

Studies on non-amorphous association schemes and spin models

著者	生田 卓也
号	16
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	情博第496号
URL	http://hdl.handle.net/10097/59940

氏名 (本籍地)	生田 卓也
学位の種類	博士 (情報科学)
学位記番号	情博第 496 号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) 情報基礎科学専攻
学位論文題目	Studies on non-amorphous association schemes and spin models (非アモルファスなアソシエーションスキームとスピンモデルの研究)
論文審査委員	(主査) 東北大学教授 宗政 昭弘 東北大学教授 尾畑 伸明 国際基督教大学教授 鈴木 寛 東北大学准教授 今井 秀雄

論文内容の要旨

Chapter 1 Introduction

We will mainly study the following two topics: non-amorphous association schemes and spin models. These contents are joint work with the supervisor Akihiro Munemasa. The first half is a study about association schemes themselves, and the second half is a study which applies association schemes to other mathematical objects. In both cases, an association scheme is the starting point.

In 1973, P. Delsarte suggested the concept of association schemes to treat coding theory and combinatorial designs integrally. Roughly speaking, an association scheme on a finite set X is a partition of $X \times X$ into relations which exhibits nice regularity properties. The regularity properties of the relations are conveniently described in terms of their adjacency matrices: they span an algebra of matrices with unit I closed under transposition. This algebra is called the Bose-Mesner algebra of the association scheme. It is also an algebra with unit J (the all-one matrix) for the Hadamard (i.e., entrywise) product of matrices. We always

assume here that the ordinary matrix product in the Bose-Mesner algebra is commutative. In this case, Bose-Mesner algebras and association schemes are equivalent concepts.

First we consider a problem about non-amorphous association scheme. If each nontrivial relation in a symmetric association scheme is strongly regular, then an arbitrary partition of the set of nontrivial relations gives rise to an association scheme. Association schemes satisfying this conclusion is called *amorphous*. A.V. Ivanov conjectured that if each nontrivial relation in an association scheme is strongly regular, then the association scheme must be amorphous. van Dam gave an example of primitive non-amorphous association schemes in which every nontrivial relation is a strongly regular graph, as a fusion scheme of the cyclotomic scheme of class 45 on $\text{GF}(2^{12})$. We are interested in the construction of counterexamples to Ivanov's conjecture in the primitive case.

We are to present a new example of primitive non-amorphous association schemes in which every nontrivial relation is a strongly regular graph, as a fusion scheme of the cyclotomic scheme of class 75 on $\text{GF}(2^{20})$. We also propose an infinite family of parameters of association schemes containing both of these two examples. We also give another pseudocyclic non-amorphous association scheme of class 7 on $\text{GF}(2^{21})$, and a new pseudocyclic amorphous association scheme of class 5 on $\text{GF}(2^{12})$.

Lastly, we consider the construction of spin models. Spin models were introduced by Jones to produce invariants of links. A spin model is defined as a square matrix W with nonzero complex entries satisfying certain conditions. Kawagoe, Munemasa and Watatani generalized it by dropping the symmetric condition. The fact that association schemes and their Bose-Mesner algebras provide a convenient and natural framework for the study of spin models was first pointed out by Jaeger. Jaeger, Matsumoto, and Nomura showed that a spin model belongs to the Bose-Mesner algebra of a self-dual association scheme.

For a spin model W , it is known that $W^T W^{-1}$ is a permutation matrix, and its order is called the index of W . F. Jaeger and K. Nomura found spin models of index 2, by modifying the construction of symmetric spin models from Hadamard matrices. We are interested in the construction of spin models of even index. The reason is that the author wrote that

the link invariant of spin models of odd index is gauge equivalent to the link invariant of symmetric spin models, but one could still expect to obtain new non-symmetric spin models in the case where m is a power of 2. In chapter 4, we give a construction of spin models of an arbitrary even index from any Hadamard matrix. In particular, we show that our spin models of indices a power of 2 are new.

Chapter 2 Pseudocyclic Association Schemes and Strongly Regular Graphs

E. R. van Dam gave an example of primitive non-amorphous association schemes in which every nontrivial relation is a strongly regular graph, as a fusion scheme of the cyclotomic scheme of class 45 on $\text{GF}(2^{12})$. The aim of this paper is to present a new example of primitive non-amorphous association schemes in which every nontrivial relation is a strongly regular graph, as a fusion scheme of the cyclotomic scheme of class 75 on $\text{GF}(2^{20})$. We also propose an infinite family of parameters of association schemes containing both of these two examples.

Chapter 3 Pseudocyclic Association Schemes and Strongly Regular Graphs

Let \mathcal{X} be a pseudocyclic association scheme in which all the nontrivial relations are strongly regular graphs with the same eigenvalues. We prove that the principal part of the first eigenmatrix of \mathcal{X} is a linear combination of an incidence matrix of a symmetric design and the all-ones matrix. Amorphous pseudocyclic association schemes are examples of such association schemes whose associated symmetric design is trivial. We present several non-amorphous examples, which are either cyclotomic association schemes, or their fusion schemes. Special properties of symmetric designs guarantee the existence of further fusions, and the two known non-amorphous association schemes of class 4 discovered by van Dam and by the authors, are recovered in this way. We also give another pseudocyclic non-amorphous association scheme of class 7 on $\text{GF}(2^{21})$, and a new pseudocyclic amorphous association scheme of class 5 on $\text{GF}(2^{12})$.

Chapter 4 Spin Models Constructed from Hadamard Matrices

A spin model (for link invariants) is a square matrix W which satisfies certain axioms. For a spin model W , it is known that $W^T W^{-1}$ is a permutation matrix, and its order is called the index of W . F. Jaeger and K. Nomura found spin models of index 2, by modifying the construction of symmetric spin models from Hadamard matrices.

The aim of this paper is to give a construction of spin models of an arbitrary even index from any Hadamard matrix. In particular, we show that our spin models of indices a power of 2 are new.

論文審査結果の要旨

群の作用を公理化したアソシエーションスキームは、代数的組合せ論の重要な研究対象としてさまざまな側面から研究されてきた。特に、有限体の数論的性質を反映するサイクロトミックスキームはデザイン理論への応用の見地からも古くから研究されてきたが、アモルファスという概念が導入されて以来新たな研究対象として再認識されてきている。また、ジョーンズによるスピンモデルの概念が導入されてから約10年後、任意のスピンモデルがアソシエーションスキームのボーズ・メスナー代数に属するという定理が示され、ますますアソシエーションスキームの重要性が増している。本論文はこれら2つの側面からのアソシエーションスキームの研究成果をまとめたもので、全編4章からなる。

第1章は序論であり、本研究の背景及び目的を述べている。

第2章では、各関係が強正則グラフになっているようなアソシエーションスキームがアモルファスであるかというイワノフの予想に関する研究である。この予想は正しくないことがファンダムによって示されているが、反例がただ1つしか知られていない。この反例が散在的なのか、それとも数多くまたは無限系列として存在するものの1つなのか現時点では不明である。このような反例の構成を試みる方法を記述した後、実際に2つ目の反例を構成し、ファンダムによる例とこの例がある無限系列に属していることを示唆した。

第3章では、第2章で示された反例に加え、さらにもう1つの例を構成した。またこのような例の構成がなぜ成功するのか、デザイン理論をアソシエーションスキームの指標表に援用することで、ある程度の理由付けを行った。

第4章では、これまでに知られていたスピンモデルの構成を拡張し、新しいスピンモデルがアダマール行列から構成できることを示した。非対称なスピンモデルに対して指数と呼ばれる値が定義される。容易に構成できるアーベル群上のスピンモデルを除けば、これまで知られているスピンモデルの指数は1または2であった。ここでは任意の偶数を指数として持つようなスピンモデルがアダマール行列から構成できることを示した。この構成法は、指数2のアダマールモデルの構成法を特殊な場合として含んでいる。また、この方法で新しく得られたスピンモデルが知られているスピンモデルのクロネッカー積にはなっていない、非自明な構成法になっていることも合わせて証明した。

以上要するに本論文は、アソシエーションスキームに関し、アモルファスという性質に関するイワノフの予想の反例という、特異なもの存在を示したこと、および新しいスピンモデルの構成方法を示したことにより過去の研究成果を拡張するという重要な成果を含んでおり情報基礎科学および数学の発展に寄与するところが少なくない。よって、本論文は、博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。