PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: ORIGEM E CARACTERÍSTICAS

ADVANCED MATHEMATICAL THINKING: ORIGIN AND CHARACTERISTICS

Daniel Brandão Menezes[1]

Universidade Federal do Ceará – UFC

Hermínio Borges Neto[2]

Universidade Federal do Ceará – UFC

Resumo
O presente estudo representa o começo de um trabalho acadêmico que se preocupa em inserir o aluno do curso de graduação em matemática em um processo de pensar matematicamente, e não somente em fornecer a produção final do pensamento matemático. Para que isso se torne realidade, acredita-se que o aprofundamento na Teoria do Pensamento Matemático Avançado possa fornecer elementos significativos que contribuam para a melhoria do ensino de disciplinas em um curso de nível superior. Essa perspectiva representa todo o pensamento matemático dos anos finais do ensino médio até a matemática axiomática formal baseada em definição, prova e outras características. Portanto, a partir disso, objetiva-se neste artigo caracterizar o Pensamento Matemático Avançado e ampliar as discussões sobre esse tema em âmbito estadual, ou seja, no estado do Ceará, haja vista as reduzidas pesquisas desenvolvidas em contexto acadêmico, das quais algumas integram atualmente o Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Ceará. A metodologia utilizada foi uma revisão de literatura de obras científicas que discutem essa teoria e que permitem a maturação dessa temática nas discussões entre professores da área da educação e das ciências exatas. Dessa forma, esta pesquisa propicia mais uma fonte literária para alunos de graduação, de pós-graduação e professores que desejam enveredar seus estudos para a área da Educação Matemática com foco no nível superior e maximizar o rendimento do aprendizado de disciplinas que representam maior dificuldade nos cursos de graduação em matemática e/ou engenharia a partir da compreensão de determinados fatores explicados pelo Pensamento Matemático Avançado.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado; Matemática; Educação Matemática.

Abstract
The present study represents the beginning of an academic work that is concerned with introducing the student of the undergraduate course in mathematics into a process of

[1] Email: brandaomenezes@hotmail.com
[2] Email: herminio@multimeios.ufc.br

thinking mathematically, and not only in providing the final output of mathematical thinking. For this to become a reality, it is believed that deepening the Advanced Mathematical Thinking Theory can provide meaningful elements that contribute to improving the teaching of subjects in a higher education course. This perspective represents all mathematical thinking from the final years of high school to formal axiomatic mathematics based on definition, proof, and other characteristics. Therefore, this article aims to characterize Advanced Mathematical Thinking and expand the discussions on this topic at the state level, that is, in the state of Ceará, given the small research developed in the academic context, some of which are currently integrated The Graduate Program in Education of the Federal University of Ceará. The methodology used was a literature review of scientific works that discuss this theory and allow the maturation of this theme in the discussions between teachers in the area of education and exact sciences. Thus, this research provides a further literary source for undergraduate and graduate students and teachers who wish to study their studies in the area of Mathematics Education with a focus on the higher level and to maximize the learning achievement of subjects that represent greater difficulty in Undergraduate courses in mathematics and / or engineering from the understanding of certain factors explained by Advanced Mathematical Thinking.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking; Mathematics; Mathematics Education.

Introdução

Muito se discute, em Educação Matemática, quais teorias poderiam explicar e, até mesmo, superar o déficit de aprendizado com as disciplinas matemáticas nos cursos de nível superior; porém, advoga-se que não há um único lenitivo e sim um conjunto de medidas que podem ser estudadas e adotadas para que o aprendizado matemático seja alcançado plenamente.

Diante disso, o intuito deste estudo é caracterizar uma das teorias que pode se comportar como um suporte ao professor, a saber, o Pensamento Matemático Avançado, originado na década de 1980, no decorrer do evento *The International Group for the PME (Psychology of Mathmatics Education)*, que objetivou produzir uma obra com foco no Pensamento Matemático Avançado e que teve como consequência a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*. (IGLIORI; ALMEIDA, 2013).

Os pesquisadores, durante algumas décadas, realizavam trabalhos nos quais estudavam fenômenos acontecidos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática do ensino superior, em especial os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Esse grupo propôs centralizar suas investigações no campo da psicologia cognitiva inserida na Educação Matemática e identificar os elementos específicos do Pensamento Matemático

Avançado que constitui o conhecimento matemático em nível superior. (FERREIRA; PIERMATEI FILHO, 2013).

Na literatura, encontram-se autores que trabalham com o sentido do Pensamento Matemático Avançado caracterizando vários aspectos de sua natureza, dentre os pesquisadores podem ser citados Dreyfus (1991), Tall (1991), Sfard (1991), Gray *et al.* (1999), Dubinsky (1991), Domingos (2003), Costa (2002) e outros.

Os autores Dreyfus (1991) e Tall (1991) são unânimes em afirmar que o Pensamento Matemático Avançado (PMA) permeia a aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos terminais do ensino secundário e ao longo do ensino superior. Dreyfus (1991) faz uma distinção muito tênue entre PMA e Pensamento Matemático Elementar (PME), considerando ser possível pensar em tópicos matemáticos avançados em uma forma elementar e poder existir pensamento avançado sobre tópicos elementares. Um exemplo dessa situação ocorre em exames de seleções militares em que se requer uma maturidade matemática mais arrojada, porém com conteúdo ainda do nível médio.

Dreyfus (2002) caracteriza Pensamento Matemático Avançado como uma série de processos de representação, visualização, generalização e outros, com o intuito de classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Dentre esses, serão descritos os conceitos da abstração e generalização.

Segundo Tall (2002), esse pensamento matemático já é trabalhado, porém em níveis elementares, não sendo aprofundado ou sendo abordado sem muita clareza, o que ocasiona uma transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado no momento em que descreve para definir e convence para provar, utilizando uma maneira lógica baseada em tais definições. Essa tênue transformação do elementar para o avançado pode também não estar clara para o docente mesmo com a experiência de muitos anos em sala de aula. Tall (2002) ainda afirma que esse pensamento envolve um ciclo de atividades a considerar desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a revisão de literatura, que, segundo Moreira (2004), é um texto que reúne e discute informações produzidas na área de determinado estudo e propicia a atualização de obras publicadas, bem como o acompanhamento das análises realizadas.

Neste artigo, serão tratadas as características de: conceito imagem e conceito definição; generalização e abstração; intuição e rigor; prova e síntese e análise.

Conceito imagem e conceito definição

Segundo Tall (2002, p.6), o termo *conceito imagem* é usado para descrever a total estrutura cognitiva que é associada ao conceito, incluindo figuras, processos e propriedades associadas. Diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do conceito imagem, desenvolvendo nele uma maneira a qual não estabelece uma coerência com o todo.

O *conceito definição* apresenta-se como a maneira pela qual as palavras foram utilizadas para definir aquele conceito. Ou seja, pelo conceito definição, um estudante pode aprender naturalmente ou significativamente, de forma relacionada ao conceito ou também como uma reconstrução de uma definição.

Tall (2012, p. 17) afirma que a dificuldade na transição da matemática pré-formal para a compreensão dos processos matemáticos mais formais requer a necessidade de ajudar os estudantes a obter insights. Contudo, ao delinear-se uma sequência lógica para o ensino de determinada ideia simplificando o trabalho pode, na verdade, dificultar o aprendizado, uma vez que as partes devem ser vistas também como um todo. Quando o estudante encontra cada parte do quebra cabeça, ele forma um particular conceito imagem do contexto no qual esteja a variação da ideia formal.

Dois outros conceitos importantes para compreender o Pensamento Matemático Avançado são *representação* e *abstração*. A representação, além de ter forte influência no aprendizado matemático, pode interferir na interação aluno e professor quando os dois possuem representações mentais diferentes sobre determinado assunto. Uma boa compreensão matemática significa uma rica representação de conceitos, exemplos, contraexemplos, aplicações e outros (DREYFUS, 2002). Essa representação pode não ser consistente nos alunos, uma vez que formular o problema de outra maneira pode lhes tirar a capacidade de resolução.

A representação faz parte também do pensamento matemático elementar, enquanto a abstração faz parte dos processos envolvidos no Pensamento Matemático

Avançado, ou seja, o fato de o aluno conseguir realizar abstrações de situações matemáticas revela, então, que alcançou um nível avançado de pensamento matemático.

Dreyfus (2002) conceitua abstração com seus pré-requisitos: *generalização* e *síntese*. A generalização induz do particular, identificando aspectos comuns e expandindo domínio de validade; enquanto a síntese compõe partes que formam um inteiro, ou seja, formam uma entidade válida de conhecimento.

Aliado a esse processo de síntese, é preciso que o professor compreenda que o aluno nem sempre tem a habilidade de síntese e que possua o objetivo de criar possibilidades para que isso ocorra.

De acordo com Janzen (2011, p. 21):

> Existe também uma necessidade cognitiva em paralelo: o pensamento de muitos matemáticos e alunos de matemática melhora se forem capazes de se colocarem mentalmente em uma representação particular, uma representação visual. Novamente aparece a visualização que tem, portanto, sua contribuição nos processos que envolvem o pensar matematicamente.

No momento da criação de possibilidades por parte dos alunos, faz-se importante a não interferência do docente, sendo atuante apenas caso seja interpelado, quando motivará os discentes por meio de perguntas, objetivando melhores representações visuais para que, em conjunto com o conhecimento prévio, possam estabelecer nexo de causa entre o que foi instigado e o que já se sabe.

Generalização e abstração

Os termos *generalização* e *abstração* são usados na matemática para denotar processos nos quais os conceitos são vistos em um contexto mais amplo como também o produto desses processos.

Como exemplo, pode-se citar a generalização para a solução de distância entre pontos em uma dimensão e em duas dimensões e, a partir disso, abstrair desse contexto a noção de um vetor espaço.

A abstração é um objeto mental diferente definido por um conjunto de axiomas. Durante esse processo, existe um conflito entre as propriedades dos exemplos os quais os aprendizes sabem e as propriedades dos novos conceitos abstratos, os quais podem ser deduzidos da definição. Um período de reconstrução e consequente confusão é inevitável.

A generalização também pode ocorrer quando se quer uma fórmula geral para o cálculo de áreas de regiões não triangularizáveis. O professor inicia com a área de regiões formadas por gráfico de funções de primeiro grau em determinado intervalo formando quadrados, triângulos e trapézios; porém, em seguida, tem o objetivo de calcular um trecho da área de uma região limitada por uma parábola em um intervalo incutindo uma generalização da Soma de Riemann para o cálculo de áreas.

Intuição e rigor

Os matemáticos geralmente não demonstram interseção entre os conceitos de *intuição* e *rigor*, porém uma explicação intuitiva requer necessariamente extremo rigor. Tall (2002, p.14) afirma que a intuição é resultado do conceito imagem do indivíduo, assim, quanto mais educado ele é no pensamento lógico, mais conceitos imagens irão ressoar respostas lógicas.

Alguns autores classificam os mais variados tipos de intuição, entre eles "Poincaré" e "Fischbein"[3], pois advogam que, mesmo sem uma atividade matemática naturalmente aguçada, é possível adquirir determinado conhecimento específico com uma dose de esforço e estudos. (TALL, 2002)

O desenvolvimento de uma intuição lógica refinada deveria ser o maior objetivo de uma educação matemática mais avançada. Portanto, a natureza do PMA está intimamente relacionada com os processos cognitivos que dão suporte ao conhecimento matemático. Será visto a seguir como esses processos podem interferir na produção da prova matemática.

A prova sob o ponto de vista do Pensamento Matemático Avançado

Alguns docentes pensam que apenas na disciplina de Análise Matemática há a necessidade de entender meticulosamente uma demonstração, porém esse pensamento está errôneo, pois as disciplinas matemáticas permeiam uma série de provas das quais os alunos necessitam entender seus mecanismos. Por exemplo, na Teoria dos Números,

[3] Fischbein realiza a divisão entre primária (aquela desenvolvida pela pessoa naturalmente, independentemente de qualquer grau de instrução) e secundária (a desenvolvida como resultado de treinamento intelectual). (Tall, 2002)

quando se estuda divisibilidade, há a necessidade de não apenas entender como também treinar a prova da identidade de Bezout[4] para que se possa avançar no conteúdo.

E esse é um dos momentos mais delicados quando se estuda uma matemática avançada: a demonstração em que ocorre um profundo rigor. Isso provoca grandes dificuldades aos alunos até eles conseguirem familiaridade com esta maneira de apresentar os conceitos matemáticos.

Tall (1991) identifica, como última fase do PMA, a prova matemática que reporta à necessidade de um trabalho árduo de estímulo à atividade mental, para, então, relaxar, permitindo o processo de transporte do subconsciente. Esse processo desenvolve-se à proporção em que as definições matemáticas vão se tornando complexas.

De acordo com Domingos (2003, p. 77),

> A demonstração ao nível formal consiste, essencialmente, em rearranjar o conteúdo de um dado conjunto de afirmações envolvendo quantificadores para dar outro conjunto de afirmações com quantificadores. Estas afirmações estão relacionadas com definições de conceitos matemáticos formais onde certas propriedades dos conceitos são dadas e outras são deduzidas.

Muitos conceitos envolvidos em uma demonstração podem ser encontrados em um pensamento elementar, porém escolher o caminho a ser percorrido é que pode ser um complicador para o aluno que ainda não possui certa experiência matemática. O professor do nível básico já não consegue apenas mostrar uma fórmula, por exemplo, o seno da soma de arcos na trigonometria, que é provada por meio de uma construção geométrica e alguns argumentos algébricos, pois o processo cognitivo envolvido na demonstração já não é elementar, uma vez que possui características do Pensamento Matemático Avançado, como rigor e intuição.

Síntese e análise

A síntese começa com o ato consciente de juntar as ideias na fase inicial seguindo uma atividade mais intuitiva, na qual o subconsciente atua de forma recíproca entre o conceito imagem até uma força relacionar o conceito à consciência, ou seja, há a

[4] A identidade de Bezout afirma que dados “*b*” e “*c*” inteiros não ambos nulos, e seja d o seu máximo divisor comum. Então existem inteiros x e y tais que$d = bx + cy$. (Queiró, 2002)

DOI: 10.30938/bocehm.v4i10.45

necessidade de juntar com o intuito de formar um bloco inteiro. Esse inteiro possui uma personalidade matemática quando as partes estão relacionadas em uma única entidade.

Pode-se exemplificar a síntese no conteúdo de limites quando o professor interpela o aluno no tocante aos limites laterais, ou seja, o conceito de limites já foi dado em aulas anteriores, então resta saber se o discente estará apto a unir as ideias outrora mostradas para intuitivamente, com o conceito imagem, realizar a integração desse conceito à consciência.

Na análise, a atividade da consciência é mais lógica e organiza as novas ideias dentro de uma forma lógica, refinando e dando precisão às deduções. Neste caso, a ordem lógica para que se possa entender limites laterais segue rigorosamente os conceitos iniciais sobre limites de existência e unicidade.

Conclusão

No desenvolvimento do levantamento bibliográfico, notou-se que a generalização e a síntese são dois processos que aliados à representação, constituem o alicerce para o desenvolvimento da abstração, uma das precípuas finalidades do PMA. Essas ferramentas são estudadas nos diversos ramos da Educação Matemática daí sua relevância em ser estudada.

Ficou evidenciado no texto que o fenômeno da atividade matemática é englobado pelo Pensamento Matemático Avançado, contemplando desde a apresentação da situação, passando pelo levantamento de ideias e estratégias até encontrar a formalização por meio de uma representação matemática formal. Essas ideias, quando estudadas pelos docentes da área de matemática, podem sugerir uma mudança de comportamento no próprio ato de ensinar, enquanto para os alunos, no modo de aprender.

Diante disso, um estudante sem o aporte de um professor que possua um certo domínio nos estudos sobre algumas características do Pensamento Matemático Avançado pode não estabelecer inicialmente uma abordagem formal, ou seja, um fenômeno significativo, que pode revelar falta de conhecimento sobre o assunto ou a experiência do aluno. Para superar isso, Tall (1991) afirma necessitar de um início com conjecturas e discussões com o intuito de gerar significado e refletir sobre definições formais e de construir o objeto abstrato, cujas propriedades são somente aquelas que podem ser deduzidas de uma definição.

Esse momento de transição, em que o aluno se depara com uma nova estrutura de conhecimento, pode causar uma simples expansão do conhecimento cognitivo ou, até mesmo, em casos em que há conflitos cognitivos, pode requerer uma reconstrução mental.

Por fim, entendemos que o propósito de gerar um modelo matemático não significa apenas reproduzir seu algoritmo formal, porém deve haver um processo de reflexão em que o aluno possa ser desequilibrado, propiciando a reconstrução do objeto de conhecimento.

Referências bibliográficas

COSTA, Conceição. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: visualização. *In:* ENCONTRO DA SEÇÃO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO, 11, 2002, Coimbra, Portugal. **Anais...** Coimbra, Portugal, 2002, p. 257-273.

DOMINGOS, António. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a matemática no início do superior. 2003. Trabalho não publicado. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. *In***:** TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 25-41.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer. Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. **Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics.** Educational Studies in Mathematics, 1999. 1991. p. 38, 1-3, 111-133.

FERREIRA, Juliano Cezar; PIERMATEI FILHO, Orestes. Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: imagem de conceito e definição de conceito. *In:* CIBEM, 7., 2013, Montivideo, **Actas…** Montevideo, 2013. p. 1874-1881. Disponível em: < www.ufjf.br/mestradoedumat/files/.../Produto-educacional-Juliano-Cezar-Ferreira.pdf>. Acesso em: 11/12/2016.

IGLIORI, Sonia Cristina B.; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Educação matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617/pdf>. Acesso em:11/12/2016.

JANZEN, Elen Andrea. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de**

geometria dinâmica. 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

MOREIRA, Walter. Revisão de literatura e desenvolvimento científico: conceitos e estratégias para confecção. **Janus**, Lorena, v.1, n.1, p. 19-30, 2004.Disponível em: < http://publicacoes.fatea.br/index.php/janus/article/view/1/1>. Acesso em: 11/12/2016.

QUEIRÓ, João Filipe. **Teoria dos Números.** Departamento de Matemática, FCTUC, Coimbra, Universidade de Coimbra, 2002.

SFARD, Anna. **On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin.** Educational Studies in Mathematics,1991.p. 22, 1-36.

TALL, David Orme. Differing modes of proof and belief in Mathematics. *In:* **INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS: UNDERSTANDING PROVING AND PROVING TO UNDERSTAND**, 2002, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, 2002. p. 91–107. Disponível em: < https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002k-proof-3worlds.pdf>. Acesso em: 11/12/2016.

______. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *In*: TALL. D. O. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking.** Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991, p. ?-?.

DOI: 10.30938/bocehm.v4i10.45