

LE MATEMATICHE  
Vol. LX (2005) – Fasc. I, pp. 189–240

## PROCESSI DI CONTROLLO CON PARAMETRI DISTRIBUITI IN INSIEMI NON LIMITATI. CONTROLLABILITÀ CON LUOGO INIZIALE VARIABILE

GIUSEPPE PULVIRENTI - GIUSEPPE SANTAGATI - ALFONSO VILLANI

We study the controllability with variable initial locus of the following distributed parameter linear control system

$$(E) \quad z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = F(x, y)U(x, y).$$

Here  $(x, y)$  ranges over the following unbounded subset of  $\mathbb{R}^2$ :

$$L_{I,J} = \bigcup_{(u,v) \in I \times J} l(u, v),$$

where  $I, J$  are two non-degenerate intervals of  $\mathbb{R}$  and

$$l(u, v) = ([u, +\infty[ \times \{v\}) \cup (\{u\} \times [v, +\infty[), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

The state vector function  $z$  belongs to the Sobolev type space

$$W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) = \left\{ z \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) : z_x, z_y, z_{xy} \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \right\}$$

and the control vector function  $U$  is in  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ . Moreover, for every  $(u, v) \in I \times J$ , the trace of  $z$  on  $l(u, v)$  is taken as the system state

---

Entrato in redazione l'8 Aprile 2004.

corresponding to the values  $x = u$ ,  $y = v$  of the parameters. All these traces belong to a functional space of Sobolev type, which does not depend on  $(u, v)$ .

In this setting, given a point  $(a, b) \in I \times J$ , we study the controllability of system (E) from a given initial state, to be attained on the variable initial locus  $l(a_0, b_0)$ ,  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , to an arbitrary final state, to be attained on the fixed final locus  $l(a, b)$ .

We consider both exact and approximate controllability. We get a characterization of the approximate controllability when the set of the available controls is the unit ball of  $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ ,  $q \geq p$ . Also, assuming a suitable invertibility property for the matrix  $F$ , we show a necessary and sufficient condition for the exact controllability when a larger set of available controls is considered. Finally, we study the permanence of both controllability properties with respect to changes of the fixed final locus  $l(a, b)$ .

## 1. Introduzione.

Posto, per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$l(u, v) = ([u, +\infty[ \times \{v\}) \cup (\{u\} \times [v, +\infty[)$$

e assegnati due qualsiasi intervalli non degeneri  $I, J$  di  $\mathbb{R}$ , denotiamo con  $L_{I,J}$  l'insieme non limitato di  $\mathbb{R}^2$

$$L_{I,J} = \bigcup_{(u,v) \in I \times J} l(u, v)$$

e consideriamo il processo di controllo con parametri distribuiti

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z &= \\ &= F(x, y)U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $A, B, C$  e  $F$  verificano le ipotesi:

$$A, B, C, A_x, B_y \in C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n}) \quad ; \quad F \in L_{\text{loc}}^\infty(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,m});$$

il controllo  $U$  è in  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  e la risposta  $z$  nello spazio del tipo di Sobolev

$$W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) = \left\{ z \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) : z_x, z_y, z_{xy} \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Relativamente al processo di controllo (E) assumiamo come *stato* del sistema corrispondente ai valori dei parametri  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $(u, v) \in I \times J$ , la traccia di  $z$  su  $l(u, v)$ . Tale traccia è un elemento dello spazio funzionale

$$\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)} = \left\{ (\varphi, \psi) \in W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0) \right\},$$

anche questo del tipo di Sobolev, indipendente da  $(u, v)$ .

In precedenti lavori (A. Villani [11], G. Pulvirenti - G. Santagati [4]), supponendo che il controllo  $U$  potesse variare in tutto lo spazio  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , fissati il *luogo iniziale*  $l(a_0, b_0)$  e il *luogo finale*  $l(a, b)$ , con  $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$  tali che  $a_0 < a, b_0 < b$ , nei quali il sistema assume, rispettivamente, lo *stato iniziale* e lo *stato finale*, abbiamo stabilito delle condizioni affinché per ogni stato iniziale il corrispondente insieme degli stati finali (*insieme raggiungibile*) sia coincidente con lo spazio  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  (problema della *controllabilità completa esatta*) ovvero sia un insieme ivi denso (problema della *controllabilità completa approssimata*).

In questo lavoro, prendendo lo spunto da un analogo problema di controllabilità per processi a parametri concentrati studiato in R. Conti [1], nn. VI. 4 e VI. 5, supponiamo che il controllo  $U$  non possa variare in tutto lo spazio  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  ma appartenga ad un suo sottoinsieme proprio  $\mathcal{U}$ , mentre il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  non è più assegnato a priori ma può variare con  $(a_0, b_0) \in I \times J, a_0 \leq a, b_0 \leq b$ .

Preliminarmente, precisati gli spazi funzionali utilizzati (n. 2) e studiato un sistema lineare iperbolico (n. 3), diamo una formula di rappresentazione delle soluzioni di (E) (n. 4), a partire dalla quale otteniamo (n. 5) una caratterizzazione dell'insieme raggiungibile (quando il luogo iniziale e quello finale sono entrambi fissati).

Supponendo che il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  possa variare e assumendo come stato iniziale, sul luogo iniziale variabile  $l(a_0, b_0)$ , un dato elemento  $(\varphi_0, \psi_0)$  di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , consideriamo l'insieme, di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , unione dei corrispondenti insiemi raggiungibili sul luogo finale assegnato  $l(a, b)$  e prendiamo in esame (n. 6) i problemi consistenti nello stabilire quando il predetto insieme coincida con  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  (problema della *controllabilità esatta con luogo iniziale variabile*) oppure sia un sottoinsieme denso di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  (problema della *controllabilità approssimata con luogo iniziale variabile*).

Relativamente a quest'ultimo problema, nel caso in cui  $(\varphi_0, \psi_0)$  è l'elemento nullo di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  e  $\mathcal{U}$  è la palla unitaria di  $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ ,  $q \in [p, +\infty]$ , riusciamo a stabilire (n. 7), mediante l'uso dell'*aggiunta* di una opportuna applicazione, una condizione necessaria e sufficiente di risolubilità, pervenendo così ad una condizione di controllabilità approssimata, utile quando non si

ha a disposizione tutto lo spazio dei controlli ma è possibile considerare gli stati iniziali su un luogo iniziale variabile. La condizione trovata, che nel caso particolare  $q = +\infty$  è stata comunicata in G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [7], è analoga alla condizione necessaria e sufficiente di controllabilità completa approssimata, con luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  e luogo finale  $l(a, b)$  fissati, stabilita in G. Pulvirenti - G. Santagati [4], e si esprime mediante l'integrale di un funzionale costruito a partire dai dati.

Nel n. 8 studiamo il problema della controllabilità esatta con luogo iniziale variabile, rilevando, inizialmente, che tale problema non è mai risolubile se lo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0)$  e l'insieme dei controlli disponibili  $\mathcal{U}$  sono scelti come in precedenza. Considerato, invece, come insieme  $\mathcal{U}$  l'insieme delle funzioni  $U \in L_{loc}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  la cui restrizione all'insieme  $L_{I,J} \cap (] - \infty, a[ \times ] - \infty, b[)$  appartiene alla palla unitaria del relativo spazio  $L^q$ ,  $q \in [p, +\infty]$ , dimostriamo, adottando sulla matrice funzione  $F$  opportune ipotesi di invertibilità, una condizione necessaria e sufficiente di risolubilità del problema della controllabilità esatta con luogo iniziale variabile, analoga alla condizione di controllabilità completa esatta, con luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  e luogo finale  $l(a, b)$  fissati, ottenuta in A. Villani [11]; anche in questo caso la condizione si esprime mediante l'integrale di un funzionale costruito a partire dai dati.

Nel n. 9 ci occupiamo della questione della permanenza, rispetto a "spostamenti" del luogo finale assegnato  $l(a, b)$ , della controllabilità, sia esatta che approssimata, con luogo iniziale variabile e dimostriamo, sotto ipotesi abbastanza ampie, che entrambi i tipi di controllabilità sono proprietà che permangono al "crescere" dei parametri  $a$  e  $b$ .

Il n. 10, infine, è un breve paragrafo essenzialmente tecnico, nel quale si prova che un'ipotesi precedentemente adottata per semplificare l'esposizione può essere omessa.

Nel corso del lavoro vari esempi illustrano i risultati ottenuti e ne mostrano applicazioni.

## 2. Spazi funzionali.

Riportiamo, in questo numero, le definizioni e le principali proprietà degli spazi funzionali che utilizzeremo in seguito; per maggiori dettagli rinviamo al n. 2 di A. Villani [10] ed ai nn. 2 e 3 di G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5].

Siano, d'ora in poi:  $p, p'$  elementi coniugati di  $[1, +\infty]$ ;  $X$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^d$  avente misura positiva.

**Definizione 2.1.**  $L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s)$  è lo spazio l.t. <sup>(1)</sup> completo delle [classi di] funzioni misurabili  $l : X \rightarrow \mathbb{R}^s$  le cui restrizioni ad ogni compatto  $K \subseteq X$  appartengono a  $L^p(K, \mathbb{R}^s)$ , con la famiglia di seminorme

$$\pi_K(l) = \|l\|_{L^p(K, \mathbb{R}^s)} \quad \forall l \in L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s),$$

al variare del compatto  $K \subseteq X$ .

È bene ricordare che (cfr. A. Villani [12]) lo spazio  $L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s)$  risulta metrizzabile, e quindi di Fréchet, se e solo se esiste una successione  $\{C_r\}$  di sottoinsiemi compatti di  $X$  tale che, per ogni compatto  $K \subseteq X$ , si abbia  $m(K \setminus C_r) = 0$  per qualche  $r \in \mathbb{N}$ , oppure, più semplicemente, nel caso in cui  $\overset{\circ}{X}$  è denso in  $X$ , se e solo se  $\overline{X} \setminus X$  è un insieme chiuso; quest'ultima circostanza è sempre verificata nei casi considerati nel presente lavoro.

**Definizione 2.2.**  $L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$  è lo spazio l.t. delle [classi di] funzioni misurabili  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R}^s$  che appartengono a  $L^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$  e sono a supporto compatto in  $X$ , con la famiglia di seminorme

$$\pi_Y(\sigma) = \sup_{l \in Y} \left| \int_X \sigma^*(x)l(x) dx \right| \quad \forall \sigma \in L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s),$$

al variare di  $Y$  nella famiglia degli insiemi limitati <sup>(2)</sup> di  $L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s)$ .

Considerata l'applicazione  $\sigma \rightarrow l'(\sigma)$ , da  $L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$  in  $(L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s))'$ , spazio duale forte di  $L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s)$ , definita ponendo

$$(2.1) \quad \langle l, l'(\sigma) \rangle = \int_X \sigma^*(x)l(x) dx \quad \forall l \in L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s),$$

si ha il

**Teorema 2.1.** *L'applicazione  $\sigma \rightarrow l'(\sigma)$ , che ad ogni  $\sigma \in L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$  associa l'elemento  $l'(\sigma)$  di  $(L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s))'$  dato dalla (2.1), è un isomorfismo algebrico e topologico tra  $L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s)$  e  $l'(L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s))$ , sottospazio lineare di  $(L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s))'$ . Se  $p \in [1, +\infty[$  si ha*

$$l'(L_c^{p'}(X, \mathbb{R}^s)) = (L_{loc}^p(X, \mathbb{R}^s))'.$$

<sup>(1)</sup> cioè lineare topologico, separato e localmente convesso.

<sup>(2)</sup> nel senso degli spazi lineari topologici.

**Definizione 2.3.** Se  $\Omega$  è un aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$  è lo spazio di Banach delle [classi di] funzioni misurabili  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che  $w, w_x, w_y, w_{xy} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$  (le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni su  $\Omega$ ), con la norma

$$\begin{aligned} & \|w\|_{W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \\ & = \left( \|w\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}^p + \|w_x\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}^p + \|w_y\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}^p + \|w_{xy}\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ & \quad p \in [1, +\infty[ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|w\|_{W_\infty^*(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \\ & = \sup \{ \|w\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)}, \|w_x\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)}, \|w_y\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)}, \|w_{xy}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \}. \end{aligned}$$

Gli spazi  $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , studiati in R. Di Vincenzo - A. Villani [2] e M. B. Suryanarayana [9], intervengono nella successiva definizione riguardante lo spazio delle soluzioni di (E).

**Definizione 2.4.** Se  $I, J$  sono due intervalli non degeneri di  $\mathbb{R}$ ,  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  è lo spazio di Fréchet delle [classi di] funzioni misurabili  $w : L_{I,J} \rightarrow \mathbb{R}^n$  le cui restrizioni ad ogni aperto limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $\overline{\Omega} \subseteq L_{I,J}$  appartengono a  $W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , con la famiglia di seminorme

$$\pi_\Omega(w) = \|w\|_{W_p^*(\Omega, \mathbb{R}^n)} \quad \forall w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n),$$

al variare di  $\Omega$  nella famiglia degli insiemi aperti e limitati di  $\mathbb{R}^2$  tali che  $\overline{\Omega} \subseteq L_{I,J}$ .

È ovvio che gli elementi di  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  sono tutte e sole le funzioni  $w$  tali che  $w, w_x, w_y, w_{xy} \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  (la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni su  $\overset{\circ}{L}_{I,J}$ ). Inoltre, denotato con  $I^\infty$  [risp.  $J^\infty$ ] l'unione dell'intervallo  $I$  [risp.  $J$ ] e dell'insieme (eventualmente vuoto) dei suoi maggioranti ed indicato con  $\mathcal{S}_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  lo spazio di Fréchet prodotto

$$L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p(J^\infty, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

con ragionamenti analoghi a quelli seguiti in A. Villani [10] (Teorema 2.1 e Proposizione 2.2) si dimostra il seguente

**Teorema 2.2.** *Fissato un qualunque  $(\bar{a}, \bar{b}) \in I \times J$ , si ha:*

1) *gli elementi di  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  sono tutte e sole le funzioni  $w$  della forma*

$$(2.2) \quad w(x, y) = \int_{\bar{a}}^x \int_{\bar{b}}^y h(u, v) \, dudv + \int_{\bar{a}}^x h_1(u) \, du + \\ + \int_{\bar{b}}^y h_2(v) \, dv + \lambda \quad \forall (x, y) \in L_{I,J},$$

con  $(h, h_1, h_2, \lambda) \in \mathcal{S}_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ ;

2) *la trasformazione lineare  $(h, h_1, h_2, \lambda) \rightarrow w$ , data dalla (2.2), è un isomorfismo algebrico e topologico tra  $\mathcal{S}_{p,\text{loc}}(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  e  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ .*

**Corollario 2.1.** *Si ha:*

$$W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \subset C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$$

*algebricamente e topologicamente* <sup>(3)</sup> .

La continuità delle funzioni  $w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  comporta l'esistenza delle loro tracce su ogni insieme  $l(u, v)$  con  $(u, v) \in I \times J$ .

È notevole il fatto che tali tracce possono essere riguardate come elementi di uno stesso spazio funzionale  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  (lo spazio  $\tilde{\Xi}_p^{(n)}$  già considerato in precedenti lavori; cfr., ad es., G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) indipendente da  $(u, v)$ .

Allo scopo di richiamare la definizione ed alcune proprietà di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , utili nel seguito, riportiamo, per completezza, la

**Definizione 2.5.**  $W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $G$  intervallo non degenere di  $\mathbb{R}$ , è lo spazio di Fréchet delle [classi di] funzioni misurabili  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  le cui restrizioni ad ogni aperto limitato  $A$  tale che  $\bar{A} \subseteq G$  appartengono allo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(A, \mathbb{R}^n)$ , con la famiglia di seminorme

$$\pi_A(\varphi) = \|\varphi\|_{W^{1,p}(A, \mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n),$$

al variare di  $A$  nella famiglia degli insiemi aperti e limitati tali che  $\bar{A} \subseteq G$ .

---

<sup>(3)</sup> se  $C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  è munito della topologia di  $L_{\text{loc}}^\infty(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ .

Analogamente a quanto visto per  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ , gli elementi di  $W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n)$  sono tutte e sole le funzioni  $\varphi$  che appartengono a  $L_{\text{loc}}^p(G, \mathbb{R}^n)$  assieme alle derivate prime (nel senso delle distribuzioni su  $\overset{\circ}{G}$ ) e sussiste il seguente

**Teorema 2.3.** *Fissato un qualunque  $\bar{t} \in G$ , si ha:*

1) *gli elementi di  $W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n)$  sono tutte e sole le funzioni  $\varphi$  della forma*

$$(2.3) \quad \varphi(t) = \int_{\bar{t}}^t k(s) ds + \delta \quad \forall t \in G,$$

con  $(k, \delta) \in L_{\text{loc}}^p(G, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  ;

2) *la trasformazione lineare  $(k, \delta) \rightarrow \varphi$ , data dalla (2.3), è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto  $L_{\text{loc}}^p(G, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  e  $W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n)$ .*

Dai Teoremi 2.2 e 2.3 discende, ovviamente, il

**Corollario 2.2.** *Per ogni  $w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  risulta:*

$$w(\cdot, y) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \quad \forall y \in J \quad , \quad w(x, \cdot) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n) \quad \forall x \in I .$$

*Inoltre, per ogni  $y \in J$  [risp.  $x \in I$ ], la trasformazione*

$$w \rightarrow w(\cdot, y) \quad [\text{risp. } w \rightarrow w(x, \cdot)]$$

*è lineare e continua da  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  su  $W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n)$  [risp.  $W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n)$ ].*

Ovviamente, il Teorema 2.3 assicura che gli elementi di  $W_{\text{loc}}^{1,p}(G, \mathbb{R}^n)$  sono funzioni continue in  $G$ . Pertanto ha senso la seguente

**Definizione 2.6.**  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  è lo spazio di Fréchet

$$\left\{ (\varphi, \psi) \in W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) : \varphi(0) = \psi(0) \right\},$$

sottospazio lineare chiuso dello spazio di Fréchet prodotto

$$W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$$

munito della famiglia di seminorme

$$\pi_{A,B}(\varphi, \psi) = \pi_A(\varphi) + \pi_B(\psi)$$

$$\forall (\varphi, \psi) \in W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$$

al variare degli aperti limitati  $A, B \subset ]0, +\infty[$ .



Dal Teorema 2.3 segue, inoltre, il

**Teorema 2.4.** *Gli elementi di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  sono tutte e sole le coppie di funzioni  $(\varphi, \psi)$  della forma*

$$(2.4) \quad \varphi(t) = \int_0^t k(s) ds + \delta, \quad \psi(t) = \int_0^t l(s) ds + \delta \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

con

$$(k, l, \delta) \in L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n;$$

la trasformazione lineare  $(k, l, \delta) \rightarrow (\varphi, \psi)$ , data dalla (2.4), è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio di Fréchet prodotto

$$L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

e  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ .

Conseguentemente, poichè l'isomorfismo inverso di  $(k, l, \delta) \rightarrow (\varphi, \psi)$  è la trasformazione che ad ogni  $(\varphi, \psi) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  fa corrispondere

$$(\varphi', \psi', \varphi(0)) \in L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

si ha, per il Teorema 2.1,

**Teorema 2.5.** *Se  $p \in [1, +\infty[$ , l'applicazione che ad ogni elemento  $(\mu, \nu, \xi)$  dello spazio l.t. prodotto*

$$L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

fa corrispondere l'elemento  $Q$  dello spazio  $(\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)})'$ , duale forte di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , dato da

$$(2.5) \quad \langle (\varphi, \psi), Q \rangle = \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \varphi'(t) dt + \\ + \int_0^{+\infty} \nu^*(t) \psi'(t) dt + \xi^* \varphi(0) \quad \forall (\varphi, \psi) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)},$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra  $L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  e  $(\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)})'$ .

Di conseguenza (cfr. G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [6]) si ha il

**Teorema 2.6.** *Se  $p \in ]1, +\infty[$ , lo spazio  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  è riflessivo.*

Al fine di poter considerare le tracce delle funzioni  $w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  su  $l(u, v)$ ,  $(u, v) \in I \times J$ , come elementi dello spazio funzionale  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  osserviamo che, se  $(u, v) \in I \times J$ , la restrizione di ogni  $w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  a  $l(u, v)$  individua (Teoremi 2.2 e 2.4) un elemento

$$\gamma_{(u,v)}w = (\varphi_{(u,v),w}, \psi_{(u,v),w})$$

di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  mediante la posizione

$$(2.6) \quad \varphi_{(u,v),w}(t) = w(u+t, v), \quad \psi_{(u,v),w}(t) = w(u, v+t) \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Pertanto ha senso la

**Definizione 2.7.** Per ogni  $w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  ed ogni  $(u, v) \in I \times J$  dicesi *traccia* di  $w$  su  $l(u, v)$  l'elemento  $\gamma_{(u,v)}w$  di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  individuato dalla (2.6).

Si ha inoltre il

**Teorema 2.7.** *Per ogni  $(u, v) \in I \times J$ , la trasformazione  $w \rightarrow \gamma_{(u,v)}w$  è lineare e continua da  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  su  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ .*

### 3. Esistenza, unicità, dipendenza continua e rappresentazione della soluzione di un problema relativo a un sistema lineare iperbolico.

Fissati gli intervalli non degeneri  $I, J$  di  $\mathbb{R}$ , supponiamo, d'ora in avanti, che

$$(3.1) \quad A, B, C, A_x, B_y \in C^0(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n}).$$

Indichiamo con  $P$  l'operatore differenziale, lineare e continuo da  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  in  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ , definito ponendo

$$(3.2) \quad Pw = w_{xy} + Aw_x + Bw_y + Cw \quad \forall w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n).$$

Assegnato un punto  $(\bar{a}, \bar{b}) \in I \times J$  consideriamo il problema

$$(3.3) \quad \begin{cases} w \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n), \\ Pw = f, \\ w(\cdot, \bar{b}) = \sigma, \quad w(\bar{a}, \cdot) = \tau, \end{cases}$$

dove i dati  $f, \sigma$  e  $\tau$  sono tali che:  $f \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma \in W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n)$ ,  $\tau \in W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$ .

Con procedimento analogo a quello seguito in A. Villani [10], a proposito del problema (3.1) ivi considerato, si dimostra il

**Teorema 3.1.** *Sia  $(\bar{a}, \bar{b}) \in I \times J$ . Fissato comunque un elemento  $((\sigma, \tau), f)$  dello spazio di Fréchet prodotto*

$$(3.4) \quad \left\{ (\sigma, \tau) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n) : \right. \\ \left. \sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b}) \right\} \times L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n) \quad (4)$$

il problema (3.3) ha una ed una sola soluzione  $w_{(\sigma,\tau),f}$ .

L'applicazione

$$(3.5) \quad ((\sigma, \tau), f) \rightarrow w_{(\sigma,\tau),f}$$

è un isomorfismo algebrico e topologico tra lo spazio (3.4) e  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ .

**Osservazione 3.1.** Per la validità del Teorema 3.1 le ipotesi (3.1) adottate nel presente lavoro possono essere attenuate; infatti il già menzionato ragionamento seguito in A. Villani [10] richiede soltanto che i coefficienti  $A$ ,  $B$  e  $C$  appartengano a  $L_{\text{loc}}^\infty(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,n})$ ; inoltre, ulteriori generalizzazioni sono possibili (cfr. G. Sturiale [8]). Le ipotesi (3.1) consentono però di ottenere anche una formula di rappresentazione delle soluzioni del problema (3.3) mediante una *matrice di evoluzione* costruita a partire dai coefficienti dell'operatore  $P$ .

Per definire tale matrice di evoluzione ricordiamo che (cfr. A. Villani [10], Teorema 4.1) si ha il

**Teorema 3.2.** *Sia  $D = [u', u''] \times [v', v'']$  un rettangolo chiuso di  $\mathbb{R}^2$  contenuto in  $L_{I,J}$ .*

*Allora, per ogni  $(x, y) \in D$ , esiste una ed una sola funzione  $(u, v) \rightarrow V^D(u, v; x, y)$ , da  $D$  in  $\mathbb{R}^{n,n}$ , continua in  $D$  insieme con le derivate  $V_u^D, V_v^D, V_{uv}^D$ , soluzione del problema*

$$(3.6) \quad \begin{cases} V_{uv} - (VA)_u - (VB)_v + VC = O \quad \forall (u, v) \in D, \\ V_u - VB = O \quad v = y, \quad \forall u \in [u', u''], \\ V_v - VA = O \quad u = x, \quad \forall v \in [v', v''], \\ V(x, y; x, y) = I. \end{cases}$$

*La funzione  $(u, v; x, y) \rightarrow V^D(u, v; x, y)$ , da  $D \times D$  in  $\mathbb{R}^{n,n}$ , è continua in  $D \times D$  insieme con le derivate  $V_u^D, V_v^D, V_{uv}^D, V_x^D, V_y^D, V_{xy}^D$ .*

---

(4) sottospazio lineare chiuso di

$$W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n) \times L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n).$$

Evidentemente il Teorema 3.2 implica anche che, se  $(x, y) \in L_{I,J}$  e  $D_1, D_2$  sono due qualsiasi rettangoli chiusi tali che

$$(x, y) \in D_1 \cap D_2, \quad D_1 \cup D_2 \subseteq L_{I,J},$$

risulta

$$V^{D_1}(u, v; x, y) = V^{D_2}(u, v; x, y) \quad \forall (u, v) \in D_1 \cap D_2.$$

Pertanto, denotato con  $T_{I,J}$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$  costituito dai punti  $(u, v; x, y)$  per i quali esiste un rettangolo chiuso  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  contenuto in  $L_{I,J}$  tale che  $(u, v), (x, y)$  appartengano entrambi a  $D$ , ha senso la seguente

**Definizione 3.1.** Si chiama *matrice di evoluzione* associata all'operatore differenziale  $P$  la funzione  $(u, v; x, y) \rightarrow V(u, v; x, y)$ , da  $T_{I,J}$  in  $\mathbb{R}^{n,n}$ , che ad ogni  $(u, v; x, y)$  fa corrispondere il valore  $V^D(u, v; x, y)$ , dove  $D$  è un qualsiasi rettangolo chiuso di  $\mathbb{R}^2$  contenuto in  $L_{I,J}$  e contenente entrambi i punti  $(u, v), (x, y)$ .

Con lo stesso ragionamento del n. 4 di A. Villani [10] si dimostra, allora, il seguente

**Teorema 3.3.** Per ogni  $(\bar{a}, \bar{b}) \in I \times J$ , ogni

$$(\sigma, \tau) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(I^\infty, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}(J^\infty, \mathbb{R}^n),$$

tale che  $\sigma(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$ , ed ogni  $f \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ , l'unica soluzione  $w_{(\sigma,\tau),f}$  del problema (3.3) è data da

$$\begin{aligned} w_{(\sigma,\tau),f}(x, y) &= V(\bar{a}, \bar{b}; x, y)\sigma(\bar{a}) + \\ &+ \int_{\bar{a}}^x V(u, \bar{b}; x, y)[\sigma'(u) + B(u, \bar{b})\sigma(u)] du + \\ &+ \int_{\bar{b}}^y V(\bar{a}, v; x, y)[\tau'(v) + A(\bar{a}, v)\tau(v)] dv + \\ &+ \int_{\bar{a}}^x \int_{\bar{b}}^y V(u, v; x, y)f(u, v) dudv \quad \forall (x, y) \in L_{I,J}. \end{aligned}$$

#### 4. Soluzioni di (E).

Ferme restando le ipotesi (3.1), supponiamo, d'ora in poi, che

$$F \in L_{\text{loc}}^{\infty}(L_{I,J}, \mathbb{R}^{n,m}).$$

Fissato il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$ , con  $(a_0, b_0) \in I \times J$ , lo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  e il controllo  $U \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , dal Teorema 3.1 segue che esistono funzioni  $z$ , elementi di  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ , soluzioni di (E) verificanti la condizione

$$\gamma_{(a_0, b_0)} z = (\varphi_0, \psi_0);$$

esse sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$w_{(\sigma, \tau), FU}$$

dove  $(\sigma, \tau)$  è un qualsiasi elemento di  $W_{\text{loc}}^{1,p}(I^{\infty}, \mathbb{R}^n) \times W_{\text{loc}}^{1,p}(J^{\infty}, \mathbb{R}^n)$  tale che

$$\sigma(x) = \varphi_0(x - a_0) \quad \forall x \geq a_0, \quad \tau(y) = \psi_0(y - b_0) \quad \forall y \geq b_0;$$

pertanto, eccettuato il caso in cui è contemporaneamente  $a_0 = \inf I$  e  $b_0 = \inf J$ , l'insieme di tali funzioni  $z$  è infinito.

Tuttavia, se  $a_0 < \sup I$  e  $b_0 < \sup J$ , le restrizioni delle predette funzioni all'insieme

$$L_{I_{a_0}, J_{b_0}},$$

dove  $I_{a_0} = I \cap [a_0, +\infty[$ ,  $J_{b_0} = J \cap [b_0, +\infty[$ , coincidono con un unico elemento

$$(4.2) \quad z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U)$$

dello spazio  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n)$  e l'applicazione

$$(4.3) \quad ((\varphi_0, \psi_0), U) \rightarrow z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U),$$

da  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)} \times L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  in  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n)$ , è lineare e continua.

Per il Teorema 3.3 la funzione (4.2) ha la seguente rappresentazione

$$(4.4) \quad z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) = \zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) + \\ + \int_{a_0}^x \int_{b_0}^y V(u, v; x, y) F(u, v) U(u, v) dudv \quad \forall (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}},$$

dove  $V$  è la matrice di evoluzione associata all'operatore differenziale lineare (3.2) e

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) = \\ & = V(a_0, b_0; x, y)\varphi_0(0) + \int_{a_0}^x V(u, b_0; x, y)[\varphi_0'(u-a_0) + B(u, b_0)\varphi_0(u-a_0)] du + \\ & + \int_{b_0}^y V(a_0, v; x, y)[\psi_0'(v-b_0) + A(a_0, v)\psi_0(v-b_0)] dv \quad \forall (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}}. \end{aligned}$$

**Osservazione 4.1.** Ovviamente la funzione

$$(x, y) \rightarrow \zeta(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) = z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), 0),$$

$$(x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}},$$

è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \zeta \in W_{p, \text{loc}}^*(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n), \\ P\zeta = 0, \\ \gamma_{(a_0, b_0)}\zeta = (\varphi_0, \psi_0), \end{cases}$$

mentre la funzione

$$\begin{aligned} (x, y) \rightarrow \int_{a_0}^x \int_{b_0}^y V(u, v; x, y)F(u, v)U(u, v) dudv = \\ = z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U), \quad (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \end{aligned}$$

è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} z \in W_{p, \text{loc}}^*(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^n), \\ Pz = FU, \\ \gamma_{(a_0, b_0)}z = (0, 0). \end{cases}$$

### 5. Insieme raggiungibile.

Supponiamo adesso che, oltre al luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$ , siano dati anche il luogo finale  $l(a, b)$ , con  $(a, b) \in I \times J$  tale che  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , e l'insieme  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  dei controlli disponibili. Supponiamo inoltre, solo allo scopo di semplificare l'esposizione, che sia  $a < \sup I$ ,  $b < \sup J$  <sup>(5)</sup>.

**Definizione 5.1.** Dati  $(a_0, b_0)$ ,  $(a, b) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  e  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , dicesi *insieme raggiungibile* relativo a  $l(a, b)$ , a partire dallo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0)$  su  $l(a_0, b_0)$ , mediante i controlli  $U \in \mathcal{U}$ , l'insieme

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \{\gamma_{(a,b)}z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) : U \in \mathcal{U}\}$$

degli stati finali su  $l(a, b)$  che si ottengono al variare di  $U$  in  $\mathcal{U}$ .

Dalla (4.4) e dall'Osservazione 4.1 segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) &= \\ &= \gamma_{(a,b)}\zeta(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0)) + \Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}\mathcal{U} \end{aligned}$$

dove  $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$  è l'applicazione lineare specificata nella seguente

**Definizione 5.2.** (L'applicazione  $\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$ ). Dati  $(a_0, b_0)$ ,  $(a, b) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , indichiamo con

$$\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}$$

l'applicazione, da  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  in  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , che ad ogni  $U \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  fa corrispondere l'elemento

$$\Lambda_{(a_0,b_0),(a,b)}U = \gamma_{(a,b)}z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U)$$

di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ .

Per quanto evidenziato nel precedente n. 4 relativamente all'applicazione (4.3), si ha, in particolare, che l'applicazione

$$U \rightarrow z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U)$$

è lineare e continua da  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  in  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$ ; dunque, grazie al Teorema 2.7, possiamo concludere che

---

<sup>(5)</sup> Rimandiamo al n. 10 per mostrare come questa ipotesi possa essere rimossa.

**Proposizione 5.1.** *L'applicazione  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)}$  è lineare e continua da  $L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$  in  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ .*

Considerata, allora, l'applicazione

$$\Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)} : \left( \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} \right)' \rightarrow \left( L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m) \right)',$$

aggiunta di  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)}$ , in virtù di un risultato generale sulla rappresentazione della chiusura convessa di un insieme mediante la sua funzione di appoggio (cfr., ad es. G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 5.1), si ha la seguente caratterizzazione dell'insieme  $\overline{\text{co}}(\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U})$ .

**Teorema 5.1.** *Dati  $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , e  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$ , si ha*

$$\begin{aligned} \overline{\text{co}}(\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}) &= \\ &= \left\{ (\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} : \langle (\chi, \eta), Q \rangle \leq \right. \\ &\leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \langle \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} U, Q \rangle \quad \forall Q \in (\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)})' \left. \right\} = \\ &= \left\{ (\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} : \langle (\chi, \eta), Q \rangle \leq \right. \\ &\leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \langle U, \Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)} Q \rangle \quad \forall Q \in (\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)})' \left. \right\}. \end{aligned}$$

Nel caso  $p \in [1, +\infty[$ , identificando (algebricamente e topologicamente) lo spazio duale  $\left( \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} \right)'$  con  $L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  (Teorema 2.5) e lo spazio duale  $\left( L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m) \right)'$  con  $L_c^{p'}(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$  (Teorema 2.1), si può dare una rappresentazione esplicita della trasformazione aggiunta  $\Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)}$ . Si trova, infatti, per ogni  $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  ed ogni  $U \in L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$ , utilizzando lo stesso procedimento seguito nel n. 6 di G. Pulvirenti - G. Santagati [4],

$$\begin{aligned} \langle U, \Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)}(\mu, \nu, \xi) \rangle &= \langle \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} U, (\mu, \nu, \xi) \rangle = \\ &= \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a, b)}^*(u, v; (\mu, \nu, \xi)) U(u, v) \, dudv, \end{aligned}$$

dove

$$(u, v) \rightarrow H_{(a, b)}(u, v; \mu, \nu, \xi)$$



è la funzione misurabile, da  $L_{I,J}$  in  $\mathbb{R}^m$ , definita nel modo seguente:

$$(5.1) \quad H_{(a,b)}^*(u, v; (\mu, v, \xi)) = \begin{cases} \left\{ \xi^* V(u, v; a, b) + \int_0^{+\infty} [\mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b) + v^*(t) V_y(u, v; a, b+t)] dt \right\} F(u, v) \\ \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a[ \times ]-\infty, b[), \\ \\ \left\{ \mu^*(u-a) V(u, v; u, b) + \int_{u-a}^{+\infty} \mu^*(t) V_x(u, v; a+t, b) dt \right\} F(u, v) \\ \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap ([a, +\infty[ \times ]-\infty, b[), \\ \\ \left\{ v^*(v-b) V(u, v; a, v) + \int_{v-b}^{+\infty} v^*(t) V_y(u, v; a, b+t) dt \right\} F(u, v) \\ \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a[ \times [b, +\infty[), \\ \\ 0 \\ \text{q.o. } (u, v) \in L_{I,J} \cap ([a, +\infty[ \times [b, +\infty[). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che, per ogni  $(a_0, b_0) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a, b_0 \leq b$ , la restrizione di  $H_{(a,b)}(\cdot; (\mu, v, \xi))$  a  $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$  è un elemento di  $L_c^{p'}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^m)$ , quindi la funzione  $\mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a,b)}(\cdot; (\mu, v, \xi))$  ( $\mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}}$  indicatore di  $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$ ) appartiene a  $L_c^{p'}(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ . Si ha, pertanto, il seguente

**Teorema 5.2.** *Sia  $p \in [1, +\infty[$ . Dati  $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a, b_0 \leq b$ , per ogni  $(\mu, v, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  risulta*

$$\Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)}(\mu, v, \xi) = \mathbf{1}_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a,b)}(\cdot; (\mu, v, \xi)).$$

Di conseguenza, dato che, per ogni  $(\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  ed ogni

$$(\mu, v, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,$$

si ha

$$\langle (\chi, \eta), (\mu, v, \xi) \rangle = \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \chi'(t) dt + \int_0^{+\infty} v^*(t) \eta'(t) dt + \xi^* \chi(0),$$

sussiste il

**Teorema 5.3.** Sia  $p \in [1, +\infty[$ . Dati  $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$ , con  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , e  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , si ha

$$\begin{aligned} & \overline{\text{co}}(\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}) = \\ & = \left\{ (\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} : \int_0^{+\infty} \mu^*(t) \chi'(t) dt + \int_0^{+\infty} v^*(t) \eta'(t) dt + \xi^* \chi(0) \leq \right. \\ & \quad \leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \iint_{L_{I_0, J_{b_0}}} H_{(a, b)}^*(u, v; (\mu, \nu, \xi)) U(u, v) dudv \\ & \quad \left. \forall (\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \right\}. \end{aligned}$$

## 6. Problemi di controllo con luogo iniziale variabile.

Fissati il luogo finale  $l(a, b)$ , con  $(a, b) \in I \times J$ , lo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  e l'insieme dei controlli  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , consideriamo, relativamente al processo di controllo (E), i seguenti due problemi di controllo con luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  variabile.

**Problema 6.1.** (Controllabilità esatta con luogo iniziale variabile.)

Siano dati  $(a, b) \in I \times J$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  e  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ . Per ogni  $(\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  trovare  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , e  $U \in \mathcal{U}$  tali che

$$\gamma_{(a, b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) = (\chi, \eta).$$

Ovviamente si ha la

**Proposizione 6.1.** Il Problema 6.1 ha soluzione se e solo se

$$(6.1) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}.$$

È altresì ovvio che per la validità della (6.1) è sufficiente che esista  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , tale che

$$(6.2) \quad \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) = \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)},$$

mentre il seguente esempio mostra che questa condizione non è, però, necessaria.

**Esempio 6.1.** Siano  $I = J = \mathbb{R}$ ;  $n = m = 1$ ;  $A = B = C = 0$  (quindi  $V(u, v; x, y) = 1$  in  $\mathbb{R}^4$ );  $F = 1$ ; cioè consideriamo il processo di controllo scalare

$$(6.3) \quad z_{xy} = U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Siano, inoltre,  $(a, b) = (0, 0)$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$  e

$$(6.4) \quad \mathcal{U} = \{U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) : |U(x, y)| \leq 1 \text{ q.o. } (x, y) \in ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, 0[\}.$$

Dimostriamo che il Problema 6.1 ha soluzione.

Fissato  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ , scegliamo  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a_0 < 0$ ,  $b_0 < 0$ , tale che  $a_0 b_0 \geq |\bar{\chi}(0)|$ .

Ricordato che, per ogni  $U \in \mathcal{U}$ , si ha

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U) = \int_{a_0}^x \int_{b_0}^y U(u, v) \, dudv$$

$$\forall (x, y) \in [a_0, +\infty[ \times [b_0, +\infty[$$

e posto, per brevità,

$$(6.5) \quad \gamma_{(0,0)} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi),$$

vale a dire

$$(6.6) \quad \varphi(t) = \int_{a_0}^t \int_{b_0}^0 U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

$$(6.7) \quad \psi(t) = \int_{a_0}^0 \int_{b_0}^t U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

osserviamo che, se si fissa  $U \in \mathcal{U}$  in modo che

$$(6.8) \quad U(x, y) = \frac{\bar{\chi}(0)}{a_0 b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[ \times [b_0, 0[$$

(ciò che è possibile in quanto  $\left| \frac{\bar{\chi}(0)}{a_0 b_0} \right| \leq 1$ ), risulta  $\varphi(0) = \bar{\chi}(0)$ ,  $\psi(0) = \bar{\eta}(0)$ .

Pertanto, al fine di avere  $\varphi = \bar{\chi}$ , è sufficiente che sia  $\varphi' = \bar{\chi}'$ , cioè

$$(6.9) \quad \int_{b_0}^0 U(t, v) dv = \bar{\chi}'(t) \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ .$$

Per la validità della (6.9) basta scegliere  $U \in \mathcal{U}$  in modo che si abbia

$$(6.10) \quad U(x, y) = -\frac{\bar{\chi}'(x)}{b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [0, +\infty[ \times [b_0, 0[ .$$

Analogamente, per ottenere che sia pure  $\psi' = \bar{\eta}'$ , è sufficiente prendere  $U \in \mathcal{U}$  in modo che si abbia

$$(6.11) \quad U(x, y) = -\frac{\bar{\eta}'(y)}{a_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[ \times [0, +\infty[ .$$

In definitiva, scegliendo, come è possibile,  $U \in \mathcal{U}$  tale che siano verificate le (6.8), (6.10) e (6.11), risulta  $(\varphi, \psi) = (\bar{\chi}, \bar{\eta})$ .

Infine, per verificare che non esiste alcun punto  $(a_0, b_0) \in ]-\infty, 0] \times ]-\infty, 0]$  per il quale sia valida la (6.2), basta osservare che, se  $(a_0, b_0)$  è un arbitrario punto di  $] - \infty, 0] \times ] - \infty, 0]$ , dalle (6.4) e (6.6) si ricava

$$|\varphi(0)| \leq a_0 b_0 \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U})$$

e quindi  $\mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U}) \neq \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ .

Com'è usuale per i processi di controllo con parametri distribuiti, in cui lo spazio degli stati è ad infinite dimensioni, è importante considerare, oltre al problema di tipo esatto, anche la corrispondente versione approssimata.

**Problema 6.2.** (*Controllabilità approssimata con luogo iniziale variabile.*)

Siano dati  $(a, b) \in I \times J$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  e  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$ . Per ogni  $(\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ , ogni seminorma  $\pi_{A, B}$  su  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  ed ogni  $\varepsilon > 0$  trovare  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , e  $U \in \mathcal{U}$  tali che

$$\pi_{A, B}(\gamma_{(a, b)} \bar{z}(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) - (\chi, \eta)) < \varepsilon .$$

Data la natura delle seminorme  $\pi_{A, B}$  la richiesta del Problema 6.2 è quella di trovare, per ogni elemento  $(\chi, \eta)$  dello spazio  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  ed ogni intorno  $\mathcal{O}$  di  $(\chi, \eta)$ , un punto  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , ed un controllo  $U \in \mathcal{U}$  tali che

$$\gamma_{(a, b)} \bar{z}(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \in \mathcal{O} ;$$

dunque si ha la

**Proposizione 6.2.** *Il Problema 6.2 ha soluzione se e solo se l'insieme*

$$\bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$$

è denso in  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ .

Naturalmente, la risolubilità del Problema 6.1 implica la risolubilità del Problema 6.2. Il successivo esempio mostra che non è vero il viceversa.

**Esempio 6.2.** Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e siano, ancora,  $(a, b) = (0, 0)$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ , mentre l'insieme dei controlli disponibili è

$$(6.12) \quad \mathcal{U} = \{U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) : |U(x, y)| \leq 1 \text{ q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2\} .$$

Dimostriamo che il Problema 6.1 non ha soluzione. A tale scopo basta osservare che, per ogni  $(a_0, b_0) \in ]-\infty, 0] \times ]-\infty, 0]$  ed ogni  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U})$ , dalle (6.6) e (6.12) si ottiene

$$(6.13) \quad |\varphi'(t)| \leq \left| \int_{b_0}^0 |U(t, v)| dv \right| \leq |b_0|t \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[$$

e, conseguentemente,

$$\bigcup_{a_0 \leq 0, b_0 \leq 0} \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), \mathcal{U}) \neq \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)} .$$

Dimostriamo adesso che il Problema 6.2 ha soluzione. Fissiamo un elemento  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , una seminorma  $\pi_{A, B}$  su  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , un numero  $\varepsilon > 0$  ed osserviamo che non è restrittivo supporre che sia

$$A = ]0, t_1[ \quad , \quad B = ]0, t_2[ .$$

Denotato con  $\rho$  un arbitrario numero positivo, siano  $\alpha, \beta \in L^\infty(]0, +\infty[)$  due funzioni tali che

$$\|\alpha - \bar{\chi}'\|_{L^p(]0, t_1])} < \rho \quad , \quad \alpha(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \geq t_1 ,$$

$$\|\beta - \bar{\eta}'\|_{L^p(]0, t_2])} < \rho \quad , \quad \beta(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \geq t_2 ,$$

ed indichiamo con  $(\chi_1, \eta_1)$  l'elemento di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$  definito nel modo seguente:

$$\chi_1(t) = \bar{\chi}(0) + \int_0^t \alpha(s) ds \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

$$\eta_1(t) = \bar{\chi}(0) + \int_0^t \beta(s) ds \quad \forall t \in [0, +\infty[ .$$

A questo punto fissiamo  $(a_0, b_0) \in ]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$  in modo che

$$a_0 b_0 \geq |\bar{\chi}(0)| ,$$

$$|a_0| \geq |\beta(t)| \text{ q.o. } t \in ]0, +\infty[ , \quad |b_0| \geq |\alpha(t)| \text{ q.o. } t \in ]0, +\infty[$$

ed osserviamo che, scegliendo il controllo  $U \in \mathcal{U}$  in modo da aversi

$$U(x, y) = \frac{\bar{\chi}(0)}{a_0 b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[b_0, 0[ ,$$

$$U(x, y) = -\frac{\alpha(x)}{b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [0, +\infty[\times[b_0, 0[ ,$$

$$U(x, y) = -\frac{\beta(y)}{a_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, 0[\times[0, +\infty[ ,$$

risulta, con le stesse notazioni (6.5), (6.6) e (6.7) dell'Esempio 6.1,

$$(\varphi, \psi) = (\chi_1, \eta_1) .$$

Denotata con  $k_{A,B}$  una costante tale da aversi

$$\pi_{A,B}(\chi, \eta) \leq k_{A,B} \left( |\chi(0)| + \|\chi'\|_{L^p(A)} + \|\eta'\|_{L^p(B)} \right) \quad \forall (\chi, \eta) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(1)} ,$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \pi_{A,B}(\gamma_{(0,0)}z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) - (\bar{\chi}, \bar{\eta})) &= \pi_{A,B}((\chi_1, \eta_1) - (\bar{\chi}, \bar{\eta})) \leq \\ &\leq k_{A,B} \left( \|\alpha - \bar{\chi}'\|_{L^p(A)} + \|\beta - \bar{\eta}'\|_{L^p(B)} \right) < 2\rho k_{A,B} , \end{aligned}$$

da cui, scegliendo  $\rho > 0$  in modo che  $2\rho k_{A,B} < \varepsilon$ , si ottiene la tesi.

**Osservazione 6.1.** Analogamente a quanto osservato relativamente al Problema 6.1, una ovvia condizione sufficiente per la risolubilità del Problema 6.2 è che esista  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , tale che  $\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$  sia denso in  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ ; tale condizione non è, però, necessaria, come si evince, per la (6.13), anche dal precedente Esempio 6.2.

### 7. Sulla risolubilità del Problema 6.2.

In questo n. 7 stabiliamo una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del Problema 6.2 nel caso in cui  $(\varphi_0, \psi_0)$  è l'elemento nullo di  $\Xi_{p,loc}^{(n)}$  e  $\mathcal{U}$  è la palla unitaria di  $L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  con  $q \in [p, +\infty]$ . Tale condizione si esprime mediante il funzionale

$$(\mu, \nu, \xi) \rightarrow H_{(a,b)}(\cdot; (\mu, \nu, \xi)) ,$$

dato dalla (5.1).

È interessante osservare che la condizione, similmente a quanto avviene per i processi di controllo con parametri concentrati (si vedano in proposito i Teoremi II.2.1 e VI.5.1 di R. Conti [1]) è analoga alla condizione necessaria e sufficiente di completa approssimata controllabilità con luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  e luogo finale  $l(a, b)$  fissati, stabilita in G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Teorema 6.1.

**Teorema 7.1.** Sia  $1 < p < +\infty$ . Siano inoltre:  $(a, b) \in I \times J$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p,loc}^{(n)}$  e

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q = \{U \in L_{loc}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m) : \|U\|_{L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con  $q \in [p, +\infty]$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché il Problema 6.2 abbia soluzione è che risulti

$$(7.1) \quad \iint_{L_{I,J}} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} dudv = +\infty$$

$$\forall (\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} ,$$

essendo  $q'$  l'esponente coniugato di  $q$ .

*Dimostrazione.* La condizione è necessaria. Supponiamo che il Problema 6.2 abbia soluzione e, per assurdo, esista  $(\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale che

$$\iint_{L_{I,J}} |H_{(a,b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv = k < +\infty .$$

Per la continuità del funzionale lineare  $(\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})$  e per la natura delle seminorme su  $\Xi_{p,loc}^{(n)}$  esistono una seminorma  $\pi$  su  $\Xi_{p,loc}^{(n)}$  ed una costante positiva  $c$  tali che

$$| \langle (\chi, \eta), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle | \leq c\pi(\chi, \eta) \quad \forall (\chi, \eta) \in \Xi_{p,loc}^{(n)} .$$

Sia  $r > 0$ . Poichè  $(\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})$  è un funzionale lineare non nullo su  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , esiste  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  tale che

$$(7.2) \quad \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle > r + k^{\frac{1}{q'}}.$$

Poichè il Problema 6.2 ha soluzione, in corrispondenza dell'elemento  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , della seminorma  $\pi$  e del numero positivo  $\frac{r}{c}$ , esistono un punto  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , ed un elemento  $(\chi, \eta)$  dell'insieme raggiungibile

$$\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_q) = \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$$

tali che

$$\pi((\chi, \eta) - (\bar{\chi}, \bar{\eta})) < \frac{r}{c}.$$

Si ha allora, per il Teorema 5.3,

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle = \\ & = \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}) - (\chi, \eta), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle + \langle (\chi, \eta), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle \leq \\ & \leq c\pi((\bar{\chi}, \bar{\eta}) - (\chi, \eta)) + \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a,b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})) U(u, v) \, dudv < \\ & < r + \left( \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a,b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} \, dudv \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \\ & \leq r + \left( \iint_{L_{I,J}} |H_{(a,b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} \, dudv \right)^{\frac{1}{q'}} = r + k^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

ciò che contraddice la (7.2).

La condizione è sufficiente.

Supponiamo che sia verificata la condizione (7.1) e, per assurdo, il Problema 6.2 non abbia soluzione, cioè esista un elemento  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  tale che

$$(7.3) \quad (\bar{\chi}, \bar{\eta}) \notin \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q.$$



Osserviamo che, essendo  $\mathcal{U}_q$  un insieme convesso e  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)}$  un'applicazione lineare, ciascuno degli insiemi  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$ ,  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , è convesso.

Osserviamo, inoltre, che da  $(a'_0, b'_0)$ ,  $(a''_0, b''_0) \in I \times J$ ,  $a'_0 \leq a''_0 \leq a$ ,  $b'_0 \leq b''_0 \leq b$ , segue

$$\Lambda_{(a'_0, b'_0), (a, b)} \mathcal{U}_q \supseteq \Lambda_{(a''_0, b''_0), (a, b)} \mathcal{U}_q ;$$

infatti, se  $(\chi, \eta) \in \Lambda_{(a''_0, b''_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$ , cioè se esiste  $U'' \in \mathcal{U}_q$  tale che

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a, b)} z(\cdot ; (a''_0, b''_0), (0, 0), U'') ,$$

allora, posto

$$U'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I, J} \setminus L_{I_{a'_0}, J_{b'_0}} , \\ U''(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I_{a'_0}, J_{b'_0}} , \end{cases}$$

si ha  $U' \in \mathcal{U}_q$  e risulta

$$z(x, y; (a'_0, b'_0), (0, 0), U') = \begin{cases} 0 & \forall (x, y) \in L_{I_{a'_0}, J_{b'_0}} \setminus L_{I_{a''_0}, J_{b''_0}} , \\ z(x, y; (a''_0, b''_0), (0, 0), U'') & \\ \forall (x, y) \in L_{I_{a''_0}, J_{b''_0}} , & \end{cases}$$

dunque

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a, b)} z(\cdot ; (a'_0, b'_0), (0, 0), U') \in \Lambda_{(a'_0, b'_0), (a, b)} \mathcal{U}_q .$$

Dalle precedenti osservazioni segue facilmente che l'unione

$$\bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$$

e, quindi, anche la sua chiusura sono insiemi convessi.

Dalla (7.3), per il teorema di separazione in senso stretto (N. Dunford - J. T. Schwartz [3], Theorem V. 2.10), segue l'esistenza di

$$(\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \in L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times L_c^{p'}([0, +\infty[, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

tale che

$$(7.4) \quad \langle (\chi, \eta), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle < \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle$$

$$\forall (\chi, \eta) \in \overline{\bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q}.$$

D'altra parte, come verificheremo subito dopo, per ogni  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , esiste  $(\chi_0, \eta_0) \in \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$  per cui risulta

$$(7.5) \quad \langle (\chi_0, \eta_0), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle = \left( \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a, b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv \right)^{\frac{1}{q'}}$$

e quindi, per la (7.4),

$$\left( \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a, b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv \right)^{\frac{1}{q'}} < \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle ;$$

conseguentemente si ha, per l'arbitrarietà di  $(a_0, b_0)$ ,

$$\iint_{L_{I, J}} |H_{(a, b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv \leq \left( \langle (\bar{\chi}, \bar{\eta}), (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}) \rangle \right)^{q'},$$

ma ciò contraddice la (7.1).

Verifichiamo, infine, la validità della (7.5). Si ha

$$\begin{aligned} & \left( \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a, b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv \right)^{\frac{1}{q'}} = \|H_{(a, b)}(\cdot; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi}))\|_{L^{q'}(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^m)} = \\ & = \sup_{\substack{\tilde{U} \in L^q(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^m) \\ \|\tilde{U}\|_{L^q(L_{I_{a_0}, J_{b_0}}, \mathbb{R}^m)} \leq 1}} \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a, b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})) \tilde{U}(u, v) dudv = \\ & = \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} H_{(a, b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})) U(u, v) dudv = \\ & = \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \iint_{L_{I, J}} \mathbf{1}_{I_{a_0}, J_{b_0}}(u, v) H_{(a, b)}^*(u, v; (\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\xi})) U(u, v) dudv \end{aligned}$$

e quindi, per il Teorema 5.2,

$$\left( \iint_{L_{I_{a_0}, J_{b_0}}} |H_{(a,b)}(u, v; (\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi}))|^{q'} dudv \right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \langle U, \Lambda'_{(a_0, b_0), (a, b)}(\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi}) \rangle = \sup_{U \in \mathcal{U}_q} \langle \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} U, (\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi}) \rangle .$$

D'altra parte l'insieme  $\mathcal{U}_q \subseteq L^p_{loc}(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$  è chiuso, convesso e limitato e, quindi, anche debolmente chiuso; di conseguenza, dato che  $1 < p < +\infty$ ,  $\mathcal{U}_q$  risulta debolmente compatto (G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 2.6), pertanto anche  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$  è debolmente compatto. Ne segue che il funzionale lineare e [debolmente] continuo  $(\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi})$  è dotato di massimo nell'insieme  $\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$ , vale a dire esiste  $(\chi_0, \eta_0) \in \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$  tale che

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_q} \langle \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} U, (\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi}) \rangle = \langle (\chi_0, \eta_0), (\bar{\mu}, \bar{v}, \bar{\xi}) \rangle$$

e quindi vale la (7.5).

Per i processi di controllo scalari del tipo

$$z_{xy} = F(x, y)U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

già considerati in precedenti lavori (G. Pulvirenti - G. Santagati [4]; G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], [6]) e negli Esempi 6.1 e 6.2, il teorema precedente acquista una formulazione che lo rende più facilmente utilizzabile nelle applicazioni. Si ha, infatti, in proposito il seguente

**Corollario 7.1.** *Siano  $I = J = \mathbb{R}$ ;  $n = m = 1$ ;  $A = B = C = 0$ . Supponiamo, inoltre,  $1 < p < +\infty$ .*

*Dati  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  elemento nullo di  $\Xi_{p, loc}^{(1)}$  e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q = \{U \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2) : \|U\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq 1\}$$

*con  $q \in [p, +\infty]$ , il Problema 6.2 ha soluzione se e solo se valgono le condizioni*

$$(7.6) \quad \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b |F(u, v)|^{q'} dudv = +\infty ,$$

$$(7.7) \quad \int_{-\infty}^b |F(u, v)|^{q'} dv = +\infty \quad \text{q.o. } u \geq a ,$$

$$(7.8) \quad \int_{-\infty}^a |F(u, v)|^{q'} du = +\infty \quad \text{q.o. } v \geq b ,$$

*dove  $q'$  è l'esponente coniugato di  $q$ .*

*Dimostrazione.* Si ha  $V(u, v; x, y) = 1$  in  $\mathbb{R}^4$  e pertanto, per ogni  $(\mu, \nu, \xi) \in L_c^{p'}([0, +\infty[) \times L_c^{p'}([0, +\infty[) \times \mathbb{R}$ , risulta

$$H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi)) = \begin{cases} \xi F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in ]-\infty, a[ \times ]-\infty, b[, \\ \mu(u-a)F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[ \times ]-\infty, b[, \\ \nu(v-b)F(u, v) & \text{q.o. } (u, v) \in ]-\infty, a[ \times [b, +\infty[, \\ 0 & \text{q.o. } (u, v) \in [a, +\infty[ \times [b, \infty[. \end{cases}$$

Supponiamo che il Problema 6.2 abbia soluzione. Dalla (7.1), prendendo  $(\mu, \nu, \xi) = (0, 0, 1)$ , si ottiene subito la (7.6). Prendendo, invece,  $(\mu, \nu, \xi) = (\mathbf{1}_T, 0, 0)$ , dove  $T$  è un arbitrario sottoinsieme limitato e misurabile di  $[0, +\infty[$ , con  $m(T) > 0$ , si ottiene

$$\int_T \int_{-\infty}^b |F(a+t, v)|^{q'} dt dv = +\infty,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $T$ , con un facile ragionamento per assurdo si deduce la (7.7). Analogamente si prova la (7.8).

Viceversa, siano verificate le (7.6), (7.7), (7.8) e sia  $(\mu, \nu, \xi)$  un arbitrario elemento non nullo di  $L_c^{p'}([0, +\infty[) \times L_c^{p'}([0, +\infty[) \times \mathbb{R}$ .

Se  $\xi \neq 0$ , dalla (7.6) si ottiene

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} dudv \geq \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b |\xi F(u, v)|^{q'} dudv = +\infty.$$

Se  $\mu \neq 0$ , cioè  $\mu(t) \neq 0$  in un insieme  $T \subseteq [0, +\infty[$  di misura positiva, dalla (7.7) si ricava

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} dudv &\geq \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^b |\mu(u-a)F(u, v)|^{q'} dudv \geq \\ &\geq \int_{a+T} \left[ |\mu(u-a)|^{q'} \int_{-\infty}^b |F(u, v)|^{q'} dv \right] du = +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $\nu \neq 0$ , la (7.8) implica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |H_{(a,b)}(u, v; (\mu, \nu, \xi))|^{q'} dudv = +\infty.$$

Pertanto, in ogni caso, è verificata la (7.1), cioè il Problema 6.2 ha soluzione.

**Osservazione 7.1.** La risolubilità del Problema 6.2 nel caso dell'Esempio 6.2, che abbiamo già dimostrato direttamente, discende anche, limitatamente al caso  $1 < p < +\infty$ , dal precedente Corollario 7.1.

### 8. Sulla risolubilità del Problema 6.1.

Ci occupiamo, adesso, dello studio del Problema 6.1, continuando a supporre che  $(\varphi_0, \psi_0)$  sia l'elemento nullo di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ .

Verifichiamo preliminarmente che, considerando come insieme dei controlli lo stesso insieme  $\mathcal{U}_q$  del Teorema 7.1, non è possibile trovare condizioni di risolubilità del Problema 6.1. Si ha, infatti, il seguente

**Teorema 8.1.** *Siano:  $1 \leq p \leq +\infty$ ;  $(a, b) \in I \times J$ ;  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q = \{U \in L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m) : \|U\|_{L^q(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con  $q \in [p, +\infty]$ .

Allora il Problema 6.1 non ha soluzione.

*Dimostrazione.* L'insieme  $\mathcal{U}_q$  è un sottoinsieme limitato di  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ . Infatti, per ogni compatto  $K \subseteq L_{I,J}$ , denotata con  $c_K$  una costante tale che

$$\|l\|_{L^p(K)} \leq c_K \|l\|_{L^q(K)} \quad \forall l \in L^q(K),$$

si ha, per la corrispondente seminorma  $\pi_K$  su  $L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$ , la seguente maggiorazione

$$\pi_K(U) = \|U\|_{L^p(K, \mathbb{R}^m)} \leq c_K \|U\|_{L^q(K, \mathbb{R}^m)} \leq c_K \quad \forall U \in \mathcal{U}_q.$$

Di conseguenza (Proposizione 5.1) anche

$$\Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$$

è un sottoinsieme limitato di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , qualunque siano i punti  $(a_0, b_0), (a, b) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ .

Ricordiamo inoltre che (come già osservato nel corso della dimostrazione della condizione sufficiente del Teorema 7.1), assegnato  $(a, b) \in I \times J$ , da  $(a'_0, b'_0), (a''_0, b''_0) \in I \times J$ ,  $a'_0 \leq a''_0 \leq a$ ,  $b'_0 \leq b''_0 \leq b$ , segue

$$\Lambda_{(a'_0, b'_0), (a, b)} \mathcal{U}_q \supseteq \Lambda_{(a''_0, b''_0), (a, b)} \mathcal{U}_q.$$

Pertanto, fissata una successione  $\{(a_k, b_k)\}$  di punti di  $I \times J$  tale da aversi

$$a_k \leq a, \quad b_k \leq b \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \inf I, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \inf J$$

e inoltre, qualora  $\inf I$  [risp.  $\inf J$ ] appartenga a  $I$  [risp.  $J$ ],

$$a_k = \inf I \quad [\text{risp. } b_k = \inf J]$$

per  $k$  sufficientemente grande, l'insieme

$$(8.1) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \Lambda_{(a_0, b_0), (a, b)} \mathcal{U}_q$$

risulta uguale a

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_{(a_k, b_k), (a, b)} \mathcal{U}_q,$$

dunque è unione numerabile di sottoinsiemi limitati di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ .

Il successivo Lemma 8.1 implica allora che l'insieme (8.1) non può coincidere con  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ .

**Lemma 8.1.** *Lo spazio  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  non è unione numerabile di insiemi limitati.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{\mathcal{X}_k\}$  una qualunque successione di sottoinsiemi limitati di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ . Si ha, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$s_k = \sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{X}_k} \pi_{|k-1, k[, |k-1, k[}(\varphi, \psi) < +\infty.$$

Considerato, allora, un elemento  $(\overline{\varphi}, \overline{\psi})$  di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  tale che

$$|\overline{\varphi}'(t)| = s_k + 1 \quad \text{q.o. } t \in ]k-1, k[, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

risulta

$$\pi_{|k-1, k[, |k-1, k[}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \geq \|\overline{\varphi}\|_{W^{1, p}(|k-1, k[, \mathbb{R}^n)} \geq \|\overline{\varphi}'\|_{L^p(|k-1, k[, \mathbb{R}^n)} = s_k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e pertanto  $(\overline{\varphi}, \overline{\psi})$  non appartiene a nessuno degli insiemi  $\mathcal{X}_k$ .

Osserviamo, ancora, che la condizione (7.1), che serve a caratterizzare la risolubilità del Problema 6.2 nel caso  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$  (e che ovviamente, per il teorema precedente, non può in tal caso garantire l'esistenza di soluzioni del Problema 6.1), non è da sola sufficiente per la risolubilità del Problema 6.1 neanche se come insieme dei controlli ammissibili si assume l'intero spazio  $L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$ . Ciò si evince dal seguente Esempio 8.1. L'ulteriore Esempio 8.2 mostrerà, poi, che la condizione (7.1) non è neanche necessaria per la risolubilità del Problema 6.1.

**Esempio 8.1.** Siano  $I = J = \mathbb{R}$ ;  $n = m = 1$ ;  $A = B = C = 0$  (quindi  $V(u, v; x, y) = 1$  in  $\mathbb{R}^4$ );

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq -x, \\ 0 & \text{se } y > -x. \end{cases}$$

Siano, inoltre,  $(a, b) = (0, 0)$  e  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ .

Dimostriamo che, qualunque sia l'esponente  $p \in [1, +\infty]$ , il Problema 6.1 con  $\mathcal{U} = L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$  non ha soluzione. Infatti, per ogni  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a_0 \leq 0$ ,  $b_0 \leq 0$ , ed ogni  $U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$ , posto (come nella (6.5))

$$\gamma_{(0,0)} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi),$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^t \int_{b_0}^0 F(u, v) U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

$$\psi(t) = \int_{a_0}^0 \int_{b_0}^t F(u, v) U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^0 F(t, v) U(t, v) \, dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ ,$$

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^0 F(u, t) U(u, t) \, du \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ ,$$

da cui

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \in [-b_0, +\infty[ \quad , \quad \psi'(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \in [-a_0, +\infty[ ,$$

pertanto le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  sono costanti negli intervalli  $[-b_0, +\infty[$  e  $[-a_0, +\infty[$ , rispettivamente. Ne segue che è

$$\bigcup_{a_0 \leq 0, b_0 \leq 0} \mathcal{A}((a_0, b_0), (0, 0); (0, 0), L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)) \neq \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)} ,$$

cioè il Problema 6.1 non ha soluzione.

Tuttavia, la condizione (7.1) è soddisfatta qualunque sia  $q' \in [1, +\infty[$ . Per verificare ciò osserviamo che valgono, ovviamente, le condizioni (7.6) – (7.8), quindi, fissato un qualunque  $p \in ]1, q[$  ( $q$  l'esponente coniugato di  $q'$ ), per il Corollario 7.1 il Problema 6.2 ha soluzione con  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$  e dunque, per il Teorema 7.1, vale la (7.1).

Quanto precedentemente osservato mostra che, al fine di ottenere delle condizioni di risolubilità del Problema 6.1, oltre a considerare un adeguato insieme di controlli ammissibili più ampio di  $\mathcal{U}_q$ , occorre anche introdurre ulteriori ipotesi sui dati. A tale scopo, analogamente a quanto fatto in A. Villani [11] in occasione della condizione di controllabilità completa esatta con luogo iniziale e finale assegnati, introdurremo opportune ipotesi di invertibilità della matrice  $F$  in un appropriato sottoinsieme di  $L_{I,J}$  per pervenire ad una condizione necessaria e sufficiente di risolubilità del Problema 6.1 che si esprime mediante un integrale costruito a partire dai dati e che presenta, nei riguardi della condizione i) di A. Villani [11], Teorema 6.1, lo stesso tipo di analogia già osservato, nel numero precedente, a proposito della (7.1) nei riguardi della condizione di controllabilità completa approssimata di G. Pulvirenti - G. Santagati [4].

**Teorema 8.2.** *Siano:  $1 \leq p \leq +\infty$ ;  $(a, b) \in I \times J$ ;  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$  e*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q, (a, b)} = \{U \in L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m) : \|U\|_{L^q(L_{I, J} \cap (]-\infty, a[ \times ]-\infty, b]) , \mathbb{R}^m)} \leq 1\}$$

con  $q \in [p, +\infty]$ ,  $q > 1$ .

*Sia inoltre verificata la seguente ipotesi:*

(I) *Esistano una matrice funzione  $F^+ \in L_{\text{loc}}^\infty(L_{I, J}, \mathbb{R}^{m, n})$ , due successioni numeriche  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$ , crescenti e divergenti, con  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ , e due successioni di intervalli*

$$\{[a'_k, a''_k]\}, \{[b'_k, b''_k]\},$$

con

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} b'_k \in J, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} b''_k \leq b,$$

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} a'_k \in I, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} a''_k \leq a,$$

tali che

$$F(x, y)F^+(x, y) = I$$

$$\text{q.o. } (x, y) \in \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} ([a_k, a_{k+1}] \times [b'_k, b''_k]) \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} ([a'_k, a''_k] \times [b_k, b_{k+1}]) \right).$$

*Condizione necessaria e sufficiente affinché il Problema 6.1 abbia soluzione è che risulti*

$$(8.2) \quad \iint_{L_{I, J} \cap (]-\infty, a[ \times ]-\infty, b])} |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv = +\infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

essendo  $q'$  l'esponente coniugato di  $q$ .



*Dimostrazione.* Proviamo innanzitutto che, indipendentemente dall'ipotesi (I), la validità della (8.2) equivale al sussistere dell'uguaglianza

$$(8.3) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}) = \mathbb{R}^n .$$

A tale scopo, possiamo adoperare lo stesso procedimento usato, nel caso di processi di controllo con parametri concentrati, in R. Conti [1], Teorema VI.5.1.

Precisamente, cominciamo con l'osservare preliminarmente che, fissato  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , ed indicato con  $\lambda$  un elemento di  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$$(8.4) \quad \lambda \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}) \iff \\ \iff |\xi^* \lambda|^{q'} \leq \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Ciò è ovvio nel caso in cui è  $a_0 = a$  oppure  $b_0 = b$ . Altrimenti, denotata con  $B_{(a_0, b_0), (a, b), q}$  la palla unitaria di  $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$ , cioè posto

$$B_{(a_0, b_0), (a, b), q} = \{ \tilde{U} \in L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m) : \| \tilde{U} \|_{L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)} \leq 1 \},$$

osserviamo che

$$\begin{aligned} z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}) &= \\ &= \left\{ \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b V(u, v; a, b) F(u, v) U(u, v) dudv : U \in \mathcal{U}_{q, (a, b)} \right\} = \\ &= \left\{ \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b V(u, v; a, b) F(u, v) \tilde{U}(u, v) dudv : \tilde{U} \in B_{(a_0, b_0), (a, b), q} \right\} = \\ &= G_{(a_0, b_0), (a, b), q}(B_{(a_0, b_0), (a, b), q}), \end{aligned}$$

dove  $G_{(a_0, b_0), (a, b), q}$  è l'applicazione lineare e continua, da  $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$  in  $\mathbb{R}^n$ , definita mediante la posizione

$$G_{(a_0, b_0), (a, b), q}(\tilde{U}) = \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b V(u, v; a, b) F(u, v) \tilde{U}(u, v) dudv \\ \forall \tilde{U} \in L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m) .$$

Di conseguenza, se  $q < +\infty$ , dato che  $B_{(a_0, b_0), (a, b), q}$  è un sottoinsieme debolmente compatto di  $L^q([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)$ , l'insieme  $z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)})$  è un sottoinsieme compatto, e quindi chiuso, di  $\mathbb{R}^n$ . Alla stessa conclusione si perviene nel caso  $q = +\infty$  dato che l'insieme  $B_{(a_0, b_0), (a, b), \infty}$  è debolmente\* compatto e l'applicazione  $G_{(a_0, b_0), (a, b), \infty}$ , come immediatamente si verifica, è debolmente\* continua. Poichè l'insieme

$$z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}) = G_{(a_0, b_0), (a, b), q}(B_{(a_0, b_0), (a, b), q})$$

è anche convesso, l'appartenenza ad esso di un elemento  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  si caratterizza (cfr., ad es., G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani [5], Proposizione 5.1) mediante la sua funzione di appoggio, cioè si ha

$$\lambda \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}) \iff$$

$$\iff \xi^* \lambda \leq \sup\{\xi^* \delta : \delta \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)})\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

da cui, tenendo presente che

$$\begin{aligned} & \sup\{\xi^* \delta : \delta \in z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)})\} = \\ & = \sup \left\{ \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b \xi^* V(u, v; a, b) F(u, v) \tilde{U}(u, v) \, dudv : \tilde{U} \in B_{(a_0, b_0), (a, b), q} \right\} = \\ & = \|\xi^* V(\cdot; a, b) F\|_{L^{q'}([a_0, a] \times [b_0, b], \mathbb{R}^m)} = \\ & = \left( \int_{a_0}^a \int_{b_0}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, dudv \right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

si deduce la (8.4).

Proviamo adesso che la (8.3) implica la (8.2).

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale da aversi

$$\iint_{L_{I, J} \cap (]-\infty, a] \times ]-\infty, b])} |\bar{\xi}^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, dudv = M < +\infty,$$

e quindi

$$\int_{a_0}^a \int_{b_0}^b |\bar{\xi}^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} \, dudv \leq M,$$

per ogni  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ ; dalla (8.4) segue allora che, scegliendo  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  in modo che  $|\bar{\xi}^* \lambda|^{q'} > M$ , risulta

$$\lambda \notin \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q, (a, b)}),$$

ma ciò contraddice la (8.3).

Viceversa, dalla (8.2) segue la (8.3). Infatti, fissato un qualunque  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ , la (8.2) implica, in particolare, che per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\xi| = 1$ , esiste  $(a_\xi, b_\xi) \in I \times J$ ,  $a_\xi \leq a$ ,  $b_\xi \leq b$  tale che

$$\int_{a_\xi}^a \int_{b_\xi}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv > |\bar{\lambda}|^{q'}$$

e quindi, per la continuità della funzione

$$\delta \rightarrow \int_{a_\xi}^a \int_{b_\xi}^b |\delta^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv,$$

da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ , esiste pure un insieme aperto  $\Omega_\xi \subseteq \mathbb{R}^n$ , contenente  $\xi$ , tale che

$$\int_{a_\xi}^a \int_{b_\xi}^b |\delta^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv > |\bar{\lambda}|^{q'} \quad \forall \delta \in \Omega_\xi.$$

Dato che la famiglia di insiemi  $\{\Omega_\xi : \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1\}$  costituisce un ricoprimento aperto del compatto  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ , esistono  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\xi_1| = \dots = |\xi_k| = 1$ , tali che

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\} \subseteq \Omega_{\xi_1} \cup \dots \cup \Omega_{\xi_k}.$$

Posto

$$\bar{a}_0 = \min\{a_{\xi_1}, \dots, a_{\xi_k}\}, \quad \bar{b}_0 = \min\{b_{\xi_1}, \dots, b_{\xi_k}\},$$

per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\xi| = 1$ , si ha  $\xi \in \Omega_{\xi_r}$  per qualche  $r = 1, \dots, k$  e quindi

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{a}_0}^a \int_{\bar{b}_0}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv \geq \\ & \geq \int_{a_{\xi_r}}^a \int_{b_{\xi_r}}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv > |\bar{\lambda}|^{q'} \geq |\xi^* \bar{\lambda}|^{q'}. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che

$$\int_{\bar{a}_0}^a \int_{\bar{b}_0}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv > |\xi^* \bar{\lambda}|^{q'} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1.$$

Ne segue che

$$\int_{\bar{a}_0}^a \int_{\bar{b}_0}^b |\xi^* V(u, v; a, b) F(u, v)|^{q'} dudv \geq |\xi^* \bar{\lambda}|^{q'} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

vale a dire, per la (8.4),

$$\bar{\lambda} \in z(a, b; (\bar{a}_0, \bar{b}_0), (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}).$$

Per l'arbitrarietà di  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  concludiamo che vale la (8.3).

A questo punto, provata l'equivalenza tra la (8.2) e la (8.3), per dimostrare la necessità della condizione (8.2) basta osservare che la risolubilità del Problema 6.1 implica, ovviamente, il verificarsi della (8.3).

Dimostriamo, infine, la sufficienza della condizione (8.2).

Sia  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ .

Poichè per ipotesi è verificata la (8.2), per quanto dimostrato preliminarmente vale pure la (8.3), cioè esistono  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$  e  $U_0 \in \mathcal{U}_{q,(a,b)}$  tali che

$$z(a, b; (a_0, b_0), (0, 0), U_0) = \bar{\chi}(0).$$

Osserviamo che, analogamente a quanto rilevato a proposito di  $\mathcal{U}_q$  nel corso della dimostrazione del Teorema 7.1, da  $(a'_0, b'_0), (a''_0, b''_0) \in I \times J$ ,  $a'_0 \leq a''_0 \leq a$ ,  $b'_0 \leq b''_0 \leq b$ , segue

$$\Lambda_{(a'_0, b'_0), (a, b)} \mathcal{U}_{q,(a,b)} \supseteq \Lambda_{(a''_0, b''_0), (a, b)} \mathcal{U}_{q,(a,b)},$$

cioè

$$\mathcal{A}((a'_0, b'_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}) \supseteq \mathcal{A}((a''_0, b''_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U}_{q,(a,b)}).$$

Per la precedente osservazione e per le proprietà che hanno le successioni di intervalli  $\{[a'_k, a''_k]\}$ ,  $\{[b'_k, b''_k]\}$ , possiamo supporre che

$$b_0 \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} b'_k, \quad a_0 \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} a'_k.$$

Inoltre, poichè dalla (8.2) segue ovviamente che  $b > \inf J$  e  $a > \inf I$ , possiamo supporre anche che  $b_0 < b, a_0 < a$ .

Adoperando allora lo stesso procedimento usato in A. Villani [11], Teorema 6.1, si prova che, posto

$$R_k^{(1)} = ]a_k, a_{k+1}[ \times ]b_0, b[, \quad R_k^{(2)} = ]a_0, a[ \times ]b_k, b_{k+1}[, \quad k \in \mathbb{N},$$

e denotando ancora con  $P$  (cfr. la (3.2) del n. 3) l'operatore differenziale

$$w \rightarrow Pw = w_{xy} + Aw_x + Bw_y + Cw,$$

lineare e continuo da  $W_p^*(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n)$  in  $L^p(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, 2, k \in \mathbb{N}$ , esistono quattro successioni

$$\begin{aligned} & \{z_k^{(1)}\}, \quad \{U_k^{(1)}\}, \\ & \{z_k^{(2)}\}, \quad \{U_k^{(2)}\}, \end{aligned}$$

con

$$z_k^{(i)} \in W_p^*(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^n), \quad U_k^{(i)} \in L^p(R_k^{(i)}, \mathbb{R}^m), \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

tali che, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si ha

$$(8.5)_k^{(1)} \quad \begin{cases} (Pz_k^{(1)})(x, y) = F(x, y)U_k^{(1)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(1)}, \\ z_k^{(1)}(x, b_0) = 0, \quad z_k^{(1)}(x, b) = \bar{\chi}(x - a) & \forall x \in [a_k, a_{k+1}], \\ z_k^{(1)}(a_k, y) = z_{k-1}^{(1)}(a_k, y) & \forall y \in [b_0, b], \end{cases}$$

$$(8.5)_k^{(2)} \quad \begin{cases} (Pz_k^{(2)})(x, y) = F(x, y)U_k^{(2)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(2)}, \\ z_k^{(2)}(a_0, y) = 0, \quad z_k^{(2)}(a, y) = \bar{\eta}(y - b) & \forall y \in [b_k, b_{k+1}], \\ z_k^{(2)}(x, b_k) = z_{k-1}^{(2)}(x, b_k) & \forall y \in [a_0, a], \end{cases}$$

avendo indicato con  $z_0^{(1)} = z_0^{(2)}$  la restrizione di  $z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U_0)$  al rettangolo  $R_0 = ]a_0, a[ \times ]b_0, b[$ .

Per dimostrare l'esistenza delle successioni  $\{z_k^{(1)}\}$  e  $\{U_k^{(1)}\}$  cominciamo con il costruire  $z_1^{(1)}$  e  $U_1^{(1)}$ . Supponiamo, per fissare le idee, che sia  $b_0 < b'_1, b''_1 < b$ . Dal Theorem 5 di M. B. Suryanarayana [9] segue l'esistenza di  $w_1 \in W_p^*(]a_1, a_2[ \times ]b_0, b'_1[, \mathbb{R}^n)$ ,  $w_2 \in W_p^*(]a_1, a_2[ \times ]b''_1, b[, \mathbb{R}^n)$  tali che

$$\begin{cases} (Pw_1)(x, y) = F(x, y)U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b_0, b'_1[, \\ w_1(x, b_0) = 0 & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_1(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b_0, b'_1], \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Pw_2)(x, y) = F(x, y)U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b'_1, b[, \\ w_2(x, b) = \bar{\chi}(x - a) & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_2(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b'_1, b]; \end{cases}$$

dal Lemma 6.1 di A. Villani [11] si ottiene l'esistenza di  $w_3 \in W_p^*(]a_1, a_2[ \times ]b'_1, b''_1[, \mathbb{R}^n)$  tale che

$$\begin{cases} w_3(x, b'_1) = w_1(x, b'_1), w_3(x, b''_1) = w_2(x, b'_1) & \forall x \in [a_1, a_2], \\ w_3(a_1, y) = z_0^{(1)}(a_1, y) & \forall y \in [b'_1, b''_1] \end{cases}$$

posto, allora,

$$z_1^{(1)}(x, y) = \begin{cases} w_1(x, y) & \forall (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b_0, b'_1[, \\ w_3(x, y) & \forall (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b'_1, b''_1[, \\ w_2(x, y) & \forall (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b''_1, b[, \end{cases}$$

$$U_1^{(1)}(x, y) = \begin{cases} U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_1^{(1)} \setminus (]a_1, a_2[ \times ]b'_1, b''_1[), \\ F^+(x, y)(Pw_3)(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in ]a_1, a_2[ \times ]b'_1, b''_1[, \end{cases}$$

risulta  $z_1^{(1)} \in W_p^*(R_1^{(1)}, \mathbb{R}^n)$ ,  $U_1^{(1)} \in L^p(R_1^{(1)}, \mathbb{R}^m)$  e valgono le (8.5)<sub>1</sub><sup>(1)</sup>. La costruzione si semplifica in modo ovvio se  $b'_1 = b_0$  o  $b''_1 = b$ .

Con lo stesso procedimento, a partire da  $z_1^{(1)}$  si costruiscono  $z_2^{(1)}$  e  $U_2^{(1)}$  verificanti le (8.5)<sub>2</sub><sup>(1)</sup> e, in generale, a partire da  $z_{k-1}^{(1)}$  si costruiscono  $z_k^{(1)}$  e  $U_k^{(1)}$  verificanti le (8.5)<sub>k</sub><sup>(1)</sup>.

L'esistenza delle successioni  $\{z_k^{(2)}\}$  e  $\{U_k^{(2)}\}$  si dimostra in maniera perfettamente analoga.

Posto, allora,

$$\bar{U}(x, y) = \begin{cases} U_0(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J} \cap (]-\infty, a[ \times ]-\infty, b]), \\ U_k^{(i)}(x, y) & \text{q.o. } (x, y) \in R_k^{(i)}, i = 1, 2, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{q.o. } (x, y) \in L_{I,J} \setminus \left( (]-\infty, a[ \times ]-\infty, b]) \cup \left( \bigcup_{\substack{i=1,2 \\ k \in \mathbb{N}}} R_k^{(i)} \right) \right), \end{cases}$$

si ha, ovviamente,  $\bar{U} \in \mathcal{U}_{q,(a,b)}$  e risulta

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), \bar{U}) = z_k^{(i)}(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in R_k^{(i)}, i = 1, 2, k \in \mathbb{N},$$

dunque

$$z(x, b; (a_0, b_0), (0, 0), \bar{U}) = \bar{\chi}(x - a) \quad \forall x \in [a, +\infty[ ,$$

$$z(a, y; (a_0, b_0), (0, 0), \bar{U}) = \bar{\eta}(y - b) \quad \forall y \in [b, +\infty[ ,$$

cioè

$$\gamma_{(a,b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), \bar{U}) = (\bar{\chi}, \bar{\eta}) .$$

Il teorema è così dimostrato.

**Osservazione 8.1.** È evidente che, qualunque sia  $q' \in [1, +\infty[$ , il verificarsi della (7.1) implica il verificarsi della (8.2) (basta assumere, nella (7.1),  $\mu = \nu = 0$ ). Osserviamo però che non è lecito, nell'enunciato del Teorema 8.2, sostituire la (8.2) con la (7.1). Ciò segue dal successivo esempio.

**Esempio 8.2.** Siano  $I = J = \mathbb{R}$ ;  $n = m = 1$ ;  $A = B = C = 0$  (quindi  $V(u, v; x, y) = 1$  in  $\mathbb{R}^4$ );

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \geq -1 , \\ 0 & \text{se } xy < -1 . \end{cases}$$

Siano, inoltre,  $(a, b) = (0, 0)$  e  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\mathbb{E}_{p,\text{loc}}^{(1)}$ .

Siano, infine,  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $q \in [p, +\infty[$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q,(0,0)}$ .

È immediato verificare che l'ipotesi (I) e la condizione (8.2) sono soddisfatte. Pertanto, per il teorema precedente, il Problema (6.1) ha soluzione.

Invece, la condizione (7.1) non è soddisfatta. Infatti in questo caso non sono verificate la (7.7) e la (7.8), dunque (Corollario 7.1) il Problema 6.2 con  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$  non ha soluzione e quindi (Teorema 7.1) la (7.1) non è verificata.

**Osservazione 8.2.** La risolubilità del Problema 6.1 nel caso dell'Esempio 6.1, già acquisita con un ragionamento diretto, si può dedurre anche dal Teorema 8.2.

**Osservazione 8.3.** Anche la non risolubilità del Problema 6.1 nel caso dell'Esempio 6.2, che abbiamo dimostrato direttamente, si può ottenere applicando il Teorema 8.2.

### 9. Permanenza della risolubilità dei Problemi 6.1 e 6.2 al variare di $l(a, b)$ .

In questo numero esaminiamo la possibilità di dedurre dalla risolubilità del Problema 6.1, ovvero del Problema 6.2, rispetto al luogo finale assegnato  $l(a, b)$ , la risolubilità dello stesso problema rispetto ad un altro luogo finale assegnato  $l(a', b')$ .

A tale scopo ci sarà utile introdurre la seguente definizione.

**Definizione 9.1.** (*Proprietà di 0-incollamento*). L'insieme  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  ha la *proprietà di 0-incollamento* (*zero-incollamento*) se per ogni insieme misurabile  $Y \subseteq L_{I,J}$  si ha

$$U \in \mathcal{U} \quad \implies \quad \mathbf{1}_Y U \in \mathcal{U}.$$

Ad esempio gli insiemi  $\mathcal{U}_q$  e  $\mathcal{U}_{q,(a,b)}$ , considerati nei numeri precedenti, hanno la proprietà di 0-incollamento.

L'ipotesi che l'insieme dei controlli  $\mathcal{U}$  abbia la proprietà di 0-incollamento ci permette di provare che, analogamente a quanto si è verificato a proposito della controllabilità completa, esatta o approssimata, (A. Villani [11], Teorema 5.1 e G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Teorema 5.1), la risolubilità del Problema 6.1 e quella del Problema 6.2 sono proprietà che permangono al "crescere" dei parametri  $a$  e  $b$ .

Si ha infatti il seguente teorema.

**Teorema 9.1.** *Siano dati  $(a, b) \in I \times J$ ,  $(\varphi_0, \psi_0) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq L_{\text{loc}}^p(L_{I,J}, \mathbb{R}^m)$  e supponiamo inoltre che l'insieme  $\mathcal{U}$  abbia la proprietà di 0-incollamento.*

*Allora la risolubilità del Problema 6.1, ovvero del Problema 6.2, rispetto al luogo finale  $l(a, b)$  implica la risolubilità dello stesso problema rispetto ad un qualunque luogo finale  $l(a', b')$  con  $(a', b') \in I \times J$  tale che  $a' \geq a$ ,  $b' \geq b$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(a', b') \in I \times J$ ,  $a' \geq a$ ,  $b' \geq b$ . Osserviamo che (cfr. il n. 4) l'applicazione

$$(\chi, \eta) \rightarrow z(\cdot; (a, b), (\chi, \eta), 0)$$

è lineare e continua da  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  in  $W_{p,\text{loc}}^*(L_{I_a, J_b}, \mathbb{R}^n)$ ; di conseguenza (Teorema 2.7) anche l'applicazione  $g$ , da  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$  in sè, definita ponendo

$$g(\chi, \eta) = \gamma_{(a', b')} z(\cdot; (a, b), (\chi, \eta), 0) \quad \forall (\chi, \eta) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)},$$

è lineare e continua. Tale applicazione, inoltre, è surgettiva; infatti, dato  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , fissata in corrispondenza (n. 4) una funzione  $\bar{z} \in W_{p,\text{loc}}^*(L_{I,J}, \mathbb{R}^n)$  soluzione dell'equazione  $Pz = 0$  verificante la condizione  $\gamma_{(a', b')} \bar{z} = (\bar{\chi}, \bar{\eta})$  e posto  $(\chi, \eta) = \gamma_{(a, b)} \bar{z}$ , risulta

$$z(x, y; (a, b), (\chi, \eta), 0) = \bar{z}(x, y) \quad \forall (x, y) \in L_{I_a, J_b}$$



e quindi

$$g(\chi, \eta) = (\bar{\chi}, \bar{\eta}) .$$

Dall'ipotesi di 0-incollamento segue che per ogni  $(a_0, b_0) \in I \times J$ ,  $a_0 \leq a$ ,  $b_0 \leq b$ , risulta

$$g(\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})) \subseteq \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) ;$$

infatti, se  $(\chi, \eta) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$ , cioè esiste  $U \in \mathcal{U}$  tale che

$$(\chi, \eta) = \gamma_{(a,b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) ,$$

posto

$$U_1 = \mathbf{1}_{L_{I,J} \setminus L_{I_a, J_b}} U ,$$

si ha  $U_1 \in \mathcal{U}$  e

$$z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U_1) = \begin{cases} z(x, y; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) \\ \quad \text{se } (x, y) \in L_{I_{a_0}, J_{b_0}} \setminus L_{I_a, J_b} , \\ z(x, y; (a, b), (\chi, \eta), 0) \\ \quad \text{se } (x, y) \in L_{I_a, J_b} ; \end{cases}$$

pertanto

$$\begin{aligned} g(\chi, \eta) &= \gamma_{(a',b')} z(\cdot; (a, b), (\chi, \eta), 0) = \\ &= \gamma_{(a',b')} z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U_1) \in \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) . \end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} &\bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} g(\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a', b_0 \leq b'}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) . \end{aligned}$$

Supponiamo, adesso, che il Problema 6.1 sia risolubile rispetto al luogo finale  $l(a, b)$ , cioè l'insieme

$$(9.1) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})$$

coincida con  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ . Dato che l'applicazione  $g$  è surgettiva, l'insieme

$$(9.2) \quad g \left( \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}) \right) = \\ = \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} g(\mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U})),$$

e quindi anche l'insieme

$$(9.3) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in I \times J \\ a_0 \leq a', b_0 \leq b'}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (\varphi_0, \psi_0), \mathcal{U}),$$

coincidono con  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ , dunque il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$ .

Supponiamo, infine, che il Problema 6.2 sia risolubile rispetto al luogo finale  $l(a, b)$ , cioè l'insieme (9.1) sia denso in  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ . Poiché l'applicazione  $g$  è continua e surgettiva anche l'insieme (9.2) è denso in  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(n)}$ ; la stessa cosa può allora dirsi dell'insieme (9.3), dunque il Problema 6.2 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$ . Ciò completa la dimostrazione.

**Osservazione 9.1.** Analogamente a quanto accade per la controllabilità completa esatta (A. Villani [11], Esempio 5.1) ovvero approssimata (G. Pulvirenti - G. Santagati [4], Osservazione 5.1), la risolubilità del Problema 6.1, ovvero del Problema 6.2, rispetto al luogo finale  $l(a, b)$ , unitamente all'ipotesi di 0-incollamento su  $\mathcal{U}$ , non garantisce, in generale, l'esistenza di un intorno  $\mathcal{O}$  del punto  $(a, b)$  tale che lo stesso problema sia pure risolubile rispetto ad ogni luogo finale  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathcal{O} \cap (I \times J)$ .

Si hanno in proposito i seguenti esempi.

**Esempio 9.1.** Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e, fermi restando i dati  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  e

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{+\infty, (0,0)} = \{U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2) : |U(x, y)| \leq 1 \\ \text{q.o. } (x, y) \in ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, 0[\},$$

supponiamo che sia  $p < +\infty$ .

Studiamo la risolubilità del Problema 6.1 rispetto al luogo finale fissato  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ .

Come abbiamo già visto, il Problema 6.1 è risolubile rispetto a  $l(0, 0)$  e quindi, per il Teorema 9.1, rispetto ad ogni luogo finale  $l(a', b')$ ,  $(a', b') \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . È altresì facile provare che il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$  anche nei casi  $(a', b') \in ]-\infty, 0[ \times ]0, +\infty[$  oppure  $(a', b') \in ]0, +\infty[ \times ]-\infty, 0[$ . Infatti, supponendo, ad esempio, che sia  $(a', b') \in ]-\infty, 0[ \times ]0, +\infty[$ , assegnato un qualunque stato finale  $(\bar{\chi}, \bar{\eta}) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , se, in corrispondenza di  $(\bar{\chi}, \bar{\eta})$ , si fissa il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$  con  $a_0 < a'$  e  $0 < b_0 < b'$  e si sceglie, come è certamente possibile, un controllo  $U \in \mathcal{U}_{+\infty, (0,0)}$  tale che

$$U(x, y) = \frac{\bar{\chi}(0)}{(a' - a_0)(b' - b_0)} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, a'[ \times ]b_0, b'[ ,$$

$$U(x, y) = \frac{\bar{\chi}'(x - a')}{b' - b_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a', +\infty[ \times ]b_0, b'[ ,$$

$$U(x, y) = \frac{\bar{\eta}'(y - b')}{a' - a_0} \quad \text{q.o. } (x, y) \in [a_0, a'[ \times ]b', +\infty[ ,$$

risulta

$$\gamma_{(a', b')} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\bar{\chi}, \bar{\eta})$$

(per verificare ciò basta adattare il ragionamento svolto nell'Esempio 6.1).

Proviamo che, invece, il Problema 6.1 non è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$  se  $(a', b') \in ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, 0[ \setminus \{(0, 0)\}$ . Ovviamente, per il Teorema (9.1), basta limitarci ai casi  $(a', 0)$ ,  $a' < 0$  e  $(0, b')$ ,  $b' < 0$ .

Consideriamo il caso  $(a', 0)$ ,  $a' < 0$ . Fissati  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ , con  $a_0 \leq a'$ ,  $b_0 \leq 0$ , e  $U \in \mathcal{U}$ , posto, analogamente alla (6.5),

$$\gamma_{(a', 0)} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi) ,$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a'+t} \int_{b_0}^0 U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

e quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^0 U(a' + t, v) \, dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ ,$$

da cui

$$|\varphi'(t)| \leq -b_0 \quad \text{q.o. } t \in [0, -a'[ ;$$

conseguentemente, poiché  $p < +\infty$ ,

$$\bigcup_{a_0 \leq a', b_0 \leq 0} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', 0); (0, 0), \mathcal{U}_{+\infty, (0,0)}) \neq \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)},$$

cioè il relativo Problema 6.1 non ha soluzione.

Analogamente si procede nel caso  $(0, b')$ ,  $b' < 0$ .

Da quanto osservato segue, in particolare, che il Problema 6.1 è risolubile rispetto a  $l(0, 0)$ , ma non esiste alcun intorno  $\mathcal{O}$  di  $(0, 0)$  tale che il Problema 6.1 sia risolubile rispetto ad ogni luogo finale  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathcal{O}$ .

Studiamo adesso la risolubilità del Problema 6.2 rispetto al luogo finale fissato  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ .

Si verifica facilmente che il Problema 6.2 è risolubile rispetto ad un qualunque luogo finale fissato  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ . Nel caso  $1 < p < +\infty$  ciò segue dal Corollario 7.1, tenuto conto che  $\mathcal{U}_{+\infty, (0,0)} \supseteq \mathcal{U}_{+\infty}$ ; il caso  $p = 1$  si deduce dal caso  $1 < p < +\infty$  in virtù della densità di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , con  $1 < p < +\infty$ , in  $\Xi_{1, \text{loc}}^{(1)}$ .

**Esempio 9.2.** Riprendiamo in esame il processo di controllo scalare dell'Esempio 8.2

$$z_{xy} = F(x, y)U(x, y) \quad \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

con

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \geq -1, \\ 0 & \text{se } xy < -1, \end{cases}$$

e, fermo restando lo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ , elemento nullo di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , assumiamo adesso come insieme dei controlli ammissibili  $\mathcal{U}$  l'intero spazio  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ .

Studiamo il Problema 6.1.

Il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(0, 0)$  (ciò è un'ovvia conseguenza di quanto provato nell'Esempio 8.2, nel quale  $\mathcal{U}$  era un sottoinsieme proprio di  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$ ) e quindi, per il Teorema 9.1, rispetto ad ogni luogo finale  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ .

Dimostriamo che, invece, il Problema 6.1 non è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$  se  $a' < 0$  oppure  $b' < 0$ .

Consideriamo il caso  $b' < 0$ . Fissato un qualunque  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ , con  $a_0 \leq a', b_0 \leq b'$ , e posto

$$\gamma_{(a', b')} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi),$$

si ha

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a'+t} \int_{b_0}^{b'} F(u, v)U(u, v) dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ,$$

quindi

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^{b'} F(a' + t, v)U(a' + t, v)dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ ,$$

da cui

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{q.o. } t \in \left[ \max\{0, -a' - \frac{1}{b'}\}, +\infty[ ,$$

dunque la funzione  $\varphi$  è costante in un intervallo; ciò comporta che

$$\bigcup_{a_0 \leq a', b_0 \leq b'} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a', b'); (0, 0), L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)) \neq \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)} ,$$

cioè il relativo Problema 6.1 non è risolubile.

Analogamente si procede nel caso  $a' < 0$ .

Consideriamo adesso il Problema 6.2.

Ovviamente il Problema 6.2 è risolubile se  $(a', b') \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ . Proviamo che non è, invece, risolubile se  $a' < 0$  oppure  $b' < 0$ . A tale scopo, supponendo, ad esempio, che sia  $b' < 0$ , basta riprendere il ragionamento svolto a proposito del Problema 6.1 ed osservare inoltre che l'intervallo

$$\left[ \max\{0, -a' - \frac{1}{b'}\}, +\infty[ ,$$

nel quale la funzione  $\varphi$  risulta costante, dipende da  $(a', b')$  ma non da  $(a_0, b_0)$ .

Il precedente Esempio 9.2 mostra che, tanto per il Problema 6.1 quanto per il 6.2, è possibile che vi sia risolubilità rispetto ad un luogo finale assegnato  $l(a, b)$ , ma tale risolubilità venga a mancare non appena si consideri un qualsiasi luogo finale assegnato  $l(a', b')$  con  $a' < a$  oppure  $b' < b$ .

Un esempio dello stesso tenore, relativamente al Problema 6.2, è il seguente.

**Esempio 9.3.** Siano  $I = J = \mathbb{R}$ ;  $n = m = 1$ ;  $A = B = C = 0$  (quindi  $V(u, v; x, y) = 1$  in  $\mathbb{R}^4$ );  $F = \mathbf{1}_Z$ , essendo  $Z$  l'insieme

$$Z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1 \right\}.$$

Sia, inoltre,  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$  l'elemento nullo di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$ .

Siano, infine,  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $q \in [p, +\infty]$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q$ .

Per il Teorema 8.1 il Problema 6.1 non è risolubile rispetto ad alcun luogo finale  $l(a', b')$ , con  $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ .

Dal Corollario 7.1 segue invece che il Problema 6.2 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(a', b')$  se e soltanto se è  $(a', b') \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ ; infatti se  $(a', b') \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  sono soddisfatte le condizioni (7.6), (7.7) e (7.8); viceversa, se  $(a', b') \notin [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ , ad es. poiché  $a' < 0$ , allora non vale la (7.7).

**Osservazione 9.2.** L'ipotesi di 0-incollamento dell'insieme  $\mathcal{U}$  nel Teorema 9.1 ha un ruolo essenziale. Infatti, se l'insieme  $\mathcal{U}$  non ha la proprietà di 0-incollamento, allora è possibile che il Problema 6.1 (ovvero il Problema 6.2) sia risolubile rispetto al luogo finale  $l(a, b)$ , ma non lo sia rispetto a qualche luogo finale  $l(a', b')$  con  $(a', b') \in I \times J$ ,  $a' \geq a$ ,  $b' \geq b$ . Ciò segue dal successivo Esempio 9.2 che mostra, addirittura, un caso in cui, tanto per il Problema 6.1 quanto per il Problema 6.2, vi è un unico luogo finale  $l(a, b)$  rispetto al quale si ha risolubilità.

**Esempio 9.4.** Consideriamo lo stesso processo di controllo scalare (6.3) dell'Esempio 6.1 e, fermo restando lo stato iniziale  $(\varphi_0, \psi_0) = (0, 0)$ , elemento nullo di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$ , assumiamo adesso come insieme dei controlli ammissibili  $\mathcal{U}$  il sottoinsieme di  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$  definito nel modo di seguito descritto.

Fissati i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$Q = [-1, 0[ \times [-1, 0[ ,$$

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, -\frac{1}{x+1} \leq y < 0 \right\} ,$$

$$X_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y < \frac{1}{x+1} \right\} ,$$

$$Y_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, -\frac{1}{y+1} \leq x < 0 \right\} ,$$

$$Y_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, 0 \leq x < \frac{1}{y+1} \right\} ,$$

indichiamo, per ogni  $(\chi, \eta) \in \Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$ , con  $U_{(\chi,\eta)}$  l'elemento di  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$  definito

ponendo

$$U_{(x,\eta)}(x, y) = \begin{cases} \chi(0) & \text{q.o. } (x, y) \in Q, \\ (x+1)\chi'(x) & \text{q.o. } (x, y) \in X_1, \\ (x+1)|\chi'(x)| & \text{q.o. } (x, y) \in X_2, \\ (y+1)\eta'(y) & \text{q.o. } (x, y) \in Y_1, \\ (y+1)|\eta'(y)| & \text{q.o. } (x, y) \in Y_2, \\ 0 & \text{q.o. } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (Q \cup X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2) \end{cases}$$

e diciamo  $\mathcal{U}$  il sottoinsieme di  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$  formato da tutti gli elementi  $U_{(x,\eta)}$  al variare di  $(\chi, \eta)$  in  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$ .

Faremo vedere che il Problema 6.1 (e quindi anche il Problema 6.2) è risolubile rispetto al luogo finale  $l(0, 0)$  e che, viceversa, rispetto ad un qualunque luogo finale  $l(a, b)$  diverso da  $l(0, 0)$  non c'è risolubilità del Problema 6.2 (e quindi neanche del Problema 6.1).

A tale scopo ricordiamo che, per il processo di controllo (6.3), per ogni  $U \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2)$  ed ogni  $(a_0, b_0), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , con  $a_0 \leq a, b_0 \leq b$ , si ha

$$z(x, y; (a_0, b_0), (0, 0), U) = \int_{a_0}^x \int_{b_0}^y U(u, v) \, dudv \\ \forall (x, y) \in [a_0, +\infty[ \times [b_0, +\infty[$$

e pertanto

$$\gamma_{(a,b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (0, 0), U) = (\varphi, \psi),$$

dove  $(\varphi, \psi)$  è l'elemento di  $\Xi_{p,\text{loc}}^{(1)}$  dato da

$$\varphi(t) = \int_{a_0}^{a+t} \int_{b_0}^b U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ , \\ \psi(t) = \int_{a_0}^a \int_{b_0}^{b+t} U(u, v) \, dudv \quad \forall t \in [0, +\infty[ ;$$

conseguentemente si ha

$$\varphi'(t) = \int_{b_0}^b U(a+t, v) \, dv \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ , \\ \psi'(t) = \int_{a_0}^a U(u, b+t) \, du \quad \text{q.o. } t \in [0, +\infty[ .$$

Proviamo che il Problema 6.1 è risolubile rispetto al luogo finale  $l(0, 0)$  facendo vedere che, se  $(a_0, b_0) = (-1, -1)$ , è addirittura verificata la (6.2).

Infatti, assegnato un qualunque  $(\chi, \eta) \in \Xi_{p, \text{loc}}^{(1)}$ , se prendiamo  $U = U_{(\chi, \eta)}$ , si ha, per ogni  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-1}^t \int_{-1}^0 U(u, v) \, dudv = \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \chi(0) \, dudv + \int_0^t \int_{-\frac{1}{u+1}}^0 (u+1)\chi'(u) \, dudv = \\ &= \chi(0) + \int_0^t \chi'(u) \, du = \chi(t) \end{aligned}$$

e, analogamente,  $\psi(t) = \eta(t)$ , pertanto  $(\varphi, \psi) = (\chi, \eta)$ .

Ciò prova la risolubilità del Problema 6.1 rispetto al luogo finale  $l(0, 0)$ .

Dimostriamo adesso che rispetto ad un qualunque luogo finale  $l(a, b)$  diverso da  $l(0, 0)$  il Problema 6.2 non è risolubile.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia  $a \neq 0$  e distinguiamo i tre casi:  $a < -1$ ,  $-1 \leq a < 0$  e  $a > 0$ . In maniera perfettamente analoga si procede se  $b \neq 0$ .

Se  $a < -1$ , allora è immediato verificare che, qualunque siano il controllo  $U \in \mathcal{U}$  ed il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$ , con  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $a_0 \leq a$  e  $b_0 \leq b$ , risulta

$$\psi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Ciò implica, ovviamente, che il Problema 6.2 non è risolubile.

Se  $-1 \leq a < 0$ , allora, osservato che l'insieme  $Y_1$  può scriversi

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 0, 0 \leq y \leq -\frac{x+1}{x}\},$$

si ha che, per q.o.  $t \in [0, +\infty[$  tale da aversi

$$b + t > -\frac{a+1}{a}$$

e quindi anche

$$b + t > -\frac{u+1}{u} \quad \forall u \in [a_0, a],$$

risulta, qualunque siano il controllo  $U \in \mathcal{U}$  ed il luogo iniziale  $l(a_0, b_0)$ , con  $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $a_0 \leq a$  e  $b_0 \leq b$ ,

$$U(u, b+t) = 0 \quad \text{q.o. } u \in [a_0, a]$$



e quindi

$$\psi'(t) = 0.$$

Pertanto abbiamo che per ogni elemento  $(\varphi, \psi)$  dell'insieme

$$(9.4) \quad \bigcup_{\substack{(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 \\ a_0 \leq a, b_0 \leq b}} \mathcal{A}((a_0, b_0), (a, b); (0, 0), \mathcal{U})$$

la derivata  $\psi'$  è quasi ovunque nulla nell'intervallo

$$\left] \max\left\{0, -\frac{a+1}{a} - b\right\}, +\infty \right[$$

(che dipende soltanto dal luogo finale  $l(a, b)$ ). Ne segue facilmente che il Problema 6.2 non è risolubile rispetto a  $l(a, b)$ .

Esaminiamo, infine, il caso  $a > 0$ . Per provare che il Problema 6.2 non è risolubile facciamo vedere, questa volta, che esiste un intervallo  $]\gamma, +\infty[ \subseteq [0, +\infty[$ , dipendente solo da  $(a, b)$ , tale da aversi, per ogni elemento  $(\varphi, \psi)$  dell'insieme (9.4),

$$\psi'(t) \geq 0 \quad \text{q.o. } t \in ]\gamma, +\infty[.$$

Da ciò si deduce facilmente che il Problema (6.2) non è risolubile rispetto a  $l(a, b)$ .

Sia

$$\gamma = \max\left\{1 - b, \frac{1 - a}{a} - b, 0\right\},$$

sicché da  $t > \gamma$  segue che è pure

$$b + t > 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{b + t + 1} < a.$$

Conseguentemente, per ogni controllo  $U = U_{(x, \eta)} \in \mathcal{U}$ , risulta, per q.o.  $t \in ]\gamma, +\infty[$ ,

$$U(u, b+t) = \begin{cases} (b+t+1)\eta'(b+t) & \text{q.o. } u \in [-(b+t+1), 0[, \\ (b+t+1)|\eta'(b+t)| & \text{q.o. } u \in [0, b+t+1[, \\ 0 & \text{q.o. } u \in \mathbb{R} \setminus [-(b+t+1), b+t+1[, \end{cases}$$

e da ciò segue che è  $\psi'(t) \geq 0$ ; infatti, se  $a_0 < -\frac{1}{b+t+1}$ , si ha

$$\psi'(t) = \int_{a_0}^a U(u, b+t) du = \int_{-\frac{1}{b+t+1}}^{\frac{1}{b+t+1}} U(u, b+t) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{1}{b+t+1}}^0 (b+t+1)\eta'(b+t) du + \int_0^{\frac{1}{b+t+1}} (b+t+1)|\eta'(b+t)| du = \\
&= \eta'(b+t) + |\eta'(b+t)| \geq 0 ;
\end{aligned}$$

se  $-\frac{1}{b+t+1} \leq a_0 < 0$ , allora

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \int_{a_0}^{\frac{1}{b+t+1}} U(u, b+t) du = \\
&= \int_{a_0}^0 (b+t+1)\eta'(b+t) du + \int_0^{\frac{1}{b+t+1}} (b+t+1)|\eta'(b+t)| du = \\
&= |a_0|\eta'(b+t) + |\eta'(b+t)| \geq |a_0|(\eta'(b+t) + |\eta'(b+t)|) \geq 0 ;
\end{aligned}$$

infine, se  $a_0 \geq 0$ , risulta

$$U(u, b+t) \geq 0 \quad \text{q.o. } u \in [a_0, a]$$

e quindi  $\psi'(t) \geq 0$ .

### 10. I casi $a = \sup I$ e $b = \sup J$ .

Mostriamo, infine, come l'ipotesi

$$(10.1) \quad a < \sup I, \quad b < \sup J,$$

assunta a partire dal n. 5 per semplificare l'esposizione, possa essere rimossa nella trattazione sin qui svolta.

Per quanto riguarda il n. 5, cominciamo con l'osservare che il suo contenuto resta inalterato se invece della (10.1) è verificata l'ipotesi più debole

$$(10.2) \quad a_0 < \sup I, \quad b_0 < \sup J,$$

utilizzata nel n. 4.

Nel caso in cui neanche la (10.2) è verificata, per riottenere i risultati del n. 5 basta estendere quelli del n. 4. A tale scopo, continuando ad utilizzare il simbolo  $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$  per denotare l'insieme

$$L_{I,J} \cap ([a_0, +\infty[ \times [b_0, +\infty[)$$

anche se gli insiemi  $I_{a_0}, J_{b_0}$  non sono entrambi intervalli non degeneri, notiamo che le restrizioni all'insieme  $L_{I_{a_0}, J_{b_0}}$  delle funzioni  $z \in W_{p, \text{loc}}^*(L_{I, J}, \mathbb{R}^n)$ , soluzioni di (E) verificanti la condizione  $\gamma_{(a_0, b_0)} z = (\varphi_0, \psi_0)$ , coincidono con un'unica funzione continua, che seguiranno a denotare con  $z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U)$ , per la quale vale ancora la rappresentazione data dalle (4.4) e (4.5); in particolare la traccia su  $l(a, b)$  di una qualunque delle predette soluzioni di (E) individua un unico elemento di  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ , che continueremo ad indicare con  $\gamma_{(a, b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U)$ .

È facile poi verificare che l'applicazione

$$(10.3) \quad ((\varphi_0, \psi_0), U) \rightarrow \gamma_{(a, b)} z(\cdot; (a_0, b_0), (\varphi_0, \psi_0), U) ,$$

da  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} \times L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$  in  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ , è lineare e continua.

Da quanto premesso segue che il contenuto del n. 5 resta valido anche se non è verificata la (10.2).

Una volta acquisita l'estensione del n. 5, quella nei nn. 6, 7 e 8 ne è un'immediata conseguenza.

Infine, per quanto riguarda il n. 9, basta tenere presente che, se non è verificata la (10.1), l'applicazione  $g$  considerata nella dimostrazione del Teorema 9.1 è ancora lineare e continua dato che, come abbiamo prima osservato a proposito della (10.3), l'applicazione

$$((\varphi_0, \psi_0), U) \rightarrow \gamma_{(a', b')} z(\cdot; (a, b), (\varphi_0, \psi_0), U) ,$$

da  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)} \times L_{\text{loc}}^p(L_{I, J}, \mathbb{R}^m)$  in  $\Xi_{p, \text{loc}}^{(n)}$ , è lineare e continua.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] R. Conti, *Problemi di controllo e di controllo ottimale*, UTET, Torino, 1974.
- [2] R. Di Vincenzo - A. Villani, *Sopra un problema ai limiti per una equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione*, *Le Matematiche*, 32 (1977), pp. 211-238.
- [3] N. Dunford - J.T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [4] G. Pulvirenti - G. Santagati, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa approssimata*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 33 (1983), pp. 35-50.

- [5] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Insieme raggiungibile*, Boll. Un. Mat. Ital. B, (7) 4 (1990), pp. 345–379.
- [6] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Problemi di controllo*, Le Matematiche, 51 (1996), pp. 413–443.
- [7] G. Pulvirenti - G. Santagati - A. Villani, *Control processes with distributed parameters in unbounded sets. Approximate controllability with variable initial locus*, in *Variational analysis and applications*, F. Giannessi - A. Maugeri editors, Springer, 2005, pp. 855–887.
- [8] G. Sturiale, *Un problema di Darboux in un insieme non limitato. Esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione*, Le Matematiche, 53 (1998), pp. 359–373.
- [9] M.B. Suryanarayana, *A Sobolev space and a Darboux Problem*, Pacific J. Math., 69 (1977), pp. 535–550.
- [10] A. Villani, *Un problema al contorno per un sistema lineare iperbolico su un insieme non limitato*, Le Matematiche, 36 (1981), pp. 215–234.
- [11] A. Villani, *Processi di controllo con parametri distribuiti in insiemi non limitati. Controllabilità completa esatta*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 33 (1983), pp. 19–33.
- [12] A. Villani, *On the metrizability of  $L_{loc}^p(\Omega, \mu)$* , Le Matematiche, 38 (1983), pp. 237–244.

*Dipartimento di Matematica e Informatica,  
Università di Catania,  
Viale A. Doria 6, 95125 Catania (ITALY)  
e-mail: villani@dmi.unict.it*