LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. II, pp. 291–298

ATTUALE FORMULAZIONE DELLA TEORIA DEGLI OPERATORI VICINI E ATTUALE DEFINIZIONE DI OPERATORE ELLITTICO

SERGIO CAMPANATO

A Francesco Guglielmino nel Suo 70$^{\text{mo}}$ *compleanno*

Let $A(u) = a(x, H(x))$ be a second order non linear differential operator satisfying the ellipticity condition (A_q) (see definition (23)). For each $f \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, the following Dirichlet problem is studied

$$\begin{cases} u \in H^{2,q} \cap H_0^1(\Omega) \\ A(u) = f \quad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

making use of the theory of "nearness" between operators introduced in the first part of the paper.

1. Siano

$\mathcal{B}$ un insieme
$\mathcal{B}_1$ uno spazio metrico completo con metrica δ
A e B applicazioni $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ con B bigettiva.

In queste ipotesi è noto che anche $\mathcal{B}$ è metrico completo con la metrica indotta

$$d_B(u, v) = \delta\big(B(u), B(v)\big), \quad \forall u, v \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Diamo la definizione di A è *p.p.* (piccola perturbazione) della bigezione B.

Entrato in Redazione il 18 aprile 1997.

Definizione 1. *Si dice che* A *è una* p.p. *di* B *di costante* k *se* $\exists k \in (0,1)$ *tale che,* $\forall u, v \in \mathcal{B}$*, è*

$$\delta\big(A(u), A(v)\big) \leq k\delta\big(B(u), B(v)\big). \tag{2}$$

Si ha questo teorema, che è una facile, ma utile generalizzazione di un classico teorema di Banach-Caccioppoli:

Teorema 1. *Se* A *è una* p.p. *di* B *allora* $\exists_1 u \in \mathcal{B}$ (punto fisso) *tale che*

$$A(u) = B(u). \tag{3}$$

Infatti dall'ipotesi segue che $B^{-1}A$ è una contrazione di $\{\mathcal{B}, d_B\}$ in sè di costante k. Allora, per un classico teorema di Banach-Caccioppoli, $\exists_1 u \in \mathcal{B}$ tale che

$$B^{-1}A(u) = u$$

ossia

$$A(u) = B(u).$$

2. Rinforziamo le ipotesi di struttura sullo spazio $\mathcal{B}_1$ in modo da poter dare la definizione di *operatori* $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ *vicini*.

La definizione di *vicino* è nata originariamente supponendo $\mathcal{B}_1$ *Hilbert*, ma poi si è estesa al caso di $\mathcal{B}_1$ *Banach* e attualmente al caso di $\mathcal{B}_1$ *spazio lineare, metrico completo con metrica* δ *invariante (per traslazioni).*

Definizione 2. *Diciamo che la metrica* δ *su* $\mathcal{B}_1$ *è invariante se è*

$$\delta(u + a, v + a) = \delta(u, v) \quad \forall u, v, a \in \mathcal{B}_1. \tag{4}$$

Si vede facilmente che ciò equivale a dire che $\forall u, v \in \mathcal{B}_1$ *è*

$$\delta(u, v) = \delta(u - v, 0). \tag{5}$$

Questo succede ad esempio se $\mathcal{B}_1$ è *s. normato* e $\delta(u, v) = \|u - v\|_{\mathcal{B}_1}$ ma non è vero il viceversa.

Quindi la struttura di spazio lineare, metrico completo con metrica δ invariante è qualcosa di intermedio tra la

(6)
struttura metrica
struttura normata.

E' comunque sufficiente per dare la definizione di applicazioni vicine.

Definizione 3. *Si dice che A è vicina a B se $\exists\alpha > 0$ ed $\exists k \in (0, 1)$ tali che $\forall u, v \in \mathcal{B}$ è*

$$\delta\big(B(u) - \alpha A(u), B(v) - \alpha A(v)\big) \leq k\delta\big(B(u), B(v)\big). \tag{7}$$

Ossia se $\exists\alpha > 0$ tale che $(B - \alpha A)$ è p.p. di B di costante k.

Questo non è, in generale, equivalente a dire che B è vicina ad A, inoltre si osservi che la vicinanza di A a B dipende dalla scelta degli spazi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$.

La filosofia che sta alla base della definizione di applicazioni vicine è la seguente: Se A e B sono applicazioni $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$, con B bigettiva, e se l'operatore B ha certe proprietà di esistenza, unicità, regolarità, ecc., lo stesso succede per l'operatore A se questo è vicino a B.

Il primo problema è quello di dare una buona definizione di vicino in modo che si realizzi l'obiettivo detto sopra. La Definizione 3 che abbiamo dato sembra avere questa proprietà anche con $\mathcal{B}_1$ di struttura piuttosto generale.

Nelle ipotesi da noi formulate su A, B e $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, la prima conferma alla nostra aspettativa si è avuta nel campo della esistenza e unicità, si è infatti dimostrato il seguente teorema

Teorema 2. *L'applicazione $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ è* bigettiva ([1]) *se e solo se A è vicina a una $B : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ che è bigettiva.*

Dimostrazione. Il *solo se* discende dal fatto che ogni $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$ è vicina a se stessa. Infatti se nella Definizione 3 assumiamo $\alpha = 1$ e $B = A$ si ottiene, $\forall u, v \in \mathcal{B}$, che

$$\delta\big(A(u) - A(u), A(v) - A(v)\big) = 0$$

mentre

$$\delta\big(A(u), A(v)\big) \geq 0.$$

Supponiamo allora B bigettiva e proviamo che anche A è bigettiva.
Infatti, $\forall u \in \mathcal{B}$ è $A(u) \in \mathcal{B}_1$ e, $\forall f \in \mathcal{B}_1$, risolvere l'equazione

$$A(u) = f, \ u \in \mathcal{B} \tag{8}$$

equivale a risolvere l'equazione

$$B(u) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f = M(u), \ u \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

([1]) Lo stesso vale per la iniettività o la surgettività.

Ma B è bigettiva, per ipotesi, ed $M(u)$ è una *p.p.* di B (2). Ne segue, per il Teorema 1, che $\exists_1 u \in \mathcal{B}$ tale che $B(u) = M(u)$.

Questa u è la soluzione di (9) e quindi di (8).

3. In questo paragrafo ci occupiamo del caso in cui $A(u)$ è un operatore differenziale del secondo ordine, per semplicità, di tipo quasi-base.

Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, di classe C^2, di punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

N è un intero ≥ 1.

$u = (u^1, \ldots, u^N)$ è un vettore $\Omega \to \mathbb{R}^N$ e

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$Du = \big(D_1 u, \ldots, D_n u),$$

$$H(u) = \{D_{ij} u\}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Quindi Du è un vettore di $\mathbb{R}^{nN}$ ed $H(u)$ è un elemento di $\mathbb{R}^{n^2 N}$, cioè una matrice $n \times n$ di vettori di $\mathbb{R}^N$.

Indichiamo con $\xi = \{\xi_{ij}\}$ un generico elemento di $\mathbb{R}^{n^2 N}$.

$a(x, \xi)$ è un vettore di $\mathbb{R}^N$, definito in $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2 N}$, misurabile in x, continuo in ξ e tale che $a(x, 0) = 0$.

Operatore differenziale del secondo ordine, di tipo quasi-base, è l'operatore

$$A(u) = a\big(x, H(u)\big). \tag{10}$$

In particolare, se $A(u)$ è lineare, allora

$$a(x, H(u)\big) = \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x) D_{ij} u \tag{11}$$

dove $A_{ij}(x)$ sono matrici $N \times N$ di classe $L^\infty(\Omega)$.

---

(2) Infatti, poichè δ è invariante, $\forall u, v \in \mathcal{B}$ è

$$\begin{aligned} \delta(M(u), M(v)) &= \delta(B(u) - \alpha A(u), B(v) - \alpha A(v)) \leq \\ &\leq k\delta(B(u), B(v)) \end{aligned}$$

perchè A è vicina a B.

Dato $f \in L^q(\Omega)$, $f(x) \in \mathbb{R}^N$ e $q > 1$, consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega) \\ A(u) = f \text{ in } \Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Chiamiamo condizione di ellitticità sull'operatore (11) ogni condizione algebrica sui coefficienti A_{ij} che garantisca l'esistenza e unicità del problema di Dirichlet (12).

Riferendoci agli operatori lineari (11), poniamo

$A(x) = \{A_{ij}(x)\}$ matrice $n \times n$ di vettori di $\mathbb{R}^N$ cioè elemento di $\mathbb{R}^{n^2 N}$

I_N è la matrice identica $N \times N$

$I = \{\delta_{ij} I_N\}$ è la matrice identica $nN \times nN$.

Il sistema (11) si scrive più semplicemente: $\big(A(x)|H(u)\big)$.

Supponiamo di sapere, dalla teoria lineare, che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega) \\ \Delta u = f \text{ in } \Omega \end{cases} \tag{13}$$

ha, $\forall f \in L^q(\Omega)$ una e una sola soluzione u e questa verifica la maggiorazione

$$\|H(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q)\|\Delta u\|_{L^q(\Omega)} \tag{14}$$

dove la costante $C(q)$ è ≥ 1 e dipende dal valore di q e dalla geometria di Ω. Ad esempio se $q = 2$ e Ω è convesso, si ha la maggiorazione di Talenti

$$\int_\Omega \|H(u)\|^2\, dx \leq \int_\Omega \|\Delta u\|^2\, dx, \quad \forall u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \tag{15}$$

ossia, se Ω è convesso, è $C(2) = 1$.

Ritorniamo al problema di Dirichlet (12). Dimostriamo l'esistenza e unicità della soluzione formulando sull'operatore (11) un'ipotesi di ellitticità che garantisca che l'operatore $\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x) D_{ij} u$ è vicino all'operatore $C(q)\Delta u$, e quindi all'operatore Δ, intesi entrambi come operatori $H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Fatto ciò, per il Teorema 2, la tesi sarà dimostrata.

A tal fine imponiamo al vettore $a(x, \xi) = \sum_{ij} A_{ij}(x) D_{ij} u$ di verificare la seguente condizione (A_q) (o condizione di ellitticità o condizione di Cordes)

(A_q) *Esistono tre costanti* $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ *e* $\delta \geq 0$, *con* $\gamma + \delta < 1$, *tali che* $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n^2 N}$ *e* $x \in \Omega$ *è*

$$\Big\| C(q) \sum_i \xi_{ii} - \alpha \sum_{ij} A_{ij}(x) \xi_{ij} \Big\|_N \leq \gamma \|\xi\| + \delta \Big\| C(q) \sum_i \xi_{ii} \Big\|_N . \tag{16}$$

Ipotizzata questa condizione (A_q), si ha $\forall u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_\Omega \|C(q)\Delta u - \alpha \sum_{ij} A_{ij}(x) D_{ij} u\|_N^q \, dx \leq \\ &\leq \int_\Omega \big(\gamma \|H(u)\| + \delta \|C(q)\Delta u\|_N\big)^q \, dx . \end{aligned} \tag{17}$$

A questo punto ricordiamo il seguente lemma

Lemma. *Se* $q > 1$, $A \geq 0$, $B \geq 0$ *allora* $\forall \varepsilon > 0$ *si ha la maggiorazione*

$$(A + B)^q \leq (1 + \varepsilon)^{q-1} A^q + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{q-1} B^q = F(\varepsilon) \ (^3). \tag{18}$$

Quindi, per la (18), dalla (17) segue che $\forall u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega)$ e $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathcal{A} \leq \int_\Omega \Big[(1 + \varepsilon)^{q-1} \gamma^q \|H(u)\|^q + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{q-1} \delta^q \|C(q)\Delta u\|_N^q \Big] dx$$

e per la (14) si ha che $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathcal{A} \leq \Big\{ (1 + \varepsilon)^{q-1} \gamma^q + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{q-1} \delta^q \Big\} \int_\Omega \|C(q)\Delta u\|_N^q \, dx .$$

Scelto $\varepsilon = \delta/\gamma$ si ottiene, $\forall u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega)$,

$$\mathcal{A} \leq (\gamma + \delta)^q \int_\Omega \|C(q)\Delta u\|_N^q \, dx \tag{19}$$

(^{3}) Infatti la funzione $F(\varepsilon)$ ha il minimo nel punto $\varepsilon = B/A$ e $F(B/A) = (A + B)^q$, in quanto $F'(\varepsilon) = 0$ per $\varepsilon = B/A$, $F'(\varepsilon) < 0$ per $0 < \varepsilon < B/A$ e $F'(\varepsilon) > 0$ per $\varepsilon > B/A$.

e quindi, poichè $\gamma + \delta < 1$, l'operatore $\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x)D_{ij}u$ è vicino all'operatore $C(q)\Delta u$, e quindi al Δu.

Ricordiamo che, se l'operatore $A(u)$ è l'operatore lineare (11), la condizione (A_q) equivale alla cosiddetta condizione di Cordes

$$\frac{(A|I)}{\|A\|} \geq \sqrt{\|I\|^2 - \left(\frac{\gamma}{C(q)} + \delta\|I\|\right)^2}. \tag{20}$$

Infatti dalla condizione (A_q) segue che

$$(A(x) \mid I) \geq 0$$

e la condizione (A_q) è equivalente alla condizione

$$\|C(q)I - \alpha A(x)\| \leq \gamma + \delta C(q)\|I\|.$$

E quindi, quadrando ambo i membri, si ha la condizione

$$P(\alpha) = \alpha^2\|A\|^2 - 2\alpha C(q)(A|I) + C^2(q)\|I\|^2 - (\gamma + \delta C(q)\|I\|)^2 \leq 0. \tag{21}$$

Ma la (21) è possibile per un $\alpha > 0$, *se e solo se*

$$\min_{\alpha>0} P(\alpha) = P(\alpha_0) \leq 0 \quad \text{con} \quad \alpha_0 > 0. \tag{22}$$

Con un facile calcolo si trova che

$$\alpha_0 = \frac{C(q)(A|I)}{\|A\|^2}$$

e

$$P(\alpha_0) = C^2\|I\|^2 - (\gamma + \delta C\|I\|)^2 - \frac{C^2(A|I)^2}{\|A\|^2}.$$

Per cui la condizione $P(\alpha_0) \leq 0$ è proprio la condizione di Cordes (20).

La condizione di ellitticità (A_q) si può enunciare anche se l'operatore $a(x, H(u))$ è *non lineare*. In tal caso la condizione (A_q) si enuncia nel seguente modo

(A_q) *Esistono tre costanti* $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ *e* $\delta \geq 0$, *con* $\gamma + \delta < 1$, *tali che, per* $x \in \Omega$ *e* $\forall \xi, \tau \in R^{n^2N}$

$$\Big\|C(q)\sum_i \xi_{ii} - \alpha\big[a(x, \xi + \tau) - a(x, \tau)\big]\Big\|_N \leq \gamma\|\xi\| + \delta\|C(q)\sum_i \xi_{ii}\|_N. \tag{23}$$

Sempre nell'ipotesi che il vettore $a(x, \xi)$ sia misurabile in $x \in \Omega$ e continuo in $\xi \in R^{n^2 N}$.

Anche nel caso non lineare si prova che, se Ω è di classe C^2, l'operatore $a\big(x, H(u)\big)$ è vicino all'operatore Δu, intesi come operatori $H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ e quindi $\forall f \in L^q(\Omega)$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,q} \cap H_0^{1,q}(\Omega) \\ a\big(x, H(u)\big) = f \text{ in } \Omega \end{cases} \text{(}^4\text{)} \tag{24}$$

ha una e una sola soluzione u.
La soluzione u del problema di Dirichlet (24), sia nel caso lineare che in quello non lineare, verifica la seguente maggiorazione

$$\|H(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{1-(\gamma+\delta)} \|f\|_{L^q(\Omega)}. \tag{25}$$

Infatti, per il fatto che $a(x, H(u))$ è vicino a $C(q)\Delta u$, si ha che [5]

$$\|C(q)\Delta u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|C(q)\Delta u - \alpha a\big(x, H(u)\big)\|_{L^q(\Omega)} + \alpha \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq$$

$$\leq (\gamma+\delta)\|C(q)\Delta u\|_{L^q(\Omega)} + \alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Da cui

$$\|C(q)\Delta u\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{1-(\gamma+\delta)} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Di qui segue la (25), ricordando l'ipotesi (14).

Dipartimento di Matematica,
Università di Pisa,
Via Buonarroti 2,
56100 Pisa (ITALY)

---

[4] Con $a(x, H(u))$ non lineare.
[5] Cfr. la (19).