数値解析における並列アルゴリズムとその計算複雑さに関する研究

著者	李 磊
号	1434
発行年	1993
URL	http://hdl.handle.net/10097/10241

氏　　　　名	李　　　　磊 (Li Lei)
授　与　学　位	博　士（工学）
学位授与年月日	平成6年1月12日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第2項
最　終　学　歴	平成元年4月 西安交通大学博士学位研究生計算数学専業学習修了
学位論文題目	**数値解析における並列アルゴリズムとその計算複雑さに関する研究**
論文審査委員	東北大学教授　中村　維男　　東北大学教授　大宮司久明 東北大学教授　箱守京次郎　　東北大学助教授　小林　広明

論　文　内　容　要　旨

第1章　緒　　論

70年代中ごろ以来，各種の並列型計算機が現れ，実用的に次第に使われるようになってきた。自然科学の探求から産業界の製品開発に至るまで，あらゆる分野に並列型計算機の適用が急速に広がっている。特に，実験の難しい事象や実験することのできない事象の解明においては，数値シミュレーションを超高速で処理できる並列型計算機抜きではもはや考えられない。したがって，近年の並列処理におけるハードウェア技術並びにソフトウェア技術の開発が計算機科学と計算理論の舞台で重要な話題になっている。

アルゴリズムの研究がソフトウェア技術のまさに核心にある。逐次型計算機に逐次型アルゴリズムがあるように，並列型計算機にも並列アルゴリズムが存在する。逐次型の場合、アルゴリズムの設計はノイマン型計算機を対象とすればよかった。並列型計算機の場合，パラレル・アーキテクチャはバラエティに富み，さまざまな並列計算モデルが存在するので，どれを対象として並列アルゴリズムを設計するかが問題である。並列アルゴリズムの設計はパラレル・アーキテクチャの影響を受けるかどうかという問題がある。1000個のプロセッサを使って1000倍高速のアルゴリズム設計が可能だろうか。いろいろな疑問が湧いてくるものと思われる。現状では並列型計算機の性能を，100%どころか50%さえ引き出すのは至難の技であり，またそのための効率の良い並列プログラムを書いたり並列アルゴリズムを設計することも従来の逐次型の場合とは全く様相を異にしている。

アルゴリズムの研究者は一般に次の2つのことに関心を持っている。1つはプログラミングが容

易な実用的なアルゴリズムを設計するもので，他の1つは計算機の物理的制約の中で，理論的に計算問題の複雑さの限界（上界、下界）を探すものである。前者は当然の作業であるが，後者はより速いアルゴリズムの開発のリード的役割を持っていることがわかる。逐次型アルゴリズムの複雑さの評価にはその必要な演算回数（時間複雑さ）とメモリ量（空間複雑さ）などがあることがよく知られている。これに対して並列アルゴリズムの複雑さの評価には並列計算のステップ数（時間複雑さ）とプロセッサの台数（空間複雑さ）と通信複雑さ（本論文は考えていない）等が挙げられる。

本論文の目的は，数値解析問題に対し，まず分割統治法による並列アルゴリズムにおける計算複雑さの一公式化を提案することである。これに基づき，従来の数値解析問題の並列アルゴリズムに対し，プロセッサの台数と並列計算のステップ数とに関係するコストの低下と，並列計算の効率向上を考慮しつつ，アルゴリズム上での並列計算の複雑さをその問題固有の並列計算の複雑さに限りなく近づけ，コストと効率の面で最適な並列アルゴリズムを作成することである。

第2章　並列型計算機と並列アルゴリズム

本章では，続章における議論のために，既に提案されている並列型計算機の分類，および並列アルゴリズムの分類をまとめ，併せて並列型計算機の発展動向と並列アルゴリズムの研究状況を概説した。その上で，並列アルゴリズムの設計技術と解析に必要な評価基準を示した。特に，分割統治法で並列アルゴリズムを設計する一般的な方法とその統一された計算複雑さの一公式化を提案した。今までに提案された多くの並列アルゴリズムの計算複雑さは本公式で簡単に説明できる。したがって，このような一般的な設計方法と計算複雑さの公式を用いて，第3章から第5章では，分割統治法での新しい並列アルゴリズムを構成し，また分割統治法による並列アルゴリズムの計算複雑さを解析する。

第3章　線形漸化式システム

逐次型計算の典型的な例として漸化式計算がある。並列計算をするために，まず漸化式の並列化を行わなければならない。漸化式問題は高度の逐次演算の性質をもっているから，その並列アルゴリズムと計算複雑さを研究することは大いに必要性があると考える。

本章の前半では1次線形漸化式システムに対し，分割統治法を用いて二つの新しい並列アルゴリズムである後退分割統治法と無後退分割統治法を提案した。Kogge と Stone らの提案した倍数法と循環法に比べて，後退分割統治法は n／2台のプロセッサと5 logn の並列計算のステップ数で，規模 n の1次線形漸化式の解が求められる。したがって，その並列計算の効率がもっとも高い。一方，無後退分割統治法は2n-3台のプロセッサと2 logn の並列計算のステップ数で規模 n の1次線形漸化式の解が求められるから，その並列計算のステップ数がもっとも少ない方法である。また，特殊な1次線形漸化式でもある1変数多項式の値を求める場合，従来の MIMD 型アルゴリズムのプロセスはいずれも非一様分解であるが，本章では分割統治法を利用してプログラミングが容易な一様分解法を提案した。この方法の並列計算のステップ数は SIMD 型アルゴリズムのそれより少ない。

本章の後半では，n次線形漸化式システムについて議論した。まず分割統治法による三角形行列とToeplitz型三角形行列の逆行列を求める並列アルゴリズムを示した。続いてこれらを発展させ，一般的R（N）問題と定常係数R（N）問題の最適並列アルゴリズムと計算複雑さを示した。この二つの最適なアルゴリズムの並列計算のステップ数は，今までに得られたものと比較すると最小のO（$\log^2 n$）である。そして，その必要なプロセッサの台数はそれぞれ従来のO（n^3）とO（n^2）からO（$n^3/\log^2 n$）とO（$n/\log n$）まで減少し，その並列計算の効率はO（1）となることを明らかにした。

第4章　行列多項式と高速並列 Jacobi 反復法

1976年，L. Csankyが並列計算の重要な理論結果を発表した。SIMD型の並列計算モデルにおいて，連立1次方程式を解くこと，逆行列を求めること，行列式の値を求めることや行列の固有多項式を計算することは，並列計算の複雑さの意味で等価であるとL. Csankyにより証明された。また，L. Csankyはn次行列の逆行列を求める計算複雑さがO（$\log^2 n$）なる二つのアルゴリズムも示して，その必要なプロセッサの台数はそれぞれO（n^5）とO（n^4）であるとした。それ以前は，逆行列を求めるいかなる並列アルゴリズムのステップ数は少なくともO（n）であった。Wang G. R. らがすでに一般逆行列A^+とA_{MN}^+を求める並列アルゴリズムを提案し，L. Csankyの等価性定理と類似な結論を示した。そして，B. Codenottiが逆行列A^{-1}を求める並列アルゴリズムのステップ数とプロセッサの台数はそれぞれO（$\log k * \log n$）とO（$k * n^3$）（k：行列Aの最小多項式の次数）を越えないことを最近示した。彼らの結果はそれぞれL. Csankyの等価性定理の二つの形の一般化である。

本章の前半では，まず分割統治法で構成した最適な行列積の並列アルゴリズムを示した。このアルゴリズムの並列計算のステップ数は行列積の固有の計算複雑さO（$\log n$）に達し，その必要なプロセッサの台数は最少であり，その並列計算の効率はO（1）になった。これに基づいてL. Csankyの等価性定理を改良した。特に行列のべき乗A^nの並列計算の複雑さはL. Csankyにより示された四つの基本問題の並列計算の複雑さに等価なこと（L. Csankyは片側の結果だけを証明した）とこれらの複雑さの等価な問題に必要なプロセッサの台数はO（$n^{3.81}/\log^2 n$）まで減少できることを証明した。

本章の後半では，まず分割統治法による行列多項式を計算する2 logn回の行列乗算での高速アルゴリズムを提案し，D. Westreichが提案した素因子分解による3 logn回の行列乗算でのアルゴリズムを改良した。これに基づいて，連立1次方程式を解くために，分割統治法で構成した高速Jacobi反復法を提案した。この方法は逐次型計算機におけるGauss-Seidel法より速く，また完全にベクトル演算で構成されるため，SIMD型計算機に加え，ベクトル計算機にとっても有効である。一方，H. T. Kungが考察した多項式値を求める問題と多項式の導関数値を求める問題を含む，より一般的なケースについて一つの高速アルゴリズムを提案した。H. T. Kungにより提案されたアルゴリズムは本章のアルゴリズムに含まれる特別な形式である。最後に，MIMD型計算機上での任意の分裂型作用素の不動点を求めるための非同期式反復法を提案し，その収束定理を証明した。

この収束定理は従来の収束定理の一般化である。

第5章　多次元 FFT と多変数多項式の並列アルゴリズム

1965年に Cooley と Tukey により提案された1次元の高速 Fourier 変換アルゴリズム（FFT）は，現代数値解析分野の重大な成果の一つである。長さ N×N×... X×の R 次元離散 Fourier 変換において，Cooley と Tukey のアルゴリズムを利用した行列法はよく知られている。この行列法は逐次型計算機で実行すれば $0.5RN^{R}\log N$ 回の乗算回数と $RN^{R}\log N$ 回の加算回数がかかり，並列型計算機で実行すれば，N^{R} 台のプロセッサと 1.5RlogN のステップ数（ただし，乗算ステップ数は 0.5RlogN，加算ステップ数は RlogN）がかかることがわかる。

本章の前半では，最少の並列計算のステップ数のアルゴリズムを構成するために，長さ $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_R$ の R 次元 DFT に対する一つの直接変換法を提案した。$N^{*}=\max\{N_i\}$ とした場合，この直接変換法は逐次型計算機で実行すれば $(1-1/2^{R})N_1N_2\ldots N_R\log N^{*}$ 回の乗算回数と $N_1N_2\ldots N_R(\log N_1+\log N_2+\ldots\log N_R)$ 回の加算回数がかかる。行列法に比べて，加算回数は変わらないが，乗算回数は少なくなる。並列型計算機で計算すれば $(1-1/2^{R})N_1N_2\ldots N_R$ 個の乗算器と $RN_1N_2\ldots N_R$ 個の加算器と $\log N^{*}$ のステップ数で計算できることがわかる。そのステップ数は行列法の1／R である。そして，類似な考え方に基づいて，高速 Walsh 変換の一つの直接法を提案した。

多項式計算は数式処理と数値計算分野における基本的な手段である。1次元 FFT のアルゴリズムを利用して今まではすでに多く提案されている1変数多項式の並列アルゴリズムがよく知られている。しかし，数式処理と多変数非線形方程式の反復法では，多変数多項式の計算が必要になってくる。本章の後半では多変数多項式のいくつかの基本的計算問題である多項式値を求めること（単点と複数点の二つの場合を含む），乗算，除算，補間，偏導関数値を求めること等を検討して，これらの問題の並列計算の複雑さの新しい上界を与え，これと関係ある結果を示した。

第6章　結　　論

本章は，本論文を要約し，主要な結果を総括した。

審 査 結 果 の 要 旨

数値解析を必要とする分野において，高速計算を実行するために並列計算機による並列計算が重要な課題である。しかしながら，並列計算のアルゴリズムの設計は必ずしも統一されておらず，評価も一定していない。

著者は並列計算のステップ数と効率の面から並列アルゴリズムの設計と評価に関する研究を行った。本論文はこれらの成果をまとめたもので，全編6章より成る。

第1章は緒論である。

第2章では，並列アルゴリズムの設計技術とその解析に必要な評価基準を示し，特に，分割統治法による並列アルゴリズムの一般的設計論と計算複雑さの公式を提案している。これらは重要な知見である。

第3章では，一次線形漸化式問題に対し分割統治法による並列アルゴリズムとして後退分割統治法と無後退分割統治法を提案している。旧来の倍数法と循環法に比較し，後退分割統治法は並列計算の効率が最も高く，無後退分割統治法は並列計算のステップ数が最も少ないことを示している。また，n次線形漸化式問題について，一般n次線形漸化式問題と定常係数n次線形漸化式問題の各々の最適な並列アルゴリズムを提案し，O（$\log^2 n$）のステップ数で並列計算の効率が最大という結果を得ている。

第4章では，分割統治法を用いて最適並列行列乗算アルゴリズムを示し，L. Csanky の等価性定理を拡張している。また，特別な行列多項式に対し，高速分割統治法を提案するとともに Westreich の素因子分解による方法を改良している。さらに，一般的な多項式の値を求めるために，演算回数がたかだかO（$\log^2 n$）である一つの高速アルゴリズムを提案している。H. T. Kung による多項式の複数点での値を求める方法や，1点における各階の導関数の値を求める方法はこの高速アルゴリズムの特別な形であることを示している。これらは優れた成果である。

第5章では，一般的なR次元離散型フーリエ変換において，一つの直接変換法を提案している。その結果，直接変換法の並列計算のステップ数は従来の行列法の1／R倍で最小になることがいえる。さらに，数式処理と多変数非線形方程式の反復法において高速演算アルゴリズムとその並列計算の複雑さの上界を示している。これらは重要な成果である。

第6章は結論である。

以上要するに本論文は，数値解析問題における並列アルゴリズムでの計算複雑さの一公式化を提案し，並列計算のステップ数に関するコストの低減と並列計算の効率を向上させる並列アルゴリズムの設計理論を確立したもので，機械工学および情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は博士（工学）の学位論文として合格と認める。