非終端記号を導入した基本形式体系の言語記述力に関する研究

著者	小出　智彦
学位授与機関	Tohoku University
URL	http://hdl.handle.net/10097/48200

修士学位論文

非終端記号を導入した基本形式体系の言語記述力に関する研究

東北大学大学院 情報科学研究科

システム情報科学専攻 篠原研究室

博士課程前期二年

小出 智彦

2010年2月16日

目次

第1章

序論

基本形式体系 (Elementary Formal System, EFS) は帰納関数理論の研究のために Smullyan [10] によって導入されたものであり，文字列を対象とする一種の論理プログラムである．EFS は論理プログラミング [13] や学習理論 [3, 9, 6, 7, 11] など幅広い分野の研究に役立っている．さらに EFS は形式言語理論の研究にも用いられている．Arikawa ら [1, 3] はチョムスキー階層の各層と対応する EFS の部分クラスを示した．また，Yamamoto [13] は論理プログラムの計算原理である融合原理を用いることで EFS が言語の受理機構としても機能することを示した．このことにより EFS は生成文法が持つ言語を生成する機能とオートマトンが持つ言語を受理する機能の 2 つを合わせ持つ強力な体系であることが示された．さらに Arikawa ら [3] は EFS に対する帰納推論アルゴリズムを開発し，EFS が言語学習における統一的な枠組みとなることを示した．この他にも形式言語理論に関する研究 [4, 12] がある．

このように EFS は形式言語を研究する上で強力な道具となり，多くの部分クラスも提案されているが，それがどの生成文法またはオートマトンと対応しているのかはあまり述べられていない．

本論文では以下のことについて述べる．まず，EFS に関する多くの論文の定義とは異なる空文字を扱うことが可能な EFS(消去可能 EFS) を定義し，それによって生じた問題を解決する．次に，Sugimoto と Ishizaka [12] によって提案された EFS の 1 つである変数純粋 EFS の言語記述力について述べる．最後に，非終端記号付き基本形式体系 (Elementary Formal System with Nonterminals, NEFS) を提案し．その言語記述力や言語の受理について述べる．非終端記号を導入したことにより言語の受理と生成という 2 つの機能を持

つ EFS の強みを保持したまま，文法やオートマトンが簡単に NEFS に変換でき，文法やオートマトンによる成果を NEFS に取り入れることができるようになることを示す.

本論文の構成は次の通りである．まず，第 2 章では EFS や並列多重文脈自由文法の定義を述べる．第 3 章では EFS にの各部分クラスの言語記述力ついて述べる．第 4 章では新たに提案した NEFS に関して既存の制限と同様の制限を加えた場合の言語記述力や融合原理について述べる．最後に第 5 章ではまとめと今後の課題について述べる．

第2章

準備

基本的には [3] にしたがって定義を行う.

2.1 基本形式体系言語

Σ, X, Π を互いに交わらない集合とする．Σ と Π は有限集合である．Σ の要素を**終端記号**と呼ぶ．Π の要素を**述語記号**と呼ぶ．それぞれの述語記号には**引数**と呼ばれる自然数が対応付けられている．引数の数が n である述語記号 p を p/n で表す．述語記号 p の引数の個数を $ar(p)$ と表す．X は可算無限集合であり，X の要素を**変数**と呼ぶ.

$(\Sigma \cup X)^*$ の要素を**項**あるいは**パターン**と呼ぶ．Σ^* からなる項を**基礎項**と呼ぶ．Π 中の述語記号 p/n と n 個の項 $\pi_1, ..., \pi_n$ に対し，$p(\pi_1, ..., \pi_n)$ を**原子論理式**，または単に**アトム**と呼び，n 個の項が全て基礎項の場合には**基礎アトム**と呼ぶ．$\overline{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_n)$ とし，簡単のために $p(\pi_1, ..., \pi_n)$ を $p(\overline{\pi})$ と書く場合がある.

$A_1, ..., A_i, B_1, ..., B_j$ をアトムとするとき，次のような“ $\leftarrow$ ”を挟んだアトムの並びを**節**と呼ぶ.

$$A_1, ..., A_i \leftarrow B_1, ..., B_j \qquad (i, j \geq 0)$$

“ $\leftarrow$ ”の左側，すなわち $A_1, ..., A_i$ の部分を節の**頭部**，右側の $B_1, ..., B_j$ の部分を本体と呼ぶ．$j = 0$ となる確定節を**単位節**と呼ぶ．一方，$i = 0$ であるような節を**ゴール節**と呼ぶ. また，$i = j = 0$ なる節を**空節**と呼び，通常 $\square$ で表す.

基本形式体系は3項組 (Σ, Π, Γ) によって定義される．Γ は Σ と Π から構成可能な確定節の有限集合で**公理**と呼ばれる.

互いに異なる変数 x_k $(1 \leq k \leq n)$ と任意のパターン π_k に対し，$\{x_1 := \pi_1, ..., x_n := \pi_n\}$ の形をした有限集合を**代入**と呼ぶ．代入 $\theta = \{x_1 := \pi_1, ..., x_n := \pi_n\}$ に対し，ある i $(1 \leq i \leq n)$ について $\pi_i = \epsilon$ であるとき，θ を**消去代入**と呼ぶ．任意のパターン τ と任意の代入 $\theta = \{x_1 := \pi_1, ..., x_n := \pi_n\}$ に対して，τ 中に現れる全ての変数 x_i をそれぞれ対応する π_i によって同時に置き換えて得られるパターンを $\tau\theta$ と書く．アトム $p(\pi_1, ..., \pi_n)$ に対しては

$$p(\pi_1, ..., \pi_n)\theta = p(\pi_1\theta, ..., \pi_n\theta)$$

と，節 $A \leftarrow B_1, ..., B_j$ に対しては

$$(A \leftarrow B_1, ..., B_j)\theta = A\theta \leftarrow B_1\theta, ..., B_j\theta$$

と書く．項（アトム，節）E と代入 θ に対して $E\theta$ を E の**代入例**と呼ぶ．$E\theta$ が終端記号のみからなる場合には**基礎代入例**と呼ぶ．

本論文では Arikawa ら [3] の定義とは異なり空文字を項として認め，かつ消去代入を許している．Arikawa らの定義した空文字を項として認めず，かつ消去代入を許さない EFS を**消去不能 EFS**，本論文で定義した空文字を項として認め，かつ消去代入を許す EFS を**消去可能 EFS** と呼ぶ．本論文では何も断りがない場合，EFS は消去可能 EFS を指すものとする．

定義 1. $T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ が *EFS* であるとする．Γ と節 C に対して関係 $\Gamma \vdash C$ を次のように定義する．

1. $C \in \Gamma$ ならば $\Gamma \vdash C$.

2. $\Gamma \vdash C$ ならば任意の代入 θ に対して $\Gamma \vdash C\theta$.

3. $\Gamma \vdash A \leftarrow B_1, ..., B_j, B_{j+1}$ かつ $\Gamma \vdash B_{j+1} \leftarrow$ ならば $\Gamma \vdash A \leftarrow B_1, ..., B_j$.

$\Gamma \vdash C$ ならば C は Γ から**証明可能**であるという．EFS T と述語記号 $p/1$ に対して $L(T, p) = \{w \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(w) \leftarrow\}$ と定義する．$L = L(T, p)$ なる EFS T と述語 $p/1$ が存在するとき，言語 L を**基本形式体系言語**と定義する．

例 1. *EFS* $T = (\{a, b, c\}, \{p/1, q/3\}, \Gamma)$ を考える．

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} p(xyz) \leftarrow q(x, y, z) \\ q(ax, by, cz) \leftarrow q(x, y, z) \\ q(a, b, c) \leftarrow \end{array} \right\}$$

EFS T と述語記号 p によって定義される言語は $L(T, p) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ である．

例 2. *EFS* $T = (\{a\}, \{p/1\}, \Gamma)$ を考える．

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} p(xx) \leftarrow p(x) \\ p(a) \leftarrow \end{array} \right\}$$

EFS T と述語記号 p によって定義される言語は $L(T, p) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ である．

2.2 EFS の部分クラス

EFS は言語を定義するには一般的すぎる．そこでこれらにいくつかの条件を加えた部分クラスを導入する．

アトム A に対して，A 中に現れる全ての変数の集合を $v(A)$ で表す．パターン π に対して，π の文字列としての長さを $|\pi|$ で表し，π における変数 x の出現回数を $o(x, \pi)$ で表す．さらに，アトム $p(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ に対して，

$$|p(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)| = |\pi_1| + ... + |\pi_n|$$

$$o(x, p(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)) = o(x, \pi_1) + ... + o(x, \pi_1)$$

と定義する．

- 節 $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ が**変数限定**であるとは，$i = 1, ..., n$ に対して $v(A) \supseteq v(B_i)$ が成り立つことをいう．つまり，変数限定節では本体に出現する変数は全て頭部に出現している．変数限定節だけからなる公理をもつ EFS を**変数限定 EFS** と呼ぶ．

- 節 $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ が**長さ限定**であるとは任意の代入 θ に対して

$$|A\theta| \geq |B_1\theta| + |B_2\theta| + ... + |B_n\theta|$$

が成り立つことをいう．長さ限定節だけからなる公理をもつ EFS を**長さ限定 EFS** と呼ぶ．

- 節 $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ が**変数純粋**であるとは，次の条件が成り立つことをいう．

  1. $v(B_1) \cup ... \cup v(B_n) = v(A)$
  2. 本体に現れる項は全て 1 変数である
  3. 任意の変数 x に対して

  $$o(x, B_1) + ... + o(x, B_n) \leq 1.$$

  変数純粋節だけからなる公理をもつ EFS を**変数純粋 EFS** と呼ぶ．Sugimoto ら [12] は融合原理を用いることで変数純粋 EFS から言語を生成できることを示した．

- 項 π が**正規**であるとは，任意の変数 x に対して $o(x, \pi) \leq 1$ が成り立つことである．節 $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ が**正規変数純粋**であるとは，頭部に出現するパターンが全て正規である変数純粋節のことをいう．正規変数純粋節だけからなる公理をもつ EFS を**正規変数純粋 EFS** と呼ぶ．

- 公理中の全ての節が次の形をしている長さ限定 EFS を**単純 EFS** という．

  $$q(\pi) \leftarrow q_1(x_1), ..., q_n(x_n) \qquad (n \geq 0)$$

  ただし，π は任意のパターンであり，$x_1, ..., x_n$ は π に出現する互いに異なる変数である．定義から明らかなように，述語記号はすべて 1 引数である．

- 公理中の全ての節の頭部のパターンが正規であるような単純 EFS を**正規 EFS** と呼ぶ．

- 公理中の任意の節が次の形をしている EFS を**片側線形 EFS** と呼ぶ．

  $$p(\pi) \leftarrow \quad (\pi \text{は正規パターン})$$
  $$p(ux) \leftarrow q(x) \quad (u \in \Sigma^+, x \in X)$$

例 1 は変数純粋 EFS，例 2 は単純 EFS である．

例 3. *EFS* $T = (\{a\}, \{p/1, q/2, r/1, s/1\}, \Gamma)$ を考える.

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} p(x) \leftarrow r(x), s(x) \\ r(xy) \leftarrow q(x, y) \\ q(xy, x) \leftarrow q(x, y) \\ q(a, \epsilon) \leftarrow \\ s(aax) \leftarrow s(x) \\ s(a) \leftarrow \end{Bmatrix}$$

T は変数限定 *EFS* である. $L(T, p) = \{a^n \mid n > 0, n$ はフィボナッチ数かつ奇数$\}$ となる.

例 4. *EFS* $T = (\{a, b\}, \{p/1, q/2\}, \Gamma)$ を考える.

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} p(xzy) \leftarrow q(xy, z) \\ q(ax, by) \leftarrow q(x, y) \\ q(a, b) \leftarrow \end{Bmatrix}$$

T は長さ限定 *EFS* である. $L(T, p) = \{a^i b^j a^k \mid i, k \geq 0, j \geq 1, i + k = j\}$ となる.

例 5. *EFS* $T = (\{a\}, \{p/1, q/2\}, \Gamma)$ を考える.

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} p(xy) \leftarrow q(x, y) \\ q(xy, x) \leftarrow q(x, y) \\ q(a, \epsilon) \leftarrow \end{Bmatrix}$$

T は変数純粋 *EFS* である. $L(T, p) = \{a^n \mid n > 0, n$ はフィボナッチ数$\}$ となる.

例 6. *EFS* $T = (\{a, b\}, \{p/1\}, \Gamma)$ を考える.

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} p(axb) \leftarrow p(x) \\ p(ab) \leftarrow \end{Bmatrix}$$

T は正規 *EFS* である. $L(T, p) = \{a^n b^n \mid n > 1\}$ となる.

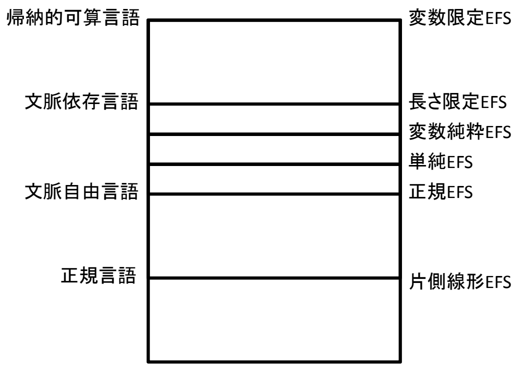

図 2.1: EFS 言語の部分クラスとチョムスキー階層の各言語クラスの対応

例 7. *EFS* $T = (\{a, b\}, \{p/1, q/1\}, \Gamma)$ を考える．

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} p(ax) \leftarrow q(x) \\ q(ax) \leftarrow p(x) \\ p(bx) \leftarrow p(x) \\ q(bx) \leftarrow q(x) \\ p(a) \leftarrow \\ q(b) \leftarrow \end{array} \right\}$$

T は片側線形 *EFS* である．$L(T, p) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ には a が奇数個出現する $\}$ となる．

Arikawa ら [3] は変数限定 EFS，長さ限定 EFS，正規 EFS，片側線形 EFS が定義する言語のクラス がそれぞれ帰納的可算言語，文脈依存言語，文脈自由言語，正規言語のクラスと一致することを示した (図 2.1)．ただし，長さ限定 EFS 言語と文脈依存言語の等価性に関しては制限があることが述べられている．

2.3 証明図

定義 2. $T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ を *EFS* とする．$\Gamma \vdash C$ なる節 C に対し C の証明図とその長さを次のように定義する．

- $C \in \Gamma$ ならば C は C の証明図であり，証明図の長さは 1 である．

- $\Gamma' \vdash C'$ かつ $C = C'\theta$ なる節 C' と代入 θ が存在するならば，$\Pi_{C'}$ を C' の証明図とすると次の図は C の証明図である．

$$\frac{\Pi_{C'}}{C}\ (SUB)$$

  $\Pi_{C'}$ の長さを l とするとこの証明図の長さは $l+1$ である．

- $\Gamma \vdash C'$ なる $C' = A \leftarrow B_1, ..., B_n, B_{n+1}$ と，$\Gamma \vdash C''$ なる $C'' = B_{n+1}$ が存在するならば，$\Pi_{C'}, \Pi_{C''}$ をそれぞれ C', C'' の証明図とすると次の *2* つの図はどちらも $C = A \leftarrow B_1, ..., B_n$ の証明図である．

$$\frac{\Pi_{C'} \quad \Pi_{C''}}{C}\ (MP) \qquad\qquad \frac{\Pi_{C''} \quad \Pi_{C'}}{C}\ (MP)$$

  $\Pi_{C'}$，$\Pi_{C''}$ の長さをそれぞれ $l_{C'}$，$l_{C''}$ とすると，これらの証明図の長さはともに $max\{l_{C'}, l_{C''}\} + 1$ である．

例 8. 例 *1* の *EFS* T を考える．$p(aabbcc) \leftarrow$ の証明図の一例は次の通りである．

$$\dfrac{\dfrac{p(xyz) \leftarrow q(x,y,z)}{p(aabbcc) \leftarrow q(aa,bb,cc)}\ (SUB) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{q(ax,by,cz) \leftarrow q(x,y,z)}{q(aa,bb,cc) \leftarrow q(a,b,c)}\ (SUB) \qquad q(a,b,c) \leftarrow}{q(aa,bb,cc) \leftarrow}\ (MP)}{p(aabbcc) \leftarrow}\ (MP)$$

この証明図の長さは 4 である．

$\theta = \{x_1 := \pi_1, ..., x_n := \pi_n\}$ を代入とする．$D(\theta) = \{x_1, ..., x_n\}$ を θ のサポートと呼ぶ．

定義 3. $T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ を *EFS* とする．節 C の正規化証明図は次の条件を満たす証明図である．

- 推論規則 SUB において用いられる代入は，サポートが代入が適用される節に含まれる変数の集合と等しい基礎代入である．
- 推論規則 MP は基礎節にのみ適用される．

正規化証明図については次のことがわかっている．

定理 1 (Kiwata and Arikawa [5])**.** $T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ を変数限定 *EFS*，A を基礎アトムとする．$\Gamma \vdash A \leftarrow$ ならば，$A \leftarrow$ の正規化証明図が存在する．

2.4 融合原理による言語の受理

2つの項，またはアトム α，β に対して $\alpha\theta = \beta\theta$ なる代入 θ を α と β の**単一化代入**という．α と β の単一化代入が存在するとき，α と β は**単一化可能**であるという．$D(\theta) \subseteq v(\alpha) \cup v(\beta)$ となるような単一化代入 θ の集合を $U(\alpha, \beta)$ と書く．

2つの節 C，D に対して，$C = D\theta$，$C\theta' = D$ なる代入 θ と θ' が存在するとき，D は C の**異種である**という．

R を各ゴール節から1つのアトムを選ぶルールとする．

定義 4. T を EFS とし，G をゴール節とする．次の条件を満たす3項組 (G_i, θ_i, C_i) $(i = 0, 1, ...)$ の列を G からの**導出**と呼ぶ．

- G_i はゴール節，θ_i は代入，C_i は T の公理の異種である．また，$G_0 = G$.
- $i \neq j$ なる任意の i，j に対し $v(C_i) \cap v(C_j) = \emptyset$．また，任意の i に対し $v(C_i) \cap v(G_i) = \emptyset$.
- G_i が $\leftarrow A_1, ..., A_k$，A_m が R によって選ばれたアトムならば，C_i は $A \leftarrow B_1, ..., B_q$，$\theta_i$ は A と A_m の単一化代入，そして G_{i+1} は次のようになる．

$$(\leftarrow A_1, ..., A_{m-1}, B_1, ..., B_q, A_{m+1}, ..., A_k)\theta_i$$

  G_{i+1} を G_i と C_i の θ_i による**融合節**と呼ぶ．

空節で終わる有限な導出を**反駁**と呼ぶ．Yamamoto [13] はこの導出手続きによる反駁探索が EFS 言語の受理機構として機能することを示した．

2.5 並列多重文脈自由文法

並列多重文脈自由文法 [8] は5項組 (N, Σ, F, P, S) である．N は非終端記号の有限集合，Σ は終端記号の有限集合，Σ は終端記号の有限集合，F は関数の有限集合，P は生成規則の有限集合，$S \in N$ は開始記号である．各 $A \in N$ には正の整数 $dim(A)$ が与えられていて，A からは $dim(A)$ 項組の終端記号列が得られる．開始記号について $dim(S)$ は1で

ある．各 $f \in F$ には正の整数 d_i $(0 \le i \le k)$ が与えられていて，f は次の条件 (F1) を満たす $(\Sigma^*)^{d_1} \times ... \times (\Sigma^*)^{d_k}$ から $(\Sigma^*)^{d_0}$ への関数である．

(F1) $\overline{x_i} = (x_{i1}, ..., x_{id_i})$ $(1 \le i \le k)$ を f の i 番目の引数とする．$1 \le h \le d_0$ について関数値の h 番目の要素 $f^{[h]}$ を次のように定義する．

$$f^{[h]}[\overline{x_1}, ..., \overline{x_k}] = \beta_{h0} z_{h1} \beta_{h1} z_{h2} ... z_{hv_h} \beta_{hv_h} \qquad (*)$$

β_{hl} $(0 \le l \le v_h)$ は Σ^* の要素，z_{hl} は $\{x_{ij} \mid 1 \le i \le k, 1 \le j \le d_i\}$ の要素である．

非終端記号 $A_i \in N$ $(0 \le i \le k)$ と関数 $f : (\Sigma^*)^{dim(A_1)} \times ... \times (\Sigma^*)^{dim(A_k)} \to (\Sigma^*)^{dim(A_0)}$ に対し，P 中の各規則は $A_0 \to f[A_1, ..., A_k]$ という形をしている．$k \ge 1$ のときこの規則を**非終端規則**と，$k = 0$ のときこの規則を**終端規則**と呼ぶ．$f^{[h]}[\ ] = \beta_h$ である終端規則 $A_0 \to f[\ ]$ を以後 $A_0 \to (\beta_1, ..., \beta_{dim(A_0)})$ と書く．

関係 $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ を次の (L1) と (L2) で定義する．

(L1) 規則 $A \to \alpha$ $(\alpha \in (\Sigma^*)^{dim(A)})$ が P の要素ならば，$A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$.

(L2) 規則 $A \to f[A_1, ..., A_k]$ が P の要素で，かつ任意の i $(1 \le i \le k)$ に対し $A_i \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha_i$ ならば，$A \stackrel{*}{\Rightarrow} f[\alpha_1, ..., \alpha_k]$.

$G = (N, \Sigma, F, P, S)$ を並列多重文脈自由文法とする．非終端記号 A に対し，A から生成可能な文字列組の集合を $L_G(A) = \{w \in (\Sigma^*)^{dim(A)} \mid A \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$ と定義する．また，G によって生成される言語 $L(G)$ は，$L(G) = L_G(S)$ と定義される．言語 L がある並列多重文脈自由文法 G によって生成されるとき，すなわち $L = L(G)$ となるとき，L は**並列多重文脈自由言語**という．

例 9. 並列多重文脈自由文法 $G = (\{S\}, \{a\}, \{f\}, P, S)$ を考える．ただし，関数 f と P は次の通りである．

$$f[x] = xx$$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \to a \\ S \to f[S] \end{array} \right\}$$

文法 G によって生成される言語は $L(G) = \{a^{2^n} \mid n \ge 0\}$ である．

並列多重文脈自由文法 G がさらに次の条件 $(F2)$ を満たす場合，G を**多重文脈自由文法**という．

(F2) 各 h $(1 \leq h \leq d_o)$ と各変数 x_{ij} に対し，式 $(*)$ の右辺に現れる x_{ij} の総数は高々1個である．

言語 L がある多重文脈自由文法 G によって生成されるとき，すなわち $L = L(G)$ となるとき，L は**多重文脈自由言語**である．

例 10. 多重文脈自由文法 $G = (\{A, S\}, \{a, b, c\}, \{f_1, f_2\}, P, S)$ を考える．ただし，関数 f_1, f_2 と P は次の通りである．

$$f_1[(x, y)] = (axb, cy)$$

$$f_2[(x, y)] = (xy)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \to (\epsilon, \epsilon) \\ A \to f_1[A] \\ S \to f_2[A] \end{array} \right\}$$

文法 G によって生成される言語は $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ である．

文脈自由言語，文脈依存言語，多重文脈自由言語，並列多重文脈自由言語のクラスをそれぞれ *CFL*，*CSL*，*MFCL*，*PMFCL* と表す．Seki ら [8] はこれらの言語クラスが次の包含関係を満たしていることを示した．

$$\mathit{CFL} \subsetneq \mathit{MCFL} \subsetneq \mathit{PMCFL} \subsetneq \mathit{CSL}$$

並列多重文脈自由文法 $G = (N, \Sigma, F, P, S)$ を考える．F 中の任意の関数 f について，f の左辺に現れる任意の変数が少なくとも一度は右辺に現れる場合，G は消去不能であるという．Seki ら [8] は消去不能に関して次のことを示している．

補題 1. 任意の並列多重文脈自由文法（多重文脈自由文法）G に対し，$L(G) = L(G')$ となる消去不能な並列多重文脈自由文法（多重文脈自由文法）G' が存在する．

第3章

EFSの部分クラスの言語記述力

3.1 変数限定EFSと長さ限定EFS

消去不能EFSにおいて節が長さ限定であるための必要十分条件は次の通りである．

定理 2 (Arikawa et al. [3])**.** 節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ が長さ限定であるための必要十分条件は，

$$|A| \geq |B_1| + ... + |B_n|$$

かつ，全ての変数 x に対して，

$$o(x, A) \geq o(x, B_1) + ... + o(x, B_n) \tag{3.1}$$

が成り立つことである．

3.1式により全ての長さ限定EFSは変数限定EFSである．しかし，定理2が成り立つのは消去不能EFSのみであり，本論文で扱っている消去可能EFSでは成り立たない．

例 11. *EFS* $T = (\{a\}, \{p\}, \Gamma)$ について考える．節 $p(xx) \leftarrow p(ax)$ は

$$|xx| \geq |ax|$$

かつ，全ての変数 v に対し，

$$o(v, p(xx)) \geq o(v, p(ax))$$

が成り立つので長さ限定のはずである．しかし，$\{x := \epsilon\}$ を代入とすると，節 $p(xx) \leftarrow p(ax)$ の代入例は $p(\epsilon) \leftarrow p(a)$ となり，$|\epsilon| < |a|$ となるため長さ限定ではない．

この節では消去可能 EFS において節が長さ限定であるための必要十分条件を求める．

アトム A に対して，A 中に現れる全ての終端記号の集合を $t(A)$ で表す．また，パターン π における集合 S の要素の出現回数を $o_S(\pi)$ で表す．さらに，アトム $p(\pi_1, ..., \pi_n)$ に対して，$o_S(p(\pi_1, ..., \pi_n)) = o_S(\pi_1) + ... + o_S(\pi_n)$ と定義する．

定理 3. 節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ に対し $T = t(A) \cup t(B_1) \cup ... \cup t(B_n)$ とするとき，節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ が長さ限定であるための必要十分条件は，

$$o_T(A) \geq o_T(B_1) + ... + o_T(B_n)$$

かつ，全ての変数 x に対して

$$o(x, A) \geq o(x, B_1) + ... + o(x, B_n) \tag{3.2}$$

が成り立つことである．

証明. 節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ に対し，$v(A) \cup v(B_1) \cup ... \cup v(B_n) = \{x_1, ..., x_m\}$ とする．

まず節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ が長さ限定節である場合を考える．任意の代入 θ に対して $|A\theta| \geq |B_1\theta| + ... + |B_n\theta|$ なので，整数 j $(1 \leq j \leq m)$ に対し $\theta = \{x_j := x_j^{k+1}\}$ とすると，

$$|A\theta| - \sum_{i=1}^{n} |B_i\theta| = |A| - \sum_{i=1}^{n} |B_i| + k \times (o(x_j, A) - \sum_{i=1}^{n} o(x_j, B_i)) \geq 0$$

となる．この式を変形すると，

$$o(x_j, A) - \sum_{i=1}^{n} o(x_j, B_i) \geq \frac{-(|A| - \sum_{i=1}^{n} |B_i|)}{k}$$

となる．この式は十分大きな k に対しても成り立つので，

$$o(x_j, A) - \sum_{i=1}^{n} o(x_j, B_i) \geq 0$$

が成り立つ．また，$\theta = \{x_j := \epsilon \mid 1 \leq j \leq m\}$ とすると，

$$|A\theta| - \sum_{i=1}^{n} |B_i\theta| = o_T(A) - \sum_{i=1}^{n} o_T(B_i) \geq 0$$

が成り立つ．

次に節 $A \leftarrow B_1, ..., B_n$ 中のアトム $A, B_1, ..., B_n$ が，

$$o_T(A) \geq o_T(B_1) + ... + o_T(B_n)$$

であり，かつ全ての変数 x に対して

$$o(x, A) \geq o(x, B_1) + ... + o(x, B_n)$$

である場合を考える．任意の代入 θ に対して，

$$\begin{aligned} |A\theta| - \sum_{i=1}^{n} |B_i\theta| &= o_T(A) + \sum_{j=1}^{m} |x_j\theta| o(x_j, A) - \sum_{i=1}^{n} (o_T(B_i) + \sum_{j=1}^{m} |x_j\theta| o(x_j, B_i)) \\ &= o_T(A) - \sum_{i=1}^{n} o_T(B_i) + \sum_{j=1}^{m} |x_j\theta| (o(x_j, A) - \sum_{i=1}^{n} o(x_j, B_i)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ． □

3.2 式により，消去可能 EFS においても全ての長さ限定 EFS は変数限定 EFS であることがわかる．

3.2 長さ限定 EFS 言語と文脈依存言語

Arikawa ら [3] は EFS の各部分クラスと Chomsky 階層における各言語族との対応を示した．しかし，長さ限定 EFS 言語については次のような記述になっている．

定理 4 (Arikawa et al. [3]).

1. 長さ限定 *EFS* 言語は文脈依存言語である．
2. 任意の文脈依存言語 $L \subseteq \Sigma^+$ に対して，$L = L(T, p) \cap \Sigma^+$ なる長さ限定 *EFS* が存在する．

このように，長さ限定 EFS 言語と文脈依存言語の等価性については制限があることが述べられている．この節ではこの制限が不要であること，すなわち長さ限定 EFS 言語のクラスと文脈依存言語のクラスが厳密に等価であることを示す．

定理 5. 言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が文脈依存言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる長さ限定 *EFS* T が存在することである．

証明. 任意の長さ限定 EFS 言語が文脈依存言語であることは Arikawa ら [3] によって証明されている．

次に，任意の文脈依存言語が長さ限定EFSによって記述できることを示す．$G = (N, \Sigma, P, S)$ を文脈依存文法とする．ただし，空語 ϵ は生成規則 $S \to \epsilon$ にのみ出現し，$S \to \epsilon$ を生成規則として含む場合は S は他のどの生成規則の右辺にも出現しないものとする．G に対し，次のような長さ限定 EFS $T = (\Sigma', \Pi, \Gamma)$ を考える．

$$
\begin{aligned}
\Sigma' =& N \cup \Sigma \cup \{a' \mid a \in \Sigma\} \\
\Pi =& \{p, p_1, p_2, p_3\} \\
\Gamma =& \{p(S) \leftarrow\} \\
& \cup \{p(\epsilon) \leftarrow \mid S \to \epsilon \in P\} \\
& \cup \{p_3(\epsilon) \leftarrow p(\epsilon)\} \\
& \cup \{p(x\beta y) \leftarrow p(x\alpha y) \mid \alpha \to \beta \in P, \beta \neq \epsilon\} \\
& \cup \{p_1(x) \leftarrow p(x)\} \\
& \cup \{p_1(xa') \leftarrow p_1(ax) \mid a \in \Sigma\} \\
& \cup \{p_2(xa) \leftarrow p_1(a'x) \mid a \in \Sigma\} \\
& \cup \{p_2(xa) \leftarrow p_2(a'x) \mid a \in \Sigma\} \\
& \cup \{p_3(ax) \leftarrow p_2(ax) \mid a \in \Sigma\}
\end{aligned}
$$

このとき，$L(G) = L(T, p_3)$ となることを証明すればよい．

まず，$\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$ に対し，$S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Leftrightarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ となることを示す．

$S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Longrightarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ を導出の長さ n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 0$ のとき，$\gamma = S$ となる．T の定義より $p(S) \leftarrow \in \Gamma$ なので $\Gamma \vdash p(S) \leftarrow$．

$n = k$ $(k \geq 0)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k+1$ のとき，$u, v \in (N \cup \Sigma)^*$ としたときに次のような導出を考える．

$$S \overset{k}{\Rightarrow} u\alpha v \Rightarrow u\beta v$$

最後の導出は規則 $\alpha \to \beta$ によって行われた．$\alpha \to \beta \in P$ より $p(x\beta y) \leftarrow p(x\alpha y) \in \Gamma$．また，帰納法の仮定より $\Gamma \vdash p(u\alpha v) \leftarrow$．よって $\Gamma \vdash p(u\beta v) \leftarrow$．

これで $S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Longrightarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ が示された.

次に，$S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Longleftarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ を正規化証明図の長さ n に関する数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき，γ は S または ϵ となる．S は G の開始記号なので $S \overset{0}{\Rightarrow} S$ となる．また γ が ϵ の場合，T の定義より規則 $S \to \epsilon$ が存在する．よって $S \overset{1}{\Rightarrow} \epsilon$ となる.

$n = k\ (k \geq 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k + 1$ のとき，$u\beta v = \gamma$ とすると $p(\gamma) \leftarrow$ の正規化証明図は次のようになる.

$$\dfrac{\dfrac{p(x\beta y) \leftarrow p(x\alpha y)}{p(u\beta v) \leftarrow p(u\alpha v)}\,(SUB) \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ p(u\alpha v) \leftarrow\end{array}}{p(u\beta v)}\,(MP)$$

この正規化証明図の長さは $k + 1$ なので，$p(u\alpha v) \leftarrow$ の正規化証明図の長さは高々k となる．帰納法の仮定より $S \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha v$．また，$p(x\beta y) \leftarrow p(x\alpha y) \in \Gamma$ より $\alpha \to \beta \in P$．よって $S \overset{*}{\Rightarrow} u\beta v = \gamma$.

これで，$S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Longleftarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ も示された.

これにより $S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma \Leftrightarrow \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ が示された.

続いて $L(T, p_3) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\}$ となることを示す.

まず，$\Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow$ かつ $\gamma \in \Sigma^*$ なる単位節 $p(\gamma) \leftarrow$ について，Γ の規則をうまく適用することで $p_3(\gamma) \leftarrow$ を導くことができる．よって $L(T, p_3) \supseteq \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\}$.

次に，$L(T, p_3) \subseteq \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\}$ については対偶を考える．すなわち，$NPS(T)$ を，

$$NPS(T, p) = \{p(\gamma) \leftarrow \mid \gamma \in \Sigma^*, p(\gamma) \leftarrow \text{は}\Gamma\text{から証明可能でない}\}$$

と定義したときに，$\gamma \notin \Sigma^*$ または $p(\gamma) \leftarrow \in NPS(T, p)$ ならば $\gamma \notin L(T, p_3)$ となることを示す．まず，$\gamma \notin \Sigma^*$ の場合，証明の途中で必ず $p_1(A\gamma') \leftarrow\ (A \in N, \gamma' \in \Sigma')$ という節が現れる．任意の代入を考えたとしても本体に $p_1(A\gamma')$ が現れるような公理は Γ 中に存在しない．これ以上証明を続けることはできないので $\gamma \notin \Sigma^*$ ならば $\gamma \notin L(T, p_3)$ となる．次に，$p(\gamma) \leftarrow \in NPS(T, p)$ の場合，p_3 に到達するためには必ず p を通過しなければならない．よって $p(\gamma) \leftarrow \in NPS(T, p)$ ならば $\gamma \notin L(T, p_3)$ である.

対偶が正しいことが示されたので $L(T, p_3) \subseteq \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\}$ も正しいことが示された.

これにより $L(T, p_3) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\}$ が示された．ここで $L(G) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma\}$ である．よって

$$L(G) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(\gamma) \leftarrow\} = L(T, p_3)$$

となることが示された． □

消去不能 EFS に関しても，定理 5 と同様にして次のことを示すことができる．

定理 6. 言語 $L \subseteq \Sigma^+$ が文脈依存言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる長さ限定 *EFS* T が存在することである．

ただし，証明する際には文脈依存文法を模倣する EFS T の公理を次の Γ' とする必要がある．

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{p(x\beta) \leftarrow p(x\alpha),\ p(\beta y) \leftarrow p(\alpha y),\ p(\beta) \leftarrow p(\alpha) \mid \alpha \to \beta \in P\} \setminus \{p_3(\epsilon) \leftarrow p(\epsilon)\}$$

3.3 変数純粋 EFS 言語と並列多重文脈自由言語

この節では変数純粋 EFS の言語記述力を示す．

並列多重文脈自由文法における導出の長さを次のように定義する．

定義 5. $G = (N, \Sigma, F, P, S)$ を並列多重文脈自由文法とする．$A \in N$ と $\alpha \in (\Sigma^*)^{dim(A)}$ に対し，次の 2 条件を満たす最小の値を A から α への**導出の長さ** $ld_G(A, \alpha)$ と定義する．

- 終端規則 $A \to \alpha$ が P の要素ならば $ld_G(A, \alpha) = 1$.
- 任意の i $(1 \leq i \leq k)$ に対し $\alpha_i \in L_G(A_i)$，かつ $A \to f[A_1, ..., A_k] \in P$，かつ $f[\alpha_1, ..., \alpha_k] = \alpha$ ならば，

$$ld_G(A, \alpha) = 1 + \sum_{i=1}^{r(f)} ld_G(A_i, \alpha_i)$$

定理 7. 言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が並列多重文脈自由言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる変数純粋 *EFS* T が存在することである．

証明. まず任意の並列多重文脈自由言語が変数純粋 EFS によって表現できることを示す.

$G = (N, \Sigma, F, P, S)$ を消去不能な並列多重文脈自由文法とする．補題 1 より一般性は失われない．これに対し次のような変数純粋 EFS $T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ を考える．

$$\begin{aligned}
\Pi =& \{p_A/dim(A) \mid A \in N\} \\
\Gamma =& \{p_A(\pi_1, ..., \pi_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)}) \mid \\
& A \rightarrow f[A_1, ..., A_m] \in P, \\
& f[(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., (x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)})] = (\pi_1, ..., \pi_{dim(A)}), i \geq 1\} \\
& \cup \{p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow \mid A \rightarrow (t_1, ..., t_{dim(A)}) \in P\}
\end{aligned}$$

このとき，$L(G) = L(T, p_S)$ となることを示せばよい.

まず，任意の $A \in N$ について $L_G(A) \subseteq L(T, p_A)$ となることを導出の長さ n に関する数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき，$L_G(A)$ に含まれるのは終端規則 $A \rightarrow (t_1, ..., t_{dim(A)})$ が P の要素であるような $(t_1, ..., t_{dim(A)})$ だけである．T の定義より節 $p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow$ は Γ の要素である．よって，$\Gamma \vdash p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow$，すなわち $(t_1, ..., t_{dim(A)}) = \overline{t} \in L(T, p_A)$.

$n = k$ $(k \geq 1)$ のとき帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k + 1$ のとき $L_G(A)$ に含まれるのは，$A \overset{*}{\Rightarrow} \overline{t}$ なる $\overline{t}$ だけである．ここで A に適用した規則を $A \rightarrow f[A_1, ..., A_m]$ とし，$\overline{t_i} \in L_G(A_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ かつ $f[\overline{t_1}, ..., \overline{t_m}] = \overline{t}$ とする．全体の導出の長さが $k + 1$ なので

$$\sum_{i=1}^{m} ld_G(A_i, \overline{t_i}) = k$$

となり，任意の i に対し $ld_G(A_i, \overline{t_i}) \leq k$ となる．帰納法の仮定より $\overline{t_i} \in L(T, p_{A_i})$．また，$T$ の定義より節

$$p_A(\pi_1, ..., \pi_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)})$$

は Γ の要素である．次のような代入 θ を考える．

$$\theta = \{x_{ij} := t_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq dim(A_i), (t_{i1}, ..., t_{idim(A_i)}) = \overline{t_i}\}$$

このとき，先程の節の代入例は次のようになる．

$$p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(t_{11}, ..., t_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(t_{m1}, ..., t_{mdim(A_m)})$$

$\overline{t_i} \in L(T, p_{A_i})$ なので $\Gamma \vdash p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow$ となる．このとき，T の定義により $(t_1, ..., t_{dim(A)}) = \bar{t}$ が成り立つ．したがって，$\bar{t} \in L(T, p_A)$.

これにより任意の $A \in N$ について $L_G(A) \subseteq L(T, p_A)$ となることが示された．$S \in N$ なので $L_G(S) \subseteq L(T, p_S)$ となる．

次に，任意の $p_A \in \Pi$ に対し $L(T, p_A) \subseteq L_G(A)$ となることを正規化証明図の長さ n に関する数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき，$L(T, p_A)$ に含まれるのは単位節 $p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow$ が Γ の要素であるような $(t_1, ..., t_{dim(A)})$ だけである．ここで T の定義より $A \to (t_1, ..., t_{dim(A)})$ は P の要素である．よって，$(t_1, ..., t_{dim(A)}) \in L_G(A)$.

$n = k\ (k \geq 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k{+}1$ のとき，$(t_1, ..., t_{dim(A)}) \in L(T, p_A)$ なる $p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow$ の正規化証明図は次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1}{C_2}\,(SUB) \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ p_{A_m}(t_{m1}, ..., t_{mdim(A_m)}) \leftarrow\end{array}}{C_3}\,(MP) \atop {\vdots \atop C_4} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ p_{A_1}(t_{11}, ..., t_{1dim(A_1)}) \leftarrow\end{array}}{p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow}\,(MP)$$

$C_1 = p_A(\pi_1, ..., \pi_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)})$

$C_2 = p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(t_{11}, ..., t_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(t_{m1}, ..., t_{mdim(A_m)})$

$C_3 = p_A(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(t_{11}, ..., t_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_{m-1}}(t_{m-11}, ..., t_{m-1dim(A_{m-1})})$

$C_4 = p(t_1, ..., t_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(t_{11}, ..., t_{1dim(A_1)})$

節

$$p_A(\pi_1, ..., \pi_{dim(A)}) \leftarrow p_{A_1}(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., p_{A_m}(x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)})$$

が Γ の要素なので，T の定義により，

$$f[(x_{11}, ..., x_{1dim(A_1)}), ..., (x_{m1}, ..., x_{mdim(A_m)})] = (\pi_1, ..., \pi_{dim(A)})$$

なる関数 f が F の要素であり、$A \to f[(A_1, ..., A_m)]$ は P の要素である．また，この正規化証明図の長さは $k+1$ なので $p_{A_i}(t_{i1}, ..., t_{idim(A_i)}) \leftarrow\ (1 \leq i \leq m)$ の正規化証明図の長さは高々 k である．よって $(t_{i1}, ..., t_{idim(A_i)}) \in L_G(A_i)$．したがって，$(t_1, ..., t_{dim(A)}) \in L_G(A)$.

これにより任意の $p_A \in \Pi$ に対し $L(T, p_A) \subseteq L_G(A)$ となることが示された．$p_S \in \Pi$ なので $L(T, p_S) \subseteq L(G)$ となる．

よって $L(G) = L(T, p_S)$ となることが，すなわち任意の並列多重文脈自由言語が変数純粋 EFS で表現できることが証明された．

次に，任意の変数純粋 EFS 言語が並列多重文脈自由文法によって表現できることを示す．

$T = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ を変数純粋 EFS とする．ただし，Γ 中の各節には相異なる正の整数が割り振られているものとする．番号が i の節 $p(\pi_1, ..., \pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11}, ..., x_{1ar(p_1)}), ..., p_m(x_{m1}, ..., x_{mar(p_m)})$ に対し，関数 f_{pi} を次のように定義する．

$$f_{pi}[(x_{11}, ..., x_{1ar(p_1)}), ..., (x_{m1}, ..., x_{mar(p_m)})] = (\pi_1, ..., \pi_{ar(p)})$$

変数純粋 EFS T に対し、次のような並列多重文脈自由文法 $G = (N, \Sigma, F, P, N_p)$ を考える．

$$\begin{aligned}
N =& \{N_p \mid p \in \Pi\} \text{ ただし } dim(N_p) = ar(p)\} \\
F =& \{f_{pi} \mid p(\pi_1, ..., \pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11}, ..., x_{1ar(p_1)}), ..., p_m(x_{m1}, ..., x_{mar(p_m)}) \in \Pi, \text{節の番号は } i\} \\
P =& \{N_p \to f_{pi}[N_{p_1}, ..., N_{p_m}] \mid \\
& p(\pi_1, ..., \pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11}, ..., x_{1ar(p_1)}), ..., p_m(x_{m1}, ..., x_{mar(p_m)}) \in \Pi, \\
& \text{節の番号は } i\}
\end{aligned}$$

このとき，$L(T, p) = L(G)$ となることを示せばよい．

まず，任意の $p \in \Pi$ に対し $L(T, p) \subseteq L_G(N_p)$ となることを正規化証明図の長さ n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，$L(T, p)$ に含まれるのは単位節 $p(t_1, ..., t_{ar(p)}) \leftarrow$ が Γ の要素であるような $(t_1, ..., t_{ar(p)})$ だけである．$p(t_1, ..., t_{ar(p)}) \leftarrow \in \Gamma$ よりこの節の番号を i とすると，$f_{pi}[\,] = (t_1, ..., t_{ar(p)}) \in F$，$N_p \to f_{pi}[\,] \in P$ となる．よって $(t_1, ..., t_{ar(p)}) \in L_G(N_p)$．

$n = k\ (k \geq 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k{+}1$ のとき，$p(t_1, ..., t_{ar(p)}) \leftarrow$

の正規化証明図は次のようになる．

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{C_1}{C_2}\,(SUB) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ p_m(t_{m1},...,t_{mar(p_m)}) \leftarrow\end{array}}{C_3}\,(MP)\\ \vdots\\ C_4\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ p_1(t_{11},...,t_{1ar(p_1)}) \leftarrow\end{array}}{p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow}\,(MP)
$$

$$C_1 = p(\pi_1,...,\pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11},...,x_{1ar(p_1)}),...,p_m(x_{m1},...,x_{mar(p_m)})$$

$$C_2 = p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow p_1(t_{11},...,t_{1ar(p_1)}),...,p_m(t_{m1},...,t_{mar(p_m)})$$

$$C_3 = p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow p_1(t_{11},...,t_{1ar(p_1)}),...,p_{m-1}(t_{m-11},...,t_{m-1ar(p_{m-1})})$$

$$C_4 = p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow p_1(t_{11},...,t_{1ar(p_1)})$$

節

$$p(\pi_1,...,\pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11},...,x_{1ar(p_1)}),...,p_m(x_{m1},...,x_{mar(p_m)})$$

が Γ の要素なので，この節の番号を i とすると G の定義により

$$f_{pi}[(x_{11},...,x_{1ar(p_1)}),...,(x_{m1},...,x_{mar(p_m)})] = (\pi_1,...,\pi_{ar(p)})$$

なる関数 f_{pi} は F の要素であり，$N_p \to f_{pi}[N_{p_1},...,N_{p_m}]$ は P の要素である．また，この正規化証明図の長さは $k+1$ なので $p_j(t_{j1},...,t_{jar(p_j)}) \leftarrow$ $(1 \le j \le m)$ の正規化証明図の長さは高々k である．よって $(t_{j1},...,t_{jar(p_j)}) \in L_G(N_{p_j})$．したがって $(t_1,...,t_{ar(p)}) \in L_G(N_p)$．

これにより任意の $p \in \Pi$ に対し $L(T,p) \subseteq L_G(N_p)$ となることが示された．

次に，任意の $N_p \in N$ に対し $L_G(N_p) \subseteq L(T,p)$ となることを導出の長さ n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，$L_G(N_p)$ に含まれるのは終端規則 $N_p \to (t_1,...,t_{ar(p)})$ が P の要素であるような $(t_1,...,t_{ar(p)})$ だけである．G の定義より $p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow \in \Gamma$．よって $\Gamma \vdash p(t_1,...,t_{ar(p)}) \leftarrow$，すなわち $(t_1,...,t_{ar(p)}) \in L(T,p)$．

$n = k$ $(k \ge 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k+1$ のとき，$L_G(N_p)$ に含まれるのは $N_p \overset{*}{\Rightarrow} \bar{t}$ なる $\bar{t}$ だけである．ここで N_p に適用した規則を $N_p \to f_{pi}[N_{p_1},...,N_{p_m}]$ とし，$\overline{t_i} \in L_G(N_{p_i})$ $(1 \le i \le m)$ かつ $f[\overline{t_1},...,\overline{t_m}] = \bar{t}$ とする．全体の導出の長さが $k+1$ なので，

$$\sum_{i=1}^{m} ld_G(Np_i, \overline{t_i}) = k$$

となり，任意の i に対し $ld_G(N_{p_i}, \overline{t_i}) \leq k$ となる．帰納法の仮定より $\overline{t_i} \in L(T, p_i)$．また G の定義より節

$$p(\pi_1, ..., \pi_{ar(p)}) \leftarrow p_1(x_{11}, ..., x_{1ar(p_1)}), ..., p_m(x_{m1}, ..., x_{mar(p_m)})$$

は Γ の要素である．次のような代入 θ を考える．

$$\theta = \{x_{ij} := t_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq ar(p_i), (t_{i1}, ..., t_{iar(p_i)}) = \overline{t_i}\}$$

このとき，先程の節の代入例は次のようになる．

$$p(t_1, ..., t_{ar(p)}) \leftarrow p_1(t_{11}, ..., t_{1ar(p_1)}), ..., p_m(t_{m1}, ..., t_{mar(p_m)})$$

$\overline{t_i} \in L(T, p_i)$ なので $\Gamma \vdash p(t_1, ..., t_{ar(p)}) \leftarrow$ となる．このとき，G の定義より $(t_1, ..., t_{ar(p)}) = \bar{t}$ である．したがって $\bar{t} \in L(T, p)$.

これにより任意の $N_p \in N$ に対し $L_G(N_p) \subseteq L(T, p)$ となることが示された.

よって $L(T, p) = L(G)$ となることが，すなわち任意の変数純粋 EFS 言語が並列多重文脈自由文法によって表現できることが証明された. $\square$

同様の証明により次の系 1 も証明できる.

系 1. 言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が多重文脈自由言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる正規変数純粋 *EFS* T が存在することである.

第4章

NEFSの部分クラスと言語記述力

4.1 非終端記号の導入

ここではEFSに非終端記号を導入した非終端記号付き基本形式体系を定義する．N を Σ, Π, X とは交わらない有限集合とする．N の要素を**非終端記号**と呼ぶ．任意の $A \in N$ に対し $|A| = 0$ と定義する．非終端記号を導入する前の定義を拡張し，$(N \cup \Sigma \cup X)^*$ の要素を**非終端記号付き項**とする．$(N \cup \Sigma)^*$ からなる項を**非終端記号付き基礎項**と呼ぶ．項が全て非終端記号付き基礎項であるようなアトムを**非終端記号付き基礎アトム**と呼ぶ．非終端記号を含む節を**非終端記号付き節**と呼ぶ．非終端記号付き項 π に対して，π の文字列としての長さを $|\pi|_N$ と表す.

互いに異なる変数 x_k $(1 \leq k \leq n)$ と任意の非終端記号付きパターン π_k に対し $\{x_1 := \pi_1, ..., x_m := \pi_m\}$ の形をした有限集合を代入と呼ぶ.

非終端記号付き基本形式体系は4項組 (N, Σ, Π, Γ) によって定義される．Γ は N, Σ, Π から構成可能な非終端記号付き確定節の有限集合である.

NEFSにおける関係 $\Gamma \vdash C$ をEFSと同様にして定義する．$\Gamma \vdash C$ ならば C は Γ から**証明可能**であるという．NEFS T と述語記号 $p/1$ に対して $L(T, p) = \{w \in \Sigma^* \mid \Gamma \vdash p(w) \leftarrow\}$ と定義する．$L = L(T, p)$ なるNEFS T と述語 $p/1$ が存在するとき，言語 L を**非終端記号付き基本形式体系言語**と定義する.

NEFSにおける証明図，部分クラスなどはEFSと同様にして定義する.

NEFSはEFSを拡張したものであるため例1等で示した全てのEFSは $N = \emptyset$ であるNEFSとみなすことができる.

非終端記号を導入したことにより生成文法やオートマトンを簡単に NEFS に変換することが可能となる．次のような単調文法 [2] を考える．

例 12. 単調文法 $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ を考える．

$$P = \begin{Bmatrix} S \rightarrow abc \\ S \rightarrow aSBc \\ cB \rightarrow Bc \\ bB \rightarrow bb \end{Bmatrix}$$

文法 G によって定義される言語は $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

これに対し次のような NEFS を考える．

例 13. *NEFS* $T = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{p/1\}, \Gamma)$ を考える．

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} p(xabcy) \leftarrow p(xSy) \\ p(xaSBcy) \leftarrow p(xSy) \\ p(xBcy) \leftarrow p(xcBy) \\ p(xbby) \leftarrow p(xbBy) \\ p(S) \leftarrow \end{Bmatrix}$$

NEFS T と述語記号 p によって定義される言語は $L(T, p) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

例 12 の生成規則と例 13 の公理に注目してみると，これらがきれいに対応づいていることがわかる．一方，通常の EFS では単調文法における非終端記号を含むような文字列も生成してしまうため，これらの文字列を取り除く操作を加えねばならない．また，次のようなプッシュダウンオートマトン [2] を考える．

例 14. プッシュダウンオートマトン $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$ を考

える．遷移関数 δ は次のように定義される．

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

M が受理する言語 $L(M)$ は $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ である．

これに対し次のような NEFS を考える．

例 15. *NEFS* $T = (\{A, Z_0, \#\}, \{a, b\}, \{p/1, q_0/1, q_1/1, q_2/1\}, \Gamma)$ を考える．

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} p(x) \leftarrow q_0(Z_0\#x) \\ q_0(xZ_0\#ay) \leftarrow q_0(xZ_0A\#y) \\ q_0(xA\#ay) \leftarrow q_0(xAA\#y) \\ q_0(xA\#by) \leftarrow q_1(x\#y) \\ q_1(xA\#by) \leftarrow q_1(x\#y) \\ q_1(xZ_0\#y) \leftarrow q_2(x\#y) \\ q_2(x\#) \leftarrow \end{array} \right\}$$

NEFS T と述語記号 p によって定義される言語は $L(T, p) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

例 14 の遷移関数と例 15 の公理に注目してみると，記号 # の左側の部分でスタックを，右側の部分で入力テープを模倣しており，これらがきれいに対応づいていることがわかる．一方，オートマトンを EFS で模倣しようとするとテープアルファベットを含む文字列も定義してしまい，これらの文字列を取り除く操作を加えねばならない．

4.2　NEFS と証明図

NEFS における正規化証明図を次のように定義する．

定義 6. $T=(N,\Sigma,\Pi,\Gamma)$ を $NEFS$ とする．節 C の正規化証明図は次の条件を満たす証明図である．

- 推論規則 SUB において用いられる代入は，サポートが代入が適用される節に含まれる変数の集合と等しい非終端記号付き基礎代入である．
- 推論規則 MP は非終端記号付き基礎節にのみ適用される．

定理 8. $T=(N,\Sigma,\Pi,\Gamma)$ を変数限定 $NEFS$ とし，A を T の非終端記号付き基礎アトムとする．$\Gamma \vdash A\leftarrow$ ならば $A\leftarrow$ の正規化証明図が存在する．

証明. 証明図の長さ n の数学的帰納法によって示す．

$n=1$ のとき，$A\leftarrow\in\Gamma$ である．$A\leftarrow$ は明らかに長さ 1 の正規化証明図である．

$n=k \quad (k\geq 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n=k+1$ のときを考える．推論規則 MP が使われない場合この定理が成り立つのは明らかである．そこで推論規則 MP が少なくとも 1 回は使われる場合を考える．このとき最後の推論は次の 2 つの場合が考えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A'\leftarrow B'_1 & B'_1\leftarrow\end{matrix}}{A'\leftarrow}\,(MP)}{A\leftarrow}\,(SUB) \tag{Fig. 1}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A\leftarrow B_1 & B_1\leftarrow\end{matrix}}{A\leftarrow}\,(MP) \tag{Fig. 2}$$

$A=A'\theta$ なる代入 θ を使うことで証明図 Fig. 1 は次のように書きかえることができる．

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A'\theta\leftarrow B'_1\theta & B'_1\theta\leftarrow\end{matrix}}{A\leftarrow}\,(MP) \tag{Fig. 3}$$

$A'\theta$ と $B'_1\theta$ は共に非終端記号付き基礎項なので証明図 Fig. 3 は証明図 Fig. 2 と同じ形である．また証明図 Fig. 3 の長さは証明図 Fig. 1 の長さと等しい．先程のような操作を繰り返すことで節 $A'\leftarrow B'_1,...,B'_m\in\Gamma$ から次のような証明図を得ることができる．

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\leftarrow B_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B_1\leftarrow\end{matrix}}{A\leftarrow}\,(MP) \quad \text{where } \begin{matrix}\vdots\end{matrix} \text{ above } A\leftarrow B_1 \text{ is } \dfrac{\dfrac{A'\leftarrow B'_1,...,B'_m}{A\leftarrow B_1,...,B_m}\,(SUB) \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B_m\leftarrow\end{matrix}}{A\leftarrow B_1,...,B_{m-1}}\,(MP) \tag{Fig. 4}$$

この証明図の長さは $k+1$ なので，$B_i \leftarrow \ (1 \leq i \leq m)$ の証明図の長さは高々k である．帰納法の仮定より $B_i \leftarrow$ の正規化証明図は存在する．$B_i \leftarrow$ の証明に正規化証明図を用いることで証明図 Fig. 4 は正規化証明図となる． □

4.3 変数限定 NEFS

NEFS は EFS に非終端記号を追加したもので、一見すると表現力が高まっているように見える．しかし，実際は必ずしもそうとは限らない．

定理 9. 言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が帰納的可算言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる変数限定 *NEFS* T が存在することである．

証明. 帰納的可算言語のクラスと変数限定 EFS 言語のクラスが等価であることを利用し，ここでは変数限定 EFS 言語のクラスと変数限定 NEFS 言語のクラスが等価であることを示す．

まず，任意の変数限定 EFS は $N = \emptyset$ である変数限定 NEFS によって模倣することが可能である．すなわち，任意の変数限定 EFS 言語は NEFS で表現可能である．

次に任意の変数限定 NEFS 言語が EFS で表現可能であることを示す．$L = L(T, p)$ となる変数限定 NEFS $T = (N, \Sigma, \Pi, \Gamma)$ に対して，変数限定 EFS $T' = (\Sigma', \Pi', \Gamma')$ を以下のように構成する．

$$
\begin{aligned}
\Sigma' &= N \cup \Sigma \\
\Pi' &= \Pi \cup \{p_c, p_a \mid p_c, p_a \notin \Pi\} \\
\Gamma' &= \Gamma \cup \{p_c(\epsilon) \leftarrow\} \\
&\qquad \cup \{p_c(ax) \leftarrow p_c(x) \mid a \in \Sigma\} \\
&\qquad \cup \{p_a(x) \leftarrow p(x), p_c(x)\}
\end{aligned}
$$

このとき，$L(T, p) = L(T', p_a)$ が成り立つことを証明すればよい．ここで

$$
\begin{aligned}
A &= \{w \in (N \cup \Sigma)^* \mid \Gamma \vdash p(w) \leftarrow\} \\
B &= \{w \in \Sigma'^* \mid \Gamma \vdash p(w) \leftarrow\}
\end{aligned}
$$

とすると，$A = B$ となることは明らかである．よって $L(T', p_a)$ が $B \cap \Sigma^*$ と等しくなればよい．定義より述語記号 p_c の項 τ は $\tau \in \Sigma^*$ である．節 $p_a(x) \leftarrow p(x), p_c(x)$ により

$$\{w \in \Sigma'^* \mid \Gamma \vdash p_a(w) \leftarrow\} = B \cap \Sigma^*$$

となる．よって $L(T, p) = L(T', p_a)$ となる．

□

4.4 単純 NEFS

定理 10. 言語 $L \in \Sigma^*$ が単純 *NEFS* 言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる単純 *EFS* T が存在することである．

証明. 任意の単純 EFS 言語が単純 NEFS によって表現できることは明らかである．次に任意の単純 NEFS 言語が単純 EFS によって表現できることを示す．単純 NEFS $T = (N, \Sigma, \Pi, \Gamma)$ に対し，次のような単純 EFS $T' = (\Sigma, \Pi, \Gamma')$ を考える．

$$\Gamma' = \{C \in \Gamma \mid o_N(C) = 0\}$$

このとき，$L(T, p) = L(T', p)$ となることを示す．

定義より $L(T, p) \supseteq L(T', p)$ となることは明らかである．

次に任意の $p \in \Pi$ に対して $L(T, p) \subseteq L(T', p)$ となることを正規化証明図の長さ n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，$L(T, p)$ に含まれるのは $p(w) \leftarrow$ $(w \in \Sigma^*)$ が Γ の要素であるような w だけである．$o_N(p(w) \leftarrow) = 0$ なので $p(w) \leftarrow \in \Gamma'$．よって $w \in L(T', p)$.

$n = k$ のとき，$L(T, p) \subseteq L(T', p)$ であると仮定する．$n = k + 1$ のとき，$p(w) \leftarrow$ の正規化証明図は次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{p(\pi) \leftarrow p_1(x_1), ..., p_m(x_m)}{p(w) \leftarrow p_1(w_1), ..., p_m(w_m)}\,(SUB) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ p_m(w_m) \leftarrow\end{array}}{p(w) \leftarrow p_1(w_1), ..., p_{m-1}(w_{m-1})}\,(MP)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ p(w) \leftarrow p_1(w_1)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ p_1(w_1) \leftarrow\end{array}}{p(w) \leftarrow}\,(MP)$$

この証明図の長さは $k+1$ なので，$p_i(w_i) \leftarrow \ (1 \leq i \leq m)$ の証明図の長さは高々k である．よって $w_i \in L(T', p)$，すなわち $\Gamma' \vdash p_i(w_i) \leftarrow$．また，$w \in \Sigma^*$ より $o_N(p(\pi) \leftarrow p_1(x_1), ..., p_m(x_m)) = 0$ である．よって $p(\pi) \leftarrow p_1(x_1), ..., p_m(x_m) \in \Gamma'$．したがって $\Gamma' \vdash p(w) \leftarrow$，すなわち $w \in L(T', p)$ となる．

これで任意の $p \in \Pi$ に対して $L(T, p) \subseteq L(T', p)$ となることが示された．

これにより $L(T, p) = L(T', p)$ となることが示された． □

系 2 は定理 10 と同様にして証明が可能である．

系 2.

1. 言語 $L \in \Sigma^*$ が正規 *NEFS* 言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる正規 *EFS* T が存在することである．

2. 言語 $L \in \Sigma^*$ が片側線形 *NEFS* 言語であるための必要十分条件は，$L = L(T, p)$ なる片側線形 *EFS* T が存在することである．

4.5 融合原理による言語の受理

NEFS における導出手続きを EFS における導出手続きと同様に定義する．

補題 2. 2 つの項，またはアトム α と β に対し，どちらか一方が非終端記号付き基礎項（アトム）であるならば，α と β の全ての単一化代入は非終端記号付き基礎代入で，かつ $U(\alpha, \beta)$ は有限で計算可能である．

証明. まず，α と β が項である場合について考える．α が非終端記号付き基礎項で，$v(\beta) = \{x_1, ..., x_n\}$，代入 $\theta = \{x_1 := \pi_1, ..., x_k := \pi_k\}$ $(k \leq n)$ が α と β の単一化代入であると仮定する．このとき $k = n$，かつ $\pi_1, ..., \pi_k$ が全て非終端記号付き基礎項でなければならない．$|\alpha|_N$ と $|\beta\theta|_N$ が等しいので $|\pi_i|_N \leq |\alpha|_N$ が成り立つ．次のような $T(\alpha, \beta)$ を考える．

$$T(\alpha, \beta) = \{\sigma \mid D(\sigma) = v(\beta), \text{各}\, x \in D(\sigma) \text{ に対して } |x\sigma|_N \leq |\alpha|_N\}$$

α より短い非終端記号付き基礎項の数は有限であり，$T(\alpha, \beta)$ は有限でかつ計算可能である．したがって，$U(\alpha, \beta)$ は $T(\alpha, \beta)$ のあらゆる要素 σ について α と $\beta\sigma$ が等しいかどうか比較することで求めることが可能である．

次に，α が非終端記号付き基礎アトム，β が非終端記号付きアトムの場合を考える．α と β の述語記号が違う場合，単一化可能でないことは明らかである．よって $\alpha = p(\tau_1, ..., \tau_n)$, $\beta = p(\pi_1, ..., \pi_n)$ とする．α と β の単一化代入は任意の i $(1 \leq i \leq n)$ について τ_i と π_i の単一化代入を含んでいる．したがって $U(\alpha, \beta)$ は $\sigma_i \in U(\tau_i, \pi_i)$ なるあらゆる n 項組 $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ について α が $\beta\sigma_1...\sigma_n$ と等しいかどうか比較することで求めることが可能である． □

補題 2 と変数限定節の定義より次の補題が得られる．

補題 3. T が変数限定 *EFS*, G が非終端記号付き基礎ゴール節ならば，全ての G の融合節は非終端記号付き基礎節であり，G の融合節の集合は計算可能である．

NEFS T に対し，N と Σ と Π から構成可能な全ての非終端記号付き基礎アトムの集合を $B_N(T)$ と書く．さらに，$PS_N(T)$ と $RS_N(T)$ を次のように定義する．

$$PS_N(T) = \{A \in B_N(T) \mid \Gamma \vdash A \leftarrow\}$$

$$RS_N(T) = \{A \in B_N(T) \mid \leftarrow A \text{ からの反駁が存在する } \}$$

定理 11. T が変数限定 *NEFS* ならば，次の等式が成り立つ．

$$PS_N(T) = RS_N(T)$$

証明. $S = (\Sigma, \Pi, \Gamma)$ とする．まず $PS_N(T) \subseteq RS_N(T)$ となることを $A \leftarrow$ の正規化証明図の長さ n に関する数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，$A \in PS_N(T)$ より $A \leftarrow \in \Gamma$ なので $(\leftarrow A, \{\}, A \leftarrow)$, $(\Box, \{\}, \Box)$ により反駁を得ることができる．よって $A \in RS_N(T)$.

$n = k$ $(k \geq 1)$ のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k + 1$ のとき，$A \leftarrow$ の正規化証明図は次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A' \leftarrow B'_1, ..., B'_m}{A \leftarrow B_1, ..., B_m}\,(SUB) \quad \begin{matrix}\vdots \\ B_m \leftarrow\end{matrix}}{A \leftarrow B_1, ..., B_{m-1}}\,(MP)}{\begin{matrix}\vdots \\ A \leftarrow B_1\end{matrix}} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B_1 \leftarrow\end{matrix}}{A \leftarrow}\,(MP)$$

この証明図の長さは$k+1$なので$B_i \leftarrow \ (1 \leq i \leq m)$の長さは高々$k$である．帰納法の仮定より$B_i \in RS_N(T)$．また，ゴール節$\leftarrow A$と節$A' \leftarrow B'_1, ..., B'_m$により融合節$\leftarrow B_1, ..., B_m$を得ることができる．よって$\leftarrow A$からの反駁を得ることができる．すなわち$A \in RS_N(T)$.

これで$PS_N(T) \subseteq RS_N(T)$が示された.

次に$PS_N(T) \supseteq RS_N(T)$となることを$\leftarrow A$の導出の長さ$n$に関する数学的帰納法で示す.

$n = 1$のとき，次の2通りが考えられる.

(i) $A \leftarrow \in \Gamma$かつAが非終端記号付き基礎項である場合，明らかに$A \in PS_N(T)$である.

(ii) $A' \leftarrow \in \Gamma$かつ$A = A'\theta$となる場合，次の正規化証明図が書けるので$A \in PS_N(T)$となる.

$$\dfrac{A' \leftarrow}{A \leftarrow}\,(SUB)$$

$n = k$のとき，帰納法の仮定が成り立つとする．$n = k+1$のとき，$A \in RS_N(T)$より節$A' \leftarrow B'_1, ..., B'_m \in \Gamma$と$A = A'\theta$なる代入$\theta$が存在する．これらにより融合節$\leftarrow B_1, ..., B_m$を得ることができる．$\leftarrow A$の導出の長さは$k+1$なので，$\leftarrow B_i \ (1 \leq i \leq m)$からの導出の長さは高々$k$である．帰納法の仮定より$B_i \in PS_N(T)$．推論$SUB$において代入$\theta$を用いることで次の正規化証明図が書ける.

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{A' \leftarrow B'_1, ..., B'_m}{A \leftarrow B_1, ..., B_m}\,(SUB) \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B_m \leftarrow\end{matrix}}{A \leftarrow B_1, ..., B_{m-1}}\,(MP) \\ \vdots \\ A \leftarrow B_1\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\vdots \\ B_1 \leftarrow\end{matrix}}{A \leftarrow}\,(MP)$$

よって$A \leftarrow \in PS_N(T)$.

これで$PS_N(T) \supseteq RS_N(T)$が示された.

以上の議論より$PS_N(T) = RS_N(T)$ □

第5章

結論

本論文では空文字を扱うことが可能なEFSにおける長さ限定EFSの必要十分条件と，全ての長さ限定EFSが変数限定EFSであることを示した．また，長さ限定EFS言語が文脈依存言語と厳密に等価であること，変数純粋EFS言語が並列多重文脈自由言語と等価であることを示した．さらに，非終端記号を導入したNEFSを定義し，その言語記述力と融合原理による言語の受理が可能であることを示した．言語記述力については表5.1の灰色の部分が本論文の成果である．

本論文ではEFSの部分クラスの中で変数純粋EFSを取り上げたが，他にも多くの部分クラスが提案されている．例えばSakamotoら [7] はterminating hereditary EFSという部分クラスを提案している．しかし，このEFSで定義される言語がどの言語クラスと対応しているのかは言及されていない．これらの提案されたEFSで定義される言語がどのクラスに属するか調べるのが今後の課題である．

表 5.1: 各EFSの言語記述力

	EFS	NEFS
帰納的可算	変数限定	変数限定
文脈依存	長さ限定	
並列多重文脈自由	変数純粋	
文脈自由	正規	正規
正規	片側線形	片側線形

謝辞

本研究を行うにあたり，御指導，御鞭撻を受け賜りました篠原歩教授に心より御礼申し上げます．また，御専門のお立場から的確な助言を賜りました外山芳人教授，小林直樹教授に心から御礼申し上げます．最後に，日頃研究室での活動全般にわたりご支援頂いた篠原研究室の皆様に心から感謝申し上げます.

参考文献

[1] Setsuo Arikawa. Elementary formal systems and formal languages - simple formal systems. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, Vol. 24, No. 1, pp. 47–75, 1970.

[2] 有川節夫, 西野哲朗, 石坂裕毅. 形式言語の理論. 情報科学コアカリキュラム講座. 丸善, 1999.

[3] Setsuo Arikawa, Takeshi Shinohara, and Akihiro Yamamoto. Learning elementary formal system. *Theoretical Computer Science*, Vol. 95, No. 1, pp. 97–113, 1992.

[4] Daisuke Ikeda and Hiroki Arimura. On the complexity of languages definable by hereditary elementary formal systems. *Proc. 3rd International Conference on Developments in Language Theory*, pp. 223–235, 1997.

[5] Kazuhiro Kiwata and Setsuo Arikawa. Introducing types into elementary formal systems. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, Vol. 28, No. 1, pp. 79–89, 1996.

[6] Satoru Miyano, Ayumi Shinohara, and Takeshi Shinohara. Polynomial-time learning of elementary formal systems. *New Generation Computing*, Vol. 18, pp. 217–242, 2000.

[7] Hiroshi Sakamoto, Kouichi Hirata, and Hiroki Arimura. Learning elementary formal systems with queries. *Theoretical Computer Science*, Vol. 298, No. 1, pp. 21–50, 2003.

[8] Hiroyuki Seki, Takashi Matsumura, Mamoru Fujii, and Tadao Kasami. On multiple context-free grammars. *Theoretical Computer Science*, Vol. 88, No. 2, pp. 191–229, 1991.

[9] Takeshi Shinohara. Rich classes inferrable from positive data:length-bounded elementary formal systems. *Information and Computation*, Vol. 108, No. 2, pp. 175–186, 1994.

[10] R. M. Smullyan. *Theory of Formal Systems*. Princeton Univ. Press, 1961.

[11] 杉本典子. 線形 DS-RTEFS による XML 文書の変換とその学習. 人工知能基本問題研究会, Vol. 76, pp. 27–31, 2010.

[12] Noriko Sugimoto and Hiroki Ishizaka. Generating languages by a derivation procedure for elementary formal systems. *Information Processing Letters*, Vol. 69, No. 4, pp. 161–166, 1999.

[13] Akihiro Yamamoto. Elememtary formal system as a logic programming language. *Proc. Logic Programming Conf. '89*, pp. 123–132, 1989.