Determinacy of infinite games and reverse mathematics

著者	根元 多佳子
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第2471号
URL	http://hdl.handle.net/10097/50736

氏名・(本籍)	根　元　多佳子（ね もと た か こ）
学位の種類	博　　士（理　　学）
学位記番号	理博第２４７１号
学位授与年月日	平成21年３月25日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Determinacy of infinite games and reverse mathematics （無限ゲームの決定性と二階算術）
論文審査委員	（主査）教　授　田　中　一　之 准教授　山　崎　　武 教　授　服　部　哲　弥

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

abstract

This thesis consists of two parts. The first part treats determinacy in (classical) reverse mathematics and the second part treats determinacy in intuitionistic mathematics.

The first part investigates the logical strength of the determinacy of infinite games in the Cantor space in terms of second order arithmetic. We define new determinacy schemata inspired by the Wadge classes of Polish spaces and show that the following equivalences hold over the system $\mathbf{RCA}^*_0$, which consists of the axioms of discrete ordered semi-ring with exponentiation, Δ^0_1 comprehension and Σ^0_0 induction, and which is known as a weaker system than the popular base theory $\mathbf{RCA}_0$:

- Δ^0_1-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ Σ^0_1-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{WKL}^*_0$;
- $\mathbf{Bisep}(\Delta^0_1, \Sigma^0_1)$-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{WKL}_0$;
- $(\Sigma^0_1 \wedge \Pi^0_1)$-$\mathbf{Det}^*_0$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{ACA}_0$;
- Δ^0_2-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ Σ^0_2-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{ATR}_0$;
- $\mathbf{Bisep}(\Delta^0_1, \Sigma^0_2)$-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{ATR}_0 + \Sigma^1_1$ induction;
- $\mathbf{Bisep}(\Sigma^0_1, \Sigma^0_2)$-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{sep}(\Sigma^0_1, \Sigma^0_2)$-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ Π^1_1-$\mathbf{CA}_0$;
- $\mathbf{Bisep}(\Delta^0_2, \Sigma^0_2)$-$\mathbf{Det}^*$ $\leftrightarrow$ Π^1_1-$\mathbf{TR}_0$;

where $\mathbf{Det}^*$ stands for the determinacy of infinite games in the Cantor space.

We also work on complete determinacy, which asserts that, for a given game G, we have the set W with

the following properties:

- $s \in W \to$ player I wins $\varphi(f)$ if the game starts at s,
- $s \notin W \to$ player II wins $\varphi(f)$ if the game starts at s,

We investigates the logical strength of the complete determinacy as well. We show the following equivalence over $\mathbf{RCA}_0^*$:

- $\mathbf{WKL}_0^* \leftrightarrow \Delta_1^0$-**comp.Det***;
- $\mathbf{ACA}_0 \leftrightarrow \Sigma_1^0$-**comp.Det**$^* \leftrightarrow (\Sigma_1^0 \wedge \Pi_1^0)$-**comp.Det***;
- $\mathbf{ATR}_0 \leftrightarrow \Delta_2^0$-**comp.Det**$^* \leftrightarrow \Delta_1^0$-**comp.Det**;
- Π_1^1-$\mathbf{CA}_0 \leftrightarrow \Sigma_2^0$-**comp.Det**$^* \leftrightarrow$ **sep**(Σ_1^0, Σ_2^0)-**Det**$^* \leftrightarrow \Sigma_1^0$-**Det** $\leftrightarrow (\Sigma_1^0 \wedge \Pi_1^0)$-**Det**;
- Π_1^1-$\mathbf{CA}_0 \leftrightarrow$ **Bisep**(Δ_2^0, Σ_2^0)-**comp.Det**$^* \leftrightarrow \Delta_2^0$-**Det**;

where **comp.Det** stands for complete determinacy in the Baire space and where **comp.Det*** stands for complete determinacy in the Cantor space. In particular, we see that determinacy does not always imply complete determinacy.

The second part investigates determinacy in Brouwerian intuitionistic mathematics. We give some examples of games such that the character of this mathematical setting — the lack of the law of excluded middle and the adoption of continuity principle — makes the behavior of determinacy drastically different from that in the classical setting.

論文審査の結果の要旨

本博士論文は、現代集合論の中心的な研究題材である無限ゲームの決定性に関するもので、その様々なバージョンを集合論より弱い土台の上で精密に分類している。論文の構成は、大きく2つに分かれ、前半の研究は「逆数学」と呼ばれる現代数学基礎論の研究プログラムに沿って行われ、後半は直観主義論理の上で行われる。最後に、今後の研究課題をまとめている。

無限ゲームとは、2人のプレーヤーⅠ、Ⅱが交互に数を選んで作る無限数列が予め与えられた集合Aに入ればプレーヤーⅠが勝ち、そうでなければプレーヤーⅡが勝ちとするものである。どちらかのプレーヤーに必勝戦略がある場合に、集合Aは決定的であるという。ゲームは、集合Aの複雑さ、乃至それを定義する論理式の形によって分類される。任意の自然数を選ぶゲームの決定性については、J. Steelと田中による先行研究があり、本論文で主に扱うのは、選ぶ数を0と1のみに限定した二進ゲームについてである。

本論文では、二進ゲームの決定性について、二つの観点から研究を行っている。一つはwadge階層による決定性の細かい階層を定義し、Π^1_1内包公理などと同値になる主張を得ている。もう一つは、各点で必勝法を持つか否かを判断することが、全体の必勝法の存在より真に強い公理を必要とする場合があることを示している。

後半では、直観主義論理を土台にして、二進ゲームの決定性について調べている。とくに、競技者の戦略が制限されるようなゲームの前決定性について調べ、古典理論に基づく主張と比較した。

これらの結果は、根元多佳子が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、根元多佳子提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。