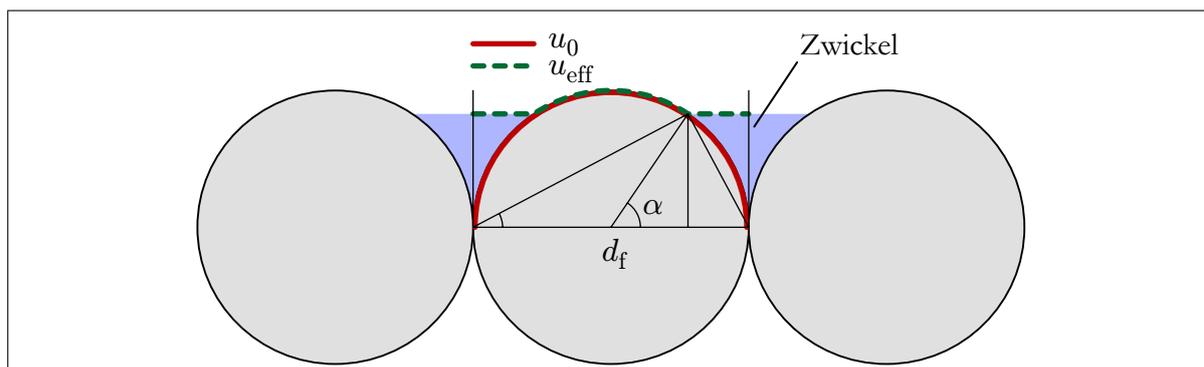


Abbildung 5.7: Effektiv wirksamer Umfang eines Filamentes im Roving

berechnet werden. Bei welchem Winkel α (vgl. Abb. 5.7) sich der Übergang zwischen den zwei Versagensarten einstellt, ist eine Frage des Verhältnisses der Festigkeiten der Matrix β_{Matrix} und der Interface-Transition-Zone β_{ITZ} . Abbildung 5.8 zeigt die Abminderung des theoretisch wirksamen Umfangs u_0 in Abhängigkeit des Winkels α sowie in Abhängigkeit des Verhältnisses der Festigkeiten $\beta_{\text{Matrix}}/\beta_{\text{ITZ}}$.

Festzustellen ist eine maximale Abminderung des wirksamen Umfanges u_{eff} auf 63,67% des theoretischen Umfanges u_0 . Die Festigkeit der Matrix β_{Matrix} muss mindestens 1,571 mal größer sein als die Festigkeit des Interfaces, damit überhaupt ein Adhäsionsversagen eintreten kann (vgl. Abb. 5.8(b)).

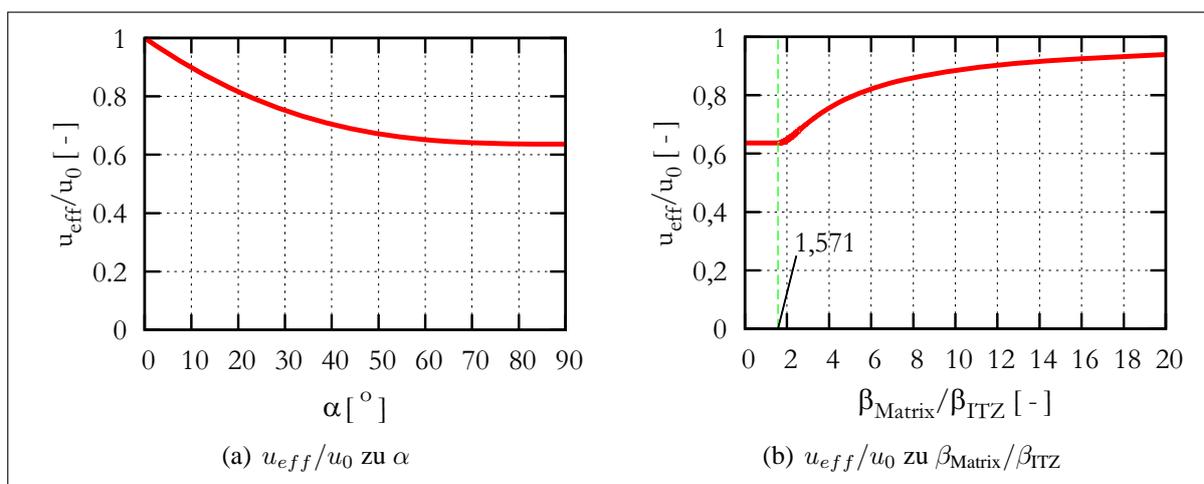


Abbildung 5.8: Effektiv wirksamer Umfang eines Rovings

5.2.2 Mesomechanische Rovingmodelle

Um die Vielfalt an Querschnittsformen der Rovings annähernd abbilden zu können, wurde eine Querschnittsapproximation durch sogenannte Superellipsen erarbeitet (Abb. 5.9).

Untersuchungen an Querschnitten von Textilbetonproben zeigen, dass die Querschnittsform der in die Matrix eingebetteten Rovings nicht kreisrund ist. Besonders Rovings, die aus einer größeren Anzahl von Filamenten bestehen, besitzen oft flachgedrückte Querschnitte, die im günstigsten Fall durch Ellipsen angenähert werden können, aber oft auch kompliziertere Formen haben.

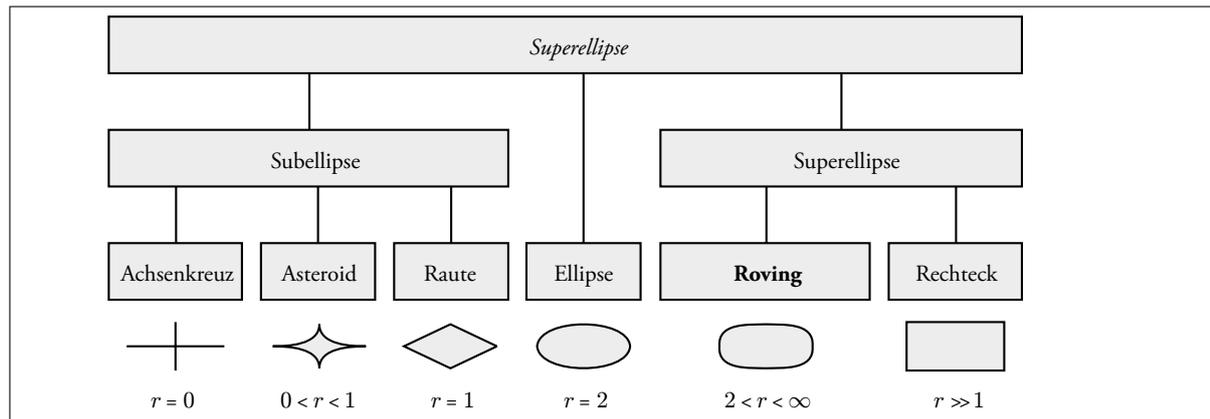


Abbildung 5.9: Superellipsen

Das aus der partiellen Zementleim-Imprägnierung des Rovings herrührende komplexe Tragverhalten des Bewehrungsmaterials wird durch verschiedene Rovingmodelle (Abb. 5.10) abgebildet. Die Modelle unterscheiden sich hauptsächlich in der Gliederung des Querschnittes in Teilbereiche. Das Einzylindermodell stellt die einfachste geometrische Modellierung des Rovings dar, wobei für das Materialverhalten des Rovings nichtlineare – das Bündeltragverhalten beschreibende – Materialmodelle zur Anwendung kommen können. Durch Einführung weiterer möglicher Bruchflächen zwischen den Filamenten des Rovings wird das Tragverhalten besser erfasst, jedoch steigt gleichzeitig der numerische Aufwand. Das Verbundproblem lässt sich dabei nicht mit herkömmlichen Verbundelementen im Rahmen einer Finite-Elemente-Analyse erfassen, denn bei dem Auszug des Rovings kommt es teilweise zu großen gegenseitigen Verschiebungen in den Kontaktflächen.

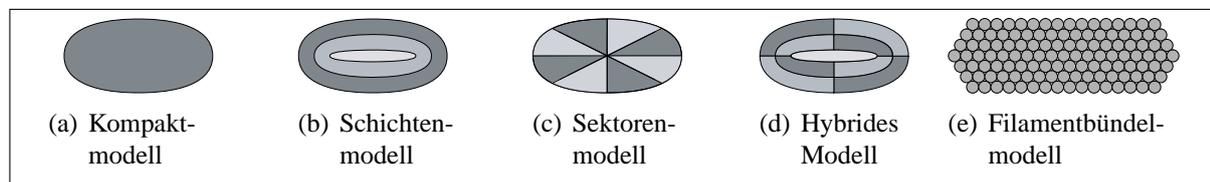


Abbildung 5.10: Idealisierungen eines Rovings

Die Erkenntnisse über die Kraftübertragung im Inneren des Rovings sowie zwischen Roving und Matrix sind wichtige Voraussetzung für die Entwicklung eines \mathcal{RVE} und müssen zu einem möglichst einfachen Modell für den Roving führen, indem alle relevanten Tragmechanismen berücksichtigt werden. In Abb. 5.10 sind Modelle aufgeführt, wie der Querschnitt eines Rovings idealisiert werden kann:

- (a) Kompaktmodell – keine Versagensflächen im Roving;
- (b) Schichtenmodell – Berücksichtigung der unterschiedlichen Verbundeigenschaften im unbeschichteten Roving;
- (c) Sektorenmodell – Berücksichtigung von Filamentgruppen in einzelnen Sektoren bei beschichteten Rovings;
- (d) Hybrides Modell – Unterteilung in Ringe und Sektoren;
- (e) Filamentbündelmodell – Berücksichtigung aller Filamente im Roving.

Superellipsen

Die Superellipsengleichung (Gl. (5.4)) ist besonders geeignet, um eine große Anzahl von Objektformen zu repräsentieren. Durch Variation des Parameters r (oder ϵ) lassen sich mit Gl. (5.4) u. a. Rechtecke, Ellipsen, Rhomben und Sterne beschreiben (Abb. 5.11):

$$\left| \frac{x}{a} \right|^r + \left| \frac{y}{b} \right|^r = 1 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{x}{a} \right|^{\frac{2}{\epsilon}} + \left| \frac{y}{b} \right|^{\frac{2}{\epsilon}} = 1. \quad (5.4)$$

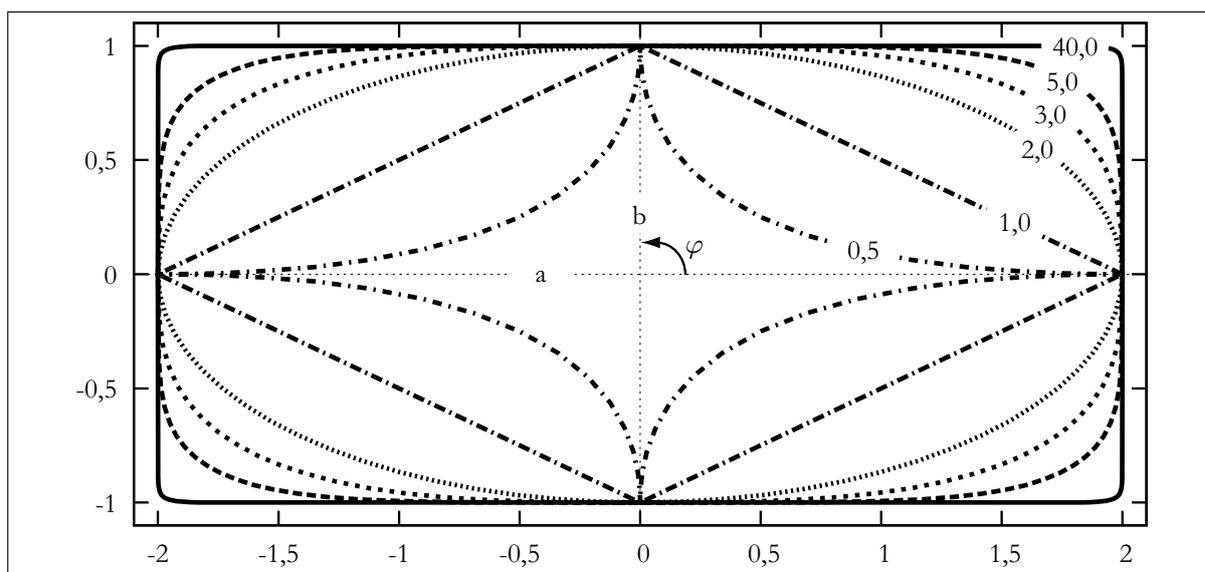


Abbildung 5.11: Superellipsen ($a = 2,0$; $b = 1,0$; $r = 0,5 \dots 40$)

Die parametrische Form für den Winkel φ ($0 < \varphi \leq 2\pi$) ist gegeben durch:

$$x = a \cos^{\frac{2}{r}} \varphi = a \cos^{\epsilon} \varphi = a \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^r \right]^{\frac{1}{r}}, \quad (5.5)$$

$$y = b \sin^{\frac{2}{r}} \varphi = b \sin^{\epsilon} \varphi = b \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^r \right]^{\frac{1}{r}}. \quad (5.6)$$

Der Flächeninhalt einer Superellipse kann mit

$$A = 4 \int_0^a y dx = 4b \int_0^a \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} dx = \frac{4^{1-1/r} ab \sqrt{\pi} \Gamma \left(1 + \frac{1}{r} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r} \right)} \quad (5.7)$$

bestimmt werden, wobei Γ die Gamma-Funktion darstellt. Die Generalisierung für Superellipsen mit unterschiedlichen Exponenten lautet

$$|x|^p + |y|^q = 1. \quad (5.8)$$

Damit sind z. B. Formen in Abb. 5.12 darstellbar.

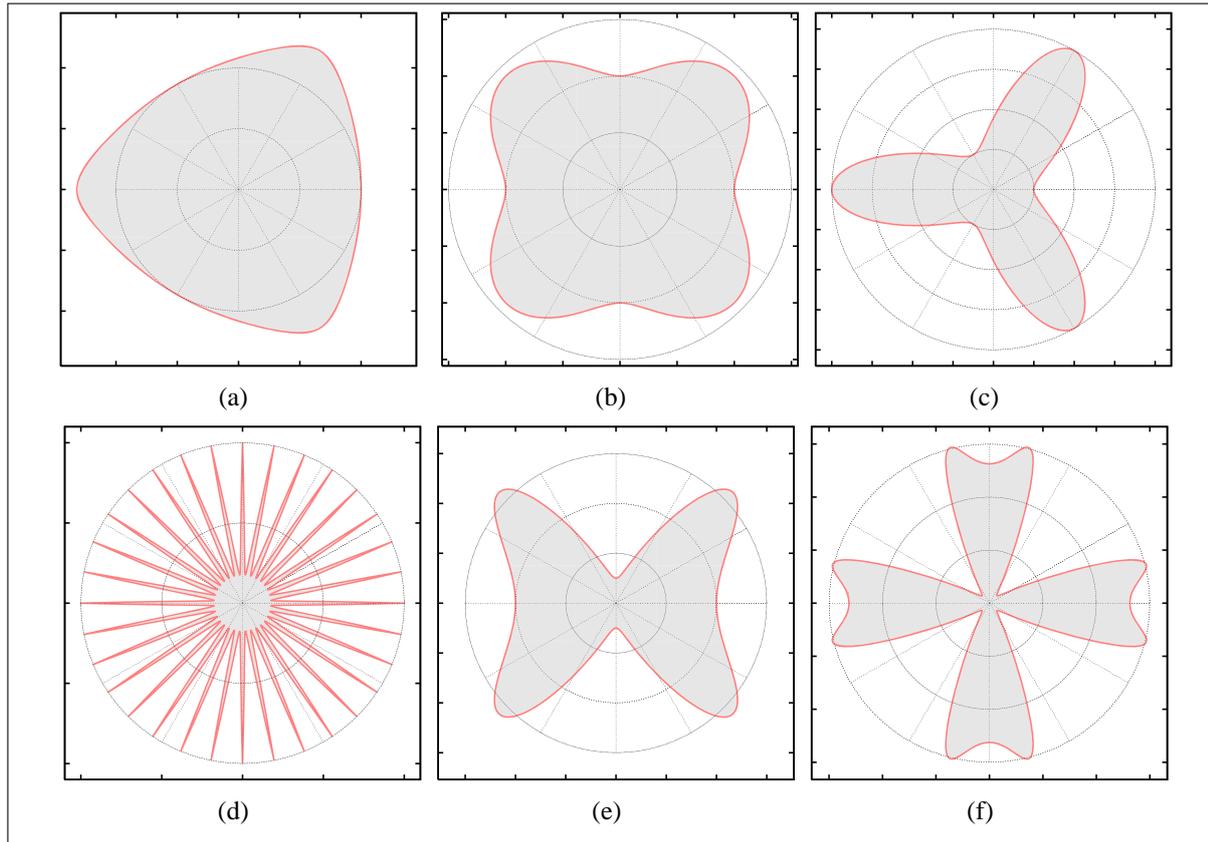


Abbildung 5.12: Generalisierte Superellipsen mit unterschiedlichen Parametern

Darstellungen in Polarkoordinaten (Gl. (5.9)) erlauben eine weitere Verallgemeinerung mit m -facher Rotationssymmetrie (Abb. 5.12):

$$r(\varphi) = \left[\left| \frac{\cos(\frac{1}{4}m\varphi)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin(\frac{1}{4}m\varphi)}{b} \right|^{n_3} \right]^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (5.9)$$

Die Anwendung der Gl. (5.4) erlaubt die Beschreibung der Geometrie von doppelsymmetrischen Rovings (Abb. 5.13).

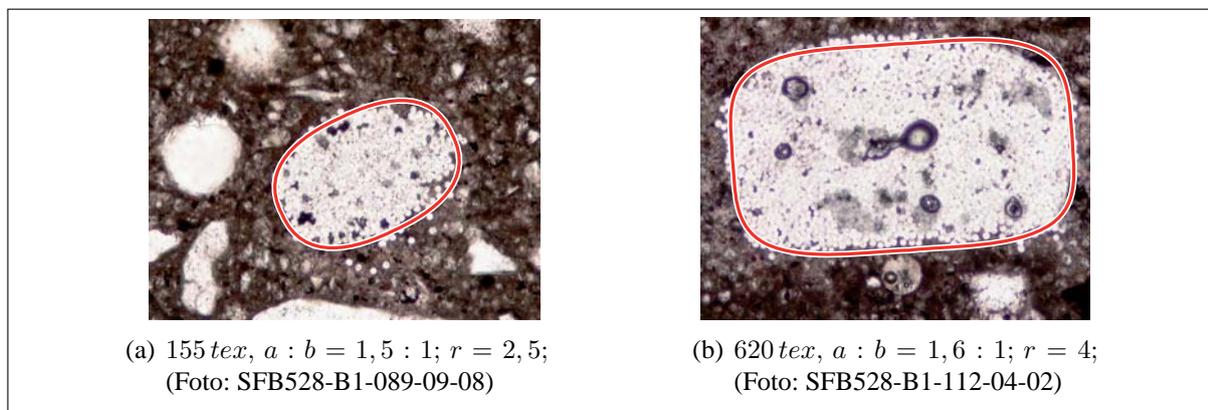


Abbildung 5.13: Geometrieapproximation von Rovings mittels Superellipsen

Die Verwendung der generalisierten Superellipsengleichung ermöglicht die Approximation ver-

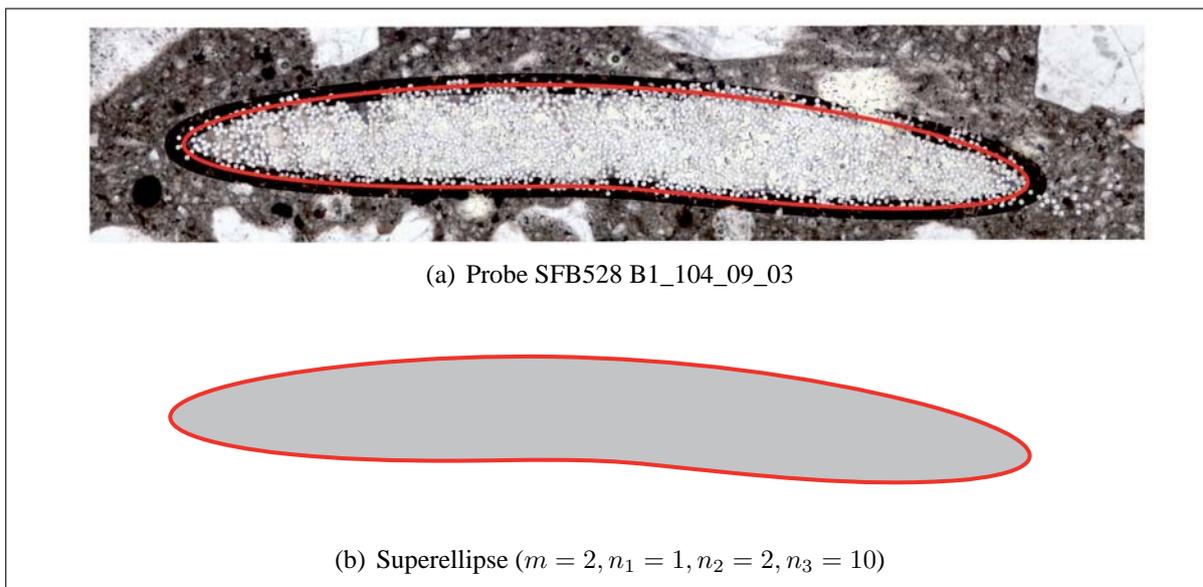


Abbildung 5.14: Geometrieapproximation eines Rovings mit generalisierten Superellipsen

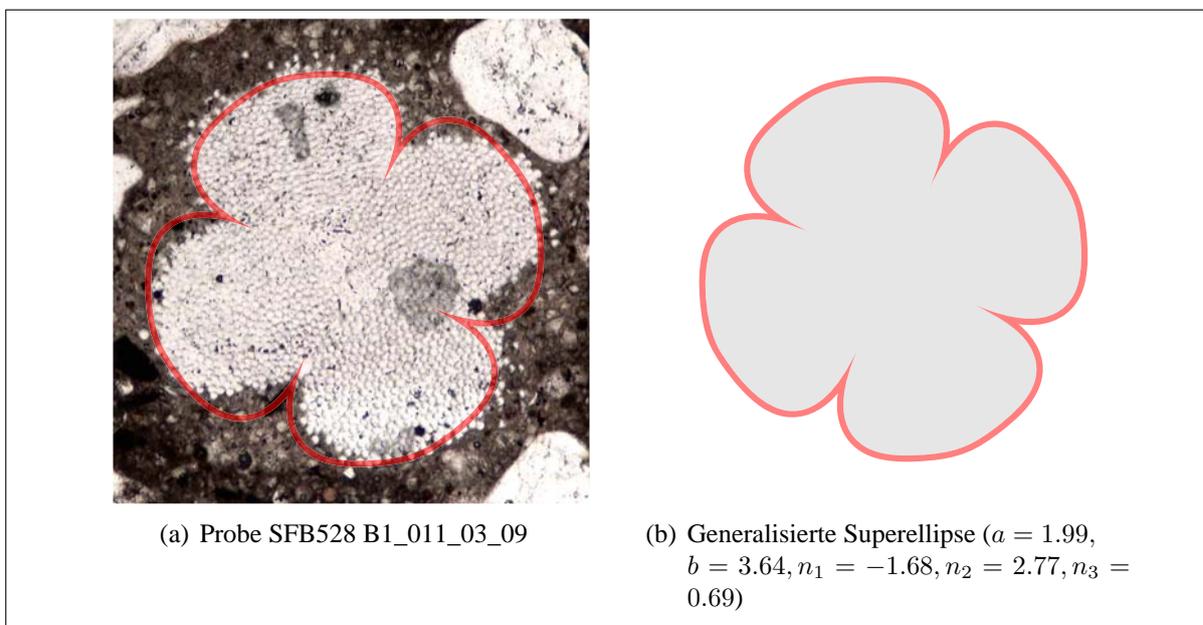


Abbildung 5.15: Geometrieapproximation eines Rovingbündels (4 Einzelrovings)

schieden verformter Rovings (Abb. 5.14) sowie von Rovingbündeln (Abb. 5.15).

Mittels Approximation der Rovingquerschnitte mit Superellipsen können die Schichten des Rovings einfach parametrisiert werden (Abb. D.1). Dies erlaubt die Berücksichtigung unterschiedlicher Eigenschaften im Roving.

5.3 Mehrskalenanalysen

Für die Materialmodellierungen von Mehrphasenwerkstoffen werden in der kontinuumsmechanischen Materialtheorie häufig Mehrskalmethoden eingesetzt. Unter Mehrphasenwerkstoffen sollen hier Verbundwerkstoffe jeglicher Art verstanden werden, einschließlich des Verbundwerkstoffes Textilbeton. Abbildung 5.1 zeigt, wie der Verbundwerkstoff Textilbeton in dieser Arbeit hierarchisch abgebildet wird.

Das Ziel einer Mehrskalanalyse ist die Simulation der Phänomene auf der jeweiligen Strukturebene des Materials, anstatt phänomenologisch das effektive Materialverhalten mittels empirischer Ansätze zu beschreiben. Mehrskalmodelle beschreiben ein Material mittels direkt verbundener Modelle auf den unterschiedlichen Strukturebenen. Diese hierarchische Materialbeschreibung hilft, die Phänomene zu verstehen und aus den gewonnenen Erkenntnissen neue, optimierte Werkstoffe zu entwickeln.

Ein elementares Konzept der Mehrskalmodellierung ist die Homogenisierung, welche effektive Eigenschaften mittels einer Skalenüberbrückung bestimmt [KALISKE 1999, GOEKTEPE & MIEHE 2005]. Der Fokus liegt hier auf der Formulierung von Mikro-Makro-Übergängen. Durch die Homogenisierung können effektive Materialparameter für Makro-Materialmodelle identifiziert werden.

Ein aktueller Trend in der Materialforschung zielt bereits auf die Entwicklung virtueller Materialtests an repräsentativen Volumenelementen ab, gekoppelt mit der Bestimmung effektiver Modellparameter für makroskopisch formulierte Materialgesetze, vgl. [GOEKTEPE & MIEHE 2005]. Einige Ansätze verzichten komplett auf makroskopische konstitutive Beziehungen und lösen für jede makroskopische Beanspruchung ein entsprechendes mikroskopisches Randwertproblem im Sinne einer integrierten Multiskalenmethode, vgl. Abschnitt 7.2.

Die Problematik einer Mehrskalanalyse besteht in der Beschreibung der komplexen Wechselwirkungen zwischen den Skalen. Im Falle von Textilbeton kommt es z. B. durch die unterschiedlichen Materialsteifigkeiten und die partielle Imprägnierung des Rovings zu Spannungs- und Verzerrungsfluktuationen auf der Mikroebene. Das Materialverhalten auf den übergeordneten Strukturebenen wird durch die Orientierung der Rovings sowie durch das Reißen bzw. das Ablösen der Filamente beeinflusst. Die starken Fluktuationen der Spannungen auf der Mikroebene werden auf der Mesoebene homogenisiert abgebildet, weil die relevanten Effekte und effektiven Größen, z. B. die Richtungseigenschaften des Rovings (transversale Isotropie), interessieren. Darüber hinaus sind infolge einer entsprechenden Belastung die mikro- bzw. mesoskopischen Eigenschaften die Ursache für die Initiierung von maßgeblichen Schädigungs- bzw. Versagensmechanismen, welche auf der Makroebene abgebildet werden müssen.

Die Spannungs- und Verzerrungsfluktuationen auf der Mesoebene infolge der multiaxialen Textilstrukturen in der einbettenden Zementmatrix sollen auf der Makroebene nicht direkt abgebildet werden. Es sind also geeignete Materialformulierungen gefragt, die u. a. die Richtungsabhängigkeit des Materials abbilden können.

Die Skalenübergänge von der Mikro- über die Meso- zur Makroebene wirken wie Informationsfilter. Nur für das Materialverhalten relevante Eigenschaften sollen erfasst werden, damit praxisnahe Problemstellungen gelöst werden können, ohne in einer Informationsflut unterzugehen. Der Übergang von einer Skala zu einer übergeordneten Skala erfolgt punktweise mittels Homogenisierungsmethoden, welche im Folgenden vorgestellt werden sollen.

5.4 Homogenisierung

Ziel der Homogenisierung ist es, effektive Größen zur Beschreibung des Materialverhaltens eines homogenen Ersatzmediums zu finden, welches sich genauso verhält wie das zu untersuchende heterogene Medium. In der Literatur wird synonym neben dem Begriff *Homogenisierung* auch *Regularisierung* und *Theorie der effektiven Medien/Felder* verwendet [HASHIN & HERAKOVICH 1982, MURA 1993, NEMAT-NASSER & HORI 1993, KALISKE 1999]).

Jedem materiellen Punkt \mathbf{x} ist auf der Makroebene ein charakteristisches Gebiet \mathcal{Y} auf der Mesoebene zugeordnet, wobei im Folgenden jeder materielle Punkt im Gebiet \mathcal{Y} mit der Koordinate \mathbf{y} bezeichnet wird. Ein Punkt der heterogenen Struktur wird mittels zweier Koordinaten bestimmt (Abb. 5.16). Zum Einen mit der makroskopischen Koordinate \mathbf{x} bzw. x_n , welche einen materiellen Punkt mit der Substruktur in dem homogenen Ersatzmedium beschreibt, und zum Anderen mit der mesoskopischen Koordinate \mathbf{y} bzw. y_n , welche den Ort in der Substruktur in der Umgebung von dem materiellen Punkt \mathbf{x} bzw. x_n kennzeichnet ($n = \{1, 2, 3\}$).

Das zu homogenisierende Medium auf einer feiner aufgelösten Ebene (z. B. Mesoebene) wird mittels eines lokalen Materialgesetzes beschrieben. Beispielhaft gelte:

$$\sigma_{ij}(y_n) = C_{ijkl}(y_n)\varepsilon_{kl}(y_n). \quad (5.10)$$

Auf einer dieser Ebene übergeordneten Ebene (z. B. der Makroebene) wird ein sogenanntes *homogenisiertes Materialgesetz*

$$\langle \sigma_{ij}(x_n) \rangle = C_{ijkl}^*(x_n) \langle \varepsilon_{kl}(x_n) \rangle \quad (5.11)$$

verwendet. Für die makroskopische Materialbeschreibung kann eine konstitutive (vermittelnde) Beziehung zwischen volumengemittelten Feldvariablen (Mittelwerten) aufgestellt werden, wobei $\langle \square \rangle$ den Volumenmittelwert darstellt.

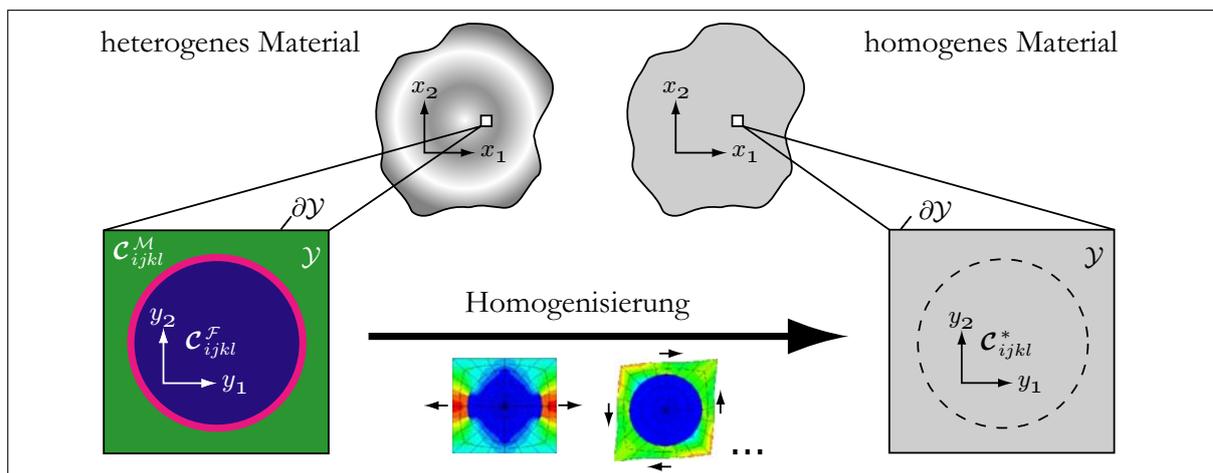


Abbildung 5.16: Schema der Homogenisierung des \mathcal{RVE}

Die Größe dieser Teilbereiche, allgemein als repräsentative Volumenelemente (\mathcal{RVE}) bzw. Materialregion (\mathcal{MR}) bezeichnet, ist so zu wählen, dass alle relevanten mechanischen, geometrischen und topologischen Eigenschaften der Skala abgebildet werden können. In Abschnitt 5.4.2 wird dieser Aspekt näher beleuchtet.

Für eine Homogenisierung sind demnach folgende Teilaspekte ableitbar:

1. Wahl eines geeigneten $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ bzw. \mathcal{MR} ,
2. Definition geeigneter, physikalisch sinnvoller Variablen auf der übergeordneten Skala,
3. Ermittlung der Randbedingungen für das $\mathcal{RV}\mathcal{E}$,
4. Verknüpfung der Skalen, basierend auf dem $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ -Konzept,
5. Berechnung der effektiven Variablen.

5.4.1 Fundamentale Mikro-Meso-Makro-Konzepte

Die Anwendung des Mikro-Meso-Makro-Konzeptes hat das Ziel, die Skalenwechselwirkungen zu beschreiben und die phänomenologischen Materialmodelle auf den jeweiligen Strukturebenen zu koppeln. Voraussetzung ist hierzu die Kenntnis der mechanischen Eigenschaften, der Gestalt und der Orientierung der Einzelmaterialien. Wie bereits in der Einführung dieses Kapitels ausgeführt, ist die Definition physikalisch sinnvoller Makrovariablen und deren Verknüpfung mit Mikrovariablen für einen Skalenübergang notwendig. Zur Bereitstellung von Randbedingungen für das Mikro-Randproblem haben sich Größen, welche auf den Oberflächen des $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ vorgegeben werden, als zweckmäßig herausgestellt (vgl. Abschnitt 6.3.3).

In dieser Arbeit wird vom Prinzip der lokalen Wirkung ausgegangen, d. h., dass die Makrovariablen als hinreichend glatt in einem Teilbereich auf der Makroebene betrachtet werden können. Auf der feiner aufgelösten Skala fluktuieren die Feldvariablen infolge der Heterogenität der Struktur. Es wird demzufolge angenommen, dass die Umgebung eines materiellen Punktes eine Mikrostruktur besitzt und diese auch aufgelöst werden kann. Ferner muss dieses Teilgebiet der Mikrostruktur den Anforderungen eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ genügen, was im Folgenden genauer erläutert wird.

Ziel der Mikro-Meso-Homogenisierung ist eine vollständige Repräsentation der Mesostruktur des Materials durch eine Zelle, damit eine zulässige Beziehung zwischen den lokalen Zustandsvariablen eines makroskopischen Punktes \mathbf{x} und den zugehörigen, gemittelten Zustandsvariablen des untersuchten Gebietes \mathcal{V} der Substruktur aufgestellt werden kann. Die Zelle ist dabei entsprechend den abzubildenden Eigenschaften des Materials zu wählen. Im einfachsten Fall ist das $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ identisch mit der kleinsten wählbaren Zelle, der sogenannten Einheitszelle \mathcal{EHZ} . Abbildung 5.17 zeigt die periodische Bewehrungsstruktur eines Faserverbundwerkstoffes und eine Auswahl an wählbaren \mathcal{EHZ} . Sind die abzubildenden Eigenschaften, z. B. Schädigungsmechanismen der Zelle nicht mit einer \mathcal{EHZ} abbildbar, werden größere Gebiete \mathcal{V} der Substruktur betrachtet, allgemein als repräsentatives Volumenelement $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ oder Materialregion \mathcal{MR} bezeichnet.

Die Wahl des $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ ist nicht eindeutig. Für periodische Strukturen werden $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ häufig so gewählt, dass durch Aneinandersetzen der $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ die Gesamtstruktur wieder erzeugt werden kann. Die mechanischen Eigenschaften im $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ sind hierbei invariant gegenüber einer Translation $n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Die Gesamtstruktur muss nicht zwingend aus $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ zusammensetzbar sein. Theoretisch ist jede Form der zu untersuchenden Substruktur möglich, solange das gewählte Gebiet der Mikrostruktur den Anforderungen eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ genügt.

Bei der Festlegung des Gebietes der Substruktur \mathcal{V} müssen noch weitere Anforderungen erfüllt sein. Die charakteristischen Längen L der Heterogenitäten im $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ müssen wesentlich kleiner als das $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ selbst sein (Gl. 5.12). Allgemein gilt diese Bedingung bei jeder Homogenisierung.

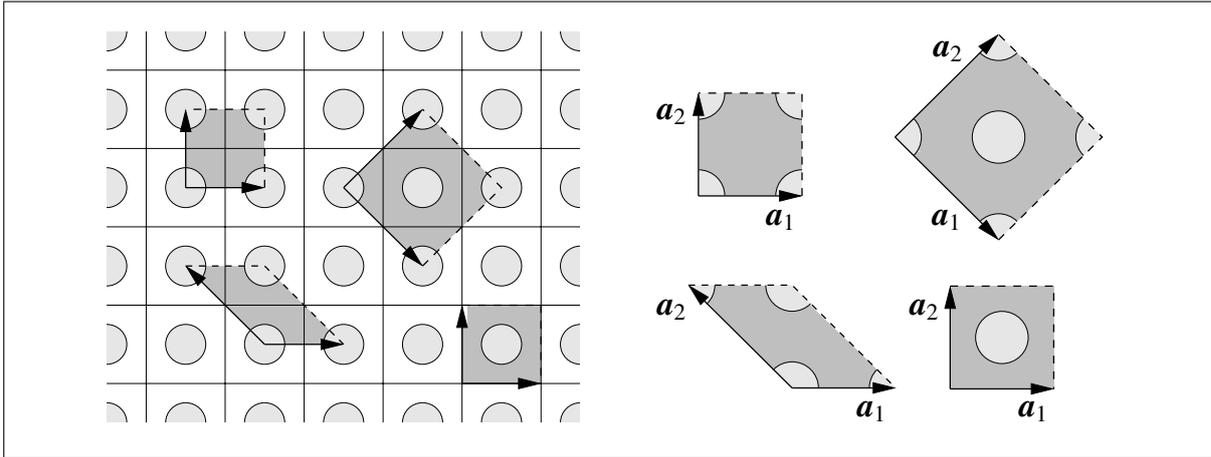


Abbildung 5.17: Mögliche Einheitszellen bei Verbundmaterialien mit regelmäßiger Struktur

HASHIN nennt diese Verhältnisse das *MMM-Prinzip der Skalenseparation*, das für den Verbundwerkstoff Textilbeton in Abbildung 5.2 dargestellt ist:

$$L_{\text{Mikro}} \ll L_{\text{Meso}} \ll L_{\text{Makro}} . \quad (5.12)$$

Die punktweise Verknüpfung der Mesostruktur mit der Makrostruktur ist mit der Bedingung $L_{\text{Meso}} \ll L_{\text{Makro}}$ ausgedrückt. Bei Verbundmaterialien mit periodischer Substruktur gilt für die charakteristischen Längen der Skalen $L_{\text{Meso}} < L_{\text{Makro}}$. Aus den Homogenisierungsprinzipien für Verbundwerkstoffe mit zufällig verteilten Einschlüssen lassen sich folgende Voraussetzungen für eine deterministische Problemstellung ableiten. Zunächst wird für ein statistisch zu untersuchendes Feld eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_A(\mathbf{a})$ an mehreren ausgewählten Punkten der Substruktur betrachtet:

$$p_{A|N} = p_A(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}; \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n\}) . \quad (5.13)$$

Dabei entspricht N der Anzahl der Abtastpunkte \underline{x}_N . Für den Sonderfall der Betrachtung zweier Punkte kann man nachfolgende Begriffe anschaulich darstellen :

- **Statistische und deterministische Homogenität (Abb. 5.18(a))**
Die statistische bzw. deterministische Homogenität eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ verlangt für dessen effektive Eigenschaften die Invarianz gegenüber einer Translation $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$, d. h. eine Unabhängigkeit von Verschiebungen im Raum.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt damit:

$$p_A(\{a_1, a_2\}; \{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}) = p_A(\{a_1, a_2\}; |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) . \quad (5.14)$$

- **Statistische und deterministische Isotropie (Abb. 5.18(b))**
Die statistische und deterministische Isotropie bedingt im Gegensatz zur statistischen Homogenität eine Invarianz gegenüber einer Rotation, d. h. eine Unabhängigkeit von der betrachteten Richtung (Betrag des Abstandsvektors). Somit kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p_A folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$p_A(\{a_1, a_2\}; \{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}) = p_A(\{a_1, a_2\}; |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) . \quad (5.15)$$

- Ergodizität

Vereinfacht ausgedrückt erfordert die Ergodizität für ein System die Existenz und Gleichheit der räumlichen und zeitlichen Mittelwerte einer Menge für alle Richtungen:

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) dV . \quad (5.16)$$

Ergodizität bedeutet, dass anhand einer Realisierung eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ die Erwartungswerte (Mittelwerte) der Gesamtstruktur bestimmt werden können. Ein einzelnes $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ enthält alle Informationen des Materials, und alle gemittelten Zustandsvariablen im $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ repräsentieren den Zustand des homogenen Ersatzmaterials. Das untersuchte Gebiet \mathcal{Y} ist nach Größe und Orientierung frei wählbar.

Ein $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ ist also das Teilvolumen einer Mikrostruktur, dessen zugeordnete Makrovariablen unabhängig von der Platzierung und den Randbedingungen des $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ sind.

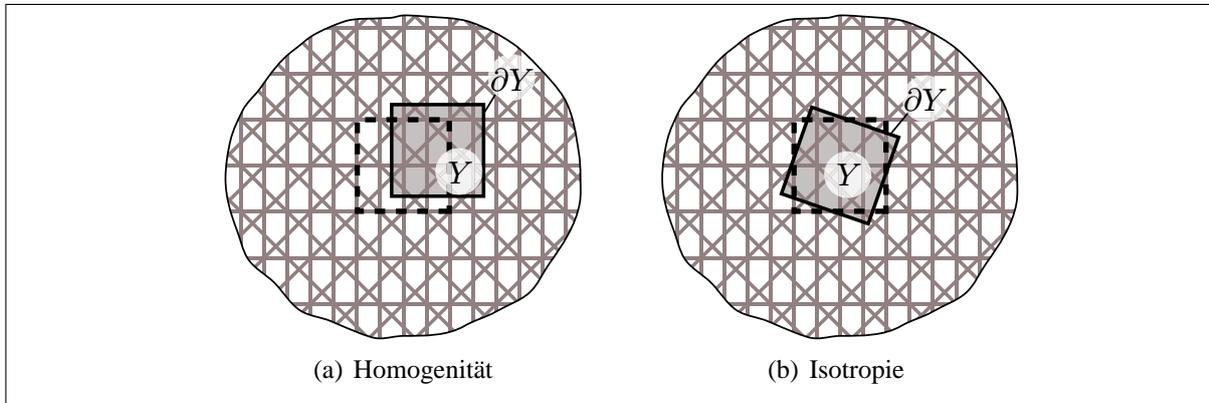


Abbildung 5.18: Visualisierung der Voraussetzungen bei der Wahl eines $\mathcal{RV}\mathcal{E}$

Definition geeigneter effektiver Variablen

Für jeden makroskopischen Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ werden sowohl die makroskopischen Variablen des homogenisierten Körpers als auch die in \mathbf{y} parametrisierten mikroskopischen Variablen im $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ betrachtet. Ziel ist das Finden der repräsentativen Mittelwerte, welche die untersuchten Eigenschaften des Materials abbilden können. Für die Untersuchung von Tragwerken aus Textilbeton sind das vor allem die Spannungen und die Verzerrungen. Im Rahmen einer Theorie mit finiten Deformationen bieten sich Relationen zwischen dem makroskopischen PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensor $\langle \mathbf{P} \rangle$ und dem makroskopischen Deformationsgradienten $\langle \mathbf{F} \rangle$ an.

$$\langle \mathbf{P} \rangle \longleftrightarrow \langle \mathbf{F} \rangle \quad (5.17)$$

Sollen nur kleine Verzerrungen berücksichtigt werden, wird die Relation (5.17) zu

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \longleftrightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle . \quad (5.18)$$

Unter der wesentlichen Voraussetzung der Skalenseparation (vgl. Gl. (5.12)) lassen sich die mikroskopischen Feldgrößen \square als Summe eines makroskopischen homogenen Anteils $\langle \square \rangle$ und eines mikroskopischen fluktuierenden Anteils $\tilde{\square}$ darstellen:

$$\square = \langle \square \rangle + \tilde{\square} . \quad (5.19)$$

Im \mathcal{RVE} sind die Makrovariablen $\langle \square \rangle$ gleich dem Volumenmittelwert des Gebietes \mathcal{Y} :

$$\langle \square \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} \square dV . \quad (5.20)$$

Für die Spannungen und Verzerrungen ergibt sich:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (5.21)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (5.22)$$

Zur besseren Lesbarkeit wird zusätzlich folgende Kurzschreibweise für die effektiven Feldgrößen eingeführt

$$\langle \square \rangle = \bar{\square}. \quad (5.23)$$

Der Prozess der Homogenisierung formuliert den Übergang von Größen der Mesoebene zu Größen der Makroebene. Eine für die Mehrskalenmodellierung fundamentale Beziehung ist die sogenannte HILL-Bedingung oder HILL-MANDEL-Makrohomoenitätsbedingung. Sie besagt, dass die makroskopische Formänderungsarbeit $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ gleich dem Mittelwert der mikroskopischen Formänderungsarbeiten $\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ ist

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle . \quad (5.24)$$

Diese Bedingung lässt sich auch für die Spannungsleistung oder die virtuelle Arbeit formulieren. Für das \mathcal{RVE} lassen sich drei Randbedingungen aus der HILL-Bedingung herleiten, die für die arbeitskonjugierten Variablen $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ angegeben werden. Mit Zerlegung der Feldvariablen in einen homogenen bzw. fluktuierenden Anteil (Gl. (5.19)) ergibt sich:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle , \quad \text{wobei } \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \equiv \mathbf{0} , \quad (5.25)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle , \quad \text{wobei } \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \equiv \mathbf{0} . \quad (5.26)$$

Durch Einsetzen in die HILL-Bedingung kann gezeigt werden, dass

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = 0 \quad (5.27)$$

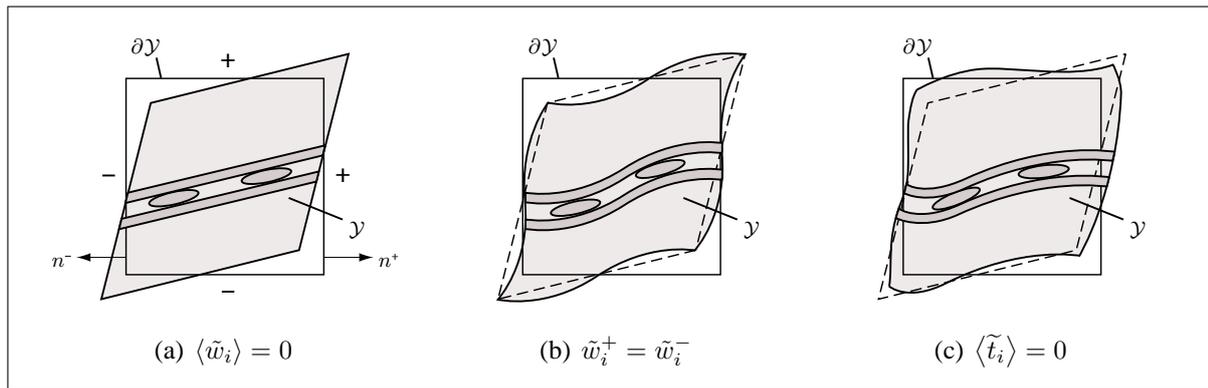
gilt. Gleichung (5.27) kann auch durch Größen auf dem Rand des Mittelungsbereiches ausgedrückt werden:

$$0 = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV , \quad (5.28a)$$

$$0 = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{Y}} (\sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle) (\varepsilon_{ij} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle) dV . \quad (5.28b)$$

Bezogen auf die arbeitskonjugierten Variablen $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ wurden folgende Randbedingungen behandelt:

1. homogene Randverschiebungen (lineare Randverschiebungen (Abb. 5.19(a)))
 $\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \mathbf{x}$
2. periodische Randverschiebungen (Abb. 5.19(b))
 $\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (\mathbf{w}^+ = \mathbf{w}^- , \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n})$
3. homogene Randspannungen (keine fluktuierenden Randspannungen (Abb. 5.19(c)))
 $\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{mit } \langle \tilde{\mathbf{t}} \rangle = 0$

Abbildung 5.19: Mögliche Randbedingungen des Gebietes \mathcal{Y}

5.4.2 Abgeleitete Zellmethoden mit repräsentativen Volumenelementen und Materialregionen

Um den Skalenübergang von mikro- bzw. mesomechanischen Modellen auf makroskopische Materialmodelle zu realisieren, werden in der Literatur verschiedene Homogenisierungsmethoden vorgeschlagen [NEMAT-NASSER & HORI 1993, MURA 1993, BÖHM 1998, ZOHDI & WRIGGERS 2005]. Der Wahl einer Zelle der Mikro- bzw. Mesostruktur und der Randbedingungen zur Lösung des Zellproblems muss besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Ausgehend von der Mikrostruktur (Abb. 5.20(a)) haben sich verschiedene Zellmethoden bewährt.

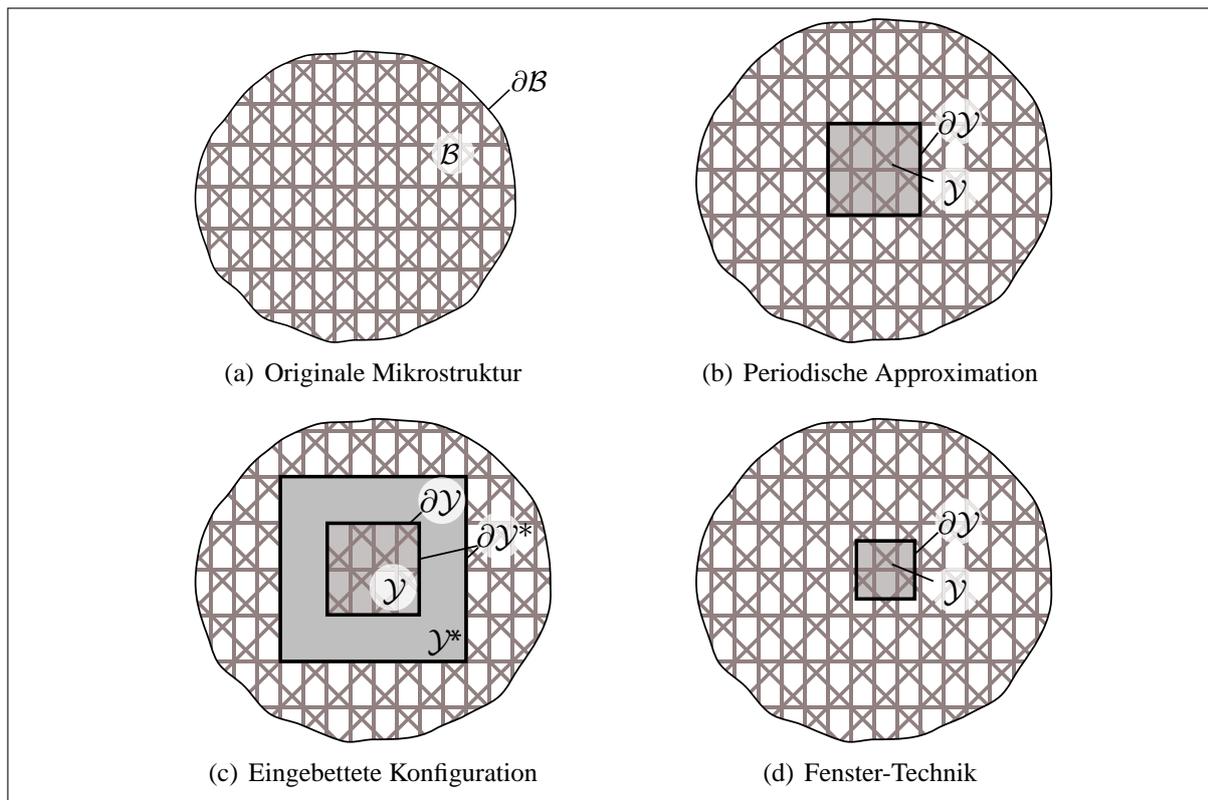


Abbildung 5.20: Schematische Darstellung zur Modellierung textilbewehrter Mikrostrukturen

Wenn möglich, ist ein periodisch wiederkehrender Ausschnitt der Mikrostruktur zu wählen (Abb. 5.20(b)). Die Randbedingungen einer solchen Zelle führen zu den periodischen Randbe-

dingungen (vgl. Abschnitt 6.3.3). Die Zelle kann auch eingebettet in einem Gebiet mit den effektiven Eigenschaften der Zelle betrachtet werden (Abb. 5.20(c)). In einem iterativen Prozess werden durch Vorgabe der Randbedingungen auf $\partial\mathcal{Y}^*$ die effektiven Eigenschaften \mathcal{C}^* in \mathcal{Y} bestimmt und dem Gebiet \mathcal{Y}^* zugewiesen, bis die effektiven Eigenschaften in \mathcal{Y}^* mit \mathcal{Y} übereinstimmen. Kann kein repräsentatives Volumenelement definiert werden, wird i. d. R. die Fenstertechnik angewendet, die einen Ausschnitt der Mikrostruktur untersucht (Abb. 5.20(d)).

Fazit

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Idealisierungen des Textilbetons auf drei Strukturebenen bilden die Grundlage für die hierarchische Materialbeschreibung des Verbundwerkstoffes. Homogenisierungsmethoden erlauben die Beschreibung der Skalenübergänge innerhalb des hierarchischen Materialmodells. Zur Abbildung der großen Anzahl an möglichen Rovingquerschnittsformen wurden entsprechende mikro- und mesomechanische Rovingmodelle entwickelt.

6 Bestimmung effektiver Materialeigenschaften von Textilbeton

6.1 Homogenisierung für den Meso-Makro-Skalenübergang

Im Folgenden sollen die elastischen Eigenschaften spezieller Bewehrungsstrukturen im Feinbeton auf der Mesoebene untersucht werden. Abhängig von der Orientierung und Art der Bewehrungselemente in der textilen Struktur verhält sich der Verbundwerkstoff richtungsabhängig, d. h. anisotrop, selbst wenn alle Einzelmaterialien ein richtungsunabhängiges (isotropes) Verhalten aufweisen. Für bestimmte Bewehrungsmuster sind Symmetrieebenen identifizierbar, welche den Typ der Anisotropie von Textilbeton bestimmen. Die Anzahl der unabhängigen Parameter zur Beschreibung des anisotropen, elastischen Materials reduziert sich abhängig vom Typ der vorhandenen Materialsymmetrie.

Die quantitative Bestimmung der Parameter erfolgt in Abschnitt 6.3.2, wobei ausgehend von allgemeiner Anisotropie sowohl die Art der Materialsymmetrie (vgl. Anhang A) als auch alle zugehörigen Parameter für beliebige Bewehrungsarten numerisch bzw. analytisch bestimmt werden.

Eine flächige multiaxiale Textilbewehrung in einer isotropen Feinbetonmatrix bewirkt im Allgemeinen ein monotropes Materialverhalten von Textilbeton. Orthogonale Bewehrungsmuster und doppelsymmetrische Bewehrungsmuster ($0/ \pm 45^\circ$) mit gleichen Bewehrungsgraden je Richtung bewirken ein orthotropes Materialverhalten bis zur Erstrissbildung.

6.2 Analytische Homogenisierung

Den einfachsten Zugang zur Homogenisierung stellen die Mischungsregeln dar. Diese können teilweise anhand von physikalischen Modellen analytisch hergeleitet werden. Es gibt zahlreiche in der Literatur vorgeschlagene Mischungsregeln [BENTUR & MINDESS 1990, BOGDANOVICH & PASTORE 1996, GEBBEKEN 1996, HASHIN & HERAKOVICH 1982, HASHIN & ROSEN 1964, PUCK 1996, TSAI 1988]. Meist sind die Mischungsregeln empirischer bzw. semi-empirischer Natur, da diese an Versuchen mit speziellen Materialpaarungen kalibriert wurden. Es ist demzufolge nicht jede Mischungsregel auf jedes Verbundmaterial anwendbar. Zudem sind bestimmte Mischungsformeln oft nur für einen typischen Fasergehalt gültig.

Für mehrlagige Bewehrungen mit jeweils unidirektionaler Orientierung sind Mischungsformeln weniger geeignet, da diese entweder vom idealisierten Aufbau des Komposites ausgehen bzw. statistische Verteilungen von Form und Größe der isotropen Komponenten annehmen (kurzfaserbewehrte Verbundwerkstoffe). In der Regel basieren diese Modelle auf einer Mittelwertbildung der Einzelmaterialkennwerte über das zu untersuchende Gebiet. Die meisten Mischungsregeln gehen von einem perfekten Verbund zwischen den Einzelkomponenten des Komposites aus (Kontinuität der Verschiebungen) bzw. treffen stark vereinfachende Annahmen im Interface. Es lassen sich häufig eine obere und untere Schranke für den effektiven Materialparameter bestimmen, welche das Abschätzen des realen Materialverhaltens erlauben. Die effektiven Materialkennwerte werden meistens in Abhängigkeit von dem Fasergehalt angegeben. Nichtlineare Effekte wie Rissbildung und Schädigung können i. d. R. nicht erfasst werden. Die Formen der zu homogenisierenden Strukturen sind vielfach sehr einfach und beschränken sich z. B. nur auf einzelne Faserschichten.

Die wohl verbreitetste Mischungsformel für unidirektionale Anordnungen ist die *Mischungsregel über reine Volumenanteile*. Hierbei werden die Einzelmaterialien in einer Reihen- und einer Parallelschaltung untersucht. Es wird von einer endlos langen Faser ausgegangen, die vollständig gestreckt angeordnet ist und einen perfekten Verbund mit der Matrix aufweist.

Der homogenisierte Elastizitätsmodul E_1 in Faserrichtung (x_1 -Richtung) und die Querdehnzahl ν_{12} ergeben sich zu

$$E_1 = E_m(1 - \nu_r) + E_r \nu_r \quad \text{und} \quad (6.1)$$

$$\nu_{12} = \nu_m(1 - \nu_r) + \nu_r \nu_r, \quad (6.2)$$

wobei ν_r der Flächenanteil der Faserbewehrung an der Gesamtquerschnittsfläche ist. E_m , E_r , ν_m und ν_r sind die Elastizitätsmoduli bzw. Querdehnzahlen der Matrix und der Faser, die als isotrop angenommen werden. Zu beachten ist bei diesem Homogenisierungsmodell, dass ein unterschiedliches Tragverhalten unter Druck bzw. Zug nicht berücksichtigt wird.

Die Herleitung des Elastizitätsmoduls E_2 senkrecht zur Faserrichtung (x_2 -Richtung) erfolgt gemeinhin durch eine Reihenschaltung von Faser und Matrix. Es gilt

$$E_2 = \frac{E_m E_r}{E_r(1 - \nu_r) + E_m \nu_r}. \quad (6.3)$$

Der Schubmodul G_{12} ergibt sich zu

$$G_{12} = \frac{G_m G_r}{G_r(1 - \nu_r) + G_m \nu_r}, \quad (6.4)$$

wobei G_m und G_r für den Schubmodul von Matrix und Faser stehen. Bei Orthotropie gilt weiterhin

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (6.5)$$

Allgemein läßt sich feststellen, dass alle Mischungsregeln nur ungenügend die gegenseitige Verformungsbehinderung der einzelnen Grundwerkstoffe berücksichtigen.

6.2.1 Homogenisierungsmethoden

Der folgende Abschnitt widmet sich den Homogenisierungsmethoden und den daraus abgeleiteten Schranken zur Charakterisierung effektiver Materialparameter bei kleinen Verzerrungen. Es werden verschiedene Modelle skizziert und ihre Anwendung auf textilbewehrte Strukturen dargestellt. Die Ermittlung der effektiven Materialkennwerte in der Mechanik besteht im Wesentlichen aus der Bestimmung des effektiven Elastizitätstensors \mathcal{C}^* .

Betrachtet wird eine Mikrostruktur \mathcal{Y} bzw. ein \mathcal{RVE} mit n homogenen Phasen α ($\alpha = 1, \dots, n$), wobei \mathcal{M} die Matrix und \mathcal{F} die Einschlüsse (hier Textilfasern) bezeichnet (Abb. 6.1).

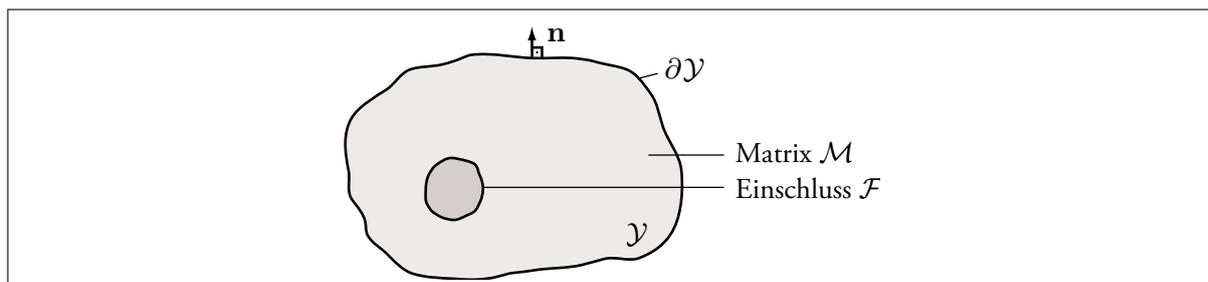


Abbildung 6.1: Heterogene Mikrostruktur mit Einschluss

Für jede Phase lässt sich der Volumenanteil ν^α mit

$$\nu^\alpha = \frac{V^\alpha}{V} \quad (6.6)$$

definieren. Die effektiven Spannungen und Verzerrungen können aus den Mittelwerten $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha$ und $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha$ der Phasen α ermittelt werden

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \nu^\alpha \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha = \langle \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \nu^\alpha \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha = \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha \rangle, \quad (6.7)$$

wobei bei der Mittelwertbildung $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha$ bzw. $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha$ nur jeweils die Feldvariablen der Phase α berücksichtigt werden. Die sogenannten Phasenkonzentrationstensoren \mathcal{A} und \mathcal{B} , auch Lokalisierungstensoren oder WU-Tensoren genannt, vermitteln zwischen der effektiven Feldvariablen $\langle \square \rangle$ des \mathcal{RVE} und den Phasenmittelwerten $\langle \square \rangle^\alpha$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha = \mathcal{A}^\alpha : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad (6.8)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha = \mathcal{B}^\alpha : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (6.9)$$

Außerdem ist der Mittelwert über die Phasenkonzentrationstensoren der einzelnen Phasen gleich dem Einheitstensor \mathcal{I} :

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \mathcal{I}, \quad (6.10a)$$

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{I}. \quad (6.10b)$$

Auf der Mikroskala lautet das Elastizitätsgesetz:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathcal{C}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}). \quad (6.11)$$

Die effektiven Spannungen aus Gl. (6.11) ergeben sich demnach zu

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathcal{C}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle. \quad (6.12a)$$

Mit den Phasenmittelwerten folgt

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \langle \mathcal{C}(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle^\alpha \rangle. \quad (6.12b)$$

Da von homogenen Phasen ausgegangen wird, folgt

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathcal{C} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha \rangle. \quad (6.12c)$$

Unter Benutzung des Phasenkonzentrationstensors \mathcal{A}^α lässt sich $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha$ mittels $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ ausdrücken

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathcal{C}^\alpha : \mathcal{A}^\alpha : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle \rangle, \quad (6.12d)$$

wobei $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ unabhängig vom Ort \mathbf{y} ist und nicht gemittelt werden muss:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathcal{C}^\alpha : \mathcal{A}^\alpha : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \rangle \rangle. \quad (6.12e)$$

Hieraus wird der effektive Elastizitätstensor \mathcal{C}^* abgelesen:

$$\mathcal{C}^* = \langle \mathcal{C}^\alpha : \mathcal{A}^\alpha \rangle. \quad (6.13)$$

Der effektive Nachgiebigkeitstensor \mathcal{C}^{*-1} ergibt sich analog zu

$$\mathcal{C}^{*-1} = \langle \mathcal{C}^{\alpha^{-1}} : \mathcal{B}^\alpha \rangle. \quad (6.14)$$

Häufig wird auf Grund der Sonderstellung der einbettenden Matrix \mathcal{M} Gl. (6.13) mit

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^M + \langle (\mathcal{C}^\alpha - \mathcal{C}^M) : \mathcal{A}^\alpha \rangle \quad (6.15)$$

angegeben. Um effektive Steifigkeiten des Verbundwerkstoffes angeben zu können, sind die Phasenkonzentrationstensoren \mathcal{A}^α zu bestimmen.

6.2.2 ESHELBYs Einbettungsverfahren

Das Einbettungsverfahren nach [ESHELBY 1957] ist ein weit verbreitetes Homogenisierungsverfahren und stellt mit der Mean-Field-Theorie [MURA 1993] ein wichtiges Grundprinzip im Kontext der Homogenisierung dar, um die gesuchten Phasenkonzentrationstensoren \mathcal{A}^α zu bestimmen. Es basiert auf der Beschreibung von Spannungs- und Verzerrungsfeldern infolge spontaner Gestaltsänderungen von Teilgebieten \mathcal{F} in einer Matrix \mathcal{M} . Bemerkenswert ist das Vorhandensein einer analytischen Lösung für ellipsoidförmige Einschlüsse. Allgemeine Formen von Einschlüssen sind jedoch nur mittels numerischer Methoden berechenbar. Unendlich lange Textilbewehrungen mit einem idealisierten elliptischen Rovingquerschnitt können als Spezialfall der existierenden analytischen Lösung betrachtet werden. Dies macht die Anwendung dieses Verfahrens zur Untersuchung effektiver Eigenschaften von Textilbeton interessant, wie [RICHTER 2005] zeigt.

Ausgangspunkt beim Einbettungsverfahren ist das Konzept eines äquivalenten homogenen Körpers. Bei einer verzerrungsgesteuerten Homogenisierung wird die heterogene Mikrostruktur der Zelle \mathcal{Y} durch ein homogenes Kontinuum mit den Moduli $\mathcal{C}^\mathcal{Y} = \mathcal{C}^\mathcal{M}$ oder $\mathcal{C}^\mathcal{Y} = \mathcal{C}^*$ ersetzt, wobei $\mathcal{C}^\mathcal{M}$ und \mathcal{C}^* die Moduli des Matrixmaterials bzw. des noch zu bestimmenden effektiven Mediums sind. Für eine spannungsgesteuerte Homogenisierung sind entsprechende Nachgiebigkeiten $\mathcal{D}^\mathcal{Y}$ anzugeben.

Um identische Spannungen bzw. Verzerrungen wie in der heterogenen Struktur zu erzeugen, werden sogenannte spannungsfreie Transformationsverzerrungen bzw. verzerrungsfreie Transformationsspannungen eingeführt. Diese Felder haben die Aufgabe, einen inneren Verzerrungs- bzw. Spannungszustand zu erzeugen, welcher in Überlagerung mit einem homogenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustand einen zur heterogenen Struktur äquivalenten Zustand abbildet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \quad (6.16a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}. \quad (6.16b)$$

Auch hier verschwinden die Mittelwerte der Fluktuationen (Störfelder) auf Grund ihres Eigenspannungs- bzw. Eigenverzerrungscharakters:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad (6.17)$$

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) \rangle = 0. \quad (6.18)$$

Wie in Abb. 6.2 illustriert, wird beim Einbettungsverfahren der Einschluss \mathcal{F} mit den homogenen, elastischen Eigenschaften $\mathcal{C}^\mathcal{Y}$ aus dem äquivalenten Gebiet \mathcal{Y} herausgeschnitten und im Falle einer verzerrungsgesteuerten Homogenisierung einer spontanen Transformationsverzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ ausgesetzt

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathcal{M} = \mathcal{Y} - \mathcal{F} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y}) & \text{in } \mathcal{F} \end{cases}, \quad (6.19)$$

welche man sich z. B. als Temperaturdehnung vorstellen kann. Zum Wiedereinsetzen des Einschlusses in \mathcal{Y} wird die erzeugte Fehlpassung des Einschlusses infolge $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ wieder rückgängig gemacht, was zu einer Spannung

$$\boldsymbol{\sigma}^* = -\mathcal{C}^\mathcal{Y} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (6.20)$$

im Einschluss führt. Aus der Vorgehensweise der Heraustrennung und Einbettung des Einschlusses leitet sich der Name von ESHELBYs Einbettungsverfahren ab.

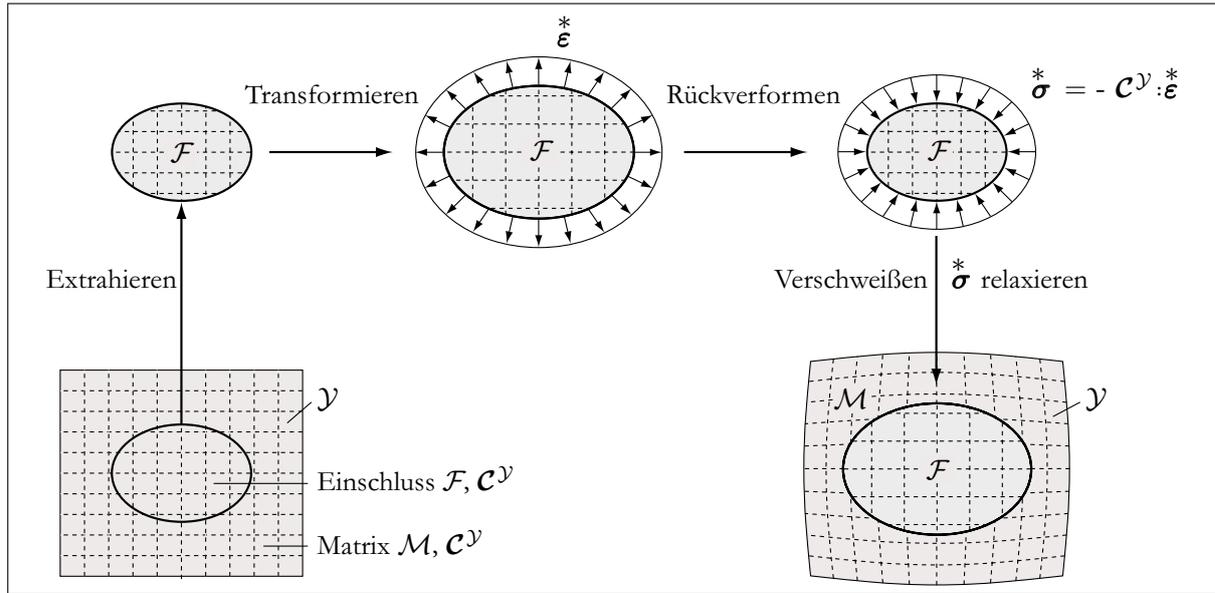


Abbildung 6.2: ESHELBYs Einbettungsverfahren nach [BAYREUTHER 2005]

Durch Entfernen der Randspannungen, welche den in Gl. (6.20) beschriebenen Spannungszustand im Einschluss \mathcal{F} erzeugen, stellt sich auf Grund der Dehnungsbehinderung durch die Matrix \mathcal{M} ein äquivalenter Spannungs- und Verzerrungszustand

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathcal{C}^{\mathcal{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) & \text{in } \mathcal{M} = \mathcal{Y} - \mathcal{F} \\ \mathcal{C}^{\mathcal{Y}} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) - ^*\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})) & \text{in } \mathcal{F} \end{cases}, \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathcal{D}^{\mathcal{Y}} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) & \text{in } \mathcal{M} = \mathcal{Y} - \mathcal{F} \\ \mathcal{D}^{\mathcal{Y}} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) + ^*\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) & \text{in } \mathcal{F} \end{cases} \quad (6.22)$$

in \mathcal{Y} ein.

Zwischen den Fluktuationsverzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und den spontanen Transformationsverzerrungen $^*\boldsymbol{\varepsilon}$ gibt ESHELBY folgenden linearen Zusammenhang an:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{S}} : ^*\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.23)$$

Der vermittelnde Tensor 4. Stufe $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ heißt ESHELBY-Tensor. Im Falle einer spannungsgetriebenen Homogenisierung gilt:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{T}} : ^*\boldsymbol{\sigma}, \quad (6.24)$$

wobei $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ der konjugierte ESHELBY-Tensor ist.

Wird nun in einer verzerrungsgesteuerten Homogenisierung eine makroskopische Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ vorgegeben, ergeben sich die Fluktuationsspannungen zu

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}^{\mathcal{Y}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (6.25)$$

Im Falle einer spannungsgesteuerten Homogenisierung ($\boldsymbol{\sigma}^0 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$) gilt:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}^{\mathcal{Y}^{-1}} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad (6.26)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mathcal{T}} : ^*\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}). \quad (6.27)$$

Im Allgemeinen sind die Variablen $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ ortsabhängig:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) , \quad (6.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) . \quad (6.29)$$

Unter der Annahme einer homogenen, linear elastischen Matrix \mathcal{M} mit einem ellipsoidförmigen Einschluss \mathcal{F} sind $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ homogen im Einschluss \mathcal{F} .

Durch die Forderung identischer Spannungs- und Verzerrungszustände im heterogenen Ausgangsmaterial und im homogenen Ersatzmaterial lassen sich folgende Kompatibilitätsbedingungen formulieren:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{C}^{\mathcal{F}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{C}^{\mathcal{Y}} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y})) \quad \text{in } \mathcal{F} , \quad (6.30a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{D}^{\mathcal{F}} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{D}^{\mathcal{Y}} : (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{y})) \quad \text{in } \mathcal{F} . \quad (6.30b)$$

Aus den Gln. (6.30) folgt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = (\boldsymbol{C}^{\mathcal{Y}} - \boldsymbol{C}^{\mathcal{F}})^{-1} : \boldsymbol{C}^{\mathcal{Y}} : \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y}) \quad \text{in } \mathcal{F} , \quad (6.31a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = (\boldsymbol{D}^{\mathcal{Y}} - \boldsymbol{D}^{\mathcal{F}})^{-1} : \boldsymbol{D}^{\mathcal{Y}} : \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{y}) \quad \text{in } \mathcal{F} . \quad (6.31b)$$

Mit den Abkürzungen \boldsymbol{U} und \boldsymbol{V} :

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{C}^{\mathcal{Y}} - \boldsymbol{C}^{\mathcal{F}})^{-1} : \boldsymbol{C}^{\mathcal{Y}} , \quad (6.32a)$$

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{D}^{\mathcal{Y}} - \boldsymbol{D}^{\mathcal{F}})^{-1} : \boldsymbol{D}^{\mathcal{Y}} \quad (6.32b)$$

und der Aufspaltung der Spannungs- und Verzerrungsfelder in homogene und fluktuierende Anteile werden die Gln. (6.31) zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{U} : \boldsymbol{\varepsilon}^* , \quad (6.33a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{V} : \boldsymbol{\sigma}^* . \quad (6.33b)$$

Durch Einsetzen der ESHELBY-Lösung (Gl. (6.23)) in Gleichung (6.33a) lässt sich die effektive Verzerrung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ in \mathcal{Y} durch die Transformationsverzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ ausdrücken, und umgekehrt:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{S}) : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{S})^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle . \quad (6.34)$$

Für die effektiven Spannungen $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ gilt analog:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{T}) : \boldsymbol{\sigma}^* \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma}^* = (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{T})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle . \quad (6.35)$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Gln. (6.33): ein, erhält man:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{U} : (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{S})^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle , \quad (6.36a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{V} : (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{T})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle , \quad (6.36b)$$

und damit eine Darstellung, in der sich die Spannungs- und Verzerrungszustände durch die effektiven Feldgrößen ausdrücken lassen.

Durch die Mittelung über die jeweilige Phase des Verbundwerkstoffes lassen sich die Phasenkonzentrationstensoren \boldsymbol{A}^α bestimmen, und nach Gl. (6.13) auch der effektive Elastizitätsmodul \boldsymbol{C}^* .

Bei der Wahl von $\mathcal{C}^{\mathcal{Y}}$ gibt es, wie bereits beschrieben, die Möglichkeit, $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ oder \mathcal{C}^* anzusetzen. Für wechselwirkungsfreie Einschlüsse und die effektive Feld-Theorie (EFA) wird $\mathcal{C}^{\mathcal{Y}} = \mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ vorausgesetzt. Ist $\mathcal{C}^{\mathcal{Y}} = \mathcal{C}^*$, spricht man von der Analyse des effektiven Mediums (EMA), bei der die Einschlüsse in ein effektives Medium \mathcal{C}^* eingebunden werden. Damit sind indirekte Interaktionen zwischen den Einschlüssen berücksichtigt. Diese sogenannte *selbstkonsistente Methode* hat aber den Nachteil, dass der ESHELBY-Tensor nur für ellipsoidförmige Einschlüsse in einer homogenen und isotropen Matrix analytisch bestimmbar ist. Das effektive Medium \mathcal{C}^* ist jedoch im Allgemeinen anisotrop.

6.2.3 Wechselwirkungsfreie Einschlüsse

Grundlage der analytischen Homogenisierung (z. B. in [MURA 1993, NEMAT-NASSER & HORI 1993, BAYREUTHER 2005, RICHTER 2005]) ist die mikromechanische Grundlösung von [ESHELBY 1957], welche Spannungs- und Verzerrungsfelder innerhalb von Festkörpern infolge von spontanen Gestaltsänderungen in Teilgebieten (z. B. eines Einschlusses) beschreibt, vgl. Gl. 6.23.

Im Gebiet \mathcal{Y} mit $\mathcal{C}^{\mathcal{Y}} = \mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ wird ein homogener Spannungszustand

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathcal{C}^{\mathcal{M}} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (6.37)$$

durch die Vorgabe einer makroskopischen Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ erzeugt. Basierend auf den im vorangegangenen Abschnitt getroffenen Annahmen können für die einzelnen Phasen \mathcal{F}^α näherungsweise konstante Felder angegeben werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha(\mathbf{y}) \stackrel{!}{=} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^\alpha = \mathbf{U}^\alpha : (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha)^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad (6.38a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{y}) \stackrel{!}{=} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^\alpha = \mathbf{V}^\alpha : (\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{T}^\alpha)^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad (6.38b)$$

$$= \mathbf{V}^\alpha : (\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{T}^\alpha)^{-1} : \mathcal{C}^{\mathcal{M}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (6.38c)$$

Die Phasenkonzentrationstensoren \mathcal{A}^α können mit

$$\mathcal{A}^\alpha = \mathbf{U}^\alpha : (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha)^{-1} \quad (6.39)$$

und Gl.(6.8) identifiziert werden. Mit der Kenntnis, dass die Verzerrungen in einem elliptischen Einschluss in einer elastischen Matrix konstant sind, kann der effektive Elastizitätstensor \mathcal{C}^* mit Hilfe des ESHELBY-Tensors \mathbf{S}^α ausgedrückt werden. Für eine spannungsgesteuerte Homogenisierung gilt:

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{\mathcal{M}} : (\mathbf{I} - \langle (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha)^{-1} \rangle), \quad (6.40)$$

$$= (\mathbf{I} + \langle (\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{T}^\alpha)^{-1} \rangle) : \mathcal{C}^{\mathcal{M}}, \quad (6.41)$$

$$\mathcal{B}^\alpha = \mathbf{V}^\alpha : (\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha)^{-1}, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{D}^* = (\mathbf{I} + \langle (\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{S}^\alpha)^{-1} \rangle) : \mathcal{D}^{\mathcal{M}}, \quad (6.43)$$

$$= \mathcal{D}^{\mathcal{M}} : (\mathbf{I} - \langle (\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{T}^\alpha)^{-1} \rangle). \quad (6.44)$$

Nach [RICHTER 2005] kann der effektive Elastizitätstensor \mathcal{C}^* alternativ mit

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C} + \sum_{\alpha=1}^n \nu^\alpha ((\mathcal{C}^\alpha - \mathcal{C})^{-1} + \mathbf{S}^\alpha : \mathcal{C}^{-1})^{-1} \quad (6.45)$$

ausgedrückt werden. Hier bezeichnen \mathcal{C} und \mathcal{C}^α die Elastizitätstensoren der Matrix und der Einschlüsse α mit den Volumenanteilen ν^α .

Für den Grenzfall eines starren Einschlusses \mathcal{F}^α mit $\mathcal{C}_{ijkl}^\alpha \rightarrow \infty$ sind $\mathbf{U}^\alpha = \mathbf{0}$ und $\mathbf{V}^\alpha = \mathbf{I}$, wobei $\mathbf{0}$ der vierstufige Nulltensor ist. Zur Berücksichtigung von Hohlräumen \mathcal{F}^α ($\mathcal{C}_{ijkl}^\alpha \rightarrow 0$) sind $\mathbf{U}^\alpha = \mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{V}^\alpha = \mathbf{0}$.

6.2.4 Effektive-Feld-Theorie

Die Effektive-Feld-Theorie (EFA) kann als Erweiterung der wechselwirkungsfreien Homogenisierung verstanden werden [MORI & TANAKA 1973]. Diese Herangehensweise berücksichtigt eine Interaktion von Einschlüssen (z. B. unterschiedlich ausgerichtete Rovings) im gemittelten Sinne. Hierbei werden die unterschiedlich orientierten Rovings in einer Matrix, mit noch unbekannter mittlerer Verzerrung $\langle \varepsilon^m \rangle$, betrachtet. Das Problem kann analytisch gelöst werden. In [RICHTER 2005] wird

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + \sum_{\alpha=1}^n \nu^\alpha (\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}) : \left\{ \mathbf{K}^\alpha + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^n \nu^\beta (\mathbf{K}^\beta - \nu^\beta \mathbf{1})^{-1} : (\mathbf{K}^\alpha - \nu^\alpha \mathbf{1}) \right\}^{-1} \quad (6.46)$$

mit

$$\mathbf{K}^\alpha = (\nu^m + \nu^\alpha) \mathbf{1} - \nu^m \mathbf{S}^\alpha : (\mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C}^\alpha) \quad (6.47)$$

zur Berechnung der effektiven Elastizitätskonstanten für beliebig orientierte Rovings in einer elastischen Matrix angegeben.

Fazit

Zur Bestimmung der effektiven, anisotrop elastischen Eigenschaften \mathbf{C}^* ist eine Vielzahl von analytischen Homogenisierungsmethoden entwickelt worden. Speziell für ellipsoidförmige Einschlüsse wurde in [RICHTER 2005] eine für Textilbeton anwendbare Methode publiziert, welche auf der Grundlösung von ESHELBY beruht. Eine Erweiterung auf Rovings mit superelliptischen Querschnittsapproximationen ist möglich, wenn die entsprechenden ESHELBY-Tensoren \mathbf{S} bestimmt werden.

6.3 Numerische Homogenisierung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Finite-Elemente-Programmsystem PYFEM neu entwickelt (**Me-FEM-Modelle**), um den Anforderungen im Rahmen einer Multiskalenanalyse gerecht werden zu können. Für ausgewählte Anwendungen wurde auf die kommerziellen Programmsysteme ABAQUS [ABAQUS 2002] und I-DEAS [I-DEAS 2006] zurückgegriffen. Speziell ABAQUS verfügt über Schnittstellen, um eigene Materialformulierungen implementieren zu können, jedoch sind die zur Verfügung stehenden Möglichkeiten auf Subprogrammebene relativ begrenzt. Nichtlokale Materialformulierungen sind auf Grund der unflexiblen, begrenzten Übergabeparameter des Programminterfaces nur schwer implementierbar. Genutzt wurden die Programmsysteme ABAQUS und I-DEAS deshalb für vergleichende Simulationen des Verbundverhaltens mittels Kontaktformulierungen bzw. mittels Interface-Elementen sowie für Vergleichsrechnungen makroskopischer Strukturen.

Für die Simulation von Textilbeton stellt das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Finite-Elemente-System PYFEM ein flexibles Werkzeug zur Analyse verschiedenster Problemstellungen dar. Auf der Mikroebene wurde das Verbundverhalten der Filamente zur Matrix und untereinander modelliert, um daraus vereinfachte Modelle, wie das Pfropfenmodell (Abschnitt 8.4.1) abzuleiten. Für die mikromechanischen Modelle wurden vorwiegend eindimensionale Stabelemente verwendet. Zur Verbundbeschreibung wurde ein 1d-Interface-Element implementiert, das Schädigungs- bzw. plastisches Verbundverhalten abbilden kann. Die Anwendbarkeit von Interface-Elementen bei Simulationen von Auszugsversuchen ist jedoch nur für kleine Relativverschiebungen möglich. Ein Komplettauszug einer langen Faser aus der Matrix ist nicht abbildbar, da die relative Lageveränderung zwischen Faserelement und Matrixelement ein mehrfaches der Elementlänge ausmacht und dadurch das Verbundverhalten falsch abgebildet wird.

6.3.1 Grundlastfälle

Den Ausgangspunkt für die Ermittlung der effektiven Eigenschaften einer textilbewehrten Betonmatrix stellt das HOOKESche Materialgesetz dar. Dieses beschreibt linear-elastisches Materialverhalten auf der Makroebene:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (6.48)$$

Wandelt man die tensorielle Schreibweise in eine Vektor-Matrix-Form um, so ergibt sich unter Ausnutzung der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \\ \langle \sigma_{13} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^* & C_{1122}^* & C_{1133}^* & C_{1112}^* & C_{1113}^* & C_{1123}^* \\ C_{2211}^* & C_{2222}^* & C_{2233}^* & C_{2212}^* & C_{2213}^* & C_{2223}^* \\ C_{3311}^* & C_{3322}^* & C_{3333}^* & C_{3312}^* & C_{3313}^* & C_{3323}^* \\ C_{1211}^* & C_{1222}^* & C_{1233}^* & C_{1212}^* & C_{1213}^* & C_{1223}^* \\ C_{1311}^* & C_{1322}^* & C_{1333}^* & C_{1312}^* & C_{1313}^* & C_{1323}^* \\ C_{2311}^* & C_{2322}^* & C_{2333}^* & C_{2312}^* & C_{2313}^* & C_{2323}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ \langle 2 \varepsilon_{12} \rangle \\ \langle 2 \varepsilon_{13} \rangle \\ \langle 2 \varepsilon_{23} \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Wählt man bei der FE-Analyse eines Systems die Randbedingungen derart, dass jeweils nur eine Komponente des ε -Tensors belegt ist, so lassen sich immer sechs Komponenten des Elastizitätstensors direkt berechnen. Dieser Gedanke führt auf die sechs unabhängigen, elementaren Zustände der makroskopischen Verzerrung ε , welche als äußere Belastung auf das repräsentative Volumenelement angesetzt werden:

- Grundlastfall I: Dehnung in x -Richtung:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\varepsilon_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T . \quad (6.50)$$

- Grundlastfall II: Dehnung in y -Richtung:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [0 \ \varepsilon_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T . \quad (6.51)$$

- Grundlastfall III: Dehnung in z -Richtung:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [0 \ 0 \ \varepsilon_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T . \quad (6.52)$$

- Grundlastfall IV: Gleitung in x - y -Ebene:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [0 \ 0 \ 0 \ \varepsilon_0 \ 0 \ 0]^T . \quad (6.53)$$

- Grundlastfall V: Gleitung in x - z -Ebene:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varepsilon_0 \ 0]^T . \quad (6.54)$$

- Grundlastfall VI: Gleitung in y - z -Ebene:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varepsilon_0]^T . \quad (6.55)$$

6.3.2 Bestimmung der effektiven Parameter des Elastizitätstensors

Prinzipiell müssen keine Grundlastfälle verwendet werden, vielmehr sind nur 6 linear unabhängige Lastfälle zu untersuchen:

$$\langle \sigma_{ij}^n \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl}^n \rangle \quad (6.56)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{11}^n \rangle \\ \langle \sigma_{22}^n \rangle \\ \langle \sigma_{23}^n \rangle \\ \langle \sigma_{12}^n \rangle \\ \langle \sigma_{13}^n \rangle \\ \langle \sigma_{23}^n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^* & C_{1122}^* & C_{1133}^* & C_{1112}^* & C_{1113}^* & C_{1123}^* \\ C_{2211}^* & C_{2222}^* & C_{2233}^* & C_{2212}^* & C_{2213}^* & C_{2223}^* \\ C_{3311}^* & C_{3322}^* & C_{3333}^* & C_{3312}^* & C_{3313}^* & C_{3323}^* \\ C_{1211}^* & C_{1222}^* & C_{1233}^* & C_{1212}^* & C_{1213}^* & C_{1223}^* \\ C_{1311}^* & C_{1322}^* & C_{1333}^* & C_{1312}^* & C_{1313}^* & C_{1323}^* \\ C_{2311}^* & C_{2322}^* & C_{2333}^* & C_{2312}^* & C_{2313}^* & C_{2323}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11}^n \rangle \\ \langle \varepsilon_{22}^n \rangle \\ \langle \varepsilon_{33}^n \rangle \\ \langle 2\varepsilon_{12}^n \rangle \\ \langle 2\varepsilon_{13}^n \rangle \\ \langle 2\varepsilon_{23}^n \rangle \end{bmatrix} . \quad (6.57)$$

Nach dem Lösen des Randwertproblems sind für alle $n = 6$ Lastfälle die mittleren Spannungen $\langle \sigma_{ij}^n \rangle$ und Verzerrungen $\langle \varepsilon_{kl}^n \rangle$ bekannt. In Gl. (6.58) sind die zu lösenden Gleichungssysteme angegeben, um zeilenweise die effektiven Komponenten des Elastizitätstensors C_{ijkl}^* bestimmen zu können:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{ij}^1 \rangle \\ \langle \sigma_{ij}^2 \rangle \\ \langle \sigma_{ij}^3 \rangle \\ \langle \sigma_{ij}^4 \rangle \\ \langle \sigma_{ij}^5 \rangle \\ \langle \sigma_{ij}^6 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11}^1 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^1 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^1 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^1 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^1 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^1 \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^2 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^2 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^2 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^2 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^2 \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^3 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^3 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^3 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^3 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^3 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^3 \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^4 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^4 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^4 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^4 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^4 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^4 \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^5 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^5 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^5 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^5 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^5 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^5 \rangle \\ \langle \varepsilon_{11}^6 \rangle & \langle \varepsilon_{22}^6 \rangle & \langle \varepsilon_{33}^6 \rangle & \langle 2\varepsilon_{12}^6 \rangle & \langle 2\varepsilon_{13}^6 \rangle & \langle 2\varepsilon_{23}^6 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ij11}^* \\ C_{ij22}^* \\ C_{ij33}^* \\ C_{ij12}^* \\ C_{ij13}^* \\ C_{ij23}^* \end{bmatrix} . \quad (6.58)$$

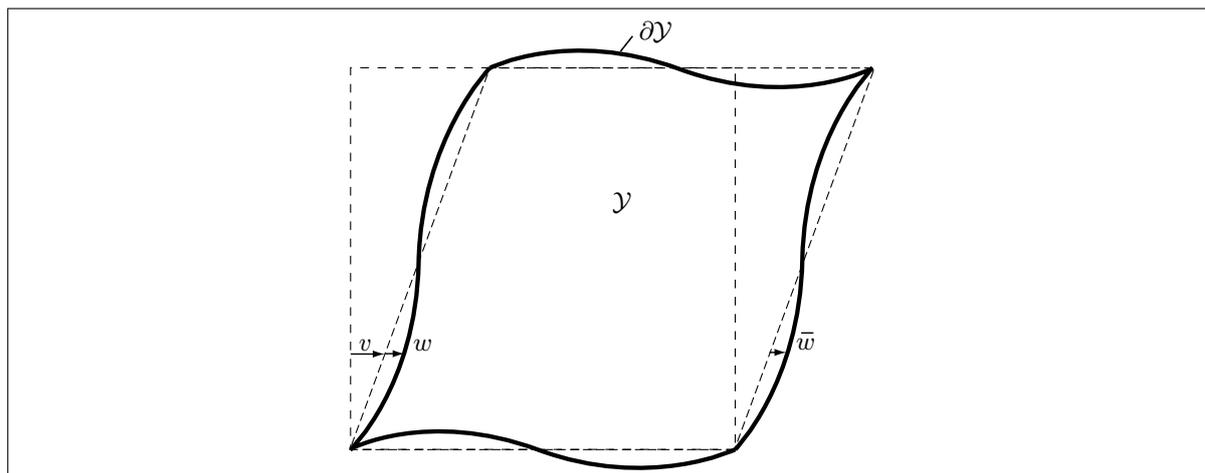


Abbildung 6.3: Zelle mit periodischen Randbedingungen

6.3.3 Randbedingungen

Für die Identifikation der effektiven Materialparameter des Verbundwerkstoffes Textilbeton wurden für typische Bewehrungsstrukturen repräsentative Volumenelemente modelliert. Mittels geeigneter Verzerrungszustände des \mathcal{RVE} erfolgte eine numerische Homogenisierung 1. Ordnung, bei der periodische Randbedingungen (Abb. 6.3) zur Anwendung kamen. Dazu wurde das Verschiebungsfeld \mathbf{u} in einen homogenen Anteil \mathbf{v} und einen fluktuierenden (periodischen) Anteil \mathbf{w} aufgespalten (6.59),

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{w}(\mathbf{y}), \quad (6.59)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})\mathbf{y} + \mathbf{w}(\mathbf{y}), \quad (6.60)$$

wobei $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$ die vorgegebene makroskopische Verzerrung darstellt. Für gewählte repräsentative Volumenelemente wurden die effektiven Parameter des Elastizitätstensors für den allgemeinen anisotropen Fall anhand der gemittelten Verzerrungs- bzw. Spannungsfelder bestimmt (initiale Anisotropie).

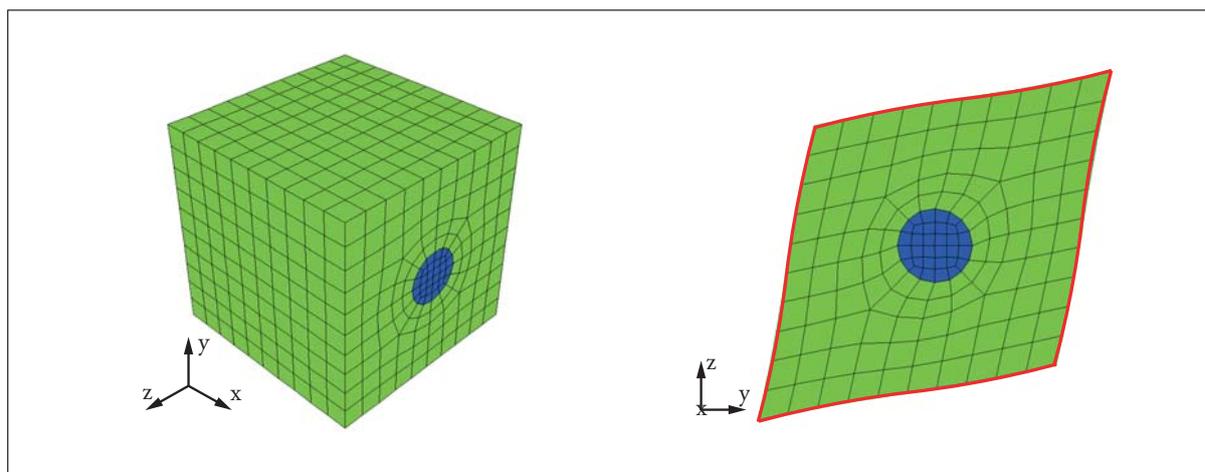


Abbildung 6.4: Einheitszelle mit periodischen Randbedingungen

Beispielhaft seien hier die Komponenten des Elastizitätstensors nach Gl. (6.49) für die Einheits-

zelle in Abb. 6.4 angegeben:

$$[\mathcal{C}_{ijkl}^*] = \begin{bmatrix} 36\,038 & 8\,850 & 8\,850 & 0 & 0 & 0 \\ 8\,850 & 34\,754 & 8\,798 & 0 & 0 & 0 \\ 8\,850 & 8\,798 & 34\,754 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13\,046 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13\,046 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\,963 \end{bmatrix} \frac{N}{mm^2}. \quad (6.61)$$

Als Materialparameter für die Feinbetonmatrix wurden $\mathcal{C}_{1111}^{\text{Matrix}} = 33\,333\,N/mm^2$, $\mathcal{C}_{1122}^{\text{Matrix}} = 8\,333\,N/mm^2$ und $\mathcal{C}_{1212}^{\text{Matrix}} = 12\,500\,N/mm^2$ angenommen. Der Fasergehalt betrug 5% ($E = 75\,000\,N/mm^2$). Ausgehend von allgemeiner Anisotropie (Gl. (6.49)) wird die transversal-isotrope Materialsymmetrie inklusive der zugehörigen Parameter des elastischen Materialgesetzes identifiziert (Gl. (6.61)).

Diese Vorgehensweise funktioniert für beliebige elastische Strukturen in dem $\mathcal{RV}\mathcal{E}$, d. h. das effektive elastische Materialverhalten für Textilbeton, unter Berücksichtigung einer beliebigen multi-axialen Bewehrungsstruktur, kann mit dieser Methode bestimmt werden.

Fazit

Mit der entwickelten numerischen Homogenisierungsmethode können sowohl der Typ der Anisotropie als auch die effektiven Elastizitätskonstanten einer Mesostruktur qualitativ und quantitativ bestimmt werden. Für beliebig multi-axial bewehrte Textilbetonbauteile ist somit das effektive, anisotrop elastische Materialverhalten numerisch bestimmbar.

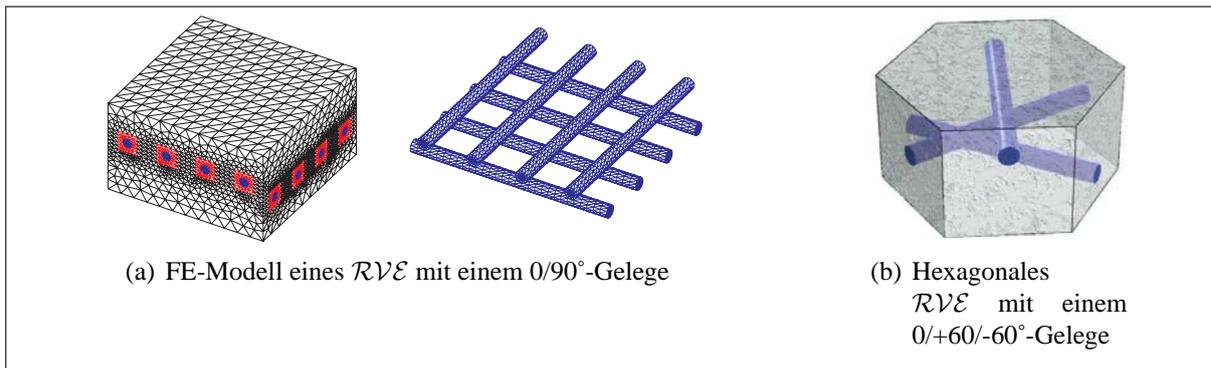
6.3.4 Diskretisierung der repräsentativen Volumenelemente

Die räumliche Diskretisierung der Mikrostruktur mittels finiter Elemente kann auf zweierlei Weise realisiert werden. Zum Einen können die Elementgrenzen mit den Grenzflächen der Einzelmaterialien zusammenfallen, zum Anderen können die Materialdiskontinuitäten im Element abgebildet werden. Beide Methoden haben Vor- und Nachteile. Hauptvorteil der Zuordnung eines Materials zu einem Element ist die geringere benötigte Anzahl der Elemente (Abb. 6.4), da bei der Vernetzung nur die Regionen in der Umgebung der Diskontinuität feiner vernetzt werden müssen (h-Adaptivität). Der Nachteil dieser angepassten Vernetzung liegt im höheren Aufwand beim Vernetzen und der Gefahr, dass die generierten Elemente zu stark verzerrt (z. B. tordiert) sind (Abb. 6.5(a)), d. h. die Berechnung der Strukturantwort in ihrer Genauigkeit beeinträchtigt wird.

Der Vorteil einer Beschreibung der Materialgrenzen im Element liegt in der Vernetzung der Mikrostruktur mit Elementen gleicher Geometrie. Die Materialgrenzen im Element können durch Erweiterungen im Elementansatz erfasst werden, z. B. durch eine Mehrschichtenkinematik [MATHEAS 2005] oder durch eine abschnittsweise Integration des Elementes. In [HAASEMANN et al. 2006] wird dieses Verfahren unter Benutzung der Erweiterten-Finite-Elemente-Methode (X-FEM) beschrieben.

6.3.5 Materialabhängige Vernetzung der repräsentativen Volumenelemente

Bei Laminaten aus dem Bereich faserverstärkter Kunststoffe pflegt man häufig schichtweise zu homogenisieren und anschließend bei unterschiedlichen Orientierungen der Schichten die Materialgesetze nach Richtungs-Transformation zu superponieren. Wegen des bei Textilbeton geringen

Abbildung 6.5: Formen von \mathcal{RVE} mit unterschiedlichen Gelegearten

Bewehrungsgehaltes und wegen der zuvor angesprochenen Ungenauigkeiten der Mischungsregeln, wurde a-priori eine dreidimensionale Diskretisierung mehrlagig verstärkter Einheitszellen durchgeführt.

Im Sinne der oben getroffenen Voraussetzungen wurde ein perfekter Verbund zwischen der Bewehrung und der Matrix vorausgesetzt. Das \mathcal{RVE} wurde, beginnend mit einer unidirektionalen Schicht, auch als zwei- bzw. dreilagiges Gelege modelliert, wobei verschiedene Bewehrungsorientierungen untersucht wurden (Abb. 6.5). Festzustellen war eine nur geringe Spannungsüberhöhung (ca. 20 %) an Rovingkreuzungspunkten. Man kann hier ein Beginnen des Versagens im Faser-Matrix-Interface annehmen. Im linear elastischen Modell ist dies jedoch ohne quantitativ feststellbaren Einfluss auf das homogenisierte Materialverhalten. Überhaupt führt der geringe Bewehrungsgehalt ($< 10\%$) im ungerissenen Zustand nicht zu einer nennenswerten Erhöhung der Steifigkeit. Vielmehr wirken die Rovings in Querrichtung wie Hohlräume, vgl. [RICHTER 2005].

6.3.6 Materialunabhängige Vernetzung der repräsentativen Volumenelemente

Alternativ wird im Rahmen dieser Arbeit die Beschreibung der Materialdiskontinuität im Elementinneren durch unterschiedliche Materialeigenschaften in den Integrationspunkten des Elementes verwendet, d. h. eine abschnittsweise Integration findet Anwendung. Bei dieser vereinfachten Herangehensweise können herkömmliche finite Elemente benutzt werden. Um die Güte der Approximation zu erhöhen, muss die Anzahl der Integrationspunkte für Elemente, die eine Materialgrenze beinhalten, erhöht werden (Abb. 6.6(a)).

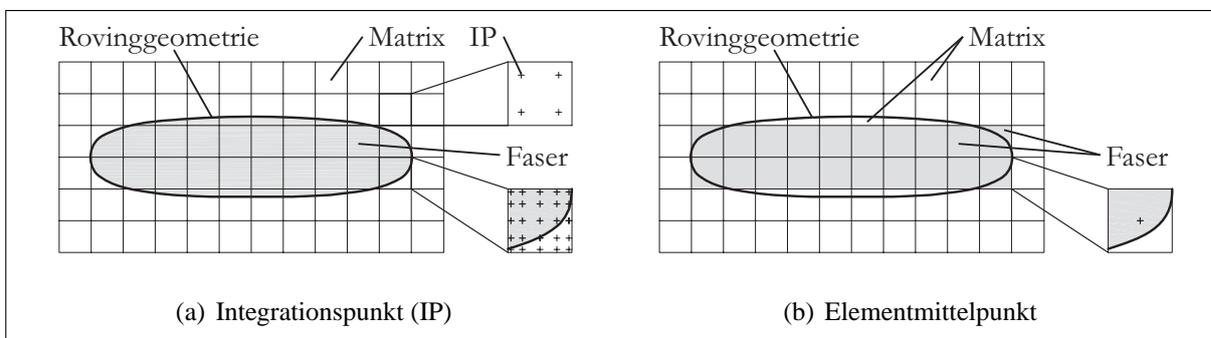


Abbildung 6.6: Maßgebender Punkt für die Materialzuweisung

Zusätzlich wurden auch Netze untersucht, bei denen der Elementmittelpunkt entscheidend für die Materialzuweisung ist (Abb. 6.6(b)). Für die Zuordnung der Materialeigenschaften wird die Lage

der Integrationspunkte der Elemente bezüglich der überlagerten Geometrie der Bewehrung benutzt, d. h. für ein geradliniges Bewehrungselement wird der minimale Abstandsvektor \mathbf{r}_{ip} bezüglich der Mittellinie der Bewehrung (Roving) ermittelt. Das Vorzeichen der Differenz

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_{ip}| - |\mathbf{r}_{rov}(\phi)| \begin{cases} \leq 0 & : \text{Roving} \\ > 0 & : \text{Matrix} \end{cases} \quad (6.62)$$

wird als Kriterium herangezogen, wobei \mathbf{r}_{rov} die räumliche Ausdehnung des Bewehrungselementes beschreibt (Abb. 6.7). Mittels der Geometriefunktion für den Rovingquerschnitt (s. Superellipsengleichung) kann die richtungsabhängige, maximale Rovingdimension $\mathbf{r}_{rov}(\phi)$ von der Rovingmittellinie mit dem zum Integrationspunkt zugehörigen Abstand \mathbf{r}_{ip} verglichen werden. Der Abstand \mathbf{r}_{ip} ergibt sich zu

$$\mathbf{r}_{ip} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \alpha \mathbf{c}, \quad (6.63)$$

wobei der Faktor α

$$\alpha = \frac{c_1 a_1 - c_1 b_1 + c_2 a_2 - c_2 b_2 + c_3 a_3 - c_3 b_3}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad (6.64)$$

aus dem Skalarprodukt

$$0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}_{ip} \quad (6.65)$$

$$= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \alpha \mathbf{c}) \quad (6.66)$$

berechenbar ist.

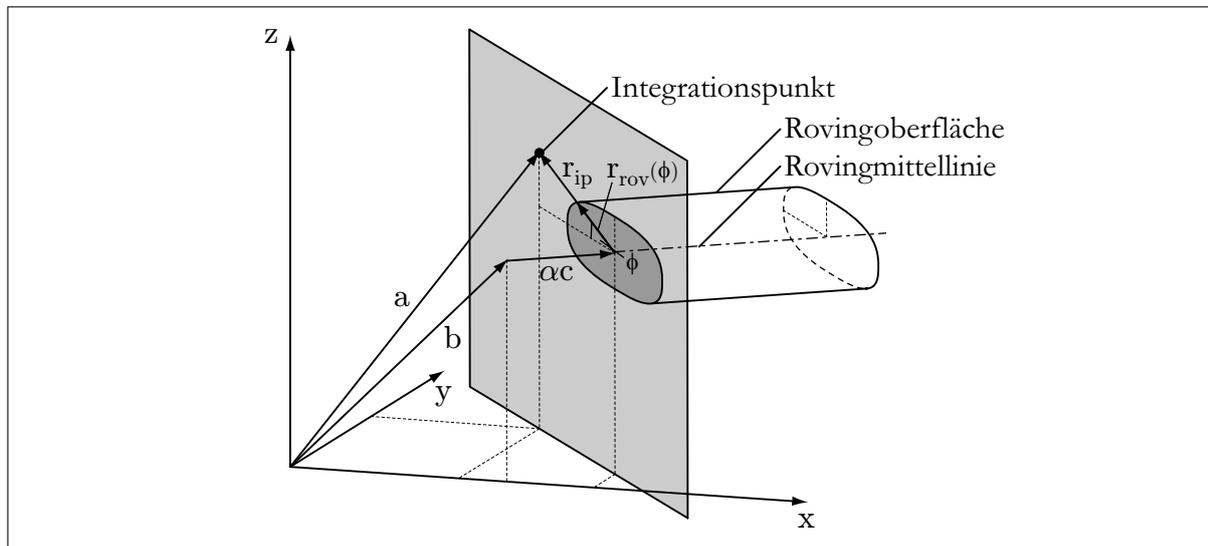


Abbildung 6.7: Beschreibung der Rovinggeometrie im \mathcal{RVE}

6.3.7 Variation der Elementgröße

Bei Verwendung der vereinfachten Diskretisierung mit uniformen Elementen wurde der Einfluss der Elementgröße auf die Ergebnisse der Homogenisierung untersucht. Abbildung 6.8 zeigt eine Zelle mit den Kantenlängen $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$ mit einem Roving der Feinheit 620 tex . In der $x - z$ -Ebene – der Rovingquerschnittsdefinitionsebene – wurde die Elementanzahl variiert.

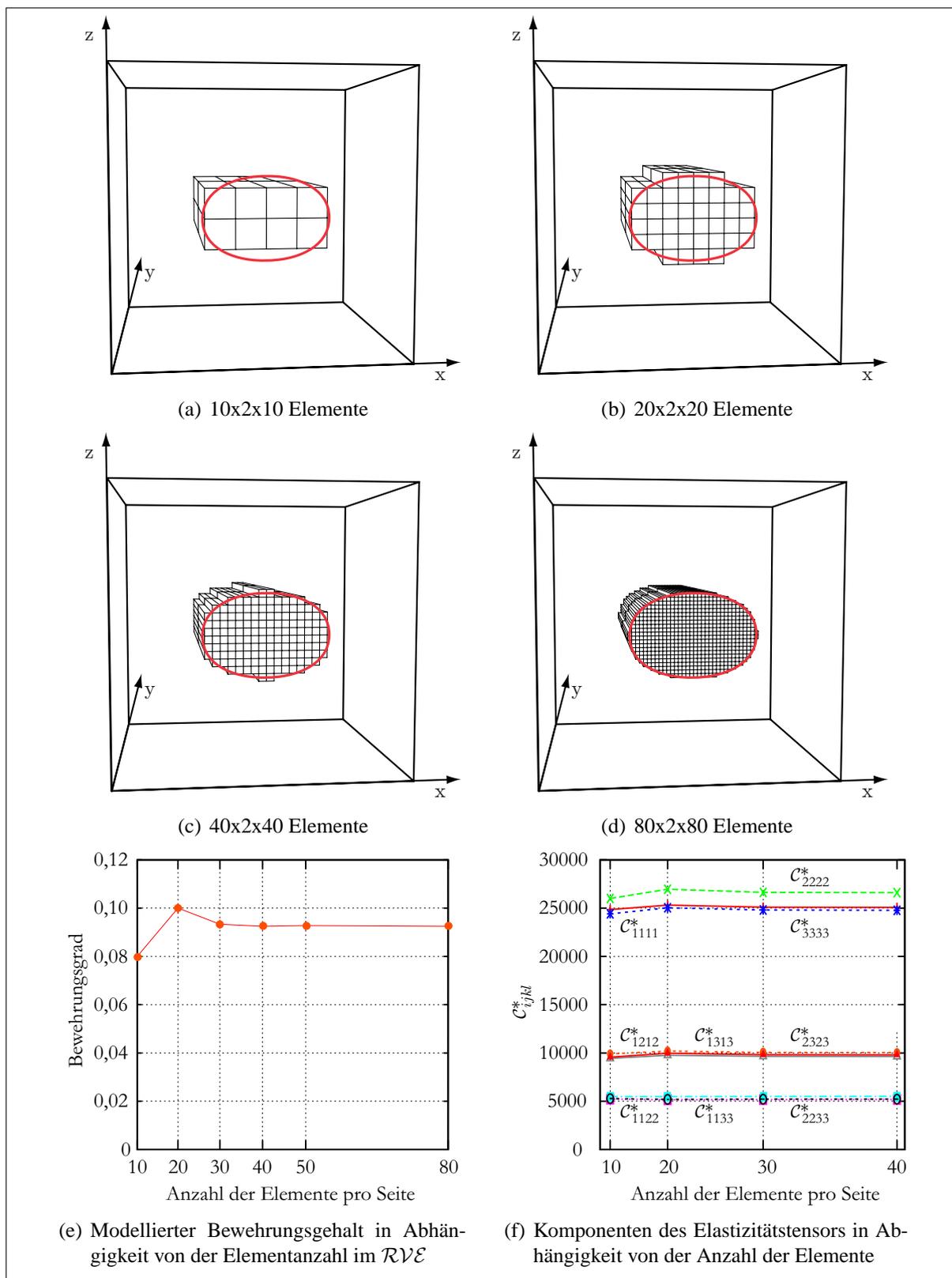


Abbildung 6.8: Geometrieapproximation in Abhängigkeit von der Elementgröße

Abbildung 6.8(e) zeigt den Bewehrungsgehalt in Abhängigkeit der Elementanzahl je Seitenkante. Die Approximation der Bewehrungsgeometrie hinsichtlich des Bewehrungsgehaltes mit einphasigen Elementen ist erst ab einer Elementanzahl von 30 Elementen pro Zellseite hinreichend genau. Dies ist auf die detailliertere Diskretisierung zurückzuführen, d. h. die Differenz aus vorgegebenen und modellierten Faservolumengehalt wird mit größer werdender Elementanzahl kleiner.

Die errechneten effektiven elastischen Konstanten der heterogenen Zelle sind jedoch schon mit relativ wenig Elementen hinreichend genau bestimmbar, vgl. Abb. 6.8(f).

Fazit

Das entwickelte Homogenisierungswerkzeug **Me-FEM** mit PYFEM erlaubt die numerische Bestimmung der effektiven Elastizitätskonstanten für quaderförmig approximierten Gebiete auf der Mesoebene. Hierbei wird das mesomechanische Modell automatisch generiert, wobei superelliptische Rovinggeometrien (vgl. Abschnitt 5.2.2) und beliebige Rovingausrichtungen entsprechend der untersuchten Bewehrungsstruktur abgebildet werden. Das implementierte Acht-Knoten-Volumenelement kann die Mehrphasigkeit des Verbundwerkstoffes abbilden, sodass sowohl materialabhängige als auch materialunabhängige Vernetzungen der repräsentativen Volumenelemente untersucht werden konnten.

Mit dem Programmsystem ABAQUS wurden effektive elastische Konstanten mit materialabhängigen Vernetzungen der repräsentativen Volumenelemente ermittelt, wobei mittels kinematischer Zwangsbedingungen die periodischen Randbedingungen modelliert wurden.

Für den Einsatz auf Parallelrechnern wurde basierend auf dem MPI-Standard das entwickelte Homogenisierungswerkzeug PYFEM parallelisiert. Auf Grund der objektorientierten Programmierung ist ein Einsatz im Rahmen eines FE^2 -Modells möglich (vgl. Abschnitt 7.2).

6.3.8 Effektive Eigenschaften von orthogonal bewehrtem Textilbeton

Abbildung 6.9 zeigt die grafischen Repräsentationen der Elastizitätstensoren (vgl. Anhang A.4) der Matrix, des textilen Geleges und des Verbundwerkstoffes Textilbeton. Ein orthogonales Gelege mit orthotropen Eigenschaften (Abb. 6.9(b)) bewirkt bei Einbettung in eine isotrope Matrix (Abb. 6.9(a)) einen orthotropen Verbundwerkstoff (Abb. 6.9(c)). Bei den für Textilbeton üblichen geringen Bewehrungsgraden und der geringen Unterschiede zwischen den E-Moduli der Matrix und der Bewehrung ($E_m : E_r^{\text{AR-Glas}} \approx 1 : 2,5$), zeigt der Verbundwerkstoff nur eine gering ausgebildete Anisotropie (Abb. 6.9(c)). Textilbeton mit einer Karbonfaserbewehrung zeigt (Abb. 6.9(d)) bei gleichem Bewehrungsgrad (5 % je Richtung) eine stärker ausgebildete Anisotropie ($E_m : E_r^{\text{Karbon}} \approx 1 : 7,1$).

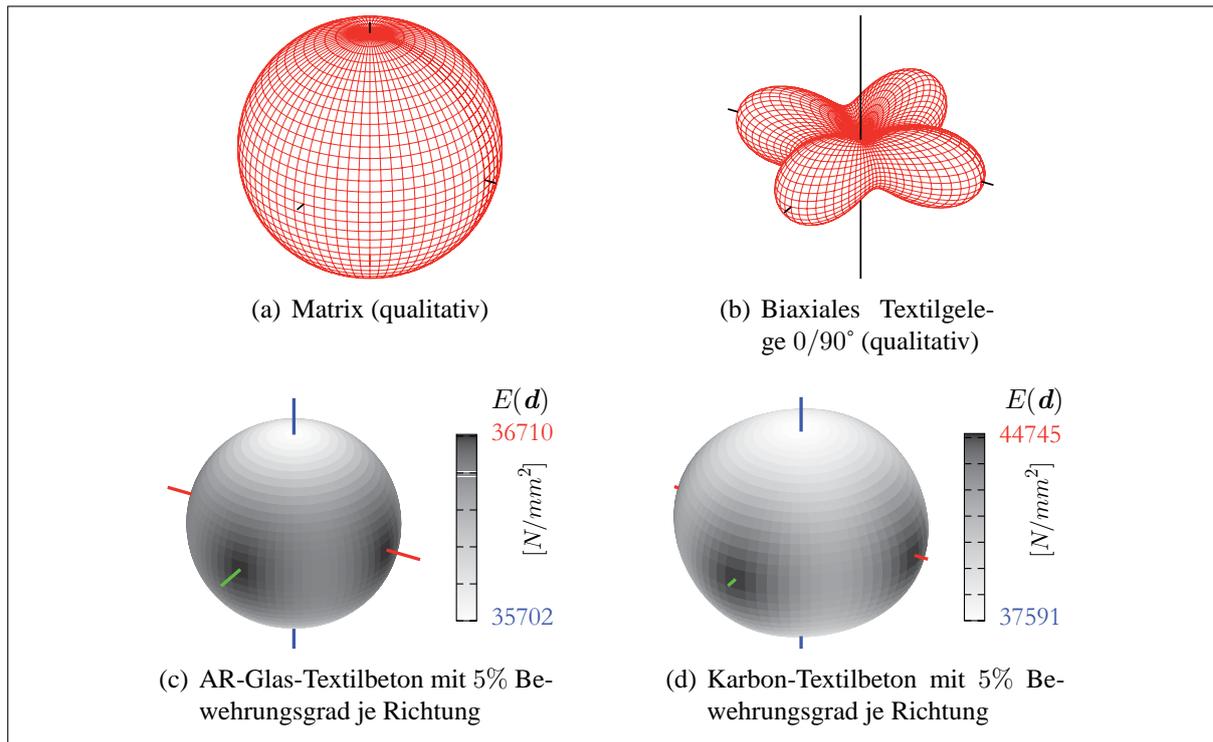


Abbildung 6.9: Stereografische Projektion der orthotropen Elastizitätstensoren

Die Konstanten des effektiven Elastizitätstensors ergeben sich für das im Folgenden angegebene Beispiel entsprechend Gl. (6.49) zu:

$$[C_{ijkl}^*]^{\text{AR-Glas}} = \begin{bmatrix} 36\,710 & 7\,769 & 8\,083 & 0 & 0 & 0 \\ 7\,769 & 36\,710 & 8\,083 & 0 & 0 & 0 \\ 8\,083 & 8\,083 & 35\,702 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14\,294 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14\,197 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14\,197 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}^2}, \quad (6.67)$$

$$[C_{ijkl}^*]^{\text{Karbon}} = \begin{bmatrix} 44\,745 & 8\,069 & 8\,648 & 0 & 0 & 0 \\ 8\,069 & 44\,745 & 8\,648 & 0 & 0 & 0 \\ 8\,648 & 8\,648 & 37\,591 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15\,998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15\,665 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15\,665 \end{bmatrix} \frac{N}{\text{mm}^2}, \quad (6.68)$$

wobei $E_f^{\text{AR-Glas}} = 78000 \text{ N/mm}^2$, $E_f^{\text{Karbon}} = 214000 \text{ N/mm}^2$ und $E_m^{\text{Beton}} = 30000 \text{ N/mm}^2$ ist. Die Querdehnzahlen für die Rovings wurden auf Grund des Bündelcharakters der Bewehrung zu Null angenommen ($\nu_m^{\text{Beton}} = 0, 2$). Beide Bewehrungen wurde mit gleichen Geometrieabmaßen modelliert.

6.3.9 Ausblick auf inelastisches Materialverhalten - Induzierte Anisotropie

Unter Einbeziehung lokaler Schädigungs- und Versagenskriterien für die Einzelmaterialien wurde die Evolution der globalen anisotropen Schädigung für ausgewählte Belastungspfade untersucht (induzierte Anisotropie). Abbildung 6.10 stellt eine unidirektional bewehrte Einheitszelle mit vordefiniertem Riss dar, welche in Bewehrungsrichtung auf Zug belastet wurde. Mit steigender Belastung kommt es zum Ablösen der Faserbewehrung von der umgebenden Matrix. Im Diagramm in Abb. 6.10 ist die relative Abnahme ausgewählter Komponenten des effektiven Elastizitätstensors C_{ijkl}^* mit steigender mittlerer Dehnung in Bewehrungsrichtung dargestellt, wobei die effektiven Größen auf den Zustand mit bereits ausgebildetem Matrixtransversalriss, aber noch intaktem Faser-Matrix-Interface C_{ijkl}^0 bezogen sind.

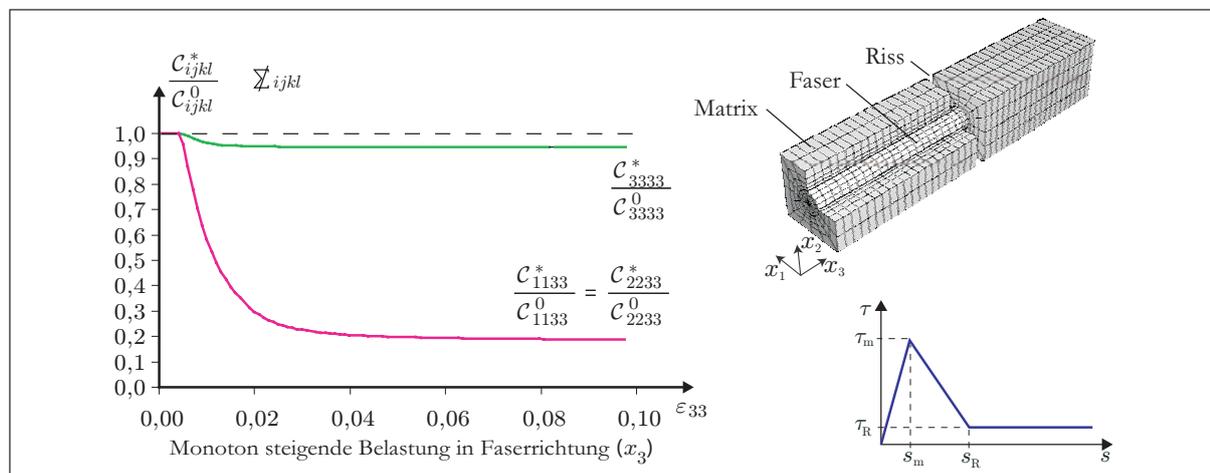


Abbildung 6.10: Induzierte Anisotropie infolge Schädigung des Verbundwerkstoffes

Fazit

Eine Homogenisierung von $\mathcal{RV}\mathcal{E}$ bzw. \mathcal{MR} mit nichtlinearem Materialverhalten erlaubt die Bestimmung von effektiven Materialparametern, z. B. von Schädigungsvariablen. Sowohl isotrope als auch initial anisotrope Werkstoffe ändern ihr Materialverhalten, wenn Risse auftreten bzw. ein nichtlineares Materialverhalten vorliegt. Es kommt zur Ausbildung einer induzierten Anisotropie.

Ob ein mesoskopisches Gebiet \mathcal{Y} diese induzierten richtungsabhängigen Eigenschaften repräsentativ abbilden kann, ist abhängig von den Einzelmaterialeigenschaften. Beim Auftreten von Rissen bzw. bei inelastischen Materialveränderungen kann der repräsentative Charakter des untersuchten Gebietes \mathcal{Y} verloren gehen.

Makrorisse und das Versagen des Verbundes zwischen der Faserbewehrung und der Matrix in Textilbeton führen zu einer induzierten Anisotropie. Diese wurde qualitativ mit einem Finite-Elemente-Modell eines Makrorissystems bei versagendem Faser-Matrix-Verbund gezeigt. Quantitative Aussagen konnten nicht getätigt werden, da das effektive Rovingverhalten und die Rissverzahnung nicht berücksichtigt worden sind. Für eine realitätsnahe Materialbeschreibung sind somit mindestens die Modellierung des Verbundversagens und der Matrixrissbildung notwendig.

7 Hierarchische und simultane Multiskalenanalysen

7.1 Klassifikation der Multiskalenanalyse

Für Strukturanalysen, bei denen die Mikrostruktur des Materials berücksichtigt werden soll, kommen in jüngster Zeit Mehrskalenmethoden zum Einsatz [CHABOCHE & FEYEL 2000, FEYEL & CHABOCHE 2001, FISH & YU 2001, FISH & SHEK 2000, GEERS et al. 2002, GHOSH & LEE 1996, JUN & IM 2000, LIU et al. 2000, MAIRE et al. 2000, LEPENIES et al. 2006].

Eine mögliche Klassifizierung dieser Methoden kann auf der Strukturebene beruhen, auf welcher die konstitutiven Beziehungen formuliert werden. Dabei wird zwischen sogenannten sequentiellen/hierarchischen¹⁰ bzw. integrierten/simultanen Multiskalenanalysen¹¹ (MSA) unterschieden. Sequentielle Multiskalenanalysen nutzen die Analyse der Mikro- bzw. Mesostruktur zur Bestimmung von Parametern für makroskopische Materialmodelle. Die Strukturanalyse beruht demzufolge auf makroskopischen konstitutiven Beziehungen. Integrierte Multiskalenanalysen beziehen das lokale Materialverhalten auf der Mikro- bzw. Mesoebene direkt in die makroskopische Strukturanalyse ein. Dazu wird für den aktuellen Beanspruchungszustand auf der Makroebene die zugehörige Materialantwort anhand von mikro- bzw. mesomechanischen Untersuchungen ermittelt, vgl. Abb. 7.1. Es ist demzufolge keine Formulierung makroskopischer konstitutiver Beziehungen nötig.

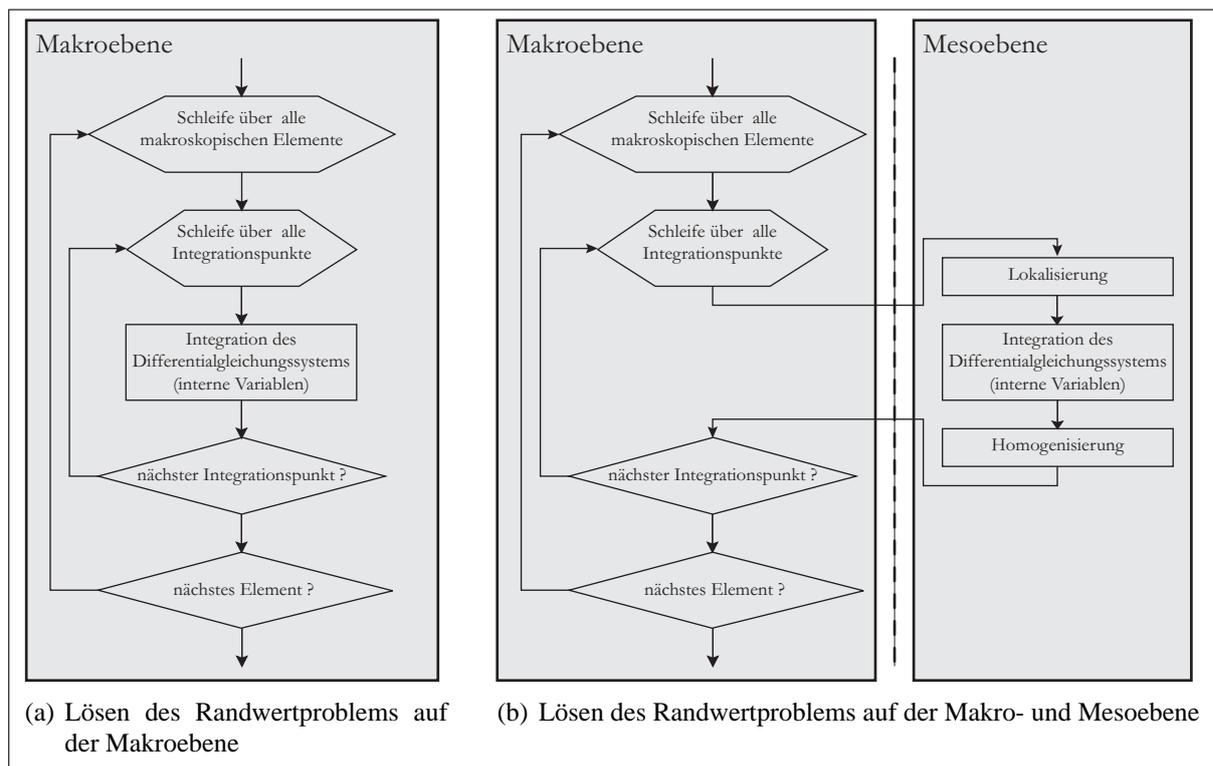


Abbildung 7.1: Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode nach [FEYEL & CHABOCHE 2001]

Mehrskalenmethoden, welche Modelle auf der Makroebene mit Kontinuamodellen höherer Ordnung abbilden (z. B. COSSERAT-Theorie [GEERS et al. 2002]), erfordern Homogenisierungsmethoden höherer Ordnung, d. h. die Krümmung des \mathcal{RVE} muss berücksichtigt werden [FISH & YU 2001, FISH & SHEK 2000, GEERS et al. 2002].

¹⁰ aufeinander aufbauende Modelle

¹¹ gleichzeitig ablaufende Modelle

Neben der gewöhnlichen Finite-Elemente-Methode kommen auch andere Verfahren zur Berechnung der Mikro- bzw. Mesostruktur zur Anwendung. [GHOSH & LEE 1996] nutzen z. B. ein Voronoi-Zell-Finite-Element-Modell zur Simulation der Mikrostruktur. Auch netzfreie Methoden werden zur Berechnung der Modelle auf den unterschiedlichen Strukturebenen verwendet [JUN & IM 2000].

7.2 Anwendung der simultanen Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode FE^2 auf Textilbeton

Zur Analyse von typischen Beanspruchungen in einem Tragwerk aus Textilbeton wird ein Multi-Skalen-Berechnungsmodell (Abb. 7.2) betrachtet, welches auf makroskopischer Ebene den Beanspruchungszustand im Mittel erfasst und das Materialverhalten mittels mesoskopischer Modelle ermittelt. Sowohl das makroskopische als auch das mesoskopische Randwertproblem sollen mittels der Finite-Elemente-Methode gelöst werden. Anwendung findet hier das von FEYEL entwickelte FE^2 -Modell [FEYEL & CHABOCHE 2001] im Programmpaket ZSET.

Das heterogene Material wird durch ein \mathcal{RVE} modelliert und mit einem übergeordneten makroskopischen Modell verknüpft. Dabei wird jedem Integrationspunkt im makroskopischen Finite-Elemente-Modell ein \mathcal{RVE} auf der Mesoebene zugeordnet. Die Schädigungs- bzw. lokalen Versagensmechanismen werden somit auf einer Mesoebene beschrieben und nach einer Homogenisierung der Zustandsvariablen im \mathcal{RVE} bei der weiteren Belastung im makroskopischen Modell berücksichtigt (Abb. 7.1(b)). Die Vorgehensweise bei dieser Mehrskalenmethode beinhaltet folgende Arbeitsschritte:

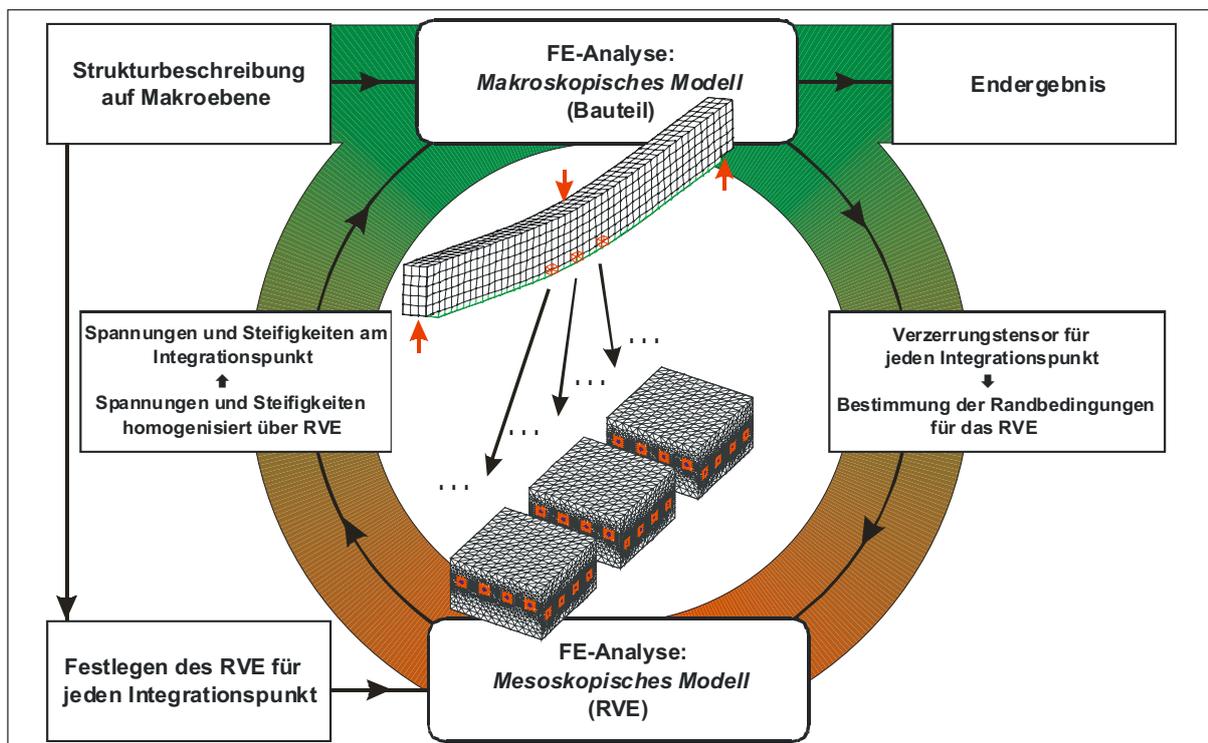


Abbildung 7.2: Multi-Skalen-Finite-Elemente-Methode

1. Modellierung der Makrostruktur (Tragwerk)
2. Modellierung des mechanischen Verhaltens des \mathcal{RVE} auf der Mesoebene

3. Zuordnung eines \mathcal{RVE} zu jedem Integrationspunkt auf der Makroebene
4. Bestimmung der Randbedingungen am \mathcal{RVE} entsprechend des makroskopischen Verformungszustandes (Lokalisierung)
5. Lösen des Zellproblems auf der Mesoebene
6. Bestimmung der makroskopischen Spannungen anhand des bekannten mesoskopischen Spannungszustandes (Homogenisierung).

In Abb. 7.3 ist ein 4-Punkt-Biegeversuch an einem Balken aus Textilbeton dargestellt. Im Rahmen der verwendeten Multi-Skalen-FEM [FEYEL & CHABOCHE 2001] wurde die Materialstruktur – hier mit unidirektionaler Bewehrung – mittels einfacher, repräsentativer Volumenelemente erfasst [LEPENIES et al. 2003]. Für ausgewählte Integrationspunkte sind die Verformungen der zugeordneten \mathcal{RVE} überhöht dargestellt (Abb. 7.3). Die Vorteile einer solchen Mehrskalennmethode liegen in der direkten Einbeziehung der Mesostruktur bei der Beschreibung des Materialverhaltens auf der Makroebene, da sowohl die Geometrie als auch die Eigenschaften der Mesostruktur erfasst werden. Außerdem ist eine relativ einfache Formulierung konstitutiver Beziehungen auf der Mesoebene möglich.

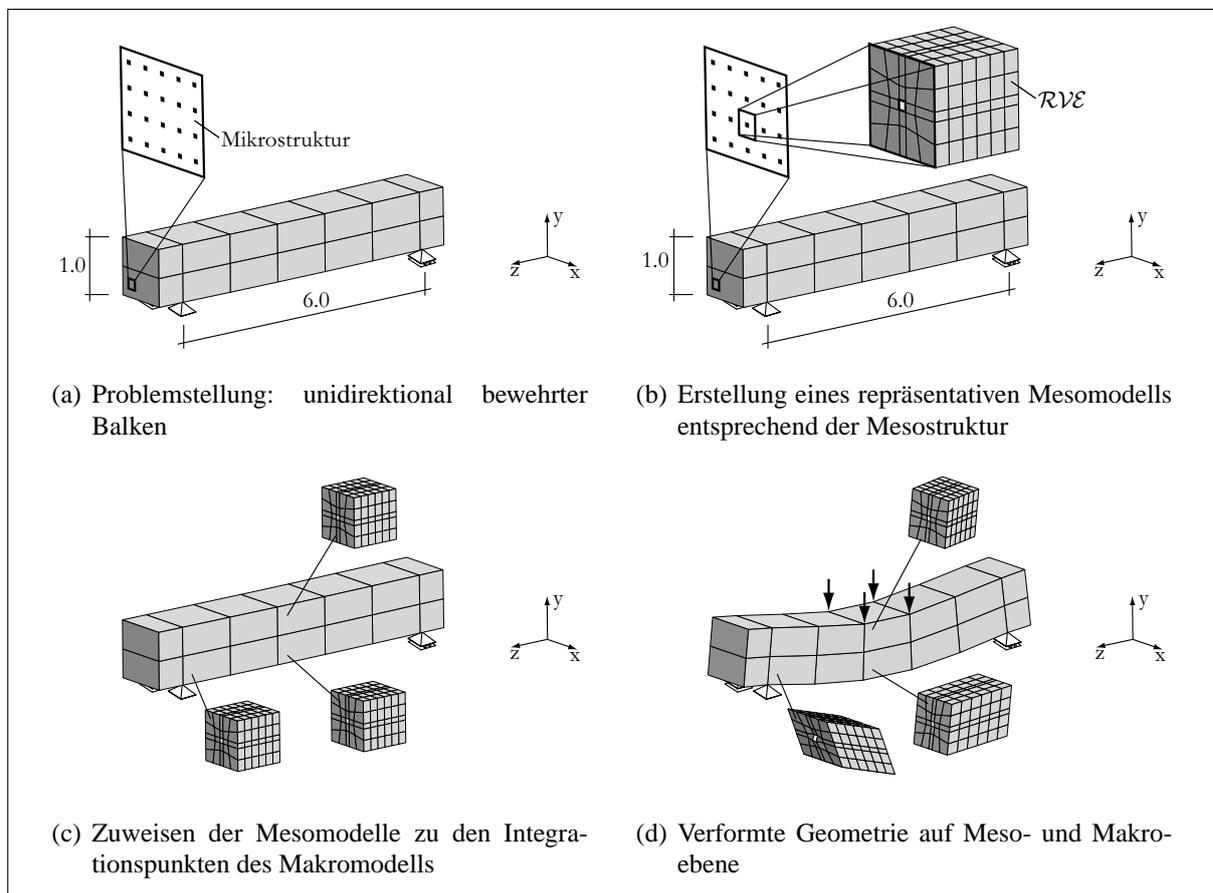


Abbildung 7.3: Beispielrechnung einer simultanen Multi-Skalen-Analyse mit dem Programmpaket ZSET

Nachteilig ist der enorme numerische Aufwand der FE^2 -Methode. Erwähnenswert ist die einfache Parallelisierung dieser Methode, da die repräsentativen Volumenelemente simultan von verschiedenen Prozessoren berechnet werden können. Naheliegender ist, einem Master-Prozessor das makroskopische Finite-Elemente-Problem lösen zu lassen, welcher dabei an die Slave-Prozessoren

die gemittelten Verzerrungen übergibt bzw. im Gegenzug die gemittelten Spannungen und Steifigkeiten empfängt. Bemerkenswert bei dieser Methode ist das geringe Datenvolumen, welches zwischen dem Master- und den Slave-Prozessoren ausgetauscht werden muss, sodass neben 'shared memory systems' auch '(hybrid) distributed memory systems' zum Einsatz kommen können. Andererseits ist für die Anwendung auf Textilbeton eine sehr detaillierte Diskretisierung des Mesoproblems notwendig, welches sehr lange Rechenzeiten zum Lösen des Randwertproblems auf der Mesoebene zur Folge hat. Zudem wurden bei der praktischen Anwendung Konvergenzprobleme beobachtet, die zu einer weiteren Verlangsamung bzw. Abbruch der Rechnung führten. Ein weiteres Problem stellt die Abspeicherung der Zustandsvariablen der Mesomodelle dar. Für das relativ kleine Beispiel (Abb. 7.3) entstanden während der nichtlinearen Rechnung Datenmengen von mehreren Gigabytes, welche zusätzliche Anforderungen an die verwendete Hardware stellen. Die Dauer für das Lösen eines Lastinkrementes auf dem Parallelrechner ORIGIN 2000 an der TU Dresden betrug ca. 30 Minuten.

Fazit

Die Methode FE^2 funktioniert für kleine Problemstellungen, welche die Funktionsweise der Methode unter Beweis stellen. Berechnungen realitätsnaher Tragwerksmodelle sind auch bei Verwendung modernster Hochleistungsrechner mit tausenden Prozessoren in naher Zukunft nicht realisierbar. Das Hauptproblem stellen die Modelle auf der Mesoebene dar. Diese müssen relativ schnell und zuverlässig lösbar sein und zudem das nichtlineare Verhalten der Substruktur des Materials abbilden können.

Der Schwerpunkt der Arbeit wird demzufolge auf die Entwicklung des **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells** gelegt, welches die Finite-Elemente-Modelle auf den Strukturebenen ersetzen soll.

7.3 Anforderungen an ein mesomechanisches Modell für Textilbeton

Das Verhalten von Textilbetonbauteilen ist maßgeblich durch die Vielzahl an Makrorissen gekennzeichnet, welche durch Rovings überbrückt werden. Abbildung 7.4 zeigt die relevanten Spannungen in dem Roving-Matrix-System.

Auf Grund der partiellen Imprägnierung des Rovings und des vorwiegend auf Schub beanspruchten Roving-Matrix-Interfaces, ist eine ungleichförmige Normalspannung über den Rovingquerschnitt zu berücksichtigen. Die Verbundspannungsverteilung im Interface ist nichtlinear abzubilden, da sich eine ungleichförmige Schubspannungsverteilung im Interface auf Grund des nichtlinearen Charakters des Verbundverhaltens bzw. auf Grund der einseitigen Lasteinleitung einstellt, vgl. [ZASTRAU et al. 2008].

Weiterhin sind Kriterien aufzustellen, bei denen ein Matrixriss entstehen kann, z. B. ein Spannungskriterium. Außerdem ist das Nachbruchverhalten der Matrix abzubilden, da durch die bei Textilbeton typischen kleinen Rissbreiten ein Mitwirken der Rissflanken bei der Rissüberbrückung eine Rolle spielen kann.

Das Filamentbündel bzw. der Rovingquerschnitt selbst ist so zu approximieren, dass der Vielzahl an möglichen Querschnittsformen Rechnung getragen wird.

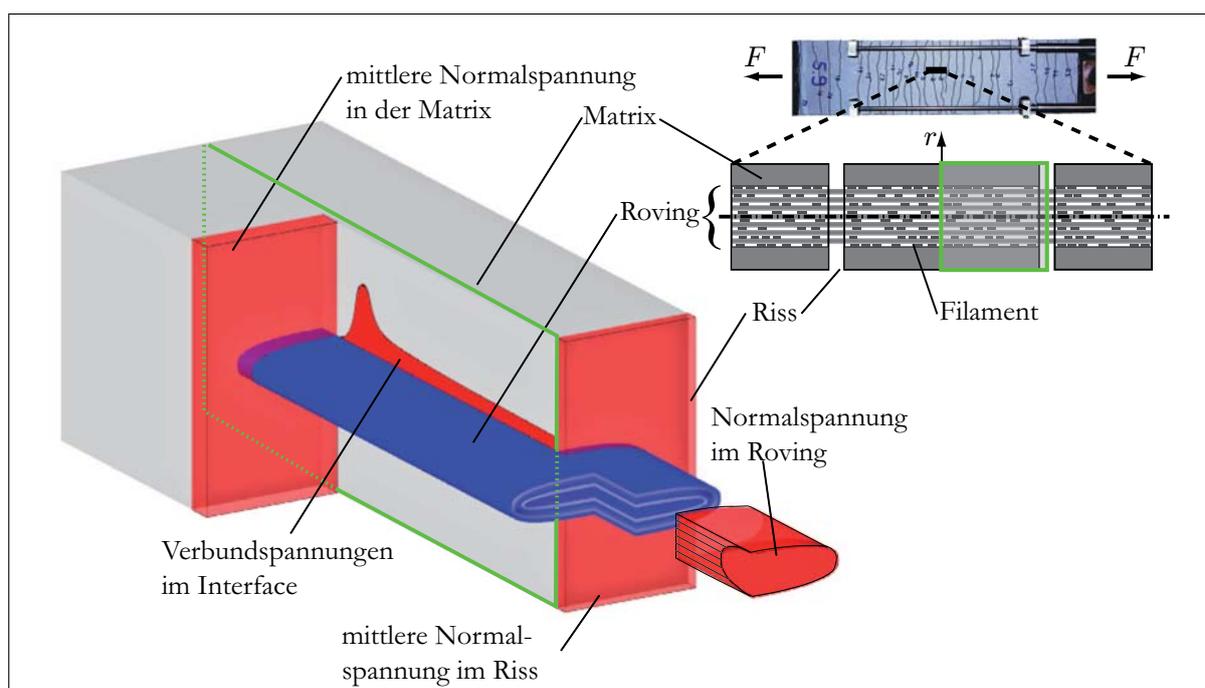


Abbildung 7.4: Roving-Matrix-Modell (**Me-I-Modell**)

In Hinblick auf eine Implementierung des mesomechanischen Modells (**Me-I**) in eine integrierte Multiskalenanalyse, sind effiziente Lösungsstrategien auf der Mesoebene gefragt.

8 Hierarchische Materialbeschreibung von Textilbeton durch das Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung des **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells (MMM-Prognosemodell)**. Ziel ist es, die auf der jeweiligen Strukturebene relevanten Tragmechanismen abzubilden. Mittels effizienter mechanischer Modelle sind die Tragmechanismen zu identifizieren und zu simulieren. Anhand geeigneter Experimente sind die notwendigen Modellparameter zu bestimmen.

Zur Verbundbeschreibung zwischen der Feinbetonmatrix und der Faserbewehrung wird ein Verbundmodell hergeleitet, welches für beliebige schlupfbasierte Verbundgesetze das Auszugsverhalten eines Bewehrungselementes aus der Matrix berechnen kann. Anhand von Experimenten werden die Verbundgesetze für typische Materialkombinationen quantifiziert. Speziell wird das Verbundverhalten der Materialkombinationen AR-Glas/Zement und Stahl/Beton bestimmt.

Mikromechanische Untersuchungen der Lastabtragungsmechanismen im Roving bilden die Grundlage für die mesomechanischen Modelle. Dazu werden mittels detaillierter Finite-Elemente-Simulationen die Beanspruchungen in einem Roving-Matrix-System analysiert. Basierend auf den Ergebnissen werden effizientere Modelle entwickelt, welche das Bündeltragverhalten der textilen Bewehrung äquivalent abbilden können. Hierfür werden Idealisierungen für den Roving entwickelt, welche das effektive Rovingverhalten auf der Mesoebene abbilden.

Ziel ist die Bestimmung eines effektiven Rovingverhaltens mittels leistungsfähiger mikroskopischer Modelle im Hinblick auf eine integrierte Multi-Skalen-Analyse von Textilbeton. Diese bilden die Grundlage für eine mesoskopische Verbundbeschreibung, den Roving-Matrix-Verbund. Anhand von experimentellen Daten werden die mesoskopischen Modellparameter ermittelt, um das makroskopische effektive Materialverhalten von Textilbeton zu prognostizieren.

Das **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell** wird im Rahmen einer Multi-Skalen-Methode unter Berücksichtigung des Bauteilverhaltens validiert.

8.1 Verbundmodelle

Im folgenden Abschnitt werden Methoden zur Beschreibung des Verbundverhaltens im Verbundwerkstoff Textilbeton dargestellt. Unter dem Begriff *Verbund* soll im Rahmen dieser Arbeit die Kraftübertragung zwischen Matrixmaterial und Textilbewehrung verstanden werden.

Auszugsversuche von Filamenten bzw. Rovings aus der Feinbetonmatrix zeigen ein deutlich nicht-lineares Kraft-Verformungs-Verhalten. Ursache dafür ist die sukzessive Aktivierung bzw. Zerstörung des Interfaces bzw. der Interphase zwischen der Bewehrung und der Matrix. Die Frage, ob es sich um einen elastischen oder plastischen Verbund handelt, lässt sich z. B. durch einen Filamentauszugsversuch mit Entlastung klären. Abbildung 8.1 zeigt eine Hysterese aus einem Filament-Pull-Push-Versuch mit ca. 400.000 Zyklen, bei dem ein Filament abwechselnd relativ zur Ausgangskonfiguration gezogen bzw. gedrückt wird. Erkennbar sind deutlich unterschiedliche Be- und Entlastungspfade. Die zwischen dem Belastungs- und Entlastungspfad eingeschlossene Fläche entspricht der dissipierten Energie während eines Lastzyklus.

Da sich Faser- und Matrixmaterial bei den sehr kleinen Verschiebungen/Verzerrungen nahezu linear-elastisch verhalten, ist die Energiedissipation dem Verbund zuzuschreiben. Es handelt sich demzufolge vorwiegend um einen Reibverbund, vgl. Abb. 8.1.

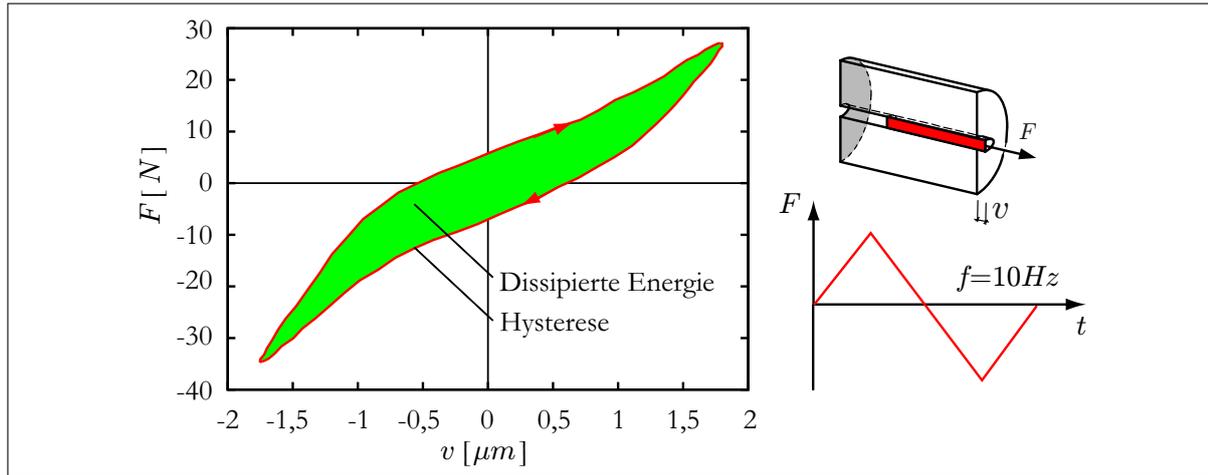


Abbildung 8.1: Hysterese eines Filament-Pull-Push-Versuches nach [MÄDER et al. 2004]

Für die Beschreibung des Verbundes mittels mechanischer Modelle können im Wesentlichen zwei Modellgruppen unterschieden werden – Interphasenmodelle und Interfacemodelle. Die erste Gruppe von Modellen beschreibt den Verbund mittels eines fiktiven „Verbundmaterials“ zwischen Faser und Matrix, einer zusätzlichen Materialphase. Motiviert werden diese Modelle durch die Beobachtung einer sogenannten *interface transition zone* (ITZ) (s. Abschnitt 2.4). Die zweite Gruppe von Verbundmodellen bildet den Verbund auf der Grenzfläche der beiden Einzelmaterialien ab. Im Folgenden wird eine schlupfbasierte Verbundbeschreibung für Textilbeton hergeleitet. Die Relativbewegung in Tangentialrichtung zur Materialgrenzfläche kann im Fall eines Interfaces der Dicke Null mit dem Schlupf s beschrieben werden, wogegen im Falle einer Interphase die Scherung γ als Maß benutzt werden kann.

8.1.1 Herleitung der Verbund-Differentialgleichung

Ein schlupfbasiertes Verbundmodell beschreibt die Schubspannungsübertragung zwischen der Bewehrung (r) und der einbettenden Matrix (m) basierend auf der Relativbewegung – des sogenannten Schlupfes – zwischen den Verbundpartnern. Ausgangspunkt für die mathematische Formulierung des Verbundproblems ist das in Abb. 8.2(a) dargestellte Modell des Auszuges eines homogenen Bewehrungselementes (z. B. ein Filament) aus einer Matrix, vgl. [RICHTER 2005]. Die Querschnittsform beider Körper ist beliebig, wobei nur die Querschnittsfläche A_r und der Umfang u_r des Bewehrungselementes sowie die Querschnittsfläche der Matrix A_m relevant sind.

In Abbildung 8.2(b) ist ein differentielles Element der Länge dx im Längsschnitt mit den am Element wirkenden Schnittkräften dargestellt.

Aus Gleichgewichtsbetrachtungen lässt sich zeigen, dass an jeder Stelle x die Summe der Normalkräfte N_r und N_m gleich der Zugkraft F ist:

$$F = N_r(x) + N_m(x) = N_r(x) + dN_r(x) + N_m(x) + dN_m(x), \quad (8.1)$$

woraus für die differentiellen Zuwächse der Normalkräfte

$$dN_m(x) = -dN_r(x) \quad (8.2)$$

folgt. Sie ergeben sich aus der Schubspannung $\tau(x)$ zu

$$dN_r(x) = \tau(x) u_r dx \quad \text{und} \quad (8.3a)$$

$$dN_m(x) = -\tau(x) u_r dx. \quad (8.3b)$$

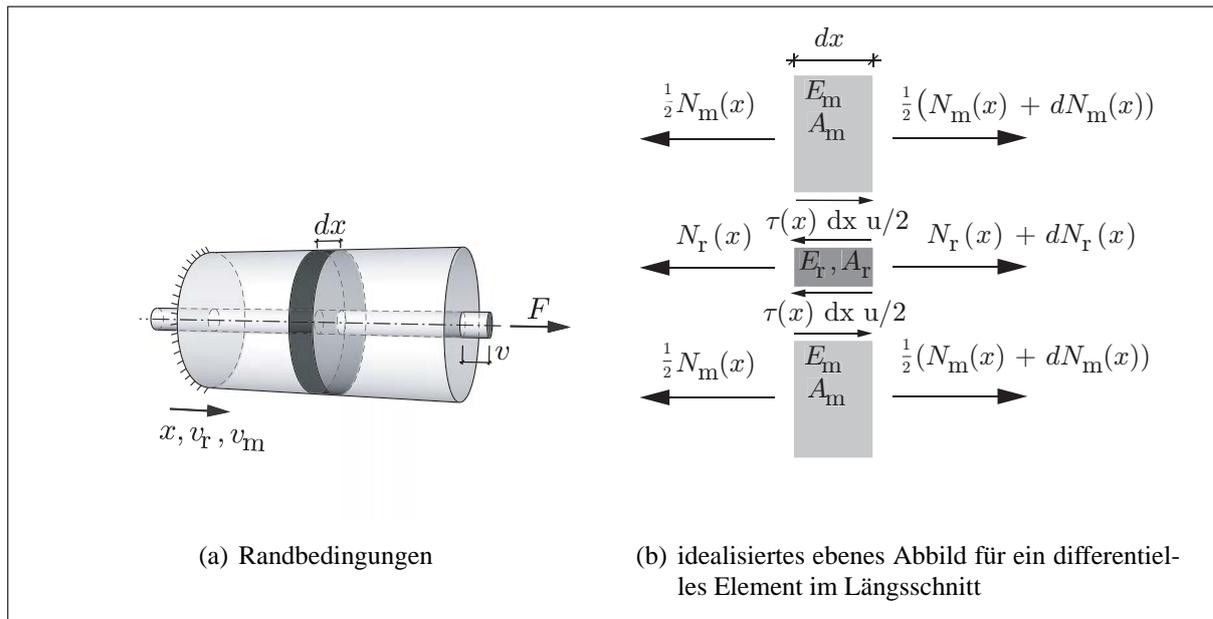


Abbildung 8.2: Auszug eines homogenen Bewehrungselementes

Der Schlupf $s(x)$ – die Relativverschiebung zwischen Bewehrung und Matrix – ist definiert durch die Verschiebungsdifferenz:

$$s(x) = v_r(x) - v_m(x). \quad (8.4)$$

Zweimaliges Differenzieren des Schlupfes s nach x liefert:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{dv_r(x)}{dx} - \frac{dv_m(x)}{dx} = \varepsilon_r(x) - \varepsilon_m(x), \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \frac{d\varepsilon_r(x)}{dx} - \frac{d\varepsilon_m(x)}{dx}. \quad (8.6)$$

Unter Verwendung des linear elastischen Materialgesetzes für Bewehrung bzw. Matrix

$$\varepsilon_r(x) = \frac{N_r(x)}{E_r A_r} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_m(x) = \frac{N_m(x)}{E_m A_m} \quad (8.7)$$

folgen mit den Gln. (8.3) die entsprechenden Dehnungsänderungen

$$\frac{d\varepsilon_r(x)}{dx} = \frac{1}{E_r A_r} \frac{dN_r(x)}{dx} = \frac{u_r \tau(x)}{E_r A_r} \quad \text{bzw.} \quad (8.8a)$$

$$\frac{d\varepsilon_m(x)}{dx} = \frac{1}{E_m A_m} \frac{dN_m(x)}{dx} = -\frac{u_r \tau(x)}{E_m A_m}. \quad (8.8b)$$

Einsetzen der Gln. (8.8) in Gl. (8.6) liefert mit dem Ansatz eines schlupfbasierten Verbundgesetzes

$$\tau(x) = \tau[s(x)] \quad (8.9)$$

(d.h. die übertragene Verbundspannung τ an einer Stelle x ist vom Schlupf s zwischen den beiden Kontaktpartnern an dieser Stelle abhängig) die Verbunddifferentialgleichung zweiter Ordnung für den Schlupf $s(x)$

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \left(\frac{1}{E_r A_r} + \frac{1}{E_m A_m} \right) u_r \tau[s(x)]. \quad (8.10)$$

Zur Abkürzung lässt sich für die weiteren Ausführungen eine Ersatzdehnsteifigkeit $(EA)^*$ einführen. Sie ist mit

$$\frac{1}{(EA)^*} = \frac{1}{E_r A_r} + \frac{1}{E_m A_m} \quad (8.11)$$

definiert. Damit verkürzt sich die Schreibweise der Verbunddifferentialgleichung (8.10) auf

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{u_r}{(EA)^*} \tau[s(x)]. \quad (8.12)$$

Wird die Matrixdehnung vernachlässigt (d. h., es gilt die Annahme $(E_m A_m) \gg (E_r A_r)$), ist $(EA)^* \approx E_r A_r$. Eine solche Annahme ist zum Beispiel bei Auszugsversuchen, die zur Bestimmung der Materialparameter des Verbundgesetzes dienen (Abschnitt 8.2.4), sinnvoll. Bei diesen Experimenten ist in den meisten Fällen die Querschnittsfläche des Filamentes bzw. Rovings im Vergleich zu der der Matrix vernachlässigbar klein.

8.1.2 Lösung der Verbund-Differentialgleichung für konstante Schubspannungen

Im Fall einer konstanten Schubspannung $\tau(s) = \tau$ lautet die Verbunddifferentialgleichung

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = \frac{u_r}{(EA)^*} \tau. \quad (8.13)$$

Einen Ansatz für den Schlupf findet man durch zweimalige Integration von Gl. (8.13)

$$s(x) = \frac{1}{2} \frac{\tau u_r}{(EA)^*} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (8.14)$$

Da die Schubspannung hier unabhängig vom Schlupf ist, ist die Schubspannungsverteilung gegeben mit

$$\tau(x) = \tau. \quad (8.15)$$

Die konstante Schubspannung führt zu den linear veränderlichen Normalkräften

$$N_r(x) = u_r \int \tau(x) dx = \tau u_r x + C_3 \quad \text{und} \quad (8.16)$$

$$N_m(x) = -u_r \int \tau(x) dx = -\tau u_r x + C_4, \quad (8.17)$$

aus denen sich die Verschiebungsfunktionen zu

$$\begin{aligned} v_r(x) &= \int \varepsilon_r(x) dx = \int \left(\frac{N_r(x)}{E_r A_r} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\tau u_r}{E_r A_r} x^2 + \frac{C_3}{E_r A_r} x + C_5 \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \int \varepsilon_m(x) dx = \frac{1}{E_m A_m} \int N_m(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\tau u_r}{E_m A_m} x^2 + \frac{C_4}{E_m A_m} x + C_6 \end{aligned} \quad (8.19)$$

ergeben. Bei der Wahl der Randbedingungen muss wegen $\tau = \text{const.}$ der Randwert der Schubspannung durch den Schlupf ersetzt werden. Damit lauten die Randbedingungen

$$s(x=0) = s_1, \quad (8.20a)$$

$$N_r(x=0) = N_{r,0} \quad \text{und} \quad (8.20b)$$

$$N_m(x=0) = N_{m,0}. \quad (8.20c)$$

Die Randbedingung (8.20a) führt mit Gl. (8.14) direkt zu

$$C_2 = s_1, \quad (8.21)$$

und aus Gl. (8.20b) und Gl. (8.20c) folgen mit den Gln. (8.16) bzw. (8.17)

$$C_3 = N_{r,0} \quad \text{bzw.} \quad (8.22)$$

$$C_4 = N_{m,0}. \quad (8.23)$$

Die Bestimmung der noch fehlenden Integrationskonstanten C_1 erfolgt über einen Koeffizientenvergleich des Schlupfes, berechnet aus der Differenz der Verschiebungen (Gln. (8.18) und (8.19))

$$\begin{aligned} s(x) &= v_r(x) - v_m(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\tau u_r}{(EA)^*} x^2 + \left(\frac{N_{r,0}}{E_r A_r} - \frac{N_{m,0}}{E_m A_m} \right) x + (C_5 - C_6). \end{aligned} \quad (8.24)$$

mit dem Ansatz nach Gl. (8.14), wobei $C_2 = s_1$ (Gl. (8.21)). Der Koeffizientenvergleich liefert

$$C_1 = \frac{N_{r,0}}{E_r A_r} - \frac{N_{m,0}}{E_m A_m} \quad \text{und} \quad (8.25)$$

$$C_5 - C_6 = s_1. \quad (8.26)$$

C_5 und C_6 als Integrationskonstanten der Verschiebungsfunktionen sollen hier nicht weiter betrachtet werden. Damit ergeben sich die gesuchten Funktionsverläufe:

$$s(x) = \frac{1}{2} \frac{\tau u_r}{(EA)^*} x^2 + \left(\frac{N_{r,0}}{E_r A_r} - \frac{N_{m,0}}{E_m A_m} \right) x + s_1, \quad (8.27)$$

$$N_r(x) = N_{r,0} + \tau u_r x \quad \text{und} \quad (8.28)$$

$$N_m(x) = N_{m,0} - \tau u_r x. \quad (8.29)$$

Fazit

Der Verbund zwischen einem Bewehrungselement und einer einbettenden Matrix ist mittels der Verbunddifferentialgleichung beschreibbar. Unter Annahme einer konstanten Schubspannung-Schlupf-Beziehung ist das Verbundproblem analytisch geschlossen lösbar, d. h. es sind alle Beanspruchungszustände im Interface und in den Verbundpartnern analytisch berechenbar.

8.2 Semi-analytisches Verbundmodell

8.2.1 Definition der Randbedingungen bei Auszugsversuchen

Zur Beschreibung von Auszugsversuchen bedarf es zunächst einer Begriffsdefinition, da in der Literatur vielfach nur vom „pullout“ gesprochen wird, jedoch verschiedene Randbedingungen zugrunde liegen können. Abbildung 8.3 zeigt die im Folgenden näher erläuterten Arten von Auszugsversuchen. Im allgemeinen Fall eines Auszugsversuches (pullout arbitrary - pa) kann die Faser an beiden Enden der einbettenden Matrix Kräfte aufnehmen und sich gegenüber der Matrix

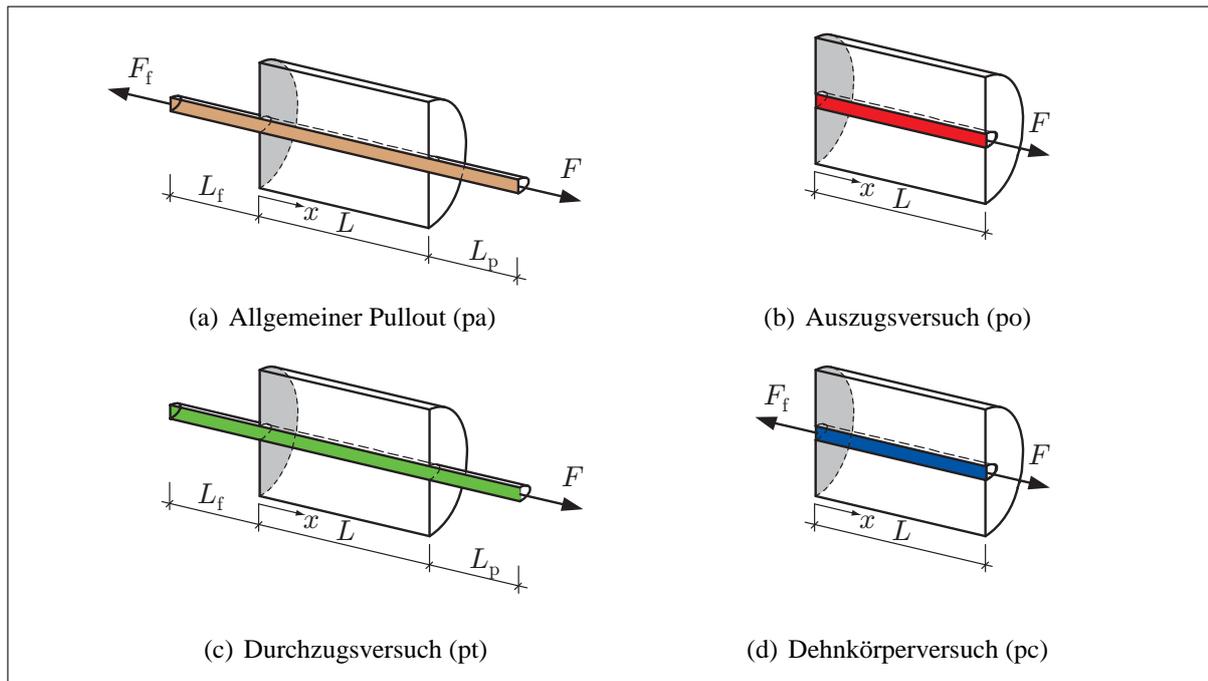


Abbildung 8.3: Arten von Auszugsversuchen

verschieben (Abb. 8.3(a)). Zusätzlich kann die Faserbewehrung aus dem Grundkörper herausragen ($L_f \neq 0, L_p \neq 0$).

Beim eigentlichen Auszugsversuch (pullout - po), vgl. Abb. 8.3(b), werden nur am gezogenen Faserende und über das Faser-Matrix-Interface Kräfte übertragen. Das andere Faserende ist kräftefrei. Nach dem kompletten Ablösen (Versagen der Adhäsion) des Interface verkürzt sich die zur Kraftübertragung nutzbare Länge L' ($L' < L$).

Kann ein bisher nicht im Verbund stehender Faserteil in die Matrix hineingezogen werden, spricht man vom Faserdurchzugsversuch (pull through - pt) (vgl. Abb. 8.3(c)). Den Fall (pull clamped (pc)), bei dem an einem Faserende gezogen wird und eine Verschiebung am ungezogenen Ende der Faser verhindert wird, zeigt Abbildung 8.3(d). In beide Fällen bleibt die Verbundlänge konstant.

Entsprechend der gewählten Randbedingungen ergeben sich die in Abb. 8.4 dargestellten Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten.

Alle drei dargestellten Randbedingungen bewirken gleiche F - v -Abhängigkeiten, bis das Interface komplett abgelöst ist. Nur im Fall (pc) kann die Kraft F mit wachsender Verschiebung v stetig ansteigen, weil die Faser an der Stelle $x = 0$ festgehalten wird. Kann dagegen das Faserende rutschen ($s_f > 0$) und reduzieren sich Schubspannungen bei größer werdenden Schlupfwerten, dann sinkt die Faserkraft F . Durch die sich verkürzende Einbettungslänge L' im Fall (po) reduziert sich die Kraft F stärker als im Fall (pt).

8.2.2 Beschreibung des semi-analytischen Verbundmodells

Das entwickelte semi-analytischen Verbundmodell (**Mi-I-Modell**) beruht auf der analytischen Lösung der Verbunddifferentialgleichung mit konstanter Verbundbeziehung $\tau(s)$, vgl. Abschnitt 8.1.1 und 8.1.2. Die Grundidee liegt in der segmentweisen Betrachtung des Interface zwischen der Bewehrung und der Matrix. In jedem Segment (Bereich) des Interface sind die Normalspannungs-

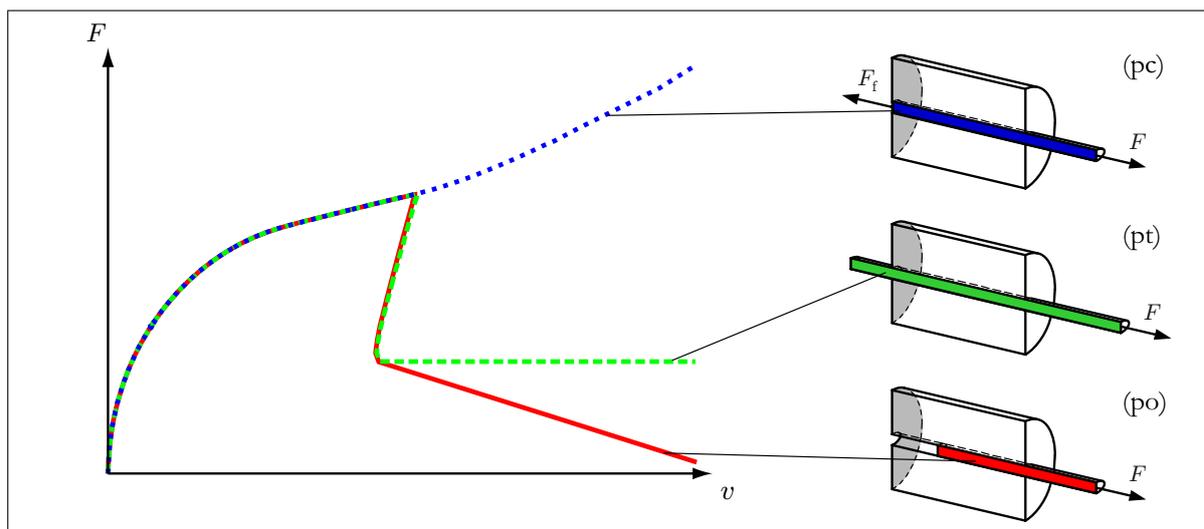


Abbildung 8.4: Auszug mit unterschiedlichen Randbedingungen, Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten

funktion $N(x)$ der Matrix und der Faser, die Verbundspannungsfunktion $\tau(x)$ und die Schlupffunktion $s(x)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte der Bereiche (s_0 und N_0) analytisch berechenbar, vgl. Abschnitt 8.1.2. Durch geeignete Wahl der Randbedingungen kann das untersuchte Faser-Matrix-Verbundproblem für die in Abbildung 8.4 dargestellten Auszugsarten numerisch gelöst werden. Hierzu ist kein Gleichungssystem zu lösen, wodurch sich im Vergleich zu Finite-Elemente-Modellen extrem kurze Rechenzeiten ergeben.

Basierend auf dem Schlupfwert s_0 und der Normalkraft N_0 am Bereichsanfang eines Segmentes wird die übertragbare Schubspannung $\tau(s_0)$ ermittelt. Der Schlupfwert s_1 und die Normalkraft N_1 an den Bereichsenden sind somit bestimmbar. Sie stellen die Anfangswerte des nächsten Segmentes dar. Das **Mi-I-Modell** simuliert demnach das sukzessive Ablösen der Faserbewehrung von der Matrix und das anschließende Auszugsverhalten der Faserbewehrung, vgl. Abschnitt 8.2.1. Die Schubspannungsverteilung im gesamten Interface wird durch die segmentweise konstante Approximation der Schubspannung mit einer Stufenfunktion beschrieben. Bei ausreichend feiner Unterteilung des Interface kann eine beliebig nichtlineare Schubspannungs-Schlupf-Beziehung $\tau(s)$ hinreichend genau abgebildet werden. Der Typ der Schubspannungs-Schlupf-Beziehung ist demnach nicht eingeschränkt, wodurch das **Mi-I-Modell** sich hervorragend zur Verbundgesetzidentifizierung eignet, vgl. Abschnitt 8.2.4.

Jedem Segment kann ein nichtlineares uniaxiales Materialgesetz für die Faser, die Matrix und das Interface zugewiesen werden. Dies erlaubt z. B. zusätzlich die Simulation von Reibung im Interface, welches für die Abbildung des zyklischen Materialverhaltens notwendig ist, vgl. Abschnitt 8.2.3 und 8.6.1.

8.2.3 Analyse des Auszugsverhaltens einer homogenen Bewehrung (Filament)

Im Folgenden soll der Lastübertragungsmechanismus infolge Reibung am Beispiel eines Auszugsversuches dargestellt werden.

In Abb. 8.5 ist die Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeit beim Auszugsversuch (Abb. 8.5(b)) einer homogenen Bewehrung dargestellt. Die Kraft F und die Verschiebung v entsprechen der Kraft bzw. der Verschiebung am gezogenen Ende der Faser ($x = L$). Da die Faser die gleiche Länge

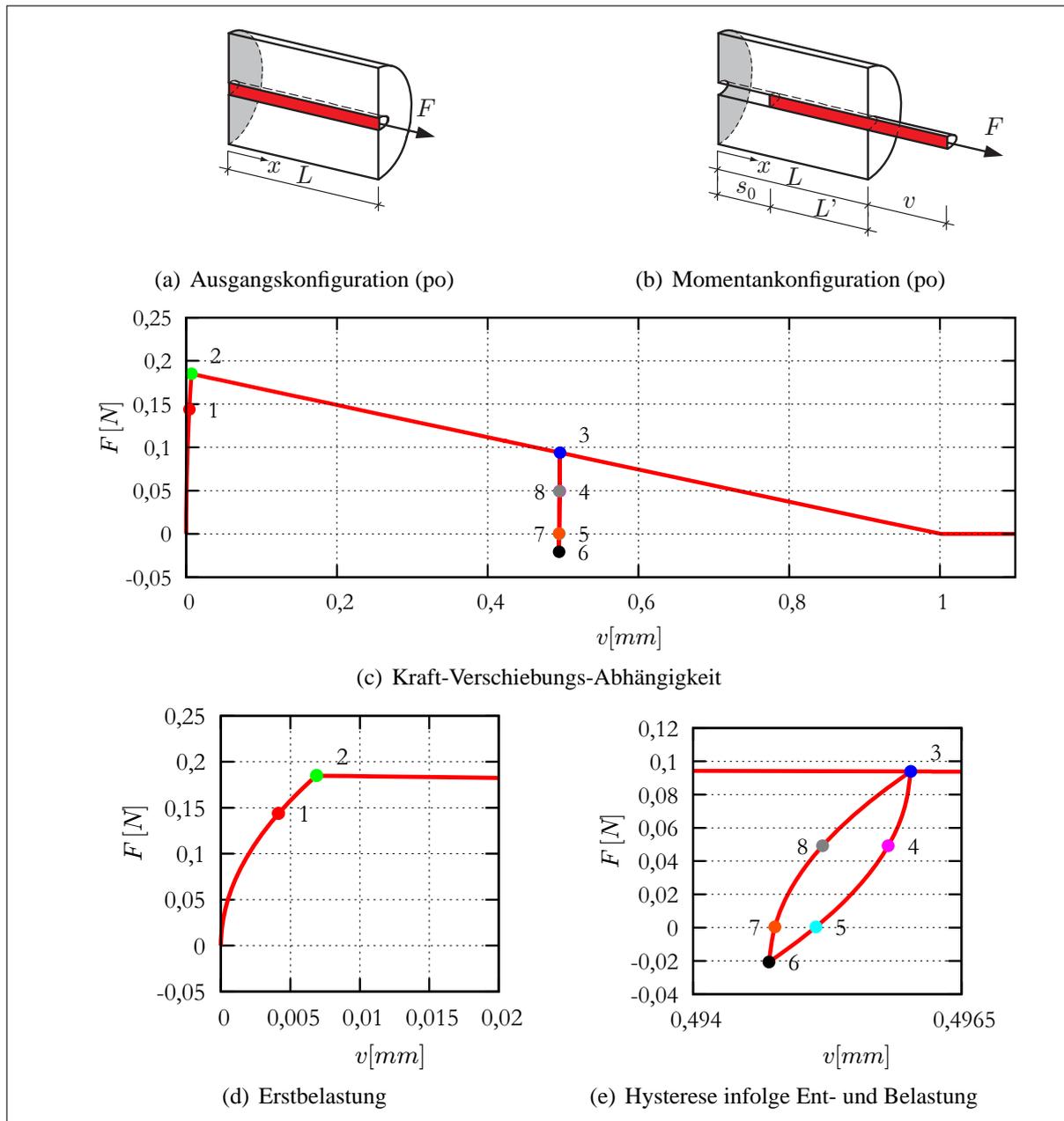


Abbildung 8.5: Auszug einer Faser mit $\tau(s) = \tau = \text{const.}$ pro Segment des Interface

wie der einbettende Grundkörper hat, ist der Schlupf $s(x = L)$ gleich der Verschiebung v bei Vernachlässigung der Matrixdehnung (Abb. 8.5(a)).

Die maximale Verbundspannung $\tau_c = |\tau(s)|$ wurde als konstant und abhängig von der Belastungsrichtung angenommen, um Reibung im Interface zu simulieren. Jeder Punkt im Interface verhält sich elasto-plastisch.

Infolge einer monotonen Belastung wurde die Faser bis zum Punkt 3 (Abb. 8.5 und 8.6) belastet, entlastet bis zum Punkt 6 und danach bis zum kompletten Herausziehen der Faser belastet ($s > L$). Die zugehörigen Beanspruchungszustände im Interface sind in Abb. 8.6 dargestellt.

Bis zum Punkt 2 wird das Interface komplett abgelöst, d. h., dass alle Materialpunkte im Interface haben ihre plastische Grenzspannung erreicht. Punkt 1 markiert den Belastungszustand, ab dem

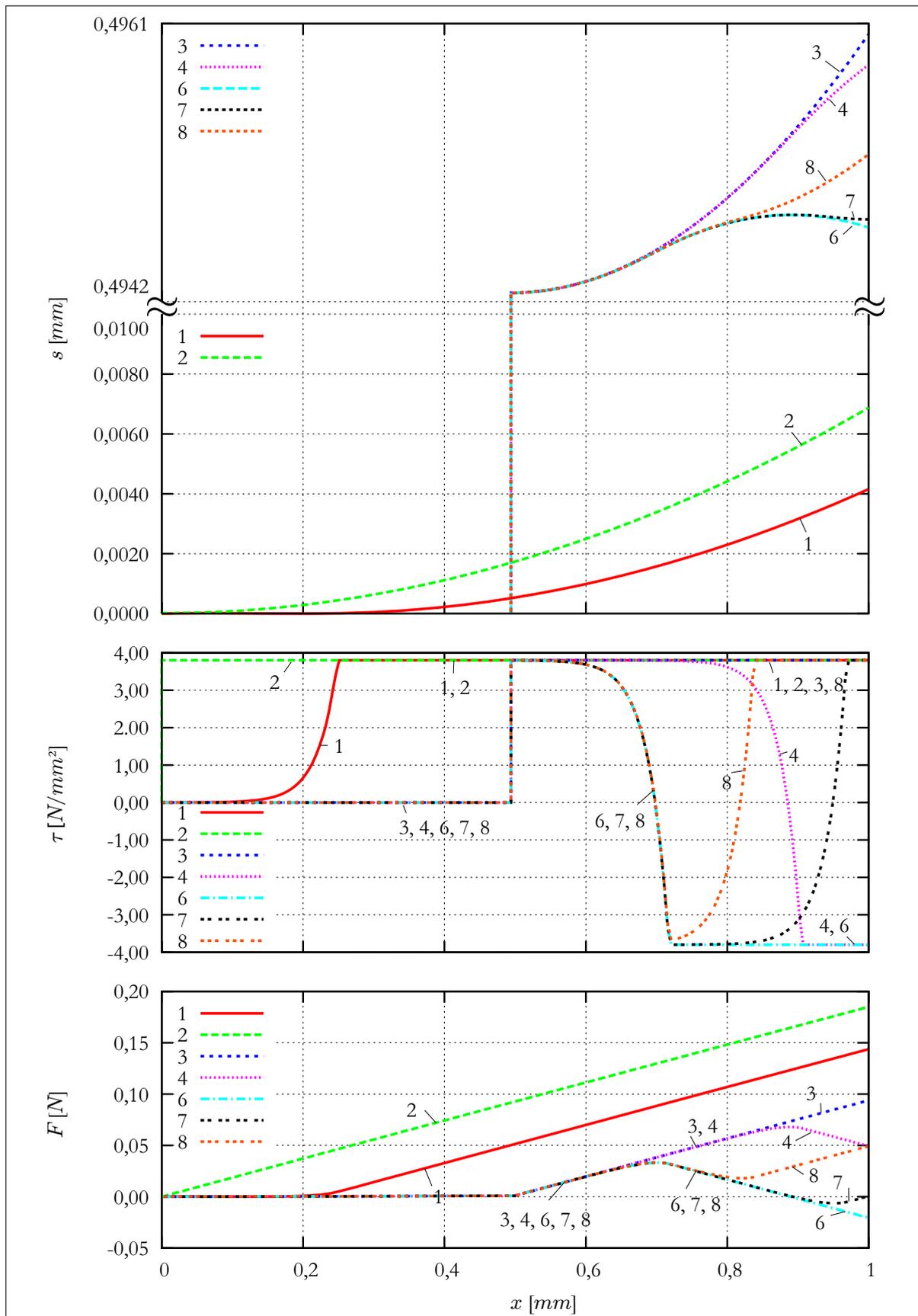


Abbildung 8.6: Beanspruchungszustände im Faser-Matrix-Interface

der Schlupf s an der Stelle $x = 0$ nicht mehr Null ist ($\tau(x = 0) \approx 0.0$). Ab hier verkürzt sich die zur Verfügung stehende Verbundlänge L' , aber ein Bereich im Interface ist noch im elastischen Verbund. Am Punkt 3 ist die Faser circa 50% herausgezogen. Infolge einer Belastungsumkehr bis zum Punkt 6 rutscht die Faser am belasteten Ende wieder zurück ($ds < 0$), verbunden mit einer Entspannung von Materialpunkten im Interface bzw. einer Schubspannungsumkehr. Die Verschiebung v und die Kraft F am belasteten Faserende reduzieren sich. Während am Punkt 4 die Kraft F noch größer Null ist, beschreibt Punkt 5 einen unbelasteten Zustand, bei welchem sich ein stabiler Eigenspannungszustand im Interface eingestellt hat. Der Endschlupf ist jedoch nicht Null ($s(x = L) > 0$) und somit sind inelastische Verformungen vorhanden. Eine Druckkraft am Faserende ist zum Erreichen des 6. Punktes notwendig. Wird diese Druckkraft auf $F = 0$ reduziert, stellt sich ein neuer unbelasteter Verformungszustand ein (Punkt 7). Entlang des Interfaces von $x = 0$ bis $x = L$ wechseln die Vorzeichen der Verbundspannung zweimal. Am Punkt 8 wird wieder das gleiche Kraftniveau wie am Punkt 4 erreicht, wobei jedoch der Schlupf $s(x = L)$ kleiner ist. Am Punkt 3 sind wieder alle Spannungen im Interface gleich der Grenzspannung τ_c . Bis zum vollständigen Herausziehen der Faser reduziert sich die Kraft F infolge der sich verkürzenden Verbundlänge L' .

Fazit

Das entwickelte schlupfbasierte Verbundmodell **Mi-I** ist in der Lage, einen kompletten Faserauszug inklusive Ent- und Wiederbelastungszyklen abzubilden. Für jeden Belastungszustand ist die Schlupffunktion $s(x)$, die Schubspannungsfunktion $\tau(x)$ und die Faserkraft $N_r(x)$ berechnet worden.

Mit einer Berechnungszeit von wenigen Sekunden auf einem Standard-PC ist dieses Verfahren erheblich schneller als eine vergleichbare Finite-Elemente-Simulation mit äquivalenter Diskretisierung des Interfaces. Das semi-analytische Verbundmodell **Mi-I** ist somit für Parameterstudien sehr gut geeignet.

Die segmentweise Betrachtung des Interfaces erlaubt auch eine einfache Implementation von unscharfen Modellparametern, vgl. [SICKERT 2005].

8.2.4 Simulation des Filamentauszugsversuches

Im Folgenden soll das entwickelte Simulationsmodell **Mi-I** auf einen Einzelfilamentauszug angewendet werden.

Hierbei handelt es sich um ein Glasfilament mit einem Durchmesser von $15,6 \mu m$, welches aus einem kleinen zylindrischen Körper erhärteten Zementleims herausgezogen wurde. Die Einbindelänge der Filamente betrug in den hier untersuchten Versuchen ca. $1 mm$. Durchgeführt wurde dieser extrem filigrane Auszugsversuch im SFB 528 [MÄDER et al. 2004]. Abbildungen 8.7(a) und 8.7(b) zeigen die gemessene und die berechnete Kraft-Verformungsabhängigkeit. Durch die sehr kurze Einbindelänge und infolge der nichtlinearen Schubspannungs-Schlupf-Abhängigkeit (Abb.8.7(c)) kommt es schon vor dem Erreichen der Maximallast zum vollständigen Ablösen des Filamentes entlang des Interfaces. Danach wird die Faser herausgezogen. Trotz einer nahezu konstanten Schubspannung im Interface reduziert sich die Auszugskraft entsprechend der restlichen Verbundlänge.

Bemerkenswert ist die qualitative Übereinstimmung der identifizierten Verbundbeziehung eines Glas-Beton-Interfaces (Abb. 8.7(c)) mit den von [NAAMAN & SHAH 1976] publizierten Verbundbeziehungen eines Stahlfaser-Beton-Interfaces (Abb. 8.7(d)). Eine glatte Glasfilamentoberfläche

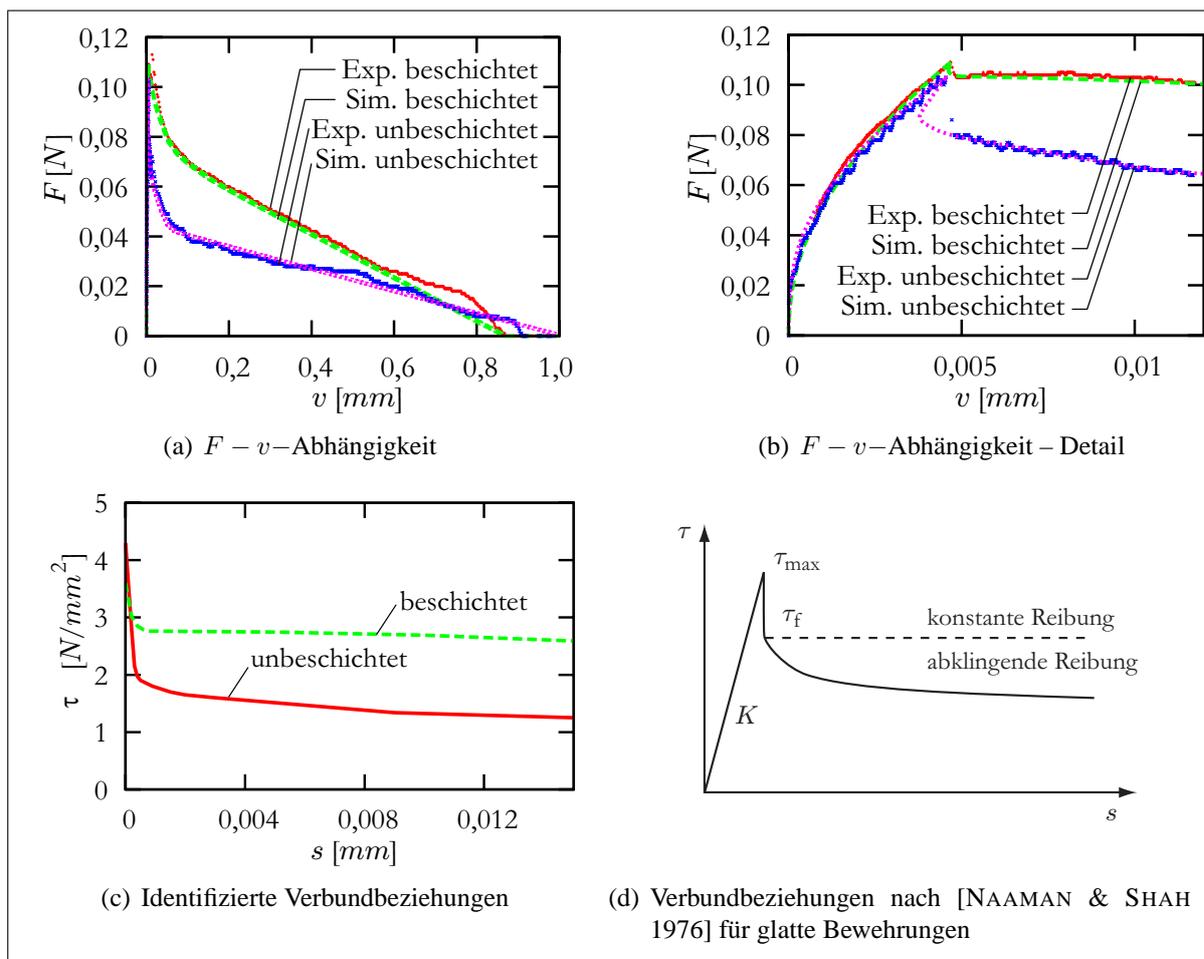


Abbildung 8.7: Simulation des Filamentauszugsversuches mit dem **Mi-I-Modell** – Vergleich Experiment-Simulation

hat demzufolge die gleiche Verbundcharakteristik wie eine glatte Stahlfaseroberfläche in einer zementgebundenen Matrix.

Fazit

Durch die segmentweise Betrachtung des Interfaces zwischen Filament und Matrix sind beliebige Schubspannung-Schlupf-Beziehungen $\tau(s)$ inklusive Be- und Entlastungszyklen abbildbar. Im Rahmen eines Optimierungsprozesses kann die Verbundbeziehung $\tau(s)$ mittels numerischer Simulationen von Filamentauszugsversuchen indirekt bestimmt werden. Dazu wird die simulierte Kraft-Verschiebungs-Beziehung $F_{\text{sim}}(v)$ mit der experimentell gewonnenen Kraft-Verschiebungs-Beziehung $F_{\text{exp}}(v)$ in Übereinstimmung gebracht und somit die Verbundbeziehung eindeutig identifiziert. Das entwickelte semi-analytische Verbundmodell, als Teil des **MMM-Prognosemodells**, ist durch seine numerische Effizienz sehr geeignet zur automatisierten und zuverlässigen Identifikation der Verbund-Parameter, basierend auf experimentell bestimmten Ergebnissen aus Auszugsversuchen.

8.3 Haftbrückenmodell

Anhand der Beobachtungen mit dem Rasterkraftmikroskop (ESEM) ([HEMPEL et al. 2005]) konnte u. a. der punktuelle Charakter des Verbundes zwischen den Filamenten des Rovings gezeigt werden (Abb. 8.8). Der diskrete Bereich, in dem ein Verbund zwischen zwei Filamenten besteht, wird

bei [SCHORN 2003] als Haftbrücke bezeichnet. Für das Tragverhalten des Rovings ist die Verteilung dieser Haftbrücken über den Querschnitt des Rovings von entscheidender Bedeutung. Da der Roving wie ein Filter für die Zementpartikel wirkt, kann davon ausgegangen werden, dass die Zahl der Haftbrücken zur Mitte des Rovings hin abnimmt (Abb. 8.8). Die Festigkeit der Haftbrücken selbst unterliegt einer statistischen Streuung.

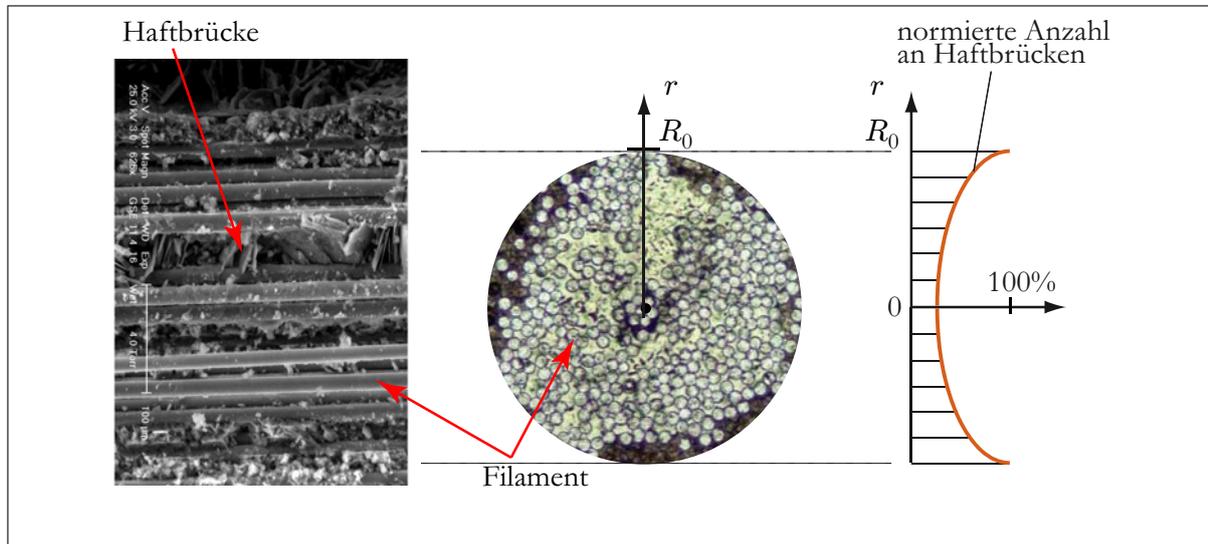


Abbildung 8.8: Mikroskopische Aufnahme eines Rovings im Längsschnitt [HEMPEL et al. 2005] und angenommene Haftbrückenverteilung im Roving

Die Imprägnierung/Beschichtung¹² des Rovings beeinflusst das Beanspruchungsprofil im Roving (Abb. 8.9). Je größer der Imprägnierungsgrad des Rovings desto gleichmäßiger ist das Spannungsprofil im Roving unter Zugbeanspruchung.

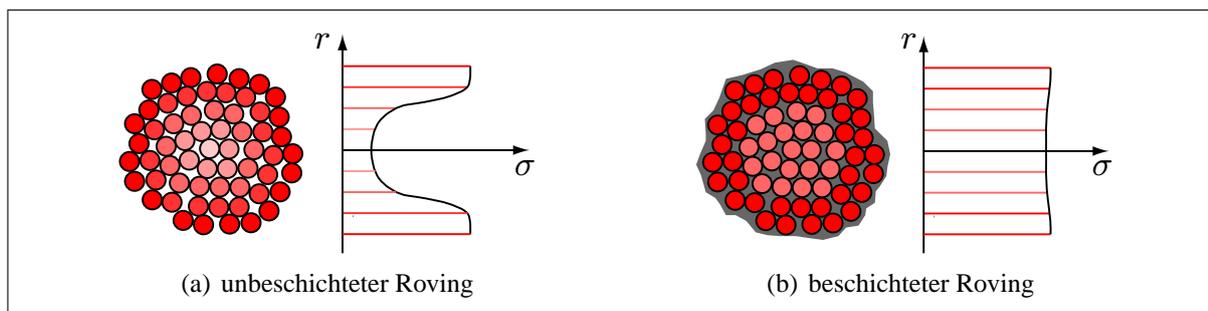


Abbildung 8.9: Spannungsprofil im unbeschichteten und beschichteten Roving

8.3.1 Diskontinuierliche Verbundbeschreibung

Neben der kontinuierlichen Verbundbeschreibung wurden auch diskontinuierliche Verbundmodelle (**Mi-FEM-Modelle**) untersucht. Der Roving wurde wieder durch verschiedene Schichten (Abb. 8.10(a)) bzw. Filamente (Abb. 8.12(a)) idealisiert. Verbundelemente mit elasto-plastischem Materialverhalten simulieren die Haftbrücken. Die Anzahl der Haftbrücken pro Interfacellänge ist für die dargestellte Simulation aus Abbildung 8.10(b) zu entnehmen.

¹² vgl. Glossar

Der numerische Aufwand zur Abbildung des Verbundverhaltens eines Rovings mit der Finiten-Elemente-Methode ist sehr hoch, sodass eine Integration der **Mi-FEM-Modelle** in eine simultane Multi-Skalen-Methode nicht zweckmäßig ist. Die Ergebnisse der Simulationen werden aber zur Entwicklung der **Mi-II-Modelle** genutzt.

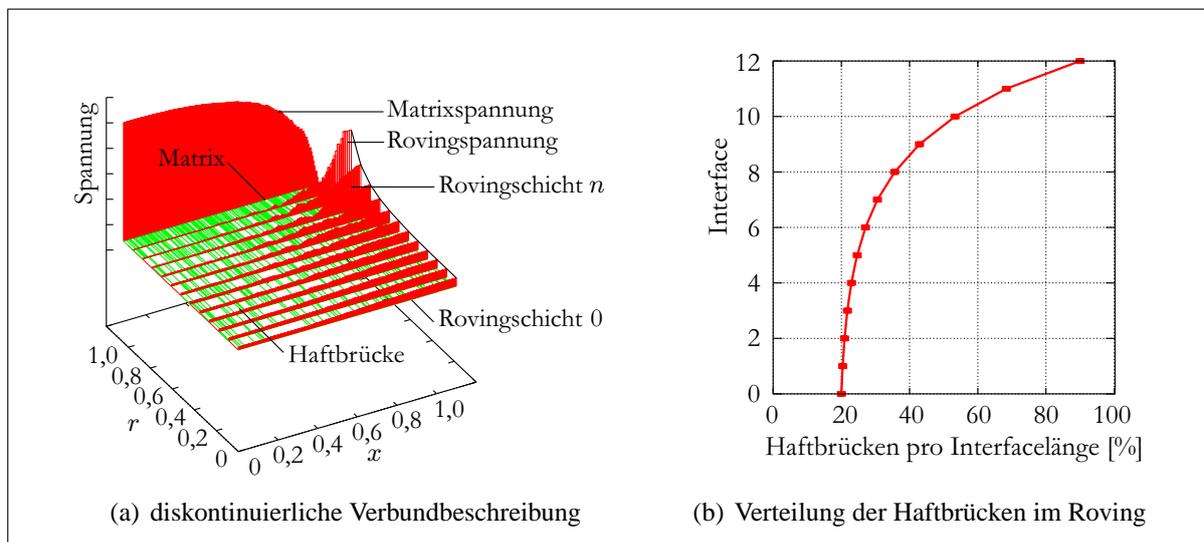


Abbildung 8.10: Haftbrückenmodell: Schichtenmodell mit diskontinuierlichem Verbund

8.3.2 Kontinuierliche Verbundbeschreibung

Zur Bestimmung der Tragmechanismen des Roving-Matrix-Systems wurden numerische Untersuchungen zu dem Verbundverhalten im Roving durchgeführt (**Mi-FEM-Modelle** und **Mi-I-Modell**). Dazu wurden Interfacemodelle entwickelt, die sowohl analytisch als auch numerisch gelöst wurden [ZASTRAU et al. 2001a, ZASTRAU et al. 2003]. Der Vorteil einer analytischen Beschreibung des Auszugsversuches liegt in der vollständig geschlossenen Lösung, die es erlaubt, auch die Spannungsverteilung entlang des Interface zwischen Faserbewehrung und Matrix anzugeben.

Will man verallgemeinerbare Erkenntnisse über die Lastübertragungsmechanismen innerhalb eines Rovings bzw. zwischen Roving und Matrix erhalten, ist es sinnvoll, soweit möglich, ein analytisch lösbares Modell zu formulieren. An einem analytischen Modell ist es sehr gut möglich, Parameterstudien durchzuführen und den Einfluss einzelner Materialparameter – wie z. B. Rovingquerschnittsfläche, Rovingumfang, maximal übertragbare Schubspannung in den jeweiligen Kontaktflächen oder übertragbare Reibspannung – auf das Tragverhalten zu untersuchen und diese Parameter anhand experimenteller Messkurven zu identifizieren. Bei einer Berechnung mit Hilfe der FEM sind die Möglichkeiten von Parameterstudien und Parameteridentifikation auf Grund des erhöhten numerischen Aufwandes wesentlich eingeschränkter. Jedoch erlauben Finite-Elemente-Modelle die Modellierung komplexer Verbundsituationen, welche analytisch nicht lösbar sind.

Das hier untersuchte **Mi-FEM-Modell** verwendet rotationssymmetrische Elemente für die Modellierung der Verbundbedingungen in einem Roving. Ähnliche Untersuchungen wurden auch von [KONRAD et al. 2003, HARTIG et al. 2007] durchgeführt, wobei sich die Finite-Elemente-Modelle in der Idealisierung des Rovings, der Wahl der Elementtypen und der Interfacemodelle unterscheiden.

Abbildung 8.11 zeigt einen runden Roving, der mit vier Schichten modelliert wurde. Punkt b stellt die Mitte zwischen zwei Rissen dar. Am Punkt a ist der Makroriss, an dem der Roving ausgezogen wird, d. h. der Roving den Riss überbrückt. Die Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit ist gekennzeichnet durch drei Bereiche. Phase 1 ist der ungeschädigte Zustand. Infolge der Zugbelastung kommt es zur Schädigung bzw. zum Versagen des Interfaces zwischen der Matrix und der äußeren Rovingschicht. Bei der dargestellten Konfiguration wurde eine lineare Abnahme der Verbundfestigkeiten über den Rovingquerschnitt angenommen, welche mittels einer Schubspannungs-Schlupf-Beziehung nach [SOH et al. 1999] modelliert wurde. Nachdem das Interface 4 komplett abgelöst ist, wird der Roving bis zum Zugversagen beansprucht. Die Interfaces 1 – 3 versagen in diesem Beispiel nicht.

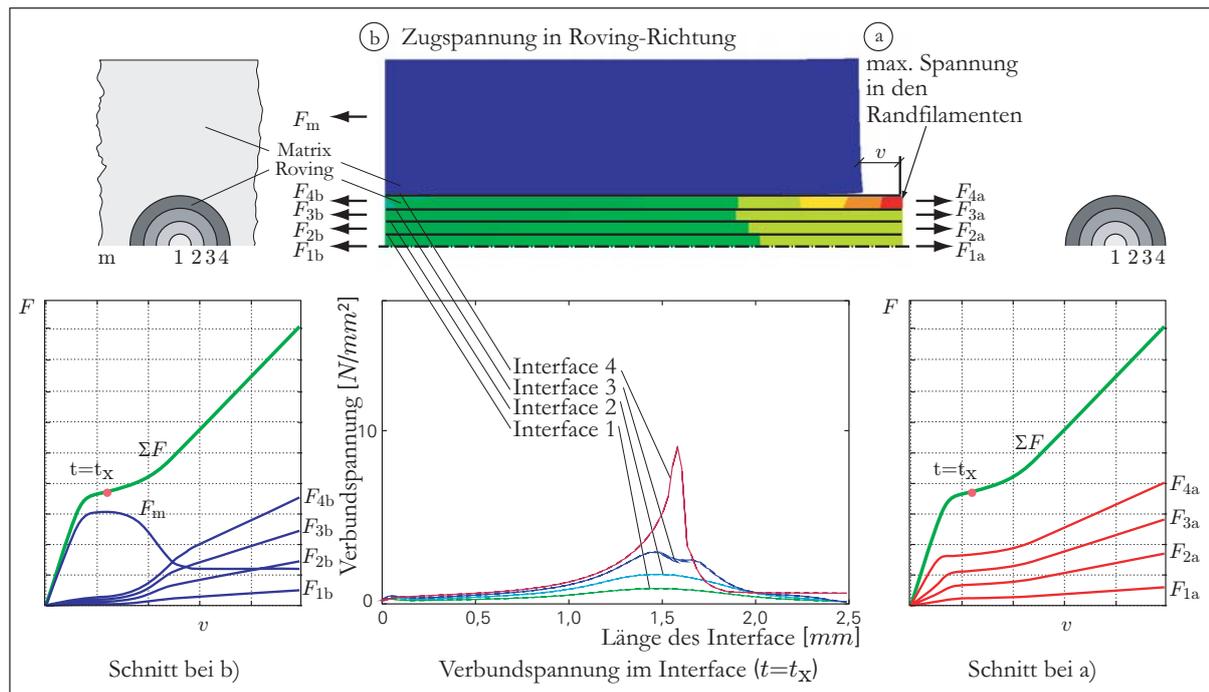


Abbildung 8.11: Haftbrückenmodell: kontinuierliche Verbundbeschreibung

Die durchgeführten numerischen Simulationen eines diskontinuierlichen Verbundes im Roving-Matrix-System mit abnehmender Anzahl an Haftbrücken in Richtung der Rovingmitte zeigen eine ungleichmäßige Beanspruchung der einzelnen Filamente im Roving. Dabei sind die Normalspannungen um so größer, je näher sich das Filament an der Matrix befindet. Die Kernfilamente sind weniger beansprucht als die Randfilamente, sodass die effektive Rovingfestigkeit $\beta_{z,rov}$ immer kleiner ist als die Filamentfestigkeit $\beta_{z,fil}$.

Fazit

Die Untersuchungen von Rovingmodellen mit mehreren Interfaces zwischen den Teilrovings zeigen auch die ungleichmäßige Beanspruchung im Roving. Bemerkenswert ist, dass schwächere Interfaces im Roving nicht versagen müssen. Um das effektive Rovingverhalten zu simulieren, ist das ungleichmäßige Spannungsprofil abzubilden.

Anhand dieser Erkenntnisse wird im Folgenden ein effizienteres Modell entwickelt, welches ein Ersatzmodell (**Me-I-Modell**) zu dem Finite-Elemente-Modell (**Mi-FEM-Modell**) darstellt. Ziel ist es außerdem, qualitative Aussagen über das Verhalten von teilgeschädigten Roving-Matrix-Systemen zu treffen.

8.4 Faserbündelmodelle

Faserbündelmodelle (FBM) werden seit Jahrzehnten zur Simulation des Tragverhaltens von Multifilamentgarnen (Abb. 8.12(a)) benutzt [BEYERLEIN & PHOENIX 1996, HIDALGO et al. 2001, LEPENIES et al. 2005, CURBACH et al. 2006, VORECHOVSKY & CHUDOBA 2006]. Grundlage bilden i. d. R. einfache mechanische Modelle, z. B. Parallelschaltungen von Stäben. Den Stäben werden probabilistisch verteilte Eigenschaften zugewiesen. Häufig werden extrem vereinfachte mechanische Modelle benutzt, z. B. werden die Lastumlagerungen im Faserbündel nach einem Filamentversagen durch Verteilung der Kraft im Filament auf die restlichen Filamente abgebildet. Unterschieden werden Modelle mit globaler sowie lokaler Lastumlagerung (Abb. 8.12(b)).

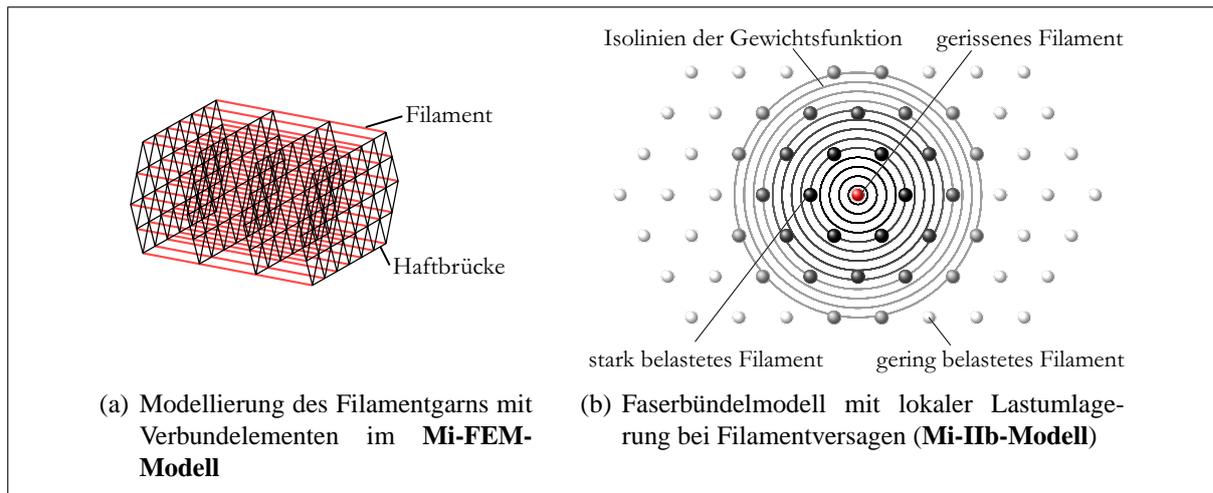


Abbildung 8.12: Faserbündelmodelle

8.4.1 Pfropfenmodell

Das Pfropfenmodell (**Mi-IIa-Modell**) idealisiert die reale, unscharfe Haftbrückenverteilung und das ungleichförmige Spannungsprofil des Haftbrückenmodells (Abb. 8.13(a)) in einem Ersatzmodell, welches den unterschiedlichen Verbund im Roving durch unterschiedlich freie Verformungslängen (Abb. 8.13(b)) abbildet, vgl. [LEPENIES et al. 2005]. Die Filamente sind abhängig von der Lage im Roving unterschiedlich weit rückverankert, wobei der Roving als Schichtenmodell aufgefasst wird (vgl. Abb. 5.10(b)). Die Länge des Pfropfs entspricht hier nicht der Summe aller Haftbrückenlängen.

Bei einer Zugbelastung des Roving-Matrix-Systems kommt es infolge der unterschiedlichen freien Längen $l_v(r)$ der Filamente im Roving zu einer stärkeren Beanspruchung der Randfilamente (Abb. 8.14). Die Spannungen σ_{fil} in den Filamenten lassen sich nach Gleichung (8.31) bestimmen, dabei steht E_{fil} für den Elastizitätsmodul der Filamente, v für die halbe Rissöffnung w ;

$$\sigma_{\text{fil}}(r) = E_{\text{fil}} \varepsilon_{\text{fil}} \quad (8.30)$$

$$\sigma_{\text{fil}}(r) = E_{\text{fil}} \frac{v}{l_v(r)}. \quad (8.31)$$

Versagen die Filamente infolge der Zugbeanspruchung (Abb. 8.14), so stellt sich die Frage, ob das Roving-Matrix-System spröde versagt oder ob es trotz der reduzierten Rovingquerschnittsfläche zu einer Laststeigerung kommen kann.

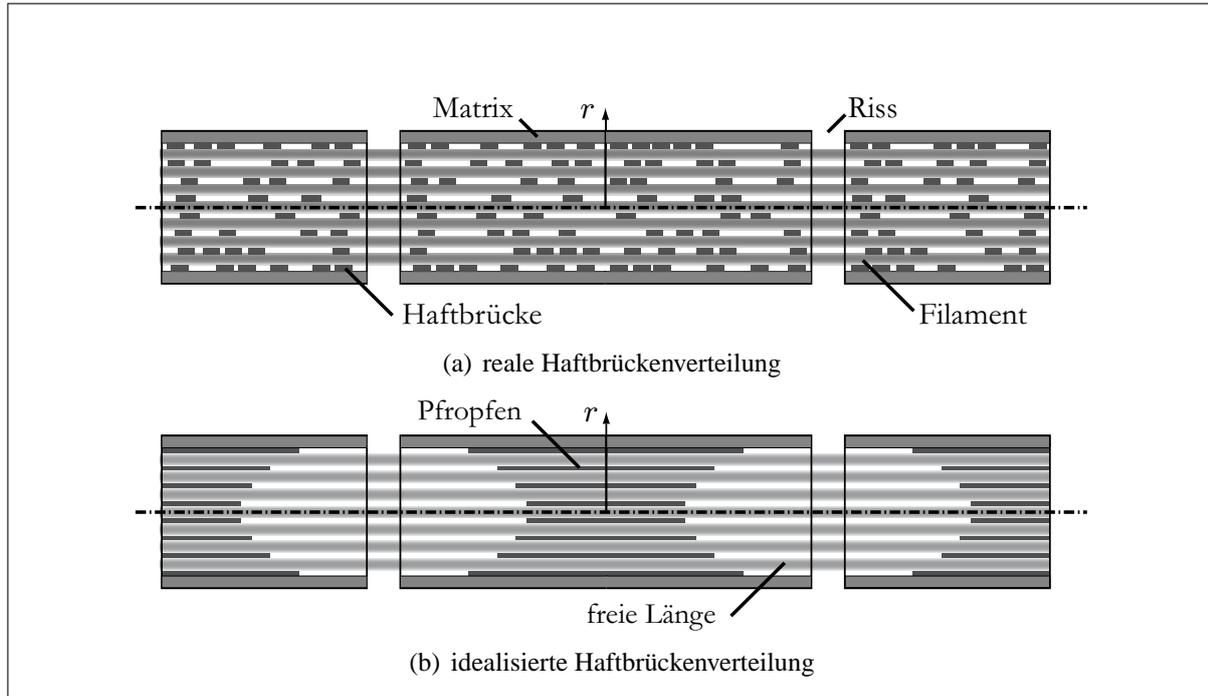


Abbildung 8.13: Haftbrückenverteilung im Roving

Zur Beantwortung dieser Fragestellung wurden unterschiedliche Verteilungen der freien Längen untersucht. Die freie Länge bis zur Rückverankerung des Filamentes nimmt vom Rand des Rovings zum Inneren hin unterschiedlich stark zu. Dabei wird die Verteilung der freien Längen exemplarisch mittels einer Parabelfunktion, einer linearen Funktion und einer Exponentialfunktion abgebildet (Abb. 8.14(d)). Die Gesamtkraft im Roving ergibt sich zu:

$$F(v) = \int \sigma(r) dA = \int_{r=0}^R E \frac{v}{l_v(r)} dA. \quad (8.32)$$

Für den Spezialfall eines Rovings mit Kreisquerschnitt und einer quadratischen Verteilung der freien Länge über den Radius folgt aus Gleichung (8.32)

$$F(v) = 2\pi E v \int_{r=0}^R \frac{r}{l_v(r)} dr \quad (8.33)$$

$$F(v) = 2\pi E v \int_{r=0}^R \frac{r}{l_{v,\max} - \frac{\Delta l_v}{R_0^2} r^2} dr \quad (8.34)$$

$$F(v) = v \frac{\pi R_0^2 E}{\Delta l_v} \ln \left(\frac{l_{\max}}{l_{\max} - \Delta l_v \left(\frac{R}{R_0} \right)^2} \right) \quad (8.35)$$

mit

$$dA = 2\pi r dr. \quad (8.36)$$

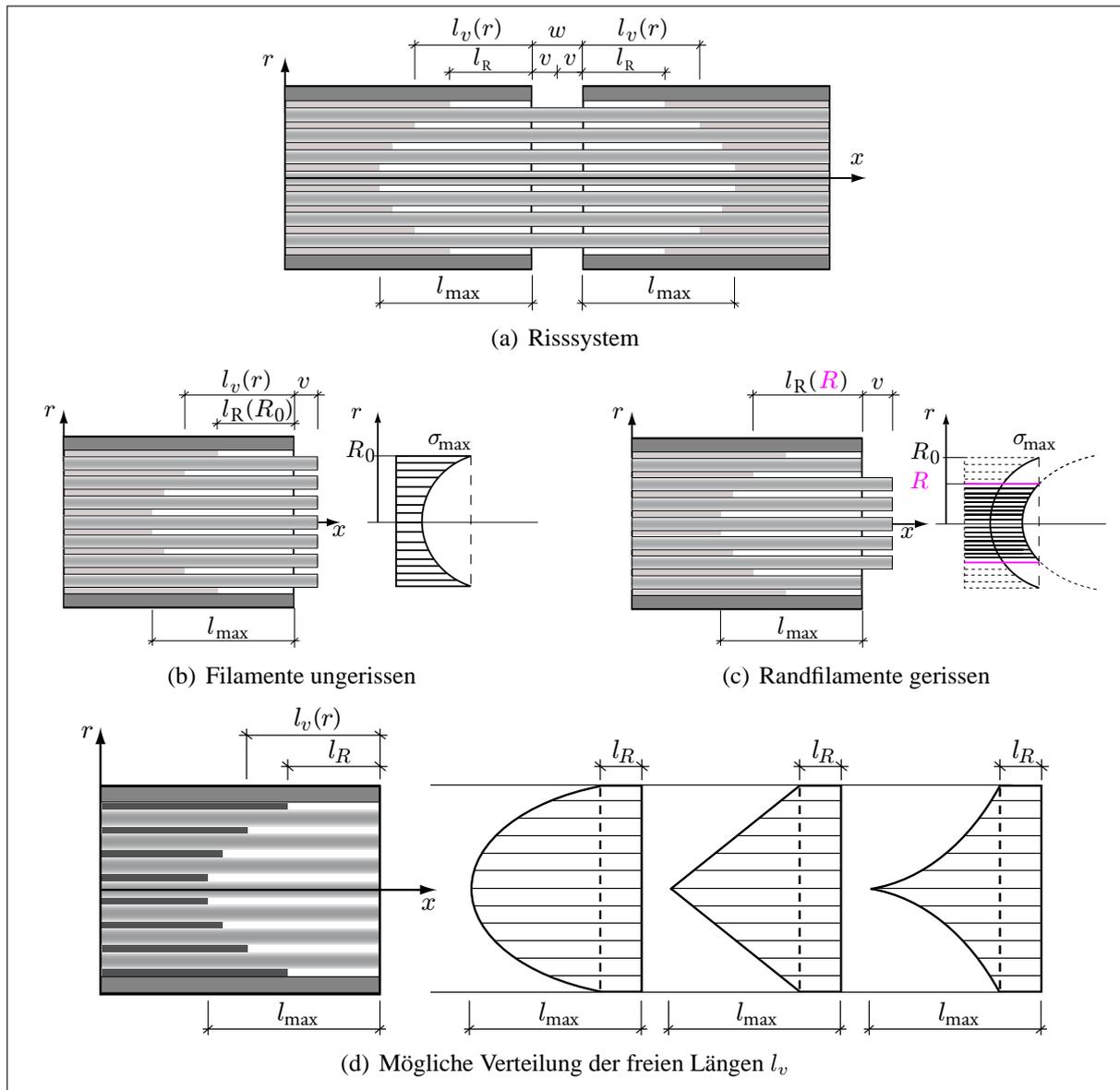


Abbildung 8.14: Spannungsverteilung im Roving

Durch die Einführung der Bruchdehnung ε_F für ein Filament kann mit

$$v(R) = \left(l_{\max} - \Delta l_v \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right) \varepsilon_F = l_R(R) \varepsilon_F \quad (8.37)$$

die Abhängigkeit zwischen der Rissöffnung v und dem wirksamen Teilroving mit dem Restradius R hergestellt werden. Die Rovingkraft F in Abhängigkeit von dem wirksamen Restradius R ergibt sich zu

$$F(R) = \pi E \frac{R_0^2}{\Delta l_v} \ln \left(\frac{l_{\max}}{l_R(R)} \right) l_R(R) \varepsilon_F. \quad (8.38)$$

Ob ein Roving-Matrix-System nach dem Reißen der Randfilamente eine Laststeigerung erfahren kann, wird für den Spezialfall eines runden Rovings mit quadratischer Verteilung der freien

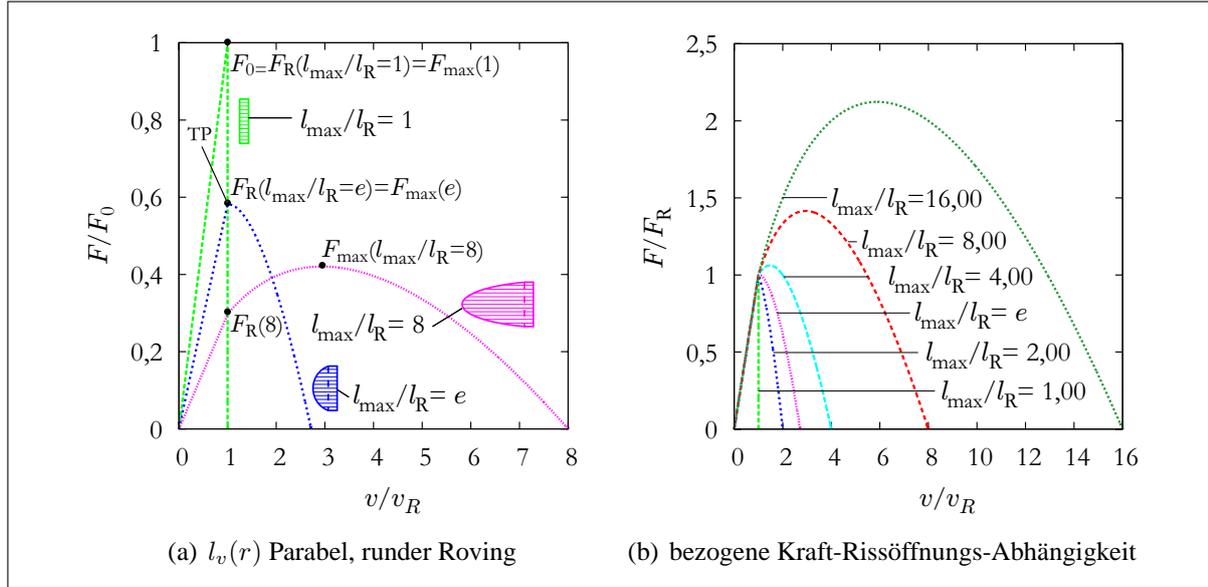


Abbildung 8.15: Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit

Länge in Abbildung 8.15(a) gezeigt. Solange $l_{\max}/l_R < e \approx 2,71828$ ist, kommt es zu keiner Laststeigerung nach dem Versagen der Randfilamente. Im Extremfall $l_{\max}/l_v = 1$ ist die maximale Bruchkraft F_0 des Faser-Matrix-Systems erreicht, d. h. alle Filamente des Rovings reißen bei einer kritischen Rissöffnung v_R . Für den Sonderfall, dass das Verhältnis $l_{\max}/l_v = e$ ist, tritt ein Übergang vom spröden zum quasi-duktilen Verhalten auf (Übergangspunkt TP). Nachdem die Randfilamente bei der Rissöffnung v_R versagen, kann der Riss sich weiter öffnen bis sukzessive alle Filamente gerissen sind. Im Falle $l_{\max}/l_v > e$ kommt es nach dem Reißen der Randfilamente bei einer Kraft F_R zu einer Laststeigerung. Die maximal aufnehmbare Kraft F_{\max} für das spezielle Verhältnis l_{\max}/l_v liegt jedoch immer unter der maximalen Bruchkraft F_0 (Abb. 8.15(a)). Um den wirksamen Radius R bei der maximalen Kraft F_{\max} zu berechnen, wurde Gleichung (8.38) nach R abgeleitet. Der optimale Radius R bei der Bruchkraft F_{\max} ergibt sich zu:

$$0 = \frac{\partial}{\partial R} F(R), \quad (8.39)$$

$$R_{\text{opt}} = \pm \frac{R_0^2}{e \Delta l_v} \sqrt{\left(\frac{\Delta l_v l_{\max}}{R_0^2} (e - 1) e \right)}, \quad (8.40)$$

mit

$$\Delta l_v = l_{\max} - l_R. \quad (8.41)$$

In Abbildung 8.15(b) ist die Rovingkraft F bezogen auf die Erstrisskraft F_R gegenüber der bezogenen Rissöffnung v/v_R dargestellt. Die ungleichmäßige Beanspruchung im Roving mit steigendem Verhältnis l_{\max}/l_v verringert effektiv die Kraft zum Reißen der Randfilamente bzw. die maximale Rovingkraft (Abb. 8.15(a)). In Tabelle 8.1 sind die notwendigen Verhältnisse l_{\max}/l_R angegeben, um quasi-duktilen Verhalten zu erreichen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass bei einer Verteilung der freien Länge l_v über eine Exponentialfunktion keine Laststeigerung nach Versagen der Randfilamente erfolgen kann (Abb. 8.14(d)).

Neben dem runden Rovingquerschnitt ist auch der Übergang zu einem rechteckigen Querschnitt untersucht worden (Tab. 8.1). Allgemein kann die Rovingkraft F als Integral der reziproken Ver-

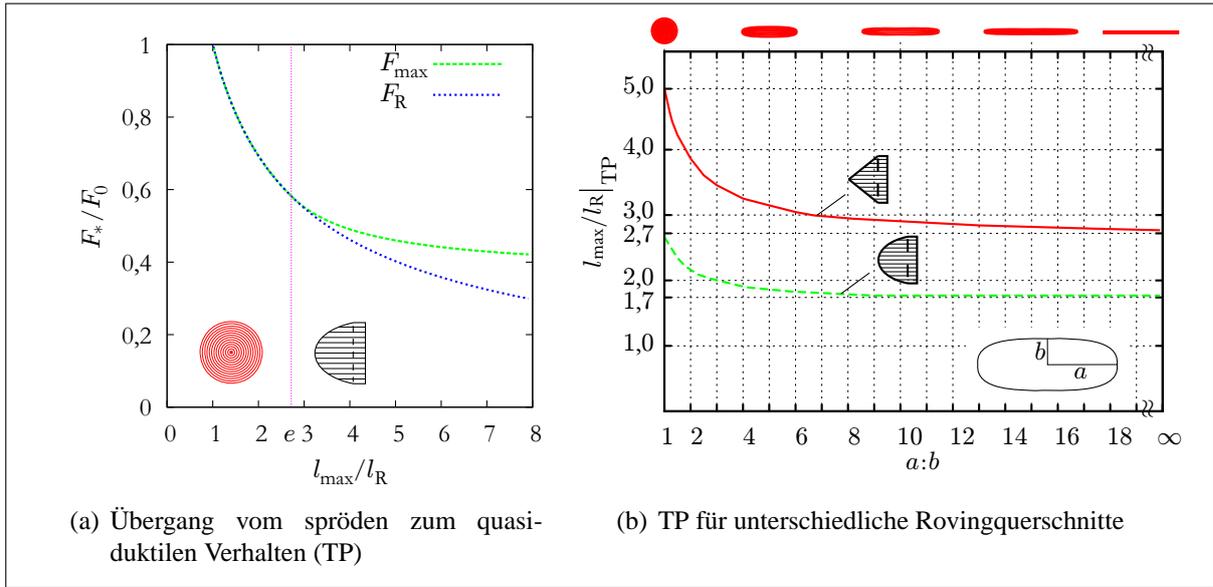


Abbildung 8.16: Qualitative Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit

	○		□	
	$g(r)$	$\frac{l_{\max}}{l_R}$	$g(r)$	$\frac{l_{\max}}{l_R}$
	$\frac{a}{r} - br$	2,71828	$a - br^2$	$\approx 1,72$
	$\frac{a}{r} - b$	$\approx 4,93$	$a - br$	2,71828
	$\frac{1}{r} e^{(a-r)}$	/	$e^{(a-r)}$	/

Tabelle 8.1: Übergangspunkte für quasi-duktilen Verhalten in Abhängigkeit vom Spannungsprofil im Roving

teilungsfunktion $g(r)$ formuliert werden:

$$F = c_i \int_0^{r(v)} \frac{dr}{g(r)}. \tag{8.42}$$

In Abbildung 8.16(a) ist der Übergangspunkt zum quasi-duktilen Verhalten für einen runden Roving mit parabolischer Verteilung der freien Längen l_v dargestellt. Abbildung 8.16(b) zeigt den

Übergangspunkt zum quasi-duktilen Verhalten für Rovings mit superelliptischem Querschnitt abhängig von dem Aspektverhältnis $a : b$.

8.4.2 Filamentbündelmodell

Für die Simulation des effektiven Rovingverhaltens wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Filamentbündelmodell (vgl. Abb. 5.10(e)) entwickelt, das jedes Filament im Roving einzeln abbilden kann (**Mi-IIb-Modell**). Ausgehend von der dichtesten Packung wird unter Berücksichtigung des Roving-Aspektverhältnisses und der Filamentanzahl ein Faserbündel generiert. Der Roving wird ringförmig erzeugt, um unterschiedliche Eigenschaften abhängig von der Imprägnierung des Rovings abbilden zu können.

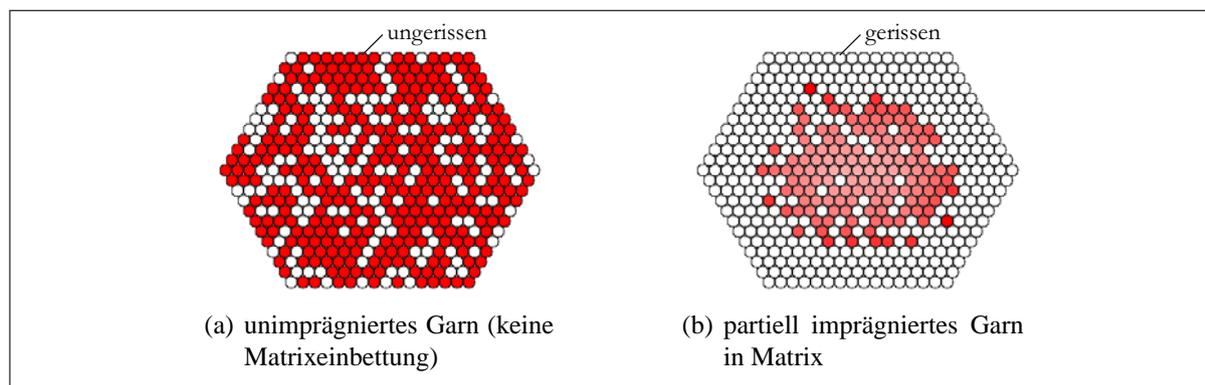


Abbildung 8.17: Versagen von Rovings mit und ohne Matrixeinbettung

Das Tragverhalten von Rovings hängt stark von der Art der Beanspruchung ab. In der textilen Prüfung wird das Garn ohne Matriximprägnierung untersucht. Die Dehnung der einzelnen Filamente im Garn kann als nahezu gleichmäßig verteilt über den Rovingquerschnitt angenommen werden (Abb. 8.17(a)). Basierend auf den von [ABDKADER 2004, CURBACH et al. 2006] bestimmten Filamentfestigkeitsverteilungen (Abb. 8.18(a)) kann die Streuung der Filamentfestigkeiten im Roving modelliert werden. Das graue Band kennzeichnet den Bereich der möglichen Kraft-Dehnungs- bzw. Schädigungs-Dehnungs-Abhängigkeiten infolge der Zufälligkeit der Festigkeitszuordnung zu jedem Filament.

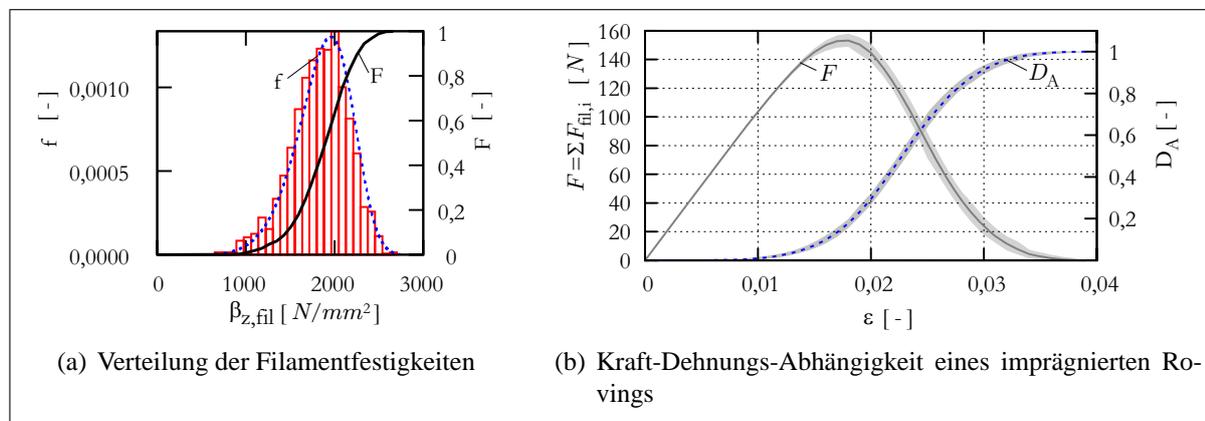


Abbildung 8.18: Berücksichtigung der streuenden Filamentfestigkeiten bei der Bestimmung des effektiven Rovingverhaltens

Als charakteristische Größen für dieses Simulationmodell sind Roving-Dehnungen bei der Maximalkraft $\varepsilon_{F_{\max}}$ und beim vollständigen Versagen ε_{\max} herangezogen worden (vgl. Abb. 8.20), welche durch Mittelwertbildung der Einzelfilamentdehnungen ermittelt werden. Beim Auszugsversuch des Rovings aus der Matrix sind infolge des Verbundes die Randfilamente des Rovings wesentlich stärker beansprucht als die Kernfilamente. Das Rovingversagen tritt von außen nach innen ein, nur einzelne Filamente mit hoher Festigkeit überleben in den Randbereichen des Rovings (Abb. 8.17(b)). Mit dem **Mi-IIIb** kann somit das effektive Rovingverhalten simuliert wer-

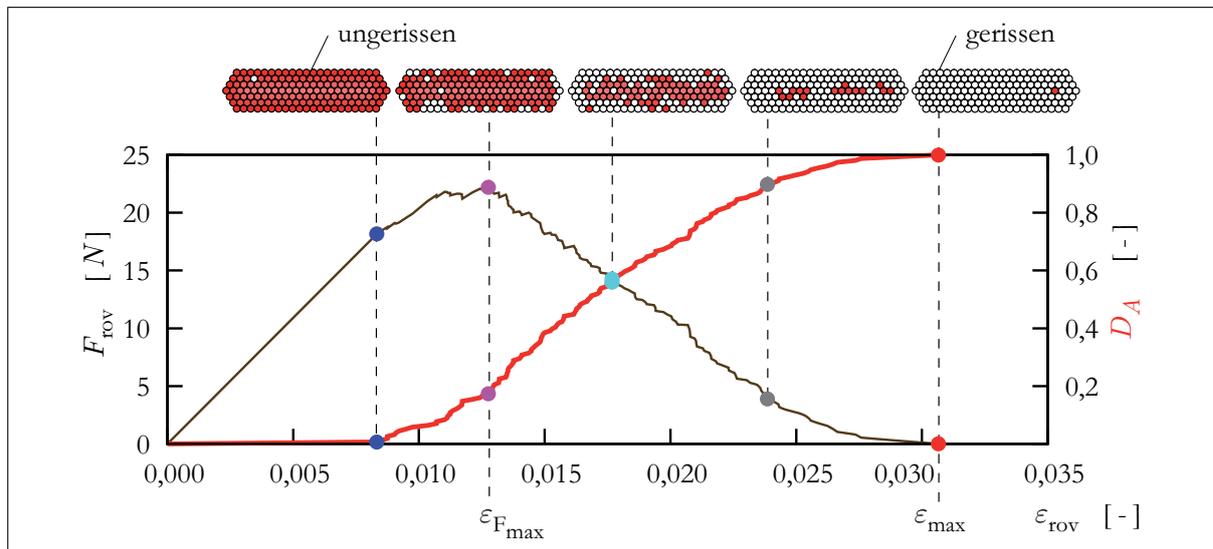


Abbildung 8.19: Simulierte Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit eines imprägnierten Rovings inkl. Schädigungsevolution infolge Filamentversagen

den (Abb. 8.18(b) und 8.19). Beispielhaft sei hier der Einfluss des Rovingquerschnittes auf die Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit des imprägnierten Rovings dargestellt (Abb. 8.20). Erkennbar ist

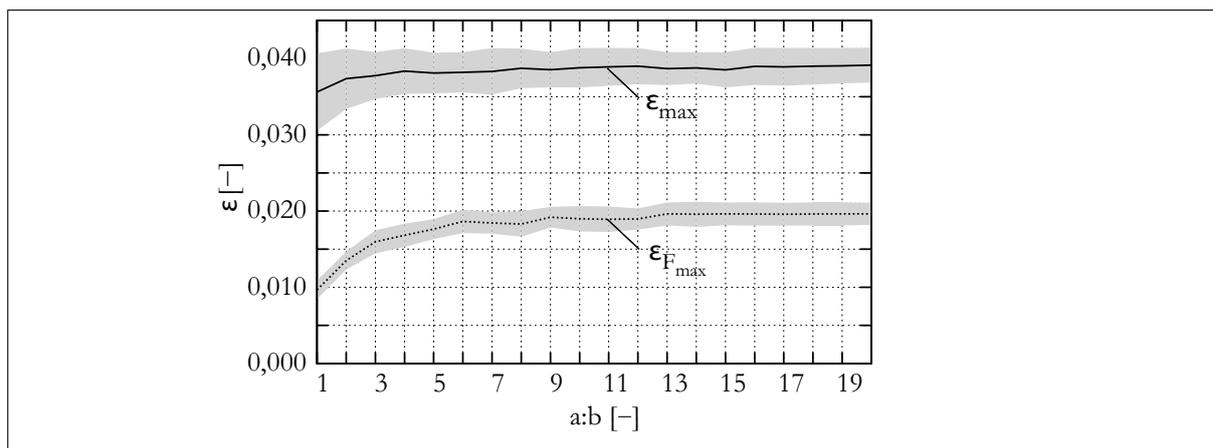


Abbildung 8.20: Werte und Streubereiche von $\varepsilon_{F_{\max}}$ und ε_{\max} der Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit eines imprägnierten Rovings in Abhängigkeit vom Rovingaspektverhältnis $a : b$

die Zunahme der maximalen Rovingdehnung ε_{\max} mit wachsendem Aspektverhältnis $a : b$ des Rovings. Der grau markierte Bereich in Abbildungen 8.18(b) und 8.20 kennzeichnet die Streuung der Grenzdehnung infolge der variierenden Filamentfestigkeiten im Roving (Abb. 8.18(a)). Die grauen Bänder kennzeichnen wieder den Bereich der möglichen Funktionsverläufe infolge der Zu-

fälligkeit der Festigkeitszuordnung im Roving. Den maximalen Wert für die Dehnung ε_{\max} ergibt sich, wenn sich zufällig die Filamente mit der höchsten Festigkeit im Kern des Rovings befinden.

8.5 Erweitertes semi-analytisches Verbundmodell

8.5.1 Charakterisierung des Auszugsversuchs von Rovings

Einseitige Rovingauszugsversuche analog zu den Filamentauszugsversuchen (Abschnitt 8.2.4) sind auf Grund der komplizierten Rovinglagerung am gezogenen Rovingende experimentell schwer realisierbar. Im Rahmen des Sonderforschungsbereiches (SFB) 532 in Aachen wurde durch das Einbetten des Rovings in einen Epoxidharzblock versucht, eine möglichst gleichmäßige Einspannung zu realisieren. Um diese Probleme zu vermeiden, wurde im SFB 528 in Dresden [WEISE et al. 2001, BUTLER et al. 2004, HEMPEL et al. 2005] alternativ ein zweiseitiger Auszugsversuch durchgeführt. Abbildung 8.21 zeigt schematisch den Probekörper mit einer Kerbe in Probenmitte, welcher die Sollbruchstelle markiert.

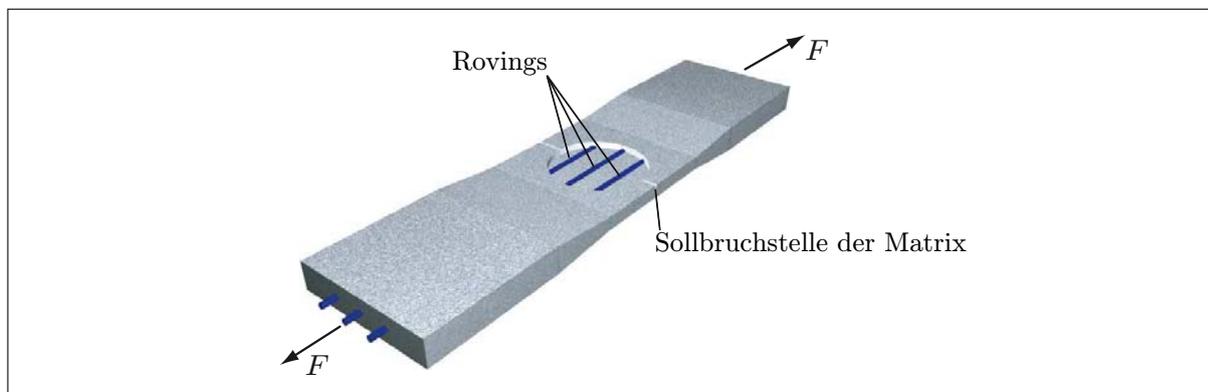


Abbildung 8.21: Probekörper für den doppelseitigen Auszugsversuch

Die i. d. R. 200 mm langen Probekörper sind jeweils mit einem, drei bzw. sechs Rovings deutlich unterbewehrt, um jeweils nur einen Riss in der Matrix zu erreichen. Im Unterschied zu einseitigen Auszugsversuchen kann bei doppelseitigen Auszugsversuchen der Beton bei kleinen Rissbreiten durch die Verzahnung der Rissflächen Kräfte übertragen (s. Abschnitt 2.4).

Abbildung 8.22 zeigt exemplarisch die Kraft-Rissöffnungs-Beziehung für den doppelseitigen Auszugsversuch eines Rovings mit der Feinheit $Tt = 310\text{ tex}$. Die experimentellen Daten wurden im Teilprojekt A2 des Sonderforschungsbereiches 528 [BUTLER et al. 2004] ermittelt.

Zusätzlich zu der Kraft F und der Rissöffnung w wurden von [BUTLER et al. 2004] auch die akustischen Signale des Probekörpers mittels eines Mikrophons aufgezeichnet. Die Signale der gefilterten akustischen Messung geben einen Hinweis auf das sukzessive Versagen der Filamente im Roving. Wird jedes akustische Signal P_i als Versagen eines Filamentes im Roving angenommen, erlaubt dies die Formulierung einer Schädigung D_A für den Rovingquerschnitt in Abhängigkeit von der Rissöffnung w

$$D_A(w) = \frac{\sum_i P_i(w)}{n_{\text{Filamente}}} \quad (8.43)$$

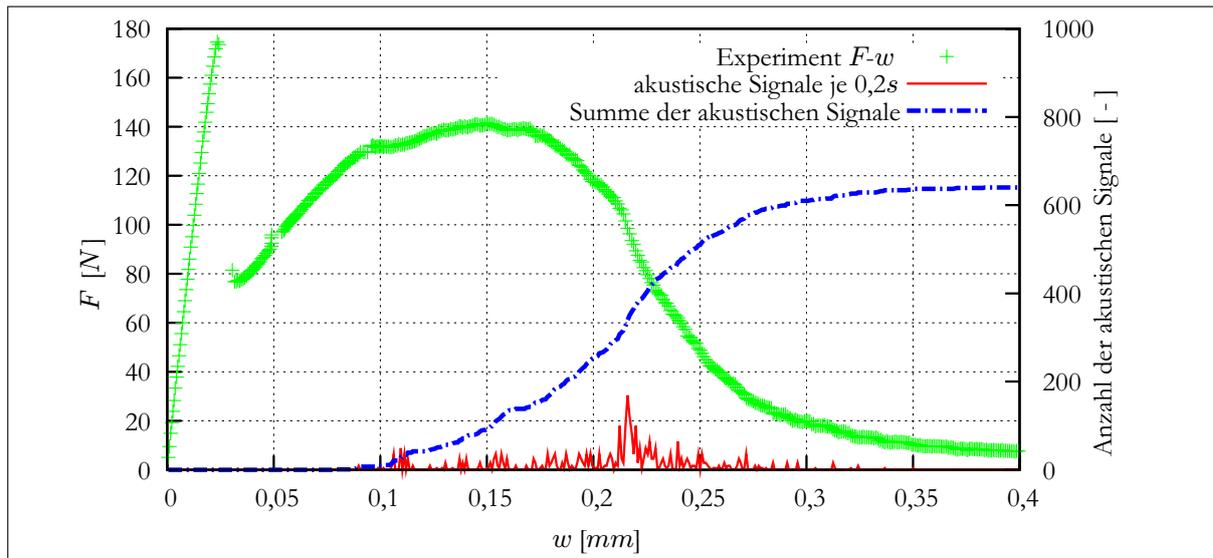
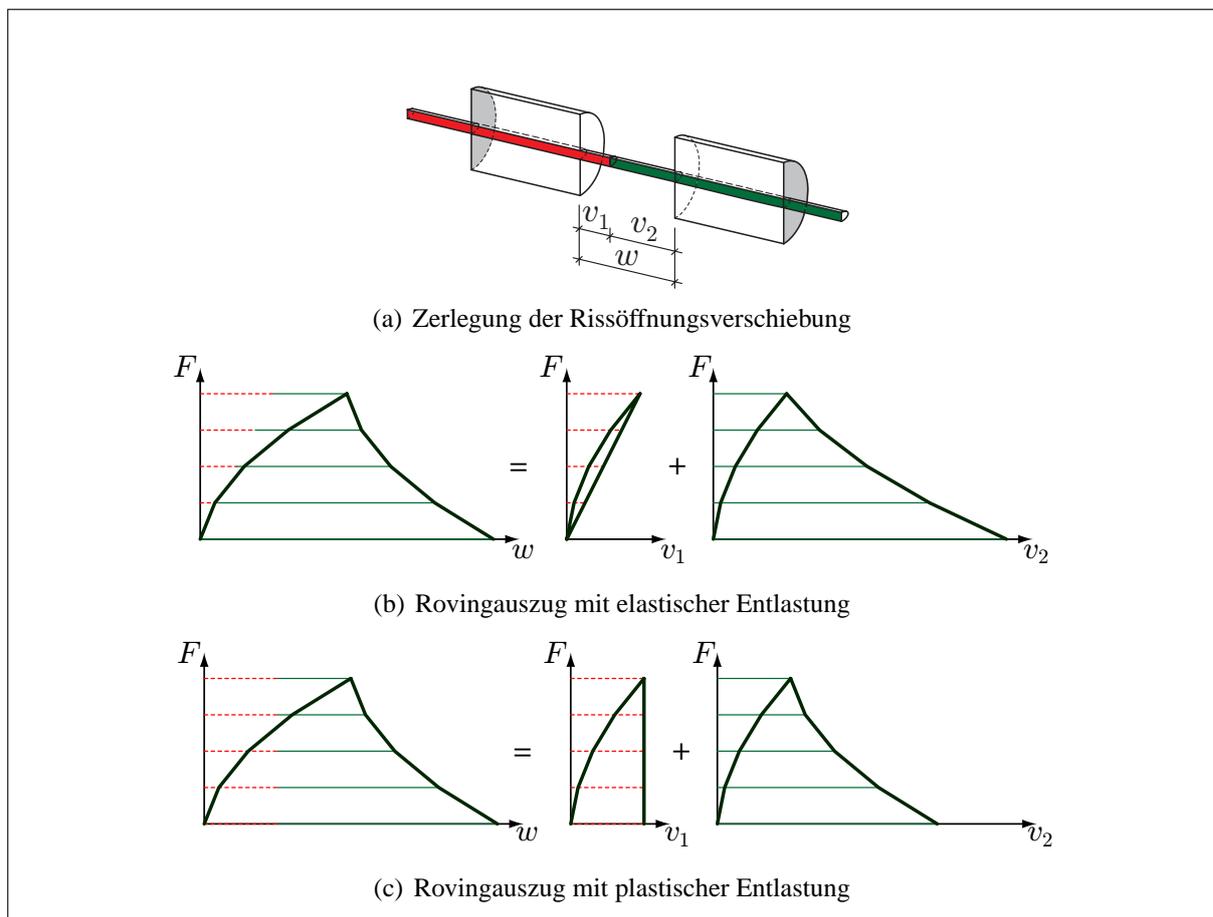
Abbildung 8.22: Kraft-Rissöffnungs-Abhängigkeit (1 Roving ($Tt = 310 \text{ tex}$))

Abbildung 8.23: Zerlegung der Kraft-Rissöffnungs-Kurve

Nach der Erstrissbildung wird der Roving aus der linken und rechten Probenhälfte synchron – bis zum Erreichen der Maximallast F_{\max} – ausgezogen. Danach verhalten sich die linke und die rechte Probenhälfte unterschiedlich. Während der Roving aus einer Probenhälfte ausgezogen wird, kommt es in der anderen Probenhälfte zu einer Entlastung. Die gemessenen Rissöffnungen w set-

zen sich aus den Auszugsverschiebungen v_1 und v_2 zusammen, es gilt

$$w = v_1 + v_2 . \quad (8.44)$$

Nur bis zum Erreichen der Maximallast F_{\max} gilt $v_1 = v_2$. Die Annahmen eines vollständig plastischen bzw. elastischen Auszugsverhaltens bilden die Schranken für die real zu erwartende Kraft-Verformungs-Abhängigkeit (vgl. Abb. 8.23). Hierbei wird angenommen, dass im Falle ideal plastischen Verhaltens kein Zurückrutschen des Rovings in der entlasteten Probenhälfte möglich ist. Der ideal elastische Verbund erlaubt ein Zurückrutschen des Rovings in seine Ausgangskonfiguration ($F(t = t_0) = 0$). Für den hier untersuchten Auszugsversuch ergibt sich die Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeit nach Abb. 8.24 mit den zugehörigen experimentell ermittelten Schädigungsfunktionen $D_A(v_{el})$ und $D_A(v_{pl})$.

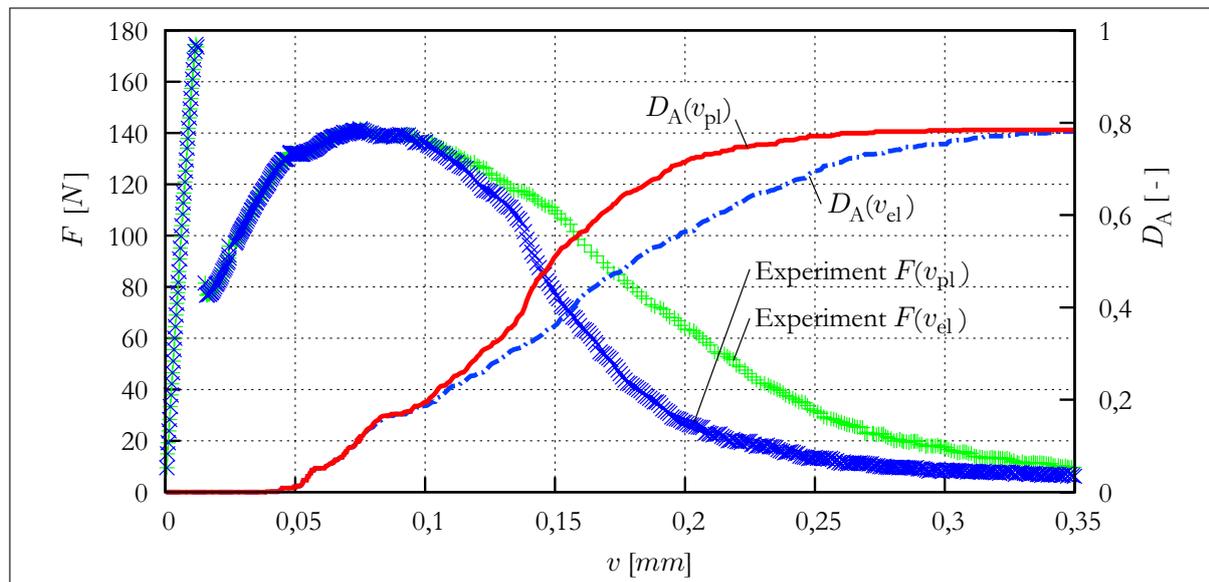


Abbildung 8.24: F - v -Abhängigkeiten für elastische und plastische Entlastung

8.5.2 Simulation des Auszugsversuchs von Rovings

Das erweiterte semi-analytische Verbundmodell (**Me-I-Modell**) berücksichtigt beliebig ungleichmäßige Spannungsprofile über den Rovingquerschnitt (Abb. 7.4). Der Roving selbst kann schichtweise versagen, wobei das sukzessive Versagen von außen nach innen erfolgt. Die wirksame Querschnittsfläche steuert entsprechend der gewählten Aspektverhältnisse der superelliptischen Rovingquerschnitte den wirksamen Umfang. Das Rovingmodell ist modular implementiert, sodass beliebige Faserbündelmodelle (vgl. Abschnitt 8.4) eingebunden werden können.

Für die numerische Simulation wurde ein Roving mit einer superelliptischen Querschnittsform angenommen. Bei dieser Art des Auszuges eines Rovings aus einer Probenhälfte handelt es sich um einen Rovingdurchzugsversuch (vgl. Abschnitt 8.3), da die Länge des Rovings die Länge des Probekörpers übersteigt.

Infolge der zunehmenden Beanspruchung des Rovings mit wachsender Rissöffnung versagen die einzelnen Filamente des Rovings, der Roving wird geschädigt. Die Schädigung D_A zur Bestimmung der wirksamen Rovingquerschnittsfläche $A_{rov}(D_A)$ und der sich daraus ergebende

wirksame Rovingumfang $u_{\text{rov}}(D_A)$ bewirkt eine deutliche Überschätzung der rissüberbrückenden Kraft F . In dem hier verwendeten Modell reduziert die Schädigung D_A die Rovinggeometrie ($A_{\text{rov}}(D_A)$, $u_{\text{rov}}(D_A)$) über die komplette Einbindelänge L des Rovings. Die effektive Rovingquerschnittsfläche A_{rov} ergibt sich zu

$$A_{\text{rov}}(D_A) = (1 - D_A) A_{0,\text{tex}}, \quad (8.45)$$

wobei $A_{0,\text{tex}}$ die Summe aller Filamentquerschnittsflächen A_{fil} des Rovings ist.

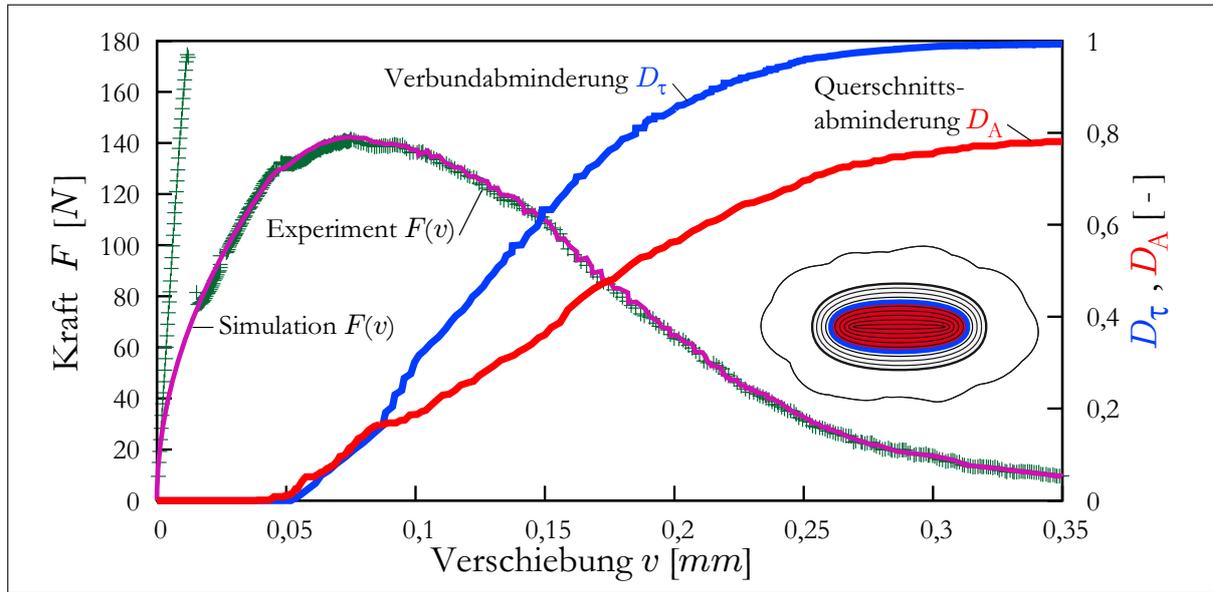


Abbildung 8.25: Vergleich Experiment - Simulation

Abbildung 8.25 zeigt die Simulation des Rovingauszugsversuches für den Fall der elastischen Entlastung. Der Vergleich der Simulation mit den Versuchsergebnissen kann in Übereinstimmung gebracht werden, wenn zusätzlich eine Schädigung D_τ für den Verbund bestimmt wird

$$u'_{\text{rov}}(D_A, D_\tau) = (1 - D_\tau) u_{\text{rov}}(D_A) \quad . \quad (8.46)$$

Alle anderen Parameter des Modells entsprechen denen des Filamentauszugsversuches. Die zusätzlich ermittelte Schädigung D_τ reduziert die übertragbare Schubspannung $\tau(s)$ bzw. den wirksamen Rovingumfang u'_{rov} in den abgelösten Bereichen des Interfaces ($L_{\text{debonding}}$). Infolge des sukzessiven Reißens der Randfilamente mit wachsender Rissbreite wächst der Bereich im Roving, der sich der Rissüberbrückung entzieht. Diese Schicht an gerissenen Filamenten zwischen Matrix und Rovingkern ist verantwortlich für die reduzierte Schubspannungsübertragung. Im Rahmen des verwendeten *effektiven Roving-Modells (Mi-IIb-Modell)* wird dieser Effekt mit der Schädigung D_τ berücksichtigt.

Die mit Hilfe der Auszugsversuchssimulationen und der experimentell ermittelten Schädigungsfunktion $D_A(v)$ kann die Abminderung der Verbundfestigkeit im Roving $D_\tau(v)$ bestimmt werden. Diese Schädigungsfunktionen werden für die Simulation der Dehnkörperversuche verwendet (vgl. Abschnitt 9.1).

Wenn keine experimentellen Daten bezüglich der Rovingschädigung D_A vorliegen, wird alternativ eine Gesamtschädigungsfunktion D_{rov} ermittelt. Es gilt:

$$A_{\text{rov}} = (1 - D_{\text{rov}}) A_{0,\text{tex}}, \quad (8.47)$$

$$u_{\text{rov}} = (1 - D_{\text{rov}}) u_{0,\text{tex}} \quad . \quad (8.48)$$

Die Schädigungsvariable $D_{\text{rov}}(v)$ kann auch hier als Funktion der Maximaldehnung κ des Rovings in Rissmitte verstanden werden

$$\kappa = \max(\varepsilon). \quad (8.49)$$

Abbildung 8.26 zeigt die Simulation des Auszugsverhaltens eines Rovings mit der Feinheit $Tt = 620 \text{ tex}$. Durch die Rovingeinbindelänge von 100 mm war erst bei einer Auszugsverschie-

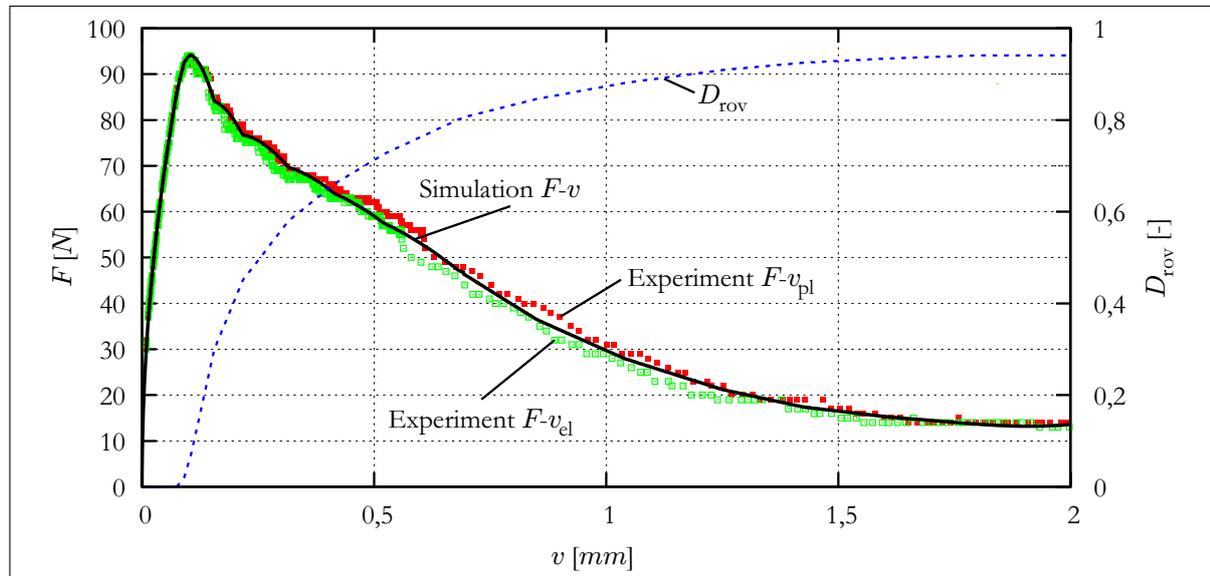


Abbildung 8.26: Doppelseitiger Auszugsversuch (1 Roving - $Tt = 620 \text{ tex}$)

bung von $1,03 \text{ mm}$ das Interface komplett abgelöst. Bezüglich der Aussagekraft der Ergebnisse ist anzumerken, dass die Messergebnisse einer merklichen Streuung unterliegen. Beispielhaft sei hier die Unschärfe der Maximalkraft während des Auszuges in Abbildung 8.27(a) angegeben, wobei i. d. R. 8 Versuche pro Rovingfeinheit ausgewertet wurden. Die Varianz der Maximallast wächst mit größer werdendem Rovingquerschnitt.

Die Nachrechnung der Versuche erweist sich in Hinblick auf die Wahl der Schubspannung τ bzw. des Rovingumfangs u_{rov} als schwierig. In der Regel lässt sich für jeden einzelnen doppelseitigen Auszugsversuch mindestens ein Parametersatz finden, welcher eine übereinstimmende Kraft-Verformungs-Kurve von Simulation und Experiment ergibt. Der maßgebliche Parameter ist das Produkt $\tau u_{\text{rov}} = \text{const}$. Berechnet man u_{rov} anhand der aus den Dünnschliffbildern [JESSE 2004] gewonnenen Aspektverhältnissen der Roving-Querschnitte, lässt sich die Schubspannung τ ermitteln, vgl. Abb. 8.28 und 8.27(b).

Versuchsnachrechnungen der doppelseitigen Auszugsversuche ergaben für unterschiedliche Garnfeinheiten die Änderung der Verbundqualität im Inneren der Rovings. Abbildung 8.29 zeigt die relative Abminderung der Verbundspannung (τ/τ_{max}) in Abhängigkeit von der Tiefe r' .

Untersucht wurde die Abminderung der Verbundbeziehungen für unbehandelte¹³ Rovings. Bei kleinen Garnfeinheiten (155 tex , 310 tex) ist eine größere relative Abnahme der Verbundqualität im Roving festzustellen als bei größeren Garnfeinheiten (1100 tex , 2600 tex). Dies ist mit den unterschiedlichen Filamentdurchmessern der betrachteten Rovings erklärbar, da dünnere Filamente

¹³ Keine vorbehandelten Rovings, wie z. B. zementimprägnierte Rovings bzw. nachträglich beschichtete Rovings.

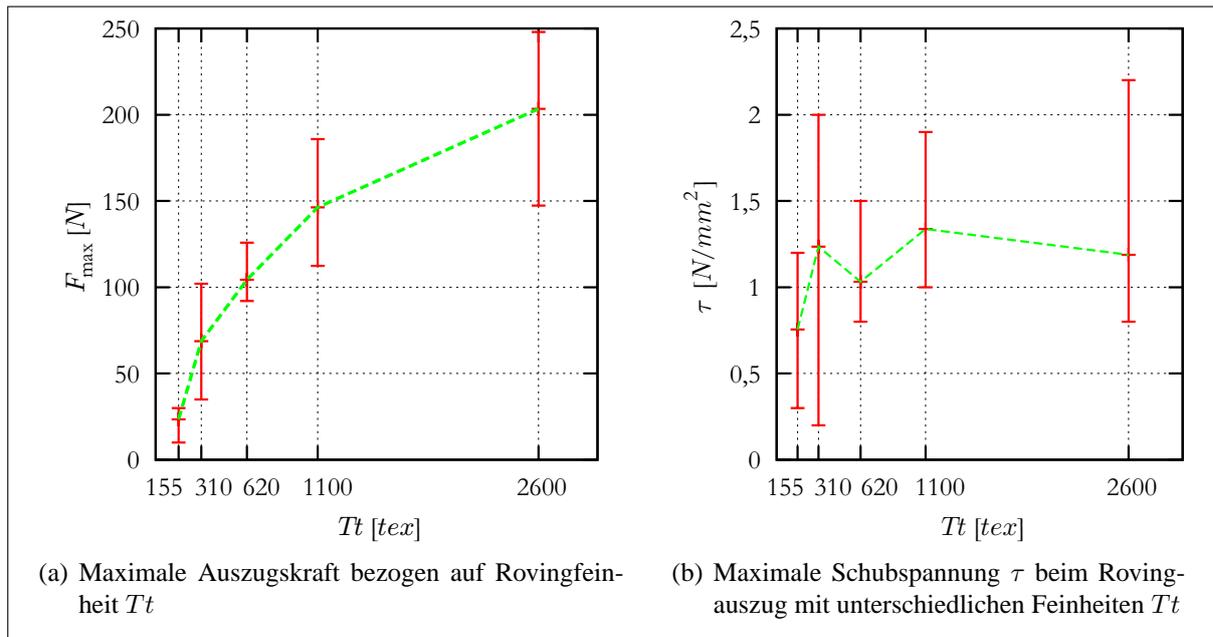


Abbildung 8.27: Auswertung der doppelseitigen Auszugsversuche – Experimentelle Ergebnisse [BUTLER 2000]

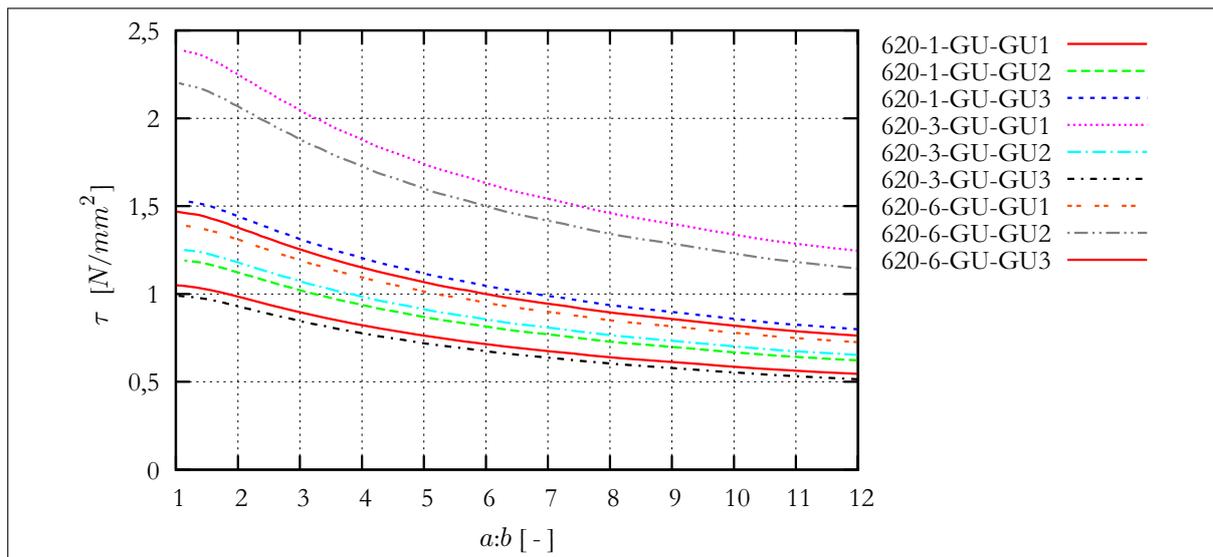


Abbildung 8.28: Abhängigkeit der Schubspannung τ vom Aspektverhältnis $a : b$ bei $\tau u_{\text{rov}} = \text{const.}$

kleinere Lücken im Roving bewirken und damit eine Imprägnierung des Rovings mehr behindern als Rovings mit dickeren Filamenten.

Fazit

Eine experimentelle Bestimmung der Verbundbeziehungen im Roving ist mit der derzeit verfügbaren Messtechnik nicht möglich. Mit Hilfe der numerischen Simulation des Rovingauszugsversuches (**Me-I-Modell**) ist eine qualitative und quantitative Bestimmung der Verbundbeziehungen eines Roving-Matrix-Systems durchgeführt worden. Dies beinhaltet die Identifikation der Verbundfestigkeiten im Roving, d. h. anhand der numerischen Simulation der Rovingauszugsversuche können qualitative und quantitative Aussagen über die Rovingimprägnierung mit D_τ getroffen werden.

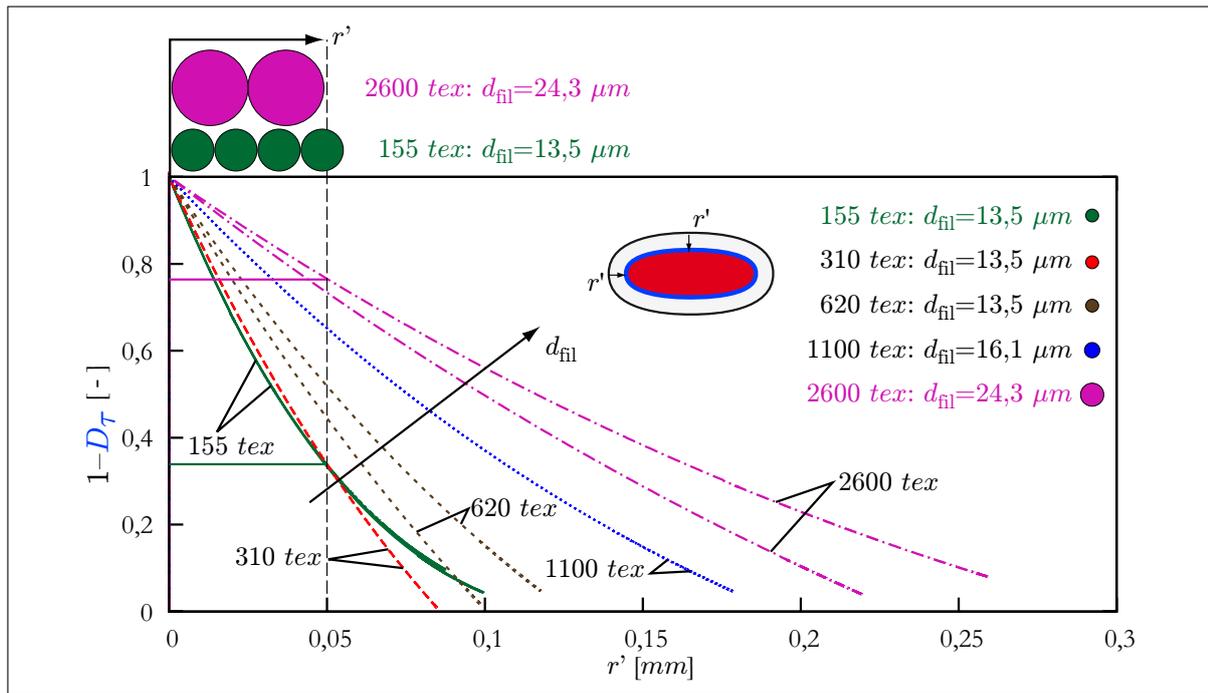


Abbildung 8.29: Identifizierte Verbundfestigkeit in (ungetauchten) Rovings (Abhängigkeit von dem Filamentdurchmesser)

Doppelseitige Auszugsversuche sind mit dem erweiterten semi-analytischen Verbundmodell bis zum vollständigen Versagen des Probekörpers simulierbar. Mit der Kenntnis einer effektiven Schädigungsfunktion $D_A(\varepsilon)$ (vgl. Abschnitt 8.4) ist eine quantitative Bestimmung der Verbundqualität $D_\tau(\varepsilon)$ erstmalig möglich.

8.6 Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell für das makroskopische Materialverhalten

8.6.1 Prognose des effektiven Materialverhaltens für uniaxiale Beanspruchungen

Bei Dehnkörperversuchen mit Mehrfachrissbildung sind die Makrorissabstände im Allgemeinen nicht konstant, vgl. [JESSE 2004]. Bildet sich ein erster Makroriss in der Matrix, überbrückt – wie bereits beschrieben – die textile Bewehrung den Riss. Die Kraftübertragung am Matrixriss über die Matrixmaterialbrücken wird mit wachsender Rissöffnung w reduziert. Infolge der Schubspannungsübertragung zwischen der Bewehrung und der Matrix wird die Matrix wieder beansprucht. Dabei steigt die Matrixspannung mit wachsendem Abstand L zum Makroriss. Der Abstand L vom Makroriss, an dem die Matrixspannung σ_m die Festigkeit der Matrix ($\beta_{z,m}$) erreicht, wird mit L_c bezeichnet (Abb. 8.30).

Theoretisch kann sich mit wachsender Belastung in einem Abstand von $L \geq L_c$ ein neuer Makroriss bilden (Abb. 8.30(a)). Der Ort des neuen Matrixrisses ist unscharf. Weiterhin kann sich ein neuer Riss zwischen zwei bestehenden Rissen bilden, wenn der Rissabstand größer als $2L_c$ ist. Der sich einstellende Rissabstand a kann mit

$$L_c \leq a \leq 2L_c \quad (8.50)$$

angegeben werden. Durchgeführte statistische Untersuchungen (Abb. 8.30(b)) zeigen, dass bei einer großen Rissanzahl der mittlere Rissabstand gegen einen Wert von $\langle a \rangle \approx 1,338 L_c$ konvergiert.

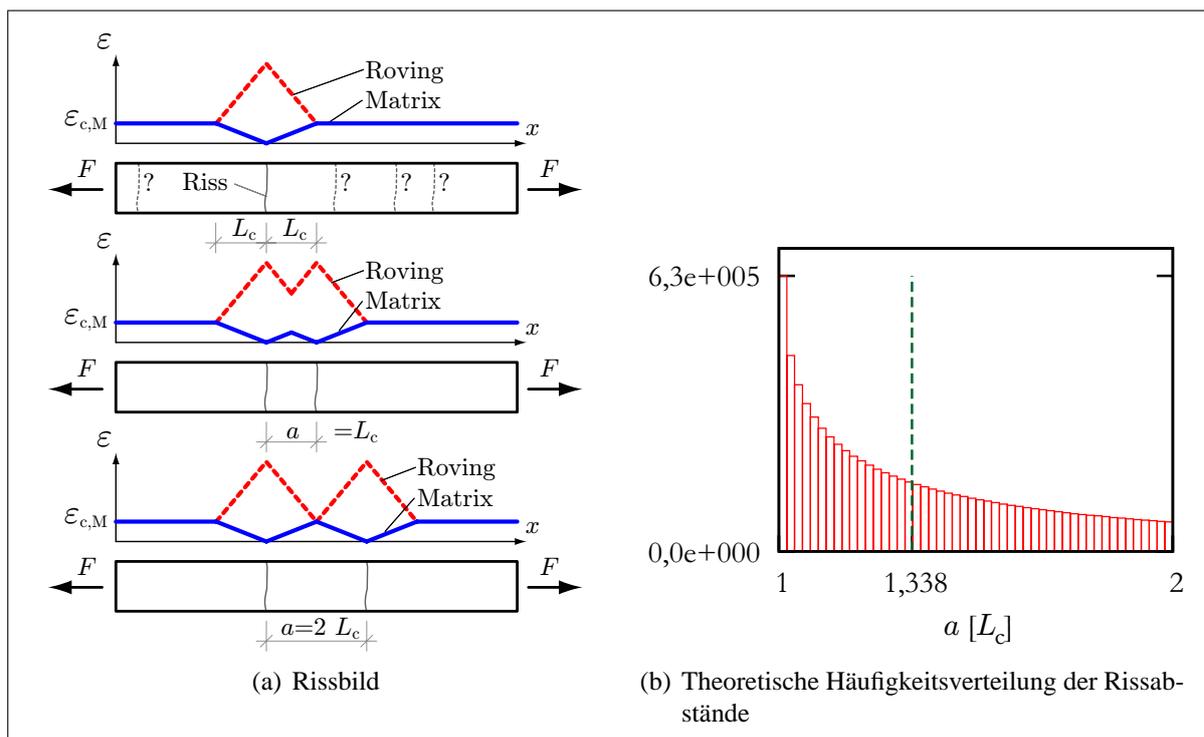


Abbildung 8.30: Statistische Verteilung der Rissabstände

Abbildung 8.30(b) zeigt die berechnete Häufigkeitsverteilung H der sich zufällig einstellenden Rissabstände a .

Numerische Simulationen mit dem **MMM-Prognosemodell** zur Bestimmung des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton mit einer geringen Anzahl an Matrixrissen in dem untersuchten Gebiet \mathcal{Y} können demzufolge nicht konkret mit einem Versuch in Hinsicht auf Rissabstände bzw. Rissbreiten verglichen werden. Es kann jedoch eine obere bzw. untere Schranke bezüglich der Rissanzahl bzw. der mittleren Rissabstände prognostiziert werden.

Die Simulation des uniaxialen effektiven Materialverhaltens von Textilbeton beruht im Wesentlichen auf dem **Me-I-Modell**. Durch die Reihenschaltung mehrerer (pc)-Auszugsversuche, vgl. Abschnitt 8.2.1, wird die Mehrfachrissbildung simuliert (Abb. 7.4). Das entwickelte Prognosewerkzeug simuliert die sukzessive Ausbildung der Einzelrisse, wobei zusätzlich zu den bisherigen Simulationen mit dem **Me-I-Modell** das Nachbruchverhalten der Feinbetonmatrix berücksichtigt wird. Die Integration des **Mi-IIb-Modells** erlaubt die simultane Analyse des Rovingverhaltens auf der Mikroebene, wobei die Kopplung der Modelle über die Gleichsetzung der mittleren Dehnung des Rovings im **Mi-IIb-Modell** und der Dehnung des Bewehrungselementes in Rissmitte im **Me-I-Modell** erfolgt. Die Summe der wirksamen Filamentquerschnittsflächen (Abb. 5.5) im **Mi-IIb-Modell** wird mit einer äquivalenten Rovingquerschnittsapproximation mit Superellipsen (vgl. Kapitel D, Abb. D.1) im **Me-I-Modell** abgebildet, d. h.

$$D_A^{\text{Mikro}}(\varepsilon_{\text{rov}}) = D_A^{\text{Meso}}(\varepsilon_{\text{rov}}). \quad (8.51)$$

Die Länge $L_{\mathcal{Y}}$ des untersuchten Gebietes \mathcal{Y} wurde so gewählt, dass 10 bis 20 Risse in \mathcal{Y} entstehen können ($L_{\mathcal{Y}} = 2 n_{\text{Risse}} L_c$, $n_{\text{Risse}} = 20$). Abbildung 8.31 zeigt numerisch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mit minimaler, mittlerer und maximaler Rissanzahl. Zur Verdeutlichung der Unterschiede bei Variation der Rissanzahl in \mathcal{Y} wird die Rovingsschädigung vernachlässigt und

eine konstante Schubspannungs-Schlupf-Beziehung angenommen. Das simulierte Nachbruchverhalten der Matrix ist Abbildung 8.32(c) zu entnehmen.

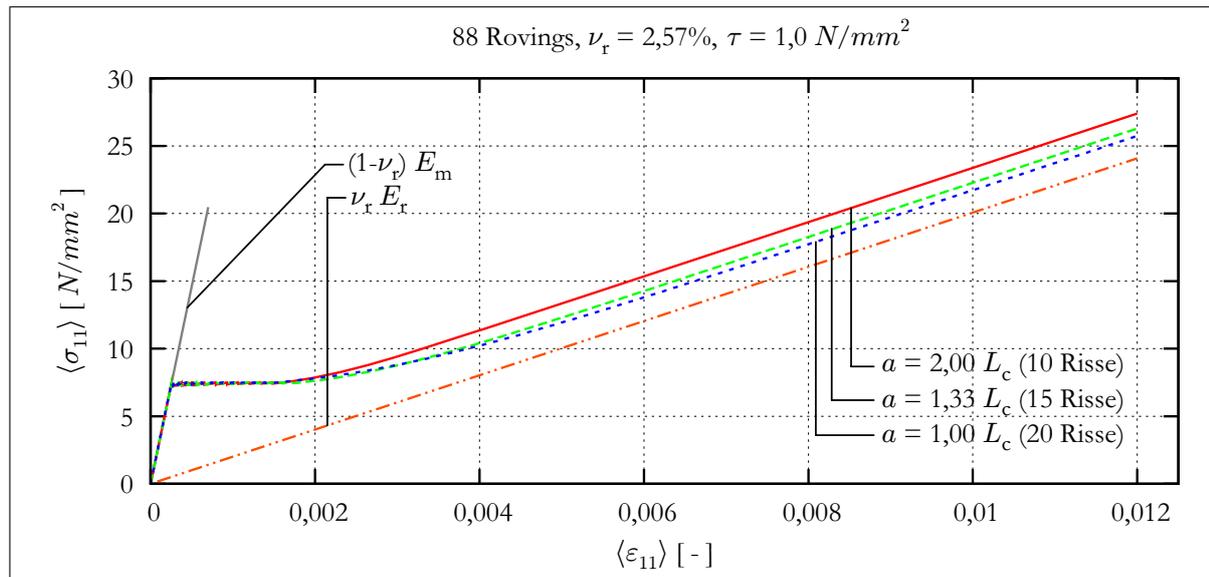


Abbildung 8.31: Numerische Simulationen des Dehnkörperversuches mit minimaler, mittlerer und maximaler Rissanzahl

Der unterschiedliche Einfluss des Nachbruchverhaltens der Feinbetonmatrix auf das effektive Materialverhalten in Abhängigkeit des Bewehrungsgrades ist in Abb. 8.32 dargestellt. Es sind die Ergebnisse von zwei Simulationen mit den Bewehrungsgraden $\nu_r = 1,29\%$ und $\nu_r = 3,22\%$ gegenübergestellt (Roving: 620 tex, $a : b = 1 : 6,5$). Die Schädigungssimulation des Multifilamentgarnes (**Mi-IIb-Modell**) wird in diesem Beispiel nicht integriert, da nur der Einfluss des Matrixnachbruchverhaltens analysiert werden soll.

Bei dem niedrigen Bewehrungsgrad ($\nu_r = 1,29\%$, 44 Rovings) hat der Feinbeton nahezu keinen Einfluss auf des effektive Materialverhalten (Abb. 8.32(c)). Dies ist auf die großen Rissbreiten $w = 2v > w_c$ zurückzuführen, die sich einstellen, wenn nach einer Matrixrissausbildung über den Verbund eine kritische Beanspruchung in der Matrix wieder erreicht wird.

Bei dem Bewehrungsgrad $\nu_r = 3,22\%$ (110 Rovings) beeinflusst das post-kritische Verhalten des Feinbetons das effektive Materialverhalten maßgeblich (Abb. 8.32(b)). Die rissüberbrückende Wirkung der Rovings ist so groß, dass die auf den Probenquerschnitt bezogene Rovingkraft $\langle \sigma_r(v) \rangle$ mit wachsender Rissöffnung $w = 2v$ schneller ansteigt, als die auf den Probenquerschnitt bezogene rissüberbrückende Matrixkraft $\langle \sigma_m(v) \rangle$ (Abb. 8.32(d)). Dies führt zu sehr kleinen Rissbreiten, da sowohl die Matrixspannung am Rissufer als auch die über den Verbund erzeugte Matrixspannung die Matrix beanspruchen. Die Rissbildungsphase in dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm verkürzt sich demnach mit wachsendem Bewehrungsgrad (Abb. 8.32(a) u. Abb. 8.32(b)). Zusätzlich ist Abbildung 8.32(d) zu entnehmen, dass die Rovingrissüberbrückung in Kombination mit dem Nachbruchverhalten des Feinbetons ein höheres Spannungsniveau bewirken kann als bei niedrigeren Bewehrungsgraden (Abb. 8.32(c)). Dies lässt den Schluss zu, dass die Rissbildungsphase in einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung nahezu nicht mehr erkennbar ist, d. h. dass die Dehnung $\langle \varepsilon_{11} \rangle_{I-IIa}$ bei Erstrissbildung fast so groß ist wie die Dehnung $\langle \varepsilon_{11} \rangle_{IIa-IIb}$ bei abgeschlossenem Rissbild. Eine experimentelle Messung der mittleren Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit von Textilbetonproben würde bei höheren Bewehrungsgraden ($\nu_r > 3\%$) und geringen Rovingabständen deutlich größere Spannungen nach der Erstrissbildung zeigen, als aus der Erhöhung

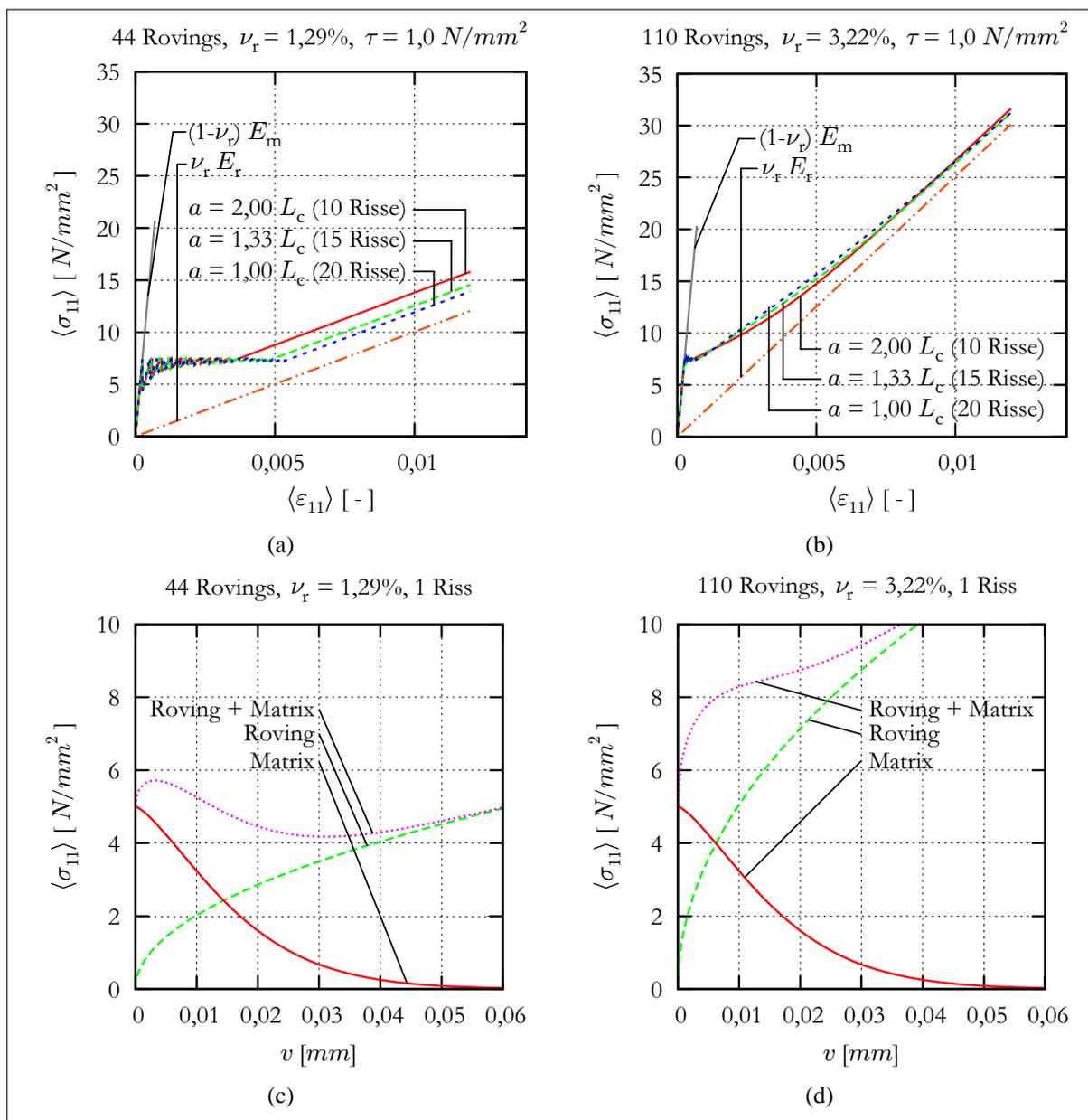


Abbildung 8.32: Numerische Simulationen des effektiven Materialverhaltens

der Probensteifigkeit erklärbar wären. Außerdem wäre der Übergang vom ungerissenen zum gerissenen Zustand undeutlicher erkennbar, wenn der flacher geneigte Bereich der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit als vermeintliche Rissbildungsphase fehlinterpretiert würde, obwohl alle Matrixrisse schon ausgebildet sind und nur noch die Matrixrisse geöffnet werden (Summenkurve in Abb. 8.32(d)).

Der modulare Aufbau des **Me-I-Modells** erlaubt das Studium der relevanten Tragmechanismen bei der Simulation des effektiven Verhaltens von Textilbeton. Einige Kombinationen der berücksichtigten Tragmechanismen im **MMM-Prognosemodell** sind in Abbildung 8.33 dargestellt.

Ohne Berücksichtigung der Rovingschädigung und des post-kritischen Verhaltens der Feinbetonmatrix ist der Bereich der Rissbildung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm am deutlichsten ausgeprägt (Kombination $\{D_{\text{rov}}(\varepsilon_{\text{rov}}) = 0, \sigma_m(w) = 0\}$). Ein trilinearer Charakter der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ist erkennbar. Der Versagenspunkt des untersuchten Teilkörpers \mathcal{Y} ist

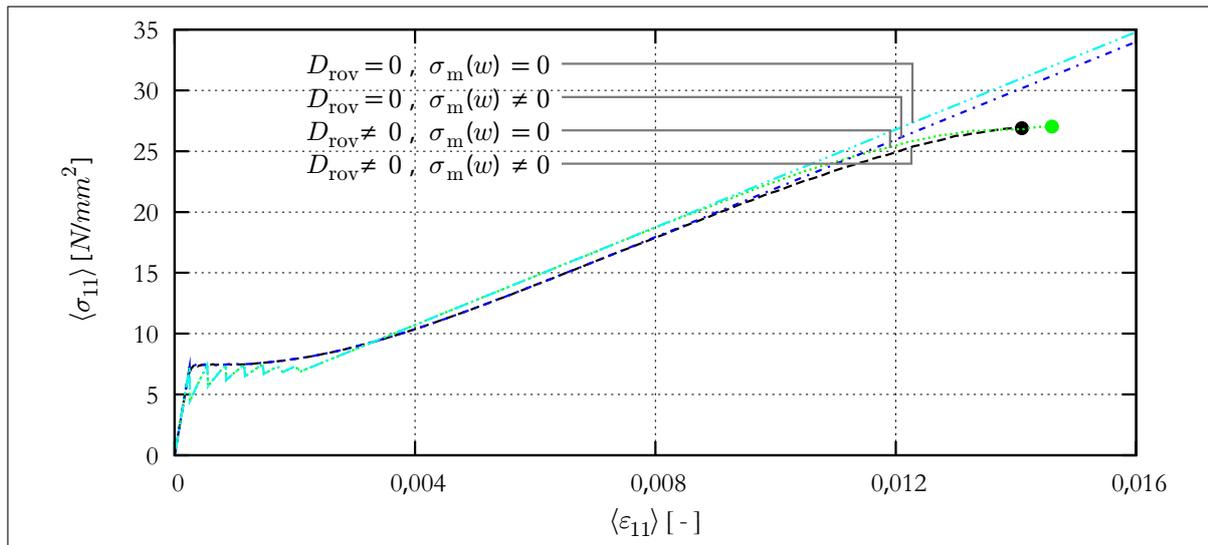


Abbildung 8.33: Einfluss des Rovingverhaltens und des Nachbruchverhaltens der Matrix auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton

nicht abgebildet, da kein Kriterium für das Rovingversagen berücksichtigt wird. Die Kombination $\{D_{rov}(\varepsilon_{rov}) \neq 0, \sigma_m(w) = 0\}$ simuliert zusätzlich diesen Versagensmechanismus, d. h. der Bereich der Rissöffnung (nach abgeschlossener Rissbildung) weist einen nichtlinearen Zusammenhang vor Erreichen der Traglast auf.

Bei Berücksichtigung des Feinbetonnachbruchverhaltens ($\sigma_m(w) \neq 0$) schließt sich unmittelbar nach der Rissbildungsphase ein nichtlinearer Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung an. Die Phase der Rissbildung ist kürzer als bei der Kombination $\{D_{rov} = 0, \sigma_m(w) = 0\}$. Nachdem alle Rissbreiten w größer als w_c sind, stellt sich der gleiche Anstieg wie bei der Kombination $\{D_{rov} = 0, \sigma_m(w) = 0\}$ in der Rissöffnungsphase ein, solange keine Rovingschädigung eintritt.

Anhand der Neigung der Kurve in der Rissöffnungsphase der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit ist demzufolge nur bedingt eine Aussage über die Rovingsteifigkeit bzw. Rovingschädigung zu treffen.

Fazit

Das **MMM-Prognosemodell** kann das effektive Materialverhalten von Textilbeton simulieren und prognostizieren. Die Verknüpfung der mikro- und mesomechanischen Modelle **Mi-IIb** und **Me-I** erlaubt die Analyse des Einflusses des Betons (inkl. des Nachbruchverhaltens), der Filamente des Rovings sowie des Verbundes zwischen dem Roving und der Matrix auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton. Jedem makroskopischen Beanspruchungszustand kann eine maximale Rovingspannung sowie eine mittlere Rissbreite zugeordnet werden, da die Beanspruchungen des Verbundinterfaces, der Matrix und der Bewehrung in der gesamten Zelle berechnet werden.

Das Mitwirken der Matrix zwischen den Rissen (tension stiffening effect) ist realitätsnah modelliert worden, d. h. der nichtlineare Einfluss der Matrix zwischen den Rissen auf das effektive Materialverhalten und die Abhängigkeit von der Bewehrungsmenge wird simuliert. Für hohe Bewehrungsgrade ist das Nachbruchverhalten des Feinbetons zu berücksichtigen, da das post-kritische Verhalten der Matrix bei kleinen Rissbreiten das effektive Materialverhalten maßgeblich beeinflusst. Durch die ungleichmäßige Beanspruchung der Filamente des Rovings und den Einfluss des Rovingumfangs auf das effektive Materialverhalten ist die Angabe der Rovinganzahl und der

Rovingform anstelle eines Bewehrungsgrades notwendig, um realistische Prognosen für das Textilbetonverhalten geben zu können.

Die Validierung des **MMM-Prognosemodells** kann anhand von experimentellen Ergebnissen durchgeführt werden. Dazu ist das Materialverhalten von Textilbeton nur durch Variation der Bewehrungsmenge zu prognostizieren und mit den entsprechenden experimentellen Daten zu vergleichen.

Simulation des zyklischen Verhaltens von Textilbeton mit dem Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell

Abbildung 8.34 zeigt die in dem semi-analytischen Verbundmodell implementierten inelastischen Materialmodelle zur Simulation des zyklischen Materialverhaltens von Textilbeton (Abb. 8.35). Jedem diskretisierten Segment des Interfaces wird ein inelastisches Materialverhalten zugewiesen (vgl. Abschnitt 8.2). Das **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell** kann das zyklische Verhalten si-

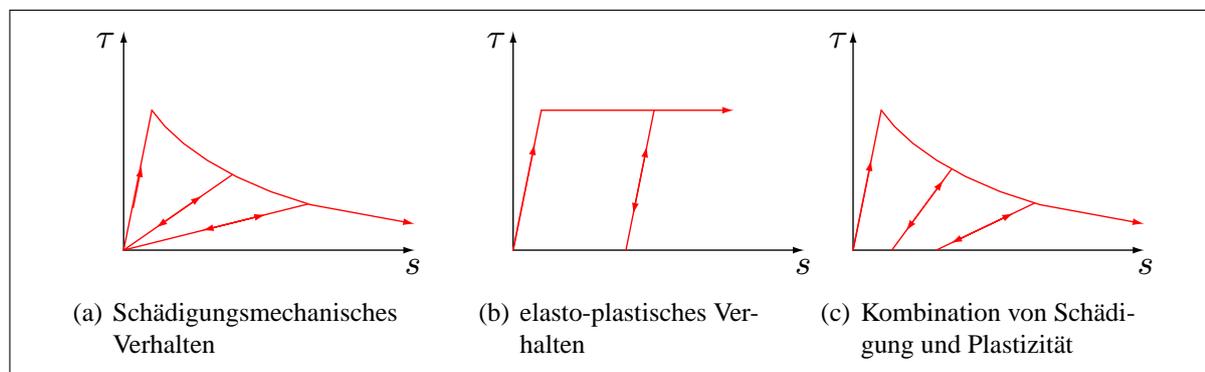


Abbildung 8.34: Implementierte Schubspannungs-Schlupf-Modelle im Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell

mulieren, da das Verbundproblem auch für Ent- und Wiederbelastungen vollständig gelöst wird, vgl. Abschnitt 8.2. Die Schubspannungsverteilung im Interface Roving-Matrix (Abb. 8.6) wird bei Lastumkehr entsprechend des inelastischen Verbundgesetzes (Abb. 8.34) ermittelt, d. h. es werden auch die inelastischen effektiven Verzerrungen von Textilbeton berechnet (Abb. 8.35).

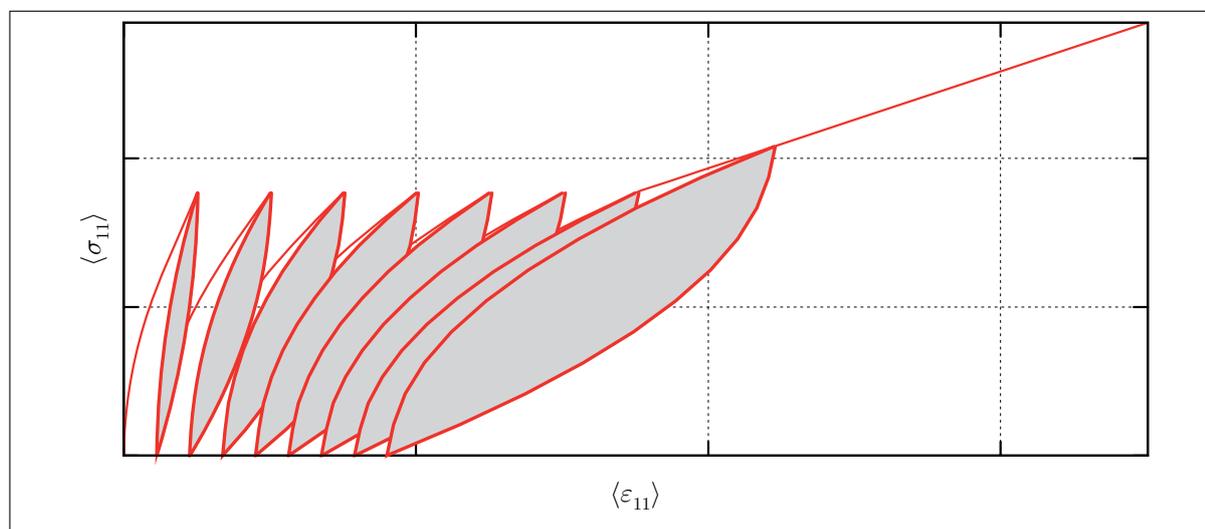


Abbildung 8.35: Simulation von Textilbeton unter Schwellbelastung

Die Simulation des Ermüdungsverhaltens von Textilbeton unter einer zyklischen Schwellbelastung ist prinzipiell mit dem **MMM-Prognosemodell** möglich, aber noch nicht vollständig realisiert worden. Denkbar sind Degradationsmodelle für die Verbundbeschreibung in Abhängigkeit von einer internen Schlupfsummen-Variable oder in Abhängigkeit der dissipierten Energie während einer Hysterese, vgl. [MEYER & FANG 1995, PASKOVA & MEYER 1994a, PASKOVA & MEYER 1994b].

8.6.2 Simulation des effektiven Materialverhaltens für biaxiale Beanspruchungen

Lineare Berechnungen mittels der Finite-Elemente-Methode

Der Probekörper zur experimentellen Untersuchung des Verhaltens unter biaxialer Belastung weist laschenförmige Lasteinleitungsbereiche auf, vgl. Anhang E. Im Folgenden soll der Probekörper mit dem **Ma-FEM-Modell** untersucht werden, wobei die mit den **Me-FEM-Modellen** ermittelten effektiven elastischen Materialkonstanten Verwendung finden. Abbildung 8.36 zeigt das berechnete Verschiebungsfeld $v(x, y)$ infolge einer uniaxialen Belastung.

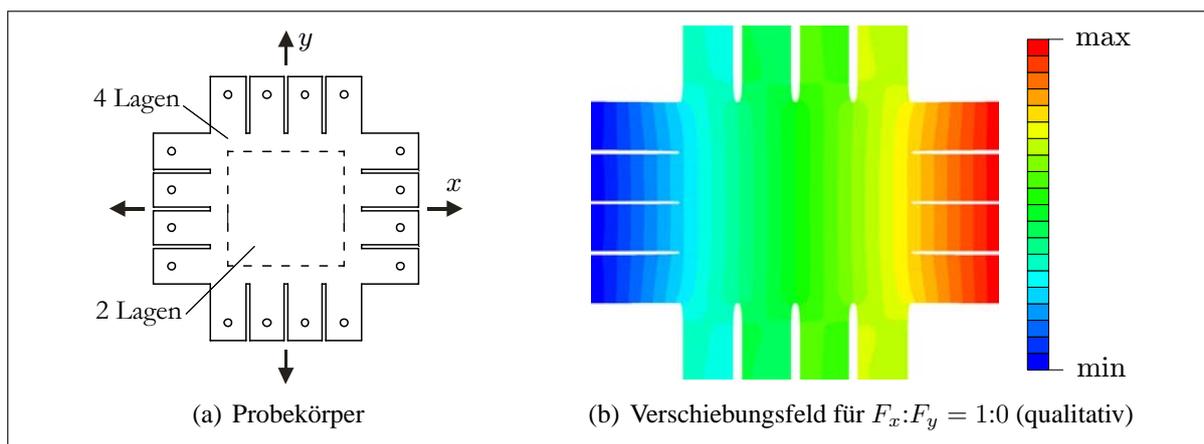


Abbildung 8.36: Verschiebungsfeld $v(x, y)$ des Probekörpers bei Belastung in x -Richtung

Die Verzerrungsfelder infolge der unterschiedlichen Belastungspfade $F_x : F_y = 1 : 0$ bzw. $F_x : F_y = 1 : 1$ weisen unterschiedlich starke Fluktuationen auf. Abbildung 8.37 zeigt die Hauptdehnungen $\varepsilon_I(x, y)$ infolge der Belastungspfade $F_x : F_y = 1 : 0$ und $F_x : F_y = 1 : 1$.

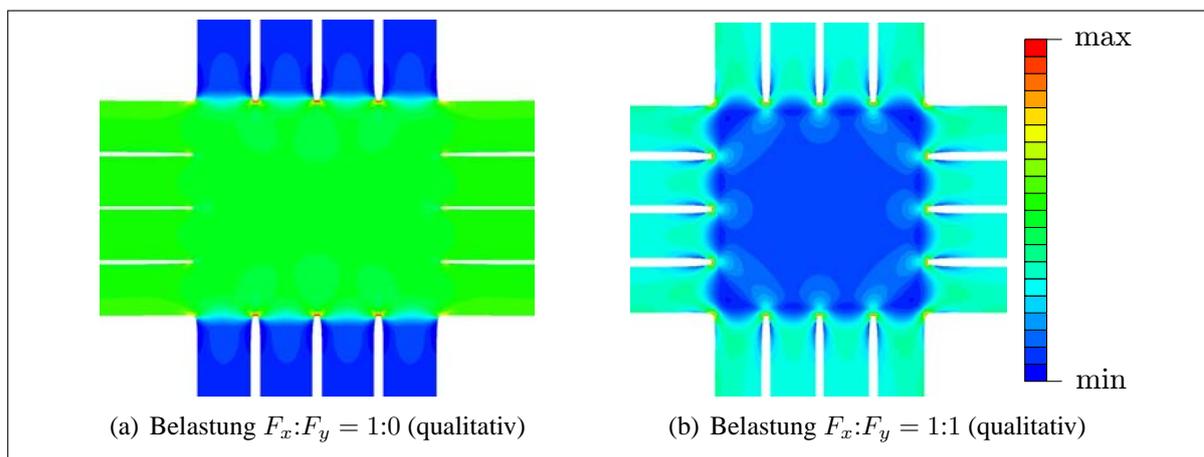


Abbildung 8.37: Qualitative Darstellung der Hauptdehnungen $\varepsilon_I(x, y)$ im Probekörper für unterschiedliche Belastungspfade

An den Enden der Kerben im Lasteinleitungsbereich sind Dehnungslokalisationen feststellbar, welche auch bei der experimentellen Prüfung Ausgangspunkt des Versagensprozesses waren, vgl. [JESSE et al. 2006]. Der mittlere Bereich der Probe – der Messbereich – zeigt in der Simulation eine relative gleichmäßige Dehnungsverteilung.

Fazit

Für die Berechnung von makroskopischen Beanspruchungen in Bauteilen mit einer komplexen Geometrie bzw. Belastung wird das effektive anisotrope elastische Materialverhalten von Textilbeton berücksichtigt. Die analytisch und numerisch bestimmten effektiven Elastizitätskonstanten für zwei- und vierlagig bewehrten Textilbeton fanden in der Berechnung des Dehnkörperverhaltens unter biaxialer Belastung Anwendung, wobei die Beanspruchungszustände bis zur Erstrissbildung in der Matrix bestimmt wurden.

Nichtlineare Berechnungen mit dem MMM-Prognosemodell

Im Folgenden wird unter Annahme von entkoppelten Rissystemen durch Kombination von uniaxialen Textilbetonmodellen das biaxiale Materialverhalten für eine orthogonal bewehrte Textilbetonproben simuliert.

Untersucht wird eine biaxial bewehrte Probe, welche koaxial zu den beiden Rovingrichtungen belastet wird. Das effektive uniaxiale Materialverhalten wurde mit dem **MMM-Prognosemodell** ermittelt (Abb. 8.33), wobei gleiche Bewehrungsgrade und gleiche Rovings je Bewehrungsrichtung angenommen werden. Abbildung 8.38 zeigt das biaxiale Materialverhalten infolge einer kraftgesteuerten Simulation bei der die zwei uniaxialen Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten überlagert werden. Es wurde keine Interaktion der zwei Rissysteme berücksichtigt.

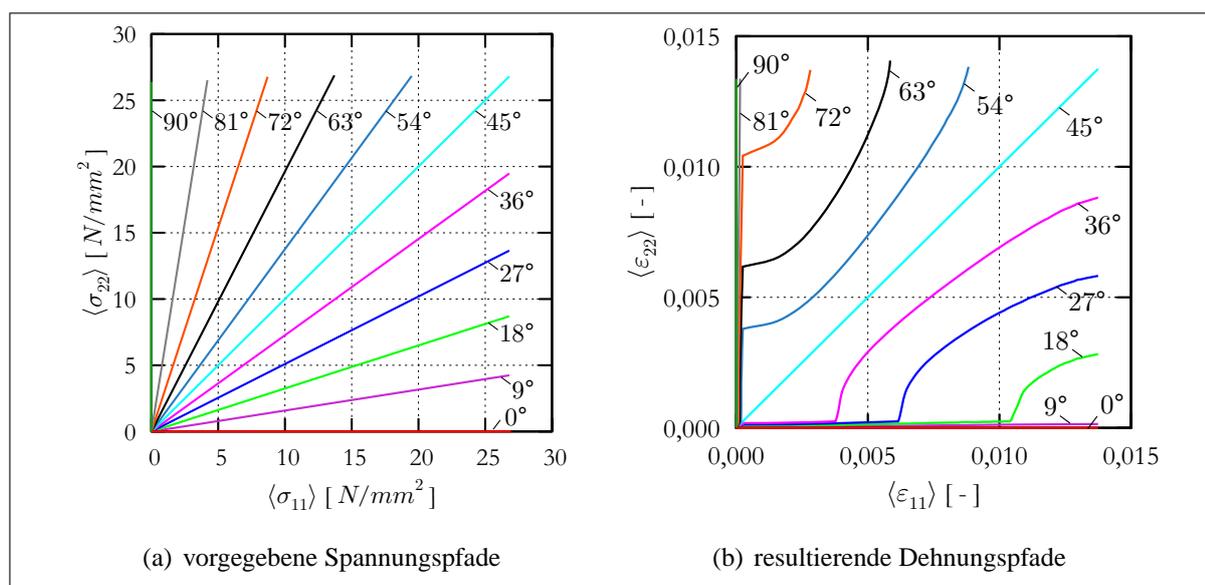


Abbildung 8.38: Beanspruchung eines Rissystems

Festzustellen ist, dass die Belastungsrichtungen 0° , 9° , 81° und 90° nur die Ausbildung eines Rissystems bewirken. Erst die untersuchten Belastungsrichtungen 18° – 72° ließen die Ausbildung beider Rissysteme zu. Durch das anisotrope nichtlineare Materialverhalten von Textilbeton kommt es zu unterschiedlichen Spannungs- und Dehnungsverhältnissen, welche mit dem **biaxialen MMM-Prognosemodell** abbildbar sind, vgl. Anhang E.

Für die Validierung der numerischen Prognosen wird eine qualitative und quantitative Auswertungsmethode in Anhang E vorgeschlagen, die eine experimentelle Bestimmung der Komponenten des gemittelten Verzerrungstensors $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ erlaubt. Sie beruht auf der Approximation des

Verschiebungsfeldes der untersuchten Probe mit 2d-Splines. Mit der Kenntnis der Verschiebungsfelder infolge einer multiaxialen Belastung lassen sich die Verzerrungsfelder sowie deren Mittelwerte angeben. In Anhang E werden der Vollständigkeit halber ausgewählte Versuchsergebnisse nach [JESSE et al. 2006] angegeben.

Fazit

Die Simulation mit dem **MMM-Prognosemodell** kann das biaxiale Materialverhalten von Textilbeton qualitativ abbilden. Die Annahme von vollständig entkoppelten Rissystemen ist nur bedingt richtig, da Längsrisse die Verbundwirkung der Querbewehrung beeinflussen, vgl. Anhang E. Somit wird auch die Traglast des Probekörpers überschätzt.

Simulation der schrägen Rissüberbrückung durch die Faserbewehrung

Stimmen Rissflächennormale und Bewehrungsrichtung nicht überein, kommt es zu zusätzlichen Biegebeanspruchungen in den Filamenten des Rovings (Abb. 8.39). Infolge der unterschiedlichen Verbundqualitäten im Roving variieren die maximalen Krümmungen der einzelnen Filamente. Hierbei werden die Randfilamente stärker gekrümmt (kleine Krümmungsradien) als innen liegende Filamente. Abbildung 8.39 verdeutlicht dieses Phänomen. Durch die zusätzlichen Biegespannungen σ_b reduzieren sich die max. aufnehmbaren Normalspannungen σ_n (gleichmäßige Zugspannungen) nach Gl. 8.52

$$\beta_z \geq \sigma_{\text{fil}} = \sigma_n + \sigma_{b,\text{max}}, \quad (8.52)$$

wobei β_z die Zugfestigkeit des Filamentes darstellt. Die Überlagerung der Normalbeanspruchung mit Biegebeanspruchungen bzw. Querbeanspruchungen durch die Filamentumlenkung bewirkt eine reduzierte effektive Rovingtragfähigkeit.

Die Biegespannungen sind abhängig von dem Krümmungsradius $R(x)$ bzw. der Krümmung $\kappa(x)$ (Abb. 8.39(a)) der Filamente.

$$\sigma_b = E \varepsilon = \frac{E}{R(x)} z = \kappa(x) E z. \quad (8.53)$$

Der Anteil der zur Rissüberbrückung nutzbaren Normalspannung ergibt sich zu

$$\frac{\sigma_n}{\beta_z} = 1 - \frac{\sigma_{b,\text{max}}}{\beta_z} = 1 - \frac{E r_{\text{fil}}}{\beta_z} \frac{1}{R_{\text{min}}}, \quad (8.54)$$

vgl. Abb. 8.39(b). Im Grenzfall einer ausschließlichen Biegebeanspruchung folgt

$$\widehat{R}_{\text{min}} = \widehat{\kappa}_{\text{max}} = \frac{E r_{\text{fil}}}{\beta_z}, \quad (8.55)$$

d. h. Krümmungsradien kleiner als \widehat{R}_{min} sind nicht möglich.

Rovingumlenkung

Abbildung 8.40(a) zeigt das Abknicken der Bewehrung infolge einer Rissöffnung w ($w_z = 0$). Der Umlenkwinkel ϕ setzt sich aus dem Winkel α – dem Winkel zwischen der Bewehrung und Rissnormalen – und dem Winkel β aus der tangentialen Rissverschiebung w_y und w_z zusammen. Durch die Umlenkung des Rovings im Riss kann die Rovingkraft F in Komponenten normal (F_x) und tangential (F_y, F_z) zur Rissfläche zerlegt werden.

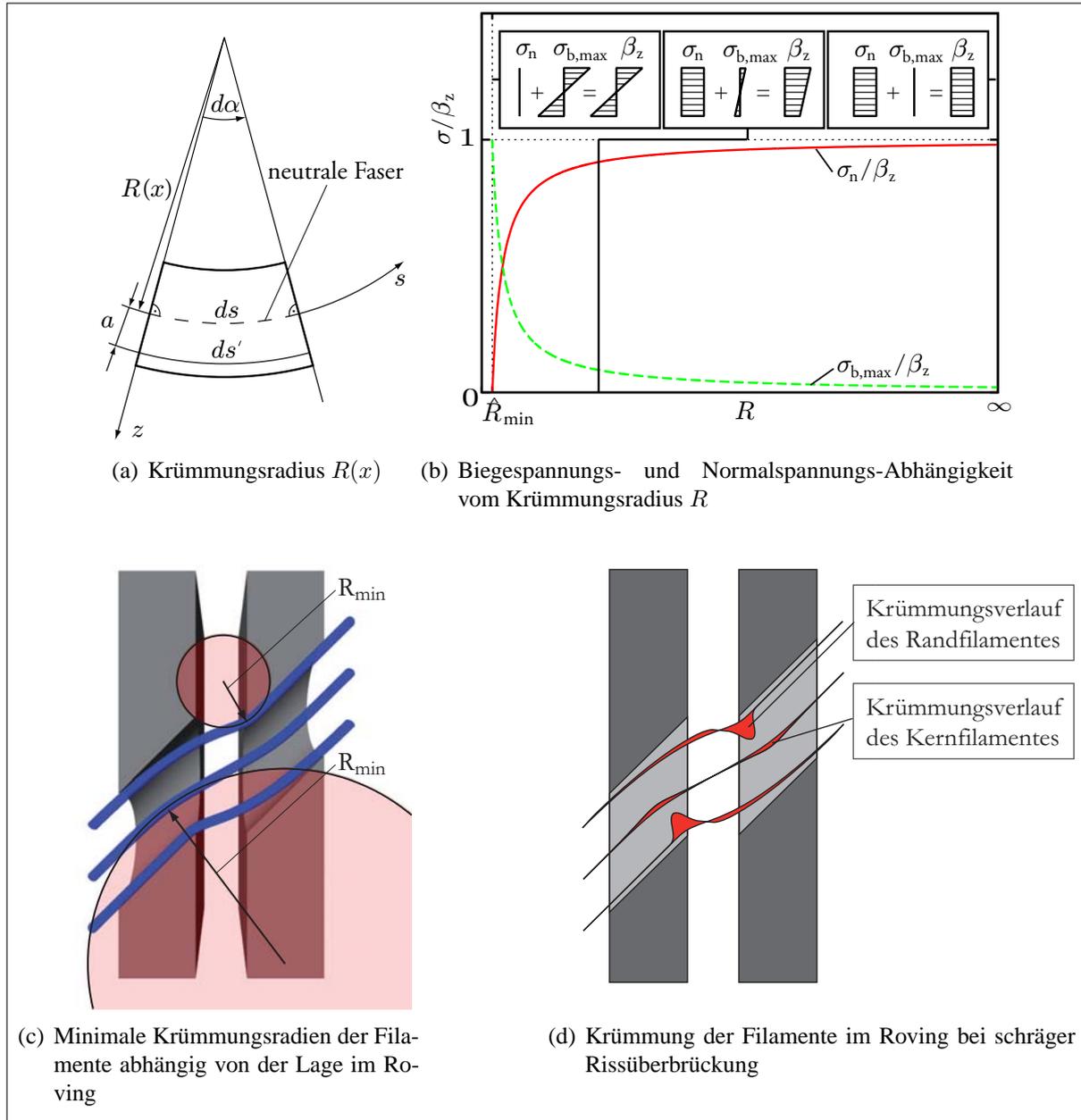


Abbildung 8.39: Biegung der Filamente infolge schräger Rissbildung

Der Roving wirkt als Verstärkung sowohl in Normal- als auch in Tangentialrichtung des Risses und beeinflusst damit die mittleren Normalspannungen und die mittleren Schubspannungen $\langle \sigma_{ij} \rangle$. Die Umlenkwinkel des Rovings am Rissufer ergeben sich zu:

$$\cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{8.56}$$

$$\cos \beta = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}, \tag{8.57}$$

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}. \tag{8.58}$$

Abhängig von dem Umlenkwinkel ϕ des Rovings im Matrixriss (**Me-I-Modell**) wird die Schädigung des Rovings infolge der zusätzlichen Krümmung κ (**Mi-IIb-Modell**) simuliert. Dazu wird das Faserbündelmodell in Abschnitt 8.4.2 um ein Spannungsprofil erweitert, das die zusätzlichen

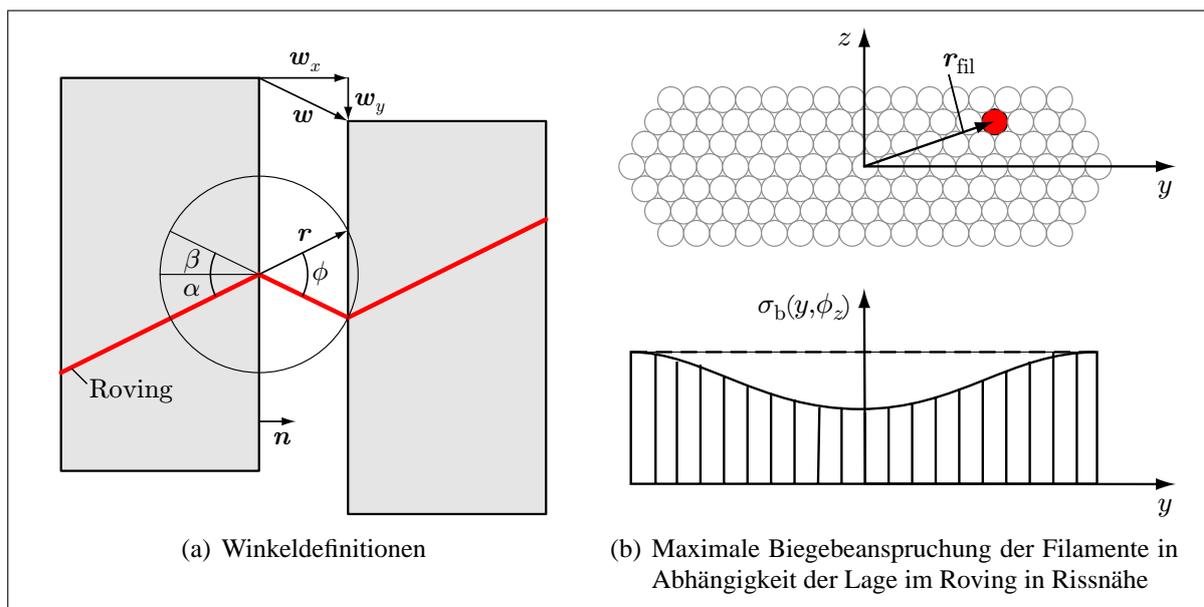


Abbildung 8.40: Schräge Rissüberbrückung

Beanspruchungen mit wachsendem Umlenkwinkel ϕ abbilden kann. Durch die unterschiedlichen Krümmungen der Filamente im Roving (vgl. Abb. 8.39 und Abb. 8.40(a)), kann die unterschiedliche Schädigungsevolution bei Umlenkung um die Halbachsen a und b des Rovingquerschnittes (Abb. 5.11) berücksichtigt werden. Dies ist im Hinblick auf eine dreidimensionale Rissbetrachtung notwendig (vgl. Abb. 2.21). Abbildung 8.40(b) zeigt die unterschiedliche Biegebeanspruchung der Filamente im Roving bei einer Rovingumlenkung ϕ (Biegung um die z -Achse). Infolge der geringeren Krümmung der Kernfilamente gegenüber den Randfilamenten sind die maximalen Biegespannungen $\sigma_b(y, \phi)$ geringer. Die dargestellte Spannung σ_b stellt die größte auftretende Biegespannung im Filament in der Nähe des Risses dar, vgl. Gl.(8.53).

Simulation von Dehnkörperversuchen mit schräger Rissüberbrückung

Zur Simulation einer schrägen Rissüberbrückung der Rovings wird bei der mikromechanischen Simulation des Rovings ein zusätzliches Beanspruchungsprofil berücksichtigt, das die Krümmung κ der Filamente des Rovings in Abhängigkeit der Rovingneigung $\phi = \alpha + \beta$ abbildet. Entsprechend einer Rissuferverschiebung w wird die zusätzliche Beanspruchung der Filamente in Abhängigkeit von der Lage im Roving berücksichtigt, vgl. Abb. 8.40(b). Hier sind geeignete Versuche bzw. Simulationen zur Bestimmung der Beziehung $\kappa(\phi, r_{\text{fil}})$ durchzuführen, um die Beanspruchungen im umgelenkten Roving realitätsnah simulieren zu können.

Abbildung 8.41(b) zeigt die Simulation des Dehnkörperversuches bei variiertem Rovingneigung α ($\beta = 0$) gegenüber dem sich einstellenden Rissbild mit der Rissrichtung n . Die Ergebnisse der Simulation eines Dehnkörperversuches mit schräger Rissüberbrückung (vgl. Abb. 8.41) beruhen auf einer linearen $\kappa(\phi, r_{\text{fil}})$ -Abhängigkeit bezüglich ϕ für die Filamente des Rovings

$$\kappa(\phi, r_{\text{fil}}) = a\phi f(y) \quad , \quad (8.59)$$

wobei ein a ein Modellparameter ist und $f(y)$ das Profil der maximalen Biegespannungen über den Rovingquerschnitt beschreibt, vgl. Abb. 8.40(b). Weiterhin wurden die Anzahl der Rissüberbrückenden Rovings konstant gehalten.

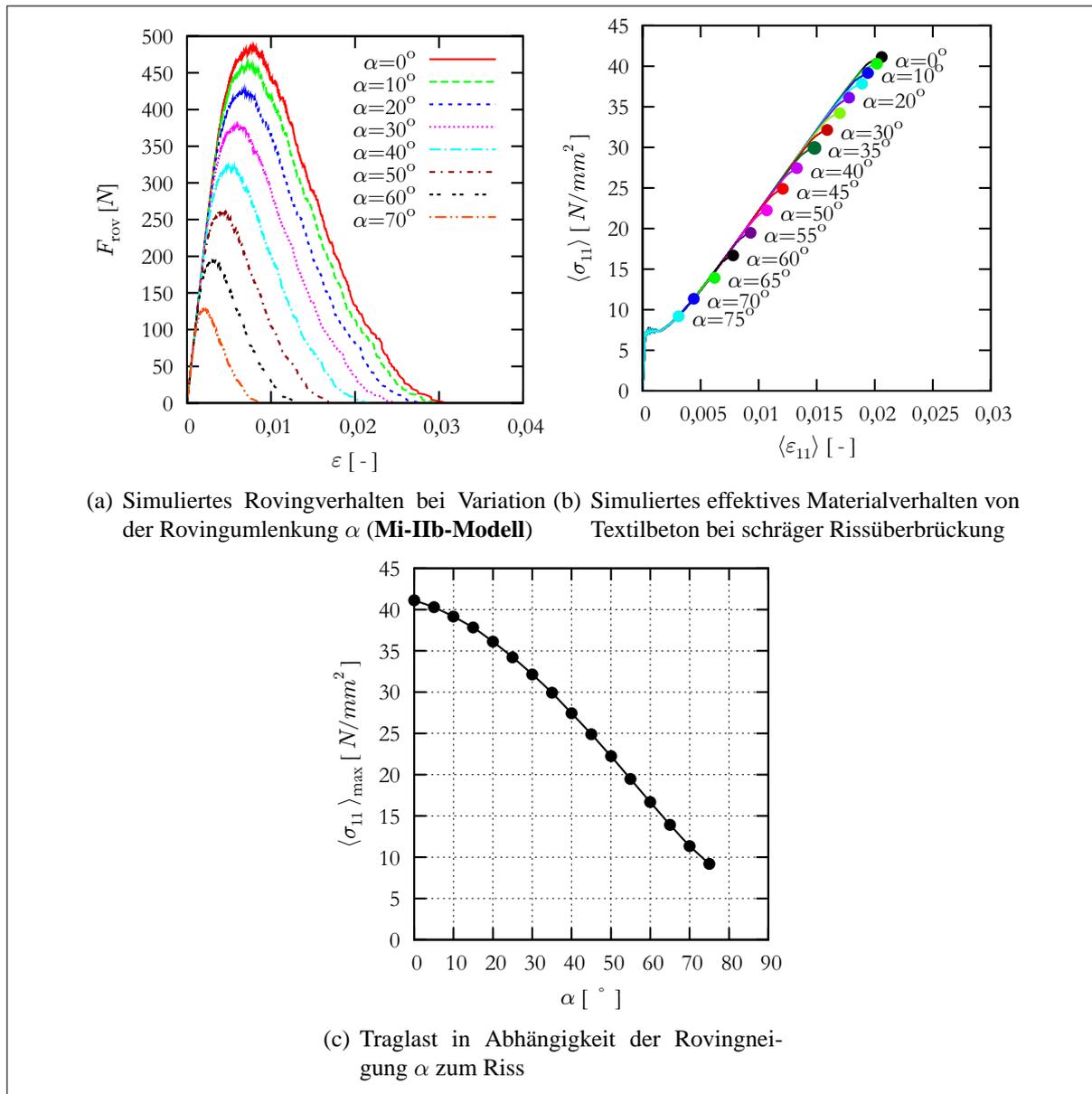


Abbildung 8.41: Einfluss der Neigung der Rovings gegenüber der Rissfläche auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton bei gleich bleibender Rovinganzahl im Riss

Das effektive Rovingverhalten für einen gekrümmten Roving wird analog zu Abschnitt 8.4.2 bestimmt, wobei zusätzlich die Biegespannungen infolge der Filamentbiegung berücksichtigt werden. Durch Superposition der Normalspannungen σ_n infolge der Normalkraft und der Biegespannungen σ_b infolge der Krümmung (Abb. 8.39(b)) eines Filamentes kommt es zum vorzeitigen Versagen. Mittels des erweiterten mikromechanischen **Mi-Iib-Modells** kann somit das effektive Rovingverhalten infolge der zusätzlichen Rovingumlenkung ermittelt werden, vgl. Abb. 8.41(a). Dabei werden die Randfilamente mit wachsendem Umlenkwinkel deutlich stärker durch Rovingkrümmung beansprucht als die Kernfilamente, vgl. Abb. 8.39(d). Für $\alpha = 0$ sind die simulierten, effektiven Kraft-Dehnungs-Abhängigkeiten des **Mi-Iib-Modells** und des erweiterten **Mi-Iib-Modells** identisch, vgl. Abb. 8.18(b).

Die zusätzliche Beanspruchung infolge der Filamentbiegung führt zu einer geringeren Tragfähigkeit des Rovings, vgl. Abb. 8.41(a). Dies hat einen direkten Einfluss auf die Tragfähigkeit des

Dehnkörpers, vgl. Abb. 8.41(b) u. 8.41(c). Mit wachsendem Winkel α sinkt sowohl die Traglast $\langle \sigma_{11} \rangle_{\max}$ als auch die Bruchdehnung $\langle \varepsilon_{11} \rangle_{\max}$. Würde die Bewehrungsmenge konstant gehalten, also nur die Orientierung entsprechend dem Winkel α geändert, ergäbe sich ein noch stärkerer Lastabfall. In Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von [JESSE 2004] gibt es einen Grenzwinkel, bei dem keine Mehrfachrissbildung mehr auftritt, da der Roving infolge einer zu großen Umlenkung α und der damit verbundenen Schädigung nach der Erstrissbildung versagt, vgl. Abb. 8.41(a). Die Qualität der Simulationsergebnisse hängt von der Güte der mikromechanischen Simulation (**Mi-IIb-Modell**) zur Bestimmung der Kraft-Dehnungs-Abhängigkeit des Rovings ab.

Fazit

Das **MMM-Prognosemodell** kann die schräge Rissüberbrückung eines Rovings in erster Näherung abbilden. Die Schädigung der Filamente infolge der Umlenkung an den Rissflanken ist ungleichmäßig im Roving, da die Krümmung der Kernfilamente geringer ist als die Krümmung der Randfilamente. An die mikroskopischen Modelle sind entsprechend höhere Anforderungen zu stellen. Das verwendete mikromechanische Faserbündelmodell ist durch zusätzlich abgebildete Beanspruchungen im Roving geeignet, Schädigung infolge der Rovingumlenkung am Riss abzubilden. Zur Bestimmung der mikromechanischen Modellparameter sind jedoch weitere Untersuchungen notwendig, um die Winkelabhängigkeit des effektiven Rovingverhaltens genauer abbilden zu können. Die Krümmung in Verbindung mit der Querpressung des Rovings an der Rissflanke spielt dabei eine große Rolle.

9 Anwendung des Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells für Textilbeton

9.1 Simulation von Dehnkörpern aus Textilbeton

9.1.1 Charakterisierung des Dehnkörperversuches

Bei den sogenannten *Dehnkörperversuchen* werden normalbewehrte Textilbetonproben auf Zug belastet. Die Menge an textiler Bewehrung wird so gewählt, dass eine Mehrfachrissbildung auftreten kann. Ziel dieser Untersuchungen ist die experimentelle Ermittlung mittlerer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Textilbeton. Auf Grund der uniaxialen Beanspruchung können nur eindimensionale Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten gemessen werden. Im Rahmen des SFB 528 [CURBACH ET AL. 2007] wurden im Teilprojekt B1 Versuche vorwiegend an 500 mm langen, 50 mm breiten und 8 mm starken Textilbetonscheiben durchgeführt [JESSE 2004]. Durch Klemmbacken erfolgte die Kraftübertragung zwischen Prüfmaschine und Probekörper. Der Messbereich L war 200 mm lang, d. h. die gemessenen Längenänderungen auf den Probenoberflächen erlauben die Berechnung mittlerer Dehnungen

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \frac{\Delta L}{L} . \quad (9.1)$$

Die mittlere Spannung $\langle \sigma_{11} \rangle$ errechnet sich mit

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{F}{A_{\text{Probe}}} , \quad (9.2)$$

wobei A_{Probe} die Querschnittsfläche des Probekörpers bezeichnet. Abbildung 9.1 zeigt eine typische effektive Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Markant sind die drei Bereiche:

Bereich I: ungerissener Probekörper

Bereich IIa: Mehrfachrissbildung der Matrix

Bereich IIb: Rissöffnung nach Matrixrissbildung bis zum Versagen der Bewehrung.

Die Bereichsgrenzen sind nicht in jedem Fall dem Graphen eindeutig zuzuordnen. Deshalb wurden bisher die Schnittpunkte der linearen Approximationen (Ausgleichsgeraden) der Bereiche verwendet (vgl. Abb. 9.1). Hierzu werden die experimentell gewonnenen Daten bereichsweise mit einer Geraden approximiert, die mit der *Methode der Kleinsten Quadrate*¹⁴ unter Verwendung multilinearer Straffunktionen nach [BOYD & VANDENBERGHE 2004] bestimmt werden.

Ob diese Bereichsgrenzen wirklich die drei charakteristischen Phasen von Textilbeton kennzeichnen, ist zu bezweifeln, vgl. Abschnitt 8.6.1.

9.1.2 Rissabstände in Dehnkörpern

Die hier untersuchten Probekörper mit einer Länge von $L_{\text{Probe}} = 200 \text{ mm}$ und Rissabständen von ca. 5 bis 30 mm hatten nicht ausreichend viele Risse, um statistisch gesicherte Aussagen zum mittleren Rissabstand treffen zu können.

Abbildung 9.2 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten von Textilbetonproben bei Variation der Anzahl der Rovings bei gleicher Probengeometrie ($8 \times 100 \times 500 \text{ mm}^3$).

¹⁴ auch als *robust least square method* bezeichnet

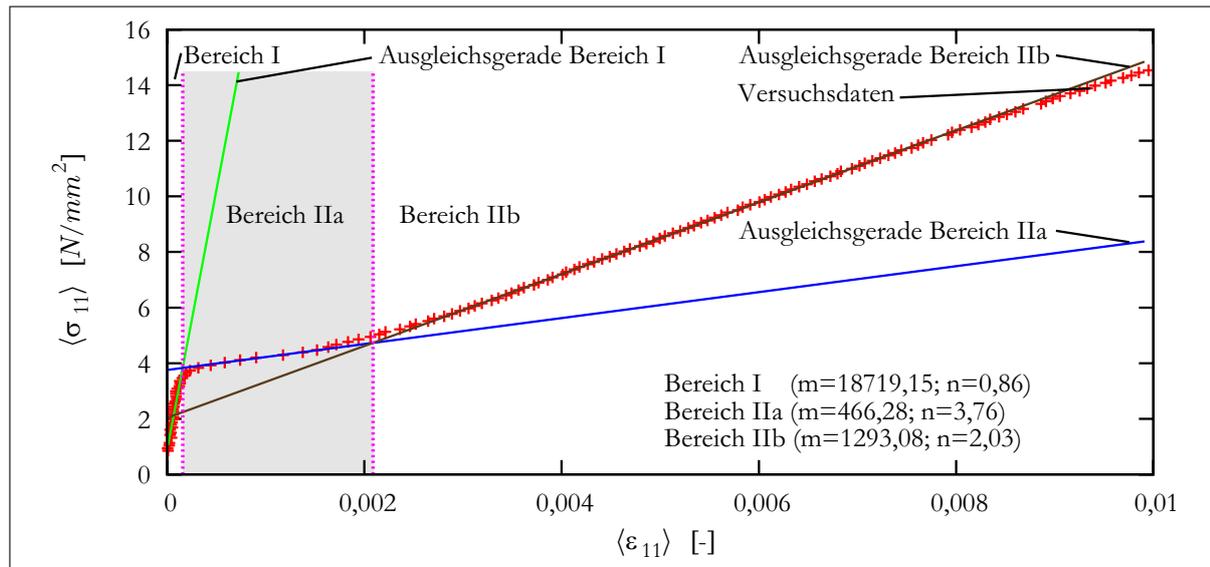


Abbildung 9.1: Uniaxialer Dehnkörperversuch

Das **MMM-Prognosemodell** ist in der Lage, mit einem Parametersatz das Tragverhalten von Textilbeton gut abzubilden (Abb. 2.3). Sowohl der Zustand der Rissbildung (Zustand *IIa*) als auch die Steifigkeit der Probe nach abgeschlossener Rissbildung (Zustand *IIb*) kann korrekt prognostiziert werden (9.2). Lediglich der Bruchzustand wird überschätzt, wobei aber auch die experimentell ermittelten Bruchgrenzen stark streuen. Dies ist u. a. auf das ungleichmäßige Öffnen des kritischen Matrixrisses im Probekörper kurz vor Erreichen der Maximallast zurückzuführen. Hierbei werden die Rovings ungleichmäßig beansprucht und das Versagen eines Rovings führt zu einem progressiven Versagen des gesamten Probekörpers. Die theoretische Festigkeit des Probekörpers wird praktisch nie erreicht. Weiterhin kann die Modellierung der Filamentfestigkeit zu ungenau sein, vgl. Abschnitt 9.1.4 und 9.1.5.

Die grau markierten Bereiche kennzeichnen den Bereich der Spannungs-Dehnung-Kurven, welche sich für Rissabstände $L_c \leq a \leq 2L_c$ ergeben. Der maximale Traglast ist mit einem Punkt gekennzeichnet.

Es handelt sich bei den in Abb. 9.2 angegebenen Simulationsergebnissen um **Prognosen**, da alle Modellparameter zur Simulation des Dehnkörperversuches anhand von unabhängigen Filamentauszugsversuchen, Filamentzugversuchen, Rovingauszugsversuchen und Rovingzugsimulationen identifiziert wurden. Außer der Rovinganzahl wurde kein Modellparameter variiert, d. h. es wurde keine Anpassung an die Experimentaldaten vorgenommen.

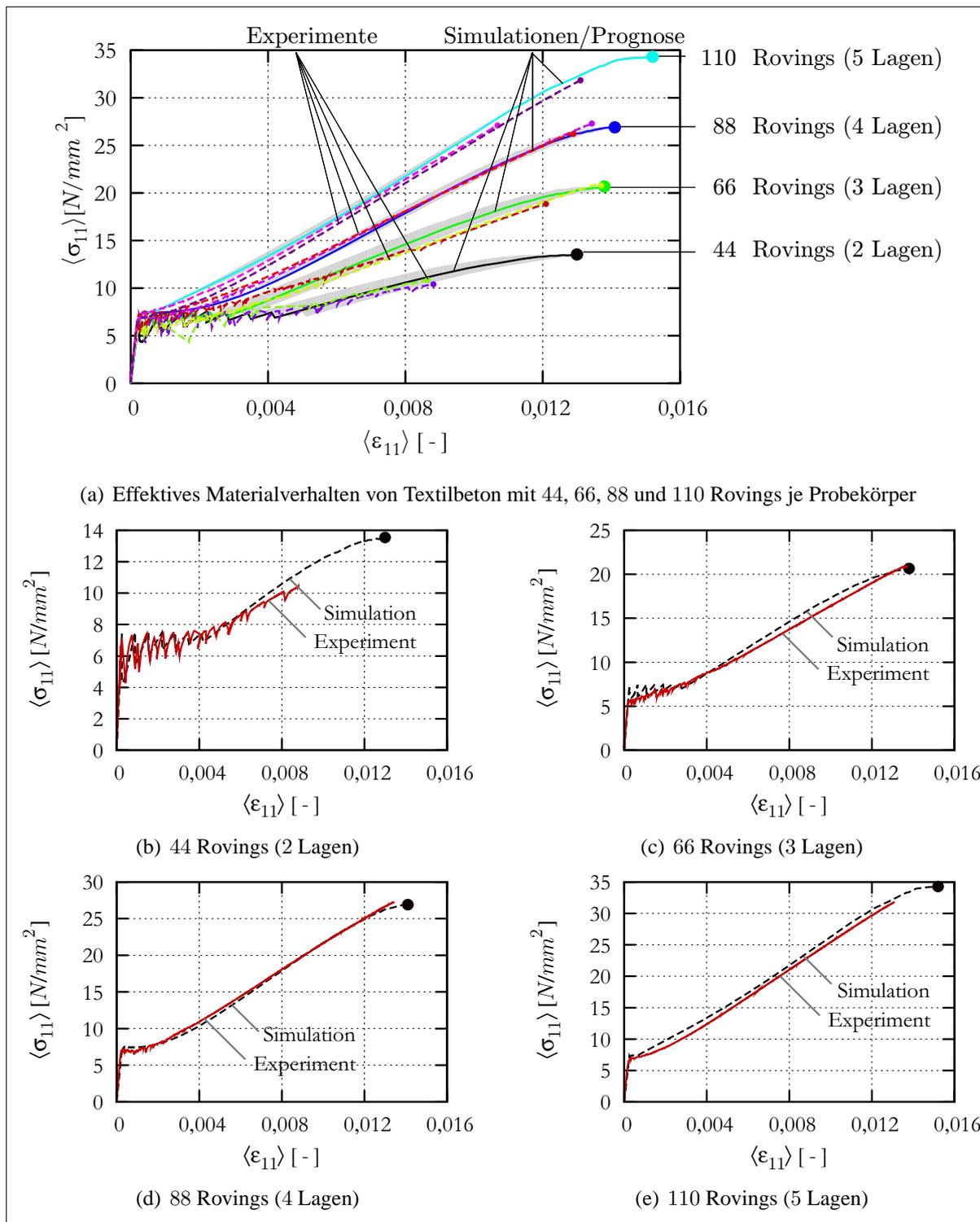


Abbildung 9.2: Dehnkörperversuch: Simulation und Experiment bei Variation der Rovinganzahl je Probekörper

9.1.3 Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Berücksichtigung des Nachbruchverhaltens von Feinbeton

Basierend auf der erfolgreichen Validierung des entwickelten **MMM-Prognosemodells für Textilbeton** soll der Einfluss des Nachbruchverhaltens des Feinbetons (Abb. 2.13(a)) auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Abb. 9.3) untersucht werden.

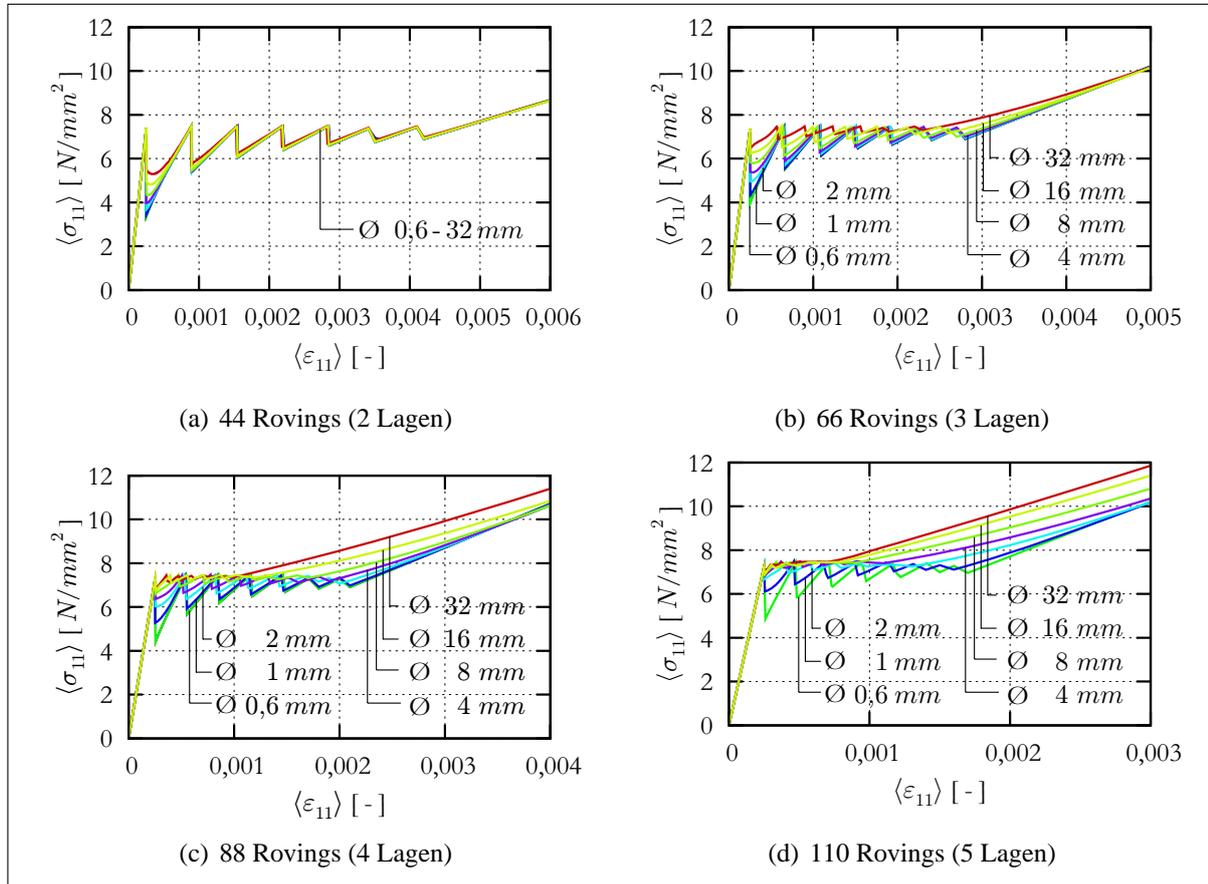


Abbildung 9.3: Einfluss des Nachbruchverhaltens des Feinbetons auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation des Größtkorns der Matrix)

Festzustellen ist, dass das Nachbruchverhalten des Betons nicht immer einen erkennbaren Einfluss auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton hat. Mit wachsendem Bewehrungsgrad wird das Rissbild feiner, d. h. die Rissabstände werden kleiner und damit auch die Rissbreiten bei gleicher mittlerer Dehnung des Probekörpers. Somit kann das Nachbruchverhalten deutlich das effektive Materialverhalten von Textilbeton beeinflussen.

Weil von einer geringen Streuung der Betonfestigkeit über die Probenlänge ausgegangen werden muss (vgl. zweilagige Probe in Abb. 2.3), ist die Neigung des Bereiches *IIa* der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit bei hohen Bewehrungsgraden nicht mit der Streuung der Betonfestigkeiten erklärbar. Vielmehr muss von der in Abbildung 9.1 dargestellten empirischen Bestimmung der Bereiche *IIa* und *IIb* Abstand genommen werden. Zusätzlich kann – basierend auf dem Nachweis des Einflusses des postkritischen Verhaltens von Beton – keine Aussage über den Schädigungsgrad der Rovings anhand der Neigung im Bereich *IIb* getroffen werden. Bei den simulierten Dehnkörperversuchen wurde die Anzahl der Risse konstant gehalten, d. h. die Probenlänge resultierte aus dem Produkt aus maximalen Rissanzahl und der ermittelten kritischen Risslänge L_c .

9.1.4 Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Filamentfestigkeitsvarianz

Gegenüber der Prognose des Verlaufes der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit von Textilbeton ist die Vorhersage des zugehörigen Versagenspunktes deutlich unschärfer. Dies rührt von dem Charakter der prognostizierten Eigenschaft her. Während der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit durch das mittlere Verhalten des Verbundwerkstoffes gekennzeichnet ist, ist der Versagenspunkt durch Extremwerte bestimmt. Eine Zugprobe versagt vollständig, wenn die Probe an der schwächsten Stelle versagt, d. h. ein einzelnes Rovingsversagen führt zum progressiven Versagen des ganzen Probekörpers.

Abbildung 9.4(a) zeigt die mit dem **MMM-Prognosemodell** prognostizierte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit bei Variation der Filamentfestigkeitsvarianz, vgl. Abb. 9.4(b). Mit wachsendem Formparameter k der WEIBULL-Verteilung (vgl. Anhang F) verringert sich sowohl die Varianz der Filamentfestigkeiten (Abb. 9.4(b)) als auch der Bereich zwischen beginnender Rovingschädigung und Bruchlast Abb. 9.4(a).

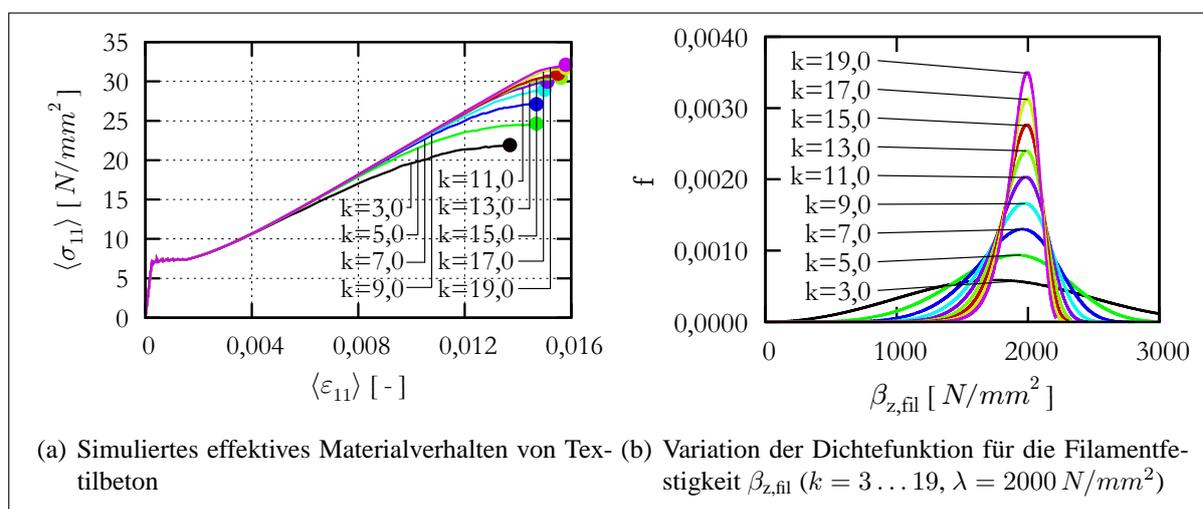


Abbildung 9.4: Einfluss der Filamentfestigkeitsverteilung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation des Formbeiwertes nach WEIBULL)

9.1.5 Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Filamentfestigkeitsmittelwerte

In Abbildung 9.5(c) ist das prognostizierte Materialverhalten von Textilbeton (**MMM-Prognosemodell**) bei Variation der Filamentfestigkeitsmittelwerte λ (Abb. 9.5(a) und 9.5(b)) dargestellt. Bemerkenswert sind die unterschiedlichen Bruchdehnungen in Abhängigkeit des Bewehrungsgehaltes der Probe.

Bei der hier durchgeführten Parametervariation ist der Versagenspunkt, d. h. die Traglast der simulierten Dehnkörperversuche, von Interesse. Anhand der experimentellen Ergebnisse in Abb. 2.3 kann die Vermutung aufgestellt werden, dass die maximale Bruchdehnung einer Textilbetonprobe nicht monoton mit dem Bewehrungsgrad wächst. Vielmehr kann auch mit der Anzahl der Rovings je Probekörper die Bruchdehnung optimiert werden.

Auch die Simulation zeigte die maximale Bruchdehnung nicht bei der Probe mit dem höchsten Bewehrungsgrad (143 Rovings), sondern bei 121 Rovings, vgl. Abb. 9.5(c). Dieser Effekt ist aber nur bei hohen mittleren Filamentfestigkeiten λ deutlich zu erkennen.

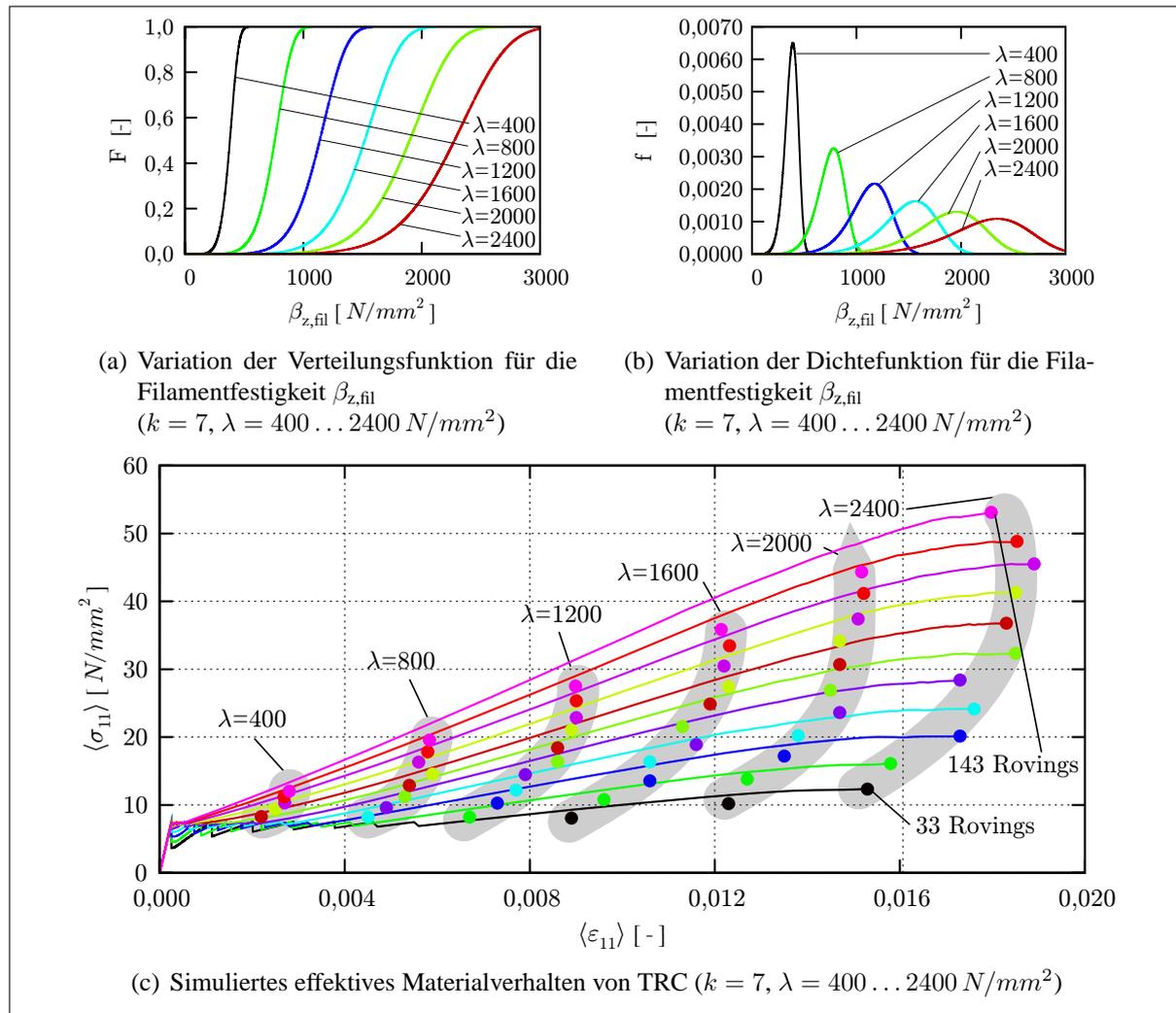


Abbildung 9.5: Einfluss der Filamentfestigkeitsverteilung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Variation der charakteristischen Festigkeit nach WEIBULL)

Mit geringer werdenden mittleren Filamentfestigkeiten λ kann auch die Mehrfachrissbildung des Dehnkörpers ausbleiben, d. h. nach der Erstrissbildung versagen die Rovings, bevor infolge des Verbundes zwischen der Bewehrung und der Matrix ein neuer Matrixriss entstehen kann. Dies ist z. B. bei $\lambda = 1200 \text{ N/mm}^2$ und 33 Rovings je Probekörper der Fall (Abb. 9.5(c)).

9.1.6 Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der Matrixbruchspannung

Auch die Bruchspannung der Matrix hat einen Einfluss auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton. Abbildung 9.6 zeigt das simulierte Verhalten einer Dehnkörperprobe (MMM-Prognosemodell) mit jeweils 44, 66, 88 und 110 Rovings in einer Matrix mit Bruchspannungen von 5,0, 7,0, 9,0 und 11,0 N/mm^2 .

Die Bruchspannung der Matrix hat keinen Einfluss auf die Traglast, da diese von der Rovingfestigkeit bestimmt wird. Die Bruchdehnung kann jedoch gesteigert werden, wenn der Bewehrungsgrad erhöht wird. Zusätzlich verlängert sich der Bereich der Rissbildung (Bereich *IIa*) mit steigender Rovinganzahl.

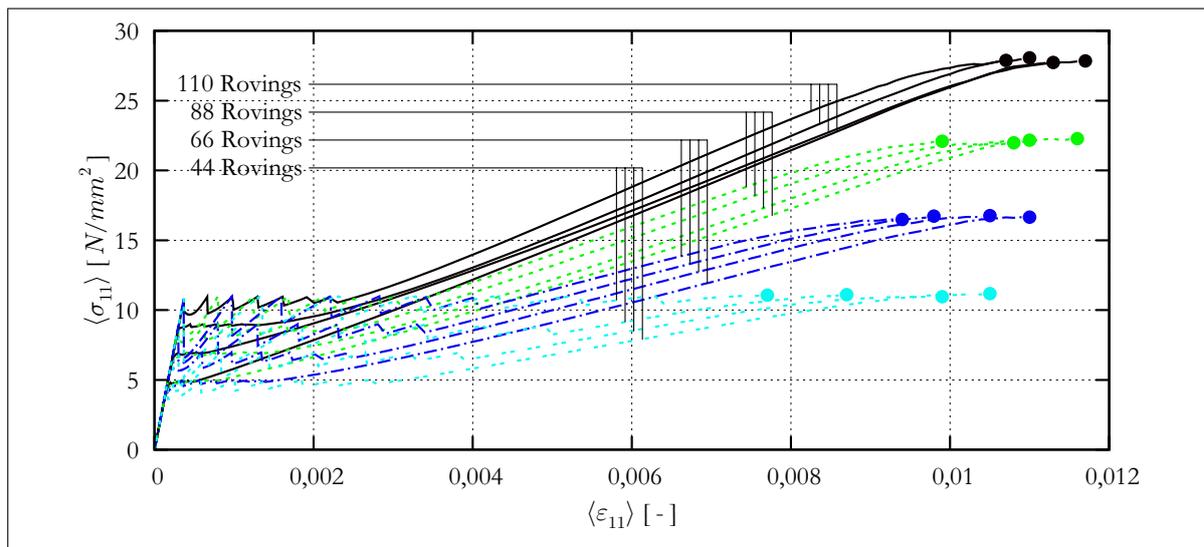


Abbildung 9.6: Einfluss der Matrixbruchspannung auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton

9.1.7 Prognose des effektiven Materialverhaltens von Textilbeton bei Variation der elastischen Eigenschaften des Fasermaterials

Das Bewehrungsmaterial hat einen signifikanten Einfluss auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton. Dies ist hauptsächlich auf die unterschiedlichen E-Moduli und die unterschiedlichen Festigkeiten zurückzuführen.

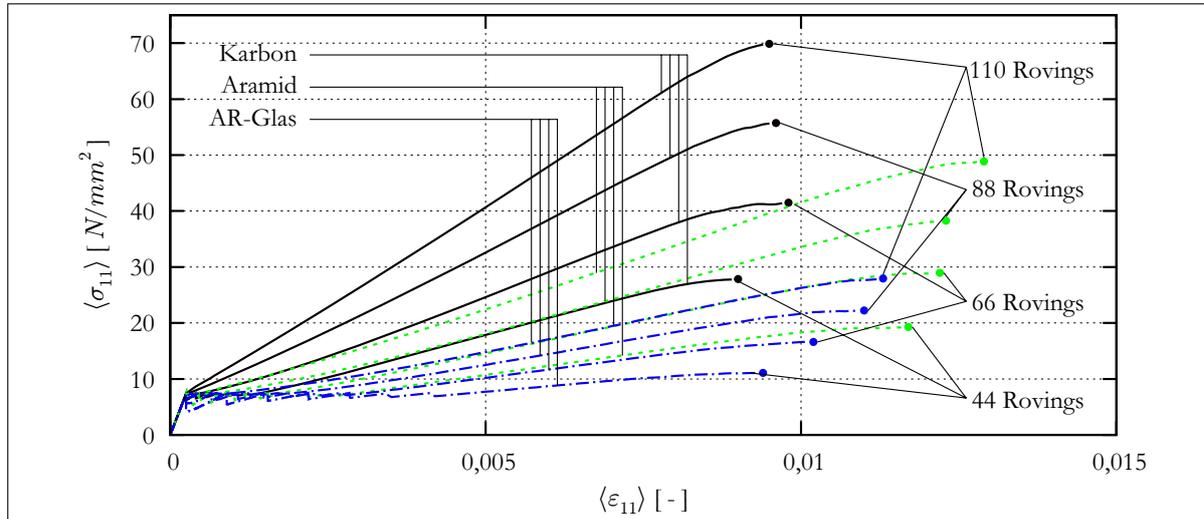


Abbildung 9.7: Einfluss des Fasermaterials auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton

Abbildung 9.7 zeigt das prognostizierte effektive Materialverhalten von Textilbeton (**MMM-Prognosemodell**) mit einer Aramid-, Karbon- und AR-Glasbewehrung. Die Garnfeinheit der Rovings und die Verbundbeziehungen wurden nicht variiert, d. h. es wurde ein 620 *tex* Roving ($a : b = 1 : 5$) mit der für AR-Glas identifizierte Verbundbeziehung verwendet.

Erwartungsgemäß bewirkt die hochmodulige Karbonfaser ($E = 215000 N/mm^2$) das steifste effektive Materialverhalten. AR-Glasrovings ($E = 78000 N/mm^2$) zeigen das weichste Verhalten. Die Aramidfaser mit einem E-Modul von ca. $E = 125000 N/mm^2$ nimmt eine Mittelstellung ein.

Trotz einer hohen Bruchspannung $\beta_{z,\text{Karbon}}$ von 4000 N/mm^2 ist die effektive Bruchdehnung der Karbon-Textilbeton-Proben geringer als die der beiden anderen Fasermaterialien ($\beta_{z,\text{Aramid}} = 2800 \text{ N/mm}^2$, $\beta_{z,\text{AR-Glas}} = 1600 \text{ N/mm}^2$).

Fazit

Das **MMM-Prognosemodell** kann das uniaxiale Materialverhalten von Textilbeton mit Mehrfachrissbildung simulieren und prognostizieren. Die Modellparameter wurden anhand von Filamentauszugsversuchen (Abschnitt 8.2.4), Rovingauszugsversuchen (Abschnitt 8.5.2) und simulierten Faserbündelversuchen (Abschnitt 8.4) identifiziert. Nur durch Variation der Bewehrungsmenge (Variation der Rovinganzahl) ist also das effektive Materialverhalten von orthogonal bewehrten Zugproben prognostizierbar.

9.2 Simulation textilbetonverstärkter Platten unter Biegebeanspruchung

Die in Abschnitt 9.1 bestimmten mittleren Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten sollen im Folgenden auf Balken bzw. Platten im 4-Punkt-Biegeversuch (4PBV) angewendet werden.

Eine wesentliche Annahme für die im Folgenden verwendete Balkenlösung stellt die BERNOULLI-Hypothese dar, welche das Ebenbleiben aller Querschnitte senkrecht zur Balkenachse annimmt. Für ungerissene, homogene Balken gilt diese Annahme sogar für allgemeine Querkraftbiegung in sehr guter Näherung. Weist der Balken einen einzelnen Riss auf, gilt diese Hypothese jedoch nicht mehr für einen beliebig gewählten Querschnitt im Balken. Abbildung 9.8(a) zeigt eine dünne Textilbetonplatte im 4-Punkt-Biegeversuch. Offensichtlich gilt trotz der Vielzahl der Risse in diesem

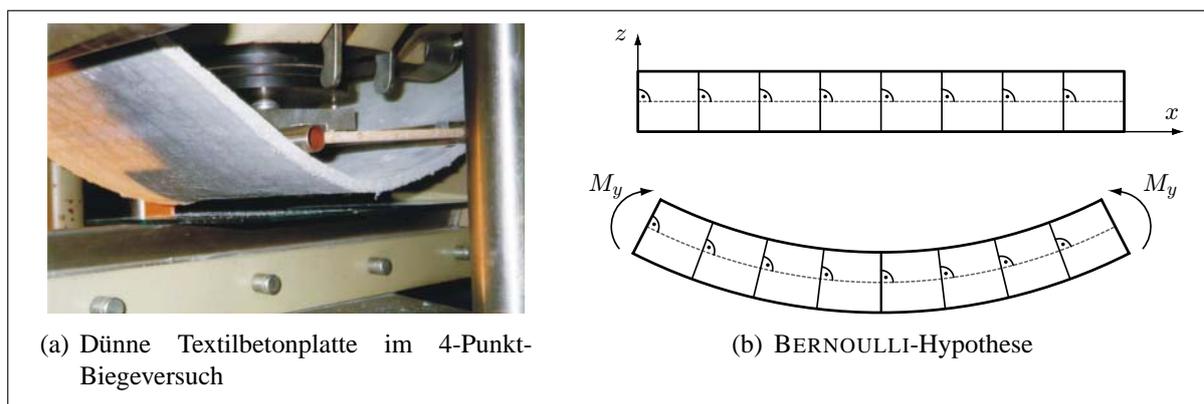


Abbildung 9.8: Biegung von Bauteilen mit Makrorissen

Bauteil die BERNOULLI-Hypothese im Mittel, d. h. ist die Rissbildung nicht auf einen Ort lokalisiert und wird ein Balkenabschnitt mit einer ausreichenden Anzahl an Rissen homogenisiert betrachtet, so ist die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte anwendbar.

Die Länge L der Platte (Abb. 9.9) wird in n_x -Bereiche unterteilt und die Höhe H wird schichtweise (n_z Schichten) approximiert. Jeder Schicht wird eine Breite B^i und ein eindimensionales nichtlineares Materialgesetz zugewiesen, d. h. das Betonverhalten, das Verhalten des Stahlbetons und das Materialverhalten von Textilbeton wird formuliert.

Für die lineare Dehnungsverteilung $\varepsilon_x(z)$ über den Querschnitt gilt

$$\varepsilon_x(z, \kappa) = (z_0 - z) \kappa, \quad (9.3)$$

wobei die Krümmung κ ($\kappa = 1/R$ mit R als Krümmungsradius) und z_0 die Lage der Nulllinie entsprechend der Belastung angibt. Im Falle reiner Biegung gilt

$$\int_{z=0}^H \sigma_x(z) B(z) dz = 0, \quad (9.4)$$

d. h. für jede Krümmung κ ist die Lage der Nulllinie neu zu bestimmen, wenn das Materialverhalten nichtlinear ist. Basierend auf dieser Nulllinie kann das Biegemoment M_y mit

$$M_y(\kappa) = \int_{z=0}^H (z - z_0) \sigma_x(z) B(z) dz \quad (9.5)$$

ermittelt werden. Das Moment $M_y(x)$ ist hierbei proportional zur Krümmung $\kappa(x)$

$$M_y(x) \sim \kappa(x). \quad (9.6)$$

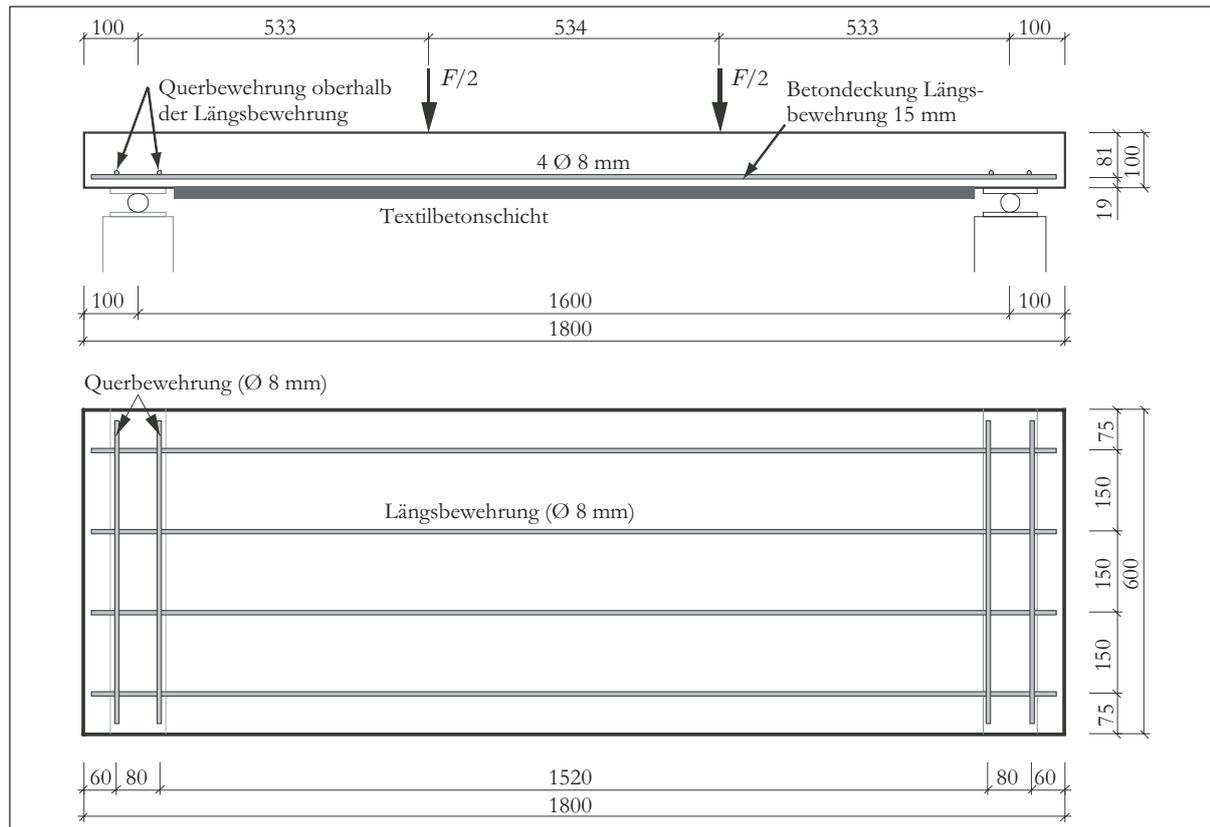


Abbildung 9.9: Textilbetonverstärkte Stahlbetonplatte [WEILAND et al. 2006]

Weiterhin gilt die Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{w_z'''}{(1 + w_z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R(x)} = \kappa(x) \quad (9.7)$$

mit $w_z' = dw_z/dx$ und $w_z'' = d^2w_z/dx^2$. Für $w_z'^2 \ll 1$ kann näherungsweise

$$w_z'' \approx \frac{1}{R(x)} = \kappa(x) \quad (9.8)$$

für die Differentialgleichung der Biegelinie angenommen werden. Die Verdrehung $\varphi_y(x)$ und die Durchbiegung $w_z(x)$ des Balkens kann durch Integration von Gleichung (9.7) bzw. (9.8) berechnet werden, wobei die entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen berücksichtigt werden müssen.

Die Bestimmung der Kraft-Verformungs-Abhängigkeiten erfolgt numerisch. Für jede vorgegebene Krümmungsfunktion $\kappa(x)$ wird die Spannungsfunktion $\sigma(x, z)$ über die Trägerquerschnitte berechnet, für die das Tragwerk im Gleichgewicht der Kräfte und Momente steht. Damit kann die Biegemomentverteilung $M_y(x)$ quantitativ als Funktion der Krümmungen $\kappa(x)$

$$M_y(x) = f(\kappa(x)) \quad (9.9)$$

angegeben werden.

Simulation der Stahlbetonplattenbiegung

Im Folgenden soll eine Stahlbetonplatte (1600 × 600 × 100) im 4-Punkt-Biegeversuch untersucht werden, die zusätzlich mit einer Textilbetonlage verstärkt ist (Abb. 9.9). Für den Beton C20/25

gilt eine Arbeitskurve gemäß Abschnitt 2.4. Das Materialgesetz für die Stahlbetonschicht wurde aus einem simulierten Dehnkörperversuch mit einem für Stahlbeton modifizierten **Meso-Makro-Prognosemodell** ermittelt. Das Materialgesetz für den Stabstahl ersetzt das effektive Rovingverhalten in dem **MMM-Prognosemodell**, sodass das Fließen der Stahlbewehrung berücksichtigt werden konnte.

Abbildung 9.10(a) zeigt für ein vorgegebenes Dehnungsprofil über der Plattenhöhe das entsprechende Normalspannungsprofil für die in Abb. 9.9 abgebildete Platte ohne Textilbetonschicht. Der Vergleich von Simulation und Experiment ist in Abb. 9.10(b) dargestellt.

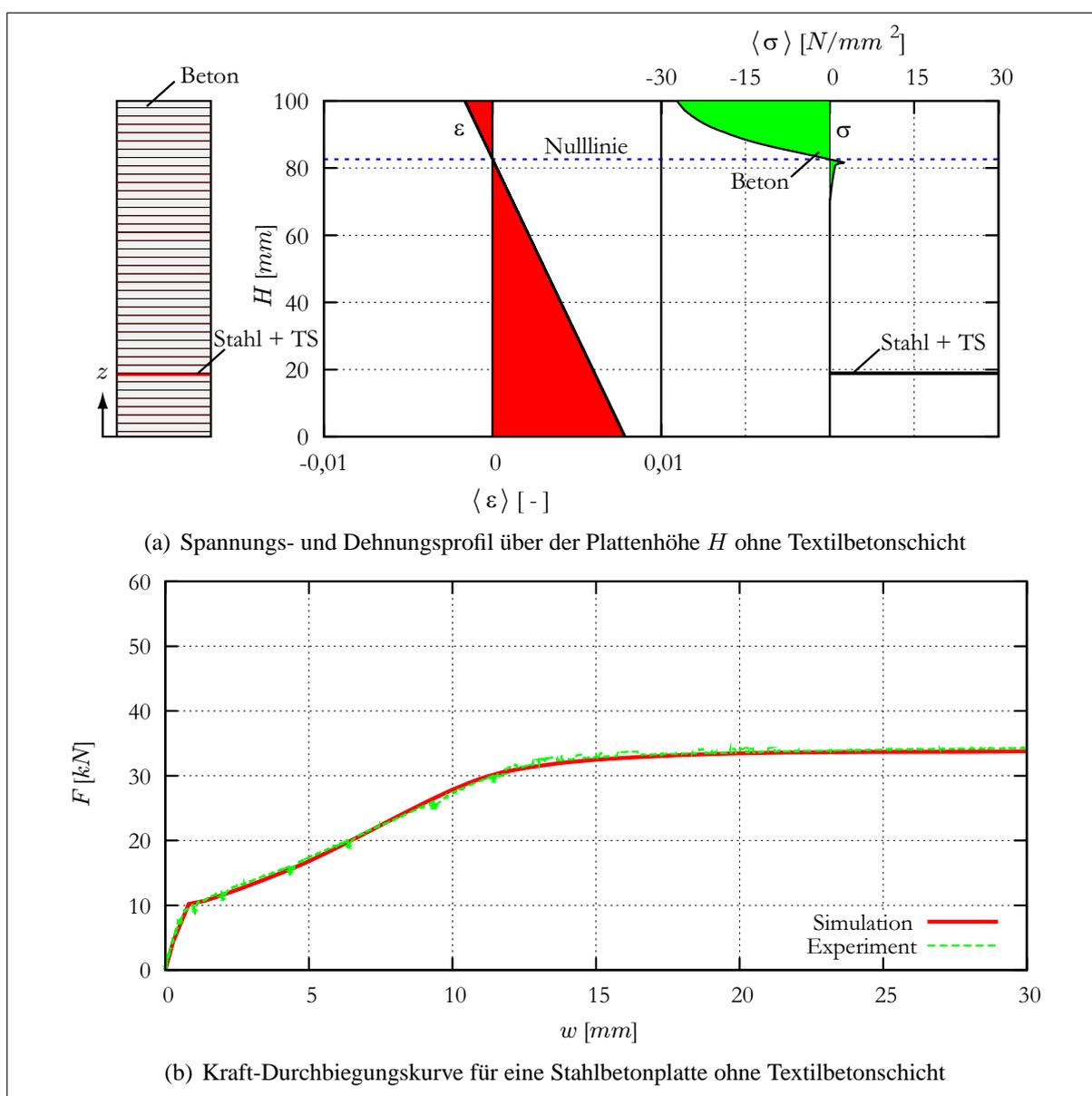


Abbildung 9.10: Simulation des Verhaltens einer unverstärkten Stahlbetonplatte im 4-Punkt-Biege-Versuch

Simulation der Stahlbetonplattenbiegung mit einer zusätzlichen Textilbetonschicht

Wird eine zusätzliche Schicht aus Textilbeton (5 mm TRC - 3 Lagen $VET-ARG2400/10, 8\text{ mm}$) auf der Zugseite der Platte appliziert, verändern sich die Spannungsprofile über die Plattenhöhe

gemäß Abb 9.11(a). Der Textilbetonschicht wurde das entsprechende effektive Materialverhalten von Textilbeton – basierend auf dem **MMM-Prognosemodell** – zugewiesen.

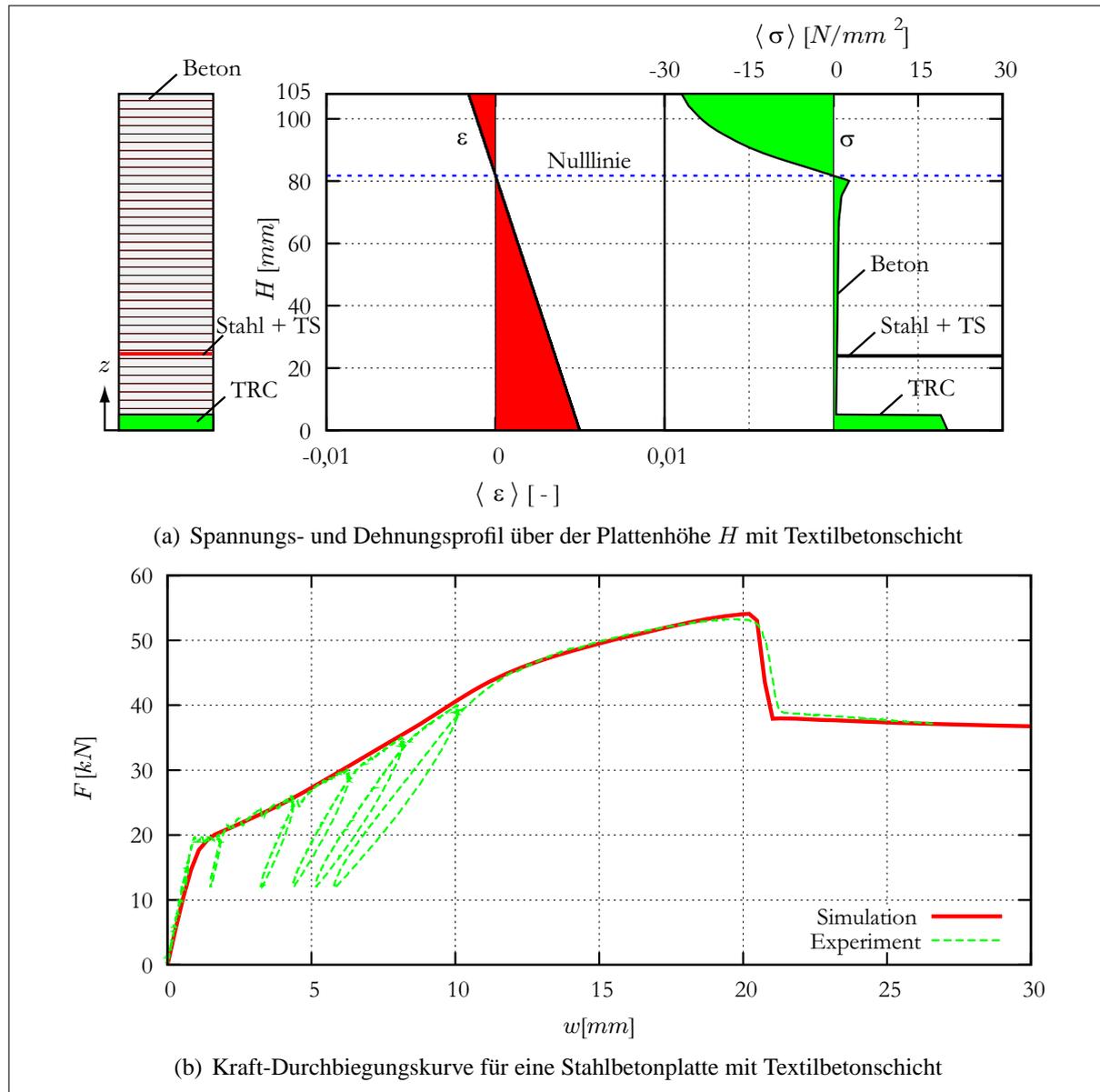


Abbildung 9.11: Simulation des Verhaltens einer textilbetonverstärkten Platte im 4-Punkt-Biege-Versuch

Den Vergleich von Simulation und Experiment der Platte mit einer zusätzlichen Textilbetonschicht zeigt Abb. 9.11(b). Gegenüber dem Stahlbetonplattenversuch (Abb. 9.10(b)) ist eine deutliche Erhöhung der Bruchlast zu erkennen. Nachdem die textile Bewehrungsschicht versagt hat, sinkt die Kraft auf das Niveau ab, das maßgeblich durch die Stahlbewehrung bestimmt ist.

Verglichen mit der Maximallast der unverstärkten Platte (Abb. 9.10(b)), ist eine etwas größere Kraft mess- und simulierbar, da der Rissabstand der Stahlbetonplatte infolge des sehr feinen Rissbildes in der Textilbetonschicht einen größeren Tension-Stiffening-Effekt (TS) bewirkt (vgl. Abb. 9.12).

Das Fließen der Stahlbewehrung ist zu diesem Zeitpunkt zwischen den Rissufern des Makrorisses eingetreten.

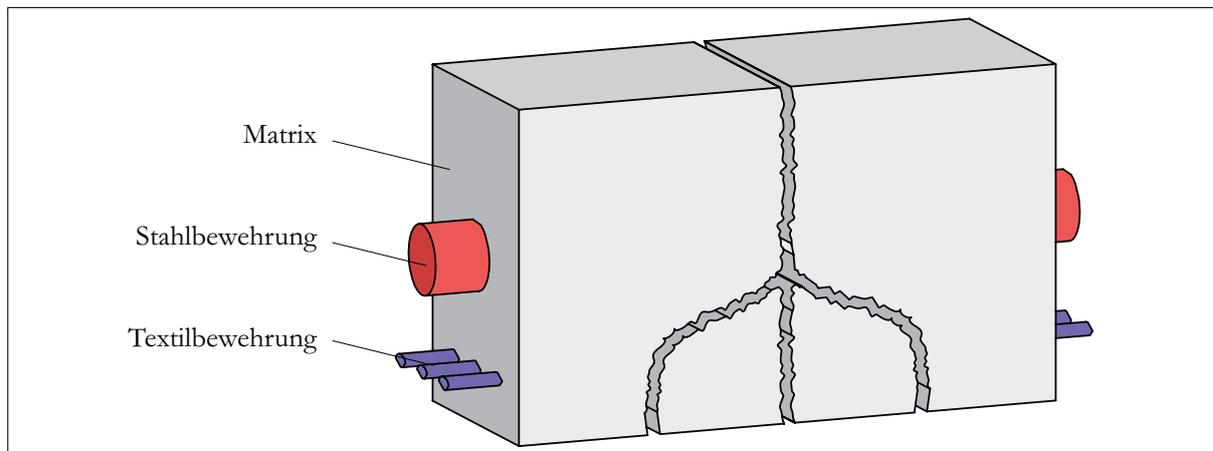


Abbildung 9.12: Sammelriss im Stahlbeton-Textilbetonverbund

Im Vergleich mit der unverstärkten Stahlbetonplatte ist das Nachbruchverhalten des Betons unter Zugbeanspruchung von Bedeutung. Durch das zusätzliche Mittragen der Textilbetonschicht unter Biegebeanspruchung und die geringen Rissabstände in der Textilbetonschicht kommt es zu deutlich dichteren Rissabständen in der Höhe der Stahlbewehrung. Einige Risse in der Textilbetonschicht bilden einen Sammelriss (Abb. 9.12) in der Stahlbetonplatte, vgl. [WEILAND et al. 2006].

Fazit

Das entwickelte Makromodell zur Abbildung von Platten-, Balken- bzw. Plattenbalkenversuchen kann das experimentell ermittelte Verhalten realitätsnah simulieren. Ausgehend von der Simulation der Stahlauszugsversuche aus einer Betonmatrix konnte das Verbundverhalten des Stahl-Betonmatrix-Verbundes (Stahl + tension stiffening effect (TS), vgl. Anhang C.2) mit dem semi-analytischen Verbundmodell **Me-I** (vgl. Abschnitt 8.2) identifiziert werden.

Mit dem **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell** kann für jede Belastungsphase des Plattenversuches entsprechend der Dehnung der Textilbetonschicht eine Spannung angegeben werden. Durch die Kenntnis der zugehörigen Beanspruchungszustände auf der Mikro- und der Mesoebene kann somit eine partielle Rovingsschädigung und die Rissbreite w der Textilbetonschicht simuliert werden.

10 Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Simulation und der Prognose des Materialverhaltens des Hochleistungsverbundwerkstoffes Textilbeton unter Zugbeanspruchung. Hierbei wurden simultane und hierarchische Multi-Skalen-Methoden angewendet bzw. entwickelt.

Basierend auf idealisierten Betrachtungen des heterogenen Verbundwerkstoffes wurde ein hierarchisches Materialmodell für Textilbeton erarbeitet (Abb. 10.1). Dieses Modell beschreibt das Tragverhalten flächig in einer Feinbetonmatrix angeordneter textiler Bewehrungen auf drei Strukturebenen: der Mikro-, der Meso- und der Makroebene.

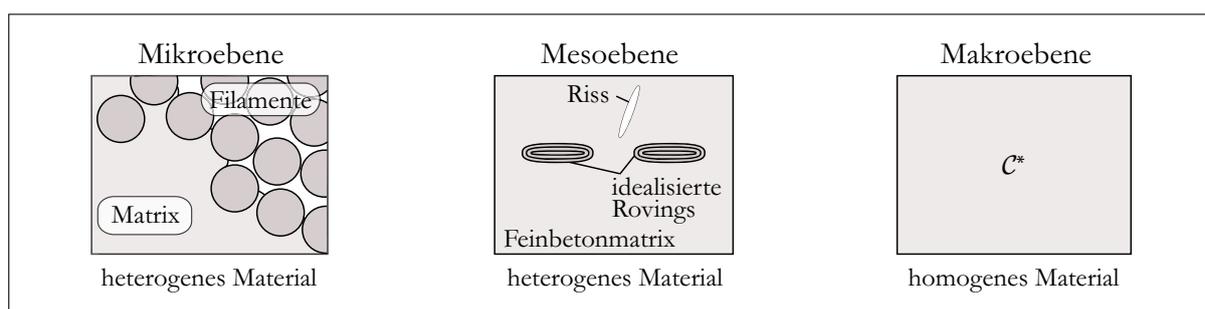


Abbildung 10.1: Eingeführte Strukturebenen für das Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell für Textilbeton

Mittels Homogenisierungsstrategien wurden die drei Strukturebenen im Rahmen einer Multi-Skalen-Analyse verknüpft. Damit konnte das dreidimensionale, anisotrope elastische Verhalten von Textilbeton für beliebige Bewehrungsstrukturen mit Hilfe numerischer Simulationen von entsprechenden repräsentativen Volumenelementen bestimmt werden. Für typische multiaxiale Bewehrungsstrukturen wurden der Typ der Anisotropie bestimmt und die zugehörigen elastischen Komponenten des Elastizitätstensors für Textilbeton bestimmt und grafisch repräsentiert.

Die simultane Multi-Skalen-Methode FE^2 wurde auf ihre Anwendbarkeit auf den Verbundwerkstoff Textilbeton getestet. Sie ist aber auf Grund des enormen numerischen Aufwandes nur für kleine Problemstellungen geeignet.

Speziell für uniaxial zugbeanspruchten Textilbeton wurde ein Simulations- und Prognosewerkzeug – das **Mikro-Meso-Makro-Prognose-Modell** – entwickelt, welches das Materialverhalten von Textilbeton mit den typischen Schädigungs- und Versagensmechanismen unter Berücksichtigung der unscharfen Eigenschaften der Einzelwerkstoffe und der nichtlinearen Verbundbeziehungen simulieren kann.

Es wurden das Reißen der Einzelfilamente (Mikroebene), das Reißen der Multifilamentgarne (Mikroebene und Mesoebene), das Verbundversagen des Einzelfilamentes (Mikroebene), das Verbundversagen innerhalb des Rovings sowie zwischen Roving und Matrix (Mesoebene) und das Reißen des Feinbetons (Mesoebene) abgebildet, um den Einfluss auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton (Makroebene) anzugeben.

Durch modulare Verknüpfung der Modelle auf der Mikro-, Meso- und Makroebene wurden die relevanten Tragmechanismen von Textilbeton simuliert, um das effektive Materialverhalten von Textilbeton mit modifizierten Einzelwerkstoffeigenschaften zu prognostizieren.

Auf der Mikroebene wurden die einzelnen Filamente des Rovings betrachtet. Aufbauend auf detaillierten mikromechanischen Finite-Elemente-Simulationen wurden effiziente Faserbündelmodelle abgeleitet, welche die Bündeltragwirkung partiell imprägnierter Rovings simulieren, um das effektive Materialverhalten der Rovings auf der Mesoebene abzubilden.

Zur Beschreibung des Verbundes der textilen Bewehrung mit der Feinbetonmatrix wurde ein semi-analytisches Verbundmodell entwickelt, das ohne Einschränkung auf den qualitativen Verlauf der Verbundbeziehung, basierend auf experimentell bestimmten Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeiten aus Auszugsversuchen, das Verbundgesetz identifizieren kann. Dieses Verbundmodell wurde zur Bestimmung der Verbundeigenschaften der Materialpaarungen AR-Glas/Feinbetonmatrix und Stahl(gerippt)/Beton angewendet.

Zur Beschreibung des Verbundverhaltens von Rovings wurde das semi-analytische Verbundmodell durch Implementierung von Rovingmodellen erweitert. Durch Verknüpfung der mikromechanischen Faserbündelmodelle mit dem mesomechanischen Verbundmodell konnten die Verbundqualitäten in partiell imprägnierten Rovings identifiziert werden, welche mit der derzeit verfügbaren Messtechnik nicht bestimmbar sind.

Das entwickelte **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell** bildete die Grundlage für die Simulation der Dehnkörperversuche an Textilbetonproben unter Berücksichtigung der sukzessiven Roving-schädigung und der nichtlinearen Verbundbeziehungen. Weiterhin wurde der Einfluss des Nachbruchverhaltens der Feinbetonmatrix auf das Tragverhalten einer Textilbetonprobe in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad gezeigt. Niedrige Bewehrungsgrade bewirken so große Rissbreiten im Textilbeton, dass kein Einfluss des Nachbruchverhaltens der Matrix auf das effektive Materialverhalten von Textilbeton festgestellt werden konnte. Mit steigendem Bewehrungsgrad verkürzt sich der Bereich *IIa* (Rissbildungsphase) der Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit und der Bereich *IIb* zeigt eine zunehmende Nichtlinearität. Als Ergebnis konnte festgestellt werden, dass die Streuung der Matrix-Zugfestigkeit nur einen sehr geringen Einfluss auf die Neigung der Trendlinien in den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen hat. Vielmehr beeinflusst das Nachbruchverhalten der Matrix die Steifigkeit von Textilbeton im Zustand *IIb*. Anhand der Neigung der Trendlinie im Bereich *IIb* kann demzufolge nur bedingt eine Aussage zur Schädigung der Textilbewehrung getroffen werden.

Ausgehend von den streuenden (unscharfen) Festigkeiten der Einzelfilamente und der ungleichmäßigen Beanspruchungen im Roving wurde das effektive Rovingverhalten simuliert, welches in einem mesoskopischen Verbundmodell zur Simulation der Mehrfachrissbildung des Feinbetons benutzt wurde, um das effektive Materialverhalten von Textilbeton unter zyklischen Zugbeanspruchungen abbilden und prognostizieren zu können.

Das **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodell** für Textilbeton wurde im Rahmen einer Multi-Skalen-Analyse auf eine textilbetonverstärkte Stahlbetonplatte angewendet, wobei das nichtlineare Bauteilverhalten infolge einer Biegebeanspruchung auf drei Strukturebenen abgebildet wurde. Jedem Verformungszustand des Tragwerkes infolge einer Belastung konnte eine entsprechende Rovingbeanspruchung bzw. eine Beanspruchung der Einzelfilamente im Roving zugeordnet werden.

10.2 Ausblick

Aufbauend auf der Prognose des uniaxialen effektiven Materialverhaltens von TRC ist eine Erweiterung des **Mikro-Meso-Makro-Prognosemodells** auf multiaxiale Beanspruchungen unter Berücksichtigung von multiaxialen Bewehrungsstrukturen möglich. Experimentelle Voruntersuchungen zum multiaxialen Materialverhalten von Textilbeton zeigen eine gegenseitige Beeinflussung der sich entwickelnden Rissysteme sowie ein belastungspfadabhängiges Materialverhalten.

Ein hierarchisches multiaxiales Materialmodell für Textilbeton sollte schubbeanspruchte Matrixrisse abbilden können. Ferner ist die rissüberbrückende Rovingtragwirkung mit einer zusätzlichen Rovingschädigung infolge der Umlenkung an den Rissufern der Matrix zu berücksichtigen. Faserbündelmodelle stellen aus Sicht des Verfassers eine vielversprechende Methode zur effizienten Simulation des Rovingverhaltens dar.

Im Hinblick auf eine simultane Mehrskalenanalyse von Textilbeton sollte der Schwerpunkt weiterer Forschung auf der Entwicklung vereinfachter mechanischer Modelle liegen, die das multiaxiale Materialverhalten von Textilbeton auf den hierarchischen Strukturebenen hinreichend genau simulieren können, damit Problemstellungen aus der Ingenieurpraxis gelöst werden können. Die in der Arbeit entwickelten Submodelle des **MMM-Prognosemodells** könnten hierfür Ausgangspunkt sein.

Die besondere Eignung von Textilbeton für eine filigrane Bauweise führt zu leichten Flächentragwerken. Eine Kopplung von makroskopischen Strukturmodellen mit den meso- und mikromechanischen Textilbetonmodellen würde zu realitätsnahen Simulationen komplexer Tragwerksbeanspruchungen führen, welche z. B. das dynamische Schwingungsverhalten von Schalenträgwerken mit Berücksichtigung des inelastischen anisotropen Materialverhaltens von Beton abbilden können. Hierzu sind die in der Arbeit entwickelten Modelle zu erweitern, um das Dämpfungsverhalten der gerissenen Textilbetonbauteile abschätzen zu können. Ausgangspunkt könnte die Simulation des zyklischen Verhaltens von Textilbeton sein, welche im Rahmen dieser Arbeit begonnen wurde. Das entwickelte **MMM-Prognosemodell** enthält keine zusätzlich eingeführten Einschränkungen, um die Be- und Wiederbelastungsphasen abbilden zu können.

Ein weiterer Punkt stellt die Durchführung und Auswertung geeigneter Experimente mit Textilbetonproben dar. Der Verfasser ermutigt den Leser die Welten der Modell- und Experimentaldaten zu verbinden. Die Arbeit an einem interdisziplinären Thema eröffnet oft neue Möglichkeiten zur Modellvalidierung, aber auch zu besseren Versuchsinterpretationen. Eine dieser neuen Möglichkeiten stellt die Kenntnis der kompletten Verzerrungszustände mittels photogrammetrischer Verschiebungsbestimmungen während der Versuchsdurchführung dar. Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Methode zur Bestimmung der Verzerrungsfelder in einer Probe mittels zweidimensionaler Spline-Funktionen kann bei der Entwicklung neuer multiaxialer Materialmodelle hilfreich sein.

Literaturverzeichnis

- ABAQUS (2002). *ABAQUS User's Manual – Version 6.3*, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
- ABDKADER, A. (2004). *Charakterisierung und Modellierung der Eigenschaften von AR-Glasfilamentgarnen für die Betonbewehrung*. Technische Universität Dresden, Institut für Textil- und Bekleidungstechnik, Dissertation
- ALBRECHT, W.; FUCHS, H.; KITTELMANN, W. (2000). *Vliesstoffe*. WILEY-VCH Verlag
- ALTENBACH, J.; ALTENBACH, H. (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner-Studienbücher: Mechanik. Teubner Verlag, Stuttgart
- ALVAREZ, M. (1998). *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für Baustatik und Konstruktion, Dissertation
- BATHE, K.-J. (1990). *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin
- BAYREUTHER, C. (2005). *Mehrskalennmodelle in der Festkörpermechanik und Kopplung von Mehrgittermethoden mit Homogenisierungsverfahren*. Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Dissertation
- BAZANT, Z. P.; NOVAK, D. (2000). *Probabilistic Nonlocal Theory for Quasibrittle Fracture Initiation and Size Effect – I: Theory*. Journal of Engineering Mechanics 126(2):166–174
- BAZANT, Z.; PRAT, P. (1988). *Microplane Model for Brittle-Plastic Material: 1. Theory*. Journal of Engineering Mechanics, 117(10):1672–1687
- BENTUR, A.; MINDESS, S. (1990). *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. Elsevier Applied Science, London
- BERGER, W.; BOBETH, W.; FAULSTICH, H.; FISCHER, P. (1993). *Textile Faserstoffe – Beschaffenheit und Eigenschaften*. Springer-Verlag, Heidelberg
- BETONBOOTTEAM-TU-DRESDEN (2007). *Betonboote*. <http://www.betonboot.de/>
- BEYERLEIN, I.; PHOENIX, S. (1996). *Stress Concentrations Around Multiple Fiber Breaks in an Elastic Matrix with Local Yielding or Debonding Using Quadratic Influence Superposition*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids - Elsevier, 44:1997-2039
- BÖHLKE, T.; BRÜGGEMANN, C. (2001). *Graphical Representation of the Generalized Hooke's Law*. Technische Mechanik, 21(2):145–158
- BÖHM, H. (1998). *A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics*. Technische Universität Wien, Institut für Leichtbau und Flugzeugbau, CDL-FMD-Report 3
- BOGDANOVICH, A.; PASTORE, C. (1996). *Mechanics of Textile and Laminated Composites – with Applications to Structural Analysis*. Chapman and Hall Ltd., London
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge
- BROCKMANN, T. (2005). *Mechanical and Fracture Mechanical Properties of Fine Grained Concrete for Textile Reinforced Composites*. RWTH Aachen, Institut für Bauforschung, Dissertation
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.; MUSIOL, G.; MÜHLIG, H. (2000). *Taschenbuch der Mathematik – Bronstein*. Harri Deutsch Verlag, 5. Aufl., Frankfurt/M.
- BUTLER, M. (2000). *Anpassung des zentrischen Zugversuches für Untersuchungen zum Verbundverhalten von unidirektional angeordneten Rovings in zementgebundener Matrix bei Unterbewehrung*. Technische Universität Dresden, Institut für Baustoffe, Diplomarbeit
- BUTLER, M.; HEMPEL, R.; GÖTZE, M.; HEMPEL, S. (2004). *Mechanismen und Dauerhaftigkeit des Verbundes polymerbeschichteter AR-Glasfasern in Beton*. Schriftenreihe des Instituts für Baustoffe der TU Dresden, Bd. 2

- CAROL, I.; JIRASEK, M.; BAZANT, Z. (2001). *A Thermodynamically Consistent Approach to Microplane Theory – Part I: Free Energy and Consistent Microplane Stresses*, International Journal of Solids and Structures, 38(17):2921–2931
- CAUVIN, A.; TESTA, R. B. (1999). *Damage Mechanics: Basic Variables in Continuum Theories*. International Journal of Solids and Structures, (36):747–761
- CEM-FIL (2001). *Cem-Fil Continuous Glass Filaments – Materials Safety Data Sheet*. http://www.sgva.com/pdf/sgvx_msds_arglass.pdf
- CHABOCHE, J.-L.; FEYEL, F. (2000). *On the Multiscale Analysis of Composite Structures by Using a FE2 Technique and Fibre-Matrix Damage Mechanics*. Workshop on Continuous Damage and Fracture, Cachan (France)
- CURBACH ET AL. (2007). *Sonderforschungsbereich 528 an der Technischen Universität Dresden – Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung*. <http://sfb528.tu-dresden.de>
- CURBACH, M.; SCHICKTANZ, K.; JESSE, F.; HARTIG, J. (2006). *Stochastische Eigenschaften der Zugfestigkeit freier und zementös eingebetteter Filamentbündel aus AR-Glas*. In: Neue Bauweisen – Trends in Statik und Dynamik, Tagungsband zum 10. Dresdner Baustatik Seminar, Technische Universität Dresden, S. 91–100
- CURBACH, M. (Hrsg.) (2003). *Textile Reinforced Structures – Proceedings of the 2(nd) Colloquium on Textile Reinforced Structures (CTRS2)*. Technische Universität Dresden, Institut für Massivbau
- DUDA, H. (1991). *Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung*. DAfStb Heft 419, Beuth Verlag, Berlin
- ECKFELDT, L. (2005). *Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung von Rissbreiten in veränderlichen Verbundsituationen*. Konstruktiver Ingenieurbau Dresden, Bd. 6, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen
- ESHELBY, J. D. (1957). *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems*. Proceedings of the Royal Society of London, A 241:376 – 396
- FEYEL, F.; CHABOCHE, J.-L. (2001). *Multi-scale Non Linear FE2 Analysis of Composite Structures – Damage and Fiber Size Effects*. Numerical Modelling in Damage Mechanics – NUM-DAM'00, 10(2-3-4):449–472
- FISH, J.; SHEK, K. (2000). *Multiscale Analysis of Composite Materials and Structures*. Composites Science and Technology, 60:2547–2556
- FISH, J.; YU, Q. (2001). *Multiscale Damage Modeling for Composite Materials – Theory and Computational Framework*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52(1-2):161–192
- FRANZKE, G.; BISCHOFF, T. (1996). *Multi-axial warp knitted layers – a textile for reinforcing concrete*. In: Techtexil Asia, Osaka, Tagungsband, S. 130–140
- FRANZKE, G.; OFFERMANN, P.; ENGLER, T.; ABDKADER, A. (2001). *Erkenntnisse zur textilen Kennwertermittlung, geometrischen Modellierung und Fertigung textiler Bewehrungsstrukturen*. In: HEGGER, J. (Hrsg.): Textilbeton – 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532, S. 71–82. RWTH Aachen
- FRATZL, P. (2005a). *Biologischer Glaskäfig aus der Tiefsee*. http://www.mpikg.mpg.de/pdf/pm/2005/EuplectellaFratzl_05.pdf
- FRATZL, P. (2005b). *Das Geheimnis des Ehekäfigs*. MaxPlanckForschung 3(7)
- FRIEDRICH, P. (2000). *Die Abhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von der Faserlänge bei Stahlfaserbeton*. Universität Leipzig, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Technischer Bericht

- GAO, S. L.; MÄDER, E.; ABDKADER, A.; OFFERMANN, P. (2003). *Environmental Resistance and Mechanical Performance of Alkali-Resistant Glass Fibers with Surface Sizings*. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 325:230–241
- GEBBEKEN, N. (1996). *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*. *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau* 96(1). Universität der Bundeswehr München
- GEERS, M.; KOUZNETSOVA, V.; BREKELMANS, W. (2002). *Perspectives in Multi-Scale Modelling of Composite and Heterogeneous Materials upon Localization*. In: *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*; Mang, H.A. (Hrsg.), Wien, 15 S., www.tuwien.ac.
- GHOSH, S.; LEE, K. (1996). *Two Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-Plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Element Model*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132:63–116
- GOEKTEPE, S.; MIEHE, C. (2005). *A Micro-Macro Approach to Rubber-Like Materials. Part III – The Micro-Sphere Model of Anisotropic Mullins-Type Damage*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53:2259–2283
- GRZYBOWSKI, M.; MEYER, C. (1993). *Damage Accumulation in Concrete with and without Fiber Reinforcement*. *ACI Material Journal*, 90(6):594–604
- HAASEMANN, G.; KÄSTNER, M.; ULBRICHT, V. (2006). *Multi-Scale Modelling and Simulation of Textile Reinforced Materials*. *Proceedings, III European Conference on Computational Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, S. 131–146
- HARIRI, K. (2000). *Bruchmechanisches Verhalten jungen Betons – Laser-Speckle-Interferometrie und Modellierung der Rißprozeßzone*. Nr. 509, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Beuth Verlag
- HARTIG, J.; HÄUSSLER-COMBE, U.; SCHICKTANZ, K. (2007). *A Lattice Model Approach to the Uniaxial Behaviour of Textile Reinforced Concrete*. In: CARPINTERI, A. (Hrsg.): *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-6)*. Design, Assessment and Retrofitting of RC- Structures, 17.06.-22.06.2007, Catania (Italy), 2:745–752. Taylor & Francis, London
- HASHIN, Z.; HERAKOVICH, C. (1982). *Mechanics of Composite Materials – Recent Advances*. Pergamon Press Ltd.
- HASHIN, Z.; ROSEN, W. (1964). *The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials*. *Journal of Applied Mechanics*, 33:223–230
- HAZANOV, S. (1998). *Hill Condition and Overall Properties of Composites*. *Archive of Applied Mechanics*, 68:385–394
- HEGGER, J. (Hrsg.) (2001). *Textilbeton – I. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532*. RWTH Aachen, Institut für Massivbau
- HEGGER, J.; ALDEA, C.; BRAMESHUBER, W.; CURBACH, M. (2006). *Applications of Textile Reinforced Concrete*. State-of-the-Art Report of RILEM Technical Committee 201 – Textile Reinforced Concrete, RILEM Report, 36:237–270
- HEMPEL, R.; SCHORN, H.; SCHIEKEL, M.; BUTLER, M. (2005). *Durability of Textile Reinforced Concrete*. *ACI Material – Thin Fiber and Textile Reinforced Cementitious Systems*, SP-244CD:22
- HEMPEL, R. (2000). *Kurzinformation: textilbewehrter Beton*. <http://www.betonboot.de/>
- HEMPEL, R. (2007). *Abschiedsgeschenk des Instituts für Baustoffe der TU Dresden für R. Hempel*. <http://www.tu-dresden.de/biwitb/baustoff/>
- HIDALGO, R. C.; KUN, F.; HERMANN, J. (2001). *Bursts in a Fiber Bundle Model with Continuous Damage*. *Physical Review E*, 64:1–9

- HILLERBORG, A. (1983). *Analysis of a Single Crack*. In: Wittman, F.H., Fracture Mechanics of Concrete, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, S. 223–249
- I-DEAS (2006). *I-deas v11 Handbuch*, Structural Dynamics Research Corporation (SDRC)
- JESSE, D.; MICHLER, Y. L.; JESSE, F. (2006). *Stress-Strain Behavior of Textile Reinforced Concrete Subjected to Biaxial Loading*. In: BRAMESHUBER, W.; HEGGER, J. W. N. (Hrsg.): 1st International Conference Textile Reinforced Concrete (ICTRC), S. 141–150. RWTH Aachen University, Institute of Structural Concrete
- JESSE, F. (2004). *Tragverhalten von unidirektionalen und textilen Bewehrungen aus Multifilamentgarnen in einer zementgebundenen Matrix*. Konstruktiver Ingenieurbau Dresden, Bd. 5, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen
- JIN, W. (1998). *Alkali-Silica Reaction in Concrete with Glass Aggregate – A Chemo-Physico-Mechanical Approach*. Columbia University, Dissertation
- JUN, S.; IM, S. (2000). *Multiple-Scale Meshfree Adaptivity for the Simulation of Adiabatic Shear Band Formation*. Computational Mechanics, 25:257–266
- KALISKE, M. (1999). *Zur Theorie und Numerik von Strukturen aus Faserverbundmaterial – Schwingungen von Bauteilen aus faserverstärktem Kunststoff und verstärktem Elastomermaterial*, Mitteilungen des Instituts für Statik, Bd. 49, Universität Hannover
- KOJIC, M.; BATHE, K.-J. (2005). *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Springer-Verlag, Berlin
- KONRAD, M.; CHUDOBA, R.; MESKOURIS, K.; MOMBARTZ, M. (2003). *Numerical Simulation of Yarn and Bond Behavior at Micro- and Meso-Level*. In: CURBACH, M. (Hrsg.): 2. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532, S. 399–410. Technische Universität Dresden, Dresden
- KRAGELSKI, I. (1968). *Reibung und Verschleiss*. VEB Verlag Technik Berlin
- KRAJGINOVIC, D.; LEMAITRE, J. (1987). *Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications*, CISM Courses and Lectures International Centre for Mechanical Sciences, Bd. 295, Springer-Verlag, Udine
- KRÜGER, M. (2004). *Vorgespannter textildewehrter Beton*. Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation
- KRÄTZIG, W.; BASAR, Y. (1997). *Tragwerke 3 – Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Springer-Verlag, Berlin
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics – Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Engineering Damage Mechanics. Springer-Verlag, Berlin
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. (1984). *Vorlesungen über Massivbau – Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau*, Bd. 1. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl.
- LEPENIES, I.; MEYER, C.; SCHORN, H.; ZASTRAU, B. (2005). *Modeling of the Load Transfer Behavior of AR-Glass-Rovings in Textile Reinforced Concrete*. ACI Material – Thin Fiber and Textile Reinforced Cementitious Systems, SP-244CD:15
- LEPENIES, I.; RICHTER, M.; ZASTRAU, B. (2006). *On the Hierarchical Modelling of Textile Reinforced Concrete*. In: HEGGER, J.; BRAMESHUBER, W.; WILL, N. (Hrsg.): Textile Reinforced Concrete, S. 233–242. RILEM Publications S.A.R.L., Bagnaux, Frankreich
- LEPENIES, I.; RICHTER, M.; ZASTRAU, B. (2003). *Numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von Textilbeton unter Berücksichtigung mehrerer Strukturebenen*. In: Internationales Kolloquium über Anwendungen der Informatik und Mathematik in Architektur und Bauwesen, 10.-12. Juni 2003, S. 12 S., Bauhaus Universität Weimar

- LEUKART, M. (2005). *Kombinierte Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien*. Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation
- LIU, W. K.; HAO, S.; BELYTSCHKO, T.; LI, S. (2000). *Multi-Scale Methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47:1343–1361
- MAIRE, J.; LEVASSEUR, P.; PAULMIER, P. (2000). *Multi-Scale Model of Crack Propagation in Unidirectional Metallic Matrix Composites*. 13th European Conference on Fracture (ECF13), San Sebastian (Spain), 9 S.
- MATHEAS, J. (2005). *Entwicklung von Finiten Schalenelementen zur Berechnung von Verstärkungen aus Textilbeton bei Flächentragwerken*. Konstruktiver Ingenieurbau Dresden, Bd. 9, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen
- MATZENMILLER, A. (1988). *Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen*. Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation
- MÄDER, E.; MAI, K.; PISANOVA, E. (2000). *Interphase Characterization in Polymer Composites – Monitoring of Interphasial Behavior in Dependence on the Mode of Loading*. Composite Interfaces, 7(3):133–147
- MÄDER, E.; PLONKA, R.; SCHIEKEL, M.; HEMPEL, R. (2004). *Coatings on Alkali-Resistant Glass Fibres for the Improvement of Concrete*. Journal of Industrial Textiles, 33(3):191–207
- MECHTCHERINE, V. (2000). *Bruchmechanische und fraktologische Untersuchungen zur Rissausbreitung in Beton*. Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Dissertation
- MEYER, C.; FANG, L. (1995). *Low-Cycle Fatigue Behavior of Fiber Reinforced Concrete Under Biaxial Stress States*. Proceedings of the EMD Conference, Boulder, S. 4 S.
- MEYER, C.; PENG, X. (1997). *A Comprehensive Description for Damage of Concrete Subjected to Complex Loading*. Structural Engineering and Mechanics, 5(6):679–689
- MIER, J.V. (2007). *Multi-Scale Interaction Potentials (F-r) for Describing Fracture of Brittle Disordered Materials like Cement and Concrete*. International Journal of Fracture, 143(1):41–78
- MINDESS, S. (1995). *Mechanical Properties of the Interfacial Transition Zone – A Review*, Interface Fracture and Bond, SP156, American Society of Mechanical Engineers
- MINDESS, S.; SHAH, S. P. (1987). *Bonding in Cementitious Composites*, Bd. 114, Materials Research Society, Boston
- MOHR, O. (1900). *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, XXXIV(45):1524–1530
- MORI, T.; TANAKA, K. (1973). *Average Stress in Matrix and Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions*. Acta Metallurgica, 21:571 – 574
- MURA, T. (1993). *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2. Aufl.
- NAAMAN, A.; SHAH, S. (1976). *Pull-Out Mechanism in Steel Fiber-Reinforced Concrete*. Journal of Structural Devison, ASCE, 102:1537–1548
- NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. (1993). *Micromechanics – Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Applied Mathematics and Mechanics, Bd. 37, Elsevier Science, Amsterdam
- OFFERMANN, P.; ABDKADER, A.; ENGLER, T.; SCHIERZ, M. (2001). *Grundlagen textiler Bewehrungsstrukturen zur Verstärkung bestehender Bauwerke*. In: CURBACH, M. (Hrsg.): Arbeitsbericht des Sonderforschungsbereiches 528, S. 25–73. Technische Universität Dresden
- OTSUKA, K.; DATE, H. (2000). *Fracture Process Zone in Concrete Tension Specimen*. Engineering Fracture Mechanics, 65:111–131

- PARISCH, H. (2003). *Festkörper-Kontinuumsmechanik – Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen. Vieweg+Teubner Verlag, Stuttgart
- PASKOVA, T.; MEYER, C. (1994a). *Damage Mechanics of Concrete Under Cyclic Load*. Mechanics of Materials and Structures. Papers Presented at the Bieniek Symposium in Conjunction with the MEET’N’93, First SES-ASME-ASCE, S. 39–53
- PASKOVA, T.; MEYER, C. (1994b). *Optimum Number of Specimens for Low-Cycle Fatigue Tests of Concrete*. Journal of Structural Engineering, 120(7):2242–2247
- PENG, X.; MEYER, C.; FANG, L. (1997). *Thermomechanically Consistent Continuum Damage Model for Concrete Materials*. Journal of Engineering Mechanics, 123(1):60–69
- PRÖCHTEL, P.; HÄUSSLER-COMBE, U. (2007). *Anisotropic Damage of Concrete – A Three-Dimensional Approach with Energy-Based Loading Surfaces and a New Evolution Law*. In: CARPINTERI, A. (Hrsg.): Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-6). Volume 1: New Trends in Fracture Mechanics of Concrete, 17.06.-22.06.2007, Catania (Italy), S. 393–402. Taylor & Francis, London
- PUCK, A. (1996). *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten – Modelle für die Praxis*. Hanser Verlag, Berlin
- PYTHON v2.4 (2007). *Python Software Foundation*. <http://www.python.org/>
- RASMUSSEN, T. V. (1997). *Time Dependent Interfacial Parameters in Cementitious Composite Materials*. Lyngby. Technical University of Denmark, Dissertation
- RENNERT, P. (Hrsg.) (1988). *Kleine Enzyklopädie Physik – Eine überschaubare Darstellung dieser fundamentalen Wissenschaft*. VEB Bibliografisches Institut, 2. Aufl.
- RICHTER, M. (2005). *Entwicklung mechanischer Modelle zur analytischen Beschreibung der Materialeigenschaften von textiltbewehrtem Feinbeton*. Berichte des Institutes für Mechanik und Flächentragwerke, Bd. 2, Technische Universität Dresden, Institut für Mechanik und Flächentragwerke
- SAOUMA, V. E.; NATEKAR, D. (2002). *Cohesive Stresses and Size Effect in Quasi Brittle Materials*. Sadhana, Journal of the Indian Academy of Sciences, 27(4):461–466
- SAOUMA, V. E. (2000). *Fracture Mechanics – Lecture Notes*. University of Colorado
- SCHLEBUSCH, R. (2005). *Theorie und Numerik einer oberflächenorientierten Schalenformulierung*. Berichte des Institutes für Mechanik und Flächentragwerke, Bd. 3, Technische Universität Dresden, Institut für Mechanik und Flächentragwerke
- SCHORN, H.; BUTLER, M.; HEMPEL, S. (2004). *Polymers as Microcrack Stoppers in Concrete Observed in ESEM*. Proceedings of the 11th International Congress on Polymers in Concrete – ICPIIC 04, BAM, Berlin, S. 11–18
- SCHORN, H. (2003). *Ein Verbundmodell für Glasfaserbewehrungen im Beton*. Bautechnik, 80(3):174–180
- SCHULZ, M. (2005). *Materials Analysis Applying Microfocus Computertomography and Voxel-Based Photogrammetry*. In: 7th Optical 3-D Measurement Techniques, Wien
- SCIPY v0.6 (2007). *SciPy: Open source scientific tools for Python*. <http://www.scipy.org/>
- SHAH, S.; SWARTZ, S.; OUYANG, C. (1995). *Fracture Mechanics of Concrete – Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley & Sons, Inc., New York
- SICKERT, J.-U. (2005). *Fuzzy-Zufallsfunktionen und ihre Anwendung bei der Tragwerksanalyse und Sicherheitsbeurteilung*. Technische Universität Dresden, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, Dissertation

- SIMO, J.; HUGHES, T. (1998). *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, Berlin
- SOH, C.; CHIEW, S.; DONG, Y. (1999). *Damage Model for Concrete-Steel Interface*. Journal of Engineering Mechanics, 125:979–983
- STEIN, E.; BORST, R. DE ; HUGHES, T. J. R. (2004). *Encyclopedia of Computational Mechanics: Solids and Structures*, Bd. 2. Wiley, London
- STEINIGEN, F. (2006). *Numerische Simulation des Tragverhaltens textilverstärkter Bauwerke*. Technische Universität Dresden, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, Dissertation
- STURE, S.; ALQASABI, A.; AYARI, M. (1999). *Fracture and Size Effect Characters of Cemented Sand*. International Journal of Fracture, 95:405–433
- THOME, B.; SCHIKORA, K. (2003). *Stahlfaserbeton – Elastoplastisches Materialgesetz - Berechnungsmodelle - Versuche*. In: Tagungsband Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis. Universität der Bundeswehr München
- TSAI, S. (1988). *Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio, 4. Aufl.
- VORECHOVSKY, M.; CHUDOBA, R. (2006). *Stochastic Modeling of Multi-Filament Yarns: 2. Random Properties Over the Length and Size Effect*. International Journal of Solids and Structures, 43(3-4):413–434,
- WALCZAK, Z. K. (2002). *Processes of Fiber Formation*. Elsevier, Amsterdam
- WEIHE, S.; KRÖPLIN, B. (1995). *The Fictitious Crack Concept in the Mechanics of Composites*
- WEILAND, S.; ORTLEPP, R.; CURBACH, M. (2006). *Strengthening of Predeformed Slabs with Textile Reinforced Concrete*. In: CEB-FIP (Hrsg.): Proceedings of the 2nd fib-Congress, Neapel, 5.-8.6.2006, Book of Abstracts and CD-ROM, 2:428–430
- WEISE, S.; HEMPEL, R.; SCHORN, H. (2001). *Untersuchungen zum Verbundverhalten von Fasern und Faserbündeln in zementgebundener Matrix unter Einbeziehung von Faser-Bragg-Gittern*. In: HEGGER, J. (Hrsg.): Textilbeton – 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532, S. 113–124. RWTH Aachen
- WIKIPEDIA.DE-ROVING (2007). *Roving*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Roving>
- WITTMANN, F. (1995). *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Proceedings, Second International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures, FRAMCOS-2, Zürich, Switzerland
- ZASTRAU, B.; LEPENIES, I.; RICHTER, M. (2001a). *Zur mechanischen Modellierung der Ablöseerscheinungen im Faser-Matrix-Interface von unidirektional bewehrtem Feinbeton im Zugversuch*. In: HEGGER, J. (Hrsg.): Textilbeton – 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532, S. 179–192. RWTH Aachen
- ZASTRAU, B.; LEPENIES, I.; RICHTER, M. (2008). *On the Multi Scale Modeling of Textile Reinforced Concrete*. Technische Mechanik, 28(1):53–63
- ZASTRAU, B.; RICHTER, M.; LEPENIES, I. (2001b). *Zur Modellierung und Berechnung von Flächentragwerken mit flächiger Verstärkung aus textilbewehrtem Feinbeton*. In: DINKLER, D. (Hrsg.): Baustatik–Baupraxis, S. 175–188. Braunschweig
- ZASTRAU, B.; RICHTER, M.; LEPENIES, I. (2003). *On the Analytical Solution of Pullout Phenomena in Textile Reinforced Concrete*. Journal of Engineering Materials and Technology, 125:38–43
- ZIENKIEWICZ, O. (1984). *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag, Philadelphia, 2. Aufl.
- ZOHDI, T. I.; WRIGGERS, P. (2005). *Introduction to Computational Micromechanics*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Bd. 20. Springer-Verlag, Berlin

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis**Symbole**

$(EA)^*$	Ersatzsteifigkeit des Faser-Matrix-Systems
$\langle \square \rangle$	Mittelwert von \square
α	Winkel
β	Winkel
β_{\square}	Festigkeit
\mathcal{C}	Elastizitätstensor
\mathcal{D}	Nachgiebigkeitstensor
ε	Verzerrungstensor
σ	Spannungstensor
\mathcal{S}	ESHELBY-Tensor
\mathcal{T}	konjungierter ESHELBY-Tensor
Γ	Gamma-Funktion
\mathbf{t}_{ε}	Verzerrungsvektor
\mathbf{t}_{σ}	Spannungsvektor
ϕ	Winkel
$\tau(s)$	Schubspannungs-Schlupf-Abhängigkeit
A	Querschnittsfläche
a	Rissabstand
D	Schädigung
d_f	Durchmesser eines Filamentes
E	Elastizitätsmodul, E-Modul
F	Kraft
F_f	Rovingnormalkraft an der Rissfläche
G_f	Bruchenergie
L	Länge
L_c	Kritische Verbundlänge, bei der ein Matrixriss infolge des Verbundes entstehen kann
N	Normalkraft
r, R	Radius, maximaler Radius
s	Schlupf
Tt	Titer tex
u	Umfang
v	Schlupf an der Rissöffnung (entspricht der halben Rissbreite)
w	Rissöffnung, Rissbreite
w_c	Kritische Rissöffnung

Abkürzungen

\mathcal{Y}	Zelle, Gebiet eines Materials mit ausgeprägter Mikrostruktur
$\mathcal{E}HZ$	Einheitszelle
$\mathcal{M}R$	Materialregion
$\mathcal{R}VE$	Repräsentatives Volumenelement
ACI	American Concrete Institute
CEM	Zementklasse
CemFIL	AR-Glasfaser der Firma Saint-Gobain Vetrotex
CH	Portlandit ($Ca(OH)_2$)

CSH	Calcium-Silikat-Hydrat
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
DIN	Deutsche Industrie Norm
EN	Euronorm
FEM	Finite-Elemente-Methode
IP	Integrationspunkt, Gausspunkt
ITZ	Interface Transition Zone
LEBM	Linear-elastische Bruchmechanik
Ma-FEM-Modell	Makroskopisches Finite-Elemente-Modell
Ma-I-Modell	Platten-, Balken-, Plattenbalkenbiegungsmodell
Me-FEM-Modell	Mesoskopisches Finite-Elemente-Modell
Me-I-Modell	Erweitertes semi-analytisches Verbundmodell
Mi-FEM-Modell	Mikroskopisches Finite-Elemente-Modell
Mi-I-Modell	Semi-analytisches Verbundmodell
Mi-II-Modelle	Faserbündelmodelle
Mi-IIa-Modell	Pfropfenmodell
Mi-IIb-Modell	Filamentbündelmodell
MMM	Mikro-Meso-Makro
MPI	Message Passing Interface: Standard, der den Nachrichtenaustausch bei parallelen Berechnungen auf verteilten Computersystemen beschreibt
MSA	Multi-Skalen-Analyse
NEG	Kurzbezeichnung für AR-Glasfaser der Firma Nippon Electric Glass Co., Ltd.
pa	allg. Auszugsversuch (pull out arbitrary)
pc	Auszugsversuch, bei dem kein Schlupf am ungezogenen Ende auftritt (pull out clamped)
po	Auszugsversuch, bei der die Faser komplett aus der Matrix herausgezogen wird (pull out)
pt	Auszugsversuch mit konstanter Verbundlänge (pull through)
RILEM	International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures
rov	Roving
SFB	Sonderforschungsbereich
TP	Übergangspunkt (Transition Point)
TRC	Textile Reinforced Concrete, Textilbeton
TS	Mitwirken des Betons zwischen den Rissen im Zugversuch von bewehrten Bauteilen (Tension Stiffening)

Glossar

Ablösen:

Trennung der adhäsiven Verbindung zweier Komponenten, beispielsweise des Rovings von der umgebenden Feinbetonmatrix

anisotrop:

Ein anisotroper Körper hat ein richtungsabhängiges Materialverhalten.

Anisotropie:

s. anisotrop

Aufmachung:

A. von Garnen: Lieferform; Art der Aufwindung (Spule), in der das Garn transportiert wird oder in den Handel kommt

Auszugsversuch:

Unterbewehrter Probekörper für den Zugversuch, bei dem eine Faser oder ein Multifilamentgarn aus einer Matrix herausgezogen wird.

AR-Glasfasern:

Glasfasern, die auf Grund ihrer großen Alkalibeständigkeit mit der Zementmatrix verträglich sind. AR-Glasfasern haben einen definierten Durchmesser von 10 – 30 μm . Der Alkaliwiderstand wird im Wesentlichen durch die Glaszusammensetzung (z.B. Anteil an Zirkonoxid) und die Schlichte erreicht.

Beschichtung:

Beschichten (engl: Coating) ist das Aufbringen einer festhaftenden Schicht aus formlosem Stoff auf die Oberfläche eines Körpers. Im Zusammenhang mit Rovings wird unter B. das vollständige Durchdringen (Imprägnieren) des Roving mit dem Beschichtungsmittel verstanden. Ein unvollständig beschichteter Roving wird als partiell imprägniert bezeichnet.

Dauerstandsfestigkeit:

Festigkeit eines Materials, welche mittels einer konstanten Belastung über einen langen Zeitraum ermittelt wird.

Dauerhaftigkeit:

D. beschreibt z. B. die chemische Stabilität der AR-Glasfasern im alkalischen Milieu der Zementmatrix.

Delamination:

Ablösung einzelner Schichten voneinander

Dispersion:

(in der vorliegenden Arbeit:) Teilchen in einer flüssigen Phase

Drapierbarkeit:

Anpassbarkeit eines Textils an eine beliebige Form

Faden:

Bündelförmige Anordnung von mehr als 10 Fasern, die mittels Drehungen (um die Fadenachse) zu einem Gebilde einstellbarer Packungsdichte umgeformt werden können. Viele Drehungen je Längeneinheit ergeben einen annähernd kreisrunden Faden-Querschnitt mit hoher Packungsdichte und geringer Kompressibilität. Fehlt die Drehung vollständig, ist der Faden-Querschnitt schon bei geringer Druckeinwirkung beliebig verformbar. Faden wird teilweise synonym für Garn verwendet.

Faser:

Fasern sind linienförmige Gebilde. Im Vergleich zu ihrem Querschnittsabmessungen besitzen F. eine große Länge. Textilfasern als große Untergruppe der Fasern lassen sich anhand ihrer Länge gliedern: Filamente (auch als Endlos-Fasern bezeichnet) mit einer unbegrenzten Länge und mit einem Durchmesser von 1 bis 100 μm ; Kurzfasern mit einer Länge von max. 100 mm .

Filament:

Endlosfaser

Feinbeton:

Feinbeton ist Beton mit optimierter Korngrößenverteilung unter Verwendung von Zement und Zuschlägen mit Größtkorn unter 4 mm (i. d. R. 1 mm) und gegebenenfalls Zusatzstoffen und Zusatzmitteln.

Garn:

Garne sind linienförmige Gebilde, bestehend aus Fasern oder Filamenten, vgl. Faden.

Garnfeinheit:

Die Garnfeinheit, Garnstärke oder der Titer eines Garnes (auch einer Faser oder eines Filamentes) wird als längenbezogene Masse angegeben, dem spezifischen Garngewicht, d. h. ein Roving mit einer Feinheit von 620 tex wiegt 620 g bei einer Länge von 1000 m .

Über die Festigkeit oder das Volumen des Garnes sagt die Garnfeinheit nichts aus. Eine hohe Garnfeinheit bedeutet ein kleineres, ein hoher Titer ein größeres Verhältnis von Masse zu Länge. Die Garnfeinheit wird international in Tex (tex) gemessen.

Definitionen:

1 tex : 1 Gramm pro 1000 Meter

1 dtex : 1 Gramm pro 10000 Meter

Gelege:

Gelege sind Flächengebilde, die durch Aufeinanderlegen von Fadensystemen mit und ohne Fixierung der Kreuzungspunkte entstehen.

Gestricke:

Flächengebilde, die aus einem oder mehreren Fäden oder aus einem Fadensystem durch Maschenbildung entstehen.

Gewebe:

Flächengebilde, die mittels Fachbildung aus sich rechtwinklig kreuzenden Fäden zweier Fadensysteme (Kette und Schuss) hergestellt sind.

Gewirke:

Flächengebilde, die aus mehreren Fäden oder mehreren Fadensystemen durch Maschenbildung entstehen. Der Roving als Kettfaden wird durch dünne Multifilamentgarne in der Struktur fixiert.

Haftbrücke:

Eine Haftbrücke (adhesive cross linkage) ist ein idealisiertes Verbundelement (z.B. ein Zementpartikel) auf der Mikroebene, welches die Filamente der Rovings diskontinuierlich verbindet.

heterogen:

Ein heterogener Körper weist mehrere Werkstoffkomponenten auf, z.B. Fasern und Partikel eingebettet in einer Matrix.

homogen:

Ein homogener Körper weist einheitliche Eigenschaften über den ganzen Körper auf. Die Parameter des Werkstoffes sind unabhängig vom Ort.

inhomogen:

Die Parameter des Werkstoffes sind Funktionen der Ortskoordinaten.

integrierte Multi-Skalen-Analyse:

s. simultane Multi-Skalen-Analyse

interface:

Grenzschicht zwischen zwei Phasen

interface transition zone (ITZ):

Gebiet in unmittelbarer Umgebung einer Grenzfläche im Beton, welches andere Eigenschaften als die restliche Zementmatrix (Bulkphase) aufweist. Die Dicke dieser Schicht ist u. a. abhängig von der Art der Betonzusätze (z. B. Mikrosilika oder Flugasche). Typische Schichtdicken sind in Normalbeton 10 bis 30 μm , in Feinbeton 5 μm .

isotrop:

Ein isotroper Körper hat die gleichen Materialeigenschaften in jeder Richtung und an jedem Punkt, welcher innerhalb dieses materiellen Mediums liegt (richtungsunabhängiges Materialverhalten).

Kettfaden:

Längsfaden in einem Gewebe (in Fertigungsrichtung verlaufend); inzwischen auch für den Längsfaden im Gelege oder im Gewirke verwendet.

Lokalisierung:

Konzentration der Verzerrungen an einem Ort eines Körpers

Maßstabeffekt:

auch als Skaleneffekt bezeichnet. Die Festigkeit eines Probekörpers verringert sich mit steigender Größe des Probekörpers.

Matrix:

Komponente eines Faserverbundwerkstoffes, welche die Textilien in ihrer Lage fixiert und die angreifenden Lasten auf die Verstärkung überträgt.

Monofilfaser:

Monolithisch aufgebaute Einzelfaser mit Durchmesser bis zu 1mm.

numerische Homogenisierung:

Numerische Realisierung einer Homogenisierungsmethode

orthotrop:

Kurzform von „orthogonal-anisotrop“

Orthotropie:

Wird auch als orthogonale oder rhombische Anisotropie bezeichnet. Die Eigenschaften sind richtungsabhängig. Es besteht Symmetrie der Eigenschaften zu einem System von drei orthogonalen Ebenen.

phänomenologisch:

ohne Berücksichtigung struktureller Einzelheiten

phänomenologische Größen:

Phänomenologische Größen sind z.B. die Beanspruchung (Spannung), die Verformung (Verzerrung), die Temperatur, das Temperaturgefälle und der Wärmefluss.

quasi-sprödes Materialverhalten:

Ein Material wird als quasi-spröde angenommen, wenn es ein Dissipationsverhalten zeigt, ohne jedoch nach dem Versagen irreversible Verzerrungen aufzuweisen bzw. diese vernachlässigbar klein sind (z. B. Beton).

Roving:

(dt. Faserbündel oder Faserstränge) sind Bündel von endlosen, unverdrillten, gestreckten Fasern (Filamente), die häufig in der Fertigung von Faserverbundwerkstoffen und besonders von Faser-Kunststoff-Verbunden eingesetzt werden. Der Begriff entstammt der englischen Sprache. Werden Einzelfilamente aus Glas, Aramid oder Kohlenstoff ohne Verdrillung zusammengefasst, spricht man zuerst von einem glatten Filamentgarn, und ab einer gewissen Stärke (Feinheit) von einem Roving.

Rovings werden auf Spulen mit Außen- oder Innenabzug geliefert. In der automatisierten Verarbeitung spielen Rovings in der Wickeltechnik sowie dem Strangziehen als Halbzeug eine große Rolle. Rovings werden zudem zur Herstellung von Prepregs verwendet.

Rovingstrang (Textilglasroving):

Zusammenfassen einer bestimmten Anzahl annähernd paralleler Glasspinnfäden zu einem Strang, d.h. die Filamente werden erst zu Glasspinnfäden zusammengefasst, bevor ein Strang entsteht

Sandwichkonstruktion:

Mindestens eine Schicht des Verbundwerkstoffes weist in Dickenrichtung größere Abmaße als die übrigen Schichten auf. In der Regel setzt sich die Sandwichkonstruktion aus einer schubweichen Mittelschicht und zwei Deckschichten zusammen, wobei letztere eine hohe Zug- und Druckfestigkeit aufweisen.

Schlichte:

Beschichtung eines Glasfilamentes oder einer Glasfaser, die sowohl Gleitmittel bei der Herstellung als auch Schutz vor mechanischen Schädigungen bietet. Die in der Schlichte enthaltenen Haftvermittler (Silane) bilden eine chemisch bindende Zwischenschicht, die Reaktionsmöglichkeiten zur Faser und zur Matrix besitzt.

Schussfaden:

Querfaden in einem Gelege oder Gewebe (quer zur Fertigungsrichtung eingelegt $\pm 60^\circ$)

simultane Multiskalenanalyse:

Multiskalenanalyse, welche mehrere Modelle auf unterschiedlichen Strukturebene simultan (gleichzeitig) analysiert

sprödes Materialverhalten:

Ein Material wird als spröde angenommen, wenn es bricht, ohne vor dem Versagen irreversible Verzerrungen zu erfahren bzw. Energie dissipiert zu haben (z. B. Glas).

Titer:

s. Garnfeinheit

transversal-isotrop:

Die transversale Isotropie ist ein Sonderfall der Anisotropie. Die transversale Isotropie kennzeichnet Werkstoffe, die eine bestimmte Vorzugsrichtung haben. Diese Werkstoffe können um ihre Vorzugsrichtung gedreht werden, ohne dass sich ihre Elastizitätseigenschaften ändern. Die Ebene, in der die Eigenschaften richtungsunabhängig sind, nennt man isotrope Ebene.

unidirektional:

in eine Richtung gerichtet

unidirektionale Schicht:

Schicht aus in einer Richtung parallel gerichteter Fasern

Verbund:

Wechselwirkung zweier Verbundpartner, z. B. Schubspannungs-Schlupf-Beziehungen

Verbundwerkstoff:

V. – auch als Komposit bezeichnet – besteht aus mindestens zwei Einzelmaterialien. Häufig wird ein bewehrendes Material zur Verstärkung des einbettenden Matrixmaterials verwendet, z. B. AR-Glasfasern in einer Feinbetonmatrix.

Whisker:

faserförmige Einkristalle

Zusatzmittel:

Stoffe, welche die Verarbeitungseigenschaften oder das Gefüge des Betons durch ihre Wirkung verändern (z.B. Fließmittel, Luftporenbildner). Sie werden bei der Stoffraumrechnung nicht als Volumenanteil berücksichtigt.

Zusatzstoffe:

Zusatzstoffe sind Komponenten der Matrix, die ihre Zusammensetzung mitbestimmen und als Volumenanteil bei der Stoffraumrechnung berücksichtigt werden. Zusatzstoffe sind zum Teil reaktiv, werden aber nicht als Bindemittel angerechnet (z.B. Mikrosilika). Zusatzstoffe können auch organisch sein (z.B. Polymerdispersionen).

Anhang

A Elastizitätstheorie

A.1 Notation

Die Gebiete auf den Strukturebenen des untersuchten Materials werden allgemein mit \mathcal{Y} bezeichnet. Erfüllen die Gebiete \mathcal{Y} spezielle Anforderungen, so wird von Repräsentativen Volumenelementen \mathcal{RVE} oder Einheitszelle \mathcal{EHZ} oder von Materialregionen \mathcal{MR} gesprochen, vgl. Abschnitt 5.4.1.

In dieser Arbeit werden Felder immer bezüglich einer kartesischen Basis angegeben, beispielsweise ist der Tensor ε durch seine Komponenten ε_{ij} bezüglich der Basis \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_j bestimmt. Deshalb wird

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.2})$$

eingeführt, wobei \mathbf{C} ein Tensor 4. Stufe ist. Das Doppelskalarprodukt ist mit $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ eingeführt.

Eine Matrixdarstellung eines Tensors ε wird mit $[\varepsilon]$ angegeben.

A.2 Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Zur zeitlichen Einordnung von Ereignissen – wie der inelastischen Deformation in Abhängigkeit von der Vorgeschichte – ist die Einführung eines dimensionslosen Parameters t hilfreich. Der „Zeit“-Parameter t stellt nicht wie bei viskosen und dynamischen Prozessbeschreibungen ein wirkliches Zeitmaß dar, sondern nur einen Parameter zur Einordnung der zeitlichen Abfolge. Die Konfiguration C eines Körpers \mathcal{B} stellt eine Abbildung φ von \mathcal{B} in den dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 dar. Der von der Zeit t abhängige deformierte Zustand eines Körpers \mathcal{B} wird als Konfiguration C bezeichnet

$$C = \varphi(\mathcal{B}) . \quad (\text{A.3})$$

Im Nachfolgenden sollen kurz einige wesentliche Gleichungen und Aussagen zur linearen Elastizität aufgeführt werden:

Verschiebungsfeld	$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_j) ,$	(A.4)
-------------------	---	-------

Verzerrungsfeld	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) ,$	(A.5)
-----------------	--	-------

Gleichgewicht (mit Volumenkräften)	$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 ,$	(A.6)
------------------------------------	-----------------------------	-------

Gleichgewicht (ohne Volumenkräfte)	$\sigma_{ij,j} = 0 ,$	(A.7)
------------------------------------	-----------------------	-------

Spannungsvektor	$t_i = \sigma_{ij} n_j ,$	(A.8)
-----------------	---------------------------	-------

Konstitutive Beziehungen	$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) ,$	(A.9)
--------------------------	--	-------

Symmetrie des Spannungstensors	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} ,$	(A.10)
--------------------------------	-------------------------------	--------

Symmetrie des Elastizitätstensors	$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk} = \mathcal{C}_{klij} .$	(A.11)
-----------------------------------	---	--------

(A.12)

A.3 Anisotropie

Das elastische Materialgesetz für allgemeine Anisotropie ist in Gl. (A.13) angegeben. Die Komponenten des Verzerrungstensors ε sind über den Nachgiebigkeitstensor \mathcal{S} mit dem Spannungstensor σ gekoppelt.

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{S}_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\text{A.13})$$

Umgekehrt sind die Komponenten des Spannungstensors σ als Funktion der Verzerrungen mittels des Elastizitätstensor \mathcal{C} beschreibbar:

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (\text{A.14})$$

Zwischen \mathcal{C} und \mathcal{S} gilt der Zusammenhang $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{-1}$. Da im Folgendem von einem BOLTZMANN-Kontinuum (Gleichheit der Schubspannungen $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) ausgegangen werden soll, besteht eine Symmetrie beim Spannungs- und beim Verzerrungstensor. Im Elastizitätstensor \mathcal{C} müssen daher alle Elemente mit vertauschten Indizes, innerhalb des ersten oder des zweiten Indexpaares, gleich groß sein:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk} = \mathcal{C}_{jilk}. \quad (\text{A.15})$$

Weiterhin folgt aus der Annahme der Existenz eines elastischen Potentials eine zusätzliche Vertauschbarkeit der Indexpaare untereinander:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}. \quad (\text{A.16})$$

Auf Grund der Symmetriebedingungen und des Potentialcharakters der Formänderungsenergie reduzieren sich die ursprünglich $3^4 = 81$ unabhängigen Komponenten in der Proportionalitätsmatrix auf nur noch 21. Die Gleichung (A.13) läßt sich damit in Vektor-Matrix-Schreibweise wie folgt formulieren:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{1111} & \mathcal{S}_{1122} & \mathcal{S}_{1133} & \mathcal{S}_{1112} & \mathcal{S}_{1113} & \mathcal{S}_{1123} \\ \mathcal{S}_{2211} & \mathcal{S}_{2222} & \mathcal{S}_{2233} & \mathcal{S}_{2212} & \mathcal{S}_{2213} & \mathcal{S}_{2223} \\ \mathcal{S}_{3311} & \mathcal{S}_{3322} & \mathcal{S}_{3333} & \mathcal{S}_{3312} & \mathcal{S}_{3313} & \mathcal{S}_{3323} \\ \mathcal{S}_{1211} & \mathcal{S}_{1222} & \mathcal{S}_{1233} & \mathcal{S}_{1212} & \mathcal{S}_{1213} & \mathcal{S}_{1223} \\ \mathcal{S}_{1311} & \mathcal{S}_{1322} & \mathcal{S}_{1333} & \mathcal{S}_{1312} & \mathcal{S}_{1313} & \mathcal{S}_{1323} \\ \mathcal{S}_{2311} & \mathcal{S}_{2322} & \mathcal{S}_{2333} & \mathcal{S}_{2312} & \mathcal{S}_{2313} & \mathcal{S}_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Diese Schreibweise kann nun in die VOIGT'sche Notation überführt werden. Dazu werden die Indizes ij in p und kl in q überführt. Damit wird 11 zu 1, 22 zu 2, 33 zu 3, 12 zu 4, 13 zu 5 und 23 zu 6. Außerdem muss beachtet werden, dass $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$ (dementsprechend auch ε_5 und ε_6 , vgl. Tab. A.1). Gleichung (A.17) geht damit in die folgende Form über:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} & \mathcal{S}_{14} & \mathcal{S}_{15} & \mathcal{S}_{16} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} & \mathcal{S}_{24} & \mathcal{S}_{25} & \mathcal{S}_{26} \\ \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} & \mathcal{S}_{34} & \mathcal{S}_{35} & \mathcal{S}_{36} \\ \mathcal{S}_{41} & \mathcal{S}_{42} & \mathcal{S}_{43} & \mathcal{S}_{44} & \mathcal{S}_{45} & \mathcal{S}_{46} \\ \mathcal{S}_{51} & \mathcal{S}_{52} & \mathcal{S}_{53} & \mathcal{S}_{54} & \mathcal{S}_{55} & \mathcal{S}_{56} \\ \mathcal{S}_{61} & \mathcal{S}_{62} & \mathcal{S}_{63} & \mathcal{S}_{64} & \mathcal{S}_{65} & \mathcal{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$[\varepsilon_p] = [\mathcal{S}_{pq}][\sigma_q]. \quad (\text{A.19})$$

Dehnungen			Spannungen		
Tensorielle Notation	Ingenieurnotation	VOIGTSche Notation	Tensorielle Notation	Ingenieurnotation	VOIGTSche Notation
ε_{11}	ε_{11}	ε_1	σ_{11}	σ_{11}	σ_1
ε_{22}	ε_{22}	ε_2	σ_{22}	σ_{22}	σ_2
ε_{33}	ε_{33}	ε_3	σ_{33}	σ_{33}	σ_3
$2\varepsilon_{12}$	γ_{12}	ε_4	σ_{12}	σ_{12}	σ_4
$2\varepsilon_{13}$	γ_{13}	ε_5	σ_{13}	σ_{13}	σ_5
$2\varepsilon_{23}$	γ_{23}	ε_6	σ_{23}	σ_{23}	σ_6

Tabelle A.1: Dehnungs- und Spannungsnotationen

A.4 Grafische Repräsentation des Elastizitätstensors

Die richtungsabhängigen Eigenschaften des Elastizitätstensors \mathcal{C} lassen sich grafisch darstellen (Abb. A.1). Eine detaillierte Beschreibung der grafischen Repräsentation des Elastizitätstensors gibt [BÖHLKE & BRÜGGEMANN 2001].

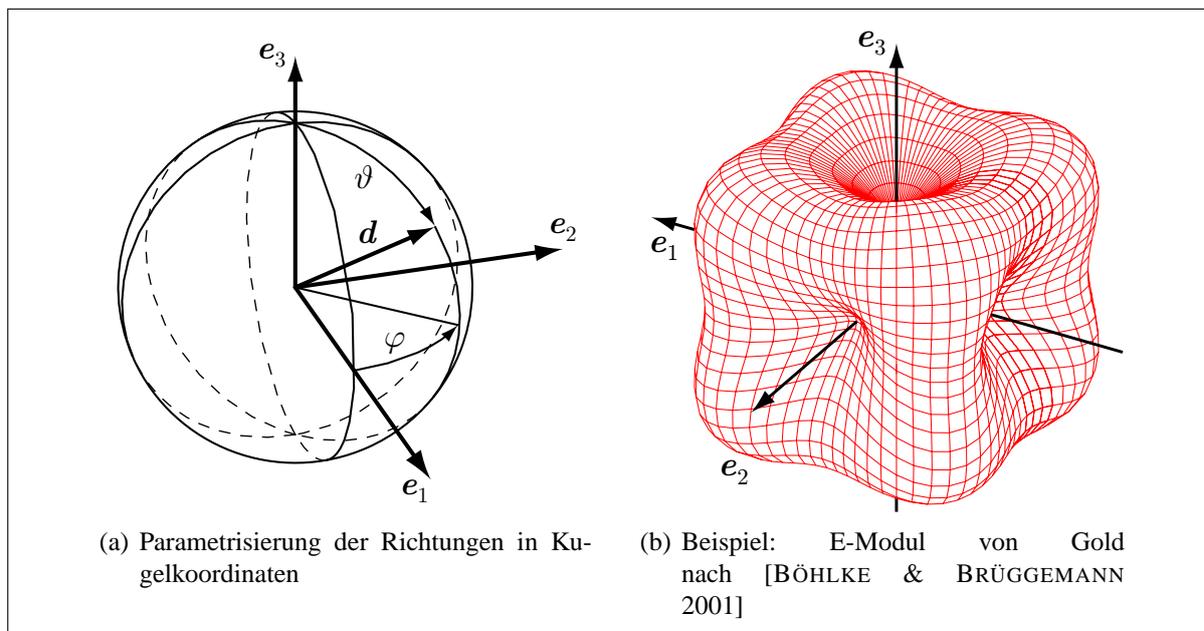


Abbildung A.1: Stereografische Projektion des Elastizitätstensors

Dargestellt wird das Verhältnis $E(\mathbf{d}) = \sigma(\mathbf{d})/\varepsilon(\mathbf{d})$ in Abhängigkeit der normierten Richtung \mathbf{d} . Hierbei wird die Richtung \mathbf{d} bezüglich der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ mittels Kugelkoordinaten (r, ϕ, ϑ) parametrisiert (Abb. A.1(a)). Vorgegeben wird die Einheitsdehnung $\varepsilon(\mathbf{d})$ in \mathbf{d} -Richtung

$$\varepsilon(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} , \quad (\text{A.20})$$

womit der zugehörige Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d})$ durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}) = \varepsilon(\mathbf{d}) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (\text{A.21})$$

gegeben ist. Aus dem Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}) \quad (\text{A.22})$$

kann der zugehörige Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d})$ ermittelt werden, wobei die Spannung $\sigma(\mathbf{d})$ mit

$$\sigma(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (\text{A.23})$$

berechnet wird. Somit gilt:

$$E(\mathbf{d}) = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} : \mathbf{C} : \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} . \quad (\text{A.24})$$

Abbildung A.1(b) zeigt exemplarisch eine kubische Symmetrie, wie sie z. B. bei Gold auftritt.

A.5 Monotropie

Eine beliebige flächige Textilbewehrung in einer Matrix bewirkt im Allgemeinen ein monotropes Materialverhalten im elastischen Bereich ohne Schädigung und Rissbildung (Abb. A.2). Das Material besitzt genau eine Symmetrieebene. Es liegt demnach ein ebenes anisotropes Verhalten vor. Liegt die Textilbewehrung in der durch x_1 und x_2 aufgespannten Ebene, folgt für die Elastizitätsmatrix

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ S & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Y & & & C_{55} & C_{56} \\ & & M & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.25})$$

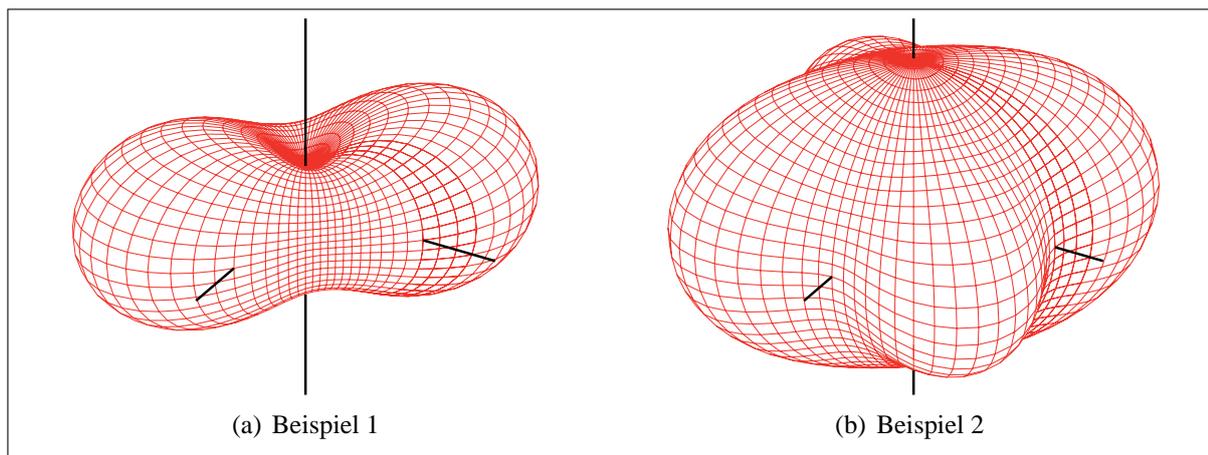


Abbildung A.2: Stereografische Projektion des monotropen Elastizitätstensors

Durch die Existenz einer Symmetrieebene reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Parameter des Elastizitätsgesetzes von 21 bei der allgemeinen Anisotropie auf nunmehr 13. Die zugehörigen

Ingenieurparameter lassen sich übersichtlich in der Nachgiebigkeitsmatrix $[\mathcal{S}] = [\mathcal{C}]^{-1}$ darstellen (nach [ALTENBACH & ALTENBACH 1994]):

$$[\mathcal{S}] = [\mathcal{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{41}}{G_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{42}}{G_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{43}}{G_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\eta_{14}}{E_1} & \frac{\eta_{24}}{E_2} & \frac{\eta_{34}}{E_3} & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{65}}{G_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_{56}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Auf Grund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix müssen die Bedingungen

$$\begin{aligned} E_1\nu_{21} &= E_2\nu_{12}, & E_2\nu_{32} &= E_3\nu_{23}, & E_3\nu_{13} &= E_1\nu_{31}, \\ E_1\eta_{41} &= G_{12}\eta_{14}, & E_2\eta_{42} &= G_{12}\eta_{24}, & E_3\eta_{43} &= G_{12}\eta_{34} \quad \text{und} \\ G_{13}\mu_{65} &= G_{23}\mu_{56} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

erfüllt sein, was die 21 Ingenieurparameter in Gl. (A.26) wiederum auf 13 unabhängige Größen reduziert.

In dieser Arbeit wird das materielle Koordinatensystem stets so gewählt, dass sich die flächige textile Bewehrung in der (x_1, x_2) -Ebene befindet. Für eine Vielzahl von praktisch eingesetzten Bewehrungsstrukturen entstehen zusätzliche Symmetrieebenen. Die Wahl der (x_1, x_2) -Ebene als Bewehrungsebene korrespondiert zu der hier für das monotrope Materialverhalten eingeführten Symmetrieebene $x_3 = 0$.

A.6 Orthotropie

Ein Material, welches sich bezüglich drei senkrecht aufeinander stehender Hauptachsen symmetrisch verhält, wird als orthogonal anisotrop oder kurz orthotrop bezeichnet (Abb. A.3). Im Gegensatz zum monotropen Materialverhalten gibt es bezogen auf das Hauptachsensystem keine Kopplung zwischen Normalspannungen und Schubverzerrungen, d. h. dass Normalspannungen in Hauptachsenrichtung keine Schubverzerrungen und Schubspannungen keine Normalverzerrungen erzeugen. Dadurch vereinfacht sich Gleichung (A.18) zu:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathcal{S}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & \mathcal{S}_{44} & 0 & 0 \\ & Y & & & \mathcal{S}_{55} & 0 \\ & & M & & & \mathcal{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Aus Gleichung (A.28) wird ersichtlich, dass das orthotrope Materialverhalten durch neun voneinander unabhängige Parameter beschrieben werden kann. Die Komponenten des Nachgiebigkeitstensors \mathcal{S}_{pq} hängen folgendermaßen von den Ingenieurkonstanten, den Elastizitätsmoduli E_{pq} , den

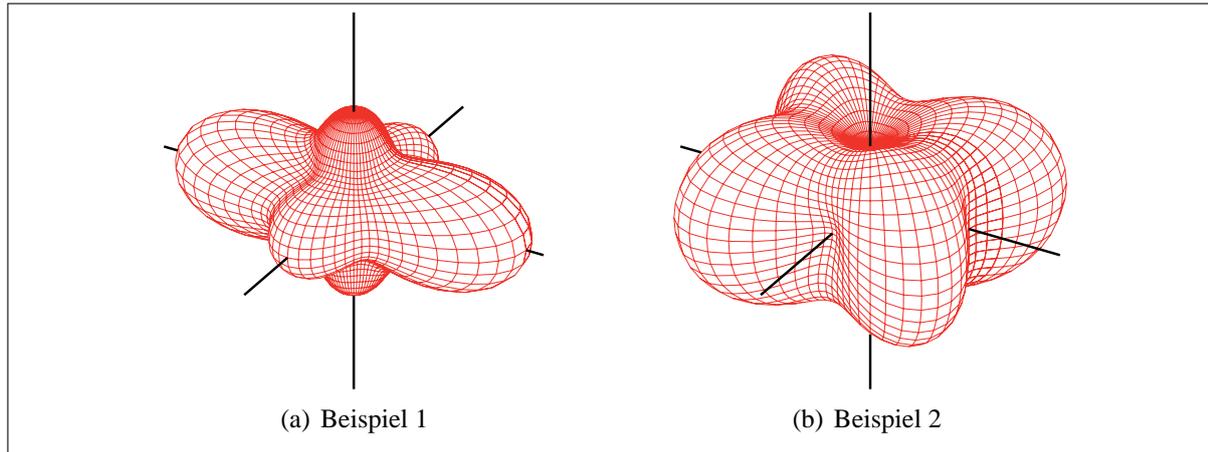


Abbildung A.3: Stereografische Projektion des orthotropen Elastizitätstensors

Schubmoduli G_{pq} und den Querdehnzahlen ν_{pq} , ab:

$$\mathcal{S}_{11} = \frac{1}{E_1} ; \mathcal{S}_{22} = \frac{1}{E_2} ; \mathcal{S}_{33} = \frac{1}{E_3} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathcal{S}_{44} = \frac{1}{G_{12}} ; \mathcal{S}_{55} = \frac{1}{G_{13}} ; \mathcal{S}_{66} = \frac{1}{G_{23}} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathcal{S}_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = \mathcal{S}_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} ; \mathcal{S}_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = \mathcal{S}_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} ; \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{S}_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} = \mathcal{S}_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}. \quad (\text{A.32})$$

Bei der Aufstellung der Nachgiebigkeitsmatrix \mathcal{S} ist darauf zu achten, dass zwar die Indizes der Komponenten, aber nicht die der Querdehnzahlen ν_{pq} vertauscht werden dürfen.

A.7 Transversale Isotropie

Von transversaler Isotropie – auch Querisotropie genannt – spricht man, wenn ein Material eine ausgeprägte Materialvorzugsrichtung aufweist und sich orthogonal dazu isotrop in der Ebene verhält (Abb. A.4). Das Material besitzt demnach eine unendliche Anzahl an Symmetrieebenen, wobei die Vorzugsrichtung (hier x_1) in jeder dieser Ebenen liegt.

Die Anzahl der unabhängigen Parameter reduziert sich auf 5, z. B. E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , ν_{13} . Für die restlichen Ingenieurkonstanten folgt:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_3, \\ G_{12} &= G_{13} = G_{21} = G_{31}, \\ G_{23} &= G_{32} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{32})}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die Elastizitätsmatrix lautet:

$$[\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathcal{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & \mathcal{C}_{44} & 0 & 0 \\ & Y & & & \mathcal{C}_{44} & 0 \\ & & M & & & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{22} - \mathcal{C}_{23}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

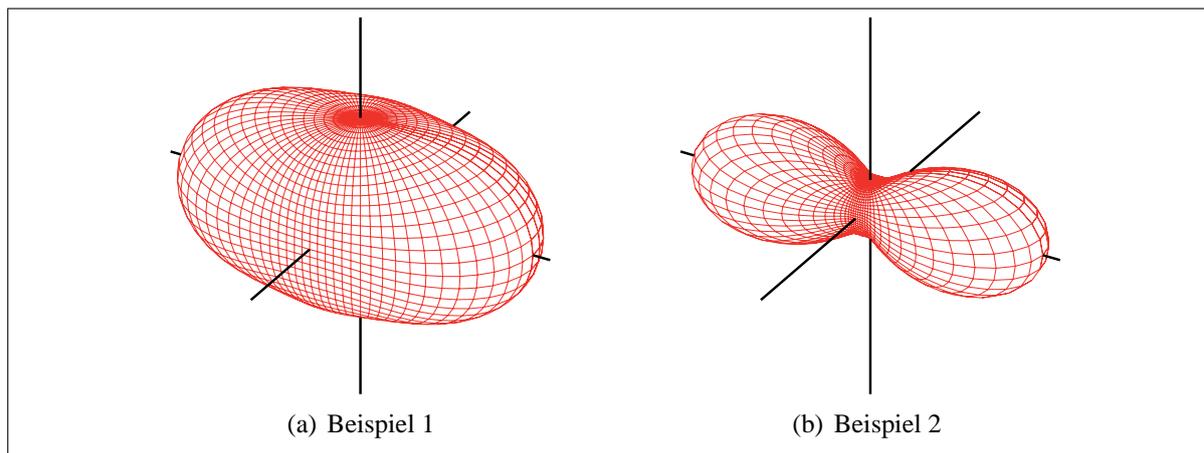


Abbildung A.4: Stereografische Projektion des transversal-isotropen Elastizitätstensors

Auch bei der transversalen Isotropie besteht, wie bei der Orthotropie, im Hauptachsensystem keine Kopplung zwischen den Schubspannungen und den Dehnungen bzw. zwischen den Normalspannungen und den Gleitungen (gestaltsändernde Verzerrungen).

A.8 Isotropie

Isotropes – richtungsunabhängiges Materialverhalten – liegt vor, wenn unendlich viele Symmetrieebenen vorhanden sind, d. h. dass keine ausgeprägte Vorzugsrichtung vorliegt (Abb. A.5).

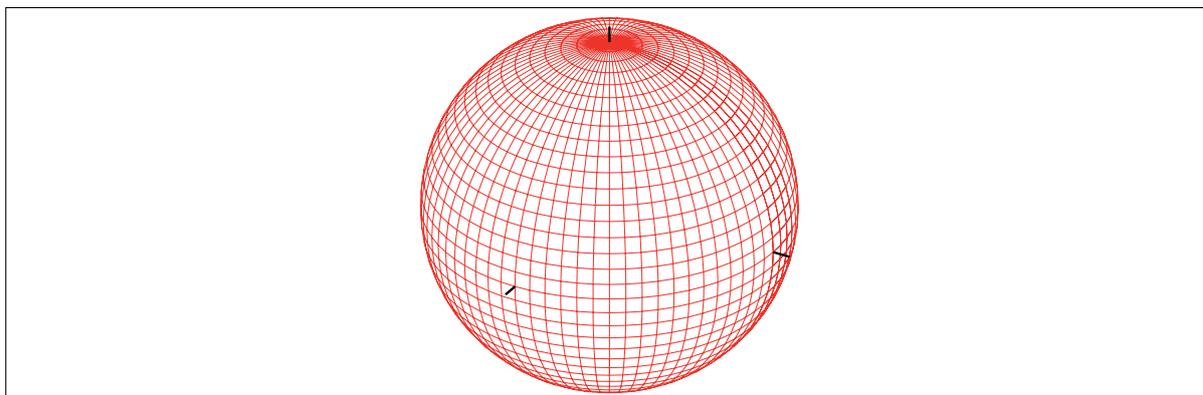


Abbildung A.5: Stereografische Projektion des isotropen Elastizitätstensors

Der Elastizitätstensor kann mit 2 unabhängigen Materialparametern (z. B. E , ν) vollständig beschrieben werden. Der entsprechende Schubmodul kann mit

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.35})$$

berechnet werden. Die Elastizitätsmatrix lautet

$$[\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathcal{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ S & & & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{12}) & 0 & 0 \\ & Y & & & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{12}) & 0 \\ & & M & & & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{11} - \mathcal{C}_{12}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

B Anmerkungen zur Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist eine der am weitesten verbreiteten Methoden für Strukturanalysen. Grundgedanke ist die Unterteilung des zu untersuchenden Gebietes in eine große Anzahl endlich kleiner (finiter), jedoch endlich vieler Teilgebiete (Elemente), woraus sich der Name ableitet. Die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen lassen sich, basierend auf den Ansatzfunktionen der Elemente und den gegebenen Randbedingungen, in ein Gleichungssystem überführen, aus dessen Lösung sich die gesuchten Größen ableiten lassen.

In der Arbeit wurde das Finite-Elemente-Programmsystem PYFEM entwickelt, für das bisher ein Acht-Knoten-Element für das **Me-FEM-** und **Ma-FEM-Modell** und eindimensionale Stabelement und Verbundelement für das **Mi-FEM-Modell** implementiert wurde.

Für die Beschreibung der Finite-Elemente-Methode und der Formulierung der Standard-Verschiebungselemente sei auf [KRÄTZIG & BASAR 1997, BATHE 1990, ZIENKIEWICZ 1984] verwiesen. Das implementierte Acht-Knoten-Volumenelement wurde zusätzlich basierend auf der Assumed-Natural-Strain-Methode erweitert, um dem auf der Makroebene bei den Berechnungen von dünnen Platten beobachtete Schublocking zu begegnen. Die Methode soll im Folgenden dargestellt und angewendet werden.

Locking-Effekte der finiten Elemente

Die Diskretisierung der mechanischen Modelle mittels finiter Elemente kann gewisse Schwächen aufweisen. In der Literatur wird häufig von zu *steifen* bzw. zu *weichen Elementen* berichtet. Die Ansätze in den Finite-Elemente-Modellen weisen hierbei sogenannte *Formulierungsdefekte* [PARISCH 2003] auf. Als Folge der Formulierungsdefekte kommt es zu schlecht konditionierten Gleichungssystemen, welche im Extremfall nicht mehr lösbar, d. h. singular sind. Es wird versucht, dieses Problem unter mechanischen, numerischen bzw. mathematischen Gesichtspunkten zu lösen.

Im Falle von Locking (Sperrungen) verschließt sich das Element bestimmten Verschiebungsmodi. So wird z. B. bei Schalenelementen zwischen Querschub-Locking, Krümmungs-Locking, POISSON-Dicken-Locking, Membran-Locking, Schub-Locking und Volumen-Locking unterschieden [SCHLEBUSCH 2005].

Als Gegenmaßnahmen kommen neben kompletten Element-Neuformulierungen auch Verbesserungen der Element-Formulierungen mittels der Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS) bzw. der Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS) zum Einsatz.

Assumed-Natural-Strain-Methode

Das Acht-Knoten-Element im **Ma-FEM-Modell** wurde basierend der Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS) modifiziert.

Gemäß Abbildung B.1 sind die 6 Kollokationspunkte $A(-1, 0, 0)$, $B(+1, 0, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $D(0, +1, 0)$, $E(0, 0, -1)$ und $F(0, 0, +1)$ definiert worden. An diesen Punkten werden die Schubverzerrungen ε_{12}^E und ε_{12}^F , ε_{13}^C und ε_{13}^D , ε_{23}^A und ε_{23}^B berechnet, welche zur Interpolation der Schubverzerrungen im Element verwendet werden. Die Interpolation

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{12}^h \\ \varepsilon_{13}^h \\ \varepsilon_{23}^h \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 - \theta_3) \varepsilon_{12}^E + (1 + \theta_3) \varepsilon_{12}^F \\ (1 - \theta_2) \varepsilon_{13}^C + (1 + \theta_2) \varepsilon_{13}^D \\ (1 - \theta_1) \varepsilon_{23}^A + (1 + \theta_1) \varepsilon_{23}^B \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

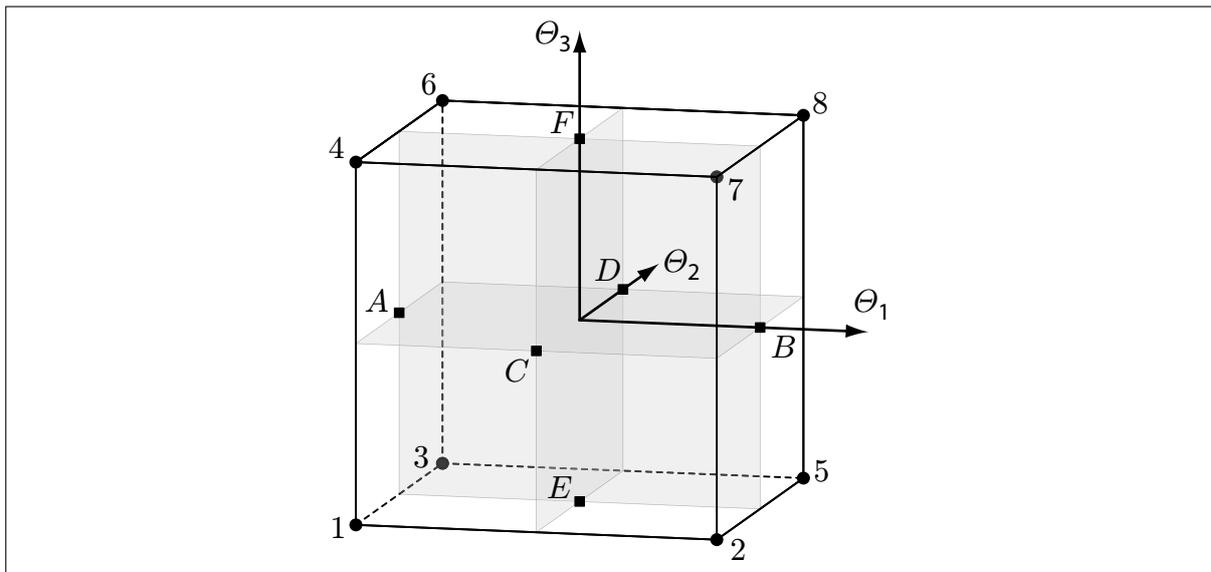


Abbildung B.1: Kollokationspunkte im Finiten Element

basierend auf den Verzerrungen an den Kollokationspunkten, verhindert das sogenannte Schublocking. Dabei wird beispielsweise die Schubverzerrung ε_{13}^X an einem beliebigen Punkt $X(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ im Element als unabhängig von den Koordinatenrichtungen θ_1 und θ_3 angenommen. Diese Annahme wurde getroffen, da im Falle reiner Biegung um die θ_2 -Achse nur in den Punkten mit $\theta_1 = \theta_2 = 0$ keine fehlerbehafteten Schubverzerrungen¹⁵ berechnet werden.

Plattentest

Zur Überprüfung der Maßnahmen gegen das Schublocking wurde die in Abbildung B.2 mit dimensionslosen Größen beschriebene dünne Platte untersucht. Die Symmetrie der zu betrachtenden Struktur erforderte nur eine Diskretisierung eines Viertels der Platte. Anhand Abbildung B.3 ist

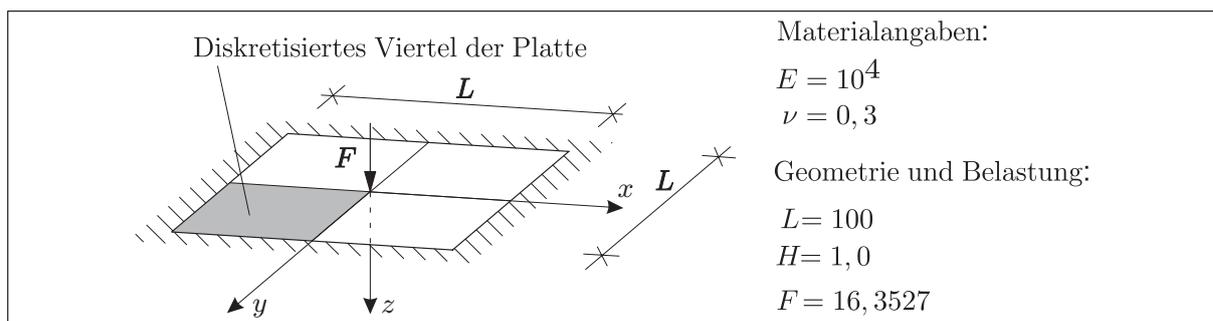


Abbildung B.2: Schublocking: Geometrie der Testplatte

die Verbesserung der Elementgüte mit implementierter ANS-Erweiterung erkennbar. Die Referenzlösung entspricht in Abb. B.3 dem Wert 1. Ein Verschiebungselement ohne ANS-Erweiterung verschließt sich fast vollständig einer Verformung und liefert unbrauchbare Lösungen für die sehr dünne Platte.

Erkennbar ist im Falle einer ANS-Erweiterung für alle 3 Schubverzerrungen (3d-ANS) eine schnelle Konvergenz, wobei die errechneten Verschiebungen mit 8 Elementen eine Abweichung von nur

¹⁵ auch als parasitäre Verzerrungen infolge vereinfachter Elementformulierung bezeichnet

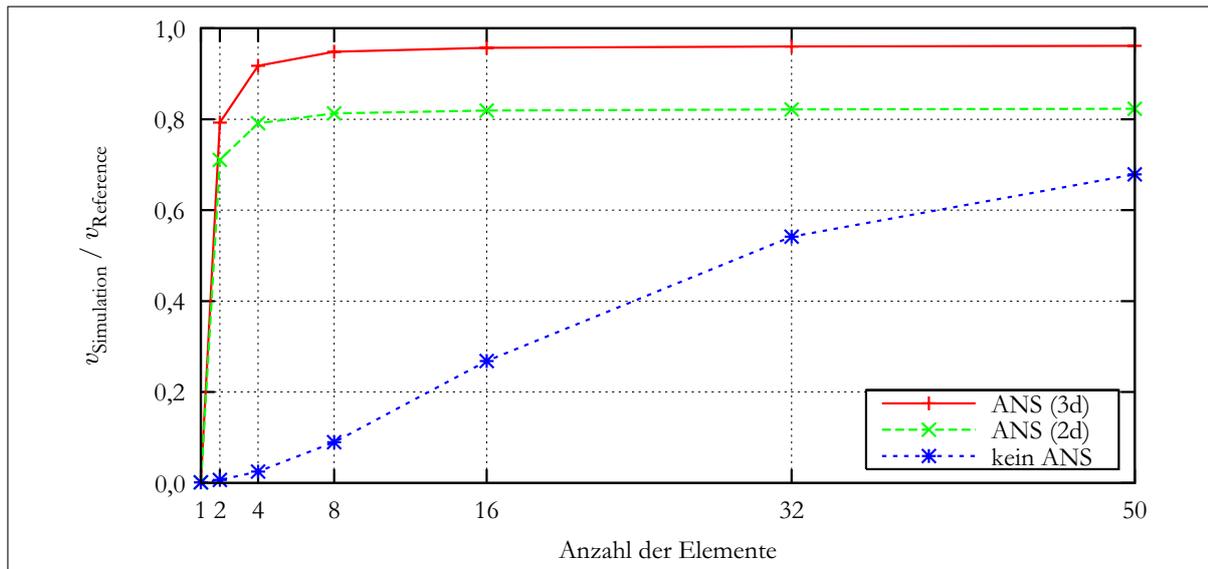


Abbildung B.3: ANS-Benchmark - Plattentest mit 8-Knoten-Volumen-Element

4% gegenüber der Referenzlösung aufweisen. Dieser Fehler bzw. dieses zusätzliche Locking des Elementes kann nicht wirksam mit einer Erhöhung der Elementanzahl verringert werden. Es sind demnach andere Anti-Locking-Methoden anzuwenden (z. B. EAS).

In diesem Beispiel ist weiterhin bemerkenswert, dass eine Anwendung der ANS-Methode auf die Verzerrungen ε_{12} eine weitere Verbesserung der Ergebnisse gegenüber der rein zweidimensionalen Anwendung von ANS bei Schalenelementen führt.

C Verbundgesetze

C.1 Verbundmodell nach SOH

Bereits für die Beschreibung des Verbundverhaltens zwischen Stahl und Beton haben sich bestimmte Zusammenhänge von Schlupf zwischen den beiden Grundmaterialien und übertragbarer Schubspannung im Interface als zweckmäßig erwiesen [NAAMAN & SHAH 1976, ALVAREZ 1998, SOH et al. 1999]. Später wurden diese Modelle auch auf Kurzfaserbewehrung aus Stahl- und Glasfasern und auf die Bewehrung verschiedener Matrixmaterialien mit Langfasern aus Kunststoff und Glas übertragen und erweitert. Für den qualitativen Verlauf eines Schubspannungs-Schlupf-Gesetzes finden sich in der Literatur verschiedene Annahmen mit entsprechenden Vor- und Nachteilen.

Das Interface-Schädigungsmodell von [SOH et al. 1999] beschreibt das Interfaceversagen durch konstitutive Gesetze in der Form von Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen für das Interface sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung zum Interface:

$$\sigma_n = K_n^0(1 - D_n)u_n, \quad (\text{C.1})$$

$$\tau_s = K_s^0(1 - D_s)u_s. \quad (\text{C.2})$$

Die im Interface übertragbare Normalspannung σ_n und die Tangentialspannung τ_s sind abhängig von den Schädigungsparametern D_n und D_s . Die Schädigung des Interface kann mit Funktionen in Abhängigkeit von den Relativbewegungen u_n und u_s der beiden Kontaktflächen bestimmt werden, wobei eine gegenseitige Interaktion der separat in normaler und tangentialer Richtung definierten Schädigungsentwicklungen realisiert wird¹⁶. Für den Auszugsversuch ist die tangentiale Schädigungsevolution von entscheidender Bedeutung, da außer Querdehnungseffekten keinerlei normale Beanspruchungen zum Interface auftreten. Die Schubspannungs-Schlupf-Beziehung für das Interface wird qualitativ gemäß Abb. C.1(a) angenommen. Bis zu einem Schlupf von u_{s0} tritt keine Schädigung auf. Die Kurve bleibt linear. Der Wert u_{sm} stellt den zur maximal vom Interface übertragbaren Schubspannung korrespondierenden Schlupf dar. Der Wert \bar{u}_{su} wird Grenzschlupf genannt. Wird dieser Schlupf überschritten, so kann das Interface als gerissen betrachtet werden. Der Schlupfwert u_{su} kann als quasi-Grenzschlupf angesehen werden. Er dient lediglich als zusätzlicher Freiwert, um die Form der Kurve besser approximieren zu können.

Die 7 Parameter¹⁷ für die Bestimmung der Schädigungsevolutionsgleichung $D_s(u_s)$ nach Gleichung (C.3) können indirekt anhand experimenteller Daten aus Auszugsversuchen ermittelt werden.

$$D_s(u_s) = \begin{cases} 0 & \text{für } u_s \leq u_{s0} \\ 1 - \frac{1}{a_s \left(\frac{u_s}{u_{sm}}\right)^3 + b_s \left(\frac{u_s}{u_{sm}}\right)^2 + c_s \left(\frac{u_s}{u_{sm}}\right) + d_s} & \text{für } u_{s0} < u_s < \bar{u}_{su} \\ 1 & \text{für } u_s \geq \bar{u}_{su} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Die Schädigungsevolution in Normalenrichtung ist bisher noch nicht quantitativ untersucht worden, da bislang keine Experimente zur Bestimmung der Normalspannungs-Normalverschiebungs-Beziehung durchgeführt wurden. Solche Versuche sind sehr schwer durchführbar, da die messtechnische Erfassung von Verschiebungen senkrecht zum Interface höchst problematisch ist. Es ist

¹⁶Im Folgenden werden in Anlehnung an die analytischen Modelle Spannungen als Funktionen von Verschiebungen statt als Funktionen von Verzerrungen angegeben. Über die Dicke der Interfaceschicht läßt sich jederzeit eine Umrechnung durchführen.

¹⁷ u_{s0} , u_{sm} , u_{su} , \bar{u}_{su} , τ_{s0} , τ_{sm} und τ_{su} (vgl. Abb. C.1(a))

jedoch vorstellbar, dass auch in Normalenrichtung ein Schädigungsverhalten eintritt. Denkbar ist z. B. eine Normalspannungs-Verschiebungs-Beziehung gemäß Abb. C.1(b).

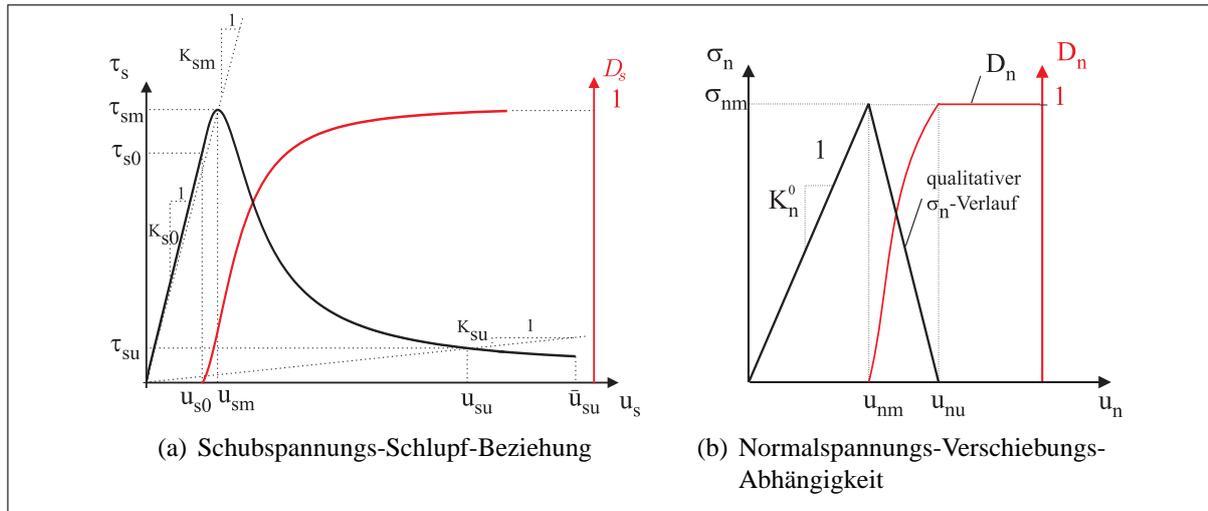


Abbildung C.1: Verbundmodell nach [SOH et al. 1999]

Bis zu einer Verschiebung von u_{nm} bleibt das Interface ungeschädigt. Danach nimmt die vom Interface übertragbare Normalspannung linear ab. Bei einer Verschiebung von u_{nu} kann keine Spannung mehr übertragen werden. Das Interface ist komplett geschädigt. Die Schädigungsevolutionsgleichung D_n lässt sich mit

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{für } u_n \leq u_{nm} \\ 1 - \frac{1}{\frac{r_u - 1}{r_u} x_n} + \frac{1}{r_u - 1} & \text{für } u_{nm} < u_n < u_{nu} \\ 1 & \text{für } u_n \geq u_{nu} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

angegeben, wobei folgende Vereinbarungen gelten:

$$x_n = \frac{u_n}{u_{nm}}; \quad r_u = \frac{u_{nu}}{u_{nm}}. \quad (\text{C.5})$$

C.2 Simulation des Stahlauszugsversuches

Das in dieser Arbeit entwickelte Verbundmodell **Mi-I-Modell** erlaubt auch die Simulation des Auszugsverhaltens von Stahlstäben aus der Betonmatrix (Abb. C.2). Wenn die Stäbe profiliert (gerippt) sind, wird im Rahmen des schlupfbasierten Verbundgesetzes sowohl das Scherversagen (Kohäsionsbruch der Matrix), als auch Haften (Adhäsionsversagen) und Reiben verschmiert abgebildet. Abbildung C.3(a) zeigt die Übereinstimmung der Experimental- und der Simulationsdaten. Hierbei ist der Schlupf am nachgezogenen Ende gegenüber der Auszugskraft dargestellt [ECKFELDT 2005].

Die Verbundlänge von 28 mm ist nur doppelt so lang wie der Stahldurchmesser. Durch die kurze Verbundlänge ist es zu keinem Stahlfließen gekommen, im Verbundmodell ist aber eine entsprechende Arbeitskurve für das Fließen von Stahl abbildbar. Bei Versuchsnachrechnung in Abschnitt 9.2 wurde das Stahlfließen bei der Simulation des Stahlbetons mit dem **Me-I-Modell** simuliert.

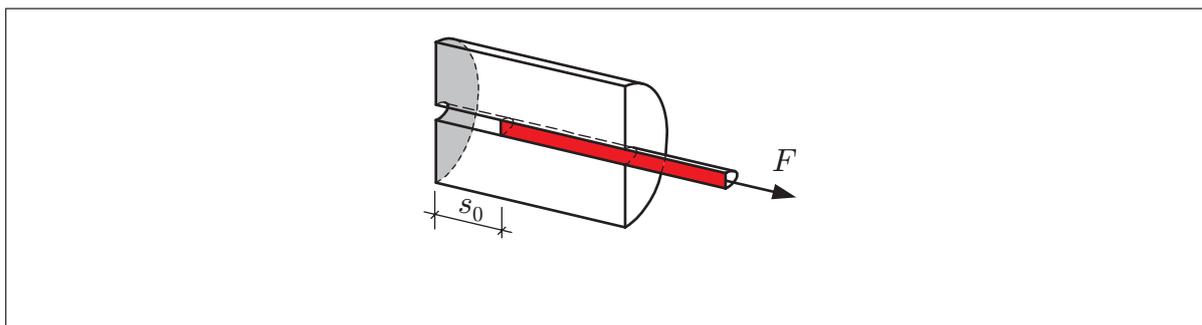


Abbildung C.2: Gemessene Größen im Stahlauszugsversuch

In Abbildung C.3(b) ist die identifizierte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung dargestellt. Bemerkenswert ist die Größenordnung der Schubspannungen von ca. 60 N/mm^2 infolge des Formschlusses der Rippen mit der Matrix. Vergleichsweise sind die Schubspannungen im Filament-Matrix-Interface i. d. R. kleiner als 5 N/mm^2 .

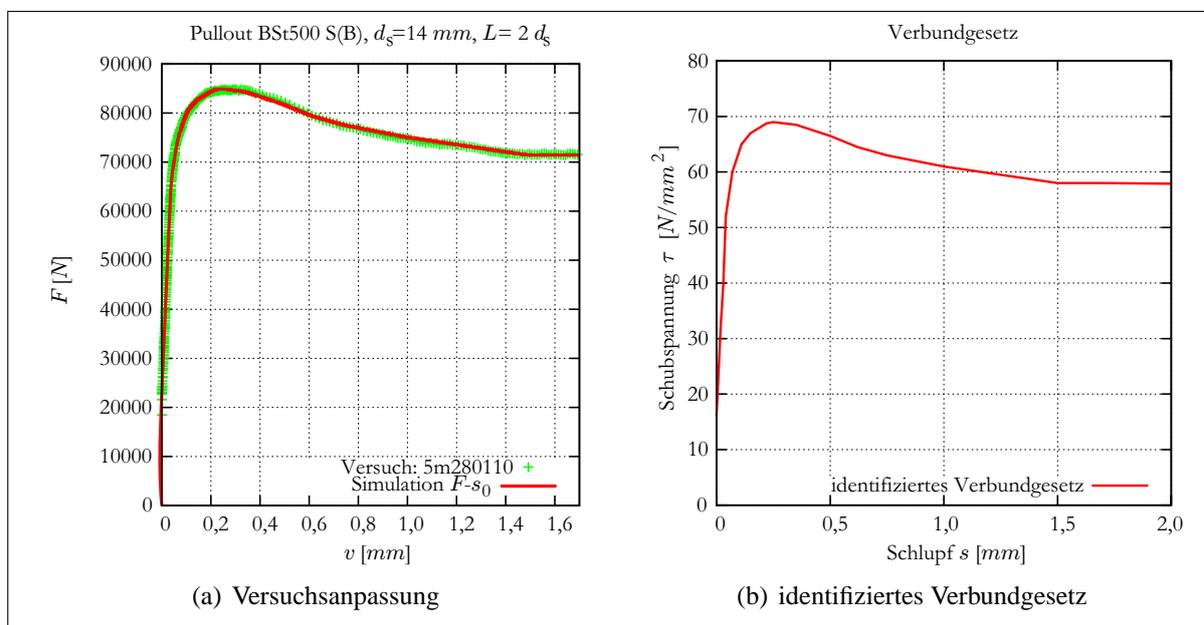


Abbildung C.3: Simulation des Auszugsverhaltens von Stahl aus einer Betonmatrix

D Superelliptische Rovingquerschnittsformen

Die **Mi-IIa**-, **Me-I** und **Me-FEM**-Modelle verwenden superelliptische Querschnittsapproximationen für die Rovings. Abbildung D.1 zeigt die schichtweise Approximation von Rovings mit unterschiedlichen Aspektverhältnissen $a : b$.

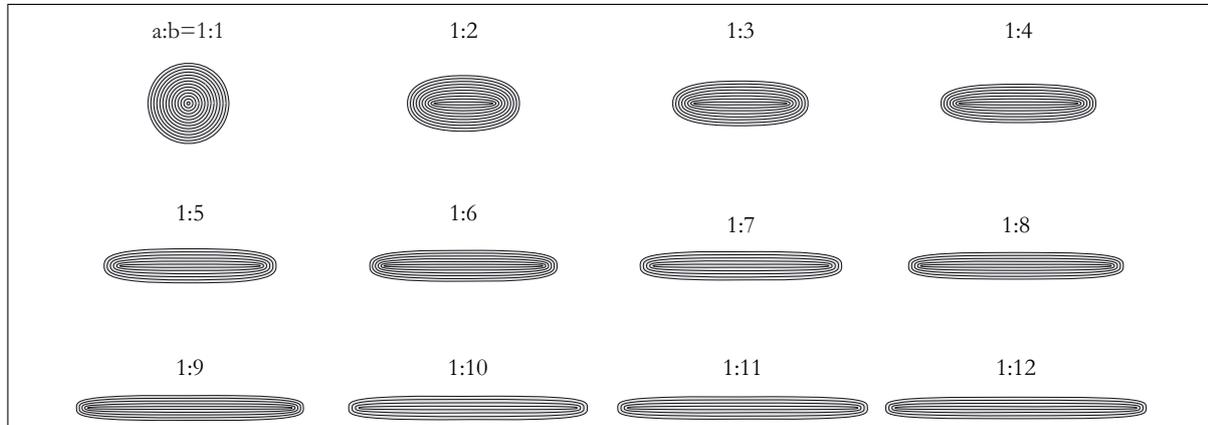


Abbildung D.1: Schichtenmodell eines Rovings mit superelliptischem Querschnitt

Die Vielfalt der Rovingformen und deren Approximation mit Superellipsen sind exemplarisch in den Abbildungen D.2-D.6 dargestellt. Die Parameter der Superellipsen wurden anhand der Dünnschliffbilder nach [JESSE 2004] bestimmt.



Abbildung D.2: Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 1,9 : 1$; $r = 2,1$; 155 *tex* (SFB528-B1-089-09-01)

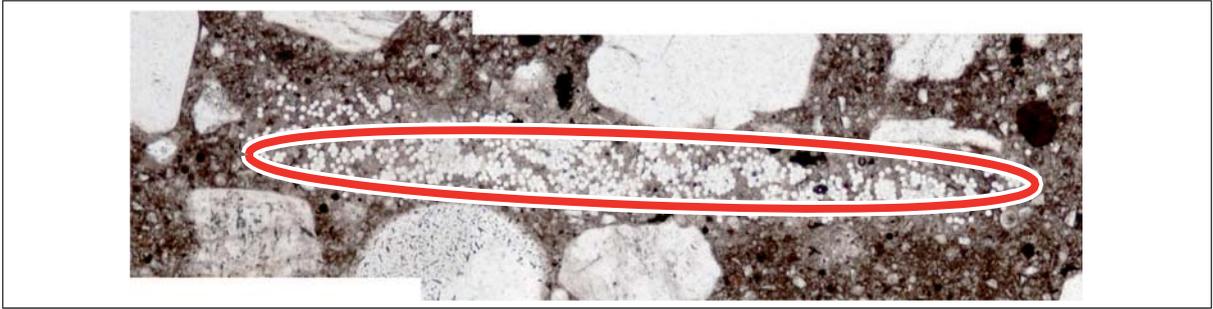


Abbildung D.3: Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 11 : 1$; $r = 2,2$; 310 tex
(SFB528-B1-004-03-07)

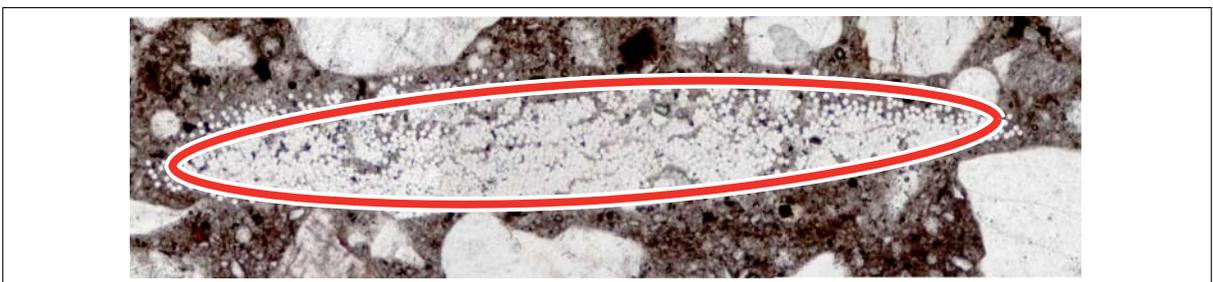


Abbildung D.4: Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 7 : 1$; $r = 1,8$; 620 tex
(SFB528-B1-014-02-02)

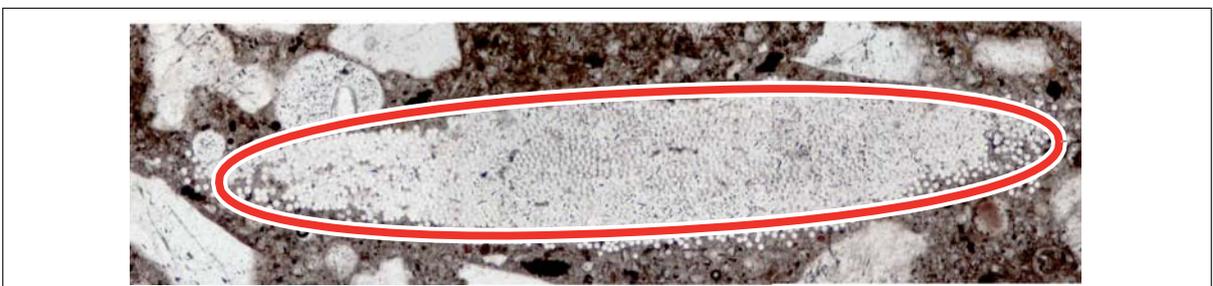


Abbildung D.5: Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 6 : 1$; $r = 2,2$; 620 tex
(SFB528-B1-014-02-08)

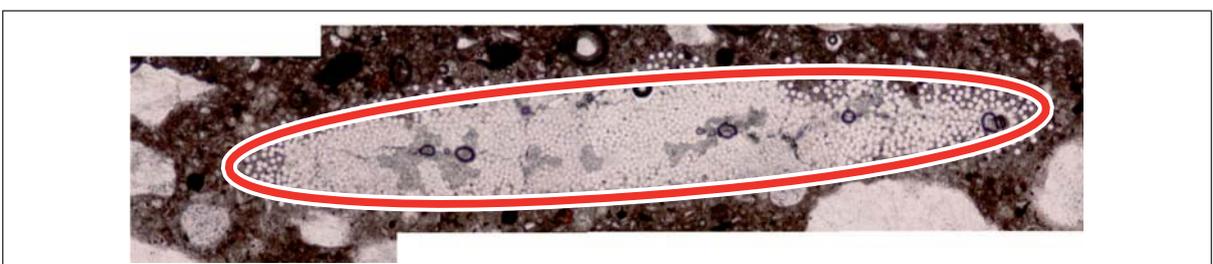


Abbildung D.6: Rovingapproximation mit einer Superellipse $a : b = 7 : 1$; $r = 2,1$; 1100 tex
(SFB528-B1-021-02-07)

E Biaxiales Materialverhalten von Textilbeton

Einführung zum biaxialen Dehnkörperversuch

Gegenstand dieses Kapitels ist die Auswertung der zweiaxialen Dehnkörperversuche von [JESSE et al. 2006]. Ziel ist die Ermittlung der multiaxialen Verzerrungszustände ϵ anhand der Verschiebungsmessdaten infolge einer biaxialen Belastung des orthogonal bewehrten Probekörpers. Hierbei handelt es sich um eine Scheibe mit einer konstanten Dicke von 8 mm , welche biaxial beansprucht wird. Abbildung E.1 zeigt den Probekörper.

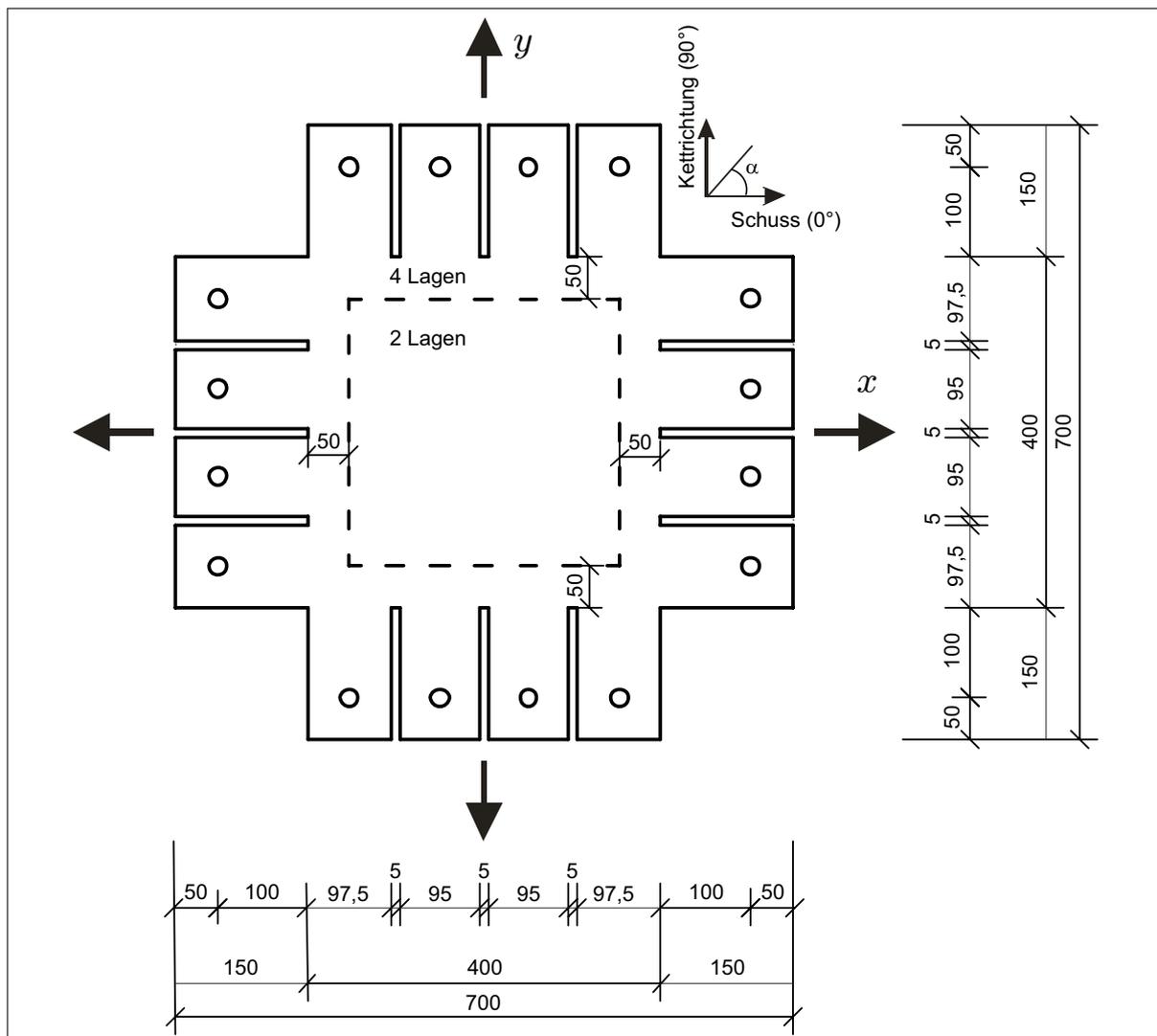


Abbildung E.1: Probekörper für Biaxialversuche nach [JESSE et al. 2006]

An allen vier das Messfeld ($400 \times 400\text{ mm}^2$) begrenzenden Seiten schließen sich Betonlaschen für die Lasteinleitung an. Die Kraftübertragung von der Prüfmaschine in den Probekörper erfolgte mittels vorgespannter Schraubenverbindungen infolge Lochleibung und Schraubenpressung. Dabei wurden durch eine Waagebalkenkonstruktion die Zugkräfte gleichmäßig auf die vier Laschen pro Seite verteilt.

Um ein vorzeitiges Versagen im Lasteinleitungsbereich zu vermeiden, erfolgte eine zusätzliche Bewehrung der Laschen und einem 5 cm breiten Randbereich des Messfeldes, wobei die Zusatzbewehrung in der Verlängerung der Schlitze zwischen den Laschen nicht durchgängig ist (Abb. E.1).

Zusätzlich zu den vier gemessenen Kräften und Verschiebungen an den Laschen wurde mittels eines photogrammetrischen Verfahrens das Verschiebungsfeld des Probekörpers in einem Raster von 9×9 Punkten begleitend aufgenommen. Der Rasterabstand betrug 50 mm .

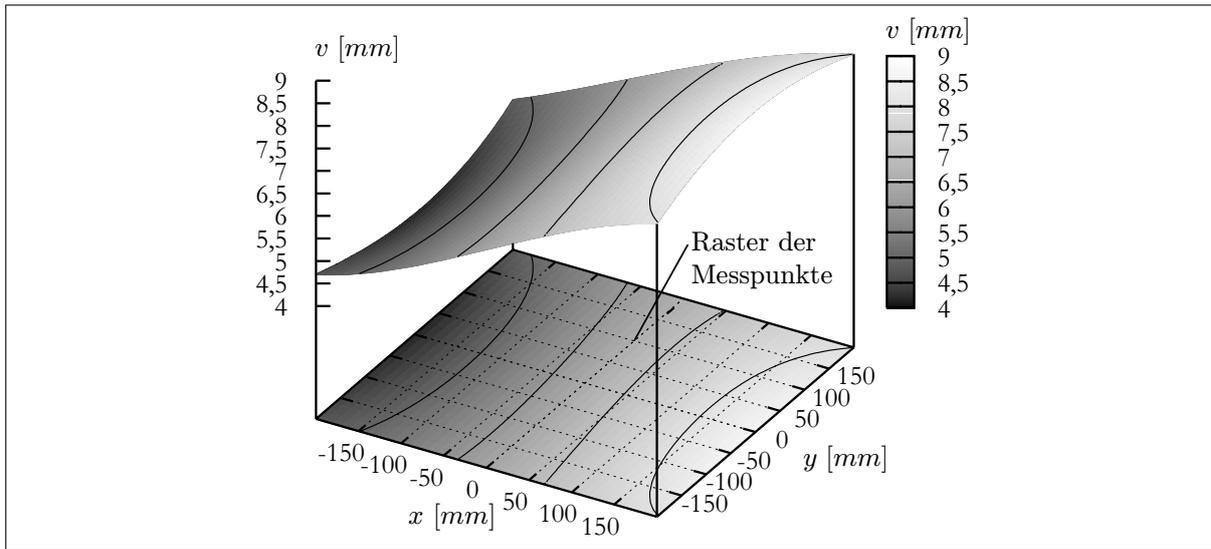


Abbildung E.2: Interpoliertes Verschiebungsfeld $v(x, y)$ des Probekörpers

Abbildung E.2 zeigt das, basierend auf den gemessenen Verschiebungen, mittels Splines interpolierte Verschiebungsfeld. Zur Ermittlung der Verzerrungen wurde zum Einen die interpolierte Verschiebungsfunktion nach dem Ort abgeleitet, zum Anderen ein dem Messraster entsprechendes Finite-Elemente-Netz (mit linearem Verschiebungsansatz) mit vorgegebenen Knotenverschiebungen benutzt.

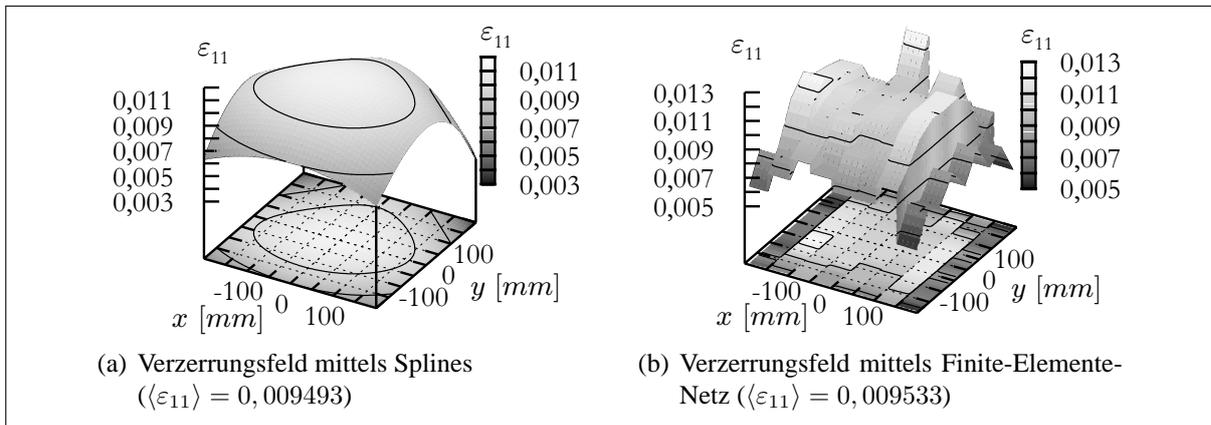


Abbildung E.3: Berechnete Verzerrungsfelder $\varepsilon_{11}(x, y)$

In den Abbildungen E.3(a) und E.3(b) sind die approximierten Verzerrungen ablesbar. Trotz der deutlichen Unterschiede zwischen den interpolierten Verzerrungsfeldern $\varepsilon_{11}(x, y)^{Spline}$ und $\varepsilon_{11}(x, y)^{FEM}$ sind die auf beiden Wegen erhaltenen mittleren Verzerrungen $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ annähernd gleich groß (rel. Fehler $f_{rel} \approx 0,4\%$)

Mit den mittleren Spannungen $\langle \sigma_{11} \rangle = F_x/A_x$ bzw. $\langle \sigma_{22} \rangle = F_y/A_y$ lassen sich mittlere Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen ableiten.

Richtungsabhängiges Materialverhalten von biaxial bewehrtem Textilbeton

Die Abbildungen E.5(a) und E.5(b) zeigen die experimentell ermittelten Spannungs- und Verzerrungspfade bei biaxialer Zugbeanspruchung im Verhältnis $\langle \sigma_{11} \rangle / \langle \sigma_{22} \rangle$. Die resultierende Belastungsrichtung α errechnet sich mit

$$\arctan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Weiterhin wird der Winkel β bezüglich der Koordinatenrichtungen x und y mit $\beta = \alpha$ für die x -Richtung und $\beta = 90^\circ - \alpha$ für die y -Richtung eingeführt.

Für zwei Versuche ($\alpha = 27^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$) sind hier exemplarisch die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten angegeben (Abb. E.4).

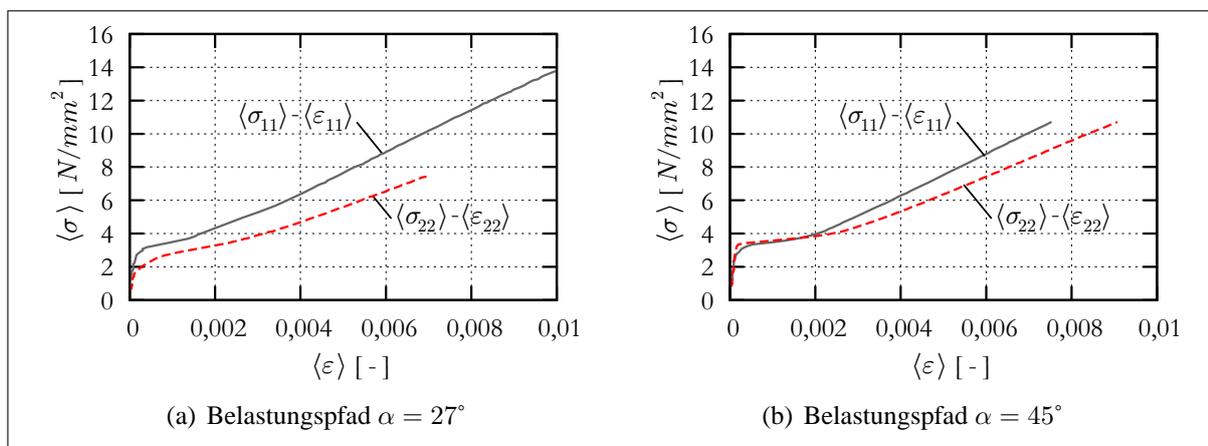


Abbildung E.4: Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit unter biaxialer Zugbeanspruchung

Durch die zusätzliche Bewehrung in den Randbereichen der Probe ist die mittlere Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in Abb. E.4 nur für die Probe als Ganzes gültig. Die Orientierung der zweilagigen Bewehrung ist bezüglich der Lasteinleitungsrichtungen ausgerichtet ($\alpha_{\text{Bewehrung}} = 0^\circ$), d. h. die Schussrichtung der textilen Struktur zeigt in x -Richtung und die Kettrichtung in die y -Richtung (vgl. Abb. E.1). Trotz gleicher Bewehrungsmenge in Schuss- und Kettrichtung sind die mittleren Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeiten unterschiedlich. Dies ist auf die unterschiedlichen Rovingsquerschnitte in Schuss- und Kettrichtung infolge der textilen Verarbeitung der Rovings während der Geleageherstellung zurückzuführen. Die Versuche sind lastgesteuert gefahren worden, d. h. es findet im Unterschied zu den uniaxialen Dehnkörperversuchen keine kurzzeitigen Entlastungen nach einer Rissneubildung statt. Bemerkenswert sind die unterschiedlichen Verhältnisse der Spannungen und der Dehnungen (Abb. E.5(b))

$$\frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle \sigma_{22} \rangle} \neq \frac{\langle \epsilon_{11} \rangle}{\langle \epsilon_{22} \rangle} \quad , \quad (\text{E.2})$$

wobei auch die Richtungen der Hauptspannungen nicht koaxial zu den Richtungen der Hauptdehnungen verlaufen (Abb. E.6(b)).

Das effektive Materialverhalten ist demnach nachweislich anisotrop, wobei die induzierte Anisotropie (durch Rissbildung) sich deutlich stärker als die initiale Anisotropie auswirkt. Festzustellen

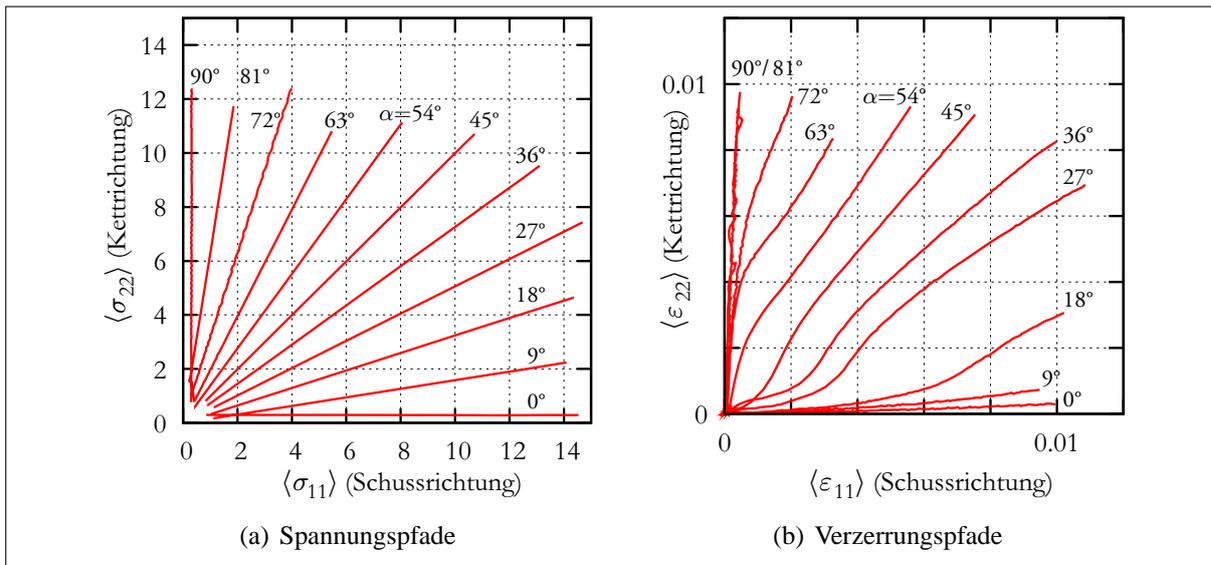


Abbildung E.5: Belastungspfade nach [JESSE et al. 2006]

ist auch eine geringere Bruchdehnung der Pfade 1/0 ($\alpha = 0^\circ$) und 0/1 ($\alpha = 90^\circ$) gegenüber dem Pfad 1/1 ($\alpha = 45^\circ$), wobei beachtet werden muss, dass pro Spannungsverhältnis $\langle \sigma_{11} \rangle / \langle \sigma_{22} \rangle$ nur ein Versuch gefahren wurde. Die abgeleiteten Schlussfolgerungen aus den biaxialen Versuchen sind wegen der geringen Anzahl an Versuchsdaten nur eingeschränkt gültig. Qualitative Aussagen sind aber ableitbar.

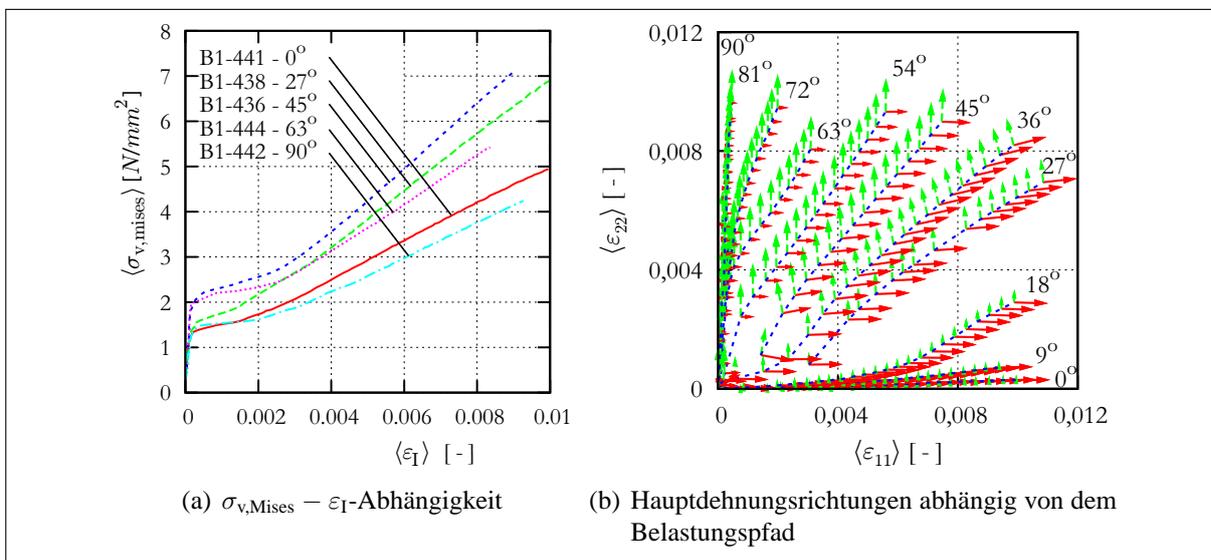


Abbildung E.6: Auswertung der Biaxialversuche (Experiment nach [JESSE et al. 2006])

Abbildung E.6(a) zeigt die Abhängigkeit der Vergleichsspannung σ_v nach v. MISES von der maximalen Hauptdehnung ε_I . Das Spannungsverhältnis von 1 ($\langle \sigma_{11} \rangle / \langle \sigma_{22} \rangle \approx 1$) bewirkt auf Grund der vollständigen Aktivierung beider orthogonaler Rissysteme die größten Vergleichsspannungen σ_v . Die unterschiedliche Rovingquerschnittsformen in Schuss- und in Ketririchtung des verwendeten Geleges bewirken das unterschiedliche Verhalten (E.6) verglichen mit der Simulation in Abschnitt 8.6.2.

In diesem Zusammenhang muss erwähnt werden, dass das sich einstellende Rissbild von dem Belastungspfad abhängt. Konkret bilden sich Zugrisse bei Beanspruchungsrichtungen $0^\circ \leq \alpha \leq 9^\circ$ senkrecht zur Schussrichtung bzw. bei $81^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ senkrecht zur Kettrichtung (vgl. Abb. E.1). Für Winkel von $9^\circ < \alpha < 81^\circ$ bilden sich zwei Rissysteme, jeweils parallel zu der Schuss- und der Kettrichtung, welche schräg zur Rissfläche beansprucht werden.

Durch die Bestimmung der Verzerrungsmaße ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , ε_{21} , γ_{12} , ε_{31} und ε_{32} aus den Ableitungen des Verschiebungsfeldes können die Hauptrichtungen für jeden Belastungsschritt berechnet werden. Abbildung E.6(b) zeigt die Neigung der Hauptachsen des mittleren Verzerrungstensor für ausgewählte Belastungspfade. Die Belastungspfade 27° und 36° zeigen eine deutliche Abweichung der Hauptdehnungsrichtungen von den vorgegebenen Hauptspannungsrichtungen.

Die Kenntnis der Komponenten des Verzerrungstensors kann für die Validierung der multiaxialen Simulationsmodelle verwendet werden.

F WEIBULL-Verteilung

Die WEIBULL-Verteilung [BRONSTEIN et al. 2000] ist eine statistische Verteilung, die beispielsweise zur Untersuchung der Lebensdauer in der Qualitätssicherung verwendet wird. Ein anschauliches Beispiel für die Anwendung der WEIBULL-Statistik ist die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Kette. Das Versagen eines Gliedes führt zum Festigkeitsverlust der ganzen Kette. Spröde Werkstoffe zeigen ein ähnliches Bruchverhalten. Es genügt ein Riss, um das Bauteil zu zerstören.

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion der WEIBULL-Verteilung $\text{Wei}(\alpha, \beta)$ bzw. $\text{Wei}(k, \lambda)$ ist mit

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, \quad (\text{F.1})$$

$$f(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad (\text{F.2})$$

angegeben, wobei $\lambda = \alpha^{-1/\beta}$ der Skalenparameter (z. B. charakteristische Lebensdauer oder Festigkeit eines Filamentes) und $k = \beta$ der Formparameter – auch WEIBULL-Modul genannt – ist.

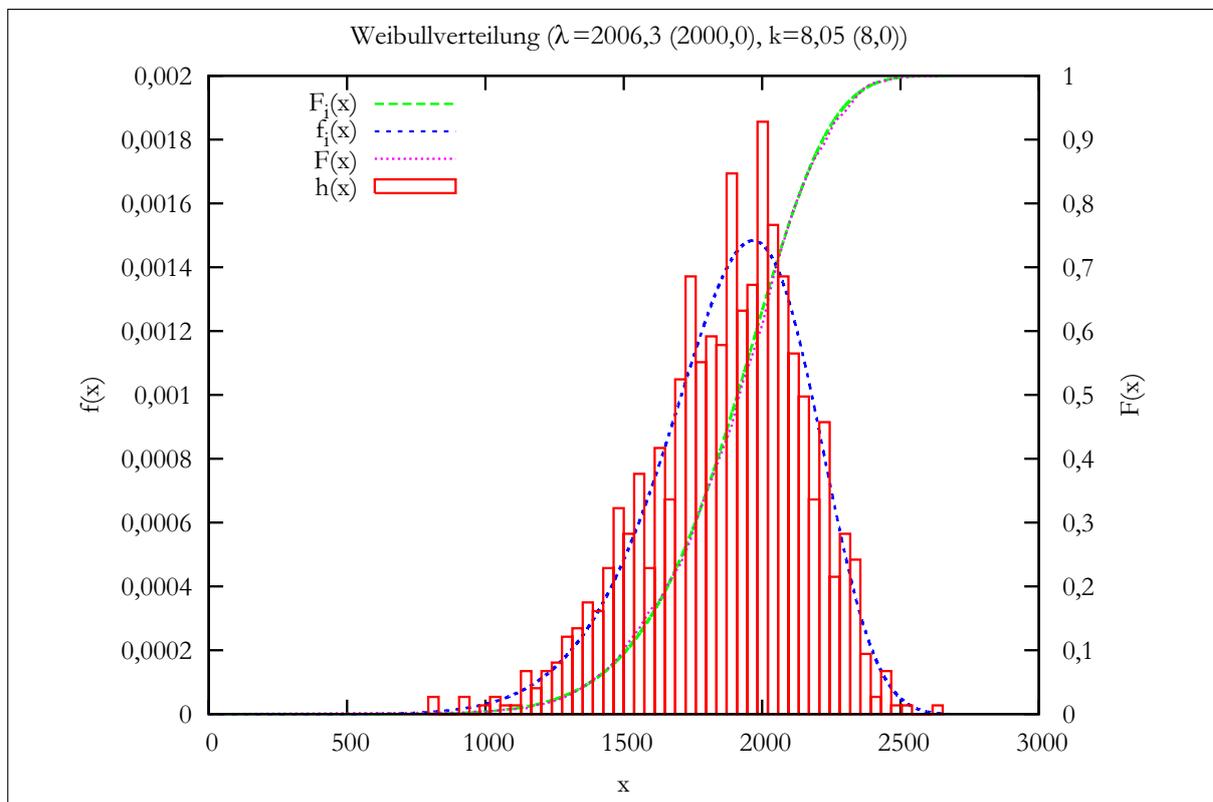


Abbildung F.1: WEIBULL-Verteilung

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion (Abb. F.1) lautet

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{-\alpha x^\beta} \quad (\text{F.3})$$

$$F(x; k, \lambda, \theta) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^k} \quad (\text{F.4})$$

für $x > 0$, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

Eigenschaften

Trägt man die Verteilung in der Form

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(x)} = k \ln(x) - k \ln(\lambda) \quad (\text{F.5})$$

auf, ergibt sich eine Gerade bei der man den Parameter β leicht als Steigung ablesen kann. Der Parameter λ kann dann folgendermaßen berechnet werden:

$$\lambda = e^{-\left(\frac{a}{k}\right)} \quad (\text{F.6})$$

Hierbei bezeichnet a die Ordinaten-Schnittpunkt ($x = 0$).

Erwartungswert

Den Erwartungswert erhält man zu

$$E(X) = \alpha^{-1/\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (\text{F.7})$$

$$E(X) = \lambda \Gamma(1 + 1/k). \quad (\text{F.8})$$

Varianz

Die Varianz $\text{Var}(X)$ bestimmt sich zu

$$\text{Var}(X) = \alpha^{-2/\beta} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)^2 \right), \quad (\text{F.9})$$

wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet.

G Natürliche Tragstrukturen aus Glas – Der Glasschwamm

Der Glasschwamm *Euplectella* ist ein Beispiel dafür, wie die Natur durch eine optimierte Anordnung von Glasfasern außergewöhnlich stabile Tragstrukturen entwickelt. [FRATZL 2005b] beschreibt die Strukturen des Glasschwamms vom Nanometer- bis zum Zentimeterbereich. Insgesamt sieben hierarchische Strukturebenen der Glasfaserkonstruktion des Glasschwamms konnten identifiziert werden. Dies ist für heutige (Bau-)Technik von großem Interesse.

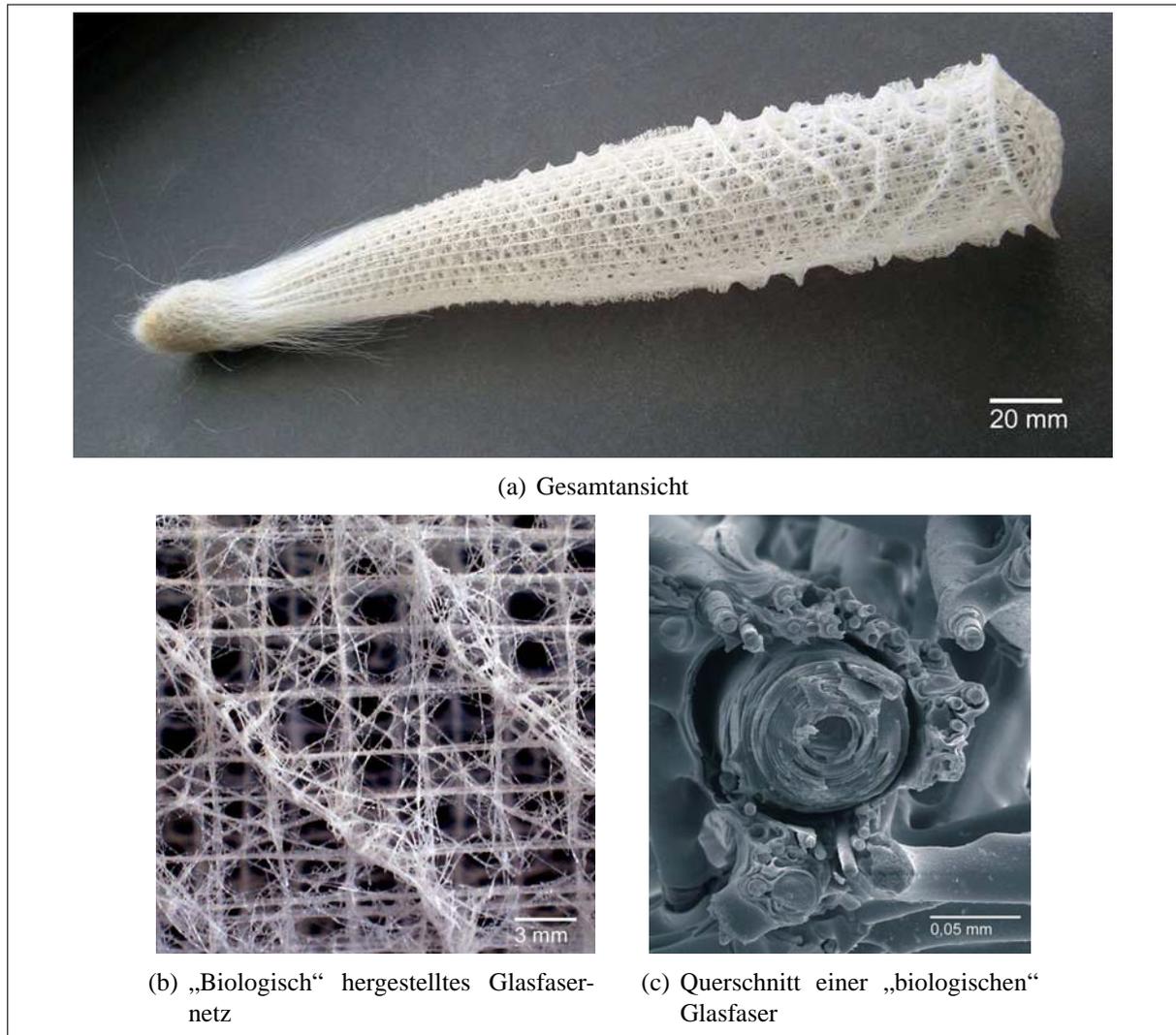


Abbildung G.1: Der Glasschwamm *Euplectella* [FRATZL 2005b]

Bauprinzip des gläsernen Skeletts von dem Glasschwamm *Euplectella*

Der Glasschwamm *Euplectella* besitzt ein fast unzerbrechliches käfigartiges, gläsernes Skelett, das extrem hohen Drücken der Tiefsee zu widerstehen vermag. Das Skelett selbst besteht aus Bio-Glasfasern, in mindestens sieben hierarchisch gegliederten Stufen, die aus konzentrisch angeordneten Schichten mit wenigen Mikrometern Dicke aufgebaut sind (Abb. G.1). Diese Glaslamellen sind untereinander durch eine dünne Klebschicht aus organischer Matrix verbunden. Die Sprödigkeit des Glases wird durch den Mikrolamellen-Aufbau verringert, die zu einer höheren Unempfindlichkeit gegenüber Rissen und Kratzern führen. Die Glasfasern unterschiedlicher Dicke sind untereinander mit Glaszement (Silikat-Nanopartikel) zu Tragwerksstrukturen kombiniert. Diese

Tragelemente sind vertikal, horizontal und diagonal zu einem Netz verwoben (Abb. G.1(b)). Diese multiaxiale Struktur ähnelt den textilen Bewehrungsstrukturen, die im Textilbeton verwendet werden. Zusätzlich ist die Struktur durch spiralförmige Rippen verstärkt, um die Stabilität des Käfigs zu erhöhen. Die letzte von [FRATZL 2005a] beschriebene hierarchische Ebene, ist die geschwungene Form des Käfigs (Abb. G.1(a)).

Dem Schwamm *Euplectella* gelingt es, eine ganze Reihe von mechanischen Konstruktionsprinzipien auf vielen Größenskalen zu kombinieren. Es ist ein Lehrbuchbeispiel dafür, wie sich aus spröden Materialien wie Glas bruchfeste Strukturen erzeugen lassen. [FRATZL 2005b] schreibt: „Ein anderes Geheimnis des Glasschwamms dagegen ist inzwischen gelüftet: Durch die feinen Maschen des Glasgerüsts gelangen Larven einer Garnelenart in sein Inneres. Meist siedeln sich dort Pärchen an, die wachsen und dann irgendwann zu groß werden, um den Schwamm wieder verlassen zu können. Das Krabbenpaar verbringt deshalb sein ganzes Leben in diesem gläsernen Käfig. In Japan gilt der Glasschwamm daher auch als beliebtes Hochzeitsgeschenk.“

Ingolf G. Lepenies
Leubnitzer Str. 12a
01069 Dresden

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Geburtstag: 19.07.1973
Geburtsort: Dresden
Nationalität: deutsch
Familienstand: verheiratet

Schulbildung:

	09/80 – 06/90	Polytechnische Oberschule „Heinrich–Greif“, Dresden
	09/90 – 06/92	Erweiterte Oberschule Dresden-Plauen
Abschluß:		Abitur

Hochschulstudium:

	10/93 – 08/97	Studium der Fachrichtung Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden
	10/97 – 08/98	Studium an der City University London/UK, School of Engineering and Mathematical Sciences, Teilnahme am Masterstudiengang „MSc Analysis and Design of Structures for Hazards“ in Rahmen des Sokrates-Studentenaustauschprogrammes
	10/98 – 09/99	Studium der Fachrichtung Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden
Abschluß:		Diplom (Dipl.-Ing.) Studienrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau Vertiefung: Baumechanik

Universitäre Tätigkeiten:

seit 10/99	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik, Festigkeitslehre und Flächentragwerke des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke der Technischen Universität Dresden
------------	--

Wehr-/Ersatzdienst:

07/92 – 06/93	Grundwehrdienst, Fernmeldekompanie 411, Blankenfelde
---------------	--

Dresden, den 16. August 2007

Ingolf G. Lepenies

