Canadian Journal for New Scholars in Education/ Volume 4, Issue 1
Revue canadienne des jeunes chercheures et chercheurs en éducation April 2012

L'interprétation de la lettre en algèbre par des élèves du secondaire au Québec

Doris Jeannotte

Université du Québec à Montréal
doris.jeannotte@uqam.ca

Résumé

L'apprentissage de l'algèbre continue à poser des difficultés importantes aux élèves du secondaire (Kieran, 1992; Kieran et Sfard 1999; MacGregor et Stacey, 1997; Radford et Grenier, 1996). Cet article présente les résultats d'une étude qui tente de répondre à la question de recherche suivante : l'évolution de l'enseignement de l'algèbre depuis la fin des années 70 jusqu'à nos jours a-t-elle eu un impact sur l'interprétation que les élèves ont de la lettre en algèbre? Pour ce faire, les réponses à un test de 157 élèves de deuxième et troisième secondaire d'aujourd'hui ont été comparées à celles d'environ 2000 élèves de la fin des années 70 à l'aide des niveaux de compréhension de l'algèbre (Küchemann, 1981). L'analyse des résultats montre une meilleure compréhension de l'algèbre, telle que définie par Küchemann (1981), et donc de l'interprétation que les élèves du Québec font de la lettre en algèbre.

Introduction

L'apprentissage de l'algèbre pose depuis déjà fort longtemps des difficultés chroniques aux élèves du secondaire (Booth, 1988; Choike, 2000). C'est dans le but, entre autres, de faciliter la réussite des élèves en mathématiques que des changements importants ont été apportés à la formation des maitres ainsi qu'à l'enseignement de l'algèbre depuis la fin des années 60. Durant ces mêmes années, la didactique des mathématiques a aussi beaucoup évolué en abordant de nouvelles avenues et en approchant le problème de l'apprentissage de l'algèbre avec de nouvelles lunettes. Par exemple, des recherches sur l'interprétation de la lettre en algèbre par les élèves, telles les études de Hart (1981) et de MacGregor et Stacey (1997), ont mené à différentes recommandations qui ont été appliquées dans les programmes québécois. Quelles interprétations de la lettre font les élèves d'aujourd'hui? Les changements apportés au système d'enseignement de l'algèbre ont-ils eu un impact sur la nature des erreurs que commettent les élèves dans le calcul algébrique? Pour répondre à ces questions, les réponses à un test de 157 élèves de deuxième et troisième secondaire d'aujourd'hui ont été comparées à celles d'environ 2000 élèves de la fin des années 70 à l'aide des niveaux de compréhension de l'algèbre (Küchemann, 1981). Les résultats de cette étude amènent quelques éléments de réponse à ces questions.

Survol de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre au Québec depuis les années 60

Pour mieux comprendre d'où provient ce projet de recherche, il est important de le situer par rapport à l'évolution de l'enseignement de l'algèbre au Québec. En voici donc un bref aperçu. L'enseignement des mathématiques au Québec a connu différentes réformes depuis les années soixante. Quatre d'entre elles ont été retenues comme étant les plus significatives : la réforme des mathématiques dites modernes (60-70), le mouvement retour aux bases (80), la résolution de problème (90) et la réussite pour tous (2000). Voici une brève description des changements, des apports et des influences de chacune sur l'enseignement de l'algèbre.

La réforme des mathématiques dites modernes

Avant le rapport Parent de 1964, les cours de mathématiques étaient organisés par champ mathématique dès le niveau secondaire : les élèves suivaient des cours d'algèbre, de géométrie analytique ou encore, de trigonométrie (Patenaude, 1991). Lors de la création des polyvalentes et des cégeps qui a suivi le rapport Parent, chacun des cours de mathématiques offert au secondaire traitaient des différents champs mathématiques. C'est aussi à ce moment qu'apparait ce qui est appelé la mathématique moderne. Ce mouvement mondial avait pour but de former des jeunes en sciences pour rattraper le retard des Occidentaux par rapport aux Russes en diminuant l'écart entre les mathématiques enseignées au secondaire et celles enseignées à l'université. La théorie des ensembles fait alors son apparition dans l'enseignement secondaire. L'algèbre et le langage algébrique prennent beaucoup de place dans les programmes d'enseignement des mathématiques, soit près de la totalité du temps d'enseignement. La géométrie, les probabilités et les statistiques y sont presque absentes. Dans les classes, on parle de structures algébriques, de structures topologiques et de fonctions. On ne parle plus des mathématiques, mais de la mathématique (Pallascio, 1990), puisque les structures nouvellement établies unifiaient chacune des sous-disciplines de la mathématique : arithmétique, algèbre, géométrie, etc.

À la même époque, la formation des maitres subit aussi de grands changements. C'est l'université qui, dorénavant, prend en charge la formation des enseignantes et des enseignants du primaire et du secondaire. C'est aussi à cette époque que la recherche en didactique des mathématiques connait un essor fulgurant. Elle est influencée entre autres par les idées de Piaget, par exemple le développement du concept de nombres chez l'enfant et l'épistémologie génétique[1], et par celles de Bourbaki[2], par exemple le développement de la théorie des ensembles qui a justement mené à la réforme des mathématiques modernes.

Le mouvement retour aux bases

Influencée par nos voisins du sud, les États-Unis, la seconde réforme retenue a été implantée au Québec à la fin des années soixante-dix. Les mathématiques dites modernes, jugées trop abstraites et ne satisfaisant ni élèves, ni employeurs, se sont vues mises de côté au profit d'un retour à la géométrie et aux statistiques. Il ne reste que quelques traces de la théorie des ensembles. Il y a alors diminution de l'importance de l'algèbre dans les curriculums. Par exemple, la portion du temps alloué à l'enseignement de l'algèbre dans le programme de mathématiques de troisième secondaire de 1984 ne représente plus que 40 % du temps d'enseignement (ministère de l'Éducation du Québec (MEQ), 1984).

Les curriculums de l'époque sont définis par objectifs, ce qui donne lieu à une compartimentation des connaissances. Selon Bednarz (1990), « cette compartimentation tend à faire des connaissances mathématiques des morceaux détachés qui s'accumulent et s'additionnent sans grande cohérence et intégration » (p.57). D'un autre côté, la recherche en éducation influence la rédaction de manuels et des programmes en insistant sur l'importance de la contextualisation et de la résolution de problèmes. Ce passage extrait d'un guide pédagogique en témoigne :

> Tout au long de ce guide, l'utilisation de techniques de résolution de problème est privilégiée en vue de mettre en évidence l'aspect pragmatique de la mathématique, et d'unifier les différents thèmes développés dans le programme : arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, statistique et probabilité. » (MEQ, 1984, p.5).

On voit aussi apparaitre dans les manuels, tel Mathématique Soleil (Drolet et Rochette, 1985), une série d'exercices de type problème contextualisé. Les manuels sont habituellement constitués d'une section théorique puis d'une longue série d'exercices dont plusieurs sont enrobés dans un contexte. L'algèbre s'enseigne donc entre autres à partir de problèmes et de contextes.

L'algèbre comme outil de résolution de problèmes

À la suite des États généraux[3] sur l'éducation, dont l'une des dimensions renvoie à l'enseignement des mathématiques, qui ont eu lieu au début des années 90, une troisième réforme a influencé l'enseignement de l'algèbre. Tout en conservant un curriculum par objectifs, le contenu ainsi que les méthodes pédagogiques privilégiées subissent certains bouleversements. Influencé par les recherches en didactique et par les théories cognitivistes et le constructivisme qui mettent l'élève au centre de ses apprentissages, ce programme désire favoriser la participation active de l'élève dans son apprentissage. Le programme et les manuels en retiennent l'importance de rendre l'élève actif, de prendre en compte les connaissances antérieures et de procéder par la résolution de problèmes. Contrairement aux manuels et aux programmes écrits dans les années 80, la résolution de problèmes est utilisée comme déclencheur de l'apprentissage (exemple : voir Carrousel mathématique 3, Breton, 1995).

Pour ce qui est de l'algèbre, elle représente alors 45 % du temps d'enseignement de troisième secondaire (MEQ, 1995) et un objectif est aussi ajouté au programme de 1^er^ secondaire pour « Favoriser chez l'élève l'acquisition des préalables à l'algèbre » (MEQ, 1993, p.23). Cet objectif a pour but d'amener l'élève à voir le signe égal comme désignant une relation d'équivalence et à généraliser certaines règles. L'analyse des programmes et des manuels scolaires Mathématique Soleil (Drolet et Rochette, 1985) et Carrousel mathématique (Breton, 1995) permet de constater que les contenus en algèbre n'ont guère changé depuis 1984 et que c'est plutôt la façon d'enseigner qui met l'accent sur l'utilité de l'algèbre en premier lieu, puis sur les notions et le vocabulaire contrairement au manuel de la réforme précédente.

Les programmes universitaires à la formation des maitres subissent aussi des changements. Leur durée passe alors de trois à quatre ans. L'étudiante ou l'étudiant doit choisir deux disciplines d'enseignement et des stages obligatoires sont intégrés à chacune des années de la formation.

La réussite pour tous

La dernière réforme retenue a terminé d'être implantée en 2009. Elle vise la réussite pour tous et, par le fait même, la réussite en algèbre, domaine des mathématiques réputé difficile. L'interdisciplinarité et le développement de compétences sont au centre de cette réforme (MEQ, 2003). C'est en 2005 que certaines écoles secondaires commencent à baser leur enseignement sur le nouveau curriculum nommé le Programme de formation de l'école québécoise. Ce programme est présenté non pas en termes d'objectifs globaux, généraux, terminaux et intermédiaires comme c'était le cas lors des deux autres réformes, mais plutôt en termes de compétences transversales et disciplinaires. Pour le domaine des mathématiques, trois compétences disciplinaires ont été retenues : communiquer à l'aide du langage mathématique; déployer un raisonnement mathématique; résoudre une situation problème (MEQ, 2003). Cette dernière compétence est reprise en tant que compétence transversale.

À la formation des maitres, la double spécialisation disparait. Il y a aussi un effort de fait pour rendre les cours offerts interconnectés.

À travers l'étude et les manuels liés à chacune de ces réformes, trois points majeurs peuvent être soulignés : la prise en compte de plus en plus marquée des processus d'apprentissage des élèves, le passage d'un élève passif à un élève actif au centre de l'apprentissage et l'importance de la résolution de problème qui bondit en flèche.

Question de recherche

À la suite de ces quelques changements influencés en partie par les diverses recherches en éducation et en didactique des mathématiques, nous nous sommes donc posé la question suivante : L'évolution de l'enseignement de l'algèbre depuis la fin des années 70 jusqu'à nos jours a-t-elle eu un impact sur l'interprétation que les élèves font de la lettre en algèbre?

Pour répondre à cette question, nous avons comparé les résultats à un test ciblant des contenus algébriques obtenus auprès de 157 élèves de deuxième et de troisième secondaires aux résultats collectés par le Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) (Hart, 1981) auprès d'environ 2000 élèves des mêmes niveaux scolaires. Nous avons pu ainsi comparer statistiquement l'importance de certaines interprétations de la lettre utilisées par ces élèves ainsi que leur niveau de compréhension de l'algèbre. L'étude du CSMS s'est tenue en Angleterre et a été reprise dans plusieurs pays, dont le Canada, qui avait obtenu, selon Brown (1981)[4], des résultats semblables dans les années 70. Dans un même ordre d'idées, Bednarz et Dufour-Janvier (1992) associent les types d'erreurs ressortis par Hart (1981), puis repris par Küchemann (1981) et Booth (1984a; 1984b) aux effets provoqués par le programme d'enseignement des mathématiques au Québec de 1984. Les recommandations faites à la suite de l'étude de Hart (1981) sont directement responsables des changements de programmes concernant l'enseignement de l'algèbre au Québec.

Cadre de références

Plusieurs difficultés reliées à l'algèbre ont été étudiées à travers divers écrits en didactique des mathématiques. Entre autres, il y a les difficultés d'interprétation du signe « = » (Schmidt, Daneau et Thivierge-Ayotte, 2001; Theis, 2002), les difficultés reliées aux règles de notation algébrique (MacGregor et Stacey, 1997; Kieran, 1992; Booth, 1984*a*; 1984*b*), les difficultés reliées aux méthodes de résolutions de problèmes ou d'équations algébriques (Booth, 1984*b*; Bednarz et Dufour-Janvier, 1992; Kieran 1992). Étant donné la nature des difficultés ciblées par le test utilisé lors de la collecte de données, l'interprétation de la lettre est l'élément principal qui a guidé l'analyse des données. Les deux prochaines sections décrivent les différentes interprétations que les élèves peuvent avoir de la lettre en algèbre ainsi que les niveaux de compréhension de l'algèbre développés par Küchemann (1981), niveaux directement liés à l'interprétation de la lettre.

L'interprétation de la lettre en algèbre

Küchemann (1981) identifie six catégories d'interprétation de la lettre en algèbre (voir tableau 1). Un élève peut utiliser l'une ou l'autre de ces interprétations selon le type de problème auquel il fait face. Ce que l'on souhaite par l'enseignement de l'algèbre c'est une interprétation de la lettre en tant qu'inconnue, nombre généralisé ou variable. Toutefois, plusieurs problèmes et exercices d'algèbre élémentaire peuvent être résolus à l'aide des trois premières interprétations de la lettre (Küchemann, 1981). Un élève pourrait donc réussir en algèbre sans une interprétation adéquate de la lettre, mais il s'agit d'un autre problème de recherche qui n'est pas touché ici.

Tableau 1
Les catégories d'interprétation de la lettre

	Définition	Exemples
La lettre évaluée	Une valeur arbitraire ou non est donnée à la lettre.	Multiplie 4 par b Réponse : 8 car b est la deuxième lettre de l'alphabet.
La lettre ignorée	La lettre est ignorée complètement ou uniquement des calculs.	Ajoute 4 à 3n Réponse : 7, le n est ignoré.
La lettre objet	La lettre représente une abréviation ou un objet concret.	Que signifie 2b + 2g? Réponse : 2 beignets + 2 gâteaux.
L'inconnue spécifique	La lettre représente un seul nombre inconnu.	Que signifie 2b + 2g? Réponse : 2 fois un nombre de beignets + 2 fois un nombre de gâteaux.
Le nombre généralisé	La lettre peut prendre plusieurs valeurs, mais n'en prend qu'une à la fois.	Généralisation de la suite des nombres triangulaires. Réponse : n(n-1)/2, n représente le rang.
La variable	La lettre représente un ensemble de valeurs.	Étude des fonctions.

Les niveaux de compréhension de l'algèbre selon le CSMS

Lors de leur étude, les membres du CSMS ont élaboré une échelle pour classifier la compréhension que les élèves ont de l'algèbre. Cette échelle permet de déterminer les interprétations que les élèves donnent à la lettre lors de la résolution de certains exercices selon la réponse qu'ils fournissent. Elle est composée de quatre niveaux, nommés niveaux de compréhension. Elle est entre autres associée à l'interprétation de la lettre faite par les élèves. En voici une brève description :

Le niveau 1

L'élève est capable de répondre à des questions essentiellement numériques. Il considère la lettre comme l'une des trois premières catégories d'interprétation de la lettre de Küchemann (1981) : la lettre-nombre, la lettre non utilisée et la lettre objet. Par exemple, l'élève qui se situe à ce niveau de compréhension est capable de donner la valeur de a si $a + 5 = 8$ à partir de ses connaissances numériques ou par une technique de comptage et ce, sans avoir à opérer sur l'inconnue.

Le niveau 2

L'élève est capable de manipuler le symbolisme algébrique et semble prêt à accepter des réponses où des lettres sont présentes. Il est donc en mesure, par exemple, d'accepter que l'aire d'un rectangle de longueur m et de largeur n est mn. En ce sens, il est capable d'accepter mn comme réponse mais en plus, il peut lui-même représenter l'aire du rectangle par cette réponse.

Le niveau 3

L'élève est capable d'utiliser la lettre comme une inconnue spécifique lorsque la structure des problèmes est simple. Il accepte pleinement des expressions, telles que $4n$ -3 ou $y = 2x$, comme étant des réponses possibles et il est capable de leur donner un sens. Il n'est toutefois pas capable d'utiliser la lettre en tant que nombre généralisé et en tant que variable.

Le niveau 4

L'élève est capable d'utiliser la lettre comme une inconnue spécifique pour des questions plus complexes. Il est aussi capable d'utiliser la lettre comme un nombre généralisé ou encore comme une variable. Il est donc en mesure d'interpréter la fonction $f(x) = 2x + 3$.

Méthodologie

Comme nous avions à notre disposition les résultats détaillés obtenus par le CSMS, nous avons effectué une traduction du test utilisé dans le cadre de cette étude (Hart, 1981) pour recueillir nos données. Le test mieux connu sous le nom de test de Booth comprend 50 items et a donné lieu à plusieurs publications. Ce test permet de déterminer l'interprétation que les élèves font de la lettre en algèbre. Le tableau 2 présente des exemples d'items liés à chacun des niveaux de compréhension de l'algèbre. Étant donné la nature mathématique du contenu des items, une méthode semblable à la traduction directe modifiée (Behling et Law, 2000) a été utilisée. Une spécialiste de la langue anglaise et trois didacticiennes et didacticiens des mathématiques ont commenté par écrit la traduction. Une rencontre entre ces quatre experts et la chercheuse s'est tenue pour discuter des commentaires et des changements à apporter à la traduction. Par ailleurs, les problèmes sémantiques, conceptuels et normatifs liés à la traduction de questionnaires (Behling et Law, 2000) sont, selon nous, réduits par la nature des questions. En effet, les questions portent essentiellement sur des connaissances mathématiques et n'ont, à l'exception de deux items, aucun contexte extramathématique.

Tableau 2
Les niveaux d'interprétation de la lettre et les items associés

Niveaux	Exemples d'items associés
1	Item 10 : Si $a + b = 43$, alors $a + b + 2 =$ ________ Item 29 : $2a + 5a =$ _______
2	Item 26 : Que peux-tu dire de u si $u = v + 3$ et $v = 1$? Item 32 : $2a + 5b + a =$ ______
3	Item 7 : Ajoute 4 à $3n$ ______ Item 12 : Si $e + f = 8$, $e + f + g =$ ________
4	Item 5 : Quel est le plus grand, $2n$ ou $n + 2$? Item 49 : Si $(x + 1)^3 + x = 349$ est vraie pour $x = 6$, alors, quelle valeur de x rendra $(5x + 1)^3 + 5x = 349$ vraie ?

Notre échantillon se composait de 98 élèves d'une école privée de la région de l'Estrie (49 en deuxième secondaire et 49 en troisième secondaire) et 59 élèves d'une école publique près de Montréal (26 en deuxième secondaire et 33 en troisième secondaire), pour un total de 157 élèves. Il faut souligner que tous les élèves de deuxième secondaire de l'école publique étaient dans des groupes d'élèves considérés en difficultés d'apprentissage avec au moins un an de retard en mathématiques. L'échantillon était composé de 62 filles et 95 garçons âgés entre 12 et 17 ans (avec un mode de 15 ans). Chaque élève a eu 60 minutes pour répondre au questionnaire individuellement. Les enseignantes et enseignants responsables de ces groupes ont mentionné que les élèves ont pris un maximum de 30 minutes pour répondre au test. Durant la passation du test, les enseignants ne répondaient à aucune question.

Par la suite, chaque réponse a été codée selon la grille d'analyse utilisée par le CSMS (Hart, 1981). Une triangulation des codages a été effectuée pour s'assurer que la grille était bien interprétée. Le niveau de compréhension de chaque élève a été déterminé selon la méthode du CSMS. Le logiciel SPSS a ensuite servi aux analyses statistiques.

Les résultats ont été comparés avec les résultats obtenus par Hart (1981) auprès d'un échantillon d'élèves âgés entre 13 et 16 ans inscrits en deuxième (n = 1128) et en troisième (n = 961) secondaire. Une comparaison des programmes des années 70 au Québec et en Angleterre auraient favorisé l'analyse des résultats. Malheureusement, l'Angleterre ne disposait pas de tels programmes unifiés à ce moment-là. C'est donc sur la base que les programmes de Québec et de l'Angleterre n'appliquaient pas les recommandations du CSMS durant ces années que la comparaison s'est effectuée. Il s'agit d'une limite de cette étude.

Résultats et discussion

Les tableaux 3 et 4 montrent les résultats obtenus pour chacun des échantillons. Le test Khi-carré (χ^2) a servi à déterminer s'il y avait une différence ou non entre les résultats obtenus par les deux échantillons. Selon le premier test (χ^2 = 158,55, p< 0,05), une différence significative est observée pour les élèves de deuxième secondaire (tableau 3). Les résultats des niveaux zéro et 1 ont été fusionnés pour répondre aux critères du test du χ^2. Tout comme pour le deuxième secondaire, une différence entre les échantillons de troisième secondaire est observable (χ^2 = 75,61, p<0,05). Il est à noter que pour les élèves provenant du Québec, la distribution de troisième secondaire est très semblable à celle de deuxième secondaire. Ce phénomène est observé entre le troisième et le quatrième secondaire pour le CSMS.

Tableau 3
*Comparaison des résultats pour le deuxième secondaire**

Niveaux	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
CSMS	10 %	**50 %**	23 %	15 %	2 %
2004	1,3 %	4,0 %	**41,3 %**	36,0 %	17,3 %

Note : *χ^2 = 158,55, p< 0,05, le mode de chacune des distributions est en caractères gras.

Tableau 4
*Comparaison des résultats pour le troisième secondaire**

Niveaux	0	1	2	3	4
CSMS	6 %	**35 %**	24 %	29 %	6 %
2004	0 %	4,9 %	**40,2 %**	31,7 %	23,2 %

Note : *χ^2 = 75,61, p< 0,05, le mode de chacune des distributions est en caractères gras.

Nous émettons l'hypothèse que l'objectif en premier secondaire sur l'acquisition des préalables à l'algèbre pourrait être à l'origine de ce phénomène. En effet, les élèves du Québec se familiarisent avec les préalables à l'algèbre par l'intermédiaire d'activités de généralisation, dès le premier secondaire, ce qui n'était pas le cas en Angleterre à la fin des années 70. En fait, il s'agissait d'une des recommandations qui découlaient de l'étude du CSMS. Certains pourraient argumenter que l'âge des participants y est pour quelque chose étant donné que l'âge moyen de l'échantillon du Québec est gonflé par les deux groupes d'élèves en difficulté. Par contre, mentionnons que l'étude longitudinale de Hart (1981) montre que l'âge ou le nombre d'années d'étude de l'algèbre a peu ou pas d'influence sur le niveau atteint par l'élève.

Contrairement à l'étude du CSMS, une majorité d'élèves de l'échantillon du Québec sont capables de manipuler le symbolisme algébrique et d'accepter des réponses composées de lettres. En effet, près de 95% des élèves de l'échantillon du Québec de deuxième comme de troisième secondaire ont atteint minimalement le niveau 2 de compréhension de l'algèbre contre 40% et 60 % pour le CSMS. De plus, près du tiers des élèves sont en mesure de résoudre des problèmes qui demandent de traiter la lettre comme une inconnue spécifique dans des problèmes simples et le cinquième sont en mesure de résoudre des problèmes qui demandent de la traiter comme une inconnue spécifique (dans des problèmes complexes), un nombre généralisé ou une variable. Il est à remarquer ici qu'il n'y a pas de différence significative pour le niveau trois en troisième secondaire (sur les bases d'un test t[5])

Ces résultats suggèrent que les recommandations du CSMS (Booth, 1984*a*, 1984*b*; Hart, 1981) que l'on retrouve dans les programmes du Québec dès les années 90, tels la familiarisation avec la lettre par des activités de généralisation en première secondaire et le passage d'un mode de représentation à un autre en deuxième secondaire, ont un impact positif sur l'interprétation que les élèves font de la lettre.

L'interprétation de la lettre et les erreurs qui en découlent

Afin de peaufiner l'analyse des résultats, les différentes réponses erronées aux items ont été analysées par rapport à l'interprétation de la lettre pouvant leur être attribuée. Le but était de mieux décrire les types d'interprétation que les élèves font de la lettre en algèbre ainsi que les facteurs pouvant influencer ces interprétations. Toutefois, il faut placer ces résultats dans la perspective que le test est, dans l'ensemble, beaucoup mieux réussi par les élèves de l'échantillon du Québec que par les élèves du CSMS.

La lettre ignorée

On se souviendra que la lettre ignorée est associée aux deux premiers niveaux de compréhension de l'algèbre. Une baisse significative de cette erreur est remarquée lorsque la distribution de la multiplication sur l'addition est impliquée (items 8 (multiplier n+5 par 4) et item 18 (aire du rectangle)). En fait, dans le contexte géométrique de l'item 18, aucun élève n'a fait cette erreur. Toutefois, lorsque l'élève doit multiplier un monôme par un nombre ou additionner un nombre à un monôme, cette erreur est encore très présente. Il n'y a aucune différence significative dans ces cas-là.

La lettre évaluée

Toujours associée aux deux premiers niveaux de compréhension de l'algèbre, cette interprétation peut se diviser en deux cas possibles : la lettre en tant que rang dans l'alphabet et la lettre évaluée. Dans le premier cas, les erreurs liées à l'interprétation de la lettre en tant que rang dans l'alphabet ont diminué significativement en deuxième secondaire. Très peu d'élèves, en moyenne 0,17 %, a aujourd'hui utilisé cette interprétation à un moment ou à un autre. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par MacGregor et Stacey (1997). Malgré tout, soulignons qu'il ne s'agit pas d'une erreur très présente lors de l'étude du CSMS. Seulement deux items ont aujourd'hui des erreurs qui présupposent cette interprétation et il n'y a aucune cohérence dans les réponses d'élèves à ces deux items. Les erreurs associées à ce type d'interprétation pourraient peut-être être expliquées par autre chose. Pour ce qui est de la lettre évaluée (autre), les erreurs liées à cette interprétation ont diminué significativement en deuxième comme en troisième secondaire. Pour près de la moitié des items, le taux est descendu à zéro. De façon spécifique, tous les items portant sur la simplification d'expressions algébriques ou encore impliquant la multiplication d'une expression algébrique par un nombre ou l'addition d'un nombre à une expression algébrique et la majorité des items portant sur l'aire et le périmètre de figures géométriques n'ont aucune erreur impliquant cette interprétation.

Une diminution des erreurs liées à la lettre évaluée est donc observée. Les élèves de l'échantillon du Québec semblent accepter les expressions composées de lettres. Il faut rappeler que les élèves se familiarisent avec ce type d'expression dès le premier secondaire, ce qui n'était pas le cas au Québec et en Angleterre lors de l'étude du CSMS.

La lettre objet

Reliée, encore une fois aux deux premiers niveaux d'interprétation de la lettre, cette interprétation est observable chez peu d'items du test. En fait, plusieurs items peuvent être répondus en utilisant cette interprétation sans que cela ne cause d'erreurs. Il est donc difficile de conclure quoi que ce soit quant à ce type d'interprétation de la lettre en algèbre.

La lettre en tant qu'inconnue spécifique

L'interprétation de la lettre en tant qu'inconnue spécifique est liée aux niveaux trois et quatre. En ce sens, les élèves utilisent plus ce type d'interprétation que dans l'étude du CSMS. Malgré que cette interprétation de la lettre soit mathématiquement bonne pour plusieurs problèmes, elle peut amener des difficultés pour répondre correctement à d'autres problèmes qui, eux, nécessitent de traiter la lettre en tant que nombre généralisé ou variable. Entre autres, c'est le cas des items 5 (comparaison de $2n$ et $n + 2$), 41 ($c + d = 10$ et $c < d$), 45 ($L + M + N = L + P + N$) et 50 (le problème des crayons bleus et des crayons rouges). En effet, pour ces items, certains élèves ont tendance à ne donner qu'une valeur possible pour chacune des lettres impliquées dans le problème. Pour ces items, aucun changement n'est noté pour les erreurs causées par cette interprétation.

La lettre en tant que nombre généralisé et en tant que variable

Liées au niveau quatre de compréhension de l'algèbre, ces deux interprétations semblent plus utilisées par les élèves puisque le pourcentage d'élèves ayant atteint ce niveau est plus élevé que dans la recherche antérieure. Toutefois, une certaine nuance est à faire puisque les questions les mieux réussies du niveau quatre nécessitent minimalement une interprétation de la lettre en tant qu'inconnue spécifique. De plus, les erreurs les plus communes aux items qui nécessitent l'utilisation de la lettre en tant que variable sont dues à l'interprétation de la lettre en tant qu'inconnue spécifique.

Conclusion

De grands changements ont bouleversé le système d'éducation québécois et l'enseignement de l'algèbre depuis 30 ans : principes méthodologiques, pédagogiques, programmes de formation, manuel scolaire, etc. L'objectif de cette étude était de déterminer si ces transformations ont eu un impact sur l'interprétation de la lettre et les erreurs commises en algèbre par les élèves. Même si d'autres éléments peuvent influencer l'interprétation de la lettre des élèves du Québec, les résultats de cette étude suggèrent que les changements de programme apportés à la suite des recommandations du CSMS ont porté fruit.

Premièrement, les élèves de l'échantillon du Québec semblent avoir des interprétations de la lettre plus adéquates qui les mènent à mieux réussir en algèbre que les élèves de l'échantillon du CSMS. De plus, le taux de réussite à tous les items est égal ou supérieur à celui de l'échantillon du CSMS. Ils utilisent moins les interprétations qui mènent à de faux raisonnements comme la lettre ignorée, la lettre évaluée ou la lettre objet. Ils ont plus de facilité à utiliser la lettre en tant qu'inconnue, nombre généralisé et variable. Nous émettons l'hypothèse que le programme en place au Québec permet aux élèves d'utiliser les trois catégories d'interprétation de la lettre avec plus d'aisance. Les changements apportés à la formation des maitres pourraient aussi avoir un impact positif, mais il est difficile de dire dans quelle mesure. Nous pourrions aussi penser que l'enseignement au Québec est moins procédural et plus structural puisque plusieurs erreurs liées au langage algébrique sont dues à une conception procédurale de l'algèbre (Kieran 1992). Il s'agit ici d'une piste de recherche intéressante à explorer.

Deuxièmement, par les résultats obtenus, il peut être fait l'hypothèse que le contexte et les opérations en place influencent le comportement des élèves. En effet, les élèves de l'échantillon du Québec ne commettent pas le même type d'erreurs pour un problème de même structure selon qu'il est situé en contexte géométrique ou non. Par ailleurs, un problème situé dans un même contexte, mais qui implique différentes opérations ne suscite pas les mêmes erreurs. Ces phénomènes semblent moins présents chez les élèves de l'échantillon du CSMS. Il s'agit là d'une autre piste de recherche qui peut s'avérer intéressante à explorer.

Références

Bednarz, N. (1990). L'enseignement des mathématiques et le Québec de l'an 2000. Dans R. Pallascio (dir.), *Mathématiquement vôtre! Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques* (p. 23-45). Ottawa : Édition Agence D'ARC.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractéristique du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daïfe et al. (dir.), *Actes du Colloque sur la formation des enseignants*. (p.21-40) Marrakech, Maroc : École Normale Supérieur de Marrakech.

Belhling, O. et Law, K. S. (2000). *Translatling questionnaires and other research instruments: Problems and solutions.* Thousand Oaks, CA : Sage Publications.

Booth, L. (1984a). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X*, 5, 5-17.

Booth, L. (1984b). *Algebra : childrens' strategies and errors.* Berkshire : NFER-NELSON.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. Dans A. F. Coxford et A. P. Shulte (dir.), *The ideas of algebra, K-12(1988 Yearbook)*(p.20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Breton, G. (1995). *Carrousel mathématique 3 : troisième secondaire*. Montréal : CEC.

Brown, M. (1981). But de la formation en mathématiques et besoins de l'élève. Dans R. Morris (dir.), *Études sur l'enseignement des mathématiques* (p. 25-42). Paris : Unesco.

Choike, J.R. (2000). *Teaching Strategies for "Algebra for All".* Consulté en janvier 2002 sur le site : http://www.nctm.org/mt/200/10/strategies.html

Drolet, M. et Rochette, H. (1985). *Mathematique Soleil 3.* Québec : Guérin

Hart, K. (1981). *Secondary school children's understanding of mathematics.* London : Murray.

Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et des erreurs commises en algèbre par les élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative.* Mémoire de maitrise non publié, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-416). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. et Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: the case of equivalent expressions. *Focus on learning problems in mathematics, 21*(1), 1-17.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. Dans K. Hart (dir.), *Children's understanding of mathematics* (p. 11-16). London : Murray.

MacGregor, M. et Stacey, K (1997). Students'understanding of algebraic notation : 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1984). *Guide pédagogique : mathématique second cycle, fascicule A, l'arithmétique et l'algèbre.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec. (1993). *Programme d'étude MAT 116*, Québec, Gouvernement du Québec. http://www.meq.gouv.qc.ca/dfgj/program/pdf/math116.pdf

Ministère de l'Éducation du Québec. (1995). *Programme d'étude MAT 314,* Québec, Gouvernement du Québec. http://www.meq.gouv.qc.ca/dfgj/program/pdf/math314.pdf

Ministère de l'Éducation du Québec. (1996). *Les états généraux sur l'éducation 1995-1996 : Exposé de la situation.* Québec, Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec. (2003). *Programme de formation de l'école québecoise, enseignement secondaire, premier cycle.* Québec Gouvernement du Québec. http://www.meq.gouv.qc.ca/lancement/prog_formation_sec1ercycle/index.htm

Pallascio, R. (1990). *Mathématiquement vôtre! Défis et perspectives pour l'enseignement des mathématiques*. Ottawa : Édition Agence D'ARC inc.

Patenaude, P. (1991). Itinéraire pour l'enseignement des mathématiques au Québec? *Bulletin AMQ,* 31(*4*), 63-72.

Piaget, J. (1941). *Le développement des quantités chez l'enfant : conservation et atomisme*. Neuchâtel, Suisse : Delachaux et Niestle.

Piaget (1950) *Introduction à l'épistémologie génétique. Tomes I, II et III: La pensée mathématique*. Paris : PUF.

Piaget, J. (1964). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Paris : Delachaux et Niestle.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(*2*), 253-276.

Rapport Parent (1964). Rapport de la Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec. *Première partie ou tome I : Les structures supérieures du système scolaire*. Québec : Publication Québec.

Schmidt, S. Daneau, C. et Thivierge-Ayotte, L (2001). Les significations accordées au signe égal et aux égalités arithmétiques par des élèves en difficulté grave d'apprentissage. *Instantanés mathématiques*, 38*(3*), 4-12.

Theis, L. (2002). *Étude du développement de la compréhension du signe = chez des enfants de première année du primaire*. Thèse non publiée, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.

Notes

[1] Pour plus de détails vous pouvez consulter les ouvrages suivants: Piaget (1941), (1950) et (1964).
[2] Nicolas Bourbaki est en fait le nom sous lequel publiait un groupe de mathématiciens qui ont fait plusieurs avancées dans le domaine des mathématiques.
[3] Voir MEQ (1996).
[4] Il a été malheureusement impossible de retracer des résultats canadiens aussi complets que ceux du CSMS.
[5] Pour consulter l'ensemble des résultats statistiques de cette étude, voir Jeannotte (2005).