

Study on the Tilted Caratheodory Classes and Their Applications

著者	王 利梅
号	16
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	情博第497号
URL	http://hdl.handle.net/10097/59903

氏名 (本籍地)	王 利梅
学位の種類	博士 (情報科学)
学位記番号	情博第 497 号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) 情報基礎科学専攻
学位論文題目	Study on the Tilted Caratheodory Classes and Their Applications (傾斜カラテオドリ族とその応用に関する研究)
論文審査委員	(主査) 東北大学教授 須川 敏幸 東北大学教授 久保 英夫 東北大学教授 藤原 耕二 東北大学教授 日合 文雄

論文内容の要旨

This thesis is concerned with some extremal problems in the theory of geometric function. The purpose of Chapter 1 is to review and assemble for late reference some of the general principles which underlie the present thesis. We open it with some well-researched subclasses of analytic functions defined both analytically and geometrically. The use of linear methods is well established in the areas of complex analysis. After giving the definitions of convex hull and extreme points of a set, we quote the Krein-Milman theorem which is a fundamental tool in the study of linear extremal problems. We end this chapter with a brief instruction to the convolution theory. Especially we include the duality principle, which has been successfully in the past to solve a number of extremal problems for various sets of univalent functions.

Chapter 2 is devoted to investigate some properties of the titled Caratheodory classes P_λ . Firstly we characterize the functions belonging to the class P_λ from different aspects. A linear relation between the elements of P_λ and P_0 implies that the functions in P_λ can be described in terms of integral and subordination. We show also that P_λ can be regarded as the dual and the second dual sets of some families of analytic functions. In section 2, the extreme points of P_λ are deduced directly from those of P_0 . With the aid of these extreme points, the sharp estimates of some functionals over P_λ , for instance, the n -th coefficient functional, the distortion and growth functionals, have been obtained. For the cases of other functionals, we summarize some other methods to deal with those extremal problems. The estimate of $|z p'(z)/(p(z)+i\lambda)|$ for $p \in P_0$ was considered by some authors. The sharp estimate was obtained in a paper of Ruscheweyh and Singh by a variational method but the extremal functions were not given there. In Theorem 3.11 of the present chapter, we estimate the functional $|z p'(z)/p(z)|$ with $p \in P_\lambda$ which is actually equivalent to the above

problem. By using fundamental functional analysis, we obtain the sharp upper bound of $|zp'(z)/p(z)|$ for $p \in P_\lambda$ and give all the extremal functions which make the estimate sharp.

Some applications of the titled Caratheodory classes P_λ in the theory of geometric functions are shown in Chapter 4. We will consider the estimates of some non-linear functionals on λ -spirallike functions, close-to-convex functions with argument λ and analytic functions whose derivative is in P_λ . Some of these results improve the previous corresponding estimates.

The next chapter is devoted to deal with the coefficient estimates of the class $CL(\lambda)$ consisting of close-to-convex functions with argument λ . Goodman and Saff proved that for an analytic function $f(z) = z + \sum a_n z^n \in CL(\lambda)$, $|a_n| \leq 1 + (n-1)\cos(\lambda)$ holds for $n=2,3,\dots$. The inequality is sharp when $n=2$ or $\lambda=0$. For the general cases n and $\lambda \neq 0$, the problems are buried deeply. By using linear methods, we could resolve this problem. Our results can be shown easily to imply Goodman and Saff's estimate. In particular, we obtained the explicit estimate of the third coefficient.

The last chapter is to investigate some subordination problems and boundedness of λ -Robertson functions class $R(\lambda)$. We open with a subordination relation between convex functions due to MacGregor. Since λ -Robertson functions can be considered as a kind of extension of convex functions, Kim and Srivastava raised an analogous subordination problem related to $R(\lambda)$. With regard to this open problem, I could show its truth within a smaller open disc by making use of Briot-Bouquet differential subordination. In addition, the radii of starlikeness and spirallikeness of $R(\lambda)$ can be obtained. Kim and Sugawa studied the boundedness of λ -Robertson functions. They actually showed that λ -Robertson functions are bounded under the condition that $\cos(\lambda) < 1/2$ or $\lambda=0$. They also remarked that the number $1/2$ can not be replaced by any constant larger than $1/\sqrt{2}$. In view of the linear relation between λ -spirallike functions and λ -Robertson functions, we could show that $1/\sqrt{2}$ is best possible.

論文審査結果の要旨

本論文のテーマは傾斜カラテオドリ族に関する研究である。カラテオドリ族というのは、複素平面における単位円板上の正則関数で実部が正、原点において値 1 をとるように正規化されたもの全体のことを言う。このようなクラスはここ約 100 年にわたって深く研究され、フーリエ解析や、スペクトル理論など数学や工学分野など様々な場面で広く用いられてきた。幾何学的関数論においても、このクラスは特別に重要な役割を果たしている。たとえば、単位円板上の正則関数 $f(z)$ が星型あるいは凸型であるための必要十分条件は、 $zf'(z)/f(z)$ あるいは $1+zf''(z)/f'(z)$ がカラテオドリ族に属することとして与えられる。

この「実部が正」という条件は右半平面に値を取ることに言い換えられるが、この条件を少し一般にして、右半平面を原点のまわりに角度 λ だけ傾けた半平面に属するという条件に置き換え、原点で値 1 をとるという正規化条件はそのままにしたものを傾斜カラテオドリ族と呼ぶことにする。このとき、上記の星型、凸型を特徴付ける条件においてカラテオドリ族を傾斜カラテオドリ族に置き換えると、それぞれ λ 螺旋型、 λ -Robertson と呼ばれる函数族になる。

ただ、星型や凸型函数の場合には容易であった問題も、これらの拡張に対しては困難になり、これまでは必ずしも満足すべき結果が得られていなかった。本研究では傾斜カラテオドリ族に対していくつかの研究の方向を提示し、それによりこの族の函数に対して基本的な評価式を導き、さらにそれをいくつかの具体的な問題に適用した。

本論文は全編英文で書かれ、全 6 章からなる。

1 章は序論である。

2 章は本論の準備のための章であり、コンパクト凸集合の端点集合による再生性、Ruscheweyh, Sheil-Small らによる双対性原理など函数解析学に根ざした深い結果など、後に必要になる事柄がまとめられている。

3 章では、2 章の結果を使って傾斜カラテオドリ族に属する函数についての係数評価、増大度評価、歪曲評価など基本的な最良評価式がいくつか導かれている。これらのうちあるものは実質的に既に知られていた結果であるが、いくつかは新しい知見を与えており、オリジナルな結果である。以下でもいくつか応用が述べられているが、本章の結果は汎用性が高く、他にも多くの応用を持つものと期待される。

4 章では応用として、 λ 螺旋型函数、角度 λ の近接凸型函数の最良の増大度評価や歪曲評価など、有用な結果を導いている。これらのうちのいくつかは新しい結果である。

5 章では角度 λ の近接凸型函数の係数評価を調べている。このような評価は、Goodman-Saff によって 1978 年に最初に与えられたが、第 2 係数を除いては最良の結果ではなく長らく未解決問題となっていた。本論文ではこれらについて一般係数の最良評価を与えることに成功し、Goodman-Saff の問題を解決した。特に第 3 係数の場合には非常に具体的に詳しくその限界値が調べられている。

6 章では 3 章の結果を λ -Robertson 函数に対して応用し、いくつか重要な結果を得ている。特に、有界性を保証する λ の最良限界を与えることに成功し、Kim-Sugawa により 2007 年に発表された論文において提示された問題を解決した。

傾斜カラテオドリ族は多くの重要な応用を持つにもかかわらず、その扱いの難しさのため、これまで深い研究が避けられてきた。しかし、本論文では双対性原理のような函数解析などの深い知識に基づく高度な方法により、多くの最良評価が見いだされ、それによっていくつかの未解決問題が解決された。幾何学的関数論は、流体を記述する等角写像や脳の地図作成などの効率的な 2 次元データ埋入などの応用の可能性があり、本論文の結果も将来的にはそのような方面に応用されることが期待される。よって、本論文の成果は情報基礎科学および数学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。