新物価指数算式とその背景

水　谷　一　雄

J. M. keynes は，その著 "A Treatise on Money" において，[1] "The price of a composite commodity which is representative of some type of expenditure, we shall call a ***Price-level***; and the series of numbers indicative of changes in a given price-level we shall call ***Index-numbers***. と言っている。

かく Keynes は，物価指数を定義して，特定の物価水準の変化を示す一連の数を言うとしているのであるが，これは，物価指数の通説的な定義とみなすことができるであろう。而して， Keynes は，その際，このような物価水準なるもの【特に貨幣の購買力を（逆方向に）反映するものとしての】，それを測定するについての理論的ないし実際的困難は別として，ここに定義した物価水準なるものが，一つの明確なる思惟の対象として厳存することには，何等の疑念のないものであるとしている。

ただ，彼が，物価水準を定義して，特定のタイプの消費支出を代表する複合財（a composite commodity）の価格であるとしているのに対しては，若干の注意が必要である。すなわち，彼は，"…and the appropriate index-number is of the type sometimes designated as the Consumption Index. It follows that Purchasing Power must always be defined with reference to a particular set of individuals in a given situation, namely those whose actual consumption furnishes us with our standard, and has no clear meaning unless this reference has been given," と言っているのであって，単に，漫然と，具体的に定まった不変の一組の財を複合財と言っているのではないことである。[2)]

若し，具体的に定まった不変の一組の財を"複合財"とし，これをqで表わし，これを購入するに必要な第t年の費用（qのt年の価額）を$E_t(q)$にて表わし，これを，第t年の物価水準 π_t と定義したとすれば，第0年基準の第1年の物価指数 P_{01} は，

$$P_{01}=\frac{\pi_1}{\pi_0}=\frac{E_1(q)}{E_0(q)}$$

であるが，これが正しくない物価指数であることは，一寸考えれば，すぐ判かることである。

何となれば，第0年において，価格体系が $p_0=(p^1{}_0,p^2{}_0,\cdots,p^n{}_0)$ のときに複合財$q=(q^1,q^2,\cdots,q^n)$を購入して$E_0(q)$を支払ったものとしよう。[3)] この場合，第1年に至って，価格体系が $p_1=(p^1{}_1,p^2{}_1,\cdots,p^n{}_1)$ に変ったにも拘わらず，高くなったものを第0年同様，多く買い，安くなったものを第0年同様少く買うようなことは，消費経済理論上，許せないことである。複合財qの効用を $u=u(q)$ にて表わせば，第0年において$E_0(q)$を支払って，効用uを得たのであるが，第1年に至っては，価格体系が変ったのであるから，uを得るためには，相変らずqを買わないでも，高くなったものは少くし，安くなったものは多く買ってuを得るように工夫すれば$E_1(q)$も支払わないでもuを得ることができるから，実際は$u=u(\bar{q})$のような別の複合財$\bar{q}$を買って$E_1(\bar{q})$を支払うであろう。そのときは必ず $E_1(q)>E_1(\bar{q})$ の筈である。依って，真の物価指数P_{01}は $\frac{E_1(q)}{E_0(q)}>\frac{E_1(\bar{q})}{E_0(q)}=P_{01}$ である筈であるからである。

Keynes も複合財と言ってはいるものの，上記のような効用的側面を無視している訳ではないことは，既に引用した文章において “Purchasing Power must always be defined with reference to a particular set of individuals in a given situation” と明言したところからも明かであろう。これは，同一複合財も評価主体の異るによって異り，また評価主体が同一でも環境の如何が問題となることを示しているのである。

しかし，それにも拘らず，物価水準なる明確に一義的な対象の存在を確言していることもまた注意されなければならない。

第 t 年の物価水準 π_t なるものは，理論的ないし実践的には，その測定把握が甚だ困難であるにしても，理念的には明確に客観的に存在するものと考えていることは明かである。

第 t 年の物価水準 π_t が一義的に明確な客観的存在であるとすれば，第 i 年基準の第 j 年の物価指数 P_{ij} は

(1)　$P_{ij}=\dfrac{\pi_j}{\pi_i}$

なるべきことは言を俟たない。

物価指数算式の充たすべき要件の一つ，いわゆる循環テスト (Circular Test) なるものは，この (1) の当然の帰結である。これは

(2)　$P_{ij}P_{jk}P_{ki}=1$

なることを要求しているのであるが，これは (1) を認める以上，いわば，論理必然的に

$$P_{ij}P_{jk}P_{ki}=\frac{\pi_j}{\pi_i}\times\frac{\pi_k}{\pi_j}\times\frac{\pi_i}{\pi_k}=1$$

と結論されることである。

ところが貨幣の購買力，したがって，それを逆方向的に反映している物価水準なるものを，評価主体に依存し，その環境に依存するものと考える

と，いわば，日本経済または世界経済というような，抽象的な全社会的唯一の評価主体の連続性を考えない限り，それは物価指数否定説に導かざるを得ないであろう。

或る論者は言う，名古屋から見た大阪の物価水準が名古屋の物価水準の1·25倍であるにしても，大阪から見た名古屋の物価水準は大阪の0·80倍である必然性はない。それは0·9倍であり得るし，また1·12倍でさえもあり得ると主張する。

これは評価の主観性を強調する結果であるが，このように評価主体の主観性を強調する立場においては，名古屋なる経済主体，ないし，大阪なる評価主体の評価を如何にして把握し得るかが問題とならざるを得ない。

現実の一つの評価は，名古屋経済が下した評価でもなければ，大阪経済の評価でもない。歴史社会的なる存在としての伊藤の昭和34年3月名古屋における評価であるか，田中の大阪における評価である。大阪経済なる評価主体の評価は，現実には昭和34年3月大阪の住民たる田中の評価，大下の評価，藤田の評価，西島の評価，……としてでなければ顕現し得ない。若し，評価の絶対主観性を強調し，比較可能性を拒否するならば，これらの個別的具体的な評価の比較可能性が拒否せられることとなり，これら個別的なる評価の綜合としての大阪経済の評価なるものの成立が拒否せられることとなるであろう。

これは，物価指数否定説とも言うべきものであろう。

Keynes も説いているように，それの測定方法あるいは，測定の困難性は別問題として，物価水準の一意客観的な存在を許容しなければならないのである。でなければ物価指数否定論とならざるを得ないからである。これは，換言すれば，日本経済というような全体的な一個の評価主体と，部分たる個別的な評価主体との関連は兎に角として，このような全体的評価

主体を許容しなければならない。この主体の評価の結果を表わす経済指標の一種としての効用指標を

(3) $u^t=u^t(q)$

とする。[4] これは勿論連続なる経済指標としての条件を充たすものとする。而して，この効用指標は年月の進み行くと共に必ずしも不変ではなく，u を規定する径数（parameters）が t の連続函数であることを示すために，u^t なる記号を用いたのである。

さて，u^t は Toylor 展開可能なる函数であるとし，$u^t(\bar{q}_t)$を $\bar{q}_t$ の近傍の任意の一点 q_t において展開すれば[5]〔ただし $\sum_r p_t^r q_t^r \neq \sum_r p_t^r \bar{q}_t^r$とする。また $\bar{q}_t$ の近傍の如何なる点 q_t においても $u^t(\bar{q}_t) \geqq u^t(q_t)$ とする〕

(4) $$u^t(\bar{q}_t)-u^t(q_t)=\sum_{r=1}^{n} u_r^t(\bar{q}_t^r-q_t^r)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_r\sum_s u_{rs}^t(\bar{q}_t^r-q_t^r)(\bar{q}_t^s-q_t^s)+R_1$$

ただし $u_r^t=\dfrac{\partial u^t}{\partial q_t^r}$，$u_{rs}^t=\dfrac{\partial^2 u^t}{\partial q_t^s \partial q_t^r}$である。

また，(4)を q_t^r にて偏微分して

(5) $$\frac{1}{2}\sum(\bar{u}_r^t-u_r^t)(\bar{q}_t^r-q_t^r)=\frac{1}{2}\sum_r\sum_s u_{rs}^t(\bar{q}_t^r-q_t^r)(\bar{q}_t^s-q_t^s)+R_2$$

が得られるから (4)−(5) によって

(6) $u^t(\bar{q}_t)u^t-(q_t)=\sum_r\frac{1}{2}(\bar{u}_r^t+u_r^t)(\bar{q}_t^r-q_t^r)+R_3$を得る。

ここに$\bar{u}_r^t=\dfrac{\partial u^t(\bar{q}_t)}{\partial q_t^r}$である。

第 i 年の効用指標において $u^t(\bar{q}_t)=u^t(\bar{q}_t), u^t(q_t)=u^t(q_t)$ なるものを選び〔q_i は $\bar{q}_i$の近傍において選ぶ〕，前記と同様にして

(7) $u^t(\bar{q}_i)-u^t(q_i)=\sum_r\frac{1}{2}(\bar{u}_r^i+u_r^i)(\bar{q}_i^r-q_i^r)+R_4$を得る。

然るに限界効用均等の法則によって貨幣の限界効用を $\bar{\mu}_t$, μ_t, $\bar{\mu}_i$, μ_i にて表わすとき,[6)]

(8) $\bar{u}^t_r = p^r_t \bar{\mu}_t, \quad u^t_r = p^r_t \mu_t,$

$\bar{u}^i_r = p^r_i \bar{\mu}_i, \quad u^i_r = p^r_i \mu_i$

であるから, (6)−(7)から, $\lambda_t = \bar{\mu}_t + \mu_t$ $\lambda_i = \bar{\mu}_i + \mu_i$ なる記号を用いて

(9) $\lambda_t \sum p^r_t(\bar{q}^r_t - q^r_t) = \lambda_i \sum p^r_i(\bar{q}^r_i - q^r_i) + 2(R_3 - R_4)$ を得る。ここにおいて,

(10) $\kappa = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_t}, \quad \mathrm{E}_t = \sum_r p^r_t q^r_t, \quad \tilde{\mathrm{E}}_t = \sum_r p^r_t \bar{q}^r_t$

$\mathrm{E}_i = \sum_i p^r_i q^r_i, \quad \tilde{\mathrm{E}}_i = \sum_r p^r_i \bar{q}^r_i, \quad R_5 = \dfrac{2}{\lambda_t \tilde{\mathrm{E}}_i}(R_3 - R_4)$

なる記号を導入すれば (9) から

(11) $\dfrac{\tilde{\mathrm{E}}_t}{\tilde{\mathrm{E}}_i} = \dfrac{\mathrm{E}_t}{\tilde{\mathrm{E}}_i} + \kappa\left(1 - \dfrac{\mathrm{E}_i}{\tilde{\mathrm{E}}_i}\right) + R_5,$

が得られる。

(11) において $u^i(\bar{q}_i) = u^t(\bar{q}_t)$ であるから, (11) の左辺は求めるところの第 i 年基準の第 t 年の物価指数に外ならない。これを P_{it} と表わせば

(12) $P_{it} = \dfrac{\tilde{\mathrm{E}}_t}{\tilde{\mathrm{E}}_i} = \dfrac{\sum p^r_t \bar{q}^r_t}{\sum p^r_i \bar{q}^r_i}$

である。ところで, 先ず, $\bar{q}_i$ なる点を選び, その近傍において, 非常に $\bar{q}_i$ に近く点 q_i を選んだとすれば

$$\tilde{\mathrm{E}}_i = \sum p^r_i \bar{q}^r_i \fallingdotseq \sum p^r_i q^r_i = \mathrm{E}_i$$

であるから $1 - \dfrac{\mathrm{E}_i}{\tilde{\mathrm{E}}_i}$ は好むままに 0 に近迫せしめることができる。そのときは $u^i(\bar{q}_i) \fallingdotseq u^i(q_i)$ であるから $u^t(\bar{q}_t) \fallingdotseq u^t(q_t)$ となって $\dfrac{\mathrm{E}_t}{\tilde{\mathrm{E}}_i}$ は左辺すな

わちP_{it}と大した差異が無くなってくる。故にこのときR_5は非常に0に近いことが判かる。何れにしてもE_i従ってq_iの選び方によって(11)の右辺の第二項，第三項は0に近い値ならしめることができることが判明したのである。そこで，いま(11)式の右辺を$\frac{E_t}{\tilde{E}_i}(1+e)=v\frac{E_t}{\tilde{E}_i}$にて表わし，

$$(13)\quad \begin{cases} \log\frac{E_t}{\tilde{E}_i}=\frac{\sum_r \alpha_t^r \log p_t^r}{\sum_r \alpha_i^r \log p_i^r}-\log v \\ \sum_r \alpha_t^r=1, \quad \sum \alpha_i^r=1 \end{cases}$$

なるようにα_t，α_iを選べば

$$(14)\quad \frac{\sum_r \alpha_t^r \log p_t^r}{\sum_r \alpha_i^r \log p_i^r}=\log\frac{\tilde{E}_t}{\tilde{E}_i}=\log P_{it}$$

である。

このような場合，従来は，(11)の右辺を実際の資料から計算し得るものたらしめるために，効用指標函数，所得消費曲線（Income-consumption curve, Engel-curve などともいう）などに仮定の条件を課して簡単化し，(11)の右辺を変形するのが普通である。これは，そのような仮定それ自体が恣意の近似化のための仮定なのであるから，得られた物価指数算式が，正しいものであり得る保証はない。近似式であることそれ自体，得られた物価指数算式が誤差を伴うことを表白しているに外ならないのであるから，これに論理的厳密性を要求する方が間違だと言わなければならない。

従って，この方針以外に加重値α_t，α_iを求めなければ正しい指数算式を得る望は，先ず無いのである。

然らば，正しい加重値を得る方法，従って，正しい物価指数算式は，如何なる方針によって求むべきであるか。

これには，二つの条件が考えられる。第一には，考えられた物価指数算

式が，物価指数算式に課せられた要件を充たすことであり，第二には，論理上，誤差を伴わずして求められる数値に合致するか否かによって検定することである。

この第一の方向は,いわゆる循環テスト,因子転逆テストなどのいわゆる検定である。このテストに二種がある。第一種は，物価指数算式が指数の算式なるが故に充たさなければならない要件である。例えば,物価指数は，物価水準の比率として定義されたところから，最初に述べた循環テスト

(2)　$P_{ij}P_{jk}P_{ki}=1$

を充たさなければならないことは，論理上当然のことである。これは，基準変更の検定（Test by shifting base, both as to prices and as to trade）とも呼ばれるものである。[7]

更に，測定単位変更可能性の検定もこれに属する。（Test by shifting unit of measurement, both as to prices and as to trade)。

また，確定性の検定（Test of determinateness, both as to prices and as to trade）も同様である。これは，たとえ，取引が０となっても数量指数が０，無限大，[8] 不定などにならず，また一商品の価格が０となっても物価指数が０，無限大，不定などにならないことを要求するものである。尤も幾何平均系統の物価指数では，０，無限大などになり得る可能性もないではないが価格または取引数量が０の商品は，経済財としては加重値０と考えることにすればよいのである。

第二種のテストは，物価指数が単に指数であるという理由からではなく物価が一国民経済内の一つの経済現象として，他の経済現象との関連において,充たさなければならない要件を充たすことを要求するものであって,いわゆる因子転逆テスト（Factor Reversal Test）の如きはこれに属する。これは，物価指数が単なる指数ではなく，物価水準の比率を示す物価の指数なるが故のテストであるとも言えるのである。

Irving Fisher は第 i 年基準の第 j 年の物価指数

(16)　$$\log P_{ij}=\frac{\sum_r \alpha_j^r \log p_j^r}{\sum_r \alpha_i^r \log p_i^r}$$

において，p_i，p_j の代りに q_i, q_j を置き，q_i，q_i の代りにp_i，p_j を置けば，物価指数 P_{ij} が数量指数 Q_{ij} となり，その際，その積が第i年基準第 j 年の価額指数 V_{ij}すなわち

$$V_{ij}=\frac{\sum_r p_j^r q_j^r}{\sum_r p_i^r q_i^r}$$

に等しくなることを要求するものを因子転逆検定と名づけている。[9] すなわち

(15)　$$P_{ij}Q_{ij} = V_{ij}$$

なることを要求するのであるが，その際 Qは Pに $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ なる置換を施したもの，[10] また P は Q に同じ置換を施して得られるものとしている。そこから因子転逆なる名称を用いたものと考えられるのである。

しかしながら経済理論的には，Pと Qとは同一型の算式でなければならぬ筈はないのであって，A. Wald も述べているように (15) が成立しさえすれば Qは P と同型でなければならないことはないのである。[11] 従って，因子転逆テストではなく，いわば，価額テストとでも称すべきテストの特殊の場合が因子転逆検定に相当するのである。

これを価額テストと称するのは，価額指数は，理論的には，誤差を含むことはあり得ず常に正確なる値を示すから，P,Q の積がこの Vに合致すると言うことによって P, Qに誤差の含まれているか否かを検証する基準が与えられるからである。

すなわち，価額テストは，一方において，物価指数が $PQ=V$ または

PO＝Y などの式によって示されるように，全体のうちの一部として持たなければならない性質ということのテストであると共に，他方には論理上，誤差を伴わずして求められる数値に合致するか否かによって検定するという性質を持っているのである。*PQ* が *V* に合致するということによって，*PQ* 全体としては誤りがなく，従って恐らく *P* にも *Q* にも誤りがなかろうという確証を与えるものとして重要である。

さきの (16) 式

$$\text{(16)}\qquad \log P_{ij}=\frac{\sum_r \alpha_j^r \log p_j^r}{\sum_r \alpha_i^r \log p_i^r}$$

における α_i，α_j の決定は，従って，数量指数 Q_{ij} について

$$\text{(17)}\qquad \log Q_{ij}=\frac{\sum_r \beta_j^r \log q_j^r}{\sum_r \beta_i^r \log q_i^r}$$

における β_i，β_j の決定と共に (15) 式

$$\text{(15)}\qquad P_{ij}Q_{ij}=V_{ij}=\frac{\sum_r p_j^r q_j^r}{\sum_r p_i^r q_i^r}$$

が成立するように決定するという方針をとって始めて，近似式ならぬ物価指数を獲得する途が開けるのである。

A. Wald は循環テスト，因子転逆テスト，と共に比例性テスト（Test of Proportionality, as to prices; Test of proportionality, as to trade）[12] を論じて，Irving Fisher が循環テストを充たす物価指数算式は理論上誤れる指数算式であると主張しているのを支援して，循環テスト，因子転逆テスト，比例性テストの三者を同時に充たす物価指数算式は論理上存在し得ないと論じて，之を論証し得たとしている。Wald の議論は，次のように運ばれている。[13] 先ず，第０年，１年，２年，３年の４ヶ年を考察する。

〔仮　定〕

（ｉ）　物価指数 P_{ij} は前述の三テストを満足する。〔$i,j=0\sim3$〕

（ii）　数量指数 Q_{ij} は前述の三テストを満足する。〔$i,j=0\sim3$〕

（iii）　第０年の価格体系と第２年の価格体系とは相等しい。$P_{02}=1$

（iv）　第１年の価格体系と第３年の価格体系とは相等しい。$P_{13}=1$

（ｖ）　第０年の数量体系と第１年の数量体系とは相等しい。$Q_{01}=1$

（vi）　第２年の数量体系と第３年の数量体系とは相等しい。$Q_{23}=1$

〔論　証〕

仮定（i），（ii）によって

（vii）　$$P_{ij}Q_{ij}=\frac{\sum p_jq_j}{\sum p_iq_i} \qquad 〔i,j=0\sim3〕$$

故に仮定（iv），（v）によって

（viii）　$$P_{01}Q_{01}=P_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}=\frac{\sum p_3q_0}{\sum p_0q_0}$$

また仮定（iii），（vi）によって

（ix）　$$P_{23}Q_{23}=P_{23}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_2q_2}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_0q_3}$$

然るに循環テストを満足するという仮定(i)，(ii)から，(iii)および(iv)を併せ考えて

$$P_{01}P_{13}=P_{02}P_{23}$$

$$\therefore\quad P_{01}=P_{23}$$

よって（viii），（ix）から

（ｘ）　$$\frac{\sum p_3q_0}{\sum p_0q_0}=\frac{\sum p_3q_3}{\sum p_0q_3}$$

しかし $q_0^1=q_3^1$, $q_0^2=q_3^2$, $\cdots$, $q_0^n=q_3^n$ ということは必ずしも成立しないので

あるから（x）式は恒等式ではない。すなわち，q_0,q_3のある一組の値について（x）式が成立したとすれば，$\bar{q}_3^n(\neq q_3^n)$だけがq_3^nと異る点においてq_0,q_3と異る $q_0,\bar{q}_3$ を（x）に代入することによって（x）は成立しなくなる。

しかるに，常には必ずしも成立しないような（x）式が成立することは，仮定〔(i)～(vi)〕が矛盾を包蔵しているからである。このことから Wald は，仮定(i)，(ii)が誤っているとするのである。すなわち，循環テスト，因子転逆テスト，比例性テストの三者を同時に充たす物価指数算式は，論理上存在し得ないと結論し，論証し得たとしているのである。

しかしながら， Waldのこの議論は消費経済理論的考察を忘れた議論であるといわなければならない。

消費経済理論においては，消費経済主体の行動は効用指標の最大を目指して行動するものとせられている。すなわち，限界効用比例の法則が成立するように行動することが予想される居る。故に，第０年より第３年に至る４ケ年間における効用指標函数型の不変と，限界効用逓減の法則とを前提すれば，仮定（iii）および（iv）から，

$$\text{(xi)}\qquad Q_{02}=1,\qquad Q_{13}=1$$

が結論せられる。然るに，仮定（v）および（vi）ならびに，Q_{ij} $[i,j=0\sim3]$ が仮定（ii）によって循環テストを充たすことから

$$\text{(xii)}\qquad Q_{01}Q_{13}=1\qquad \therefore\ Q_{03}=1$$

$$\text{(xiii)}\qquad Q_{02}Q_{23}=1\qquad \therefore\ Q_{03}=1$$

何れにしても $Q_{03}=1$ が結論せられ，（x）式は常に正しい恒等式であることが証明せられる。よって仮定（i）および（ii）は正しいことが判明した訳である。よって，前述の三テストを満足せしめる指数算式が存在することが

保証せられたのである。実際このような指数は，次のようにして，作成せられる。

扨て，考察の全期間〔t＝1～T〕における全商品$C^1, C^2, \cdots C^s, \cdots, C^n$（以下これを$\{C^s\}$と略記する。その他もこれにならう）の第t年の価格をそれぞれ$[y_t^s]$とし，

(18)　$$p_t^s = \log y_t^s - \log y_1^s \quad [s=1\sim n,\ t=1\sim T]$$

とする。[14)]

同様に商品$\{C^s\}$の第t年の取引数量を$[x_t^s]$とし

(19)　$$q_t^s = \log x_t^s - \log x_1^s$$

とする。

また，第t年の全商品の取引総額を

(20)　$$u_t = \sum_{s=1}^{n} y_t^s x_t^s$$

とし，

(21)　$$v_t = \log u_t - \log u_1$$

とする。

かくて，考察の全期間に対し，次の三組の時系列（2n＋1）価が与えられたことになる。

(22)　$$\text{価格系列}\begin{cases} p_1^1,\ p_2^1,\ \cdots,\ p_T^1 & \text{之を}\{p_t^1\}\text{にて表わす。} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_1^s,\ p_2^s,\ \cdots,\ p_T^s & 〃\quad \{p_t^s\}\quad 〃 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_1^n,\ p_2^n,\ \cdots,\ p_T^n & 〃\quad \{p_t^n\}\quad 〃 \end{cases}$$

この(22)全体を$[p_t^s]$にて表わす。

$$(23)\quad 数量系列\begin{cases} q^1_1,\ q^1_2,\ \cdots,\ q^1_T & 之を\{q^1_t\}にて表わす。\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ q^s_1,\ q^s_2,\ \cdots,\ q^s_T & 〃\quad \{q^s_t\}\quad 〃 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ q^n_1,\ q^n_2,\ \cdots,\ q^n_T & 〃\quad \{q^n_t\}\quad 〃 \end{cases}$$

この (23) 全体を〔q^s_t〕にて表わす。

(24)　価額系列 $(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_T)$　　この (24) を $\{v_t\}$ にて表わす。

先ず，第1組価格系列の各々，例えば，$\{p^s_t\}$ について，その趨勢曲線

$$(25)\qquad \bar{p}^s_t = F^s(\mathrm{t}, a^s_1, a^s_2, \cdots, a^s_k)$$

を（例えば，kを適当にとった Fourier 級数）

$$(26)\qquad S^s_p = \sum_t (p^s_t - \bar{p}^s_t)(p^s_t - \bar{p}^s_t) = \min$$

なるように選定し，

$$(27)\qquad \sigma^s_p \sigma^s_p = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_t (p^s_t - \bar{p}^s_t)(p^s_t - \bar{p}^s_t)$$

を算出すると共に，(25)，(27) に基づいて，次の変換

$$(28)\qquad \eta^s_t = \frac{1}{\sigma^s_p}(p^s_t - \bar{p}^s_t)$$

によって，〔p^s_t〕を変換して（これを方正化と呼ぶことにしよう），〔η^s_t〕とする。

次に，取引数量の時系列の各々，例えば，$\{q^s_t\}$についても

$$(29)\qquad S^s_q = \sum (q^s_t - \bar{q}^s_t)(q^s_t - \bar{q}^s_t) = \min$$

なるように，趨勢曲線

$$(30)\qquad \bar{q}^s_t = G^s(\mathrm{t},\ b^s_1,\ b^s_2,\ \cdots,\ b^s_l)$$

を選定し，

$$(31)\qquad \sigma^s_q \sigma^s_q = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_t (q^s_t - \bar{q}^s_t)(q^s_t - \bar{q}^s_t)$$

を算出すると共に，(30)，(31)に基づき，方正化

(32)　$\xi_t^s = \frac{1}{\sigma_q^s}(q_t^s - \bar{q}_t^s)$

によって，〔q_t^s〕を変換して〔ξ_t^s〕とする。

最後に価額系列 $\{v_t\}$ についても，方正化

(33)　$\beta_t = \frac{1}{\sigma_v}(v_t - \bar{v}_t)$

によって，$\{v_t\}$ を $\{\beta_t\}$ に変換する。ここに $\{\bar{v}_t\}$ は，$\{v_t\}$ に対する趨勢曲線

(34)　$\bar{v}_t = f(\mathrm{t},\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$

の第 {t} 年の値であり，σ_vは

(35)　$\sigma_\nu\sigma_\nu = \frac{1}{\mathrm{T}}\sum_t(v_t - \bar{v}_t)(v_t - \bar{v}_t)$

によって算出せられる。

然るとき，

(36)　$\sum_s\left(w_t^s\frac{\bar{p}_t^s}{\sigma_p^s} + z_t^s\frac{\bar{q}_t^s}{\sigma_q^s}\right) = \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\nu}$

を条件として

(37)　$S_{\eta\xi} = \sum_t[\{\sum_s(w_t^s\eta_t^s + z_t^s\xi_t^s) - \beta_t][\sum_s(w_t^s\eta_t^s + z_t^s\xi_t^s) - \beta_t\}] = \min$

ならしめる加重値函数（例えば Fourier級数）

(38)　$\begin{cases} w_t^s = \varphi^s(\mathrm{t},\ \mathrm{e}_1^s,\ \mathrm{e}_2^s, \cdots,\ \mathrm{e}_h^s), & [w_t^s \geqq 0] \\ z_t^s = \psi^s(\mathrm{t},\ d_1^s,\ d_2^s, \cdots,\ d_j^s) & [z_t^s \geqq 0] \end{cases}$

を選定する。このようにして，加重値函数が定まった上は，之を用いて，先ず粗物価指数 P_{ij} を

(39)　$\begin{cases} \log P_{ij} = \frac{1}{N_{pj}}(\sum_s \alpha_j^s p_j^s) - \frac{1}{N_{pi}}(\sum_s \alpha_i^s p_i^s) \\ \alpha_t^s \sigma_p^s = w_t^s \sigma_v; \qquad N_{pt} = \sum_s \alpha_t^s \end{cases}$

によって算出する。

同様に，粗数量指数は

$$(40)\quad \begin{cases} \log Q_{ij}=\dfrac{1}{N_{qj}}(\sum\gamma_j^s q_j^s)-\dfrac{1}{N_{qi}}(\sum_s\gamma_i^s q_i^s) \\ \gamma_t^s\sigma_q^s=z_t^s\sigma_v\ ; \qquad N_{qt}=\sum_s\gamma_t^s \end{cases}$$

として算出せられる。然るとき，第 i 年基準，第 j 年の物価指数 $\boldsymbol{P}_{ij}$，数量指数 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ は，それぞれ

$$(41)\quad \log\boldsymbol{P}_{ij}=\frac{1}{2}\{\log P_{ij}+\log V_{ij}-\log Q_{ij}\}$$

$$(42)\quad \log\boldsymbol{Q}_{ij}=\frac{1}{2}\{\log Q_{ij}+\log V_{ij}-\log P_{ij}\}$$

として，算出せられるのである。ただし，ここに，V_{ij} は第 i 年基準，第 j 年の価額指数

$$(43)\quad V_{ij}=\frac{u_j}{u_i}$$

である。

この物価指数および数量指数がこれらの指数に課せられた要件を充たすかどうかを検討しょう。

粗物価指数が循環テストを充たすことは

$$(44)\quad \log(P_{ij}P_{jk}P_{ki})=\log P_{ij}+\log P_{jk}+\log P_{jk}$$
$$=\frac{1}{N_{pj}}(\sum_s\alpha_j^s p_j^s)-\frac{1}{N_{pi}}(\sum_s\alpha_i^s p_i^s)$$
$$+\frac{1}{N_{pk}}(\sum_s\alpha_k^s p_k^s)-\frac{1}{N_{pj}}(\sum\alpha_j^s p_j^s)$$
$$+\frac{1}{N_{pi}}(\sum_s\alpha_i^s p_i^s)-\frac{1}{N_{pk}}(\sum_s\alpha_k^s p_k^s)$$
$$=0$$

から明かである。同様に粗数量指数 Q_{ij} は循環テストを満足する。すなわち

$$(45)\quad \log Q_{ij}Q_{jk}Q_{ki}=0$$

であることは詳言を要しないであろう。

従って，吾々の新物価指数算式 $\boldsymbol{P}_{ij}$ も循環テストを満足する。何となれば，(44)，(45) を用いると，

$$\text{(46)}\quad \log(\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{P}_{jk}\boldsymbol{P}_{ki})=\log\boldsymbol{P}_{ij}+\log\boldsymbol{P}_{jk}+\log\boldsymbol{P}_{ki}$$

$$=\frac{1}{2}(\log\boldsymbol{P}_{ij}+\log V_{ij}-\log\boldsymbol{Q}_{ij})$$

$$+\frac{1}{2}(\log\boldsymbol{P}_{jk}+\log V_{jk}-\log\boldsymbol{Q}_{jk})$$

$$+\frac{1}{2}(\log\boldsymbol{P}_{ki}+\log V_{ki}-\log\boldsymbol{Q}_{ki})$$

$$=\log V_{ij}+\log V_{jk}+\log V_{ki}$$

$$=(\log\boldsymbol{u}_j-\log\boldsymbol{u}_i)+(\log\boldsymbol{u}_k-\log\boldsymbol{u}_j)+(\log\boldsymbol{u}_i-\log\boldsymbol{u}_k)$$

$$=0$$

同様に新数量指数 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ の循環テストを充たすこと，すなわち

$$\text{(47)}\quad \log(\boldsymbol{Q}_{ij}\boldsymbol{Q}_{jk}\boldsymbol{Q}_{ki})=0$$

も明かであろう。

更に，吾々の新物価指数 $\boldsymbol{P}_{ij}$ および数量指数 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ は価額テストを満足する。すなわち

$$\text{(48)}\quad \boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{Q}_{ij}=V_{ij}$$

である。何となれば

$$\text{(49)}\quad \log(\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{Q}_{ij})=\log\boldsymbol{P}_{ij}+\log\boldsymbol{Q}_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}\{\log\boldsymbol{P}_{ij}+\log V_{ij}-\log\boldsymbol{Q}_{ij}\}$$

$$+\frac{1}{2}\{\log\boldsymbol{Q}_{ij}+\log V_{ij}-\log\boldsymbol{P}_{ij}\}$$

$$=\log V_{ij}$$

であるからである。[15)]

また $\boldsymbol{P}_{ij}$，$\boldsymbol{Q}_{ij}$ が測定単位変更可能性を有することは(18)，(19)などの変換を基礎としていることから明かであろう。

更に，経済財である以上は $p_t^s>0$ である筈であり，これが経済財ないし商品としての重要性を失えば，$p_t^s=0$, $q_t^s=0$ となる以前に $w_t^s=0$, $z_t^s=0$ となるであろう。このことから，吾々の $\boldsymbol{P}_{ij}$, $\boldsymbol{Q}_{ij}$ が確定性テストを充たすことも明かであろう。

最後に比例性テストについては，少しく立ち入って検討しなければならない。先ず効用指標函数が時の経過を通じて不変であるとする。[16]

従って，財に対する需要函数は各財の価格および所得の０次の同次函数であるとする。

然るときは

(50)　$$V_{ij}=\frac{u_j}{u_j}=\frac{p_j^1}{p_i^1}=\frac{p_j^2}{p_i^2}=\cdots\cdots=\frac{p_j^n}{p_i^n}=\lambda$$

のとき，

(51)　$$\boldsymbol{P}_{ij}=\lambda\,; \qquad Q_{ij}=1,$$

であるから

(52)　$$\log \boldsymbol{P}_{ij}=\frac{1}{2}(\log P_{ij}+\log V_{ij}-\log Q_{ij})=\log\lambda$$

となって比例性テストを満足する。因みに

(53)　$$\log \boldsymbol{Q}_{ij}=\frac{1}{2}(\log Q_{ij}+\log V_{ij}-\log P_{ij})=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{Q}_{ij}=1$$

である。

然るに効用指標函数が時の経過と共に変る場合，財に対する需要函数が各財の価格および所得の０次の同次函数ではない場合は

(54)　$$p_j^s=\lambda p_i^s \qquad [s=1\sim n]$$

であっても，一般には (52) は成立しない。従って比例性テストを満足しない。しかし，この場合は消費経済理論的に考えて，比例性テストを満足することを要求するのが無理なのである。すなわち，一般には物価指数算式

の要件として比例性テストを満足することを要求すべきではなく，前述したような需要函数などが特殊の条件を満足する場合にのみ比例性テストが意味を持ち得るものなることに注意しなければならないのである。

尚，吾々の新指数算式においては趨勢曲線，広義の振幅函数による方正化の手法をとったのである。[17] これは，いわゆる美人投票の fallacy を回避するためのものであって，これについては他の機会に述べたので，ここには，これを省くこととする。

引用文献

〔Ⅰ〕 John Maynard Keynes; A Treatise on Money, London, 1930.

〔Ⅱ〕 Abraham Wald; "Zur Theorie der Preisindexziffern" (Zeitschrift fiir Nationalökonomie, Bd. Ⅷ, Heft 2, Wien, Mai, 1937)

〔Ⅲ〕 Ditto: "A New Formula for the Index of Cost of Living," (Econometrica, vol. 7, No. 4, October, 1939)

〔Ⅳ〕 森田優三博士「物価変動の測定」（東京，昭和15年4月）

〔Ⅴ〕 山田勇教授「物価指数に於ける弾力性法について」（統計集誌第704号,昭和15年2月）

〔Ⅵ〕 山田勇教授「計量経済学の基本問題」（東京，昭和24年1月）

〔Ⅶ〕 Irving Fisher: The Purchasing Power of Money, New york, 1926.

〔Ⅷ〕 Irving Fisher: The Making of Index Numbers, New york, 1927.

〔註〕（〔 〕の中は，上記引用文献の番号を示す）

67頁　1）〔Ⅰ〕, vol. Ⅰ, p.53.

68頁　2）〔Ⅰ〕, vol. Ⅰ, p.54.

68頁　3）$p_0 = (p_0^1, p_0^2, \cdots, p_0^n)$ は第一財の価格が p_0^1,第二財の価格が p_0^2，…，第 n 財の価格が p_0^n なるとき，これを一括して，p_0 にて示すことを表わしているのである。右下の 0 は第 0 年を表わす。

$q = (q^1, q^2, \cdots, q^n)$ も，同様に，複合財 q の組成が第１財が q^1，第２財が q^2，…，第 n 財が q^n であることを示す。

71頁　4)　点 q は n 次元ユークリッド空間の一点 $q=(q^1, q^2, \cdots, q^n)$ を示す。同様に q_t は同じくその空間の一点 $q_t=(q_t^1, q_t^2, \cdots, q_t^n)$ を示すものとする。$\bar{q}_t$ なども同様である。

71頁　5)　〔II〕S.199,u.f.
〔III〕p.320,et seq.
〔IV〕166頁以下
〔V〕 4 頁以下
〔VI〕275頁以下

72頁　6)　本文18頁参照

74頁　7)　〔VII〕p.400, et sep.

74頁　8)　通俗的な表現を用いた

75頁　9)　〔VIII〕p72, et seq.

75頁　10)　$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ は p の代りに q を置き，q の代りに p を置くことを意味している。

75頁　11)　〔II〕S.181.

76頁　12)　〔VII〕p.400, et seq.
〔II〕SS. 180～182.

76頁　13)　〔II〕S. 181.

79頁　14)　$\log y$ は10を底とする y の対数を示すものとする。また $\{y_t^s\}$ は主として

$$y_1^s,\ y_2^s,\ \cdots.\ y_T^s$$

なる時系列を表わすに対して $[y_t^s]$ は

$$\{y_t^1\},\quad \{y_t^2\},\quad \cdots,\quad \{y_t^n\}$$

なる n 個の時系列全部を表わすものとする。

83頁　15)　P_{ij} に $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ なる置換を施せば Q_{ij} となり，また，Q_{ij} にこの置換を施せば P_{ij} となるとき価額テストは Fisher の因子転逆テスト（Factor Reversal Test）に一致する。すなわち価額テストは広義の因子転逆テストである。このことは A. Wald が指摘している。(〔II〕181頁参照)。昨年秋の計量経済学会における研究発表に対する批評において．伊太知良太郎教授もこれを指摘せられた。

$\alpha_t^s = \gamma_t^s$ 〔s=1〜n; t=1〜T〕 または $w_t^s = z_t^s$ なる特別の場合，置換 $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ の代りに $\begin{pmatrix} \eta & \xi \\ \xi & \eta \end{pmatrix}$ なる置換を用いることとすれば，価額テストは因子転逆テストに一致するととも詳言を要しないであろう。

84頁　16） 効用指標函数というとき別段の断り書がなければ，社会価値函数的な全体社会に関するものとする。

85頁　17） 拙稿「物価指数の新算式について」（国民経済雑誌第98巻第4号，坂本弥三郎先生御退官記念号，昭和33年10月）