矩形断面曲がり管内層流

著者	久保 忠延
雑誌名	長野県短期大学紀要
巻	43
ページ	1-8
発行年	1988-12
URL	http://id.nii.ac.jp/1118/00000558/

矩形断面曲り管内層流

久　保　忠　延

1　緒　言

曲り管は直管と同様重要な管路要素であり，その流れに関する研究は極めて多い[1]。管断面形状としては円形のものが最もポピュラーであり，円管に関してはいろいろな条件下での流れが実験的に知られ，また理論的に求められている。

断面形状が矩形の管は円管に次いで広く用いられており，その流れには多くの関心が寄せられている。矩形断面曲り管の流れを解析した初期のものとしては伊藤[2][3]，Eichenberger[4]，Cuming[5]などがあり，矩形管内に生じる二次流れの状態などが求められている。その後 Cheng[6][7]，Ghia[8]らにより更に詳細に流れの解析がなされた。しかしこれらはいずれも管軸の曲率が一定の場合について研究されたものであり，管軸の曲率が変化する場合の矩形断面曲り管の流れを取り扱ったものは見当らない。

本研究は曲管の曲率が変化する例として管軸が双曲線で表され，その曲率が比較的小さい場合の矩形管内層流について解析したものである。

2　座標系および基礎式

図１に座標系を示す。管軸を含む平面に x, y 座標をとり，これと直交する方向に z 軸をとる。管軸に沿う座標を x_1 とし，管軸に直交する面内に図２のように X，Y 座標をとり (X, Y, x_1) がこの順に右手系をなすようにする。

管軸を表す曲線を $y_1=c(1+\kappa^2x_1^2)^{1/2}$ とする。ただし $\kappa=m/c$ である。

このとき管軸の曲率 k_c は

$$k_c=c\kappa^2/(1+\kappa^2x_1^2+c^2\kappa^4x_1^2)^{3/2}$$

(x, y, z) 座標と (X, Y, x_1) 座標との関係は

$$x=x_1-Xc\kappa^2x_1(1+\kappa^2x_1+c^2\kappa^4x_1^2)^{-1/2}$$

$$y=c(1+\kappa^2x_1^2)^{1/2}+X(1+\kappa^2x_1^2)^{1/2}$$
$$\times(1+\kappa^2x_1^2+c^2\kappa^4x_1^2)^{-1/2}$$

$$z=Y$$

X, Y, x_1 は直交しているので計量テンソルは

$g^{ij}=g_{ij}=0\ (i\neq j)$，$g^{ij}=1/g_{ij}(i=j)$；$(i, j=1, 2, 3)$ である。

いま考えている管の場合には

$$g_{11}=g_{22}=1$$

$$g_{33}=\{1-c\kappa^2X(1+\kappa^2x_1^2+c^2\kappa^4x_1^2)^{-3/2}\}^2$$
$$\times\{1+c^2\kappa^4x_1^2(1+\kappa^2x_1^2)^{-1}\}$$

となる。

速度の X, Y, x_1 方向成分をそれぞれ u, v, w とし，$g=\sqrt{g_{33}}$ と置くと連続の式および運動方程式は次式となる。

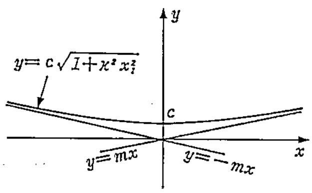


図１　座標系

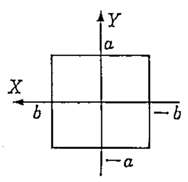


図２　管断面

$$\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial v}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{w}{g}\right)+\Gamma_{13}{}^{3}u+\Gamma_{33}{}^{3}\left(\frac{w}{g}\right)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial X}+v\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{w}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\Gamma_{33}{}^{1}\frac{w}{g}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X}+\nu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{1}{g^3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_{33}{}^{1}\right)\right.$$
$$\left.+2\Gamma_{33}{}^{1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{w}{g}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial X}+v\frac{\partial v}{\partial Y}+\frac{w}{g}\frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Y}+\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+\frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}-\Gamma_{33}{}^{1}\frac{\partial v}{\partial X}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{w}{g}\right)+\Gamma_{31}{}^{3}\frac{w}{g}+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{w}{g}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{w}{g}\right)+\Gamma_{13}{}^{3}u+\Gamma_{33}{}^{3}\frac{w}{g}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{g^2}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{w}{g}\right)\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma_{31}{}^{3}\frac{w}{g}\right)+\Gamma_{31}{}^{3}\frac{w}{g}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\frac{w}{g}\right)+\frac{1}{g^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}\left(\frac{w}{g}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_{13}{}^{3}u\right)\right.$$
$$\left.\left.+\Gamma_{13}{}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\Gamma_{33}{}^{1}\frac{\partial w}{\partial X}\right\}\right] \quad\cdots\cdots(4)$$

ここで Γ^{i}_{jk} はクリストフェルの第２種記号で，いまの場合

$$\Gamma_{33}{}^{1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial X},\quad \Gamma_{13}{}^{3}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial X},\quad \Gamma_{33}{}^{3}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1}$$

である。

また，ρ は流体の密度，ν は動粘性係数，p は静圧を示す。

3　計算手順

式(１)～(４)を $\kappa\ll 1$ の仮定のもとで高次の微小項($O(\kappa^4)$以上) を省略すると

$$\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial v}{\partial Y}+\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}u+\frac{c\kappa^2 X}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\frac{\partial w}{\partial x_1}=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial X}+v\frac{\partial u}{\partial Y}+w\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\left(w^2+Xw\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X}+\nu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{c}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\left(2X\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial X}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(6)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial X}+v\frac{\partial v}{\partial Y}+w\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}Xw\frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Y}+\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}\right.$$
$$\left.+\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\left(2X\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial v}{\partial X}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(7)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial X}+v\frac{\partial w}{\partial Y}+w\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\left(Xu\frac{\partial w}{\partial X}+Xv\frac{\partial w}{\partial Y}+2Xw\frac{\partial w}{\partial x_1}-uw\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$
$$\times\left(1+\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}X\right)+\nu\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}-\frac{c\kappa^2}{(1+\kappa^2 x_1{}^2)^{3/2}}\right.$$
$$\left.\times\left(3X\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}-2\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial w}{\partial X}\right)\right\} \quad\cdots\cdots(8)$$

式(５)～(８)は κ を摂動パラメータとするとつぎのように展開できる。

$$\left.\begin{aligned} u&=\kappa^2 u_2+\cdots\cdots\\ v&=\kappa^2 v_2+\cdots\cdots\\ w&=w_0+\kappa^2 w_2+\cdots\cdots\\ p&=p_0+\kappa^2 p_2+\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(9)$$

κ^0のオーダの式は

$$\frac{\partial w_0}{\partial x_1}=0\,,\quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial Y^2}=-\frac{1}{\rho\nu}\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \qquad \cdots\cdots(10)$$

この解はポアズイユ流れで

$$w_0=-\frac{1}{\rho\nu}\frac{\partial p_0}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{2}(b^2-X^2)-\frac{2}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{l^3}\frac{\cos lX\cosh lY}{\cosh la}\right\} \qquad \cdots\cdots(11)$$

ただし $l=\dfrac{2n+1}{2b}\pi$

管中心における最大速度 W_0 は

$$W_0=-\frac{1}{\rho\nu}\frac{\partial p_0}{\partial x_1}\left\{\frac{b^2}{2}-\frac{2}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{l^3}\frac{1}{\cosh la}\right\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

以下速度を W_0, 長さを b, 圧力を ρW_0^2 で無次元化し，それらを改めて同じ記号で表すことにする。

レイノルズ数を $R_e=Wb/\nu$ で定義し，管断面のアスペクト比を $k=a/b$ とおくと無次元化した w_0 はつぎのようになる。

$$w_0=\frac{\dfrac{1}{2}(1-X^2)-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{l^3}\dfrac{\cos lX\cosh lY}{\cosh lk}}{\dfrac{1}{2}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{l^3}\dfrac{1}{\cosh lk}} \qquad \cdots\cdots(13)$$

また圧力勾配は

$$\frac{dp_0}{dx_1}=-\frac{1}{R_e}\frac{1}{\dfrac{1}{2}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{l^3}\dfrac{1}{\cosh lk}} \qquad \cdots\cdots(14)$$

つぎに κ^2 オーダの解は変数分離形で求められることがわかり，

$$\left.\begin{aligned} u_2&=\hat{u}_2\frac{c}{(1+\kappa^2x_1^2)^{3/2}}, & v_2&=\hat{v}_2\frac{c}{(1+\kappa^2x_1^2)^{3/2}} \\ w_2&=\hat{w}_2\frac{c}{(1+\kappa^2x_1^2)^{3/2}}, & p_2&=\hat{p}_2\frac{c}{(1+\kappa^2x_1^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(15)$$

とおくと κ^2 オーダの連続の式および運動方程式は

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X}+\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial Y}=0 \qquad \cdots\cdots(16)$$

$$w_0^2=-\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial X}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial Y^2}\right) \qquad \cdots\cdots(17)$$

$$0=-\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial Y}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial Y^2}\right) \qquad \cdots\cdots(18)$$

$$\hat{u}_2\frac{\partial w_0}{\partial X}+\hat{v}_2\frac{\partial w_0}{\partial Y}=-X\frac{\partial p_0}{\partial x_1}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_2}{\partial Y^2}-\frac{\partial w_0}{\partial X}\right) \qquad \cdots\cdots(19)$$

式(17)，(18)より $\hat{p}_2$ を消去すると

$$\frac{\partial w_0}{\partial Y}=-\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}\right) \qquad \cdots\cdots(20)$$

ただし　$\omega=-\dfrac{\partial \hat{u}_2}{\partial Y}+\dfrac{\partial \hat{v}_2}{\partial X}$ $\qquad \cdots\cdots(21)$

流れ関数 Ψ を用い

$$\hat{u}_2=\frac{\partial \Psi}{\partial Y},\quad \hat{v}_2=-\frac{\partial \Psi}{\partial X} \qquad \cdots\cdots(22)$$

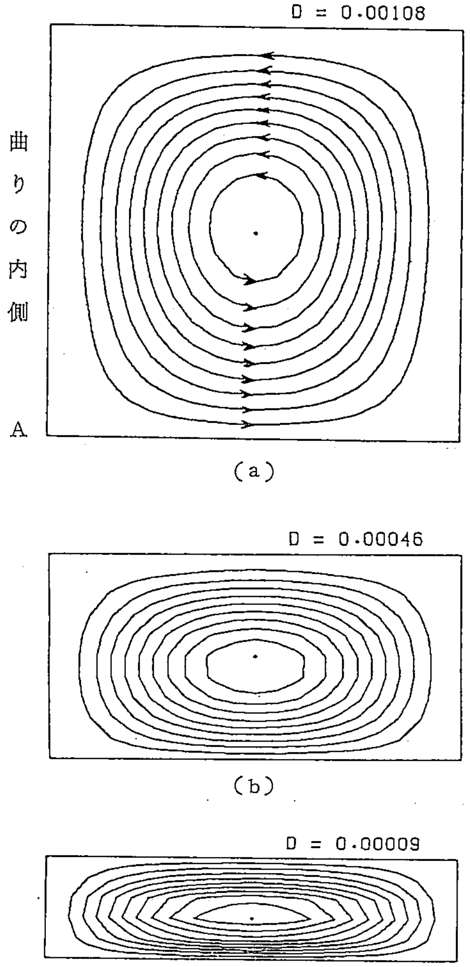
とする。式(22)を(21)に代入すると

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}=-\omega \qquad \cdots\cdots(23)$$

式(20)，(23)から数値計算によりうず度 ω，流れ関数 Ψ を求める。求めた Ψ の値を用い(22)式から二次流れを計算する。また，軸方向速度のポアズイユ流れからの偏差 $\hat{w}_2$ は式(19)より計算する。

4　計算結果と考察

図3に計算結果にもとづいて描いた二次流れ流線を示す。図(a)，(b)，(c)はそれぞれアスペクト比が2，1，0.5の場合であり，流れは管軸を含む平面に対して対称であるので，図は対称面（たとえば図3(a)のＡＢで示される面）の上半分

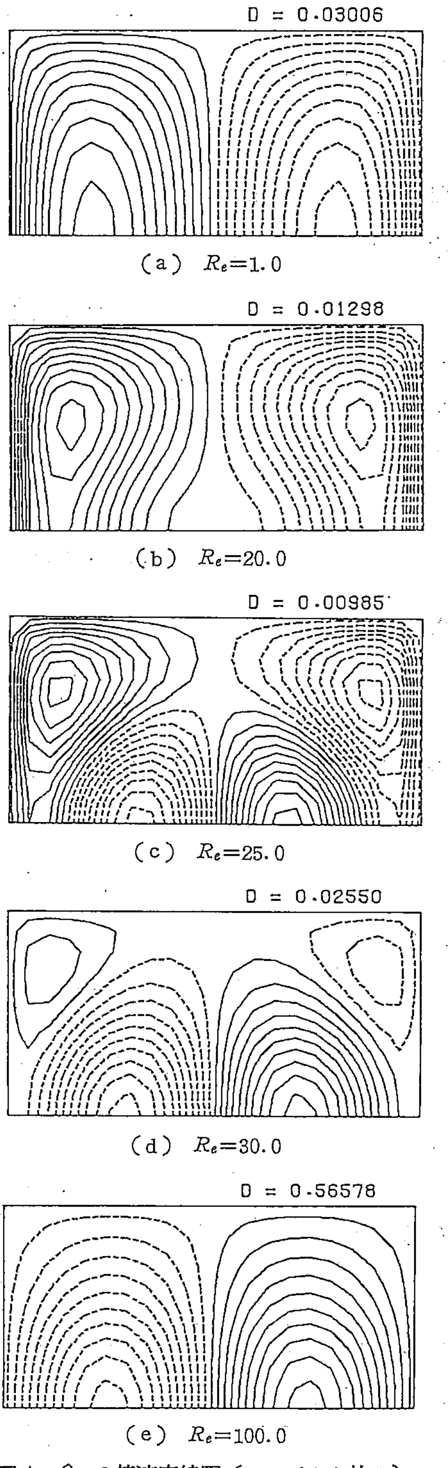


（a）

（b）

（c）

図3　二次流れ流線(R_e=1.0)



（a）R_e=1.0

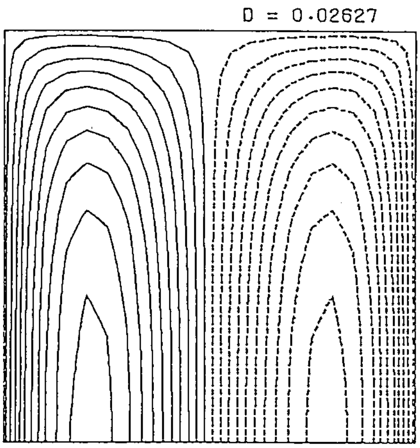
（b）R_e=20.0

（c）R_e=25.0

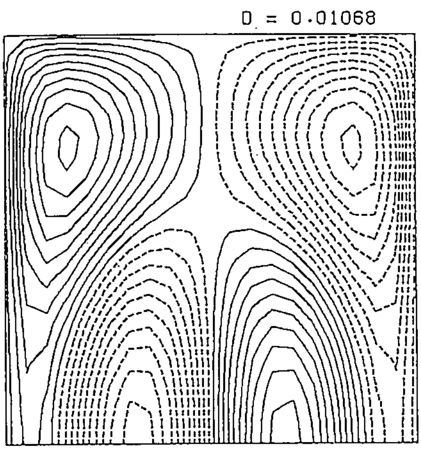
（d）R_e=30.0

（e）R_e=100.0

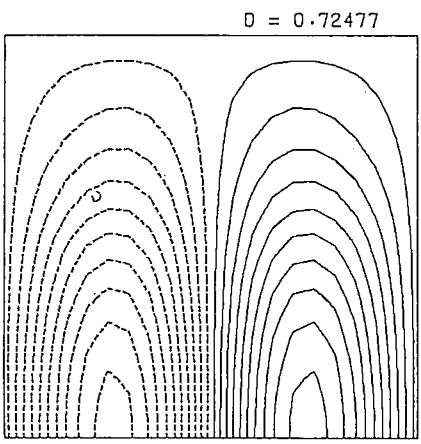
図4　$\hat{w}_2$ の等速度線図（アスペクト比1）



（a） R_e=1.0

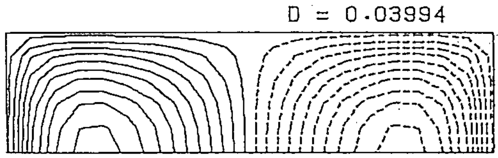


（b） R_e=21.5

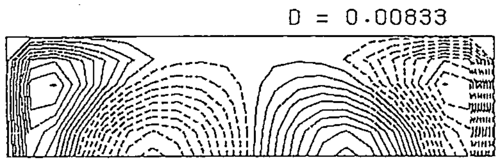


（c） R_e=100.0

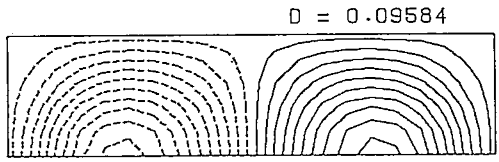
図5 $\hat{w}_2$ の等速度線図（アスペクト比2）



（a） R_e=1.0



（b） R_e=58.5

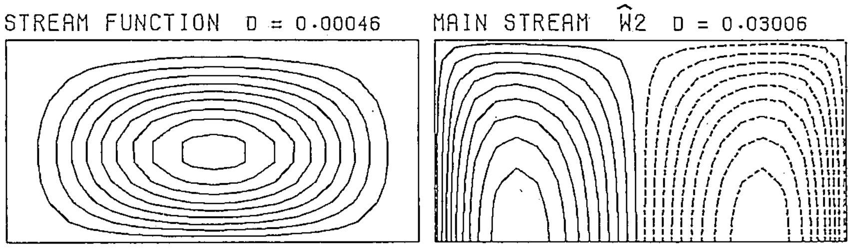


（c） R_e=100.0

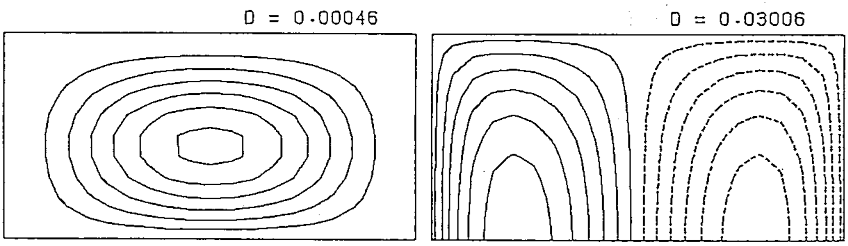
図6 $\hat{w}_2$ の等速度線図（アスペクト比 0.5）

についてのみ描いて示してある。また図の右側が曲りの外側（管内部から見て凹側），左側が内側（凸側）になるように描いている。流れの向きは図(a)に矢印を付して示したが，図(b)，(c)についても同様であるので矢印は省略した。流線は流れ関数の最大値と最小値の差を10等分して描いている。流線間の流れ関数の値の差をDで表し，おのおのの図の右上に示した。図はいずれも管軸の曲率最大の位置（$\kappa x_1=0$）におけるものである。図3はレイノルズ数 R_e が1の場合であるが，異るレイノルズ数の場合にもほぼ同様な二次流れ流線が描かれた。これらの図はいずれもこれまで良く知られた曲管内の二次流れのものと同様なものである。

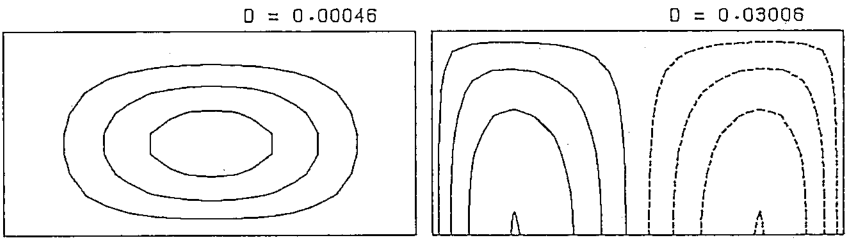
図4～図6に管軸方向速度のポアズイユ流れからの偏差 $\hat{w}_2$ の等速度線図を描いたものを示した（断面位置は $\kappa x_1=0$）。図中実線で描かれた部分は $\hat{w}_2$ が正，破線部分は負の値である。図にDで表された値は等速度線の間隔の値である。



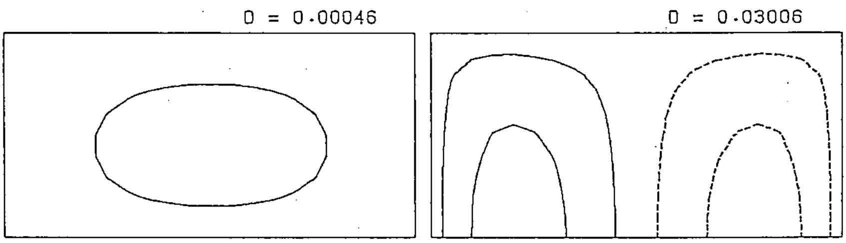
（a）　κx_1=0.2



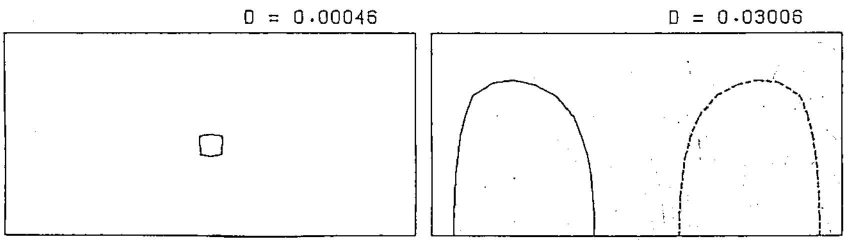
（b）　κx_1=0.6



（c）　κx_1=1.0



（d）　κx_1=1.4



（e）　κx_1=1.9

図７　管軸方向各断面における流れ状態（R_e=1.0）

図４はアスペクト比１の管において管内二次流れのフローパターンが R_e とともにどのように変化するかを示したものである。R_e の小さな場合の図(a)では管断面に左右ほぼ対称に増速または減速された領域が現れている。R_e が少し大きくなった図(b)では管中心近辺で等速度線に変曲点の存在する曲線が現れ始めている。図(b)よりわずか R_e の大きい場合の図(c)では管のコーナー近辺と管の中心近辺でそれぞれ $\hat{w}_2$ の符号の異る流れ領域が一対づつ存在している。図(c)よりわずか R_e が増加すると図(d)のように R_e の小さな流れのときのフローパターンの名残りである曲りの内側で増速，外側で減速されている部分が管のコーナーにわずか存在している。更に R_e の大きくなった場合の図(e)では流れの増速減速部分が図(a)の場合と逆になっている。

図４(a)～(e)から R_e の小さいとき軸流速度は曲りの内側で大きく，流れは短い経路を通って流れようとしているのに対し，R_e が大きくなると流体に働く遠心力の効果で軸流速度は曲りの外側で大きくなってゆく。

図５，図６にアスペクト比２および0.5の場合の $\hat{w}_2$ の等速度線図を示した。いずれの場合も R_e の増加に伴うフローパターンの変化の様子はアスペクト比１の場合と類似のものであるが，R_e の小さいときと大きいときの中間で現れる過渡的なフローパターンが生じるときの R_e の値はアスペクト比により相違することがわかる。

図７はアスペクト比１，R_e が１の場合について管軸方向の数個所の断面における流れの状態を描いたものである。図で左側の枠内には二次流れ流線を，右側の枠内には $\hat{w}_2$ の等速度線図を示した。図(a)は最大曲率位置の断面より少し下流の $\kappa x_1=0.2$ における流れであるが $\kappa x_1=0$ におけるもの(図３(b)および図４(a)に示したもの)とほとんど差がない。断面位置がこれより順次下流に移ってゆくと，そこでの流れは図７(b)，(c)，(d)，(e)のように変化してゆく。図７の中で最下流の

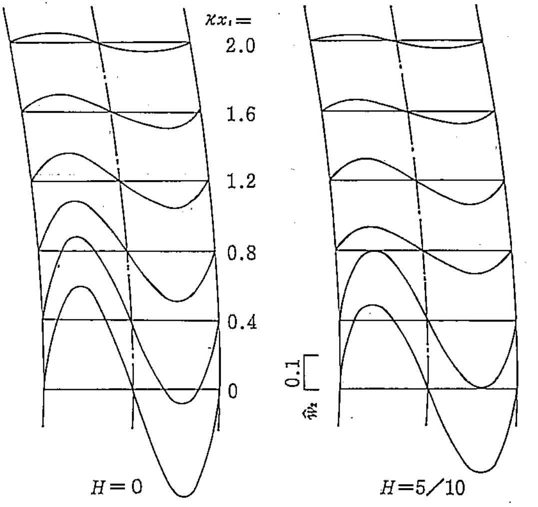


図８　管軸方向各断面の $\hat{w}_2$ 分布（$R_e=1$）

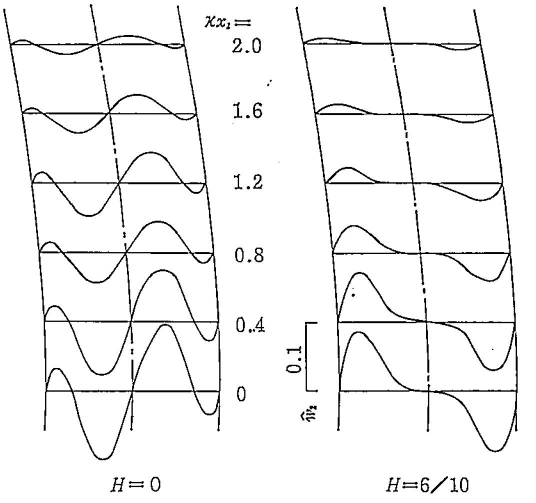


図９　管軸方向各断面の $\hat{w}_2$ 分布（$R_e=25$）

図(e)ではポアズイユ流れからの偏差がだいぶ小さくなっていることがわかる。このような管軸方向に沿って変化してゆく流れ状態は $R_e=25, 100$ の場合にも，またアスペクト比が２および0.5の場合にもほぼ同程度であることがわかった。

図８～10にアスペクト比が１の場合について管軸方向のいくつかの断面における $\hat{w}_2$ の大きさの分布を描いた図を示した。図中 H で示した値は対称面と管上部壁面との間を10等分したときの対称面からの分点を表しており，$H=0$ は対称面上，$H=5/10$ は中間点を表している。

図８は $R_e=1$ の場合について $\kappa x_1=0$，0.4，

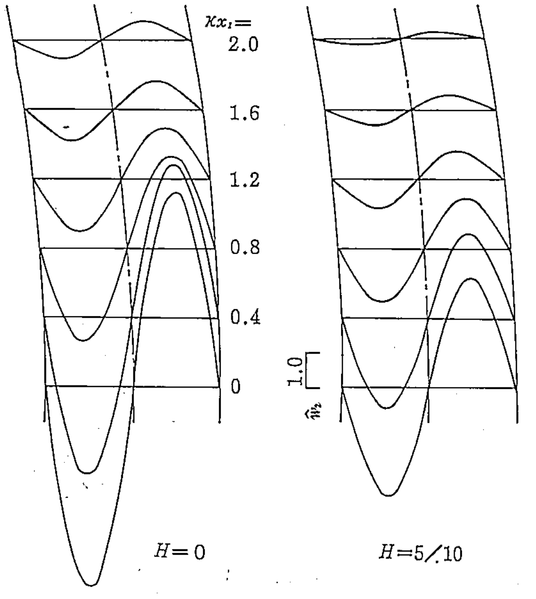


図10　管軸方向各断面の $\hat{w}_2$ 分布（$R_e=100$）

0.8, 1.2, 1.6, 2.0の断面上で $H=0$ および $H=5/10$ の点を通る線について $\hat{w}_2$ の分布を示したものである。図9は $R_e=25$ の場合のもので，図8に比べ速度分布が複雑な変化をしている。この場合は管中心 $H=0$ の速度分布と中間点近くの $H=6/10$ の速度分布は形が異ったものになっている。図10は $R_e=100$ の場合のものであるが，$\hat{w}_2$ の分布曲線は図8の場合のものを反転した形になっている。

5　結　言

管軸に沿って曲率が変化する矩形断面の二次元曲管内の層流を管軸の曲率が比較的小さい場合について解析を行った。R_e が小さい場合には流れは曲りの内側に偏って流れるが，R_e が大きくなると流れは曲りの外側に偏って流れる。そしてその中間の R_e の場合にはこの二つのフローパターンの一方から他方に移行してゆく中間的で複雑なフローパターンが現れる。

本研究を遂行するに当り懇切なる御指導をいただいた大阪大学教養部稲葉武彦助教授に深く感謝致します。また数値計算に際し有益なる助言をいただいた大阪大学工学部梶島岳夫助手に感謝致します。

なお，本研究の数値計算は大阪大学大型計算機センターを利用して行った。お世話になったセンターの皆様に感謝致します。

文　献

(1)　伊藤英覚：日本機械学会論文集，B 50—458 2267 (1984)
(2)　伊藤英覚：東北大学高速力学研究所報告，4—35 96(1951)
(3)　伊藤英覚：東北大学高速力学研究所報告，11—106 97(1955)
(4)　HANS P. EICHENBERGER：*J. Math. Phys.*, 32 34 (1953)
(5)　H. G. CUMING：*Aeron. Res. Council Rep. & Mem.*, No. 2880(1955)
(6)　K. C. CHENG and M. AKIYAMA：*Int. J. Heat Mass Transfer*, 13 471(1970)
(7)　K. C. CHENG, R. C. LIN and J. W. OU：*J. Fluids Eng. Trans. ASME*, Ser. I 98—1 41(1976)
(8)　K. N. GHIA and J. S. SOKHEY：*J. Fluids Eng. Trans. ASME*, Ser. I 99—4 640(1977)