Weak systems of determinacy and inductive definitions

著者	OULD MOHAMED SALEM MOHAMED YAHYA
号	49
学位授与番号	2224
URL	http://hdl.handle.net/10097/39275

氏名・（本籍）	ウルド モハメド　　　　モハメド ヤーヤ OULD MOHAMED SALEM MOHAMED YAHYA
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第２２２４号
学位授与年月日	平成18年３月24日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Weak systems of determinacy and inductive definitions （弱い決定性公理と帰納的定義）
論文審査委員	（主査）教授　田中一之 教授　服部哲弥，森田康夫

論　文　目　次

Contents

1. Introduction
2. Preliminaries
    2.1 Subsystems of second order arithmetic
    2.2 Countable coded ω-models
3. Determinacy of Finite levels of the difference hierarchy
    3.1 Σ^0_2-Det and Σ^1_1-ID
    3.2 $(\Sigma^0_2)_k$-determinacy and $[\Sigma^1_1]^k$-ID
4. Inductive definition and infinite games over the Cantor space
    4.1 Π^1_1-MI and Π^1_1-CA
    4.2 $(\Sigma^0_2)_{k+1}$-Det* and $(\Sigma^0_2)_{k+1}$-Det
5. Determinacy of Transfinite levels of the difference hierarchy
    5.1 $(\Sigma^0_2)_{\mathbb{N}}$-Det and $[\Sigma^1_1]^{\mathbb{N}}$-ID
    5.2 $(\Sigma^0_2)_{\alpha}$-Det and $[\Sigma^1_1]^{\alpha}$-ID
6. Determinacy, comprehension and induction
    6.1 Δ^0_3-Det and Δ^1_2-MI + Π^1_3-TI
    6.2 Δ^0_3-Det versus Π^1_2-CA$_0$

論　文　内　容　要　旨

For $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, we associate a two-person *game* G_A as follows: player Ⅰ and player Ⅱ alternately choose natural numbers (starting with I) to form an infinite sequence $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and Ⅰ (resp. Ⅱ) wins iff $f \in A$ (resp. $f \notin A$). A *winning strategy* is a map $\sigma : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ such that the player is guaranteed to win every play f in which he played $f(n) = \sigma(f[n])$ whenever it was his turn to play. We say that A is *determinate* if one of the players has a winning strategy for A. For a class C of subsets of $\mathbb{N}$, we use C-determinacy to denote the axiom stating that any set in C is determinate. In [4] and [5], the determinacy has been investigated up to Σ^0_2 or alternatively F_σ. It is known that Σ^0_4-determinacy can not be proved in the full system of the second arithmetic.

In this thesis, we treat the the games whose complexity lies between Σ^0_2 (F_σ) and Δ^0_3 ($F_{\sigma\delta} \cap G_{\sigma\delta}$). We compare the determinacy of such games with various iterations of inductive definition. Our investigations fit in a broader program of research known as *reverse mathematics*, initiated by Friedman in 70's, whose ultimate goal is to answer the following question: What kinds of axioms are needed to prove ordinary mathematical theorems. See [4] for more information about this program.

We briefly describe the content of this thesis. In Chapter 2 we give some preliminaries. In Chapter 3, we first show that Σ^0_2-determinacy deduces (non-monotone) Σ^1_1-inductive definition, and combining this with the main result of Tanaka [5], we deduce that monotone and non-monotone Σ^1_1-operators have the same power. Then, we also introduce the inductive definition of a combination of finitely many Σ^1_1-operators and show its equivalence to the determinacy of Boolean combinations of Σ^0_2-sets. Chapter 4 focusses on infinite games over the Cantor space and compare the determinacy of such games with the determinacy of their counterparts over the Baire space. In chapter 5, we treat the infinite level of the difference hierarchy over G_δ-sets. We also prove an effective version of the Hausdorff-Kuratowski theorem on Δ^0_3-sets, which provides us with a characterization of Δ^0_3-determinacy. In the last chapter, we use some model-theoretic techniques to show that the determinacy is independent from various axioms of second order arithmetic.

References

[1] M.O. Medsalem and K. Tanaka, *Infinite games and set existence axioms*, Proof Theory and Computation Theory, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, No. 1442, Kyoto (2005), pp. 115-121.

[2] M.O. Medsalem and K. Tanaka, *Δ^0_3-determinacy, comprehension and induction,* submitted for publication.

[3] M.O. Medsalem and K. Tanaka, *Weak determinacy and iterations of inductive definitions,* to appear in the Proceedings of Computable Prospects of Infinity, I.M.S., Singapore, World Scientific, 2006.

[4] S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic,* Springer (1999).

[5] K. Tanaka, *Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis I: Δ^0_2-games,* Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 36 (1990), pp. 481-491. *Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis* II: *Σ^0_2-games,* Annals of Pure and Applied Logic 52 (1991), pp. 181-193.

論文審査の結果の要旨

モハメドヤーヤ・ウルド・モハメドサレムは，本博士論文において，現代集合論の中心的概念の一つである無限ゲームの決定性について，その論理的複雑さを二階算術の諸公理と比較し，いくつかの新しい結果を得た。無限ゲームとは，2人のプレーヤー I, II が交互に数を選んで作る無限数列が，予め与えら れた集合 A に入ればプレーヤー I が勝ち，そうでなければ プレーヤー II が勝ちとするものである。どちらかのプレーヤーに必勝戦略がある場合に，集合 A は決定的であるという。ゲームは，集合 A の複雑さ，乃至それを定義する論理式の形によって，Σ^0_nゲームなどに分類される (nは自然数)。Σ^0_1，Σ^0_2ゲームについては，J. Steel と 田中による先行研究があり，本論文で主に扱うのは，Σ^0_3 の一部分である Δ^0_3 のゲームについてである。

論文全体は6章で構成され，最初の2章は導入と準備にあてている。第3章は，Σ^0_2 集合から差演算を有限回繰り返すことで得られる集合の決定性について調べている。Σ^0_2 ゲームについての田中の先行研究をベ ースにして，そのような集合の決定性は，Σ^1_1 作用素を有限個組み合わせた帰納的定義の新しい公理と同値になることを示した。

第4章は，プレーヤーたちが 0, 1 のみを選ぶ特殊なゲームに対して，第3章の結果を再検討する。このようなゲームの決定性は，従来のゲームよりずっと複雑さが下がることが示された。第5章は，第3章の結果を，Σ^0_2 集合から差演算を超限回繰り返すものに拡張する。その決定性は，Σ^1_1 作用素を超限個組み合わせた帰納的定義と同値になる。一方，Δ^0_3 集合が，Σ^0_2 集合から差演算を超限回繰り返すことで構成されるという定理（Theorem 5.10）があるので，Δ^0_3 ゲーム の決定性と Σ^1_1 帰納的定義の超限的組合せが同値になることが結論さ れる。

第6章は，Δ^0_3 ゲームの決定性が従来の内包公理では，うまく特徴付けられないことを証明する。とくに，Δ^1_3 内包公理は Δ^0_3 決定性を導かず，Δ^0_3 決定性は Δ^1_2 内包公理を導かない。これらは，β モデルをコード化して体系内で操ることによって証明される。

以上の結果は，モハメドヤーヤ・ウルド・モハメドサレムが自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，モハメドヤーヤ・ウルド・モハメドサレム提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。