зразком, дозволяє подовжити термін зберігання дріжджових виробів. Готові вироби і на 5 день при зберіганні у звичайних умовах залишалися м'які та еластичні. Проведені мікробіологічні дослідження підтверджують безпечність пролонгованого зберігання.

Висновки. За результатами досліджень раціональним є внесення до рецептури борошняних виробів 10 % соку або 7,5 % пюре, або 1,5 % порошку з вичавок хеномелесу. Додавання продуктів переробки хеномелесу дозволяє покращити органолептичні, фізико-хімічні показники готових виробів та подовжити їх термін зберігання.

Перспективи подальших досліджень. Планується розширення спектру використання вичавок, а саме виготовлення з них екстрактів та застосування їх при виробництві борошняних виробів. У подальшому результати проведених досліджень будуть використані при розробці рецептур з інших видів тіста.

Література

1. Бойко И. А. Современное состояние функционирования хлебопекарной промышленности Украины / И. А. Бойко, Н. П. Скрыгун, В. А. Бойко // Научно-теоретический и практический журнал. Серия Экономические науки. – Уральск : Уралнаучкнига, 2013. – № 15. – С. 24–30.
2. Лебеденко Т. Е. Использование экстрактов пряно-ароматических и лекарственных растений в технологии хлебопечения [Текст]/ Т. Е. Лебеденко, Д. М. Донской, Т. П. Новичкова, Т. З. Ткаченко, Н. Ю. Соколова // Наукові праці ОНАХТ. – № 38, Том 1, 2010. – С. 248–253.
3. Турчиняк М. К. Актуальність використання нетрадиційних добавок у харчових продуктах / М. К. Турчиняк // «Товарознавчий вісник» Львівської комерційної академії, 2014. – №7 – С. 193–198
4. Клименко С. В. Хеномелес: генофонд и новые сорта в НБС НАН Украины. / С. В. Клименко, Я. Бryндза, О. В. Григорьева // Матер. міжн. наук. конф., 15–17 вересня 2010 р.– К.: Укрфітосоціоцентр, 2010.– С. 202–204.
5. Хомич Г. П. Дослідження хімічного складу плодів хеномелесу і використання його в соковому виробництві / Г. П. Хомич, Н. І. Ткач, Ю. В. Левченко // Темат. збірник наук. праць «Вісник Донецького національного університету економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського» – Донецьк: ДонНУЕТ, 2014. – Вип.1(61) – С. 98–104.

Стаття надійшла до редакції 23.09.2015

УДК 664.02. (075.8).

Ціж Б. Р.[1,2], д. т. н., професор, **Варивода Ю. Ю.**[1], к. т. н., доцент, **Волос В. О.**[1], к. фіз.-мат. н., доцент, **Чохань М. І.**[1], к. т. н., доцент, **Магола Я. Я.**[1], бакалавр, **Гончар Ф. М.**[3], к. фіз.-мат. н., доцент ©

[1]*Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького, Україна*

[2]*Університет Казимира Великого в Бидгощі, Польща*

[3]*Націонильний університет «Львівська політехніка», Україна*

КВАЗІСТАТИЧНА ТЕРМОПРУЖНІСТЬ НЕОДНОРІДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН У СУЧАСНИХ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Запропоновано метод дослідження впливу заданих нестаціонарних температурних режимів навколишнього середовища на перебіг фізико-механічних процесів у неоднорідних пластинчастих та циліндричних структурах робочого *обладнання та устаткування механізмів і машин сучасних харчових виробництв. Для цього сформульовано відповідну квазістатичну задачу термопружності для неоднорідних структур, кусково-однорідних та складених тіл,або тіл у вигляді основних матриць, що містять чужорідні (наскрізні або ненаскрізні) включення різної форми та вигляду. Це нові задачі (переважно трьохвимірні) неоднорідних структур. Для цього при виводі відповідних співвідношень Дюгамеля-Неймана враховано, що весь комплекс фізико-механічних , теплофізичних та геометричних характеристик тіла неоднорідної структури, як єдиного цілого, (коефіцієнти Ляме, модуль Юнга та модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт лінійного розширення) є функціями циліндричних координат. Побудова таких моделей шаруватих і композитних середовищ,дозволяє на основі додаткових гіпотез і припущень враховувати як мікроструктуру матеріалу, так і визначити макроскопічні параметри – тобто розв'язувати задачі термомеханіки багатокомпонентних середовищ. Із врахуванням гіпотези незмінних нормалей, в роботі виведено вирази для компонентів тензора напружень та взаємозв'язаної системи диференціальних рівнянь термопружності другого порядку у частинних похідних для компонентів вектора переміщень.*

***Ключові слова**: компоненти вектора переміщень та тензора напружень, термопружний стан неоднорідних тіл, нестаціонарна теплопровідність, гіпотеза незмінних нормалей, співвідношення Дюгамеля–Неймана,температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль Юнга матеріалу та його модуль зсуву, коефіцієнти Ляме та Пуассона.*

УДК 664.02. (075.8).

Циж Б. Р.[1,2], д. т. н., профессор, **Варивода Ю. Ю.**[1]**,** к. т. н., доцент,
Волос В. О.[1], к. физ.-мат. н., доцент, **Чохань М. І.**[1], к. т. н., доцент,
Магола Я. Я.[1], бакалавр, **Гончар Ф. М.**[3], к. физ.-мат. н., доцент
[1]Львовський национальний университет ветеринарной медицины и биотехнологий имени С. З. Гжицкого, Украина
[2]Университет Казимира Великого в Быдгоще, Польща
[3]Национальний университет «Львовськая политехника», Украина

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН В СОВРЕМЕННЫХ ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

Предполагается метод исследования влияния заданых нестационарных температурных режимов внешней среды на физико–механические процессы в неоднородных пластинчатых и цилиндрических структурах для рабочего оборудования механизмов и машин современных пищевых производств. Для этого сформулировано соответствующую квазистатическую задачу термоупругости для неоднородных структур ,кусочно–однородных и составных тел.,также для тел, а также для тел в виде основных матриц, содержащих инородные (сквозные или несквозные) включения различной формы и вида. Такого рода задачи (преимущественно трехмерные) составляют новое направления термомеханики неоднородных структур. Для этого при выводе соответствующих соотношений Дюгамеля–Неймана учитывается, что целый комплекс теплофизических, физико–механических и геометрических характеристик тела неоднородной структуры, как единого целого (таких как коэффициенты Ляме, модуль Юнга и модуль сдвига,коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения) являются функциями цилиндрических координат. Построение таких моделей сложных и композитных сред позволяет, на основании некоторых добавочных гіпотез, учитывать как *микроструктуру материала, так и определять макроскопические параметры – тоесть решать задачи термомеханики многокомпонентных сред. С учетом гипотезы неизменных нормалей, в работе выведены соотношения для компонент тензора напряжений и взаимосвязанной системы дифференциальных уравнений термоупругости второго порядка в частных производных для компонент вектора перемещений.*

***Ключевые слова**: компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, термоупругое состояние тел неоднородной структуры, нестационарная теплопроводность, гипотеза неизменных нормалей, соотношения Дюгамеля–Неймана, температурный коэффициент линейного расширения, модуль Юнга материала и его модуль сдвига, коэффициенты Ляме и Пуассона.*

UDC 621.382

Tsizh B. R.[1,2], PhD, Professor, **Varyvoda Yu. Yu**.[1], PhD, Associate Professor, **Volos V. O .**[1], PhD, Associate Professor, **Chokhan M. I.**[1], PhD, Associate Professor, **Mahola Ya. Ya.**[1], bachelor, **Gonchar F. M**.[3], PhD, Associate Professor

[1] Lviv National University of Veterinary medicine and biotechnology S. Z. Gzhytsky, Ukraine

[2] Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Poland

[3] Lviv Polytechnic National University ,Ukraine

KVAZISTATYCHNYY THERMOELASTICITY INHOMOGENOUS ELEMENTS MACHINES AND MECHANISMS IN MODERN FOOD TECHNOLOGY

There was suggested the investigation method of the influence of the presented non-stationary environment temperature conditions on the course of physical and mechanical processes in heterogeneous plate and cylinder structures of the working equipment, hardware tools and machinery of modern food production. Following this aim there was formulated a corresponding quasistatic problem of thermoelasticity for inhomogeneous and piecewise homogeneous structures and compound bodies or bodies in the form of basic matrices containing foreign (the through or non-through) inclusions of various shapes and species. These are new problems (mainly three-dimensional) of thermomechanics inhomogeneous structures. Therefore on output of the corresponding Dyugamelya – Neumann's relations there is taken into account that the whole complex of physical-mechanical, thermalphysical and geometric characteristics of the inhomogeneous structure bodies as a single unit (Lame's coefficients, Young's modulus and shear modulus, Poisson's ratio and the temperature coefficient of linear expansion) are functions of cylindrical coordinates. On the basis of additional hypotheses and assumptions the construction of such layered and composite environment models allows to consider the microstructure of the material and to determine the macroscopic parameters; that is, to solve problems of thermomechanics multicomponent media. Taking into account the hypothesis of immutable rules in the work there were derived examples for the components of the stress tensor and interconnection of differential equations system of second order thermoelasticity in partial derivatives for displacements vector components.

***Key words:** the components of the displacement vector and the stress tensor, thermoelastic state bodies inhomogeneous structure, unsteady heat conduction, hypothesis of immutable norms of relations Dyugamelya- Neumann , the temperature coefficient of linear expansion , Young's modulus of the material and its shear modulus , Lame and the Poisson's coefficient.*

Вступ. Відомо [3], що знання теплофізичних, термопружних та фізико–механічних характеристик матеріалів необхідні для розрахунків стійкості і термоміцності неоднорідних робочих вузлів у технологічному обладнанні та устаткуванні машин і механізмів харчових виробництв.

Останнім часом вітчизняні харчові і переробні підприємства почали широко використовувати нові прогресивні технології, високопродуктивне обладнання, устаткування і передовий виробничий досвід. Одним із складових способів скорочення прямих та непрямих величезних втрат (40 – 60%) сировини в ланцюзі «виробництво – заготівля – зберігання – переробка–споживання» є технічне переоснащення, реконструкція та розширення діючих і будівництво нових підприємств на базі ресурсозберігаючих технологій і техніки, вдосконалення управління технологічними процесами та якістю продукції, освоєнню сучасних безвідходних технологій переробки [4].

Для дослідження складних багаторівневих систем у харчових виробництвах , таких, як технологічна лінія, цех, підприємство, об'єднання використовується системний підхід у встановленні показників сировини, варіантів її обробки, послідовності технологічних операцій, який обов'язково включає якісні математичні моделі таких систем [2].

Методи дослідження. Застосування методу трьохвимірного представлення термопружних характеристик для неоднорідних елементів робочих вузлів у механізмах і машинах у вигляді кусково – однорідних функцій циліндричних координат із збереженням гіпотези незмінних нормалей (як для випадку узагальненого плоского напруженого стану), приводить до «автоматичного» виконання умов ідеального теплового та механічного контактів на межі спряження чужорідних елементів. Встановлено достовірність отриманих результатів для просторових структур у їх основних часткових випадках: одновимірних та двовимірних задачах і квазістатичних задачах термопружності для тіл із наскрізними і не наскрізними чужорідними включеннями [5]. Запропоновано методи розділення взаємозв'язаних систем диференціальних рівнянь термопружності після застосування інтегральних перетворень: (безмежні інтегральні перетворення Фур'є для пластинчастих структур, перетворення Ханкеля першого та другого роду по радіальній координаті, Мелліна – по кутовій координаті та безмежного інтегрального перетворення Лапласа по часу). Таким чином взаємозв'язана система диференціальних рівнянь (в оригіналах) переходить у систему взаємозв'язаних алгебраїчних рівнянь (у полі зображень). Після розділення останньої та застосування обернених перетворень, а також використання таблиць для отримання оригіналів за допомогою спецфункцій [6], записано вирази шуканих функцій для компонент вектора переміщень та тензора напружень.

Результати досліджень. Застосування методу представлення фізико – механічних характеристик у вигляді узагальнених комплексів циліндричних координат дозволяє шукати розв'язання задач термопружності для всього неоднорідного тіла як єдиного цілого. Отримано співвідношення між деформаціями і переміщеннями, що віднесені до просторових циліндричних координат. Запропоновано використання гіпотези незмінних нормалей для трьохвимірних неоднорідних структур. Виведено взаємозв'язану систему диференціальних рівнянь термопружності другого порядку в операторному вигляді через компоненти переміщень із врахуванням об'ємної деформації, коефіцієнтів Ляме, модуля Юнга та Пуассона, температурних коефіцієнтів лінійного розширення окремих компонент, коефіцієнтів теплопровідності, питомих теплоємностей та густини джерел тепла. Записано вигляд співвідношень Дюгамеля–Неймана для трьохвимірного випадку початкових і граничних умов через задання відомих функцій часу, температур зовнішнього середовища з окремих частин поверхонь неоднорідних тіл; а також коефіцієнтів тепловіддачі з цих поверхонь у випадку нестаціонарної теплопровідності або ж у заданні компонент вектора переміщень, (чи тензора напружень) на межах складових неоднорідного тіла при дослідженні його термопружного стану.

Багато неоднорідних вузлів у механізмах і машинах харчових виробництв представляють собою неоднорідні пластинчасті і циліндричні структури, що працюють у робочих термо-пружних умовах, які можна досліджувати методами квазістатичної задачі термопружності [7]. Для цього виведено рівняння і співвідношення такої задачі для неоднорідних пластинчатих і шаруватих структур із представленням у просторових циліндричних координатах усіх фізико-механічних характеристик $p(r,\varphi,z)$. Для цього припускаємо, що початкова їх температура дорівнює t_0 ,а компонента напруження σ_{zz} є малою у порівнянні з компонентами σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$. Використовуючи співвідношення Дюгамеля–Неймана для неоднорідних твердих тіл [8] та відомі залежності між деформаціями і переміщеннями, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{rr} = 2\mu e_{rr} + \lambda e - \beta\theta, \\ &\sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu e_{\varphi\varphi} + \lambda e - \beta\theta, \\ &\sigma_{zz} = 2\mu e_{zz} + \lambda e - \beta\theta, \\ &\sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}, \qquad \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}, \qquad \sigma_{z\varphi} = 2\mu e_{z\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Де $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{zz}, e_{r\varphi} = e_{\varphi r}, e_{rz} = e_{zr}$ – компоненти тензора деформації . Самі ж співвідношення між деформаціями і переміщеннями, що віднесені до циліндричних координат, мають вигляд [1]:

$$\left.\begin{aligned} &e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right), \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, e_{r\varphi} = e_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\right], \\ &e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), e_{z\varphi} = e_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тут $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}, \sigma_{rz} = \sigma_{zr}, \sigma_{z\varphi} = \sigma_{\varphi z}$ – компоненти тензора напружень, $e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) + \frac{\partial w}{\partial z}, \beta = \alpha_t(3\lambda + 2\mu), \theta = t - t_0$ – приріст температури тіла, $\alpha_t\,(r,\varphi,z)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення, t_0 – початкова температура, при якій напруження в тілі відсутні. Коефіцієнти Ляме $\lambda(r,\varphi,z), \mu\,(r,\varphi,z)$ які у випадку ізотропного неоднорідного тіла являються функціями координат, виражаються через модуль Юнга $E(r,\varphi,z)$, коефіцієнт Пуассона $V(r,\varphi,z)$ і модуль зсуву $G(r,\varphi,z)$ наступним чином [9]:

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, \mu = G = \frac{E}{2(1+v)}$$

Самі ж рівняння без врахування масових сил запишуться [10]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+2\sigma_{r\varphi}\right)+\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\sigma_{rz}\right)+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тоді із третього рівняння (1) знаходимо:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_t\theta}{\lambda+2\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+v\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\right] \tag{4}$$

Підставивши вираз $\frac{\partial w}{\partial z}$ у перші два рівняння (1) і приєднавши до них четверте рівняння, представимо компоненти тензора напруження σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}=\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t\theta,\\ &\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\frac{u}{r}-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t\theta,\\ &\sigma_{r\varphi}=\mu\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-v\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Враховуючи гіпотезу незмінних нормалей [5]:

$$u=u_0-z\frac{\partial w(r,\varphi)}{\partial r},\qquad v=v_0-\frac{z}{r}\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial\varphi}, \tag{6}$$

Із рівнянь (5) знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{rr}=\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}\right)+\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{u_0}{r}-\frac{4(\lambda+\mu)\mu z}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t\theta,\\ &\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\varphi}+\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)+\frac{4(\lambda+\mu)\mu u_0}{\lambda+2\mu}\frac{u_0}{r}-\frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}z\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]-\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t\theta\\ &\sigma_{r\varphi}=\mu\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\varphi}-v_0\right)+\frac{\partial v_0}{\partial r}-2\frac{z}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Підставивши вираз для напружень (1) у рівняння рівноваги (3) і прийнявши до уваги співвідношення (2) ,приходимо до рівнянь в переміщеннях:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{2}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)+\\ &\quad+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{e}{\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial r}=0\\ &\Delta v+\frac{\lambda+\mu}{r\mu}\frac{\partial e}{\partial\varphi}-\frac{v}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{2}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)+\\ &\quad+\frac{2}{r\mu}+\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{u}{r}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)+\frac{e}{r\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}-\frac{1}{r\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial\varphi}=0\\ &\Delta\omega+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{1}{r\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)+\\ &\quad+\frac{2}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{e}{\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial z}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

де $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Якщо фізико–механічні характеристики – функції однієї координати r, замість рівнянь теплопровідності неоднорідного тіла у циліндричних координатах [9], отримаємо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda_t\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t\frac{\partial t}{\partial z}\right)=c\rho t-\omega_t \tag{9}$$

Та замість системи рівнянь (8) буде

$$\frac{1}{r\lambda_t}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{c\rho}{\lambda_t}t-\frac{w}{\lambda_t} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{2}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{e}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial r}=0,\\ &\Delta v+\frac{\lambda+\mu}{r\mu}\frac{\partial e}{\partial \varphi}-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{1}{r\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)-\frac{\beta}{r\mu}\frac{\partial t}{\partial \varphi}=0,\\ &\Delta w+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тут складові співвідношення (9) $\lambda(r,\varphi,z)$ $c(r,\varphi,z)$ $p(r,\varphi,z)$ – коефіцієнти теплопровідності, питома теплоємність і густина тіла відповідно, $w_t(r,\varphi,z,\tau)$– густина джерела тепла, тобто кількість тепла, яка виробляється в одиниці об'єма за одиницю часу джерелами, крапкою зверху позначено диференціювання за часом τ.

Накінець, у випадку одновимірної задачі буде [1]:

$$\frac{1}{r\lambda_t}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_t\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{c\rho}{\lambda_t}\dot{t}-\frac{w}{\lambda_t}, \tag{12}$$

$$\Delta u+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\beta\theta)}{\partial r}=0\,. \tag{13}$$

Співвідношення Дюгамеля–Неймана в цьому випадку записується таким чином :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr}&=2\mu\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta,\\ \sigma_{\varphi\varphi}&=2\mu\frac{u}{r}+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta,\\ \sigma_{zz}&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)-\beta\theta. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для повного формулювання задачі, крім диференціальних рівнянь (8), (9), необхідно вказати початкові і граничні умови [5]. Початкова умова визначається заданням закону розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу, тобто:

$$t(r,\varphi,z,\tau)=t_0(r,\varphi,z) \text{ при } \tau=0. \tag{15}$$

Гранична умова може бути задана однією із наступних основних граничних умов [9] :

1.Гранична умова першого роду, яка полягає у заданні розподілу температури по поверхні тіла в будь–який момент часу, тобто $t(f,\tau)=t_c(f,\tau)$ де точка p належить поверхні S, що обмежує тіло,t_c (p,τ)–задана функція.

2.Гранична умова другого роду, яка полягає у заданні густини теплового по току для будь-якої поверхні тіла як функції часу, тобто:

$$\lambda_t\frac{\partial t}{\partial n}(p,\tau)=q(p,\tau) \tag{16}$$

де n – зовнішня нормаль до поверхні S в точці p.

3.Гранична умова третього роду (закон Ньютона) або гранична умова конвективного теплообміну, яка вимагає ,щоб потік тепла через граничну поверхню був пропорційний різниці температури поверхні тіла і відомою температурою t_c навколишнього середовища, тобто:

$$\lambda_t\frac{\partial t}{\partial n}=\alpha_s(n,s)[t_c-t(p,\tau)] \tag{17}$$

де α_S(n,s)– коефіцієнт тепловіддачі з поверхні S.

Відмітимо, що при визначенні механічного стану тіла на його границі S можуть бути задані вектор переміщень

$$\bar{u}=\bar{u}_0(p,\tau) \tag{18}$$

вектор напружень Q, тобто:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr}n_r + \sigma_{r\varphi}n_\varphi + \sigma_{rz}n_z = Q_r, \\ \sigma_{r\varphi}n_r + \sigma_{\varphi\varphi}n_\varphi + \sigma_{\varphi z}n_z = Q_\varphi, \\ \sigma_{rz}n_r + \sigma_{\varphi z}n_\varphi + \sigma_{zz}n_z = Q_r. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

де n_r ,n_φ , n_z –напрямні косинуси зовнішньої нормалі до граничної поверхні *S* тіла; Q_r, Q_φ, Q_z– компоненти заданих поверхневих сил в напрямах r,φ,z відповідно.

Крім того, на деякій частині S_0 поверхні *S* може бути заданий вектор переміщень, а на решті її частині $S–S_0$ –вектор напружень.

Висновки. Отримано повне формулювання квазістатичної задачі термопружності для пластинчастих і циліндричних неоднорідних просторових структур, що моделюють робочі вузли машин і механізмів сучасних харчових технологій. Із застосуванням додаткових гіпотез, та співвідношень Дюгамеля–Неймана, записано взаємозв'язані системи диференціальних рівнянь термопружності в переміщеннях і компонентах тензорів напружень. Ці системи дають можливість враховувати вплив цілого комплексу теплофізичних, фізико–механічних і термопружних характеристик на вивчення термопружного стану таких неоднорідних твердих тіл та одночасного дослідження виконання граничних і початкових умов поставленої задачі квазістатичної термопружності. Показано [11], що у сукупності з методами безмежних і скінченних інтегральних перетворень (Фур'є, Ханкеля, Мелліна, та Лапласа) по відповідних циліндричних координатах і часу, допускається отримання розв'язків задач у полі зображень (через системи алгебраїчних рівнянь), а потім через обернений перехід–повернення у поле оригіналів. Сформульовано ряд часткових випадків відповідних одно– та двовимірних задач.

Література

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. – Термоупругость тел. неоднородной структуры.М.,1984.
2. Панфилов В. А. Технологические линии пищевых производств/Теория технологического процесса.– М.: Агропромиздат,1993.–368 с.
3. В. Я. Плахотін, І. С. Тюрікова, Г. П. Хомич. Теоретичні основи технологій харчових виробництв. Київ,2006,634 с.
4. Технология пищевых промзводств/ Л. П. Ковальская, И. С. Шуб, Г. М. Мелькина и др.; Под ред.Л. П. Ковальской – М.: Колос,1997.–752 с.
5. Подстригач Я. С. , Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов.–Киев: Наук.думка,1981–342 с.
6. Снеддон И. Пореобразования Фурье–М.: Изд–во иностранной литературы,1985.– 668 с.
7. Стабников В. Н. Общая технология пищевых продуктов: Учебное пособие для вузов. В. Н.Стабников, Н. В. Остапчук–К.: Вища школа,1980.– 303 с.
8. Болотин В. В.. Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.–М.: Машиностроение , 1980.– 376 с.
9. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев, 1972.
10. Калыняк Н. И., Гладыш Р. В., Волос В. А., Каинский И. Е. // Проблемы прочности, 1990, № 10,с. 88–93.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике –М.: Наука,1979.–320 с.

Стаття надійшла до редакції 11.09.2015