

# 非2重連結性遺伝2部グラフの変形ガロア束のサイズについて

大月 英明\*

## 概要

我々は一般の2部グラフに対して変形ガロア束を定義し, 距離遺伝2部グラフに対し, 2部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることを示した. 非2重連結性遺伝2部グラフクラスとは, ドミノフリーグラフクラスと距離遺伝2部グラフの両方と交差するグラフクラスである. ここでは頂点数  $n (\geq 3)$  の非2重連結性遺伝2部グラフ  $B$  に対する変形ガロア束  $G_m(B)$  のサイズを評価する. 具体的には  $G_m(B)$  の頂点数と辺数は, それぞれ  $3n/2 + 1$  未満と  $5n/2 - 2$  未満であることを示す.

## 1 はじめに

一般の2部グラフに関して, その2部クリーク辺被覆問題はNP困難問題であることが知られている [3] [5]. しかし,  $C_4$ フリーグラフ, 距離遺伝2部グラフ [4] やドミノフリーグラフ [1], さらに路重複数  $R(B) \leq 1$  [6] の2部グラフの場合は, 最小2部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることが示されている. ドミノフリーグラフ, 及び路重複数  $R(B) \leq 1$  の2部グラフに対する多項式時間アルゴリズムは,  $B$  の極大2部クリーク集合の束を用いているため, この束のサイズが計算時間に影響する.

頂点数  $n (\geq 2)$  の距離遺伝2部グラフ  $B$  の極大2部クリークの数, 高々  $n - 1$  であることが示されている [2]. 一方, 論文 [6] では, 変形ガロア束  $G_m(B)$  が導入され, 頂点数  $n (\geq 2)$  の距離遺伝2部グラフ  $B$  の  $G_m(B)$  の頂点数は, 高々  $3n/2 + 1$  であることが証明された [7]. ここでは,  $B$  が頂点数  $n (\geq 3)$  の連結な非2重連結性遺伝グラフのとき, 論文 [6] で導入された, 変形ガロア束  $G_m(B)$  のサイズについて評価する. 具体的には  $G_m(B)$  の頂点数は  $3n/2 + 1$  未満であり, 辺数は  $5n/2 - 2$  未満であることを示す.

## 2 定義

ここで取り扱うグラフはすべて2部グラフである.  $B = (X_B, Y_B, E_B)$  を, 頂点集合  $X_B \cup Y_B$  と辺集合  $E_B \subseteq X_B \times Y_B$  からなる2部グラフとす

\*南山大学理工学部ソフトウェア工学科

る.  $X_B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\}$ ,  $Y_B = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_y}\}$  とし,  $n = n_x + n_y$ ,  $m = |E_B|$  とする. 頂点  $v \in X_B \cup Y_B$  の  $B$  における隣接頂点の集合を  $N_B(v)$  と表記する.  $B$  の部分グラフ  $K = (X_K, Y_K, X_K \times Y_K)$  を ( $B$  の) 2部クリークと呼ぶ.  $E_B = \bigcup_{i=1}^s E_{K_i}$  なる  $B$  の2部クリークの集合  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_s\}$  を  $B$  の2部クリーク辺被覆と呼ぶ. 最小2部クリーク辺被覆問題は, 最小サイズの2部クリーク辺被覆を求める問題である.

$K$  が  $B$  の極大2部クリークであるとは,  $B$  の2部クリーク  $K' (\neq K)$  で,  $E_K \subseteq E_{K'}$  を満たすものが存在しないときをいう.  $|X_K| = 1$  または  $|Y_K| = 1$  のとき,  $K$  は星グラフである.  $|X_K| = 1$  のとき,  $x \in X_K$  を星グラフ  $K$  の中心と呼ぶ.  $|Y_K| = 1$  のときも同様である.  $x_i \in X_B$  に対して,  $x_i$  を中心とする極大星グラフを  $X_i$  と表す. 同様に  $y_j \in Y_B$  に対して  $y_j$  を中心とする極大星グラフを  $Y_j$  と表す.

$B$  を連結な2部グラフとする.  $B$  の頂点  $v$  に対し, 頂点集合  $V(B) \setminus \{v\}$  が誘導する  $B$  の部分グラフを  $B^v$  と表記する. つまり  $B^v$  は,  $B$  から頂点  $v$  とそこに接続する辺を除去したグラフである.

グラフ  $B$  の関節点とは,  $B^v$  が非連結になるような頂点  $v$  である. 2重連結なグラフとは, 関節点を持たないグラフである. ここで非2重連結性遺伝2部グラフを次のように定義する.

**定義 1.** 関節点  $v$  をもつ2部グラフを  $B$  とする.  $B^v$  の連結成分を,  $B_1^v, \dots, B_c^v$  ( $c \geq 2$ ) とする. それぞれの  $B_i$  ( $i = 1, \dots, c$ ) が関節点を持つグラフか, または頂点数2のグラフであるとき,  $v$  を非2重連結性を遺伝する頂点という.  $B_i$  ( $i = 1, \dots, c$ ) のうち, 頂点数2のグラフでないものがすべて非2重連結性を遺伝する頂点を持つならば,  $B$  を非2重連結性遺伝2部グラフという.

1つの頂点を共有するような, 2つの  $C_6$  からなるグラフは非2重連結性遺伝2部グラフであるが, 距離遺伝2部グラフではない. つまり非2重連結性遺伝2部グラフクラスは, 距離遺伝2部グラフクラスのサブクラスではない. また, 次数3の頂点を一つだけ共有するような, 2つのドミノからなるグラフは非2重連結性遺伝2部グラフであるが, ドミノフリーグラフではない. つまり非2重連結性遺伝2部グラフクラスは, ドミノフリーグラフクラスのサブクラスではない. また  $K_{2,2}$  は, ドミノフリーであり距離遺伝2部グラフであるが, 非2重連結性遺伝2部グラフではない. すなわち非2重連結性遺伝2部グラフクラスは, ドミノフリーグラフクラスと距離遺伝2部グラフの両方と交差するグラフクラスである.

### 3 変型ガロア束 $G_m(B)$

$\mathcal{K}_M(B) = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$  を2部グラフ  $B$  のすべての極大2部クリークからなる集合とする.  $\mathcal{K}_M(B)$  上に, 半順序  $<$  を以下のように定義する.

$K_p, K_q \in \mathcal{K}_M(B)$  に対し,  $Y_{K_p} \subset Y_{K_q}$  のとき, またそのときに限り  $K_p < K_q$  であるとする. さらに,  $\mathcal{K}_M(B)$  のすべての要素  $K$  に対して,  $K < \top$  であるような要素  $\top$  と,  $\perp < K$  であるような要素  $\perp$  を加え,  $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$  のハッセ図を  $G(B)$  とする. つまり,  $G(B)$  は  $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$  の要素を頂点とし,  $K_p < K_q$  がかつ,  $K_p < K_m < K_q$  なる  $K_m$  が存在しないときに,  $K_q$  から  $K_p$  に向う有向辺を置いたグラフである.  $G(B)$  を  $B$  のガロア束と呼ぶ [1]. Amilhastre et al. [1] は, ドミノフリーグラフの2部クリーク辺被覆問題, および2部クリーク分割問題に対し, ガロア束を用いた多項式時間アルゴリズムを与えた.

Otsuki and Hirata[6] は, ガロア束を拡張した変形ガロア束を定義し, ドミノフリーグラフを真に含むグラフクラスに対し, 2部クリーク辺被覆問題の多項式時間アルゴリズムを与えた. 変形ガロア束  $G_m(B)$  は2部グラフ  $B$  から以下のように定義される.  $\mathcal{X}_s(B) = \{X_1, X_2, \dots, X_{n_x}\}$ ,  $\mathcal{Y}_s(B) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}\}$  とする.  $B$  の部分グラフの集合  $\mathcal{K}_M^s(B) \equiv \mathcal{K}_M(B) \cup \mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B)$  上に, 半順序  $<$  を以下のように定義する.  $K_p, K_q \in \mathcal{K}_M^s(B)$  に対し,  $Y_{K_p} \subseteq Y_{K_q}$  かつ  $X_{K_q} \subseteq X_{K_p}$  のとき, かつそのときに限り  $K_p < K_q$  とする.  $\mathcal{K}_M^s(B)$  のすべての要素  $K$  に対して,  $K < \top$  であるような要素  $\top$  と,  $\perp < K$  であるような要素  $\perp$  を加えた集合  $\mathcal{K}_M^s(B) \cup \{\top, \perp\}$  のハッセ図を  $G_m(B)$  とする.  $G_m(B)$  を  $B$  の変形ガロア束と呼ぶ.

## 4 非2重連結性遺伝2部グラフ $B$ に対する $G_m(B)$ のサイズ

ここでは, 非2重連結性遺伝2部グラフ  $B$  に対する  $B$  について, その変形ガロア束  $G_m(B)$  のサイズを評価する. 具体的には  $B$  の頂点数を  $n$  としたとき,  $|V(G_m(B))| < 3n/2 + 1$  であることを証明する. ここで  $\mathcal{M}(B) \equiv \mathcal{K}_M^s(B) \setminus \{\mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B)\}$  とする.  $|V(G_m(B))| = |\mathcal{M}(B)| + n + 2$  なので, 以下では  $|\mathcal{M}(B)| < n/2 - 1$  を示す.

まず, 次の補題を証明する.

**補題 2.**  $v$  を  $B$  の関節点とし,  $B^v$  の連結成分を  $B_1^v, \dots, B_c^v$  とする. 頂点集合  $V(B_i^v) \cup \{v\}$  が誘導する  $B$  の部分グラフを  $B_i$  とする. このとき  $K \in \mathcal{M}(B)$  は, いずれかの  $B_i$  の極大2部クリークである.

**証明.**  $v \notin V_K$  の場合は明らかであるので, 以下では  $v \in V_K$  とする. もし  $K$  が, サブグラフとしていずれの  $B_i$  にも含まれないならば,  $V_K$  をすべて含む  $B_i$  は存在しない. すなわち, ある2頂点  $u_i, u_j \in V_K$  に関して,  $u_i \in V(B_i)$  かつ  $u_j \in V(B_j)$  なる  $j (\neq i)$  が存在する. これは  $B_i$  と  $B_j$  が非連結であることに反する. したがって  $K$  は, いずれかの  $B_i$  のサブグラフである.

$K$  が  $B$  の極大 2 部クリークであれば,  $K$  は  $B_i$  の極大 2 部クリークである. □

**定理 3.** 頂点数  $n (\geq 3)$  の非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ  $B$  に対して  $|\mathcal{M}(B)| < n/2 - 1$  が成り立つ.

**証明.**  $B$  の頂点数  $n$  に関する帰納法により証明する. 定義より  $n = 2$  の非 2 重連結性遺伝 2 部グラフは存在しない.  $n = 3$  のとき,  $B$  は,  $K_{1,2}$  である. よって  $\mathcal{M}(B) = \emptyset$  であり,  $|\mathcal{M}(B)| = 0$  なので  $|\mathcal{M}(B)| < n/2 - 1$  が成り立つ.

$n = k (\geq 3)$  のときに定理が成り立つと仮定する.  $B$  を  $n = |V(B)| = k + 1$  なる非 2 重連結性遺伝 2 部グラフとする. まず  $v$  が  $B$  の非 2 重連結性を遺伝する関節点であるとする.  $B^v$  の連結成分を  $B_1^v, \dots, B_c^v$  とする. 頂点集合  $V(B_i^v) \cup \{v\}$  が誘導する  $B$  の部分グラフを  $B_i$  とし,  $n_i \equiv |V(B_i)|$  とする. 非 2 重連結性遺伝 2 部グラフの定義から, 各  $B_i (1 \leq i \leq c)$  は非 2 重連結性遺伝 2 部グラフであるか, または頂点数 2 のグラフである. 補題 2 より  $|\mathcal{M}(B)| = \sum_{i=1}^c |\mathcal{M}(B_i)|$  である.  $|V(B_i)| \leq k$  なので, 帰納法の仮定より  $|\mathcal{M}(B)| = \sum_{i=1}^c |\mathcal{M}(B_i)| < \sum_{i=1}^c (n_i/2 - 1)$  である.  $\sum_{i=1}^c n_i = k + c$  より,  $|\mathcal{M}(B)| < (k + c)/2 - c = (k + 1)/2 - (1 + c)/2$  となる. したがって  $c \geq 2$  より,  $|\mathcal{M}(B)| < (k + 1)/2 - 3/2$  すなわち  $|\mathcal{M}(B)| < (k + 1)/2 - 1$  となり, 定理が成り立つ. □

定理 3 の議論より, 以下の系が成り立つ.

**系 4.** 非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ  $B$  が  $c$  個の連結成分を持つ場合,  $|\mathcal{M}(B)| \leq n/2 - c$  である

$|V(G_m(B))| = |\mathcal{M}(B)| + n + 2$  より, 以下の系が成り立つ.

**系 5.** 頂点数  $n (\geq 3)$  の連結な非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ  $B$  に対して  $|V(G_m(B))| < 3n/2 + 1$  が成り立つ.

$G_m(B)$  の辺の数に対しては, 次の定理が成り立つ.

**定理 6.** 頂点数  $n (\geq 3)$  の連結な非 2 重連結性遺伝 2 部グラフ  $B$  に対して  $|E(G_m(B))| < 5n/2 - 2$  が成り立つ.

**証明.**  $B$  の頂点数  $n$  に関する帰納法により証明する.  $G_m(B)$  から  $\top$  と  $\perp$  を取り除いたグラフを  $G'_m(B)$  とする.  $G'_m(B)$  に対し,  $|E(G'_m(B))| \leq 3n/2 - 2$  を証明する. 定義より  $n = 2$  の非 2 重連結性遺伝 2 部グラフは存在しない.  $n = 3$  のとき,  $B$  は,  $K_{1,2}$  であり  $|E(G'_m(B))| = 2$  なので, 定理が成り立つ.

次に  $n = k (\geq 3)$  のときに定理が成り立つと仮定する.  $B$  を  $n = |V(B)| = k + 1$  なる非 2 重連結性遺伝 2 部グラフとする. 非 2 重連結性を遺伝する頂点を

$v \in V(B)$  とする.  $B^v$  の連結成分を  $B_1^v, \dots, B_c^v$  とする. 頂点集合  $V(B_i^v) \cup \{v\}$  が誘導する  $B$  の部分グラフを  $B_i$  とし,  $n_i \equiv |V(B_i)|$  とする. 非2重連結性遺伝2部グラフの定義から,  $B_i (1 \leq i \leq c)$  は非2重連結性遺伝2部グラフである. したがって  $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^c |E(G'_m(B_i))|$  が成り立つ.  $|V(B_i)| \leq k$  なので, 帰納法の仮定より  $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^c |E(G'_m(B_i))| < \sum_{i=1}^c (3n_i/2 - 2)$  が成り立つ.  $\sum_{i=1}^c n_i = k + c$  より,  $|E(G'_m(B))| < 3(k + c)/2 - 2c = 3(k + 1)/2 - (3 + c)/2$  が成り立つ. したがって  $c \geq 2$  より,  $|E(G'_m(B))| < 3(k + 1)/2 - 5/2$  すなわち  $|E(G'_m(B))| < 3(k + 1)/2 - 2$  であり, 定理が成り立つ.

□

$|E(G_m(B))| = n + |E(G'_m(B))|$  より, 以下の系が成り立つ.

**系 7.** 頂点数  $n (> 3)$  の連結な非2重連結性遺伝2部グラフ  $B$  に対して  $|E(G_m(B))| < 5n/2 - 2$  が成り立つ.

## 5 おわりに

われわれは, 非2重連結性遺伝2部グラフ  $B$  に対して, その変形ガロア束  $G_m(B)$  のサイズを評価を評価した. ここでは, 非2重連結性遺伝2部グラフクラスが, 2部クリーク辺被覆問題を多項式時間で解くことができるような, 新しいグラフクラスであることが示された. 一方, 距離遺伝2部グラフ  $B$  に対しての結果 [7] より, 関節点  $v$  を持つ2部グラフ  $B$  に対する  $B^v$  の連結成分のうち, 少なくとも一つが距離遺伝2部グラフである場合も同様の結果が得られる. そのようなグラフは2重連結性遺伝2部グラフクラスを含むような新たなグラフクラスに属する. このようなグラフクラスの自然な特徴付けに対しては今後の課題としたい.

## 参考文献

- [1] J. Amilhastre, M. C. Vilarem, and P. Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. *Discrete Appl. Math.*, Vol. 86, No. 2-3, pp. 125–144, 1998.
- [2] N. Apollonio and P. G. Franciosa. On computing the galois lattice of bipartite distance hereditary graphs. *arXiv preprint arXiv:1510.06883*, 2015.

- [3] H. Fleischner, E. Mujuni, D. Paulusma, and S. Szeider. Covering graphs with few complete bipartite subgraphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 410, No. 21 - 23, pp. 2045 – 2053, 2009.
- [4] H. Müller. On edge perfectness and classes of bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 149, No. 1 - 3, pp. 159 – 187, 1996.
- [5] J. Orlin. Contentment in graph theory: covering graphs with clique. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, Vol. 80, No. 5, pp. 406 – 424, 1977.
- [6] H. Otsuki and T. Hirata. The biclique cover problem and the modified Galois lattice. *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems*, Vol. 98, No. 3, pp. 497–502, 2015.
- [7] 大月英明, 平田富夫. 距離遺伝2部グラフの変型ガロア束のサイズについて. アルゴリズム研究会研究報告, Vol. 157, No. 6, pp. 1 – 5, 2016.