TRABAJOS DE PREHISTORIA
52, n.° 1, 1995, pp. 13-24

FRACTALES PARA LA ARQUEOLOGÍA: UN NUEVO LENGUAJE

FRACTALS FOR ARCHAEOLOGY: A NEW LANGUAGE

ANGEL RODRÍGUEZ ALCALDE (*)
CARMELO ALONSO JIMÉNEZ (**)
JULIÁN VELÁZQUEZ CANO (***)

RESUMEN

Se propone un modelo de evolución de sistemas en los que sus elementos se articulan mediante relaciones que implican intercambio de información. Éstas se analizan a partir del concepto de *percolación*. El resultado son sistemas dinámicos que se auto-organizan hacia un *estado crítico*, como consecuencia de la iteración de sucesos espacio-temporales a pequeña escala. La red de relaciones presenta estructura fractal. Como ejemplo se aborda el problema de la expansión de las especies domésticas en la cuenca mediterránea, proponiendo un modelo alternativo a la difusión démica.

ABSTRACT

In this paper we propose an evolutionary model of systems in which their elements are articulated through the relationships that involve an exchange of information. When analysing these relationships we use the concept of percolation. *The result is a set of dynamic systems self-organized towards a* critical state, *as the consequence of the iteration of time-space events at a small scale. The network of relationships follows a fractal structure. As an example we tackle the problem of the expansion of domestic species in the Mediterranean basin, proposing an alternative model to that of demic diffusion.*

Palabras Clave: Percolación. Fractal. Teoría del Caos. Difusión démica. Neolítico. Modelo de «Ola de Avance». Modelo de Difusión «Capilar». Intercambio de Información.

Key words: *Percolation. Fractal. Theory of Chaos. Demic Diffusion. Neolithic. Wave of Advance Model. Capilarity Diffusion Model. Information Exchange.*

1. INTRODUCCIÓN

En condiciones normales, el investigador científico es no un innovador, sino –en palabras de T.S. Kuhn (1975)– un *desentrañador de rompecabezas*, y los enigmas en que se concentra son precisamente aquéllos que cree definibles y resolubles dentro del ámbito de la tradición científica existente.

No obstante, hay revoluciones. Con frecuencia, la revolución tiene carácter interdisciplinario: sus descubrimientos centrales y sus propuestas principales se deben a investigaciones que salvan las fronteras establecidas por la disciplina en que ejercen los profesionales. En todo cuanto veremos a continuación subyace esta idea, la necesidad del trabajo desde diferentes ámbitos.

Pero la ciencia es fundamentalmente planteamiento de preguntas. Una forma de pregun-

(*) Dpto. de Prehistoria. Centro de Estudios Históricos. CSIC. Serrano, 13. 28001 Madrid.
(**) Dpto. de Ecología. Facultad de Ciencias Biológicas. Universidad Complutense de Madrid. Ciudad Universitaria s/n. 28040 Madrid.
(***) Instituto de Magnetismo Aplicado, Laboratorio «Salvador Velayos». RENFE-Universidad Complutense de Madrid. Apartado de Correos 155. 28230 Las Rozas. Madrid.
El artículo fue remitido en su versión final el 31-III-95.

tarse acerca de la naturaleza es la creación de modelos ya que sugieren *lugares* de explicaciones plausibles, *promueven la inteligibilidad*. No obstante, los modelos sólo son útiles si no imponen su forma al objeto modelizado, como explica Hanson (1985: 61).

Las teorías que utilizaremos en adelante salvan este problema con eficacia y una gran elegancia desde sus hipótesis básicas.

El planteamiento de modelos en Arqueología nos ayuda a definir y comprender los procesos con cierta garantía de éxito. Esta es una de las experiencias que hemos aprendido de la aplicación de conceptos de otras disciplinas a las humanidades, ejemplo de lo cual puede ser la utilización de elementos de la Teoría General de Sistemas en la Antropología y, por ende, en la Arqueología: no se trataba del descubrimiento de hechos, sino de la búsqueda de nuevas formas de pensar acerca de ellos, aquí está lo importante de esta adecuación interdisciplinar.

La Teoría de Sistemas permitía a los arqueólogos trascender las limitaciones de los tradicionales análisis sociales y antropológicos de conjuntos estáticos, estudiando no solo el mantenimiento de la estructura sino también, como escribe Trigger (1992: 284), sus procesos de elaboración –o morfogenéticos–.

Muchos de los más importantes estudios que se hicieron trataron de aplicar conceptos de la cibernética. Uno de los que tuvo mayor fortuna fue el de *retroalimentación* que ofrecía a los arqueólogos un mecanismo preciso y cuantificable para el análisis de la interrelación de varios componentes de un sistema cultural.

En muy pocas ocasiones los arqueólogos aplicaron la Teoría General de Sistemas con todo su rigor matemático (Trigger, 1992: 285) sin embargo proporcionaba un modelo para el estudio del cambio cultural.

La teoría que adoptamos en este artículo fue propuesta por una serie de físicos y matemáticos que, desde mediados de los setenta, *repensaron* la Naturaleza (Mandelbrot, 1993). La idea de ésta que surgió de aquí fue tan diferente de la que daba cuenta la geometría euclídea que hubo que redefinir sus conceptos básicos. Al cuerpo conceptual que surgió de este *ejercicio* de redefinición del Mundo se le dió el nombre de *Teorías del Caos*. Estas teorías no son valiosas únicamente por su fuerte aparato matemático debido a su origen científico-natural, sino también por su significado filosófico que más adelante precisaremos, pero adelantemos que hemos replanteado la dinámica de una serie de procesos que poseen características básicas comunes, el resultado ha sido un *nuevo lenguaje*.

Este resultado hace necesario un método expositivo en el que se entrecruce la definición teórica con la ejemplificación práctica. En este artículo se ha utilizado como soporte de la presentación de la teoría y su discusión matemática, la resolución de un problema concreto: la expansión de las especies domésticas por el Mediterráneo occidental.

La expansión de la producción de alimentos por la cuenca occidental mediterránea es, como se verá, un buen ejemplo de sistema dinámico. No obstante es pertinente hacer algunas matizaciones a su interpretación como tal sistema, al tiempo que se da un breve repaso a los planteamientos actuales de esta cuestión.

Este problema tiene una formulación relativamente simple: se trata de un único hecho «histórico» que lleva aparejados dos procesos, a saber:

1. *La transformación biológica de plantas y animales.*
2. *La transformación cultural basada en la producción de alimentos.*

La corriente mayoritaria en la explicación del origen de la producción de alimentos es de carácter difusionista –iniciada por Bernabó Brea en sus estudios en Arene Candide–, y tiene como punto de partida la inexistencia de agriotipos silvestres en la cuenca occidental del Mediterráneo. Si bien es cierto que algunos autores proponen un origen autóctono para los sistemas agrícolas europeos (Barker, 1985; Dennell, 1987), concretamente el modelo más influyente en la actualidad es el propuesto por Ammerman y Cavalli-Sforza en los años setenta (1). Lo llamaron "Ola de Avance", y relaciona la expansión de las especies domésticas con un modelo démico, coherente con la secuencia cronológica sugerida para el Mediterráneo Occidental.

Para esta cuenca mediterránea, la tesis difusionista defiende la introducción del nuevo modelo socioeconómico por vía marítima (Cherry, 1981) y su correspondencia con una tradición

(1) Aunque lanzaron su propuesta en los años setenta, no fue hasta 1984 cuando publicaron, de forma completa, sus tesis.

cultural plenamente formada, cuyo origen se sitúa en el Mediterráneo Oriental (Bernabó Brea, 1946-1956). Esto plantea una ruptura con el substrato cultural post-paleolítico existente. En la Península Ibérica, ello ha promovido la identificación de los "colonos" orientales en su región levantina, o lo que es lo mismo, que debemos encontrar en el horizonte neolítico del Levante peninsular, grupos con las características de los colonos orientales.

El rasgo que mejor identifica a este planteamiento, aunque ligeramente matizado en su versión más reciente (Bernabeu *et alii*, 1993), es la dependencia de una explicación en términos de "difusión démica" como soporte de la difusión cultural (Bertranpetit y Cavalli-Sforza, 1991; Bernabeu, 1989: 137 y ss.).

J.M. Vicent (e.p.) define un "modelo capilar" para el mecanismo de transmisión como oposición al tradicional modelo difusionista "axial" en los siguientes términos: si la estructura social de los grupos post-paleolíticos implicados en el proceso no sobrepasó el nivel de "banda", como es asumible, las relaciones intergrupales debieron ser las de sociedades segmentarias. En ellas las relaciones de reciprocidad entre grupos locales son de una especial importancia y las especies domésticas podrían haber circulado por estas redes. Parece claro que esta dinámica social favorecería la expansión de los genotipos domésticos, o al menos *no ofrecería ningún tipo de resistencia* al flujo.

En este contexto es importante destacar el papel que juegan las relaciones interindividuales, como relaciones "emisor-receptor", para comprender la manera como este tráfico de información se produce (Layton, 1989: 47).

Por nuestro lado, partimos de un principio contrario a la difusión démica. Adoptamos como marco de nuestro trabajo el "modelo capilar", que propone una situación relativamente estática de la distribución poblacional y que, aunque no implica la ausencia total de movimientos, sí elimina la *dependencia* de cualquier tipo de "argumentos démicos" para explicar los procesos de transmisión de información.

2. EL CONCEPTO DE PERCOLACIÓN

Tanto los modelos evolucionistas como los difusionistas propuestos para explicar la neolitización de la cuenca mediterránea occidental contienen problemas en su propia estructura lógica. Estos problemas se deben, en cierta medida, a que las teorías que los articulan tratan de dar cuenta de todas las "fuerzas" que los componen. Lo que queremos decir es que todo proceso histórico es la resultante de componentes culturales y naturales, debiendo explicarse éstas a partir de encuadres diferenciados. No es posible comprender un sistema de la complejidad de un hecho histórico, observando el infinito cúmulo de sucesos individuales que lo componen. No obstante, si esto fuera posible, cualquier teoría explicativa del sistema sería de una tal complejidad, que haría ininteligibles sus posibles modelos derivados.

Sería, pués, deseable una teoría de alto nivel que permitiera formular hipótesis y contrastar resultados sin necesidad de un conocimiento total y detallado del sistema a modelar; un marco general que pueda generar complejidad a partir de reglas simples. Una tal teoría existe: *La Teoría del Caos en Sistemas Deterministas*.

Lejos de hacer referencia al vacío primigenio y a los espacios infinitos que existían antes de la creación del Universo, según la cosmogonía griega, la Teoría del Caos alude a la *imposibilidad de predecir el comportamiento de sistemas complejos a largo plazo* (Lorenz, 1963: 130), de aquéllos donde está presente la no linealidad, esto es, *donde los efectos no son proporcionales a las causas.* El Caos, aplicado originariamente a sistemas dinámicos, se ha ido revelando de gran utilidad en el dominio de la casi totalidad de las ciencias naturales, aunque no únicamente aquí. Así, en medicina, da cuenta del crecimiento y estructura de los sistemas arterial y venoso o de las arrítmias del corazón antes de un infarto de miocardio; en biología explica la coexistencia de especies distintas en un mismo ecosistema; en economía se ha utilizado para predecir las fluctuaciones del precio de las mercancías, etc.

La Teoría del Caos, intuída por Henri Poincaré a principios de siglo, ha surgido como tal en los últimos veinte años. En el momento actual está siendo dotada del aparato matemático necesario para poder ser útil cuantitativamente allá donde lo es cualitativamente. Bajo términos como fractal, atractor extraño, efecto mariposa o exponentes de Lyapunov, subyace la posibilidad de cuantificar y entender el comportamiento de sistemas cuya complejidad impediría su conocimiento determinista. Algunos de los conceptos definidos al amparo de esta teoría pueden aplicarse con éxito a la explicación de problemas históricos como los relativos a la transmisión de información genética o tecnológica –como la expansión de los elementos neolíticos que veíamos anteriormente–. Hemos utilizado dos de ellos: la *percolación* y la *geometría fractal* (Mandelbrot, 1977).

2.1. Definición

El concepto de *percolación* fue ideado por S.R. Broadbent y J.M. Hammersley (1957), para describir el flujo de un fluido a través de un medio poroso. Este flujo resultó ser un proceso de nuevo tipo que difiere considerablemente del de difusión clásico: llamaron a tales fenómenos «procesos de percolación». En su opinión, mientras que los procesos de difusión suponen una componente de aleatoriedad en la trayectoria de un elemento sobre un medio regular y homogéneo, los percolativos suponen un movimiento regular del mismo a través de un medio con cierta componente de aleatoriedad.

La percolación permite una descripción estadística de los sistemas constituidos por un gran número de elementos que pueden estar relacionados entre sí. En un sistema de este tipo, la comunicación a gran distancia puede ser posible o imposible dependiendo del número de elementos y de sus conexiones.

Supongamos un sistema constituido por una red de puntos, a los que vamos a llamar *nudos*, algunos de los cuales pueden estar conectados entre sí. Formalmente la red de nudos equivale al espacio $\mathbf{Z}^2$ de los puntos de $\mathbf{R}^2$ con coordenadas enteras. Dos nudos de $\mathbf{Z}^2$ son contiguos si tienen todas sus coordenadas iguales excepto una, que se diferencia en una unidad. Cada par de nudos contiguos determina un contacto, que puede estar en uno de los estados siguientes: *abierto* o *cerrado*. Se llama $\mathbf{E}^2$ al conjunto de todos los posibles puntos de contacto, o lo que es lo mismo, la *malla* o *red*, siendo $\mathbf{G} \subsetneq \mathbf{R}^2$ el subconjunto de $\mathbf{E}^2$ de todos los contactos abiertos (Guzman *et alii*, 1993).

De este modo, si un contacto pertenece a **G** diremos que está abierto y lo llamaremos *camino*, de forma que podemos imaginar los contactos abiertos como caminos que conectan puntos contiguos de la red, a través de los cuales puede circular la información entre dos puntos cualesquiera arbitrariamente alejados. El conjunto de los puntos conectados con sus vecinos forma un *racimo*.

El problema así planteado lo denominaremos *percolación por conexiones*. Del mismo modo podemos definir la *percolación por nudos*, puesto que podemos tener un nudo en alguno de los dos estados –abierto o cerrado–, caso en el que **G** es el conjunto de todos los nudos abiertos. Nos centraremos en el primer problema.

En una configuración **G** dada, tomamos un punto (origen) a partir del cual podrá fluir la información; llamaremos C (0) al conjunto de puntos conectados al mismo, siendo |C (0)| el tamaño del racimo. La mayor parte del estudio de la percolación se centra en la distribución de estos racimos de caminos abiertos. En particular, si el suceso que |C (0)| es infinito (2), tiene probabilidad positiva, diremos que los enlaces percolan.

Sea p la densidad de caminos, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que haya un camino que conecte dos puntos contiguos, esto es, que un contacto esté abierto. El problema es encontrar el tamaño de un racimo típico en función de p. Cuando p es suficientemente grande, existe un racimo que se extiende por todo el sistema, conectando los extremos más alejados del mismo. Cuando, por el contrario, p es muy pequeña no existe esta conexión "a larga distancia". Existe un *valor crítico* p_c –tal que $0 < p_c < 1$– a partir del cual es posible recorrer el sistema de un extremo a otro. Se dice, entonces, que el sistema ha *percolado* y se caracteriza por la existencia de un racimo de longitud infinita.

El concepto que acabamos de definir no es inmediato, por tanto, vamos a proponer un ejemplo que será suficiente, por el momento, para tener una idea intuitiva de su significado.

Consideremos un grupo de islas entre dos continentes (*red*) y supongamos que el nivel del mar baje progresivamente; poco a poco aumenta la superficie de tierra emergida, pudiendo quedar unidas algunas de ellas mediante una suerte de istmos (*caminos*). Un náufrago que se salvara de una catástrofe al principio del proceso se encontraría confinado en una sola isla. A medida que bajara el nivel de las aguas, la isla de nuestro amigo Robinson se iría conectando con otras (*racimo*), aumentando su dominio de excursión. En un momento concreto, cuando el nivel del mar alcanzara una altura determinada (*valor crítico*), el náufrago podría alejarse arbi-

(2) Utilizamos el término *infinito*, aplicándolo a un sistema cuando éste es comparado con la escala local de sucesos.

trariamente de su isla primitiva, pudiendo pasar de un continente a otro sin atravesar nunca un brazo de mar (*percolación*).

Estadísticamente, podemos definir la distribución de racimos de tamaño finito *s* –*s*-racimo–, por la densidad de los mismos (n_s (p)), es decir el número de racimos que poseen *s* caminos por unidad de superficie. El producto $s \cdot n_s$ (p) corresponde a la probabilidad de que un camino dado forme parte de un *s*-racimo. El tamaño medio de los racimos, *S* (p), puede definirse mediante

$$S(p) = \frac{\Sigma s^2 n_s(p)}{\Sigma s n_s(p)}$$

Se define *probabilidad de percolación*, P (p), como la probabilidad de que, cuando la fracción de caminos abiertos es p, un nudo determinado pertenezca a un racimo "infinito". En particular diremos que P_∞ (p) es la probabilidad de que el origen forme parte del racimo "infinito". La p más pequeña que hace que P_∞ (p) sea positiva la denotaremos por p_c y le llamaremos *umbral de percolación*, esto es,

$$p_c = inf\{ \frac{p}{P_\infty(p)} > 0\}$$

Para $p < p_c$ todos los racimos son de dimensión finita, de manera que P_∞ (p) = 0. Para $p \geq p_c$ existe un racimo infinito, tal que P_∞ (p) > 0.

Los conceptos de probabilidades que hemos definido son suficientes para estudiar un problema de percolación en una red simple constituida por seis yacimientos.

Queremos poder encontrar entidades tomando como base de su diferenciación una característica –en el mismo sentido que se utiliza el desarrollo de redes de intervisivilidad o los análisis estadísticos para definir grupos y señalar fronteras– que dé coherencia interna a las primeras de forma que quede definida una estructura de conexiones. La manera de hacerlo es estudiando la probabilidad de transmisión de una cierta información, esto es, analizando el establecimiento de relaciones entre puntos extremos de la red a partir de la existencia de una relación unitaria en yacimientos vecinos.

Lo plantearemos del siguiente modo: estudiaremos la existencia de relación entre dos puntos contiguos (caminos) con probabilidad p, o la ausencia de ella con probabilidad 1-p.

¿Que relaciones han de existir entre los nudos para que se transmita información de A a B? Hemos considerado la hipótesis de que la información sólo puede transmitirse por caminos que conecten nudos contiguos. Si estuviesen conectados todos, la probabilidad de que una información pase de A a B es máxima, es decir, forman un grupo coherente; si no existe conexión entre los nudos, la información no puede transmitirse y podríamos entender que no existe coherencia interna entre los puntos. Es evidente que debe haber un número mínimo de caminos para que la información se transmita entre los dos extremos. Tratamos de calcular ese número mínimo y P como la probabilidad de percolación, concepto que llamaremos desde ahora *Índice de Agrupamiento* (IA).

Definimos la probabilidad p como:

$$p = \frac{n^o \textit{ conexiones existentes}}{n^o \textit{ máximo conexiones}}$$

Analizamos lo que ocurre con la información que se propaga de A hasta B en función de las distintas configuraciones de existencia o inexistencia de las conexiones entre yacimientos contiguos (Fig. 1).

Suponemos la situación de la figura 1a, en que se bloquea la conexión A-1 (el esquema de razonamientos y los resultados finales son independientes de la primera conexión en ser bloqueada). Aquí la información se transmite.

Si en otro momento resulta bloqueado el camino 1-2, los puntos A y B continúan estando conectados (Fig. 1b).

Cuando se bloquean las conexiones 2-4 y 4-B, la transmisión de la información queda interrumpida. En este caso (Fig. 1c), la parte crítica de los caminos bloqueados es igual a 1/2.

Por otra parte, si la segunda conexión bloqueada es la A-3 (Fig. 1d), A y B dejarán de estar conectados y la fracción crítica sera 1/4, de forma que el umbral de percolación p_c es una variable aleatoria discreta que puede tener alguno de los siguientes valores: para el problema de las conexiones 1/4, 3/8, 1/2, 5/8 y 3/4.

Cada uno de estos valores determina un IA: P(1/4), P(3/8), P(1/2), P(5/8) y P(3/4).

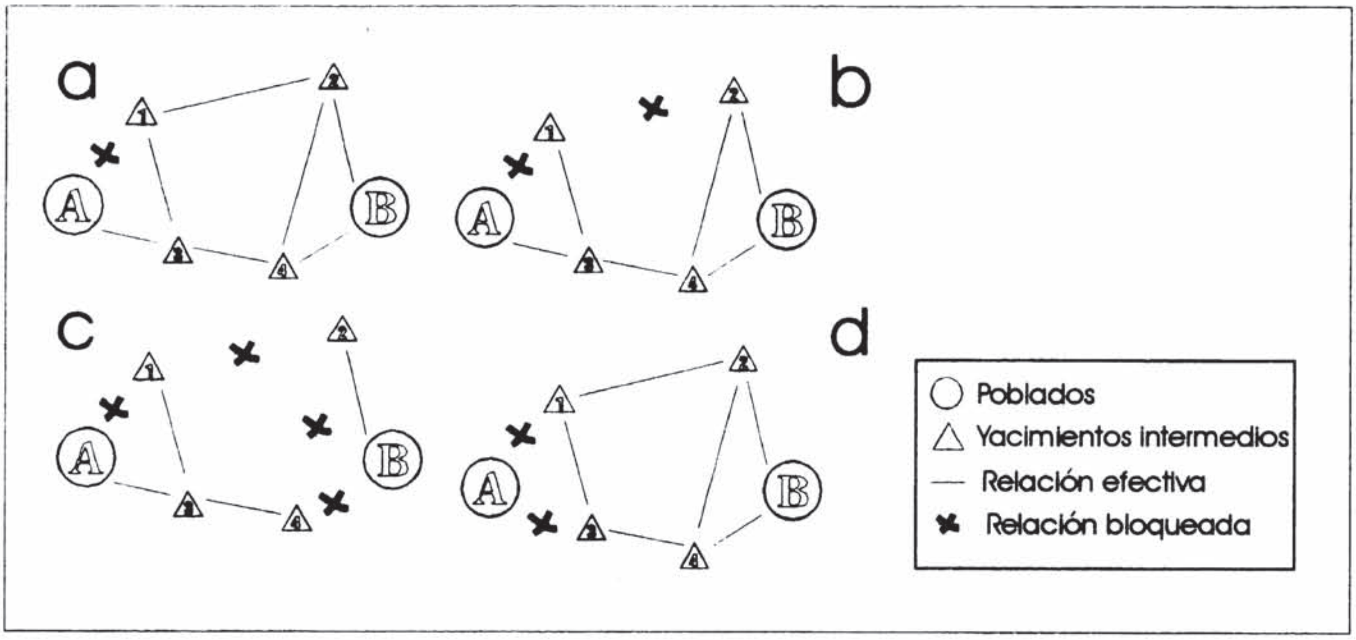


Fig. 1. Diferentes posibilidades en el bloqueo de conexiones entre yacimientos contiguos. La red utilizada para calcular el IA está compuesta por seis yacimientos.

En la figura 2 se ha representado la dependencia del IA en función de la fracción de caminos bloqueados, p, de una configuración dada.

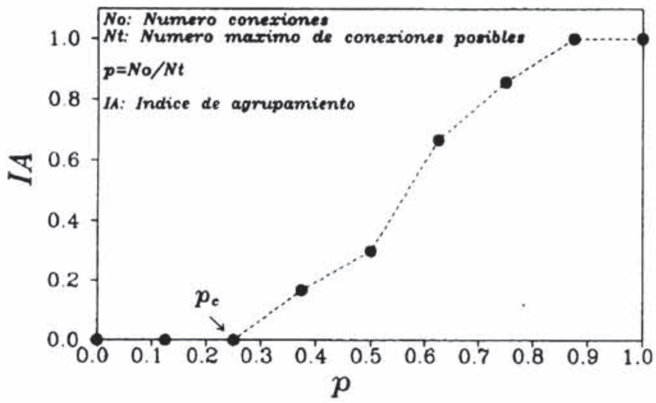


Fig. 2. Dependencia del IA en función de la probabilidad de conexión.

Cuando las probabilidades son pequeñas no existe conexión entre A y B, si continuamos el análisis, aparece una probabilidad crítica p_c a partir de la cual comienza a crecer el número de configuraciones posibles que permiten paso de información, de forma que se van definiendo grupos hasta que el IA = 1, en que todos los elementos poseen una cierta homogeneidad.

En sistemas constituidos por gran número de elementos, este método de análisis permite definir asociaciones, es decir, permite agrupar los ítems de forma homogénea.

La suma de todas la probabilidades que tiene un camino de pertenecer a un *s*-racimo o al racimo infinito que ha de ser igual a p

$$\sum_{s=1}^{\infty} s n_s(p) + p_\infty(p) = p$$

Se conoce como *fracción accesible* χ^A (p), a la fracción de caminos abiertos pertenecientes al racimo infinito.

El valor de la densidad de caminos crítica, p_c, depende de la dimensión espacial *d* –para los problemas que pueden presentarse en arqueología, *d* = 2–, del problema planteado (enlaces o nudos) y del tipo de red. En dos dimensiones se puede calcular p_c exactamente en algunos casos, en otros el cálculo debe realizarse mediante técnicas de simulación numérica (3).

En la tabla 1 se muestran los valores del umbral de percolación para tres tipos de redes y para los problemas de caminos y nudos.

(3) Como el Método de Monte Carlo (*id.* Sóbol, 1983: 11-12).

Una forma de calcular el tamaño típico de un racimo es definiendo la *longitud de correlación*, $\xi(p)$, como el radio típico de los racimos de conexiones para $p < p_c$, y como la escala de longitud sobre la que una red aleatoria es considerada en su totalidad homogénea, es decir, la

Red	Z	p_c^*	p_c^+
Hexagonal	3	0.6527	0.6962
Cuadrada	4	0.5	0.5927
Triangular	6	0.3473	0.5

Tabla 1. Valores de los *umbrales de percolación* para los problemas de caminos, (p_c^*), y para los de nudos, (p_c^+). Z representa el número de nudos más próximos a uno dado, en la red.

escala de longitud en la que las propiedades del sistema son independientes de su tamaño lineal para $p > p_c$. Sea P(r) la probabilidad de que sea posible unir, mediante caminos, dos puntos elegidos al azar separados por una distancia r. Si $p < p_c$, P(r) es pequeño para grandes distancias r, y posee una dependencia con r del tipo:

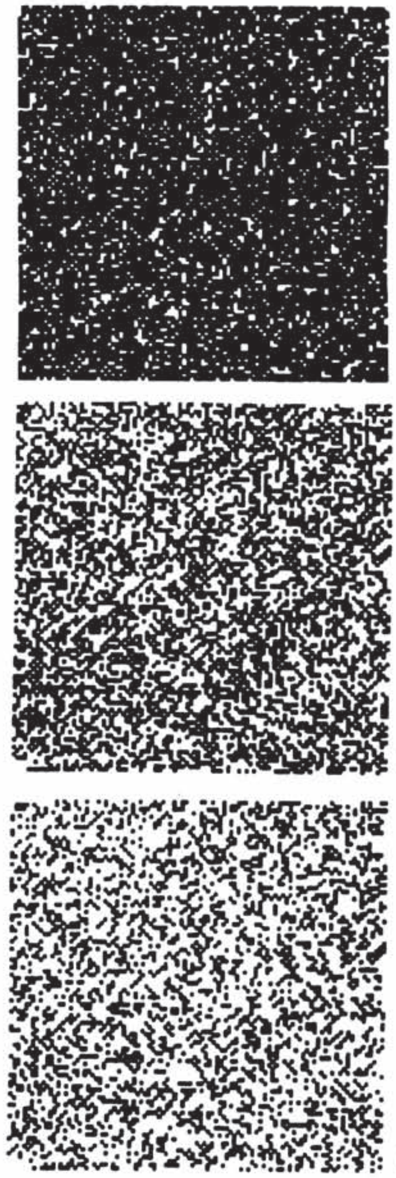
$$P(r) \propto exp \left(-\frac{r}{\xi(p)}\right)$$

de manera que $P(r) \rightarrow 1$ cuando $\xi(p) \rightarrow \infty$ $(p \rightarrow p_c)$.

En la figura 3 se muestra el resultado de la simulación numérica de un proceso similar al del náufrago que veíamos más arriba.

En esta simulación aplicamos los conceptos vistos hasta el momento. Los cuadraditos blancos se corresponderían con porciones de tierra firme y los negros con zonas ocupadas por el mar (Fig. 3a). A medida que va descendiendo el nivel del agua (Fig. 3b) nuevas porciones de tierra van apareciendo. Esto ocurre hasta que el proceso llega a cierto nivel crítico de la altura del agua en que ya es posible pasar entre dos puntos alejados sin necesidad de mojarse los pies (Fig. 3c).

Los valores numéricos de estas magnitudes que acabamos de definir, para cualquier $p \leq p_c$, dependen de detalles topológicos de la red que constituye el sistema; por ejemplo, el número de



a

b

c

Fig. 3. Racimos de percolación por nudos en una red cuadrada bidimensional de 100 x 100, para diferentes *probabilidades de percolación*: (a) p = 0.1946; (b) $[p = p_c] = 0.5398$, (c) p = 0.6932. Los cuadrados blancos son los que exhiben percolación.

vecinos más próximos a un nudo dado. No obstante, en las proximidades del umbral de percolación, p_c, escribe P. Grassberger (1992: 766), estas cantidades obedecen a *leyes de escala que son independientes de la estructura de la red y de sus detalles locales.*

En las proximidades del valor crítico, p_c, el comportamiento de las diferentes cantidades resulta ser

$$P(p) \sim |p - p_c|^{\beta}$$
$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\upsilon}$$
$$S(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma}$$

donde los exponentes β, υ y γ se conocen con el nombre de *exponentes críticos* y su característica fundamental es que son *universales*, es decir, son independientes de los detalles locales del sistema (4).

Una de las aplicaciones más interesantes de la percolación, el estudio y seguimiento de la propagación de incendios forestales (Bak *et alii*, 1990: 297), nos va a servir para explicar un punto importante de la teoría: según sea la disposición geométrica y la cantidad de árboles, un incendio se propagará o no. Para cada disposición geométrica particular de los árboles, el fuego no avanzará si la cantidad de árboles es menor que un cierto número; por contra, si es mayor, el bosque quedará arrasado totalmente. Tenemos aquí una dinámica percolativa: se trata de un *fenómeno umbral.* Es importante señalar que, debido a una serie de causas externas –en este caso un fuerte viento–, puede existir una *percolación dirigida.*

2.2. Estudio de la componente temporal

Supongamos la situación en la que aparecen caminos bloqueados, es decir, no existe relación entre dos grupos, o ésta se ha interrumpido en un momento determinado; diremos que esta relación se produce o se reestablece en una escala de tiempo de expansión suficientemente grande.

Estudiaremos cuándo es posible la *relación entre grupos-expansión de elementos a través de caminos bloqueados*, o lo que es lo mismo, cuándo se desbloquean estos caminos. Esto es factible en un problema como el de la expansión de la producción de alimentos, en el que tenemos un amplio intervalo temporal.

Para una configuración ω, es interesante considerar el *tiempo mínimo*, que llamaremos $t_{xy}(\omega)$, necesario para que se transmita la información entre dos puntos suficientemente alejados, x e y. Para simplificar, tomaremos x como origen de coordenadas, de forma que y sea $|y| = n$.

La cantidad (5)

$$\lim_{n\to\infty} t_{0n}(\omega) / n = \theta(\rho)$$

existe con probabilidad 1, es finita y la denominamos *«first-passage time»* (Chayes y Chayes, 1986: 1051); esto es, el tiempo necesario para que se produzca el paso de un elemento cualquiera desde un grupo a otro contiguo. En este contexto es interesante considerar el conjunto $C_\tau(\omega)$ de puntos conectados en un tiempo τ *después de que se haya efectuado un contacto entre dos grupos*.

Nuestro problema consiste en asignar independientemente a cada conexión de la red de relaciones un *«estado»* –representado por un número no negativo–. A este número lo llamamos *«coordenada tiempo»* y se corresponderá con el tiempo necesario para atravesar la conexión, o lo que es lo mismo, el tiempo que transcurre entre la salida de un elemento de un primer grupo y la llegada de éste a un segundo. Estos tiempos se asignan de acuerdo con una distribución de probabilidad que llamaremos ρ.

Estudiaremos el comportamiento asintótico del camino con un tiempo mínimo que conecta puntos distantes. En particular, trataremos el *«first-passage time»* entendido como el tiempo medio necesario para recorrer una distancia unidad a lo largo del camino mínimo.

El primero y más importante resultado de la teoría es la propia existencia del *«first-passage time»*: esto significa que la apertura-cierre de canales de difusión entre grupos depende de la amplitud temporal, es decir, *sólo es necesario un amplio intervalo de tiempo para que exista percolación, o lo que es lo mismo, para que la relación entre dos puntos suficientemente alejados de la red sea efectiva.*

La existencia de este número tiene una segunda consecuencia que podemos formular arqueológicamente del siguiente modo: *el tiempo necesario para que un elemento se transmita entre dos puntos es independiente, tanto de la cantidad de puntos intermedios, como de la configuración de caminos formados entre ambos.*

Una propiedad de este modo de análisis es su aplicabilidad, también, a elementos singulares del sistema; punto que podemos relacionar con el modelo de adopción de innovaciones tecnológicas de Layton (1989).

(4) Los valores aceptados de estos exponéntes críticos para un sistema bidimensional son $\beta=5/26$, $\upsilon = 4/3$ y $\gamma = 43/18$.

(5) Donde t_{0n} es t_{xy} para $x=0$ e $|y| = n$.

3. LA EXPANSIÓN NEOLÍTICA COMO DINÁMICA PERCOLATIVA

Como veíamos en el apartado 1, los yacimientos pre-neolíticos mediterráneos conformaban una estructura de bandas igualitarias, cuyas relaciones de reciprocidad configuran una red posiblemente isotrópica, que funcionaba como un sistema interactivo. Este tipo de sistemas se organizan perpetuamente a sí mismos hasta llegar a un estado crítico en el que un acontecimiento da inicio a una "reacción en cadena" capaz de afectar a un número cualquiera de elementos del mismo.

Esta idea, conocida como Teoría de la Criticalidad Auto-organizada, fué concebida por Per Bak, Ch. Tang y Kurt A. Wiesenfeld (1987) para explicar el comportamiento de los sistemas que contienen infinidad de elementos que interactúan a pequeña escala. Ésta constituye una teoría holística (6). Resulta imposible comprender la dinámica general de tales sistemas estudiando, por separado, las partes que lo componen.

¿Pueden estas hipótesis de criticalidad auto-organizada describir la evolución del proceso de neolitización del Mediterráneo occidental?

Para responder a esta cuestión tomemos una distribución de sitios y sus interconexiones como conjunto de partida. Superponemos sobre el plano que conforman una retícula cuadrada de lado ε. A continuación contamos los cuadrados que contienen algún elemento del conjunto, de forma que obtenemos un número N que está relacionado con el tamaño de la malla según una función potencial del tipo

$$N = \frac{cte}{\varepsilon^D}$$

Si repetimos el proceso con mallas de ε cada vez más pequeños y representamos los resultados en un eje doblemente logarítmico (7) (Fig. 4), éstos se disponen sobre una línea recta con pendiente D, la cual se conoce como *dimensión fractal*.

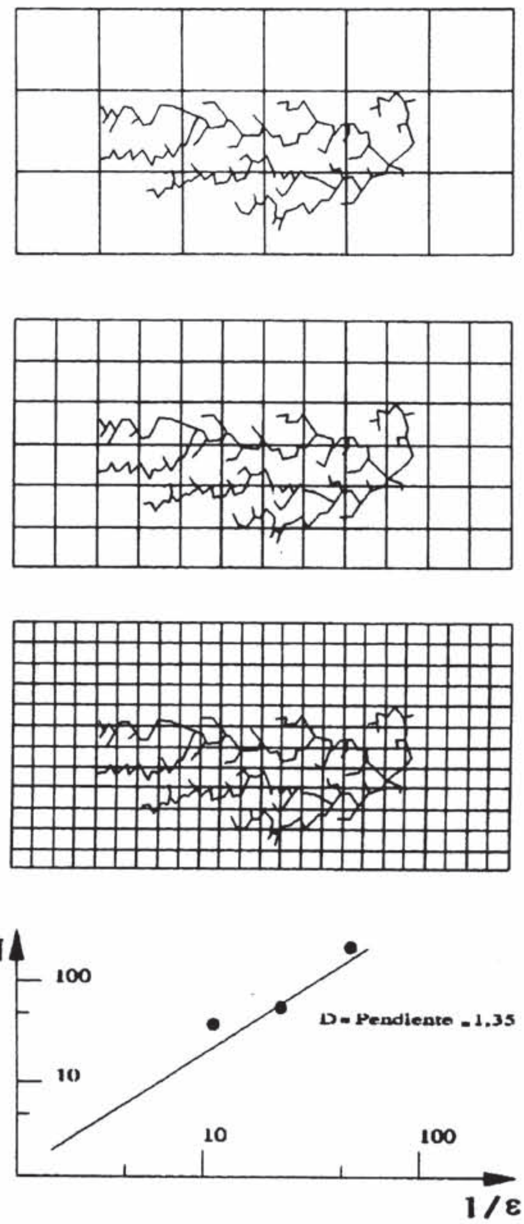


Fig. 4. La dimensión fractal de un racimo obtenido mediante percolación puede calcularse contando el número N de cuadrados que recubren el racimo sobre una retícula sucesivas veces en mallas diferentes, siendo D, la pendiente de la recta que se obtiene mediante una regresión.

Esta dimensión caracteriza un nuevo tipo de objetos que suelen denominarse *fractales* (Gleick, 1988: 105) –que son el elemento singular de la Geometría Fractal–, los cuales se carac-

(6) Las características globales no dependen de los mecanismos locales.

(7) Esto es así ya que

$$D = \frac{Log\, n}{Log \frac{1}{r}}$$

donde n es el número de copias en que puede ser descompuesto un fractal a escala r de sí mismo (Guzmán *et alii*, 1993: 31).

terizan por ser autosemejantes a distintas escalas espaciales. Los fractales se podrían entender, en opinión de Bak y Chan (1991: 23), como "instantáneas" de procesos críticos auto-organizados.

Si, como hemos dicho, la evolución del proceso neolitizador se comporta como un sistema interactivo, puede ser descrito mediante la geometría fractal. Desde este punto de vista, el concepto de dimensión, como característica fundamental de tales sistemas para todo punto singular de su desarrollo, se hace relevante debido a que la dimensión fractal define tales sistemas.

Pero, ¿qué sentido tiene decir que la estructura de yacimientos y sus relaciones es un fractal? Lo que significa es que podemos definir un modelo matemático fractal que aproxima satisfactoriamente la red real de relaciones en toda una franja de escalas, limitada por ciertos valores máximo y mínimo que, siguiendo a Mandelbrot (1993), llamaremos Corte Superior e Inferior; en nuestro caso: la *escala mediterránea* y la *escala individual* respectivamente.

Este es el sentido de decir que la red estudiada posee determinada dimensión, nos estamos refiriendo únicamente a las propiedades del modelo matemático que explica el sistema.

El procedimiento que hemos visto *no es* meramente matemático sino que es aplicable a objetos reales, tales como la estructura capilar del sistema circulatorio, la propagación de un incendio en un bosque, la expansión de información genética en poblaciones humanas, las redes de intervisibilidad entre asentamientos, o los procesos de adopción de innovaciones tecnológicas proporcionando, en cada caso, su dimensión fractal correspondiente.

Generalizando, podemos decir que es útil para el análisis de todo tipo de procesos de expansión de información y, debido a que éstos tienen un caracter que podemos considerar natural, esto es, fuera del dominio de la cultura, la aplicación de la geometría fractal, basada en la dinámica percolativa, es general a todos ellos.

Imaginemos la misma red de asentamientos sobre una topografía cualquiera –una red bidimensional– en un instante determinado, desde uno de ellos, que consideramos asentamiento origen, se propaga una cierta característica, tenga carácter genético, tecnológico, etc. Ésta solo puede propagarse a asentamientos vecinos. La influencia sobre las poblaciones más cercanas a éste es fácil de imaginar: por hallarse directamente conectadas con él, tendrán una gran probabilidad de "adquirir" la información transmitida (8). Que esa probabilidad no se alcance, y lo que falte para llegar a ella, depende del valor de p, o probabilidad de conexión entre dos asentamientos.

Los puntos más distantes carecen de conexión directa con el foco originario, pero esto no significa que su influencia termine en sus vecinos directos. A medida que pasa el tiempo, la red de asentamientos evoluciona, es decir, se van abriendo nuevas conexiones entre sus individuos, cada vez más alejados de él –puesto que cada uno de los puntos vecinos al foco originario se transforma en un nuevo origen–, de forma que la información puede circular por gran parte de la red (Fig. 5).

El alcance de la influencia del foco originario puede medirse observando la característica en poblaciones alejadas y equidistantes del mismo. Diremos que los yacimientos están *correlacionados* si la observamos en ellos. La distancia máxima a la que tal correlación puede detectarse la llamamos *longitud de correlación*. Los puntos separados por una distancia mayor que ésta, decimos que son independientes.

Cuando p es pequeña, la longitud de correlación también lo es. Con el tiempo p crece, debido a que se abren nuevas conexiones entre asentamientos, apareciendo correlaciones entre distancias mayores. Cuando la magnitud temporal es suficientemente grande, p se acerca a p_c, aumentando más rápidamente la longitud de correlación.

Cuando p alcanza p_c , la longitud de correlación se hace infinita, es decir, cualquier par de asentamientos están correlacionados, independientemente de cuál sea la distancia entre ellos. En este momento, observamos que cualquier característica transmisible y transmitida desde el foco original puede encontrarse en otra población cualquiera en los extremos de la red.

Lo que es más significativo en el aumento de la longitud de correlación es que, cuando mayor es el tamaño máximo del conjunto de poblaciones conectadas, la correlación en conjuntos más pequeños no desaparece; simplemente se transforma en una estructura más "fina" superpuesta a una mayor.

(8) Una probabilidad >1/2.

Fig. 5. Simulación numérica de la expansión de las especies domésticas en la cuenca mediterránea. En el experimento no se ha utilizado el registro arqueológico real, debido al tamaño del cuadro. Nótese la estructura fractal.

Desde esta perspectiva podemos plantear dos fases en el desarrollo general del proceso neolitizador:

• Mientras la longitud de correlación sea finita –$p < p_c$–, en el sistema encontramos grupos con lo que podríamos llamar características neolíticas y grupos sin ellas.

Según las hipótesis de la criticalidad autoorganizada, esta fase *es dinámica*, evolucionando el sistema hacia la segunda fase

• en la que la longitud de correlación se hace infinita –$p = p_c$– y, el sistema puede considerarse, en su totalidad, homogéneo a cualquier escala, esto es, la práctica totalidad de los grupos poseen caracteres neolíticos, quedando núcleos aislados sin éstos.

4. CONCLUSIONES

El modelo que hemos planteado no persigue la explicación de las causas de la expansión de elementos neolíticos en la Cuenca Mediterránea, sino que explica la dinámica de los procesos de transmisión de información, procesos que, aquí, no hemos considerado en sus aspectos específicamente culturales sino en un sentido general.

En el modelo que proponemos, el flujo de información se realiza sobre una estructura de asentamientos relativamente estática y con cierta componente estocástica en la que, aquél discurre por la red de relaciones segmentarias entre grupos vecinos de forma regular. De este modo podemos explicar la existencia de características neolíticas en lugares suficientemente alejados sin recurrir a movimientos de grupos.

La naturaleza fractal de la red le viene dada por el proceso de ramificación y subramificación –desde escala individual hasta escala mediterránea–. En definitiva, el análisis de estas estructuras a partir de la geometría fractal posibilita la definición del sistema de forma integral: permite estudiar sus componentes externos –fronteras (Feder, 1988)– y sus características internas –estructuración sobre el espacio (Guzmán, 1993)–, posibilitando la comparación entre áreas y grupos.

Por otro lado, la percolación se encuadra en un marco conceptual que se ha mostrado eficiente en la solución de problemas abordados por otras disciplinas. En el ámbito de la Arqueología, un razonamiento de este tipo puede utilizarse en el análisis y la comprensión de otros problemas como los estudios de estructuración del espacio a partir de relaciones de intervisibilidad, la distribución de ideas, objetos e innovaciones tecnológicas o la dispersión de patrones artísticos en grandes áreas; en definitiva, cualquier proceso que implique transmisión de información.

BIBLIOGRAFÍA

AMMERMAN, A. J. y CAVALLI-SFORZA, L.L. (1984): *The neolithic transition and the genetics of populations in Europe.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

BAK, P. y CHAN, K. (1991): "Criticalidad auto-organizada". *Investigación y Ciencia*, 174: 18-25.

BAK, P.; CHAN, K. y TANG, CH. (1990): "A forest-fire model and some thoughts on turbulence". *Physics Letters A*, 147(5,6): 297-300.

BAK, P.; TANG, CH. y WIESENFELD, K.A. (1987): "Self-Organized Criticality: An explanation of 1/f noise". *Physical Review Letters*, 59(4): 381-384.

BARKER, G. (1985): *Prehistoric farming in Europe.* New Studies in Archaeology. Cambridge University Press.

BERNABEU AUBÁN, J. (1989): *La tradición cultural de las cerámicas impresas en la zona oriental de la Península Ibérica.* Servicio de Investigación Prehistórica. Serie de Trabajos Varios, 86. Diputación Provincial de Valencia. Valencia.

BERNABÓ BREA, L. (1946-1956): *Gli scavi nella caverna delle Arene Candide.* Istituto di Studi Liguri. Bordighera-Montpellier.

BERTRANPETIT, J. y CAVALLI-SFORZA, L.L. (1991): "A genetic reconstruction of the history of the population of the Iberian Peninsula". *Annals of Human Genetics*, 55: 51-67.

BROADBENT, S.R. y HAMMERSLEY, J.M. (1957): "Percolation process I, crystals and mazes". *Proceedings of Cambridge Philosofic Society*, 53: 629-641.

CAVALLI-SFORZA, L.L.; MENOZZI, P. y PIAZZA, A. (1993): "Demic expansions and human evolution". *Science*, 259: 639-646.

CHAYES, J.T. y CHAYES, L. (1986): "Percolation and Random media". En K. Osterwalder y R. Stora (eds.): *Critical phenomena, random systems, gauge theories.*Elsevier Science Publishers B.V. Londres: 1049-1058.

CHERRY, J. (1981): "Pattern and process in the earliest colonisation of the Mediterranean Islands". *Proceedings of the Prehistoric Society*, 47: 41-68.

DENNELL, R. (1987): *Prehistoria económica de Europa. Una nueva aproximación.* Serie General Estudios y Ensayos. Ed. Crítica. Barcelona.

EFROS, A. (1987): *Física y geometría del desorden.* Ed. Mir. Moscú.

FEDER, J. (1988): *Fractals.* Plenum Press. Nueva York.

GLEICK, J. (1988): *Caos. La creación de una ciencia.* Ed. Seix Barral. Barcelona.

GRASSBERGER, P. (1992): "La percolación o la geometría del contagio". *Mundo Científico*, 115(11): 764-770.

GUZMÁN, M. de; MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M. (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones.* Ed. Labor. Barcelona.

HANSON, N.R. (1985): "Observación y explicación: Guía de la Filosofía de la Ciencia". En N.R. Hanson: *Patrones de descubrimiento. Observación y explicación.* Alianza Universidad, 117. Alianza Editorial. Madrid: 11-65.

KUHN, T.S. (1975): *La estructura de las revoluciones científicas.* Breviarios del Fondo de Cultura Económica. México.

LAYTON, R. (1989): "Pellaport". En S.E. van der Leeuw y R. Torrence (eds.): *What's New? A Closer look at the process of innovation.* One World Archaeology, 14. Unwin Hyman Ltd. Londres: 33-53.

LORENZ, E.N. (1963): "Deterministic Non-Periodic Flow". *Journal of Atmospheric Sciences*, 20: 130-136.

MANDELBROT, B.B. (1977): *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman and Co. San Francisco.

— (1993): *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión.* Tusquets Editores. Barcelona [La primera edición francesa es de 1975].

SÓBOL, I.M. (1983): *Método de Montecarlo.* Ed. Mir. Moscú.

TRIGGER, B.G. (1992): *Historia del pensamiento arqueológico.* Crítica Arqueología. Ed. Crítica. Barcelona.

VICENT, J.M. (e.p.): "The "insular filter" hypotesis revisited". En L. Prados, A. Gilman y M. Balmuth (eds.): *Iberian/Sardinian Colloquium* (Tufts University, Boston, 1991). Monographs in Mediterranean Archaeology.