PROGRAMAÇÃO LINEAR E TÉCNICA OPT

Cláudio José Luchesa
Especialista em Desenvolvimento Gerencial
pela Universidade do Oeste Catarinense,
Mestre em Ciências Sociais Aplicadas pelas
Faculdades Integradas de Palmas,
Doutorando em Economia e Política Florestal pela UFPR,
Professor do Curso de Administração das
Faculdades Integradas Curitiba

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de produção experimentaram avanços inusitados em todos os sentidos, no século XX. Passaram a ser obtidas quantidades cada vez maiores, de produtos cada vez mais diversificados e sofisticados, utilizando-se quantidades de fatores de produção por unidade de produto, cada vez menores, em velocidades cada vez mais altas, em escala de produção cada vez maior. Como decorrência dessa evolução, os custos tornaram-se cada vez menores, possibilitando que produtos cada vez mais sofisticados fossem vendidos a preços cada vez mais baixos. Isso incorporou massas cada vez maiores de consumidores aos segmentos de consumo.

Os efeitos econômicos do processo são bem conhecidos quanto ao investimento e à geração de emprego e renda. Sob o ponto de vista social, o impacto desses avanços foi extremamente benéfico a toda a sociedade, porque proporcionou o desfrute de níveis superiores de qualidade de vida, até então não imaginados, a parcelas cada vez mais amplas da sociedade. Para a Administração, ciência responsável pela gestão dos sistemas de produção, cabe o mérito de ter feito com que eles passassem a produzir mais e melhor, utilizando menos recursos.

2 EVOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE PRODUÇÃO

Cabe lembrar que até o século XIX os sistemas de produção evoluíram muito lentamente, quanto às técnicas, aos equipamentos, aos processos e à gestão. Essa lentidão foi sacudida pelas possibilidades evolutivas, proporcionadas pela substituição da energia muscular pela energia mecânica. Esta, de início gerada diretamente pela energia hidráulica e depois pela máquina a vapor, foi, em seguida, convertida em energia elétrica, podendo assim ser transportada a longas distâncias; os desdobramentos desses eventos ficaram conhecidos como Revolução Industrial. Mais tarde veio o petróleo e o motor a combustão interna. Já em meados do século XX surgiu a energia atômica, ainda não satisfatoriamente aproveitada. Agora, a preocupação ecológica tem incorporado aos sistemas de produção principalmente a energia solar e a eólica.

Todavia, no momento em que substituiu a força muscular pela energia mecânica, a máquina a vapor eliminou o gargalo energético ao qual, até então, os sistemas de produção estavam submetidos; essa foi a partida do processo evolutivo. Depois, a conversão de outras formas de energia em elétrica, proporcionou as condições necessária e suficiente para eliminar outro gargalo, a que a produção estava submetida. Tratava-se da localização compulsória da unidade produtiva, próxima à fonte de energia. A conversão de outras formas de energia em energia elétrica ampliou *ad infinitum* as possibilidades geográficas de localização das unidades produtivas. Por outro lado, já a partir da máquina a vapor, o barateamento do custo e, por extensão do preço de venda, dos bens de consumo passaram a ampliar o mercado para os produtos, tornando-os acessíveis a segmentos de consumidores que, até então, estavam à margem do mercado. Posteriormente, já no início do século XX, a produção em série idealizada por Ford, ampliou ainda mais a escala de produção.

Contudo, quatro eventos da esfera geopolítica caracterizaram o século passado, não só nos demais aspectos, como também quanto à evolução dos sistemas produtivos. Foram as duas guerras mundiais, a Guerra Fria e a corrida aeroespacial. Tais episódios forçaram as unidades produtivas dos países beligerantes a se tornarem mais eficientes e eficazes, exigindo escalas exponenciais de produção e obrigando o desenvolvimento de produtos e processos em velocidades vertiginosas. Os objetivos militares e aeroespaciais obrigaram as unidades produtivas e os seus sistemas de produção a realizarem gigantescos esforços no sentido de desenvolver novas tecnologias de fabricação, novas técnicas de processo, novos sistemas de gestão da unidade produtiva, novas tecnologias de materiais, novas técnicas de logística e novos produtos. Esses esforços decorriam da condição estratégica militar: era preciso manter-se à frente, se não como condição de sobrevivência, ao menos para ampliar a esfera de influência geopolítica. Fundamentava-se no princípio latino: *Si vis pacem para bellum*, ou seja, Se queres a paz, prepara-te para a guerra. Os objetivos geopolíticos levaram o mundo, enfim, àquilo que pode ser denominado uma segunda Revolução Industrial.

Por ter sido com fins militares, boa parte, se não a maior, do desenvolvimento tecnológico foi realizado pela iniciativa privada, sob encomenda e às expensas dos respectivos Estados. Contudo, do desenvolvimento da tecnologia para fins militares ao seu uso para fins pacíficos, bastou apenas um passo. Esse processo se traduziu em bens de consumo de massa ainda mais eficientes e mais baratos.

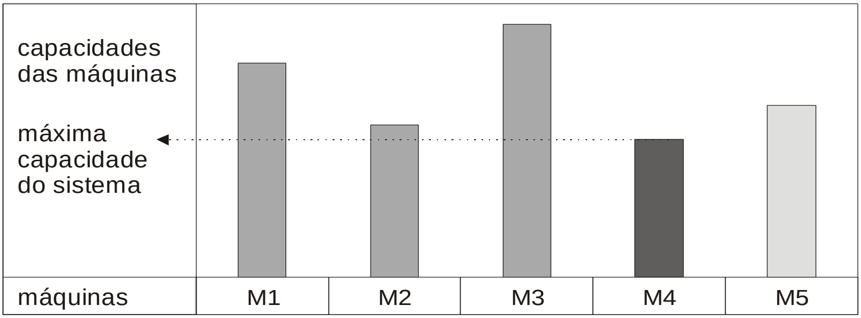
Enquanto era um esforço de guerra, o processo de desenvolvimento tecnológico não encontrou limitações práticas de recursos. Como, muitas vezes, do desenvolvimento dependeria a própria sobrevivência da nação, ou a dissuasão do inimigo potencial, os recursos alocados pelos Estados eram praticamente ilimitados. Depois, quando da sua aplicação para fins pacíficos foi preciso operar com recursos limitados. Nos tempos de paz, os sistemas de produção precisaram objetivar, principalmente, custos mais baixos. Dentro dessa perspectiva, premidas pela competição, as técnicas de gestão da unidade produtiva evoluíram também no sentido de maximizar o uso dos fatores de produção. Nos últimos anos, a ordem do dia passou a ser qualidade, produtividade e competitividade.

3 TÉCNICA OPT

O próprio crescimento dos mercados foi, de certa forma, desordenado. As adequações das fábricas às solicitações permanentes de aumentos de produção e de produtividade fizeram com que a grande maioria apresentasse falhas de dimensionamento. O crescimento de cada fábrica foi sendo realizado por meio de sucessivas adaptações de *layout*, a fim de incorporar novos equipamentos e processos. A compatibilização da capacidade dos equipamentos, dentro de uma mesma fábrica, nunca foi uma prioridade, e raros são os casos de fábricas, cujos equipamentos tenham suas capacidades perfeitamente inter-relacionadas. Essa condição levou a uma busca constante de aperfeiçoamentos das técnicas de PCP e *layout*, principalmente, para superar ou minimizar os efeitos e defeitos daquela condição. Recentemente, o desenvolvimento da técnica OPT trouxe uma excelente ferramenta para resolver o problema.

A técnica OPT – Optimized Production Tecnology, ou Tecnologia de Produção Otimizada, é, essencialmente, a gestão de um sistema de produção que leva em consideração as deficiências internas de uma unidade produtiva, em especial no que se refere à relação de interdependência de capacidades, entre equipamentos e/ou setores da produção. A construção dos raciocínios dessa técnica fundamenta-se na identificação dos gargalos da produção, ou seja, dos pontos de menor capacidade da unidade de produção. Em geral, tais pontos são gerados pela incompatibilidade de capacidade entre os equipamentos utilizados em uma linha de produção. A técnica preconiza que, se uma linha de produção for composta por mais de um equipamento, a capacidade total dessa linha estará limitada à capacidade da máquina de menor capacidade, o seu gargalo. Foi desenvolvida pelo físico Eliyahu Goldratt e, além da sua premissa básica quanto aos gargalos de produção, considera também a minimização dos recursos envolvidos, especialmente nos estoques. Ela defende três enfoques: o primeiro sobre ganho, como medida da relação entre o resultado gerado pelo sistema e os recursos aplicados; o segundo define o inventário como o valor investido nas matérias-primas e, finalmente considera despesas operacionais como o restante do valor despendido, a fim de transformar o inventário em ganho. Aos objetivos deste texto, interessa especificamente a abordagem quanto aos recursos gargalo e recursos não-gargalo, que podem ser exemplificados por intermédio do gráfico a seguir.

Observa-se que, não obstante as máquinas M1, M2, M3 e M5 possuírem capacidades superiores, o sistema só poderá produzir até o limite de capacidade da máquina M4. Assim, levando em consideração esse tipo de restrição ou gargalo, o PCP – Planejamento e Controle da Produção –, pela técnica OPT, fundamenta-se nestas premissas. a) Deve ser balanceado o fluxo de produção e não a capacidade. b) A utilização de um recurso não-gargalo não é autodeterminada por tal recurso, mas sim pelo(s) gargalo(s). c) Ativar e utilizar um recurso não são sinônimos. d) Todo tempo ganho em um recurso-gargalo é tempo ganho para todo o sistema, até o limite do próximo gargalo. e) O tempo ganho em recursos não-gargalo não tem sentido. Esforços despendidos na maximização da utilização desses recursos são rigorosamente inúteis. f) Em geral o lote de transferência não é igual ao lote de processamento. g) O lote de processamento não deve ser fixo. h) Os gargalos determinam o fluxo do sistema e a sua capacidade total, assim como também determinam os estoques. i) A programação das atividades e as capacidades devem ser consideradas simultaneamente.



Além disso, na técnica OPT, a programação de produção é elaborada com base nas vendas, preconizando a eliminação, ou minimização, dos estoques em processo. As necessidades de materiais e componentes são supridas em função das quantidades a serem produzidas e, nesse aspecto, a técnica OPT adota a filosofia *just-in-time*.

4 PROGRAMAÇÃO LINEAR NO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

A programação linear é um procedimento de cálculo empregado em Pesquisa Operacional e faz parte de uma área da Matemática Aplicada, genericamente conhecida como “modelagem matemática”. O seu emprego em programação da produção consiste em equacionar as restrições de cada máquina da linha de produção. Essas restrições são qualificadas aqui de endógenas, por serem internas ao sistema. Constituem, em geral, as capacidades de processamento de cada máquina. Assim, as restrições incorporam todos os gargalos da linha de produção. Em linguagem de modelagem, esse equacionamento é conhecido como “equacionamento das funções de restrição”. Muitas vezes o sistema de produção é submetido a exigências que não procedem diretamente das capacidades das máquinas ou de setores da industria. Tais exigências podem ser determinadas por condições financeiras da empresa, por circunstâncias do mercado, ou por outras determinantes quaisquer. Por sua origem externa ao sistema de produção, elas têm aqui o nome de restrições exógenas. Em linguagem de modelagem matemática são consideradas “função objetivo”.

A conjugação das funções de restrição com a função objetivo consubstancia um modelo, ou um algoritmo matemático, que permite otimizar o sistema de produção, atendendo simultaneamente às restrições ou gargalos e ao objetivo pretendido. Desse tipo de modelagem decorre um sistema de “n” equações com “m” incógnitas. Para que o sistema apresente solução, deve satisfazer à condição:

m =/< n.

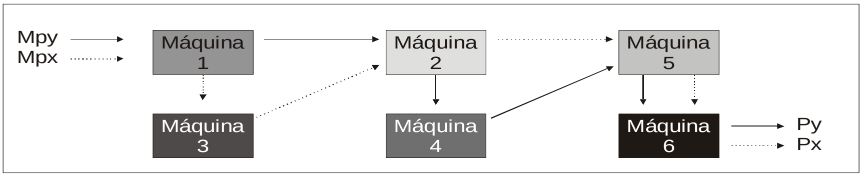
5 SISTEMA DE PRODUÇÃO E SOLUÇÃO PARA SUAS RESTRIÇÕES

Para exemplificar, assuma-se a existência de um conjunto de seis máquinas que processam duas matérias-primas diferentes, fabricando assim dois produtos também diferentes. A seqüência da passagem de cada matéria-prima, pelo conjunto das seis máquinas, é dada pelo fluxograma adiante. O *input* do sistema são as matérias-primas “Mpy” e “Mpx”, das quais se obtêm, respectivamente, os produtos “Py” e “Px”.

Assumam-se também as seguintes capacidades de cada máquina, para processar cada matéria-prima.

MÁQUINAS	PRODUTO Y	PRODUTO X
Máquina 1 – M1	800 kg por hora	600 kg por hora
Máquina 2 – M2	700 kg por hora	800 kg por hora
Máquina 3 – M3	– o –	500 kg por hora
Máquina 4 – M4	600 kg por hora	– o –
Máquina 5 – M5	600 kg por hora	900 kg por hora
Máquina 6 – M6	700 kg por hora	1.000 kg por hora

Observando a capacidade de cada máquina para processar cada matéria prima, já é possível identificar o gargalo da fabricação de cada um dos produtos. O gargalo da produção de y está nas máquinas M4 e M5 e o gargalo da produção de x está na máquina M3.



Mpy (matéria-prima y) Py (produto y)
Mpx (matéria-prima x) Px (produto x)

Pensando apenas no produto y, uma solução poderia ser a aquisição de mais duas máquinas, uma igual à M4 e outra igual à M5. Outra solução poderia ser a operação de M4 e M5 em turnos adicionais de trabalho. Em qualquer uma dessas soluções, cabe notar que haverá implicações de mudanças no *layout*.

Nesse exemplo, admitindo-se que o sistema esteja fabricando apenas o produto y num único turno de trabalho, sua capacidade total estaria limitada às capacidades das máquinas M4 e M5, ou seja, o sistema não teria capacidade de processar mais do que 600 kg por hora, ou 4.800 kg por dia, em um turno de trabalho de 8 horas. Assumindo que o sistema tivesse que produzir, por exemplo, 5.600 kg por dia de y, bastaria operar M4 e M5 por um período mais longo de tempo, após o turno normal de trabalho: 5.600 kg/600 kg por hora = 9,333..... horas. Ou seja: M4 e M5 precisariam trabalhar em turnos diários de 9 horas e vinte minutos, enquanto M2 e M6 trabalhariam durante um turno normal de 8 horas. Já M1 poderia trabalhar apenas um turno de 7 horas diárias, para efetivar uma produção de 5.600 kg diários de y.

Observa-se que, ao final de um turno normal de 8 horas, existiriam 800 kg de matéria-prima, já processados pelas máquinas M1 e M2, aguardando para serem processados pelas máquinas M4 e M5. Essa quantidade seria processada por M4 e M5 durante a uma hora e vinte minutos de turno adicional que essas máquinas precisariam trabalhar. Ao final desse turno extra, M4 e M5 já teriam processado a matéria-prima e ela permaneceria no aguardo do turno seguinte, para ser processada por M6. No turno seguinte, M6 processaria esses 800 kg e mais os 4.800 kg que seriam processados durante as 8 horas daquele turno, por M4 e M5. Obter-se-iam, assim, os 5.600 kg diários desse produto.

6 EQUACIONAMENTO DAS RESTRIÇÕES

Muitas vezes, verificam-se condicionantes exógenas ao sistema, determinadas por exigências de ordem financeira, pelo mercado, ou por outra circunstância qualquer. Nesses casos, o programa de produção deve objetivar a otimização do sistema, com suas restrições internas e sob tais condicionantes, ou restrições externas. Para programar a produção, atendendo a essas exigências, recorre-se aos algoritmos de programação linear. Para tanto, basta equacionar a capacidade total do sistema em uma matriz de produção que leve em consideração a capacidade de processamento de cada máquina no mesmo turno de trabalho, tanto do produto **y** quanto do produto **x**. Assim, as restrições endógenas serão as capacidades de processamento de **y** e de **x** de cada máquina.

O primeiro passo consiste em equacionar, máquina por máquina, a capacidade total do sistema. Com os dados do exemplo, verifica-se que a capacidade de produção da máquina 1, para produzir y num tempo t_1, é dada por:

$$y = 0{,}8.t_1 \qquad (*1)$$

em que:

y = capacidade de produção de y, da máquina 1 no tempo t_1;

0,8 = 800 kg por hora, ou 0,8 toneladas por hora – capacidade da máquina para y;

t_1 = tempo de produção de y, expresso em horas, na máquina 1.

Da mesma forma, expressa-se a capacidade de M1, para processar x, no tempo t_2:

$x = 0,6.t_2$ (*2)

As expressões (*1) e (*2) acima podem ser escritas da seguinte forma:

(*1): $t1 = y/0,8;$ (*3)

(*2): $t2 = x/0,6.$ (*4)

É preciso observar que o tempo total de utilização da máquina M1 é dado pela soma dos tempos em que ela será utilizada para processar as matérias-primas **y** e **x**. O tempo total, **t**, é dado pela soma dos tempos t_1 e t_2:

$t = t_1 + t_2$

Fazendo t = 1 hora e substituindo t_1 e t_2 por seus valores de (*3) e (*4), pode-se escrever:

$y / 0,8 + x / 0,6 = 1$ ou: $1,25.y + 1,66.x = 1$ (*5)

Essa função que incorpora as capacidades da máquina M1, para processar alternadamente, durante uma hora, as matérias-primas **y** e **x**. Ou seja: é a função de restrição de capacidade da máquina M1.

Da mesma forma que, em (*5) foi equacionada a capacidade da máquina 1, o equacionamento da máquina 2 daria a seguinte função:

$1,428.y + 1,250.x = 1$ (*6)

Admita-se que se queira processar 3.200 kg, ou 3,2 toneladas de **x**, nessa máquina, e utilizar o restante do tempo disponível, de um turno de 8 horas de trabalho, para processar **y**. Quanto se poderia processar de y? Para saber o tempo que a máquina 2 levará para processar 3,2 toneladas de **x**, basta dividir a quantidade pela sua capacidade de processar x, 0,8 toneladas por hora:

$tx = 3,2/0,8$ $tx = 4$ horas

Sobrarão, por conseguinte, mais 4 horas do turno de trabalho, para utilizar a máquina 2 no processamento de **y**. Para saber qual será a quantidade de **y** que a máquina 2 poderá processar, basta multiplicar as quatro horas pela sua capacidade de processamento de **y**:

y = 0,7.t1, em que:
y = 0,7.4 = 2,8 toneladas

O mesmo cálculo pode ser feito diretamente, aplicando-se a função de restrição da máquina 2, (*6): 1,428.y + 1,250.x = 1, substituindo-se x pela quantidade que se deseja produzir nesse turno de trabalho e considerando-se o tempo total de 8 horas:

1,428.y + 1,250.3,2 = 8

Resolvendo a função: y = 2,8 toneladas.

7 MATRIZ DO SISTEMA DE PRODUÇÃO

Adotando-se o mesmo procedimento para as demais máquinas, pode-se escrever o seguinte conjunto de inequações de restrição:

Para M1: 1,250.y + 1,666.x =/< 1
Para M2: 1,428.y + 1,250.x =/< 1
Para M3: 2,000.x =/< 1
Para M4: 1,666.y =/< 1
Para M5: 1,666.y + 1,111.x =/< 1
Para M6: 1,428.y + x =/< 1

Transformando essas inequações, em equações de restrição, pode-se montar a matriz do sistema de produção:

$$
\begin{aligned}
1{,}250.y + 1{,}666.x &= 1 \\
1{,}428.y + 1{,}250.x &= 1 \\
2{,}000.x &= 1 \qquad (*7) \\
1{,}666.y &= 1 \\
1{,}666.y + 1{,}111.x &= 1 \\
1{,}428.y + x &= 1
\end{aligned}
$$

Esse conjunto de restrições endógenas, ou limitações de capacidades das máquinas, pode ser representado graficamente, por meio das funções das suas retas. Quaisquer quantidades de **x** e de **y**, a serem produzidas simultaneamente dentro do mesmo turno de trabalho, estarão dentro da região das possibilidades conjuntas de todas as máquinas.

Para otimizar esse sistema de produção, basta calcular os vértices formados pelas retas de restrição que limitam a região das possibilidades. Para o cálculo da produção nos vértices, basta resolver o sistema de duas equações a duas incógnitas, formado pelas equações das retas que se cruzam em cada vértice.

O vértice **A** é formado pelo cruzamento da reta de restrição da máquina 5, com o eixo das ordenadas e com a reta de restrição da máquina 4. Nesse ponto, as quantidades de produção de **y** e **x** serão:

y = 0,60 ton
x = 0

O vértice **B** é formado pelo cruzamento da reta de restrição da máquina 5, com a reta de restrição da máquina 1. Nesse ponto, as quantidades de produção de **y** e **x** serão:

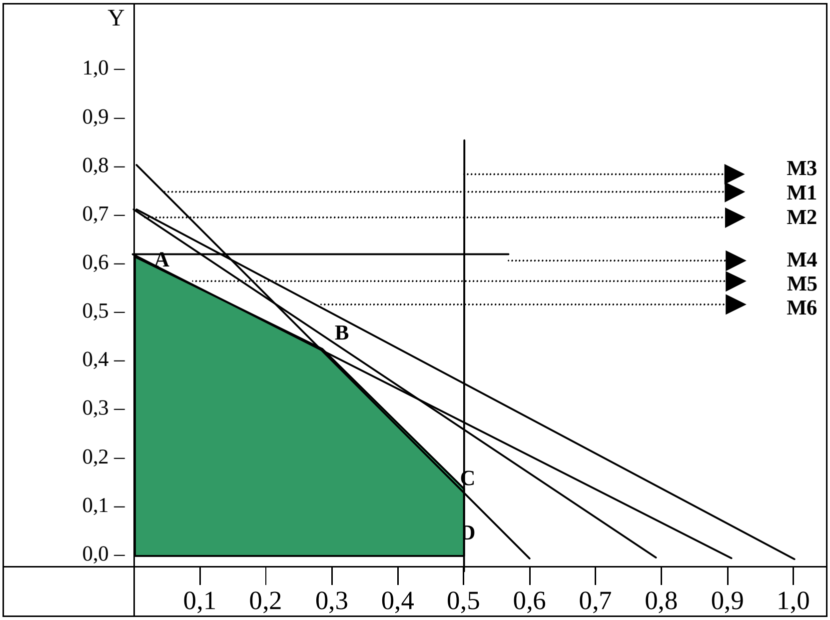
y = 0,437 ton
x = 0,272 ton

O vértice **C** é formado pelo cruzamento da reta de restrição da máquina 3, com a reta de restrição da máquina 1. Nesse ponto, as quantidades de produção de **y** e **x** serão:

y = 0,133 ton
x = 0,5 ton

O vértice **D** é formado pelo cruzamento da reta de restrição da máquina 3, com o eixo das abscissas. Nesse ponto, as quantidades de produção de **y** e **x** serão:

y = 0
x = 0,5 ton



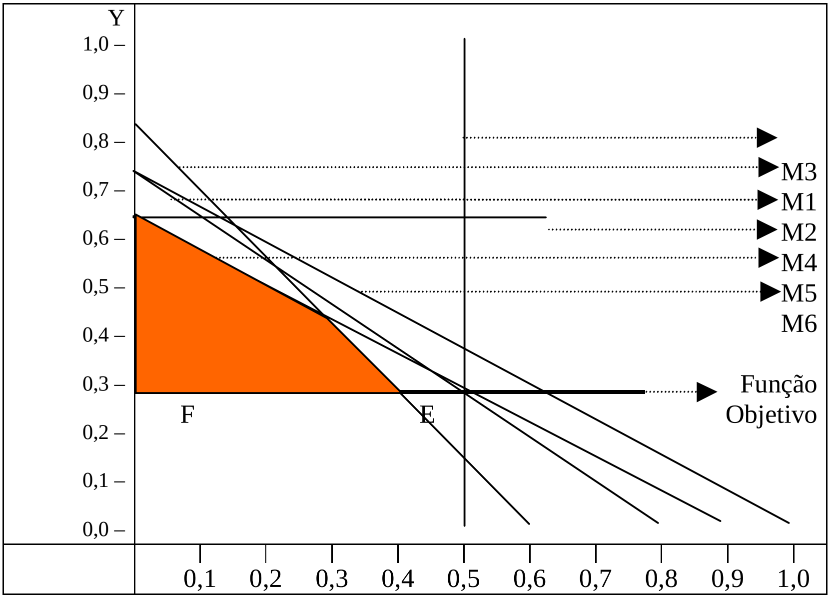
O gráfico acima demonstra a representação gráfica de cada uma das restrições, bem como a região das possibilidades.

8 ACRÉSCIMO DE VARIÁVEIS EXÓGENAS – FUNÇÃO OBJETIVA

Em determinadas circunstâncias, poderá interessar à organização que o sistema de produção seja submetido a certas exigências, tais como produzir uma determinada quantidade de "y" e, no restante do tempo disponível do turno, maximizar a produção de "x", ou ainda maximizar a produção, sendo n % de "y" e m % de "x", quando n + m = 100. Essas e outras exigências, que podem ser feitas para o sistema de produção, são exógenas ao sistema e denominam-se funções objetivo.

Seja, por exemplo, maximizar a produção de "x", produzindo-se 0,25 tonelada por hora de "y". Para atender à determinação, estabelece-se o objetivo como uma nova restrição. A nova restrição será:

y = 0,25.t, donde: 4.y = 1



Observando-se o gráfico dessas funções, verifica-se que:

a) a região das possibilidades se contrai;

b) desaparecem os vértices “C” e “D”;

c) surgem os vértices “E” e “F”.

O vértice **E** será formado pela interseção da reta de restrição de M1 com a nova restrição – produzir 0,25 toneladas por hora de **y**. Por conseguinte, esse ponto será calculado pela resolução do seguinte sistema:

1,250.y + 1,666.x = 1

4.y 1

Neste ponto: y = 0,25 e x = 0,41

O vértice **F** será formado pela interseção da função objetivo com o eixo das ordenadas.

Nesse ponto, por conseguinte, ter-se-á: y = 0,25 e x = 0.

O objetivo será alcançado com a produção do vértice **E**, em que serão obtidos os 250 kg de **y** e mais 410 kg de **x**. Essa será a máxima quantidade possível de produção de **x**.

9 CONCLUSÃO

A técnica de planejamento e programação OPT visa maximizar a utilização dos fatores disponíveis e fundamenta-se na identificação dos “gargalos” ou pontos de menor capacidade, dentro do sistema de produção. Dessa característica decorre a aplicabilidade nos sistemas de produção cujo inter-relacionamento de capacidades entre equipamentos e/ou setores deixa a desejar.

A programação linear é uma área da Matemática Aplicada que permite resolver inúmeros problemas de logística. O exemplo aqui demonstrado é simples, uma vez que estabelece um sistema de seis equações a duas incógnitas. Essa simplicidade permite solução por álgebra elementar. Com até três variáveis ainda existe solução gráfica e por álgebra elementar, conforme foi demonstrado. Contudo, um problema real de programação de produção pode apresentar “n” produtos e “n” máquinas. Isso exigirá a resolução e otimização de matrizes n x n, de solução trabalhosa. Para a solução manual desses casos, além dos métodos de solução e otimização de matrizes, existe o método Simplex que, como o próprio nome sugere, facilita bastante esse trabalho. Observa-se, porém, que a atual disponibilidade de recursos computacionais, aliada ao seu baixo custo, recomenda a solução via processamento de dados, ainda que com *softwares* de cálculo matemático, ou não específicos para Administração da Produção. Em adição, lembra-se que a idealização da técnica OPT já preconiza a utilização de um *software* próprio para otimização do sistema em seu programa de produção.

Assim, para concluir, pode-se afirmar que OPT e programação linear são indissociáveis. Lembra-se, por fim, que a análise das possibilidades de produção e a otimização do uso de recursos são condição de sobrevivência no atual ambiente competitivo globalizado. Por maior precisão com que uma empresa possa simular a realidade futura, traçando dessa forma as mais perfeitas estratégias que exijam um mínimo de alternativas, tal processo será destituído de um significado maior do que a administração dos pormenores. Afinal, se, para uma empresa qualquer, é possível projetar um cenário futuro com bastante aproximação, para a sua concorrente também o será. O diferencial competitivo residirá, cada vez mais, na máxima utilização dos fatores de produção, condição que também já está sendo estabelecida pela finitude dos recursos físicos do planeta.

REFERÊNCIAS

CORREA, H. L.; GIANESI, I. G. N. **Just-in-time**. **MRP II e OPT**: um enfoque estratégico. São Paulo: Atlas, 1993.

CALLIOLI, C. A. et al. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1987.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear**, modelos e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000

MACHLINE, C. et al. **Manual de administração da produção**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1984.

RUSSOMANO, V. H. **Planejamento e acompanhamento da produção**. São Paulo: Pioneira, 1986.

WEBER, J. E. **Matemática para economia e administração**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

YOSHIDA, L. K. **Programação linear**. São Paulo: Atual, 1987.