Reverse Mathematics and Countable Algebraic Systems

著者	佐藤　隆
号	73
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3009号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00097250

（別紙様式５）

論　文　内　容　要　旨

（NO.　1）

氏　　名	佐藤　隆	提出年	平成２８年
学位論文の 題　　　目	Reverse Mathematics and Countable Algebraic Systems （逆数学と可算代数系）		

論　文　目　次

5.4 Abelianizers (a. k. a. Derived Subgroups or Commutator Groups)

6 Countable Commutative Rings
6.1 Basic Notions
6.2 Reverse Ideal Theory
6.3 Polynomial Rings
6.4 Euclidean Domains and Principal Ideal Domains (PIDs)
6.5 Noetherian Rings
6.6 Other Topics

本論文の目的は，数学基礎論の研究プログラム「逆数学」の手法を用いて，様々な代数系（束，半群，群，アーベル群，可換環など）の理論をメタ的に調べることである．自然数と自然数の諸集合のみを扱う形式的証明体系である二階算術 Z_2 は，算術の基本公理（順序半環の公理など），数学的帰納法，集合存在公理からなる．Hilbert と Bernays[1]は二階算術 Z_2 で通常の数学の多くの部分が展開できることを示した．のちに Weyl [8]などにより，Z_2 の弱い部分体系でも十分に各々の理論が展開できることが示された．さらに 1970 年代になり「各々の定理を証明するのに適切な公理を選ぶと，その定理とその公理は論理的に同値になる」という逆数学現象が H.Friedman[3]により見いだされた．逆数学の手法により，可算な代数系の理論の各々の定理の証明論的な強さや，部分構造や拡大構造の複雑さを定量的に評価することが可能になる（[4]参照）．本論文で注目する Z_2 の部分体系は，RCA_0，ACA_0，WKL_0 である（[7]参照）．体系 RCA_0 は制限された数学的帰納法と再帰的集合存在公理からなり，おおむね計算可能な数学に対応し，逆数学現象を記述するための基本体系として採用される．体系 ACA_0 は RCA_0 に算術的論理式で定義される集合の存在公理を加えたものであり，通常の解析学などが十分に展開できることが知られている．体系 WKL_0 は RCA_0 に弱ケーニヒの補題「無限個の頂点を持つ 2 分木は無限道を持つ」という主張を加えたものであり，RCA_0 と ACA_0 のちょうど中間の強さを持つ．以下，本論文の主要結果の概要を述べる．

関数と集合：代数系全般に用いられる様々な原理を二階算術の枠組みで整理した．

- 以下の主張は RCA_0 上で ACA_0 と同値である：
  －自然数から自然数への部分関数について，その全域関数への拡張が存在する．
  －算術的論理式で定義可能な同値関係について，その商集合が存在する．
- 以下の主張は RCA_0 上で WKL_0 と同値である：
  －自然数から自然数への部分関数の無矛盾な列について，その拡張が存在する．
  －反射的かつ対称的な 2 項関係について，その自明でない推移的な拡大が存在する．

束論：領域が非可算な場合を含む不動点定理の証明には，順序数の理論を高度に駆使するのが通例である．順序数の理論を展開するには，ACA_0 より真に強い集合存在公理が必要なことが知られている．しかし，領域が可算な場合には多くの不動点定理が RCA_0 で証明できるか，ACA_0 と同値になることを示

した．

- 可算な完備半順序集合における Tarski-Kantorovitch の不動点定理と Bourbaki-Witt の不動点定理，可算な完備束における Knaster-Tarski の不動点定理と Abian-Brown の極大不動点定理は RCA_0で証明できる．
- 可算な半順序集合における Abian-Brown の最小不動点定理，Markowsky の逆（不動点定理による可算な半順序集合の完備性の特徴付け），Davis の逆（不動点定理による可算な束の完備性の特徴付け）は RCA_0上でそれぞれ ACA_0と同値である．

半群論：Isbell のジグザグ定理と Rees の定理を中心に，半群論の逆数学的研究を行った．Isbell のジグザグ定理はΠ^1_1 論理式で定義されるドミニオンがΣ^0_1 論理式で特徴付けられるという定理である．Rees の定理は半群の構造定理の一つである．

- 可算なモノイドにおける Isbell のジグザグ定理は RCA_0上で WKL_0と同値である．
- 以下の主張は RCA_0上で ACA_0と同値である：可算なモノイドとその拡大について，そのドミニオンが存在する（以上の結果は[6]に発表されている）．
- 可算な半群における Rees の定理は ACA_0で証明できる（なお，逆方向については未解決である）．

群論：群論の逆数学を系統的になすための基礎的な理論を整備した．アーベル群論にかんしてはとくに本田欣哉による粋部分群の理論[5]を形式化した．これを基にベクトル空間の逆数学の先行研究[2]などを応用し，以下の結果を得た．

- 以下の主張は RCA_0上で WKL_0と同値である：位数が素数でない可算な群について，その自明でない真の部分群が存在する．
- 以下の主張はRCA_0上で ACA_0と同値である：
  －可算な群とその 2 つの部分群について，それらの和が存在する．
  －可算なアーベル群とその部分群について，その粋包が存在する．
  －可算な群とその部分群について，その正規化部分群が存在する．
  －可算な群について，その交換子群が存在する．
- 以下の主張はRCA_0上で WKL_0と同値である：
  －Σ^1_1論理式で定義される正規化部分群はΠ^0_1 論理式で特徴づけられる．
  －Π^1_1論理式で定義される交換子群はΣ^0_1 論理式で特徴づけられる．

可換環論：多項式環，ユークリッド整域，PID，Noether 環などのそれぞれの可換環のクラスの理論に必要な公理を考察した．また，先行研究に基づいてイデアル論の逆数学を推し進めた．

- 可算なユークリッド整域における Bézout の補題は RCA_0で証明できる．
- 以下の主張はRCA_0上で ACA_0と同値である：

－可算な可換環について，その零因子全体の集合が存在する．

－可算な可換環について，その全商環が存在する．

－可算な可換環とその２つのイデアルについて，それらの和が存在する．

－可算な可換環とその２つのイデアルについて，それらの積が存在する．

－可算な可換環とその２つのイデアルについて，それらの商が存在する．

－可算な可換環とそのイデアルについて，その冪が存在する．

- 可算な可換環における Noether の準素イデアル分解定理は ACA_0で証明できる（なお，逆方向については未解決である）．

参考文献

[1] Bernays, P. and Hilbert, D. *Grundlagen der Mathematik volume I*. Springer, 1934.

[2] Downey, R. , Hirschfeldt, D. R. , Kach, A. M. , Lempp, S. , Mileti, J. R. , and Montálban, A. Subspaces of computable vector spaces. *Journal of Algebra 314, 888-894*, 2007.

[3] Friedman, H. Some systems of second order arithmetic and their use, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974), volume 1. *Canadian Math. Congress, 235-242*, 1975.

[4] Friedman, H., Simpson, S. G., and Smith, R. Countable algebra and set existence axioms. *Annals of Pure and Applied Logic 25, 141-181*, 1983.

[5] Honda, K. Realism in the theory of abelian groups I. *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 5, 37-75*, 1956.

[6] Sato,T. Reverse mathematics and Isbell’s zig-zag theorem, *Mathematical Logic Quarterly, volume 60, issue 4-5, August 2014, 348-353*, 2014.

[7] Simpson, S. G. *Subsystems of Second Order Arithmetic (second edition)*. Cambridge University Press, 2009.

[8] Weyl, H. *Das Kontinuum*. Leipzig, Verlag von Veit and Comp., 1918.

別　紙

論文審査の結果の要旨

本博士論文の目的は，逆数学の観点から主に代数構造に関する諸結果の証明論的強さを考察することである．

代数に関する逆数学は 1983 年の Friedman-Simpson-Smith の研究以来，近年に至るまで多くの研究がなされてきた．佐藤君の研究はその流れの中で，半群論及び，無限アーベル群の基礎に関する逆数学を発展させた．また過去の研究結果を利用して，イデアル論における若干の補足を行なった．一方，半順序集合上の不動点に関する研究を行い，逆数学的結果をほぼ全て網羅することに成功した．その意味で，逆数学における重要な成果をあげていると評価できる．

以下では各章に従って，得られた結果をその意義と共に簡単に述べておく．

第３章では半順序集合における不動点定理の逆数学的結果がまとめられている．ここでは，可算完備半順序集合における Tarski-Kantorovitch の不動点定理と Bourbaki-Witt の不動点定理，可算完備束における Knaster-Tarski の不動点定理などは，ほぼ自然な証明が RCA_0 で展開できることを示している．一方で，可算完備半順序集合における Abian-Brown の最小不動点定理が RCA_0 上で ACA_0 と同値となることを示した．さらに，Abian-Brown の最小不動点定理の逆や Knaster-Tarski の不動点定理の逆もまた RCA_0 上で ACA_0 と同値となることを示した．これらの定理から ACA_0 を導く時に用いられた手法は，束論の逆数学の未解決だった問題を解決する時にも利用できる．その結果，ACA_0 と同値なものとしては新しい形の主張が得られる．

第 4 章では半群論の逆数学を行なっている．この中の主要な結果は，可算モノイドにおける イズベルのジグザグ定理が RCA_0 上で WKL_0 と同値となることと，ドミニオンの存在が ACA_0 と同値となることである．

第５章では無限アーベル群を中心に逆数学的分析を行なっている．とりわけ，essential closure と neat hull の同値性には WKL_0 を使うこと，またそれらの存在には ACA_0 が必要十分であることが示されている．また，アーベル群論以外にも，正規化部分群や交換子群の存在には ACA_0 が必要十分であるという過去の結果も述べてある．

最後に第６章では，先行研究及び環上の加群に関する既存の結果の言い直しなどによって，可換環に関するイデアルについての逆数学的結果をまとめてある．またユークリッド整域や単項イデアル整域，ネーター環についての考察も行なっているが，まだ発展途中といえる．

以上のことは彼が自立して研究活動を行うに必要な高度の研能力と学識を有することを示している．したがって，佐藤隆君提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．