地域経済の流れを記述する常微分方程式における係数の決定方法

伊藤　昭夫*・角谷　　敦†・白川　　健‡

（受付　2006 年 5 月 10 日）

1.　序

公共投資を無駄なく効果的に行うことは，最近注目されるようになってきている。地域内での経済格差をなくすために公共投資したり，公共投資の効果を調べたりすることが重要な意味を持つようになっている。われわれは，論文 [3]，[4]，[5] において，微分方程式を用いた地域経済モデルの提唱を行い，いくつかの経済モデルについて研究を行っている。われわれの研究目的は，提唱した経済モデルを用いて地域経済の動向を予測し，地域内のそれぞれの地点での経済動向を数値シミュレーションすることである。われわれは，論文 [3] において最初に提唱した常微分方程式系で記述された地域経済モデルを用いて，地域経済の動向の数値シミュレーションが可能かどうか検証している。数値シミュレーションを行う際には，常微分方程式系に出てくるいくつかの係数を慎重に設定する必要があるが，論文 [3] ではこれらの係数を適切に設定をすれば，地域経済の予測が可能になることを示唆している。今回われわれは，これらの係数のより簡単な定義方法を提案する。常微分方程式系に出てくる係数を経済学的に意味のある定数として定義することによって，統計データを利用してより簡単に係数が定義できるようにした。その方法に従って行った数値シミュレーションの結果は，地域経済の動向を比較的よい精度で再現できることを示している。

2.　地域経済モデル

今回対象とする地域経済の流れを記述する数理モデル（RET）は，次のような形の非線形常微分方程式系によって記述されている。

$$d_1'(t) - s_1 p(t) + \delta_1 d_1(t) = 0 \quad \text{a.e. in } t \in (0,T), \tag{1}$$
$$d_2'(t) - s_2 p(t) + \delta_2 d_2(t) = 0 \quad \text{a.e. in } t \in (0,T), \tag{2}$$

* 近畿大学 工学部
† 広島修道大学 経済科学部
‡ 神戸大学 工学部

$$l'(t) - n_0 l(t)(\log p(t))' = 0 \quad \text{a.e. in } t \in (0, T), \tag{3}$$

$$d_1(0) = d_{01}, d_2(0) = d_{02}, l(0) = l_0, p(0) = p_0. \tag{4}$$

ここで未知関数 d_1, d_2, l, p は，それぞれ社会資本，民間資本，労働力，生産量に関する密度関数を表し，与えられたデータ d_{01}，d_{02}，l_0，p_0 は，それぞれ社会資本，民間資本，労働力，生産量を表す密度関数に対する初期値を表す。また，s_1，s_2, δ_1, δ_2, n_0 は正の定数とする。ただし，n_0 は $0 < n_0 < 1$ を満たしているものとする。

注意 2.1. 密度関数とは，論文 [4] において，微分方程式で「価値」を数学的に取り扱いやすくするために「フロー」に代わる新しい概念としてわれわれが導入したものである。簡単に説明すると密度関数とは「瞬間瞬間に生じる価値の量」を表すもので，ある一定期間内に生じる価値の量を示す「フロー」との関係を述べると，フローは一定期間に対する密度関数の積分で与えられることになる。詳しい定義は，論文 [4] を参照していただきたい。

生産量密度関数 p は，Cob-Douglas 型の生産関数として表現されているものと仮定し，

$$p_0 = c d_{01}^{\alpha} d_{02}^{\beta} l_0^{\gamma}$$

が成立するように正の定数 c を定め，

$$p(t) = c d_1(t)^{\alpha} d_2(t)^{\beta} l(t)^{\gamma}$$

と定義する。ここで，α, β, γ はすべて正の定数で，条件 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ を満たしているものとする。

ここで，扱っている常微分方程式に対する解の存在定理を紹介しておく。

定理 2.1.（cf. [4]）　常微分方程式系（RET）は，区間 $[0, \infty]$ 上で C^1 級の一意的な解 (l, d_1, d_2) を持つ。さらに，$l_\infty = \lim_{t \to +\infty} l(t)$，$d_{i\infty} = \lim_{t \to +\infty} d_i(t)$ $(i = 1, 2)$ と置くと，$(l_\infty, d_{1\infty}, d_{2\infty})$ は，次の方程式系の一意的な解となっている。

$$\begin{cases} \left(\dfrac{l_\infty}{l_0}\right)^{1 - n_0\gamma} = \left(\dfrac{d_{1\infty}}{d_{10}}\right)^{n_0\alpha} \left(\dfrac{d_{2\infty}}{d_{20}}\right)^{n_0\beta}, \\ s_1 p_\infty - \delta_1 d_{1\infty} = 0, \\ s_2 p_\infty - \delta_2 d_{2\infty} = 0. \end{cases}$$

ただし，$p_\infty = c d_{1\infty}^{\alpha} d_{2\infty}^{\beta} l_\infty^{\gamma}$。

定理 2.1 では資本の数が 2 つになっているが，一般に資本の数を N 個としても定理が成立することが証明できている。

3.　地域経済モデルに出てくる係数の従来の定義方法

今回扱っている数理モデル（RET）に出てくる係数は，論文 [3] において次のように設定されていた。

$$\alpha = 0.1, \beta = 0.4, \gamma = 0.5 \tag{5}$$

$$n_0 = \frac{l_0}{p_0},\ \delta_1 = 0.013,\ \delta_2 = 0.0438,\ s_1 = \frac{d_{01}}{p_0},\ s_2 = \frac{d_{02}}{p_0} \tag{6}$$

ただし，地域ごとに経済成長の程度に違いがあるため，この設定値のままでは満足のいく精度で結果が得られなかった。したがって，対象とする地域，シミュレーションする期間に応じて設定値を修正する必要があった。

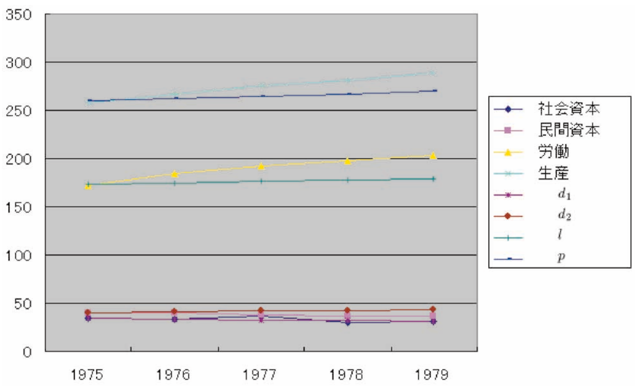

図 1　広島市 1.3−10−1.8−0.1−0.1

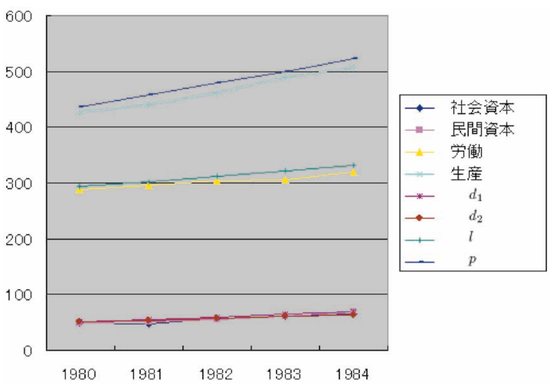

図 2　神戸市 1−1−1−0.1−0.1

そのため 8 つある係数のうち n_0, δ_1, δ_2, s_1, s_2 について，対象とする地域，期間に応じてこれらの係数の基本的な設定値を何倍かすることによって修正し，それぞれの経済成長の特徴に対応していた。それぞれの係数を何倍するかを決める際には，数値シミュレーションの対象とする地域の期間全体の統計データを参考にして，試行錯誤を繰り返しながら決定していた。

図 1，図 2 で示しているシミュレーション結果は，その 1 部である。対象としている地域は広島市および神戸市，シミュレーション期間は 5 年としている。図中の社会資本，民間資本，労働力，生産に対応するグラフは，対象としている地域の社会資本，民間資本，労働力，生産に関する統計データを示し，d_1, d_2, l, p に対応するグラフは，シミュレーションの結果得られた社会資本，民間資本，労働力，生産の予測値を示したものである。

係数を修正するために，それぞれ何倍したかをグラフの表題の部分に表示している。例えば，n_0, δ_1, δ_2, s_1, s_2 をそれぞれ a, b, c, d, e 倍したときには，$a-b-c-d-e$ と表示している。

図 1 は対象を広島市とし，1975 年を初年とする数値シミュレーションの結果を，図 2 は対象を神戸市とし，1980 年を初年とする数値シミュレーションの結果を示している。

シミュレーション結果と対応するデータのグラフから考察して，地域経済の動向をある程度とらえることができたと考えている。

ただし，上述の係数の定義方法では，対象とする都市，期間に応じて係数の設定を適切なものとするため，対象とする期間の統計データが必要となる。仮に定めた係数の値で数値シミュレーションを行い，得られた結果を統計データと比較し，より精度の高くなる係数の設定値を試行錯誤することによって求めていた。したがって，このように定義された係数の値はもちろん経済学的にはまったく意味を持たないし，その値が適切な値であるという根拠もはっきりしない。また，実際に予測を行う際には未来の経済動向を予測するため，対象とする期間の統計データはもちろん存在しない。そこで期間全体の統計データを必要としない新しい係数の定義方法が必要となっていた。さらに，期間全体の統計データが存在しないため，統計データと結果を比較しながら試行錯誤を繰り返すこともできない。そこで試行錯誤することなく簡単に係数を定義できる方法が求められていた。

4.　数理モデルに出てくる係数の意味付け

われわれが数理モデル（RET）を構築する際には，Solow モデルや Malthus の人口モデルを参考にした。これらのモデルにおける係数の意味も考慮しながら，以下のような方法で数理モデル（RET）の係数の定義を行うことにした。

$$\alpha = \frac{公的企業所得}{市民所得}, \beta = \frac{民間企業所得}{市民所得}, \gamma = \frac{雇用者所得}{市民所得} \tag{7}$$

$$n_0 = \frac{l_0}{p_0}, s_1 = \frac{d_{10}}{p_0}, s_2 = \frac{d_{20}}{p_0} \tag{8}$$

$$\delta_1 = \frac{政府固定資本減耗}{公的総固定資本形成}, \delta_2 = \frac{民間固定資本減耗}{民間総固定資本形成} \tag{9}$$

上記の係数の定義式に使われている定数は，統計データを利用して求めることができるため，前節で述べた方法のように試行錯誤を繰り返して定義する必要がない。また，数値シミュレーションを始める年度のデータだけあれば定義できるため，未来の予測を行う際にも統計データが存在しないということで支障が出ることもない。ただし，この定義方法でそれぞれの係数を定義していくと条件 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ が満たされなくなる可能性が高く，Cob-Douglas の生産関数で仮定している条件を満たせなくなってしまう。そこで係数 α については，$\alpha = 1 - \beta - \gamma$ で定義することにした。係数 α について別の定義方法を採用したのには，他にも理由がある。公的企業所得の統計値は，ときどきマイナスの値になっているときがあり，式 (7) の方法で計算すると定義する値がマイナスになってしまう可能性があった。$\alpha = 1 - \beta - \gamma$ で定義することで係数 α に関する不都合な点を回避することができる。

この方法で係数を定義してシミュレーションしたところ，図 3 のような結果となり十分な精度が得られなかった。図 3 は，1990 年を初年とし，対象を広島市とした数値シミュレーションの結果を表したものである。

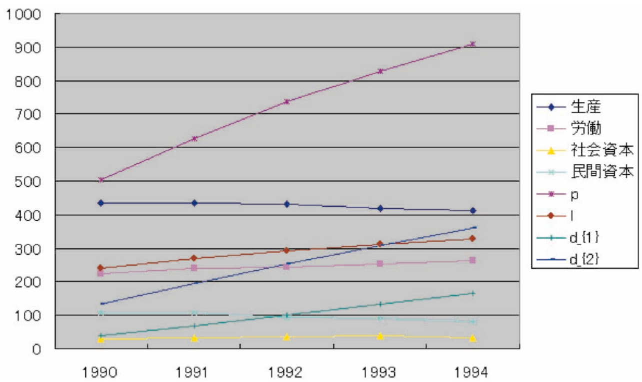

図 3　広島市

他の政令指定都市に対する結果も含めていろいろ考察してみたところ，上のようにそれぞれの係数の値を無関係に定義すると，初期値に関して係数の整合性が十分得られないため，

計算の精度が悪くなると推定された。そこで経済モデルを記述する常微分方程式系から導き出した以下の 2 つの定義式で s_i, δ_i（$i = 1, 2$）の値を定義し，シミュレーションを行ってみたところどちらの方法でも比較的よい精度が得られることがわかった。

図 4 は，δ_i（$i = 1, 2$）を以下の式によって定義したときの結果を表したものである。その他の係数は，図 3 の場合と同様の方法によって定義した。

$$\delta_i = \frac{s_i p_0 - d_i'(0)}{d_{i0}} \quad (i = 1, 2)$$

ただし d_i の微分を求めることができないため，$d_i'(0)$ の値を計算するときには，d_i' を差分化し，シミュレーションを開始する年度の前年度のデータも準備して，差分化した式で $d_i'(0)$ の値を近似して定義している。このとき δ_i の値は

$$\delta_1 = 0.820606985,\ \delta_2 = 0.987188734$$

となる。

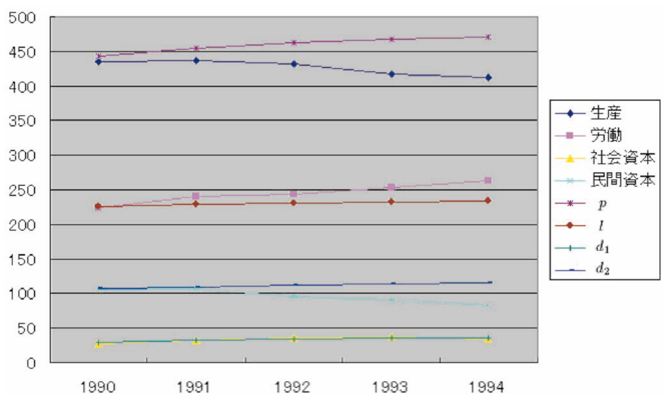

図 4

図 5 は，s_i（$i = 1, 2$）を以下の式によって定義したときの結果を表したものである。その他の係数は，図 3 の場合と同様に定義した。

$$s_i = \frac{d_i'(0) + \delta_i d_{i0}}{p_0} \quad (i = 1, 2)$$

ただし d_i' の値は，図 4 の場合と同様の方法で定義している。このとき s_i の値は

$$s_1 = 0.021270387,\ s_2 = 0.11965127$$

となる。

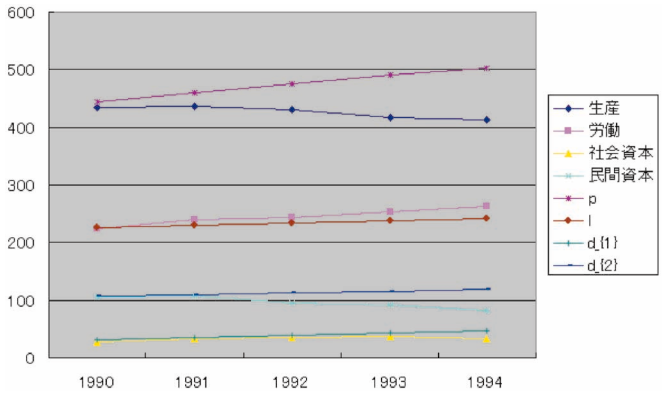

図 5

この 2 つの定義方法に関しては精度に大きな違いが見られないため，原則として図 4 の場合に用いた方法で δ_i（$i = 1, 2$）の値を，s_i（$i = 1, 2$）の値は式 (8) によって定義することにした。ただし定義した値が正の値とならない場合には，図 5 の場合に用いた方法で s_i（$i = 1, 2$）の値を，δ_i（$i = 1, 2$）の値は式 (9) によって定義して，数値シミュレーションをすることにした。

5.　シミュレーション結果

以下に，前節で示した方法で定義した係数を用いて行った経済動向を予測する数値シミュレーションの結果を示すことにする。対象としたのは，札幌，千葉，川崎，名古屋，大阪，広島，北九州の 7 つの政令指定都市である。政令指定都市以外の地方自治体を対象としてもよかったが，それ以外の自治体では必要とする統計データが容易に手に入手できなかったため，上記 7 つの政令指定都市を対象とすることにした。数値シミュレーションする期間は 5 年間とした。

対象としている都市のその 1 のグラフは，1990 年を初年とした数値シミュレーション結果を，その 2 は 1995 年を初年とした数値シミュレーション結果を示している。

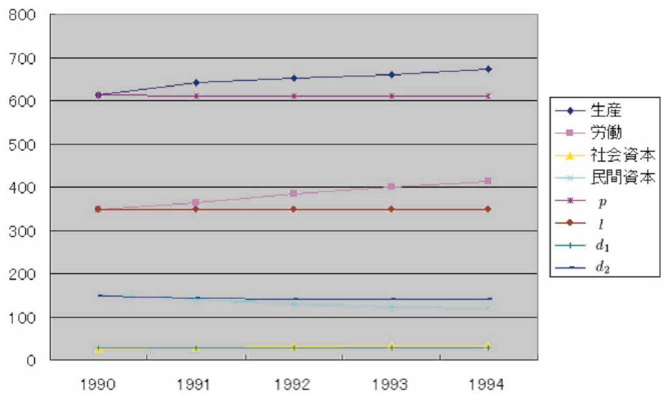

図 6　札幌その 1

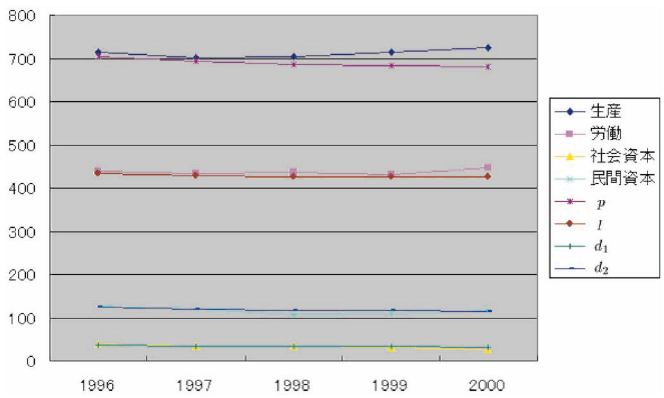

図 7　札幌その 2

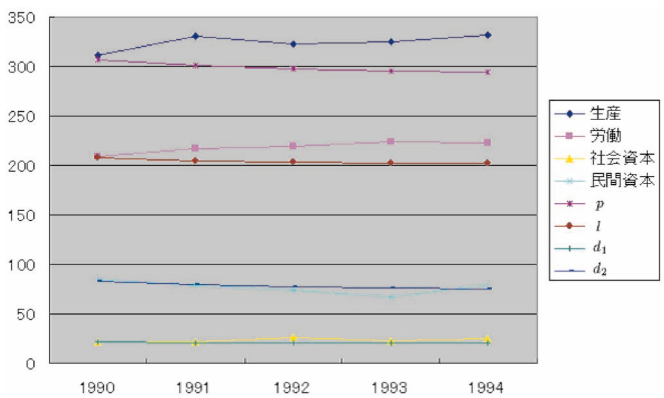

図 8　千葉その 1

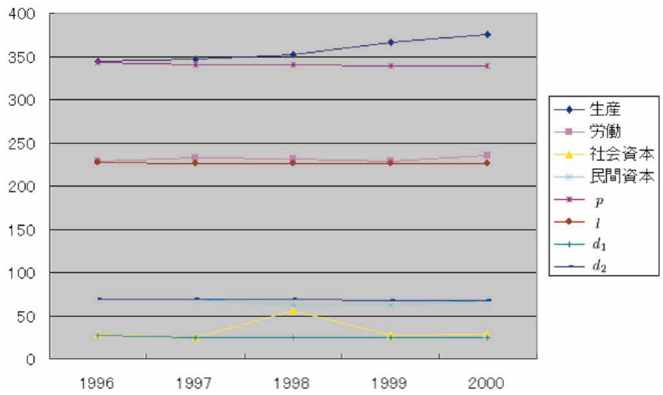

図 9　千葉その 2

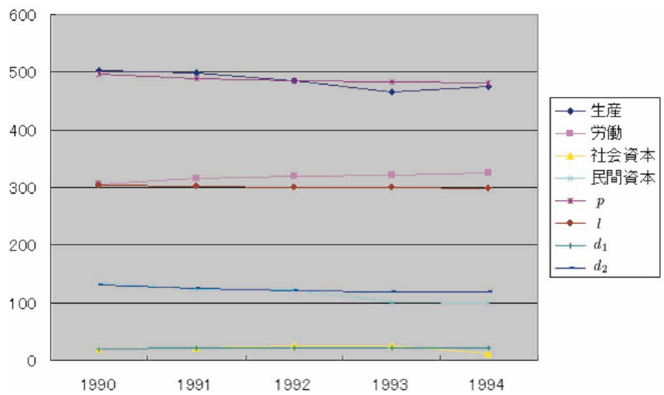

図 10　川崎その 1

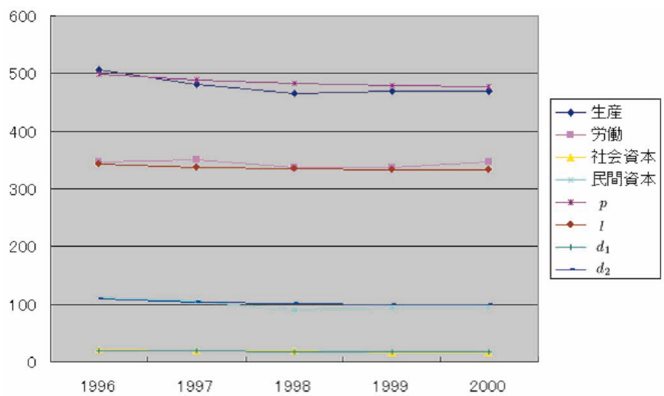

図 11　川崎その 2

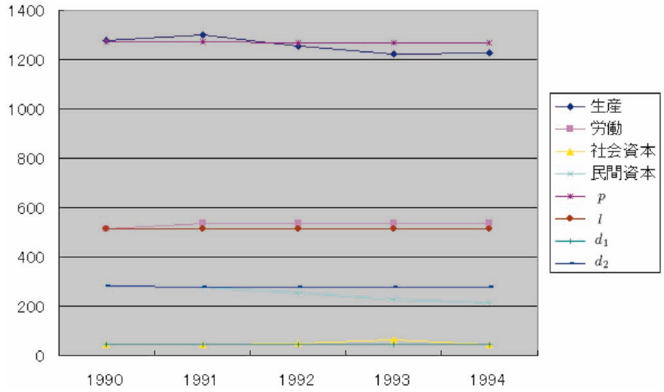

図12　名古屋その 1

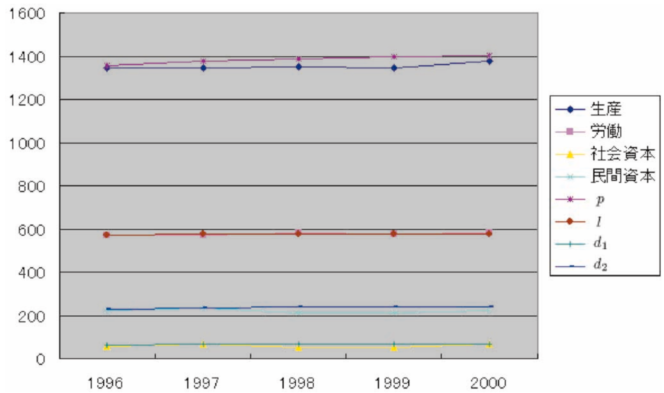

図13　名古屋その 2

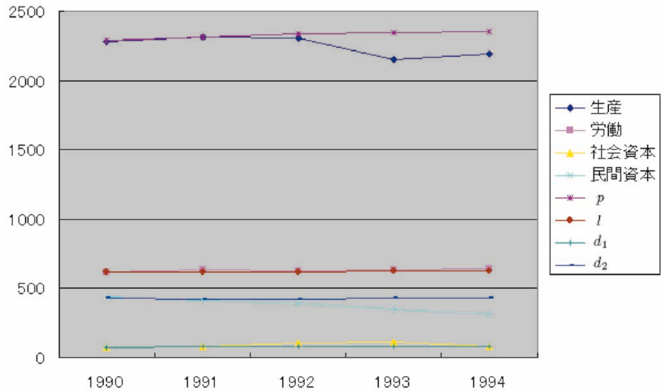

図14　大阪その 1

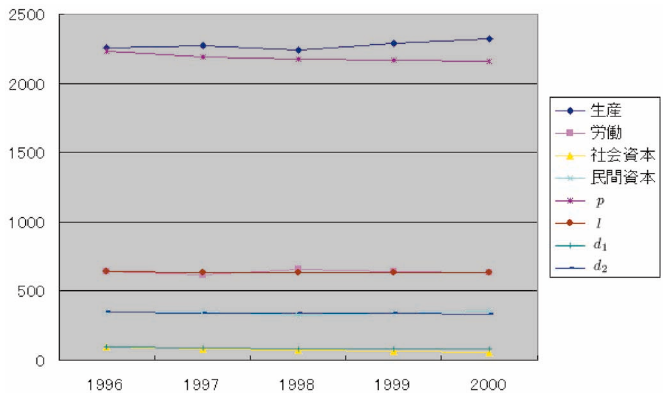

図15　大阪その2

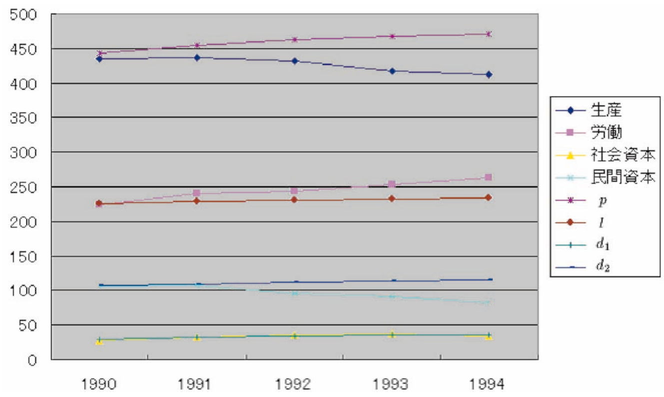

図16　広島その1

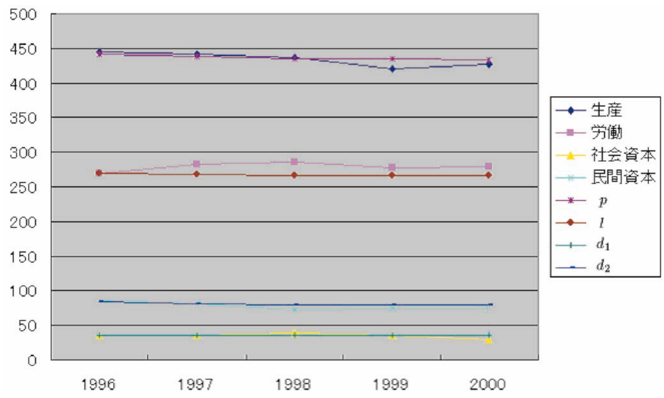

図17　広島その2

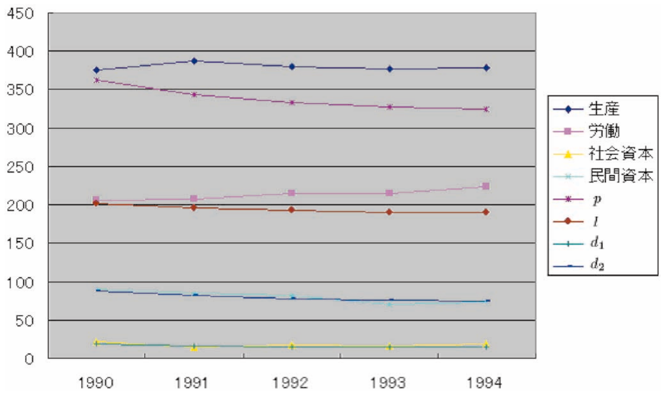

図18　北九州その 1

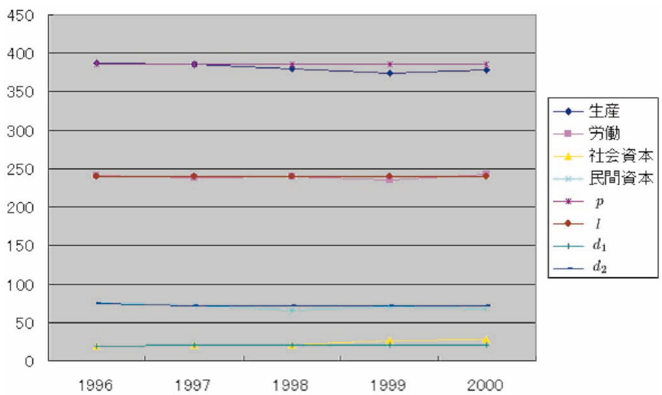

図19　北九州その 2

6.　結　　　　　び

今回行った数値シミュレーションの結果を総合的に判断すると，本論文で提案した係数の定義方法を用いて地域経済の動向の予測の数値シミュレーションを行っても，対象とする地域の経済動向をある程度再現し，予測できていると考えられる。ただし，生産に関してはシミュレーション結果と統計データのグラフに比較的大きな差が見られることがあるが，それは今回扱っている方程式系が経済政策等の外的要因を全く無視していることに原因していると推定できる。われわれは外的要因を無視していてもその地域の経済動向の本来の姿が推定できるという意味で，このモデルが十分意味があるものと考えている。しかし，経済政策等を適正に評価し，常微分方程式の右辺に経済政策等を示す関数として与えることによって，さらに精度のよいシミュレーションの実現が期待できる。

また，政令指定都市以外の自治体の統計データを手に入れ，政令指定都市よりも規模の小さい自治体でも十分にこのモデルが対応できるということを検証してみたい。

謝辞：本研究の一部は，広島修道大学総合研究所調査研究費一般共同研究 研究課題「ある種の経済モデルの構築とその解析」（2003 − 2005 年度）の援助を受けて実施されたものである。また経済モデルを構築する際，係数の意味づけに関して，広島修道大学人間環境学部時政 勗教授 に貴重なアドバイスをたくさん頂いた。この場をお借りして心から感謝の意を表します。

参　考　文　献

[1] 伊藤元重，入門 経済学，日本評論社，2002.
[2] 伊藤元重，マクロ経済学，日本評論社，2003.
[3] 伊藤昭夫，角谷　敦，白川 健，地域経済動向を記述する常微分方程式の数値シミュレーション，近畿大学工学部紀要34，P87–111，2004.
[4] Akio Ito, Atsushi Kadoya, Ken Shirakawa, Mathematical Models for Describing the Regional Economic Trend, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 23，P147–162，2005.
[5] Akio Ito, Atsushi Kadoya, Ken Shirakawa, Solvability for a PDE Model of Regional Economic Trend,（to appear）.
[6] 三井　清，太田　清，社会資本の生産性と公的金融，日本評論社，1995.
[7] 中谷　巌，入門マクロ経済学，日本評論社，1993.
[8] 県民経済計算年報　昭和62年度版，経済企画庁経済研究所.
[9] 県民経済計算年報　平成15年度版，内閣府経済社会総合研究所.