

On Extensions of Commutative Association Schemes

著者	Morales John Vincent Sylvestre
号	23
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	情博第642号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00122969

氏名 (本籍地)	モラレス ジョン ビンセント シルベストレ Morales, John Vincent Sylvestre
学位の種類	博士 (情報科学)
学位記番号	情博第642号
学位授与年月日	平成29年 9月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) 情報基礎科学専攻
学位論文題目	On extensions of commutative association schemes (可換アソシエーションスキームの拡張について)
論文審査委員	(主査) 東北大学准教授 田中 太初 東北大学教授 宗政 明弘 東北大学教授 尾畑 伸明 東北大学教授 原田 昌晃

論文内容の要旨

第1章 In this chapter, we give an overview of extensions of commutative association schemes and their applications to many different areas of mathematics. To study association schemes, we can make use of related matrix algebras such as the Bose—Mesner algebras and the Terwilliger algebras (introduced by Terwilliger in the 1990s). The representation theory of these algebras proved to be invaluable in Lie algebras, coding theory, design theory, and asymptotic spectral analysis. A special family of commutative association schemes (called metric and cometric schemes) possesses many interesting properties and is an active area of research to this day. This family is sometimes viewed as rank one association schemes. Hamming association schemes, which are extensions of 1-class commutative association schemes, belong to this family. We recall several existing results about rank one association schemes (mostly on Hamming association schemes), and we discuss generalizing some of these results to higher-ranked schemes obtained through extensions of s -class association schemes with s at least two.

第2章 In this chapter, we talk about many important concepts about commutative association schemes. We recall Terwilliger algebras and the notion of the inner distribution of a code. We discuss a special type of commutative association schemes called translation association schemes, and recall the notion of duality among additive codes. We review some important properties of extensions of commutative association schemes (including Hamming association schemes), and recall a generalized MacWilliams identity.

第3章 Lee association schemes over Z_4 are extensions of a two-class commutative association scheme, and are neither metric nor cometric. The structure of the Bose—Mesner algebra of Lee association schemes is known as discussed in a paper by Mizukawa and Tanaka (2004). Moreover,

Lee association schemes over Z_4 corresponds to bivariate Krawtchouk polynomials which are also known as Rahman polynomials. In this chapter, we describe in detail the irreducible modules of the Terwilliger algebras of Lee association schemes over Z_4 . In proving our results, we invoke several facts from the representation theory of symmetric groups and special linear Lie algebras.

第4章 In studying codes and their Hamming weight enumerators, we consider the Hamming association schemes. In situations where we focus on a more complicated type of weight enumerator of a block code, we think of a code in question as lying in a structure much finer than a Hamming association scheme; that is, codewords are vertices of an extension of an s -class association scheme with s at least 2. The resulting extension scheme is neither metric nor cometric in this case. It turns out that the representation theory of Terwilliger algebras of some extension schemes (together with available tools from multivariable polynomial interpolation) is quite handy in proving an Assmus—Mattson type theorem that works for more complicated weight enumerators. In this chapter, we prove a general Assmus—Mattson type theorem that works on many kinds of weight enumerators. This general Assmus—Mattson type theorem covers other existing Assmus—Mattson type theorems.

第5章 Certain families of graphs like strongly-regular graphs correspond to some commutative association schemes. Recently, there is a growing interest in studying spectra of graphs from the point of view of quantum probability theory. In this perspective, the Bose—Mesner algebra of association schemes is viewed as an algebraic probability space with respect to the tracial state. In fact, the adjacency matrices of the n th Cartesian power of a strongly-regular graph and the n th Cartesian power of the complement (which is also a strongly-regular graph) belong to the Bose—Mesner algebra of some extension schemes of length n . Hence, these two adjacency matrices are treated as a pair of real random variables in the Bose—Mesner algebra and a unique joint spectral distribution exists for every natural number n . We are interested in the limit of the joint spectral distribution as the strongly-regular graphs grow. This result is a bivariate extension of the work done by Hora in 1998 on Hamming graphs (among other families of graphs), and is guided naturally by the work of Mizukawa and Tanaka in 2004 on a construction of multivariate Krawtchouk polynomials from arbitrary association schemes.

論文審査結果の要旨

デルサルトは1973年の学位論文で、完全グラフの特殊な分割であるアソシエーションスキーム (AS) を基礎空間として符号やデザイン等の種々の組合せの対象を代数的に取扱う研究手法を確立した。通常ハミングウェイトを考える場合の符号の基礎空間はハミングASと呼ばれ、対応する1変数直交多項式の性質を駆使することで理論的に最も成功を収めていた。一方、対称化ウェイト等より一般のウェイトを考える場合についてもデルサルトは符号の基礎空間となるASを導入していたが、これらのASには多変数直交多項式が対応し、代数的な考察が困難であった。本論文はこれらのASの代数的構造の本格的な研究に取り組むものであり、全編5章からなる。

第1章は序論であり、本研究の目的や背景、研究成果の概要を述べている。

第2章は、以降の章で必要となる概念や記号の諸定義、基礎的事項の解説に充てられている。

第3章では、4元環 Z_4 上の対称化ウェイトに関する符号の基礎空間となるASを考察し、付随する非可換半単純行列代数であるターウィリガー代数の既約加群を全て決定した。ハミングAS、特に2元符号に関するものの場合、ターウィリガー代数の既約加群はランク1の単純リー環 sl_2 の表現論に基づいてエレガントに求められることが知られている。本章では基本方針としてはこの手法を踏襲し、ランク2の単純リー環 sl_3 の表現論を用いているが、状況はかなり込み入っており、対称群の表現論も絡んだより高度な議論を展開している。今後 Z_4 上の符号の解析への応用も期待できる、優れた成果である。

第4章では、良い符号にデザインが付随することを示したアスマス-マトソンの定理を考察している。この定理は元々ハミングウェイトに関するものであったが、その後 Z_4 上の対称化ウェイトに関するもの等、いくつかの拡張が得られていた。本章では一般のウェイトを取扱い、ターウィリガー代数の表現論を用いて、これらの拡張のほとんどを含む統一的な定理を示した。多変数多項式のラグランジュ補間の概念や手法も組み込まれており、ターウィリガー代数の符号理論への応用例としては、現時点で一つの頂点をなすものと言える。

第5章では、これまでの章で取り扱ったASの漸近スペクトル解析への応用を論じている。尾畑や洞等によるグラフの漸近スペクトル解析の研究では所謂距離正則グラフが重点的に取り上げられ、様々な極限分布が得られていたが、これらは基本的に1変数直交多項式に関連しており、理論を多変数に拡張することが望まれていた。本章では洞によるハミングASの例を拡張して2変数の例を構成し、極限同次分布を完全に記述した。この結果は多変数の理論の発展の契機或いは糸口となり得るものである。

以上要するに本論文は、ASおよびそれらに付随するターウィリガー代数の符号理論等への応用を、1変数直交多項式に対応する従来のものから大幅に拡大することを目指したものであり、情報基礎科学ならびに代数的組合せ論の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士(情報科学)の学位論文として合格と認める。