弾力性・半弾力性の基本法則と新物価指数算式

水　谷　一　雄

1

本稿は，弾力性（elasticity）並びに半弾力性（semi-elasticity）演算を特性づける基本法則を考察し，これを応用することによって新物価指数算式を導出し，その経済学的意味を検討することを目的とする。

いま実変数 t の $I〔t_1, t_2〕$ なる区間において定義せられた正値 C^∞-函数 $y(t)$ および $z(t)$ の夫々の集合 $\{y(t)\}$ および $\{z(t)\}$ を考え，z は，また，y の $I'〔y', y''〕$ なる区間において定義せられた C^∞-函数であるとし，これらの集合に属するいずれの函数も，次の〔I〕に示す〔(i)～(v)〕なる性質を有する作用素 f_t を作用せしめることを許すものとする。

基本法則：

〔I〕
(i) $f_t(y_1y_2) = f_t(y_1)+f_t(y_2)$

(ii) $f_t(y_1+y_2) = \lambda f_t(y_1)+\mu f_t(y_2)$

$$\lambda=\frac{y_1}{y_1+y_2},\quad \mu=\frac{y_2}{y_1+y_2}$$

(iii) c が t に無関係なるとき $f_t(c)=0$；逆に $f_t(c)=0$ ならば c は t に無関係である。

(iv) $f_t(y)\cdot f_y(z) = f_t(z)$

(v) $f_t(t) = 1$

然るときは，t の C^∞-函数の集合 $\{y(t)\}$ に対して，これを y の連続函数 $f_t(y)$，〔$y \neq 0$〕の集合 $\{f_t(y)\}$ に写す一意連続写像 f_t なる作

用素は $(f_t=)\dfrac{d\log}{d\log t}$ によって代表せられる。

〔証　明〕

(a) $\dfrac{d\log}{d\log t}$ を $f_t{}^0$ にて示す。

これが〔(i) ～ (v)〕を充たすことは明らかである。

次に，仮りに

$$f_t(y)=\log y(t)-\log y(t_o)$$

とおくと，このような作用素は，(i) および (iii) を充たすが，(ii) (iv) (v) を充たさないことは明らかである。また，仮りに

$$f_t(y)=\frac{\log y(t)-\log y(t_o)}{\log t-\log t_o}$$

とおくと，このような作用素 f_t は，(i) (iii) (iv) を充たすが，(ii) に関しては，明らかに

$$f_t(y_1+y_2)=\frac{\log\Big(y_1(t)+y_2(t)\Big)-\log\Big(y_1(t_o)+y_2(t_o)\Big)}{\log t-\log t_o}$$
$$\fallingdotseq\lambda f_t(y_1)+\mu f_t(y_2)$$

であり，このような f_t は (ii) を充たさないことは明らかである。

(b) 次に，y が t に対して独立でない場合，すなわち，常数でない場合には，(iii) によって，$f_t{}^0(y)\fallingdotseq 0$ であるから，f_t は一般の f_t として

(1) $$f_t(y)=\alpha(y,t)\cdot f_t{}^0(y)$$

なるものを考えよう。然るとき $\alpha(y,t)$ は 明らかに t の連続函数であって，y が与えられるとき一意的に定まる。

いま c を任意の常数とすれば，(i) および (iii) によって

$$f_t(cy)=f_t(c)+f_t(y)=f_t(y)$$
$$f_t{}^0(cy)=f_t{}^0(c)+f_t{}^0(y)=f_t{}^0(y)$$

然るに (1) によって

$$f_t(cy)=\alpha(cy,t)\cdot f_t{}^0(cy)$$
$$f_t(y)=\alpha(y,t)\cdot f_t{}^0(y)$$

であるから，c のすべての実数値について

$$\alpha(cy, t) = \alpha(y, t)$$

でなければならない。故に，$\alpha(x, t)$ は x に無関係でなければならない。よって

$$(2) \qquad f_t(y) = \alpha(t) \cdot f_t{}^0(y)$$

である。而して，この関係は，考察の対象となる函数集合 $\{ y(t) \}$ に属する如何なる $y(t)$ についても成立するが故に，特に $y(t) = t$ なる函数をとれば，(v) により

$$1 = f_t(t) = \alpha(t) \cdot f_t{}^0(t) = \alpha(t)$$

となる。故に (2) により $f_t{}^0(y) \fallingdotseq 0$ なる限り

$$(3) \qquad f_t(y) = f_t{}^0(y) = \frac{d\log y}{d\log t}$$

なることを知る。

次に $f_t{}^0(y) = 0$ なる場合には，$y(t) = c$ すなわち $y(t)$ が t に無関係なる場合である。従って，当然 $f_t(y) = 0$ である。また，かかる場合，すなわち $f_t(y) = 0$ なる場合，換言すれば x が t に無関係なる場合に限って $f_t{}^0(y) = 0$ であるから，$f_t{}^0(y) = 0$ なる場合にも (3) すなわち $f_t(y) = f_t{}^0(y) = \dfrac{d\log y}{d\log t}$ は妥当する。

以上を綜合して，基本法則〔I〕の性質〔(i) ～ (v)〕によって特徴づけられる一意連続写像としての作用素 f_t は $\dfrac{d\log}{d\log t}$ によって代表せられる。$\dfrac{d\log}{d\log t}$ が性質〔(i) ～ (v)〕を必要かつ十分条件とする如く，一般に f_t は基本法則〔I〕の〔(i) ～ (v)〕を必要かつ十分条件とする意味において，f_t は $\dfrac{d\log}{d\log t}$ と同型の作用素であり，その意味において $\dfrac{d\log}{d\log t}$ によって代表せられる。いま

$$(4) \qquad \left(\frac{y}{t}\right) = \frac{d\log y}{d\log t}$$

なる記号を用いることとしよう。これは，経済学において，t に関する y の弾力性と稱せられるものである。

いま，$f_t = \dfrac{d\log}{d\log t} = \left(\dfrac{\quad}{t}\right)$ なる作用素を $y(t)$ に施すことを，t について y の弾力性を採ると呼ぶこととすれば，〔I〕の〔(i) ～ (v)〕は，

このような演算の基本法則を示すものと言うことができる。

次に，この基本法則から当然演繹せられる系とも言うべき法則を考察するに当って，先ず,n 次元の実 Euclid 空間 R^n の点 $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots,$ $x_n)$ の構成する領域 D 上での実数値 C^∞ - 函数 $y(x)$, $z(x)$ などの夫々の集合 $\{y(x)\}$, $\{z(x)\}$ などを考え，この n 個の実変数 $\{x_i\}$ は，いずれも実数 t の区間 $I〔t_1, t_2〕$ 上の C^∞ - 函数であるとしよう。従って，これらの n 個の t の C^∞ - 函数 $\{x_i(t)\}$ は R^n における路 $x(t)$ を表わすものとしよう。

然るとき，

$$(5)\quad \left(\frac{y}{t}\right)_{x(t)} = \left.\frac{d\log y}{d\log t}\right|_{x(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\log y}{\delta\log x_i}\cdot\frac{d\log x_i}{d\log t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{y}{x_i}\right)\cdot\left(\frac{x_i}{t}\right)\right) \quad 〔x(t) = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)〕$$

なる記号を以て[1]，路 $x(t)$ に沿うて採った t についての y の弾力性を表わすこととすれば，(5) も基本法則〔I〕によって特徴づけられると共に，普通の $\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{d\log y}{d\log t}$ も (5) の意味の $\left(\frac{y}{t}\right)$ も共に，次の算式を充たすことは明らかである。

〔II〕

$$\text{(vi)}\quad \left(\frac{cy}{t}\right) = \left(\frac{y}{t}\right) \quad \left[\begin{array}{l} c \text{ が } t \text{ と無関係なるとき。} \\ \text{以下同然。} \end{array}\right]$$

$$\text{(vii)}\quad \left(\frac{y^n}{t}\right) = n\left(\frac{y}{t}\right) \quad 〔n \text{ は } t \text{ と無関係}〕$$

$$\text{(viii)}\quad \left(\frac{e^y}{t}\right) = y\left(\frac{y}{t}\right)$$

$$\text{(ix)}\quad \left(\frac{c^y}{t}\right) = \left(\frac{e^y}{t}\right)\log_e c = y\left(\frac{y}{t}\right)\log_e c$$

$$\text{(x)}\quad \left(\frac{c^{yz}}{t}\right) = z\left(\frac{c^y}{t}\right) + y\left(\frac{c^z}{t}\right)$$

2

次に，実変数 t の $I〔t_1, t_2〕$ なる区間において定義せられた正値 C^∞ - 函数 $y(t)$ および $z(t)$ の夫々の集合 $\{y(t)\}$ および $\{z(t)\}$ を考え，z は

また，y の $I'[y', y'']$ なる区間において定義せられた C^{∞}－函数であるとし，これらの集合に属するいずれの函数も，次の〔III〕に示す〔(i)～(v)〕なる性質を有する作用素 g_t を作用せしめることを許すものとする。

基本法則

$$
\text{〔III〕}\begin{cases}
(1^\circ) & g_t(y_1y_2) = g_t(y_1) + g_t(y_2) \\
(2^\circ) & g_t(y_1+y_2) = \lambda g_t(y_1) + \mu g_t(y_2) \\
 & \qquad \lambda = \dfrac{y_1}{y_1+y_2},\ \mu = \dfrac{y_2}{y_1+y_2} \\
(3^\circ) & c \text{ が } t \text{ に無関係なるとき } g_t(c)=0 \text{ であり，逆に } g_t(c) \\
 & = 0 \text{ ならば，} c \text{ は } t \text{ に無関係である。} \\
(4^\circ) & t\cdot g_t(y)\cdot y\cdot g_y(z) = t\cdot g_t(z) \\
(5^\circ) & t\cdot g_t(t) = 1
\end{cases}
$$

然るときは，t の正値 C^{∞}-函数の集合 $\{y(t)\}$ に対して，これを y の連続函数 $g_t(y)$ の集合 $\{g_t(y)\}$ に写す一意連続写像 g_t なる作用素は $(g_t =)\dfrac{d\log}{dt}$ によって代表せられる。

〔証　明〕

(A)　$\dfrac{d\log}{dt}$ なる作用素を g_t° にて示す。

これが〔(1°)～(5°)〕からなる基本法則〔III〕を充たすことは明らかである。

次に，仮りに

$$g_t(y) = \log y(t) - \log y(t_0)$$

とおくと，このような作用素は，(1°) および (3°) を満足せしめるが，(2°) (4°) (5°) を満足しないことは明らかである。

また，仮りに

$$g_t(y) = \frac{\log y(t) - \log y(t_0)}{\log t - \log t_0}$$

とおくと，このような作用素 g_t は，(1°) (3°) (5°) を満足せしめるが，(2°) (4°) に関しては，明らかに，これを満足せしめない。

(B) 次に，y が t に対して独立でない場合，すなわち，t に対して常数

ではない場合には，(3°) によって $g_t^0(y) \neq 0$ であるから，一般の g_t なる作用素として

$$(6) \quad g_t(y) = \beta(y, t) \cdot g_t^0(y)$$

なるものを考えよう。然るとき，明らかに β は t の連続函数であり，y を定めると一意的に定まるものである。

いま，c を任意の常数 (t, y に関して) とすれば，(1°) および (3°) によって

$$g_t(cy) = g_t(c) + g_t(y) = g_t(y)$$

$$g_t^0(cy) = g_t^0(c) + g_t^0(y) = g_t^0(y)$$

然るに (6) によって

$$g_t(cy) = \beta(cy, t) \cdot g_t^0(cy) = \beta(cy, t) \cdot g_t^0(y)$$

$$g_t(y) = \beta(y, t) \cdot g_t^0(y)$$

であるから，すべての c の実数値について

$$\beta(cy, t) = \beta(y, t)$$

なるべきことを知る。よって β は y と無関係でなければならない。故に

$$(7) \quad g_t(y) = \beta(t) \cdot g_t^0(y)$$

とおくことができる。よって t の任意の実数値 〔$t_1 \leqq t \leqq t_2$〕 について，(7) の両辺に t を乗じ，$x = t$ とおけば，(5) によって

$$1 = tg_t(t) = \beta(t) \cdot tg_t^0(t) = \beta(t)$$

であるから，$g_t^0(y) \neq 0$ なる限り

$$(8) \quad g_t(y) = g_t^0(y) = \frac{d\log y}{dt}$$

なることを知る。

次に，(3°) より $g_t^0(y) = 0$ なる場合は $y = c$，すなわち，y が t に無関係，従って $g_t(y) = 0$ である。また，このように $g_t(y) = 0$ すなわち y が t に無関係なる場合に限って $g_t^0(y) = 0$ であるから，(8) は $g_t^0(y) = 0$ なる場合にも妥当する。

以上を綜合して，基本法則〔Ⅲ〕の性質〔(1°)～(5°)〕によって特徴づけられる一意連続写像としての作用素 g_t は $\frac{d\log}{dt}$ によって代表せられる。$\frac{d\log}{dt}$ が性質〔(1°)～(5°)〕を必要かつ十分条件とする如く，一般に g_t は基本法則〔Ⅲ〕の〔(1°)～(5°)〕を必要かつ十分条件とする意味において，g_t は $\frac{d\log}{dt}$ と同型の作用素であり，その意味において $\frac{d\log}{dt}$ によって代表せられる。いま

(9)
$$\left[\frac{y}{t}\right]=\frac{d\log y}{dt}$$

なる記号を用いることとし，これを経済学において用いる場合には，t についてのyの半弾力性と稱することとしよう。

いま，$g_t=\frac{d\log}{dt}=\left[\frac{\quad}{t}\right]$ なる作用素を $y(t)$ に施すことを，t について y の半弾力性を採ると呼ぶこととすれば，〔Ⅲ〕の〔(1°)～(5°)〕は，このような演算の基本法則を示すものと言うことができる。

次に，この基本法則から当然演繹せられる系とも言うべき法則を考察しよう。既述の通り（本文32頁），$\{x_i(t)\}$ は R^i における路 $x(t)$ を表わすものとしよう〔$i=1\sim n$〕。

然るとき

(10)
$$\left[\frac{y}{t}\right]_{x(t)}=\left.\frac{d\log y}{dt}\right|_{x(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\log y}{\delta\log x_i}\cdot\frac{d\log x_i}{dt}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{y}{x_i}\right)\right)\cdot\left[\frac{x_i}{t}\right]\qquad〔x(t)=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)〕$$

なる記号を以て，路 $x(t)$ に沿うて採った t についての y の半弾力性を表わすこととすれば，(10) も，また，基本法則〔Ⅲ〕によって特徴づけられると共に，普通の $\left[\frac{y}{t}\right]=\frac{d\log y}{dt}$ も (10) の意味の $\left[\frac{y}{t}\right]_{x(t)}$ も共に，次の算式を充たすことは明らかである。

$$
〔\mathrm{IV}〕\begin{cases}
(6^\circ) & \left[\dfrac{cy}{t}\right]=\left[\dfrac{y}{t}\right] & \left[\begin{array}{l}c\text{ が }t\text{ と無関係なるとき。}\\ \text{以下同然。}\end{array}\right] \\
(7^\circ) & \left[\dfrac{y^n}{t}\right]=n\left[\dfrac{y}{t}\right] & 〔n\text{ は }t\text{ と無関係}〕 \\
(8^\circ) & \left[\dfrac{e^y}{t}\right]=y\left[\dfrac{y}{t}\right] & \\
(9^\circ) & \left[\dfrac{c^y}{t}\right]=\left[\dfrac{e^y}{t}\right]\log_e c = y\left[\dfrac{y}{t}\right]\log_e c & \\
(10^\circ) & \left[\dfrac{c^{yz}}{t}\right]=z\left[\dfrac{c^y}{t}\right]+y\left[\dfrac{c^z}{t}\right] &
\end{cases}
$$

3

上述の弾力性および半弾力性に関する記号ならびに算式〔(i)～(x)〕，〔(1°)～(10°)〕を用いると，弾力性あるいは半弾力性に関する計算は甚だ簡単明瞭となり，学者の動もすれば，誤れる所を正すことができる。

例えば，J. M. Keynes は，その「一般理論」において[2)]

$$
(11)\qquad e=e_e e_p=e_d-(1-e_w)\,e_d e_e e_o
$$

なる式を示しているが，これは

$$
(12)\qquad e=e_d-e_d e_o'(1-e_w)
$$

でなければならないことは，上記の記号および算式を用いると容易に判明し，何故にそのような誤りを犯したかも容易に推察し得ることは，かつて論じたところである。[3)] また，同書283頁に示されている

$$
(13)\qquad \frac{1-e_{or}}{e_{er}}=-\frac{N_r\phi''(N_r)}{p_{wr}\,\{\phi'(N_r)\}^2}
$$

なる式も

$$
(14)\qquad \frac{1-e_{or}}{e_{er}}=-\frac{N_r\phi''(N_r)}{\phi'(N_r)}
$$

の方が優れていることも容易に判明する。これも同じ機会に詳説したから茲にこれを省略する。

A. C. Pigou の弾力性の定義は，常識とは逆であることは周知の通りであるが，Pigou は，例えば

(15) $$w = F'(x) = \left\{ \frac{d\psi\{\phi(x)\}}{dx} - \frac{df\{\phi(x)\}}{dx} \right\}$$

なる式に基づいて

(16) $$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{m-1}\left[\left\{\frac{m}{E_f} - \frac{1}{E_s}\right\}\frac{w}{q}\right] + \frac{1}{\eta}$$

なる式を導くに，$E_d = F'(x) \div \{xF''(x)\}$ なる定義に従い，

(17) $$E_d = \left\{ \frac{d\psi\{\phi(x)\}}{dx} - \frac{df\{\phi(x)\}}{dx} \right\} \div x\left\{ \frac{d^2\psi\{\phi(x)\}}{dx^2} - \frac{d^2f\{\phi(x)\}}{dx^2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{d\psi\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}} - \frac{df\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}} \right\}\phi'(x)$$

$$\div x\left[\left\{ \frac{d\psi\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}} - \frac{df\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}} \right\}\phi''(x) + \left\{ \frac{d^2\psi\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}^2} - \frac{d^2f\{\phi(x)\}}{d\{\phi(x)\}^2} \right\}\{\phi'(x)\}^2\right]$$

なる関係から出発している。唯だPigou が(16) 式に到った道程の詳細は，これを知る由縁もないが，このような微分法の手段を以てすれば，相当な複雑な計算過程を経過しなければならないであろうことは，想像に難くはないのである。[4]

これを上述の弾力性の演算法則を用いると

(15) $$w = \frac{d\psi\{\phi(x)\}}{dx} - \frac{df\{\phi(x)\}}{dx}$$

すなわち

(18) $$w = \left\{ \frac{d\psi(y)}{dy} - \frac{df(y)}{dy} \right\}\frac{d\phi}{dx}$$

から出発して，x について両辺の弾力性を採れば

(19) $$\left(\frac{w}{x}\right) = \left(\frac{\psi'(y) - f'(y)}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{\phi'}{x}\right)$$

である。Pigou の記号は次のような意味をもつ。

x ：労働量すなわち総雇傭量

w ：実質賃金

$y = \phi(x)$：労働量（x）なるときの生産物量（y）なることを示す生産函数

$\psi'(y)$：生産物に対する実質需要価格（賃銀財の量にて示す）

$f'(y)$：生産量 (y) に含まるる原料の実質供給価格，故に

$\psi'(y) - f'(y)$：加工に対する実質需要価格

従って

$\overline{E}_d = \left(\frac{w}{x}\right) = \left(\frac{F'(x)}{x}\right)$：総雇傭量 (x) についての実質賃銀 w すなわち労働需要価格の弾力性

$\overline{E}_f = \left(\frac{\psi'(y)}{y}\right)$：生産量$(y)$についての生産物需要価格の弾力性

$\overline{E}_s = \left(\frac{f'(y)}{y}\right)$：生産量 $y)$についての原料の実質価格の弾力性

$\overline{\eta} = \left(\frac{\phi'(x)}{x}\right)$：労働量$(x)$についての限界生産力の弾力性

$\frac{w_m}{q} = \left(\frac{\phi(x)}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)$：雇傭労働量 (x) についての総生産量 $y = \phi(x)$ の弾力性

外に Pigou は $\psi'(y) \div f'(y)$ なる比率を m にて表わしている。従って

$$\frac{\psi'}{\psi'-f'} = \frac{m}{m-1}\ ;\ \frac{-f'}{\psi'-f'} = \frac{-1}{m-1}$$

である。尤も，Pigou は E_d, E_f, E_s, η を用い，これらを以て $\overline{E}_d$, $\overline{E}_f$, $\overline{E}_s$, $\overline{\eta}$ に当る弾力性を表わした心算になっているようであるが，Pigou のは $\overline{E}_d = 1/E_d$, $\overline{E}_f = 1/E_f$, $\overline{E}_s = 1/E_s$, $\overline{\eta} = 1/\eta$ であって，普通に用いる弾力性の逆数になっていることに注意しなければならない。

さて，(19) 式を上述の記号および演算の公式を用いて表わすと

$$\overline{E}_d = \left\{\frac{m}{m-1}\overline{E}_f - \frac{1}{m-1}\overline{E}_s\right\}\frac{w_m}{q} + \overline{\eta} \tag{20}$$

となる。Pigou の記号を以て，これを表わし，Pigou の記号が $\overline{E}_d, \cdots\cdots$, $\overline{\eta}$ などと逆数関係にあることを考慮に入れると，直ちに(16)式が得られる。(16) 式と (20) 式とを比較すれば，Pigou の弾力性の定義が如何に不自然であるかが一目瞭然であろう。また，微分法によって (16) 式を演繹するに当って，$(\psi' \div f')$ なる比率を m と表わすことなどは奇想天外の妙想とも言うべきものであるが，弾力性作用素の公式による演繹においては，至極当然の記号と言わなければならない。

このように，弾力性作用素は，経済学論究上において，相当広く用いられたが，それに比して，半弾力性作用素は，経済学において，従来，左程広くは用いられておらず，従って，半弾力性なる概念もまた名称も無かった。併し，全然使用せられなかった訳ではない。半対数図表は，多くの場合，半弾力性一定なる現象を基準とする考察が，その根底にあると言ってよいであろう。また，近時，国際経済理論上，例えば，為替安定性理論などにおいて，半弾力性などの名称は用いられていないが，その実質において半弾力性を用いての考察がなされているのを往々にして見かけるのである。

4

さて，ここでは，以上において展開した半弾力性概念を利用して新物価指数算式を導出し，その経済理論的基礎を考察することとしよう。

われわれは，Keynes に倣って，物価指数なるものは「物価水準の変化を示す指数である」との立場を採るものであることは，かつて本誌において明らかにした。[5] 換言すれば，π_i，π_jを，それぞれ第 i 年および第 j 年の物価水準とすれば，第 i 年基準第 j 年の物価指数 P_{ij} は

(21) $$P_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i}$$

にて与えられる。数量指数 Q_{ij} も同様の意味を有するものとする。

このように物価指数，数量指数を定義したことから，直ちに従う物価指数，数量指数の性質，すなわち，それらが充たすべき条件の一つは，それらが

〔I〕　循環テスト

(22) $$P_{ij}\,P_{jk}\,P_{ki} = 1$$

(23) $$Q_{ij}\,Q_{jk}\,Q_{ki} = 1$$

を充たすことである。[6]

次に，物価指数にしても，数量指数にしても，それらが単なる指数，或いは天文指数ではなく，それぞれ経済理論的意味をもつものであるから，経済理論の要求を充たすものでなければならない。すなわち

〔II〕 因子条件

を充たすものでなければならない。これは，第 t 年の全商品の取引総額を v_t とすれば

(24) $$v_t = \sum_{s=1}^{n} p_t^s q_t^s$$

である。ただし

(25) p_t^s：第 t 年の第 s 商品の価格

(26) q_t^s：第 t 年の第 s 商品の取引数量

であるとする。この場合

(27) $$V_{ij} = \frac{v_j}{v_i}$$

を第 i 年基準第 j 年の価額指数と言うのであるが，因子条件は

(28) $$P_{ij}\,Q_{ij} = V_{ij}$$

を要求するものである。この因子条件は，Irving Fisher の因子転逆検定よりも広い条件であることに注意しなければならない。Irving Fisher においては，P_{ij} なる物価指数に対して，$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ なる置換を施すと Q_{ij} が得られる場合に (28) なる条件を充たすことを要求するものであって，この意味において，Fisher の条件は因子転逆検定 (Factor Reversal Test) と呼ばれたのであるが，ここに言うところの因子条件は P_{ij} の算式と Q_{ij} の算式とは互に独立の場合に (28) が成立することを要求するものなのである。

次に，物価水準の成立およびその変動に，影響を及ぼすと考えられる価格または取引数量の変動が問題とせられる商品は，その考察の全期間に亘って，質的に不変のものでなければならない。これが，物価指数および数量指数の充たすべき条件として

〔III〕　連続性テスト

の要求せられる所以である。

技術の進歩，風俗習慣の変遷と共に，この需要の変化に応ずべく，商品の品質は改善を加えられるのみならず，新製品が続々，市場に登場する。かくて，明治の初年から昭和35年までの物価水準の変遷を表わす指数を作るに当っては，明治初年頃の物価水準に影響を与えるものとしては，各種ランプの価格あり，覗き芝居の見料があったであろうが，螢光燈や，ラジオ，テレビの受信機・受像機の価格は無かったのに反して，昭和の今日では逆である上に，同じラジオの受信機と言っても20年前のものと今日のそれとでは品質が大いに異っている。それを唯だ商品の取引せられるに任せてそれらの価格を綜合して物価水準を表わすものを作成したとすれば，われわれは，相異なる商品の価格から綜合せられた異質の物価水準，比較すべからざる物価水準を比較することになる。価格指数は，そのようなものであってはならない筈である。物価指数は，あくまで同一商品の価格の変化を綜合した物価水準の変遷を示すものでなくてはならない。これが物価指数の連続性の要求の意味するところである。

〔IV〕　美人コンクールの錯誤の是正

物価指数または数量指数を作成するに当って注意しなければならないことは，知らず識らずの間に不当な加重を施すようなことがないように——換言すれば，美人コンクールの錯誤に陥るようなことのないように戒慎しなければならない。

真珠の女王を選定するに当って全国七地区からの代表候補者各1名合計7名に対して，有名な社会評論家など5人の審査員 J_1，J_2，……，J_5 が次のような評点を与えたものと仮定しよう。

この結果，第1表に示された通り，候補者 C_6 が第1位となり真珠の女王に選ばれたのであった。しかし，この第1表について，注目せらるべきことは，審査員 J_5 の各候補者に与えた評点の甚だ特異なることである。

第　1　表

審査員＼候補者	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	合　計	平　均
C_1	80	75	80	85	30	350	70
C_2	75	70	75	80	30	330	66
C_3	75	70	70	80	30	325	65
C_4	70	80	70	75	30	325	65
C_5	70	65	70	70	30	305	61
C_6	65	65	65	70	100	365	73
C_7	60	65	65	70	30	290	58
合　計	495	490	495	530	280	2,290	458
平　均	70.7	70.0	70.7	75.7	40.0	341.4	65.4

もし，審査員中にこの審査員 J_5 が加わっていなかったとすれば，候補者 C_1 が第1位となったであろうことは余りにも明らかであろう。然るにも拘らず，ただ1人，審査員 J_5 が加わった爲に，C_6 が第1位となった原因は，審査員 J_5 が各候補者に与えた評点の散布度が，他の審査員のそれに比較して，異状に大であるということに基因しているのである。故に，これら5人の審査員の与えた評点をそのまま合計したり，平均したりすることは，暗黙の間にその散布度に対応する加重値を賦与したことになるのである。このために散布度の非常に大である J_5 の評点が，異常の重要度を与えられて，これによって大勢が決せられたために，C_6 が第1位となるに至ったのである。

よって，このような歪曲を是正するためには，各審査員の評点の平均値並びに散布度を等しからしめるような変換を施して，すべての審査員の評点を公平に考慮に入れるようにすればよいのである。いわゆる標準化はその一つの方法である。もし，審査員の評点に加重値を賦与する必要がある場合には，このように，各審査員の評点を標準化した後に，加重平均を施

すという方法で始めて，適当な加重値を賦与することが出来るのである。

すなわち，第1表における評点の歪曲を是正するために，それらの評点を次の公式に従って標準化（Standardize）すれば第2表を得る。

第　2　表

審査員＼候補者	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	合　計	平　均
C_1	149	94	188	165	−41	555	111
C_2	69	0	87	76	−41	195	38
C_3	69	0	−14	76	−41	90	18
C_4	−11	187	−14	−13	−41	108	22
C_5	−11	−94	−14	−102	−41	−262	−52
C_6	−92	−94	−115	−102	245	−158	−32
C_7	−172	−94	−115	−102	−41	−524	−105

$$(15)\qquad g_i^m = \frac{h_i^m - \bar{h}^m}{\sigma^m}$$

ここに，

h_i^m は審査員 J_m が候補者 C_i に与えた評点

$\bar{h}^m$ は審査員 J_m の評点の算術平均

σ^m は審査員 J_m の評点の標準偏差

であり，g_i^m は，かくして標準化せられたところの評点で審査員 J_m の候補者C_iに与えた評点を示す。

この第2表において明らかであるように，各審査員の評点を標準化し，各審査員の評点を公平かつ平等に考慮に入れると，候補者 C_1 が依然として（審査員 J_5 が加わっていないときと同様）第1位であり，第1表で第1位であった候補者 C_6 は第5位に過ぎない（審査員 J_5 が加わっていない場合は C_6 は第6位である)。

この公平には第5位となるべき者が第1位となるというような，いわゆ

る美人コンクールの錯誤に陥らぬように注意することは，従来は，物価指数作成上あまり注意せられなかったようであるが，このような錯誤に陥らぬようにすることは，物価指数作成上にも勿論注意が必要である。

〔V〕 部分分割テスト

上来〔I〕から〔IV〕まで物価指数ならびに数量指数の充たすべき条件を挙げて来たのであるが，これらの条件は勿論，取引せられる商品の全体について成立つのみならず，例えば，産業別などに分類した場合にも，それぞれの分類区画ごとに〔I〕から〔IV〕までの条件が成立しなければならない。分類の最も極端な場合は，商品の一つ一つの場合であるが，この場合には，勿論すべての条件が成立する。むしろ逆に，商品が一つの場合に成立つこれら〔I〕～〔IV〕の条件は商品何個のグループについても成立すべきであると言わなければならない。

尚，ここに一言しなければならないことは，従来，物価指数や数量指数の作成に当って，その算式は

〔VI〕 比例性テスト

〔VII〕 測定単位変更可能性

の条件を充たすことを要求せられたのであるが，われわれの新しい立場においては，各商品の重要性は年々に変化しつつあるものと想定するものであり，これは，その国民経済における国民効用函数或は社会選択度函数とも言うべきものの形が刻々に変化しつつあるに基づくと想定するのであるから，この立場においては，物価指数，ならびに数量指数に比例性テストおよび測定単位変更可能性を充たすことを要求すべきではないこと，むしろ，比例性が成立せず，測定単位変更可能性が無いことが普通であって，それらの成立するのは，上述の函数の形の変化しなかった特別の場合と考えられなければならないことに注意しなければならない。

然らば，上述の〔I〕～〔V〕の条件を満足せしめる物価指数算式，数量指数算式とは如何なるものであるか。

先ず，第 t 年の第 s 商品の価格を p_t^s，第 t 年の第 s 商品の取引数量を q_t^s とし，これらが考察の期間〔$t=1\sim T$〕，全商品〔$s=1\sim n$〕に亘って，全部与えられているものとする。

すなわち，価格マトリックス〔p_t^s〕および数量マトリックス〔q_t^s〕が与えられているのであるから，価額ヴェクター $\{v_t\}$，〔$t=1\sim T$〕は自づから算出せられる。すなわち，第 t 年の取引総額 v_t は

$$(29)\qquad v_t=\sum_{s=1}^{n}v_t^s=\Sigma\, p_t^s q_t^s$$

である。ここに $v_t^s=p_t^s q_t^s$ は第 t 年における第 s 商品の取引額を表わす。また Σ は $s\,(=1\sim n)$ について総計することを意味するものとする（以下同然）。

然るとき，第 t 年の物価水準 π_t，数量水準 ρ_t は，略々

$$(30)\qquad \log\pi_t=\Sigma\,\alpha_t^s\log p_t^s$$

$$(31)\qquad \log\rho_t=\Sigma\,\alpha_t^s\log q_t^s$$

によって与えられるものと考える。ただし，加重値 α_t^s は

$$(32)\qquad \alpha_t^s=v_t^s\Big/v_t=p_t^s q_t^s\Big/\Sigma p_t^s q_t^s$$

である。従って，第 i 年基準第 j 年の粗物価指数 P_{ij}，および粗数量指数 Q_{ij} は，それぞれ

$$(33)\quad \log P_{ij}=\log\pi_j-\log\pi_i=\Sigma\,\alpha_j^s\log p_j^s-\Sigma\,\alpha_i^s\log p_i^s$$

$$(34)\quad \log Q_{ij}=\log\rho_j-\log\rho_i=\Sigma\,\alpha_j^s\log q_j^s-\Sigma\,\alpha_i^s\log q_i^s$$

にて与えられる。これに基づいて，求める新物価指数算式 $\mathbf{P}_{ij}$ および新数量指数算式 $\mathbf{Q}_{ij}$ は

$$(35)\quad \log\mathbf{P}_{ij}=\frac{1}{2}\{\log P_{ij}+\log V_{ij}-\log Q_{ij}\}$$

$$(36)\quad \log\mathbf{Q}_{ij}=\frac{1}{2}\{\log Q_{ij}+\log V_{ij}-\log P_{ij}\}$$

によって算出せられるのである。

従来，世界において発表せられている物価指数にして，循環テストを充

たす指数算式によって算出せられているものは筆者寡聞にして，まだこれらの存在するを聞いたことがない。循環テストを充たさない物価指数算式は如何なる不都合を生ずるのであるか。これを，次の簡単な一例について見よう。

我が国民経済内において取引せられる商品が唯だ二つであるとし，1935年，その他の年における価格は，次の第3表の如くであったとしよう。

第　3　表

年　次	第Ⅰ商品の価格	第Ⅱ商品の価格
1935年	50円	200円
41	50	600
44	150	1,000
47	5,000	28,000
53	15,400	53,000

我が国民経済内にて取引せられる商品は唯だこの二商品のみであるとすれば，1935年を基準としての，各個別指数およびそれを綜合した物価指数は第4表の如くである。ただし，物価指数は，各年における二商品それぞれの個別価格指数の，算術平均 (P^M) および幾何平均 (P^G) によって算出せられた二種を示した。

第　4　表　(1935年基準指数)

年　次	第Ⅰ商品指数	第Ⅱ商品指数	物価指数 P^M	物価指数 P^G
1935年	100	100	100	100
41	100	300	200	173
44	300	500	400	387
47	10,000	14,000	12,000	11,832
53	30,800	26,800	28,800	28,764

いま，これを，改めて，第3表について，1944年を基準とした第4表のような指数の表を算出すると第5表の如くである。

第　5　表　(1944年基準指数)

年　次	第Ⅰ商品指数	第Ⅱ商品指数	物価指数 P^{M}	物価指数 P^{G}
1935年	33.3	20.0	$26.\dot{6}$	25.8
41	33.3	60.0	$46.\dot{6}$	44.7
44	100.0	100.0	100.0	100.0
47	3333.3	2800.0	$3066.\dot{6}$	3055.1
53	10266.7	5360.0	7813.3	7427.1

この第4表と第5表とを比較して判かることは，第4表の P^{M} 欄の数字と第5表の P^{M} 欄の数字との関係を見るに，第4表において400であった1944年の数字が，第5表においては100となったのであるから，どの年の数字についても $\frac{100}{400}$ になっている筈であるのに，例えば1935年についても1941年についても

$$26.\dot{6} \fallingdotseq 100 \times \frac{100}{400}\,;\quad 46.\dot{6} \fallingdotseq 200 \times \frac{100}{400}$$

等々であって，何れも，第4表の P^{M} の欄の数字の $\frac{100}{400}$ になっているのは基準の1944年以外にはないのである。これに反して，P^{G} の欄は，第4表では1944年が387(.28)であるから第5表では P^{G} の欄の数字は，単に1935年のみならず総ての数字が，第4表の P^{G} の欄の数字の $\frac{100}{387.28}$ 倍になっているのである。このことは，P^{G} すなわち幾何平均なる指数算式は，循環テストを充たすこと，および，循環テストを充たす算式が基準年度変更可能性を有することを示すものに外ならない。ひいて，これは，循環テストを充たさない指数算式を以て算出された物価指数は，例えば，国民所得の Deflator として用いることができないことを示すのである。

われわれの新指数算式にあっては，先ず，粗指数が，それぞれ

$$(37)\ \log(P_{ij}P_{jk}P_{ki}) = (\log\pi_j - \log\pi_i) + (\log\pi_k - \log\pi_j) + (\log\pi_i - \log\pi_k) = 0$$

$$(38)\ \log(Q_{ij}Q_{jk}Q_{ki}) = (\log\rho_j - \log\rho_i) + (\log\rho_k - \log\rho_j) + (\log\rho_i - \log\rho_k) = 0$$

すなわち

$$(39)\qquad P_{ij}P_{jk}P_{ki} = 1$$

$$(40)\qquad Q_{ij}Q_{jk}Q_{ki} = 1$$

であるから，当然 $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{Q}_{ij}$ も循環テストを充たすことは明らかであろう。

次に，われわれの新物価指数算式が因子条件を充たすことは

$$(41)\ \log\mathbf{P}_{ij}\mathbf{Q}_{ij} = \frac{1}{2}\{\log P_{ij} + \log V_{ij} - \log Q_{ij}\} + \frac{1}{2}\{\log Q_{ij} + \log V_{ij} - \log P_{ij}\} = \log V_{ij}$$

なることから明らかである。

更に，加重値は，(第 t 年の) 第 s 商品のもの ($\alpha(s,t)$) が，その第 s 商品の (第 t 年の) 取引価額 $v_t{}^s = p_t{}^s q_t{}^s$ に比例するのであるから，上述の粗指数算式，従ってわれわれの新指数算式が〔V〕の部分分割テストに合格することは証明するまでもないであろう。

〔III〕の連続性テストに対しては，われわれは，考察の期間〔$t=1\sim T$〕中に現われ取引された商品は，すべて考察の全期間に亘って存在したものと考えることによって連続性テストは充たされることになる。ただ，螢光燈の如きものは，明治初年における取引数量0であるから，当然，加重値が0となる。従って，この場合，螢光燈の明治初年の価格 $p_1{}^r$，取引数量 $q_1{}^r$ は有限確定の或る値 ($\neq 0$) であるが，加重値が $\alpha(r,1) = 0$ なるものと規約して連続性テストを満足せしめることとすれば，新生産物の出現，旧生産物の取引市場よりの消失は，このような加重値の変化として解決することができる。また，品質の変化を来たした商品は一種の複合財と考え，粗指数算式従って新指数算式が部分分割テストを満足せしめるもの

であることを勘案し，品質の変化は，そのような複合財の，部分財よりの構成比率の変化すなわち加重値の変化として処置するとすれば，この粗指数算式従って新指数算式は連続性テストを充たすものとなることは明らかである。

最後に，われわれの粗指数算式従って，新指数算式が美人コンクールの錯誤を是正していることについては，次のような考察が，それの理解の一助となるであろう。これは，美人コンクールの是正なるものは，加重値が当を得たものとなることによって，目的が達成せられるからである。

これには，先ず第 t 年の取引総額の構成を見るに

(42) $v_t = \Sigma v_t^s$ 〔Σは s について1から n まで総計することを示す。〕

ここに

(43) $$v_t^s = p_t^s q_t^s$$

である。

いま (42) の両辺に対し，t についての半弾力性を採れば，基本法則 (2°)によって

(44) $$\frac{d\log v_t}{dt} = \Sigma\, \alpha(s, t)\, \frac{d\log v_t^s}{dt}$$

である。ただし，ここに，加重値 $\alpha(s, t)$ は

(45) $$\alpha(s, t) = \frac{v_t^s}{v_t} = \frac{p_t^s q_t^s}{\Sigma\, p_t^s q_t^s}$$

である。ここで，(44) 式の両辺を t について k から l まで積分すると，左辺は

(46) $$I = \int_k^l \frac{d\log v_t}{dt} dt = \log v_l - \log v_k = \log V_{kl}$$

である。これに対し，右辺の方は

(47) $$I = \Sigma I^s$$

(48) $$I^s = \int_k^l \alpha(s, t) \frac{d\log v_t^s}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^{m} I_i^s$$

ここに I_i^s は ($t_1 = k$, $t_m = l$ として)

(49) $$I_t^s = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha(s, t) \frac{d\log v_t^s}{d\,t}\, dt$$

である。然るに (49) 式において，$\dfrac{d\log v_t{}^s}{dt}$ は，明らかに積分可能であり，$\alpha(s,t)$ は $[t_i, t_{i+1}]$ において単調函数である程に，$[k, l]$ なる区間が，多数の小区間 $[t_i, t_{i+1}]$ に分たれたとすると，積分の平均値の第二定理によって，

$$
\begin{aligned}
(50)\qquad I_i{}^s = {} & \alpha(s,t_i)\int_{t_i}^{\xi_i}\frac{d\log v_t{}^s}{dt}dt \\
& + \alpha(s,t_{i+1})\int_{\xi_i}^{t_{i+1}}\frac{d\log v_t{}^s}{dt}dt \\
& - \alpha(s,t_{i+1})\log v_{t_{i+1}}{}^s - \alpha(s,t_i)\log v_{t_i}{}^s \\
& + \{\alpha(s,t_i) - \alpha(s,t_{i+1})\}\log v_{\xi_i}{}^s
\end{aligned}
$$

である。よって (47) 式の I は (47)，(48)，(50) によって

$$
\begin{aligned}
(51)\qquad I = \sum_{s=1}^{n} I^s = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} I_i{}^s = \sum_{s=1}^{n} \{ & \alpha(s,l)\log v_l{}^s \\
& - \alpha(s,k)\log v_k{}^s\} + R
\end{aligned}
$$

$$
(52)\qquad R = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left\{\Bigl(\alpha(s,t_i) - \alpha(s,t_{i+1})\Bigr)\log v_{\xi_i}{}^s\right\}
$$

然るに，加重値函数の性質上，従来の物価指数論においては，これがすべて一定と考えられ来たった程に $\alpha(s,t_i)$ なるものは $\alpha(s,t_{i+1})$ と余り大なる差がない性質のものである。而も，t_i の値如何により，また s の値の異なるに従って，或いは単調増加函数であったり，或いは，単調減少函数であったりする。従って，実用上 $R=0$ と見做して先ず大した誤差はないと考えられる。特に，加重値の性質上 $\sum_s \alpha(s,t)=1$ なることを考えると，このことは，一層明かであろう。

第一に，$R=0$ なる場合，または，そのように見做すことが許される場合には，(44) を t について k から l まで積分することによって

$$
\begin{aligned}
(53)\ \log V_{kl} & = \Sigma\,\alpha(s,l)\log v_l{}^s - \Sigma\,\alpha(s,k)\log v_k{}^s \\
& = \Sigma\,\alpha(s,l)\log p_l{}^s - \Sigma\,\alpha(s,k)\log p_k{}^s \\
& \quad + \Sigma\,\alpha(s,l)\log q_l{}^s - \Sigma\,\alpha(s,k)\log q_k{}^s
\end{aligned}
$$

ただし，ここに，Σ は $\sum_{s=1}^{n}$ を示す。従って

$$(54)\qquad V_{kl}=P_{kl}\,Q_{kl}=\frac{\pi_l}{\pi_k}\cdot\frac{\rho_l}{\rho_k}$$

ここに

$$\log\pi_t=\Sigma\,\alpha(s,t)\log p_t^s$$

$$\log\rho_t=\Sigma\,\alpha(s,t)\log q_t^s$$

である。

すなわち $R=0$ なる場合には

$$P_{kl}=\mathbf{P}_{kl},\qquad Q_{kl}=\mathbf{Q}_{kl}$$

であって，粗指数が因子条件を充たす。

第二に，$R=0$ と見做すことが許されない場合には，（本文45頁）の

$$(35,36)\quad\begin{cases}\log\mathbf{P}_{kl}=\dfrac{1}{2}\{\log P_{kl}+\log V_{kl}-\log Q_{kl}\}\\[2ex]\log\mathbf{Q}_{kl}=\dfrac{1}{2}\{\log Q_{kl}+\log V_{kl}-\log P_{kl}\}\end{cases}$$

なる変換によって，その誤差を調整して因子条件を充たすものとすることが，できるのである。

さて，消費経済理論において，対象たる期間の総支出額 M_t および，各財の市場価格 $p_t{}^1$，$p_t{}^2$，……，$p_t{}^n$ が与えられた場合，経済主体は効用函数

$$u_t=u(q_t{}^1,\ q_t{}^2,\ \cdots\cdots,\ q_t{}^n)$$

を最大ならしめるように各財を需要するものとすれば，各財の需要量は

$$(55)\qquad p_t{}^1q_t{}^1+p_t{}^2q_t{}^2+\cdots\cdots+p_t{}^nq_t{}^n=M_t$$

$$(56)\qquad \frac{u_t{}^1}{p_t{}^1}=\frac{u_t{}^2}{p_t{}^2}=\cdots\cdots=\frac{u_t{}^n}{p_t{}^n}=\lambda(t)$$

の解として得られる。ここに $u_t{}^s=\dfrac{\delta u_t}{\delta q_t{}^s}$ である。

(56) の中の任意の一式を書き改めて

$$(57)\qquad u_t{}^s=\lambda(t)\,p_t{}^s$$

とすれば（$\lambda(t)$ は周知の通り第 t 年の貨幣の社会的限界効用である）

$$(58)\qquad \Sigma\alpha(s,t)\log u_t{}^s=\log\lambda(t)+\Sigma\,\alpha(s,t)\log p_t{}^s$$

これを

$$(59)\qquad \log U_t = \log \lambda(t) + \log \pi_t$$

と表わし〔$\log U_t = \Sigma\, \alpha(s,t) \log u_t{}^s$〕

$$(60)\qquad U_{kl} = \frac{U_l}{U_k}\,,\quad \Lambda_{kl} = \frac{\lambda(l)}{\lambda(k)}$$

なる記号を用いて，

U_{kl}：第 k 年基準第 l 年の社会的効用指数

Λ_{kl}：第 k 年基準第 l 年の貨幣の社会的効用指数

を表わすものとすれば

$$(61)\qquad U_{kl} = \Lambda_{kl}\, P_{kl}$$

が得られる。これによって，例えば $U_{kl} = 1$ なる場合においてのみ，P_{kl} は貨幣の価値（限界効用）の変化を逆比例的に表現するものと言い得る。

さて，ヴェクター $q_t = (q_t{}^s)$,〔$s = 1 \sim n$〕は，n 次元の Euclid 空間R^n を形成すると考えられるが，(56) 式から明らかであるように，消費経済均衡点においては，この空間 R^n における無差別曲面への接平面の方程式は

$$(62)\qquad \lambda(t)\Sigma\, p_t{}^s q_t{}^s = c(t)$$ 〔$\lambda(t), c(t)$ は p, q に対して独立〕

〔Σ は $\sum_{s=1}^{n}$ を意味する。以下同然〕

このことは一方において，ヴェクター$q_t = (q_t{}^s)$ および効用函数

$$(63)\qquad u_t = u_t(p, q) = \gamma(t)$$ 〔$\gamma(t)$ は p, q に無関係〕

を与えたとき，費用

$$(64)\qquad \Sigma p_t{}^s q_t{}^s = \min$$

ならしめる $p_t = (p_t{}^s)$ を求めると

$$(65)\qquad \bar{u}_t{}^s = \mu(t)\cdot q_t{}^s \qquad \left[\bar{u}_t{}^s = \frac{\delta u_t}{\delta p_t{}^s}\right]$$

を得ることを容易に類推せしめる。これから容易に

$$(66)\qquad \Sigma\, \alpha(s,t) \log \bar{u}_t{}^s = \log \mu(t) + \Sigma\, \alpha(s,t) \log q_t{}^s$$

なることが知られる。よって

$$
(67)\quad \begin{cases}
\log \overline{U}_t = \Sigma\alpha(s,t)\log \overline{u_t}^s \\
\log \rho_t = \Sigma\alpha(s,t)\log q_t^s \\
\log \overline{U}_{kl} = \log \overline{U}_l - \log \overline{U}_k \\
\log M_{kl} = \log\mu(l) - \log\mu(k) \\
\log Q_{kl} = \log \rho_l - \log \rho_k
\end{cases}
$$

なる記号を用いると

$$
(68)\qquad \overline{U}_{kl} = M_{kl}\,Q_{kl}
$$

なる関係が得られ，数量指数についても（61）に対応するものが得られる。[7]

註 1）$\left(\left(\frac{y}{x_t}\right)\right) = \frac{\delta \log y}{\delta \log x_t}$ を x_t についての y の偏弾力性と名づけることとする。

2）John Maynard Keynes: The General Theory of Employment, Interest and Money, London, 1936, p. 305.

3）拙著：「数学的思惟と経済理論」，209頁以下。

4）中山伊知郎・久武雅夫両教授著「経済の数理」には微分法による（12）の導来が詳細に示されている。拙著「数学的思惟と経済理論」，195頁以下参照。

5）拙稿：「新物価指数算式とその背景」（本誌第1巻 第1号所収），67頁参照。ただし，その論文における71頁より73頁までの所説は不正確の箇所を含んでいるので本論文末尾の所説を以てそれに代える。

6）拙稿：「物価指数論一斑」（神戸大学経済学研究年報7 所収），3頁以下参照。

7）各種の商品の数量を共通単位で測り得るものたらしめる方法は，特定の技術の下における標準労働の一人時間の作出するその商品の分量を当該商品の測定単位とする方法，または貨幣の1単位が買得るその商品の分量を当該商品の測定単位とする方法など，種々の方法が考えられるが　前者の場合には

$\mu(t)$ は第 t 年の標準労働一人時間の効用（限界）を表わし，後者の場合には，第 t 年の貨幣一単位の（限界）効用を表わすものと解釈ができる。併し，効用函数が t と共に変わると考える吾々の立場においては，測定単位変更可能性および比例性を満足せしめることを断念せねばならなかつたように，これらの解釈は必ずしも満足なものとは言えない。