LE MATEMATICHE
Vol. LIII (1998) – Fasc. II, pp. 359–373

UN PROBLEMA DI DARBOUX IN UN INSIEME NON LIMITATO. ESISTENZA, UNICITÀ E DIPENDENZA CONTINUA DELLA SOLUZIONE

GIUSEPPE STURIALE

We prove the existence and uniqueness of z, the solution to the Darboux problem

$$z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = f(x, y) \text{ a.e. } (x, y) \in L(\alpha, \beta),$$

$$z(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad z(0, y) = \psi(y) \quad \forall y \in]0, +\infty[,$$

where the domain $L(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, is the following unbounded subset of $\mathbb{R}^2$

$$L(\alpha, \beta) = ([0, \alpha[\times[0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times[0, \beta[),$$

and z is required to belong to the Sobolev space

$$\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) = \{z \in L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) : z_x, z_y, z_{xy} \in L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)\}.$$

We assume that the coefficients A, B, C satisfy some rather general assumptions. In fact these assumptions are, in a sense, the most general ones provided that z is in $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ and f belongs to $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. We show also the continuous dependence of z on all data, namely: the boundary data (φ, ψ), the right handside f and the coefficients A, B, C.

Entrato in Redazione il 29 settembre 1998.

1. Introduzione.

Assegnati $p \in]1, +\infty[$, $\alpha, \beta \in]0, +\infty]$ e denotato con $L(\alpha, \beta)$ il sottoinsieme non limitato di $\mathbb{R}^2$

$$L(\alpha, \beta) = ([0, \alpha[\times[0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times[0, \beta[),$$

consideriamo il sistema lineare iperbolico

$$(E) \quad z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = f(x, y) \text{ q.o. } (x, y) \in L(\alpha, \beta),$$

dove i coefficienti A, B, C sono funzioni da $L(\alpha, \beta)$ in $\mathbb{R}^{n,n}$, il termine noto f è un elemento di $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ e la funzione incognita z viene cercata nello spazio (del tipo di Sobolev) $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ delle funzioni z appartenenti a $L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ assieme alle derivate z_x, z_y, z_{xy}.

In [9] è stato considerato il problema di Darboux ottenuto associando al sistema (E) la condizione, per la funzione incognita z, di avere un'assegnata traccia (φ, ψ), elemento dello spazio $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ (anche questo del tipo di Sobolev), sull'insieme

$$l(0, 0) = ([0, +\infty[\times\{0\}) \cup (\{0\} \times [0, +\infty[);$$

per tale problema è stato dimostrato, in ipotesi di continuità dai coefficienti A, B, C e di alcune loro derivate, un teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dai dati (φ, ψ) e f.

I risultati di [9] sono stati il punto di partenza di una serie di lavori ([4], [5], [8]) dedicati allo studio dei processi di controllo retti da sistemi del tipo (E) in insiemi non limitati del tipo $L(\alpha, \beta)$.

Scopo del presente lavoro è quello di riottenere il già citato teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua di [9] adottando per coefficienti A, B, C ipotesi più generali (anzi, come vedremo, le più generali possibile), in analogia a quanto è stato fatto in [2] nel caso di un dominio rettangolare.

Dimostriamo, inoltre, che c'è dipendenza continua della soluzione del problema di Darboux oltre che dai dati (φ, ψ) e f anche dai coefficienti A, B, C. In questo modo estendiamo al caso degli insiemi $L(\alpha, \beta)$ i risultati ottenuti in [7] nel caso dei domini rettangolari.

Nel n. 2 ricordiamo le definizioni ed alcune fondamentali proprietà degli spazi funzionali utilizzati e introduciamo, inoltre, gli spazi di tipo L^p_{loc} con norma mista dei coefficienti A, B.

Nel n. 3 precisiamo le ipotesi sui coefficienti A, B, C e dimostriamo che esse sono le più generali possibile, compatibilmente con la richiestas che la soluzione z appartenga a $\widetilde{W}^*_p(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ e l'ipotesi che $f \in L^p_{\text{loc}}(L(\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$.

Nel n. 4, infine, ci occupiamo dell'esistenza, dell'unicità e della dipendenza continua di z.

Ringrazio il Prof. Alfonso Villani per le utili discussioni sulle questioni affrontate nel presente lavoro.

2. Spazi funzionali.

Sia, d'ora in avanti, $p \in]1, +\infty[$. Siano inoltre, salvo ulteriori precisazioni, Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e R un rettangolo aperto di $\mathbb{R}^2$, $R = R_x \times R_y$, essendo $R_x =]x_0, x_1[$ e $R_y =]y_0, y_1[$.

Ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 1. (cfr. [1], [6]). *$W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $\omega : (x, y) \to \omega(x, y)$, da Ω in $\mathbb{R}^n$, che appartengono a $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (1) assieme alle derivate nel senso delle distribuzioni $\omega_x, \omega_y, \omega_{xy}$, con la norma*

$$\|\omega\|_{W_p^*(\Omega,\mathbb{R}^n)} = (\|\omega\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|\omega_x\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|\omega_y\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \|\omega_{xy}\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)})^{1/P}$$

$$\forall \omega \in W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Nel caso in cui $\Omega = R$, è nota la seguente caratterizzazione degli elementi di $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Proposizione 1. (cfr. [1]). *Le funzioni $\omega \in W_p^*(R, \mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole quelle del tipo:*

$$\omega(x, y) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} h(u, v) du dv + \int_{x_0}^{x} h_1(u) du + \int_{y_0}^{y} h_2(v) dv + \lambda \quad \forall (x, y) \in R,$$

con

$$h \in L^p(R, \mathbb{R}^n), h_1 \in L^p(R_x, \mathbb{R}^n), h_2 \in L^p(R_y, \mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Definizione 2. (cfr. [7]). *$L_y^{\infty,p}(R, \mathbb{R}^n)$ (risp. $L_x^{\infty,p}(R, \mathbb{R}^n)$) è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili $\xi : (x, y) \to \xi(x, y)$, da R in $\mathbb{R}^n$, tali che la funzione numerica*

$$x \to \operatorname{supess}_{y \in R_y} |\xi(x, y)| \quad (risp. \quad y \to \operatorname{supess}_{x \in R_x} |\xi(x, y)|)$$

(1) Il significato di $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e della sua norma è quello usuale.

appartiene a $L^p(R_x)$ *(risp.* $L^p(R_y)$*) con la norma*

$$\|\xi\|_{L_y^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)} = (\int_{R_x} \operatorname{supess}_{y\in R_y} |\xi(x,y)|^p dx)^{1/p} \quad \forall \xi \in L_y^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)$$

$$(risp\ \|\xi\|_{L_x^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)} = (\int_{R_y} \operatorname{supess}_{x\in R_x} |\xi(x,y)|^p dy)^{1/p} \quad \forall \xi \in L_x^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)).$$

Definizione 3. (cfr. [7], Definizione 3). $W_p^+(R,\mathbb{R}^n)$ *è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $\omega : (x,y) \to \omega(x,y)$*, da* R *in* $\mathbb{R}^n$*, che appartengono a* $L^\infty(R,\mathbb{R}^n)$ *e le cui derivate nel senso delle distribuzioni* ω_x, ω_y *appartengono rispettivamente a* $L_y^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)$ *ed a* $L_x^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)$*, con la norma*

$$\|\omega\|_{W_p^+(R,\mathbb{R}^n)} = \|\omega\|_{L^\infty(R,\mathbb{R}^n)} + \|\omega_x\|_{L_y^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)} + \\ + \|\omega_y\|_{L_x^{\infty,p}(R,\mathbb{R}^n)} \quad \forall \omega \in W_p^+(R,\mathbb{R}^n).$$

Si ha la

Proposizione 2. (cfr. [7]). $W_p^* \subset W_p^+$ *algebricamente e topologicamente.*

Conseguentemente si può definire una nuova norma $|\|\cdot\||_{W_p^*(R,\mathbb{R}^n)}$ in $W_p^*(R,\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$|\|\omega\||_{W_p^*(R,\mathbb{R}^n)} = \|\omega\|_{W_p^+(R,\mathbb{R}^n)} + \|\omega_{xy}\|_{L^p(R,\mathbb{R}^n)} \quad \forall \omega \in W_p^*(R,\mathbb{R}^n).$$

Si ha inoltre la

Proposizione 3. (cfr. [7]). $\|\cdot\|_{W_p^*(R,\mathbb{R}^n)}$ *e* $|\|\cdot\||_{W_p^*(R,\mathbb{R}^n)}$ *sono norme equivalenti.*

Definizione 4. (cfr. [7]). $L_y^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})$ *(risp.* $L_x^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})$*) è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni misurabili* $\Phi : (x,y) \to \Phi(x,y)$*, da* R *in* $\mathbb{R}^{n,n}$*, tali che la funzione numerica*

$$x \to \int_{R_y} |\Phi(x,y)|^p dy \quad (risp. \quad y \to \int_{R_x} |\Phi(x,y)|^p dx)$$

appartiene a $L^\infty(R_x)$ *(risp.* $L^\infty(R_y)$ *) con la norma*

$$\|\Phi\|_{L_y^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})} = \operatorname{supess}_{x\in R_x} (\int_{R_y} |\Phi(x,y)|^p dy)^{1/p} \quad \forall \Phi \in L_y^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})$$

$$(risp.\ \|\Phi\|_{L_x^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})} = \operatorname{supess}_{y\in R_y} (\int_{R_x} |\Phi(x,y)|^p dx)^{1/p}\ \forall \Phi \in L_x^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})).$$

Dopo aver richiamato gli spazi di funzioni definite su insiemi rettangolari, passiamo ad occuparci degli spazi di funzioni aventi come dominio un insieme non limitato del tipo $L(\alpha, \beta)$.

Siano, d'ora in avanti, $\alpha, \beta \in]0, +\infty]$. Sia, inoltre, per brevità

$$L(\alpha, \beta) = L.$$

Definizione 5. (cfr. [9]). *$\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$ è lo spazio di Fréchet delle (classi di) funzioni misurabili $w : (x; y) \to w(x, y)$, da L in $\mathbb{R}^n$, le cui restrizioni ad ogni aperto limitato Ω la cui chiusura è contenuta in L appartengono a $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con la famiglia di seminorme*

$$\Pi_\Omega(w) = \|w\|_{W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)} \quad \forall w \in \widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n),$$

al variare di Ω nella famiglia degli insiemi aperti e limitati la cui chiusura è contenuta in L.

Per le funzioni di $\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$ si ha una caratterizzazione analoga a quella data nella Proposizione 1 degli elementi di $\widetilde{W}_p^*(R, \mathbb{R}^n)$.

Proposizione 4. (cfr. [9]). *Le funzioni $w \in \widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$ sono tutte e sole quelle del tipo:*

$$w(x, y) = \int_0^x \int_0^y \tilde{h}(u, v)dudv + \int_0^x \tilde{h}_1(u)du + \int_0^y \tilde{h}_2(v)dv + \lambda \quad \forall (x, y) \in L,$$

con

$$\tilde{h} \in L^p_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^n)(^2); \tilde{h}_i \in L^p_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n), \ i = 1, 2; \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Introduciamo adesso gli spazi dei coefficienti A e B.

Definizione 6. *$L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$ (risp. $L^{p,\infty}_{x,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$) è lo spazio lineare topologico separato e localmente convesso delle (classi di) funzioni misurabili $F : (x, y) \to F(x, y)$, da L in $\mathbb{R}^{n,n}$, le cui restrizioni ad ogni rettangolo aperto R, la cui chiusura è contenuta in L, appartengono a $L_y^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})$ (risp. $L_x^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})$), con la famiglia di seminorme*

$$q_{y,R}(F) = \|F\|_{L_y^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})} \quad \forall F \in L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$$

$$(risp.\ q_{x,R}(F) = \|F\|_{L_x^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})} \quad \forall F \in L^{p,\infty}_{x,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n}),$$

al variare di R nella famiglia dei rettangoli aperti la cui chiusura è contenuta in L.

(2) Per la definizione degli spazi L^p_{loc} cfr. la nota (4) di [9], oppure, per una trattazione più approfondita, il n. 2 di [5].

Ovviamente, per quanto riguarda $L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$, la topologia generata dalla famiglia di seminorme $\{q_{y,R} : \bar{R} \subset L\}$ è equivalente a quella generata dalla sua sottofamiglia numerabile $\{q_{y,R_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{q_{y,S_k} : k \in \mathbb{N}\}$, dove $R_k =]0, k[\times]0, \beta_k[$, $S_k =]0, \alpha_k[\times]0, k[$, $k \in \mathbb{N}$, essendo $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ due assegnate successioni crescenti di $\mathbb{R}^+$ aventi come limite, rispettivamente, α e β. $L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$ è quindi metrizzabile e poichè, come è facile verificare, è sequenzialmente completo, esso risulta completo; pertanto $L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$ è uno spazio di Fréchet. In maniera perfettamente analoga si ha che anche $L^{p,\infty}_{x,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$ è uno spazio di Fréchet.

Infine, per quanto riguarda lo spazio del dato al contorno del problema di Darboux, ricordiamo le seguenti definizioni.

Definizione 7. (cfr. [9]). $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ *è lo spazio di Fréchet delle (classi di) funzioni misurabili* φ*, da* $[0, +\infty[$ *in* $\mathbb{R}^n$*, le cui restrizioni ad ogni aperto limitato* $I \subset]0, +\infty[$ *appartengono allo spazio (di Sobolev)* $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$*, con la famiglia di seminorme*

$$\Pi_I(\varphi) = \|\varphi\|_{W^{1,p}(I,\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n),$$

al variare di I *nella famiglia degli insiemi aperti e limitati di* $]0, +\infty[$.

Definizione 8. (cfr. [9]). $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$ *è lo spazio di Fréchet*

$$\{(\varphi, \psi) \in \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi 0)\}(^3)$$

sottospazio lineare chiuso di $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$*, con la famiglia di seminorme*

$$\Pi_{I,J}(\varphi, \psi) = \Pi_I(\varphi) + \Pi_J(\psi) \quad \forall (\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p,$$

al variare di I, J *nella famiglia degli aperti limitati di* $]0, +\infty[$.

Ricordiamo inoltre che, se $w \in \widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$, la restrizione di w ad ogni insieme

$$l(x_0, y_0) = ([x_0, +\infty[\times\{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times [y_0, +\infty[), \quad (x_0, y_0) \in [0, \alpha[\times[0, \beta[,$$

individua un elemento

$$\gamma_{(x_0,y_0)} w = (\varphi_{(x_0,y_0),w}, \psi_{(x_0,y_0),w}) \in \widetilde{\Xi}^{(n)}_p$$

(che viene detto traccia di w su $l(x_0, y_0)$), mediante la posizione

$$\varphi_{(x_0,y_0),w}(t) = w(x_0 + t, y_0), \ \psi_{(x_0,y_0),w}(t) = w(x_0, y_0 + t) \quad \forall t \geq 0.$$

Si ha, in proposito, la

(3) La definizione ha senso in quanto gli elementi di $\widetilde{W}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ sono funzioni continue in $[0, +\infty[$ ([9], Teorema 2.2).

Proposizione 5. (cfr. [9]). *Per ogni* $(x_0, y_0) \in \,]0, \alpha[\times]0, \beta[$, *l'applicazione* $w \to \gamma_{(x_0,y_0)} w$ *è lineare, continua e suriettiva da* $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$ *su tutto* $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$.

3. Ipotesi sui coefficienti A, B, C.

Lo scopo di questo numero è quello di stabilire quali sono le ipotesi più generali per i coefficienti A, B, C del sistema (E), compatibilmente con l'ipotesi che il termine noto appartenga a $L^p_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$ e la richiesta che la soluzione stia in $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$.

D'ora in avanti, nel corso del lavoro, faremo uso delle seguenti notazioni.

Assegnate tre funzioni A, B, C da L in $\mathbb{R}^{n,n}$, conveniamo di indicare con P l'operatore differenziale lineare del secondo ordine su $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$ definito nel modo seguente:

$$Pw = w_{xy} + Aw_x + Bw_y + Cw \quad \forall w \in \widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n).$$

Denotiamo, poi, con $\mathscr{D}$ la famiglia dei rettangoli Δ del tipo $\Delta =]0, x_1[\times]0, y_1[$, $(x_1, y_1) \in \overset{\circ}{L}$.
Inoltre, in generale, data una funzione $g : X \to Y$ e dato un sottoinsieme $N \subseteq X$, denotiamo con g_N la restrizione di g a N.

Dimostriamo ora il

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè*

$$P(\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$$

è che per le funzioni A, B, C *risultino soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) $A \in L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$;

(2) $B \in L^{p,\infty}_{x,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$;

(3) $C \in L^{p}_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$.

Dimostrazione. Per ogni rettangolo aperto R con $\overline{R} \subset L$ denotiamo con P_R l'operatore differenziale su $W^*_p(R, \mathbb{R}^n)$ dato da

$$P_R\omega = \omega_{xy} + A_R(x, y)\omega_x + B_R(x, y)\omega_y + C_R(x, y)\omega \quad \forall \omega \in W^*_p(R, \mathbb{R}^n).$$

Risulta ovviamente

$$(Pw)_R = P_R w_R \quad \forall w \in \widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n).$$

Si ha inoltre che il verificarsi di (1), (2) e (3) equivale al verificarsi, per ogni rettangolo aperto R la cui chiusura è contenuta in L, delle condizioni:

$(1)_R$ $A_R \in L_y^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})$;

$(2)_R$ $B_R \in L_x^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})$;

$(3)_R$ $C_R \in L^p(R, \mathbb{R}^{n,n})$;

ovvero, come è ovvio, al verificarsi, per ogni rettangolo aperto $\Delta \in \mathscr{D}$, delle condizioni:

$(1)_\Delta$ $A_\Delta \in L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$;

$(2)_\Delta$ $B_\Delta \in L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$;

$(3)_\Delta$ $C_\Delta \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$.

Fatte queste premesse dimostriamo che la condizione è necessaria.

Sia $\Delta =]0, x_1[\times]0, y_1[$ un qualunque rettangolo appartenente alla famiglia $\mathscr{D}$ e sia ω un qualunque elemento di $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$.

Per la Proposizione 1, risulta:

$$\omega(x, y) = \int_0^x \int_0^y h(u, v)dudv + \int_0^x h_1(u)du + \int_0^y h_2(v)dv + \lambda \quad \forall (x, y) \in \Delta,$$

con

$$h \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n), h_1 \in L^p(]0, x_1[, \mathbb{R}^n), h_2 \in L^p(]0, y_1[, \mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Posto

$$\tilde{h}(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & \text{se} \quad (x, y) \in \Delta \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) \in L \setminus \Delta \end{cases}$$

$$\tilde{h}_1(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{se} \quad x \in]0, x_1[\\ 0 & \text{se} \quad x \in [0, +\infty[\setminus]0, x_1[\end{cases}$$

$$\tilde{h}_2(y) = \begin{cases} h_2(y) & \text{se} \quad y \in]0, y_1[\\ 0 & \text{se} \quad y \in [0, +\infty[\setminus]0, y_1[\end{cases}$$

risulta

$$\tilde{h} \in L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n); \tilde{h}_i \in L^p_{\text{loc}}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n), \ i = 1, 2; \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

quindi, per la Proposizione 4, la funzione

$$w(x, y) = \int_0^x \int_0^y \tilde{h}(u, v)dudv + \int_0^x \tilde{h}_1(u)du + \int_0^y \tilde{h}_2(v)dv + \lambda \quad \forall (x, y) \in L$$

è un elemento di $\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$; pertanto si ha

$$Pw \in P(\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n))$$

e dunque, per ipotesi,

$$Pw \in L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n).$$

Poichè, ovviamente, $w_\Delta = \omega$, si ha

$$P_\Delta \omega = (Pw)_\Delta \in L^p(\Delta, \mathbb{R}^n),$$

cioè, per l'arbitrarietà di $\omega \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$,

$$P_\Delta(W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)) \subseteq L^p(\Delta, \mathbb{R}^n),$$

ma ciò, per il Teorema 2.2 di [2], equivale al verificarsi delle condizioni $(1)_\Delta$, $(2)_\Delta$, $(3)_\Delta$.

Poichè $\Delta \in \mathscr{D}$ è arbitrario, rimane provata la necessità della condizione.

La condizione è sufficiente. Basta dimostrare che, data una qualunque funzione $w \in \widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$, risulta

$$(Pw)_R \in L^p(R, \mathbb{R}^n)$$

per ogni rettangolo aperto R con $\bar{R} \subset L$.

Infatti, essendo verificate le condizioni $(1)_R$, $(2)_R$, $(3)_R$, per il Teorema 2.2 di [2], risulta $P_R w_R \in L^p(R, \mathbb{R}^n)$ e quindi, per una delle osservazioni precedenti, $(Pw)_R \in L^p(R, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Immediata conseguenza del precedente teorema è la

Proposizione 6. *Sia $P(\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)) \subseteq L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore lineare P, da $\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$ in $L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$, è continuo.*

Dimostrazione. Fissato un qualunque rettangolo R la cui chiusura è contenuta in L, si ha, per ogni $w \in \widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$, tenendo presenti le Definizioni 2 e 4 e la Proposizione 3,

$$\begin{aligned}
\|Pw\|_{L^p(\bar{R}, \mathbb{R}^n)} &= \|Pw\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} \leq \|w_{xy}\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} + \|Aw_x\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} + \\
&+ \|Bw_y\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} + \|Cw\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} \leq \|w_{xy}\|_{L^p(R, \mathbb{R}^n)} + \\
&+ \|A\|_{L_y^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})} \|w_x\|_{L_y^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})} + \\
&+ \|B\|_{L_x^{p,\infty}(R, \mathbb{R}^{n,n})} \|w_y\|_{L_x^{\infty,p}(R, \mathbb{R}^{n,n})} + \|C\|_{L^p(R, \mathbb{R}^{n,n})} \|w\|_{L^\infty(R, \mathbb{R}^{n,n})} \leq \\
&\leq c|\|w\||_{W_p^*(R, \mathbb{R}^n)} \leq cH\|w\|_{W_p^*(R, \mathbb{R}^n)} = cH\Pi_R(w)
\end{aligned}$$

dove $c = \sup(\|A\|_{L_y^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})}, \|B\|_{L_x^{p,\infty}(R,\mathbb{R}^{n,n})}, \|C\|_{L^p(R,\mathbb{R}^{n,n})}, 1)$ e H è una costante dipendente solo del rettangolo R.

Conseguentemente, per ogni compatto K contenuto in L, poichè è possibile trovare una famiglia finita di rettangoli $R_1, \dots, R_r$ tali che $K \subset \bar{R}_1 \cup \dots \cup \bar{R}_r$, risulta

$$\|Pw\|_{L^p(K,\mathbb{R}^n)} \leq \text{ cost } \cdot \sum_{i=1}^{r} \Pi_{R_i}(w) \quad \forall w \in \widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n).$$

Ciò prova la continuità dell'operatore P dato che la topologia di $L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$ è generata dalla famiglia di seminorma

$$\{\|\cdot\|_{L^p(K,\mathbb{R}^n)} : K \subset L,\ K \text{ compatto}\}. \qquad \square$$

4. Problema di Darboux: esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dai dati e dai coefficienti.

Fissati nel sistema (E) i coefficienti A, B, C verificanti le ipotesi (1), (2), (3) (quindi tali da aversi $P(\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)) \subseteq L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n))$ ed il termine noto $f \in L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$, ed assegnato il dato al contorno $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ su l, $(0, 0)$, consideriamo il corrispondente Problema di Darboux, cioè, mantenendo le notazioni introdotte nei numeri precedenti, il Problema:

$$(*) \qquad \begin{cases} Pz = f \\ \gamma_{(0,0)} z = (\varphi, \psi). \end{cases}$$

Cominciamo con il dimostrare il

Teorema 2. *Siano A, B, C tre funzioni verificanti le ipotesi* (1), (2), (3). *Allora per ogni $(\varphi, \psi) \in \widetilde{\Xi}_p^{(n)}$ ed ogni $f \in L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$, esiste una ed una sola funzione z, elemento di $\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$, soluzione del Problema* $(*)$.

Dimostrazione. Siano $(\varphi, \psi) \in \tilde{\Xi}_p^{(n)}$ e $f \in L^p_{\text{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$. Allora, fissato un qualunque rettangolo $\Delta \in \mathscr{D}$, per il Teorema 3.1 di [2], esiste una ed una sola funzione $\omega \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$ soluzione del Problema

$$(*)_\Delta \qquad \begin{cases} (P_\Delta \omega)(x, y) = f(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in \Delta \\ \omega(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in]0, x_1[\\ \omega(0, y) = \psi(y) & \forall y \in]0, y_1[. \end{cases}$$

L'unicità della funzione ω implica che, considerato un qualunque altro rettangolo $\Delta' \in \mathscr{D}$ e denotata con ω' la corrispondente soluzione di $(*)_{\Delta'}$, risulta

$$\omega(x, y) = \omega'(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta \cap \Delta'.$$

Da ciò segue che, considerate le successioni $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ introdotte nelle considerazioni seguenti la Definizione 6 e posto $\Omega_k = R_k \cup S_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una ed una sola funzione $z_k \in W_p^*(\Omega_k, \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} (P_{\Omega_k} z_k)(x, y) = f(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in \Omega_k \\ z_k(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, \alpha_k \vee k] \\ z_k(0, y) = \psi(y) & \forall y \in [0, \beta_k \vee k]. \end{cases}$$

Inoltre, se $k \leq h$, si ha $\Omega_k \subseteq \Omega_h$ e

$$z_k(x, y) = z_h(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_k.$$

Poichè la successione $\{\overline{\Omega}_k\}_{k\in N}$ invade L (cioè per ogni compatto K contenuto in L esiste $\bar{k} \in N$ tale che $K \subseteq \overline{\Omega}_{\bar{k}}$) se ne deduce facilmente che la funzione z data da

$$z(x, y) = \begin{cases} z_1(x, y) & \text{se} \quad (x, y) \in \Omega_1 \\ z_k(x, y) & \text{se} \quad (x, y) \in \Omega_k \setminus \Omega_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

appartiene a $W_p^*(L, \mathbb{R}^n)$ ed è l'unica soluzione del Problema $(*)$. $\square$

Allo scopo di studiare la dipendenza di z, unica soluzione del Problema di Darboux $(*)$, dal dato al contorno (φ, ψ), dal termine noto f e dai coefficienti A, B, C, è opportuno indicare in maniera esplicita tale dipendenza. Introduciamo pertanto le seguenti notazioni.

Denotiamo con $\widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n})$ e $D^p(L, \mathbb{R}^n)$, rispettivamente gli spazi di Fréchet prodotto $L^{p,\infty}_{y,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n}) \times L^{p,\infty}_{x,\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n}) \times L^p_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^{n,n})$ e $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p \times L^p_{\mathrm{loc}}(L, \mathbb{R}^n)$. Inoltre per ogni $M = (A, B, C) \in \widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n})$ ed ogni $d = ((\varphi, \psi), f) \in \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$, considerato il corrispondente Problema $(*)$, indichiamo con

$$z(\cdot; (M, d)) : (x, y) \to z(x, y; (M, d)), \quad (x, y) \in L,$$

l'unica funzione, elemento di $\widetilde{W}_p^*(L, \mathbb{R}^n)$, soluzione di $(*)$.

Esaminiamo dapprima la dipendenza di $z(\cdot; (M, d))$ dal complesso dei dati $d = ((\varphi, \psi), f) \in \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$.

Si ha in proposito il seguente

Teorema 3. *Fissato* $M \in \widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n})$*, la trasformazione funzionale*

$$d \to z(\cdot; (M, d))$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra $\widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$ *e* $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Dall'unicità della soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} Pz = 0 \\ \gamma_{(0,0)} z = \theta \end{cases}$$

(θ elemento nullo di $\widetilde{\Xi}^{(n)}_p$) segue immediatamente che l'applicazione $d \to z(\cdot; (M, d))$, che è ovviamente lineare, è iniettiva. Essa è inoltre suriettiva (basta applicare gli operatori P e $\gamma_{(0,0)}$ ad un qualunque elemento $w \in \widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$).

Infine, per completare la dimostrazione, poichè $\widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$ e $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$ sono spazi di Fréchet, basta provare la continuità della trasformazione inversa, ovvero della trasformazione $z \to (\gamma_{(0,0)} z, Pz)$, ciò che è immediata conseguenza della continuità degli operatori P e $\gamma_{(0,0)}$. $\square$

Passando alla dipendenza continua di $z(\cdot; (M, d))$ dal complesso coefficienti-dati (M, d) dimostriamo, infine, il

Teorema 4. *La trasformazione funzionale* $(M, d) \to z(\cdot; (M, d))$*, dallo spazio di Fréchet prodotto* $\widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n}) \times \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$ *in* $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$*, che al complesso coefficenti-dati associa l'unica soluzione del Problema di Darboux* $(*)$*, è uniformemente continua* (4) *in ogni insieme limitato di* $\widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n}) \times \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Sia G un sottoinsieme limitato di $\widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n}) \times \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$.

Osserviamo, innanzitutto, che le topologie di $\widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n})$ e $\widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n)$ sono generate rispettivamente dalle famiglie di seminorme

$$\mu_\Delta(M) = \|A\|_{L^{p,\infty}_y(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})} + \|B\|_{L^{p,\infty}_x(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})} + \|C\|_{L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})} \qquad \forall M = (A, B, C) \in \widetilde{M}^p(L, \mathbb{R}^{n,n}),$$

$$\nu_\Delta(d) = \|\varphi\|_{W^{1,p}(]0,x_1[, \mathbb{R}^n)} + \|\psi\|_{W^{1,p}(]0,y_1[, \mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^p(\Delta, \mathbb{R}^n)} \qquad \forall d = ((\varphi, \psi), f) \in \widetilde{D}^p(L, \mathbb{R}^n),$$

ottenute al variare del rettangolo $\Delta =]0, x_1[\times]0, y_1[$ in $\mathscr{D}$. D'altra parte anche la topologia di $\widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n)$ si può considerare generata dalla famiglia di seminorme

$$\Pi_\Delta(w) = \|w\|_{W^*_p(\Delta, \mathbb{R}^n)} \quad \forall w \in \widetilde{W}^*_p(L, \mathbb{R}^n),$$

(4) Nel senso degli spazi vettoriali topologici (cfr., ad es., [3], p. 129, Def. 3).

al variare di Δ in $\mathcal{D}$. Pertanto, la asserita uniforme continuità della trasformazione $(M, d) \to z(\cdot; (M, d))$ nell'insieme G è equivalente alla validità della seguente affermazione:

(u) per ogni $\Delta \in \mathcal{D}$ ed ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\Delta_1, \ldots, \Delta_r \in \mathcal{D}$ e $\delta > 0$ tali da aversi

$$\Pi_\Delta(z(\cdot; (M', d')) - z(\cdot; (M'', d''))) < \varepsilon$$

per ogni coppia (M', d'), (M'', d'') di elementi di G soddisfacenti le condizioni

$$\mu_{\Delta_i}(M' - M'') + \nu_{\Delta_i}(d' - d'') < \delta \quad \forall i = 1, \ldots, r.$$

Per dimostrare ciò fissiamo $\Delta =]0, x_1[\times]0, y_1[\in \mathcal{D}$ ed osserviamo che la limitatezza di G implica che l'insieme

$$G_\Delta = \{(M_\Delta, d_\Delta) : (M, d) \in G\},$$

dove $M_\Delta = (A_\Delta, B_\Delta, C_\Delta)$ e $d_\Delta = ((\varphi_{]0,x_1[}, \psi_{]0,y_1[}), f_\Delta)$, è un sottoinsieme limitato dello spazio di Fréchet prodotto $M^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times D^p(\Delta, \mathbb{R}^n$, essendo

$$M^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) = L_y^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L_x^{p,\infty}(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times L^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n})$$

e

$$D^p(\Delta, \mathbb{R}^n) = W^{1,p}(]0, x_1[, \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(]0, y_1[, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Delta, \mathbb{R}^n).$$

Consideriamo adesso la trasformazione funzionale $(M_1, d_1) \to \omega(\cdot; (M_1, d_1))$, da $M^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times D^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$ in $W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$, ottenuta associando ad ogni $(M_1, d_1) \in M^p(\Delta, \mathbb{R}^{n,n}) \times D^p(\Delta, \mathbb{R}^n)$, con $M_1 = (A_1, B_1 C_1)$ e $d_1 = ((\varphi_1, \psi_1), f_1)$, l'unica funzione $\omega = \omega(\cdot; (M_1, d_1)) \in W_p^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$ soluzione del Problema di Darboux

$$\begin{cases} \omega_{xy} + A_1(x, y)\omega_x + B_1(x, y)\omega_y + C_1(x, y)\omega = f_1(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in \Delta \\ \omega(x, 0) = \varphi_1(x) & \forall x \in]0, x_1[\\ \omega(0, y) = \psi_1(y) & \forall y \in]0, y_1[. \end{cases}$$

Il Teorema 5 di [7] assicura che tale trasformazione funzionale è lipschitziana in G_Δ, cioè esiste una costante $T = T(\Delta, G) > 0$ tale che

$$\|\omega(\cdot;(M_1',d_1'))-\omega(\cdot;(M_1'',d_1''))\|_{W_p^*(\Delta,\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq T(\|M_1'-M_1''\|_{M^p(\Delta,\mathbb{R}^{n,n})}+\|d_1'-d_1''\|_{D^p(\Delta,\mathbb{R}^n)})$$
$$\forall (M_1',d_1'),(M_1'',d_1'')\in G_\Delta.$$

Per quanto osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 2 si ha che per ogni $(M,d)\in \widetilde{M}^p(L,\mathbb{R}^{n,n})\times \widetilde{D}^p(L,\mathbb{R}^n)$ la funzione $\omega(\cdot;(M_\Delta,d_\Delta))$ non è altro che la restrizione della funzione $z(\cdot;(M,d))$ a Δ; conseguentemente la precedente disuguaglianza si può scivere

$$\Pi_\Delta(z(\cdot;(M',d'))-z(\cdot;M'',d''))) \leq T(\mu_\Delta(M'-M'')+$$
$$+\nu_\Delta(d'-d'')) \quad \forall (M',d'),(M'',d'')\in G,$$

da cui è immediata la verifica della validità della (u). Ciò completa la dimostrazione. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Di Vincenzo - A. Villani, *Sopra un problema ai limiti per un'equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione,* Le Matematiche, 32 (1977), pp. 211–238.

[2] G. Emmanuele - A. Villani, *A Linear Hyperbolic System and an Optimal Control Problem,* Journal of Optimization Theory and Applications, 44 (1984), pp. 213–229.

[3] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions,* Volume I, Addison-Wesley Publishing Company Reading Massachusetts, 1966.

[4] G. Pulvirenti - G. Santagati, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa approssimata,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 35–50.

[5] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Insieme raggiungibile,* Bollettino U.M.I., (7) 4-B (1990), pp. 345–379.

[6] M.B. Suryanarayana, *A Sobolev Space and a Darboux problem,* Pacific J. Math., 69 (1977), pp. 535–550.

[7] G. Tomaselli, *Sulla dipendenza continua della soluzione del problema di Darboux dai coefficienti dell'equazione,* Le Matematiche, 41 (1986), pp. 143–160.

[8] A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa esatta,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 19–33.

[9] A. Villani, *Un problema al contorno per un sistema lineare iperbolico su un insieme non limitato,* Le Matematiche, 36 (1981), pp. 215–234.

Dipartimento di Matematica,
Università di Messina,
98166 S. Agata, Messina (ITALY),
e-mail: sturiale@dipmat.unime.it