正四角錐台に外接する立方体

内　藤　　　淳

The cube circumscribed about the regular square truncated pyramid

Jun Naitō

Abstract

The mathematician Sadasuke Fujita in the Edo era published in 1781 the mathematical book, "Seiyō-Sampō". In this book there is a problem concerned with the cube circumscribed about the regular square truncated pyramid. He gave its solution in his manuscript, "The solution of Seiyō-Sampō". But I discovered two leaps in his argument, so I tried to bridge them logically in this paper.

キーワード：和算，ベクトル，２次方程式の解
Key words : Japanese mathematics in the Edo era, vector, solution of a quadratic equation

Received Apr. 30, 1996

1．は　じ　め　に

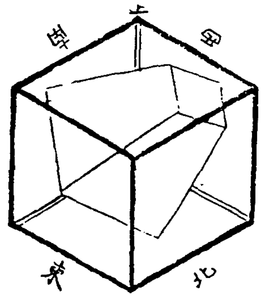
江戸時代に日本で発達した数学を和算といい，当時の数学者を和算家と呼んでいる。和算家は関孝和をはじめとして大勢いるが，和算家の伝記および業績を集大成した『明治前日本数学史』[1]には約1,640人が記載されている。これらの和算家の業績や和算家とは云い難いが当時の数学愛好者が残した業績をわれわれ和算研究者は現代数学を用いて検討しているが，これらの業績は正しいことを確認している。しかし，当然のことではあるが，希には不十分な推論をした業績もある。

藤田定資（さだすけ）[2]は天明元年（1781）に刊行した『精要算法』[3]に正四角錐台に外接す

る立方体に関する問題を提出し，正しい答えと術をつけている。この本に解法はないが，彼が書いた写本『精要算法解』[4]（年紀なし）にあるこの問題の解義には，現代数学の立場から見ると直観に頼っていると思われる所が２箇所ある。この論文でその点を指摘し，推論によって藤田定資の結論が正しいことを示す。

2．『精要算法』の問題

『精要算法』下巻十八丁裏～十九丁表に次のような問題とその答えおよび術がある[3]。

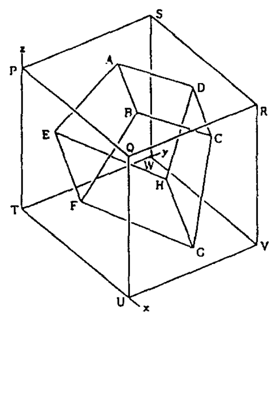


今有三如レ圖立方内容二方臺一（立方上平面交二方臺上方面廉一立方下平面交二方臺下方面廉一立方西北平面交二方臺上隅一立方東南平面交二方臺下隅一）只云方臺上下方和（三百四十一寸）高（六百八十二寸）問二立方面幾何一

答曰立方面五百六十八寸○○○（有奇）

術曰置二云和一乘二斜率一（寄レ位）置レ高自二乘之一四レ之加二云和冪一（名レ天）三レ之内減二寄レ位與レ高相乘（八段）一餘（名レ地）置レ天乘レ寄レ位以二高（二段）一除レ之内減二云和冪（二段）一餘（名レ人）置二云和冪一四レ之以減レ天餘乘レ地加二人冪一得數平方開レ之加レ人得數乘レ高以レ地除レ之得二立方面一合レ問

上の問題を現代数学の立場で表現すると次のようになる。



右図は立方体 PQRS-TUVW が正四角錐台 ABCD-EFGH に外接していることを示す。ここで，２辺 AB，HG はそれぞれ２平面 PQRS，TUVW 上にあり，２点C，Dはそれぞれ２平面 QUVR，RVWS 上にあり，また２点E，Fはそれぞれ２平面 SWTP，PTUQ 上にある。いま，２辺 ABと EF との長さの和

が341寸で，正四角錐台の高さが682寸であるとするならば，立方体の１辺の長さは何程か。

答え　立方体の１辺の長さ　568寸000（以下切り捨て）

術を現代数学の立場で表現すると次のようになる。

２辺 AB と EF の長さの和を c，正四角錐台の高さを h，求める立方体の１辺の長さを t とおく。

(云和)・(斜率)$=\sqrt{2}\,c$ ……位

4(高)^2+(云和)^2$=4h^2+c^2$ ……天

3(天)−8(位)・(高)$=3(4h^2+c^2)-8\sqrt{2}\,ch$ ……地

(天)・(位)÷{2(高)}−2(云和)^2$=\sqrt{2}\,c(4h^2+c^2)/2h-2c^2$ ……人

[√{(天)−4(云和)²}・(地)+(人)² +(人)]・(高)÷(地)

$$=\{\sqrt{2}\,c(4h^2-2\sqrt{2}\,hc+c^2)+\sqrt{2(4h^2-c^2)^2(\sqrt{2}\,h-c)(3\sqrt{2}\,h-c)}\,\}$$
$$/2(12h^2-8\sqrt{2}\,hc+3c^2)$$

……立方面(t)

さて，藤田定資は彼が著わした『精要算法解』[4]（写本，年紀なし）に上の問題の解義を書いているが，理由を付けないで

(i)　２線分 DC と SR の交角は$\pi/4$，

(ii)　(i)のもとで t についての方程式

$$(12h^2-8\sqrt{2}\,hc+3c^2)t^2-\sqrt{2}\,c(4h^2-2\sqrt{2}\,hc+c^2)t-h^2(4h^2-3c^2)=0$$

を正しく導いているが，解の複号±は上のように＋，

としている。

次節以降において，この２点の理由付けをし，併せて(i)以外の場合がないことを示す。

3．座　　　標

２線分 DC と SR との交角を$\theta(0<\theta<\pi/2)$とし，２平面 EFGH と TUVW との交角を $\varphi(0<\varphi<\pi/2)$とする。T を座標の原点，３直線 TU，TW，TP をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸とし，この向きを正の向きとする。ここで，正方形 ABCD の１辺の長さを a，正方形 EFGH の１辺の長さをb とする。立方体の１辺の長さを t とおいたから，正四角錐

台の各頂点の座標は次のようである。

$A(t-a\cos\theta-a\cos\varphi\sin\theta,\ t-a\cos\varphi\cos\theta,\ t)$,

$B(t-a\cos\varphi\sin\theta,\ t-a\cos\varphi\cos\theta-a\sin\theta,\ t)$, $C(t,\ t-a\sin\theta,\ t-a\sin\varphi)$,

$D(t-a\cos\theta,\ t,\ t-a\sin\varphi)$, $E(0,\ b\sin\theta,\ b\sin\varphi)$, $F(b\cos\theta,\ 0,\ b\sin\varphi)$,

$G(b\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta,\ b\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$,　$H(b\cos\varphi\sin\theta,\ b\sin\theta+b\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$

2線分 AC と EG の中点をそれぞれ K と L とすると，K, L の各座標は次のようである。

$K((2t-a\cos\theta-a\cos\varphi\sin\theta)/2,\ (2t-a\sin\theta-a\cos\varphi\cos\theta)/2,\ (2t-a\sin\varphi)/2)$,

$L((b\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta)/2,\ (b\sin\theta+b\cos\varphi\cos\theta)/2,\ (b\sin\varphi)/2)$

4. c, h, t, φの関係

直線 KL と2平面 PQRS および TUVW との交点をそれぞれ M および N とすると

$$KM=(a\tan\varphi)/2,\quad LN=(b\tan\varphi)/2,\quad t=MN\cos\varphi$$

であるから

$$t=\left(\frac{1}{2}a\tan\varphi+h+\frac{1}{2}b\tan\varphi\right)\cos\varphi$$

$a+b=c$ であったから

$$t=\frac{1}{2}c\sin\varphi+h\cos\varphi \quad \cdots\cdots (1)$$

5. c, t, θ, φの関係

2つのベクトル $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{LK}$ は直交するから，それらの内積は0である。よって

$$\frac{1}{2}(-b\cos\varphi\sin\theta)\{2t-(a+b)\cos\theta-(a+b)\cos\varphi\sin\theta\}$$

$$+\frac{1}{2}(-b\cos\varphi\cos\theta)\{2t-(a+b)\sin\theta-(a+b)\cos\varphi\cos\theta\}$$

$$+\frac{1}{2}b\sin\varphi\{2t-(a+b)\sin\varphi\}=0$$

整理すると

$$2t\ \{(\sin\theta+\cos\theta)\cos\varphi-\sin\varphi\}=c\,(2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\ \cdots\cdots(2)$$

6．c，t，θの関係

2つのベクトル $\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{LK}$ は直交するから，これらの内積は0である。よって

$$\frac{1}{2}(b\cos\theta)\ \{2t-(a+b)\cos\theta-(a+b)\cos\varphi\sin\theta\}$$

$$+\frac{1}{2}(-b\sin\theta)\ \{2t-(a+b)\sin\theta-(a+b)\cos\varphi\cos\theta\}=0$$

整理すると

$$(\sin\theta-\cos\theta)\ \{2t-c(\sin\theta+\cos\theta)\}=0$$

従って

$\sin\theta-\cos\theta=0$　または　$2t-c(\sin\theta+\cos\theta)=0$

7．$\sin\theta-\cos\theta=0$ のとき

(i) c，h の関係(1)

$\sin\theta-\cos\theta=0$ において $0<\theta<\pi/2$ であるから $\theta=\pi/4$ である。このとき(2)は

$$2t(\sqrt{2}\cos\varphi-\sin\varphi)=c(\cos\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\ \cdots\cdots(3)$$

となる。

さて，(1) において t は a，b それぞれには無関係であるから $a=0$，$b=c$ とおく。5点A，B，C，D，Kの座標はすべて $(t,\ t,\ t)$ となるから，これらの5点は点Rと一致する。また，5点E，F，G，H，Lの座標はそれぞれ

$(0,\ c/\sqrt{2},\ c\sin\varphi)$，$(c/\sqrt{2},\ 0,\ c\sin\varphi)$，$(c(1+\cos\varphi)/\sqrt{2},\ (c\cos\varphi)/\sqrt{2},\ 0)$，$((c\cos\varphi)/\sqrt{2},\ c(1+\cos\varphi)/\sqrt{2},\ 0)$，$(c(1+\cos\varphi)/2\sqrt{2},\ c(1+\cos\varphi)/2\sqrt{2},\ (c\sin\varphi)/2)$

となる。これらを座標とする点をそれぞれ E′，F′，G′，H′，L′とする。

2線分 E′F′ と G′H′ の中点をそれぞれ I′ と J′ とすると，それらの座標は

$I'(c/2\sqrt{2},\ c/2\sqrt{2},\ c\sin\varphi)$，$J'(c(1+2\cos\varphi)/2\sqrt{2},\ c(1+2\cos\varphi)/2\sqrt{2},\ 0)$

である。

3点 L′，I′，J′ において，各点の x 座標と y 座標とは等しいから，これらの3点は平面

PTVR 上にある。従って，$\triangle RI'J'$ は長方形 PTVR の内部にあるから $\angle I'RJ' < \pi/2$。ところで，(3)を考慮すると $RI' = RJ'$ を確かめることができるから$\triangle RI'J'$ は二等辺三角形である。従って，$\angle RI'J' > \pi/4$。$RL' = h$，$I'L' = c/2$ であるから $2h/c > 1$。

(ii)　c，h の関係(2)

(1)と(3)から t を消去する。

$$2\left(\frac{1}{2}c\sin\varphi + h\cos\varphi\right)(\sqrt{2}\cos\varphi - \sin\varphi) = c(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$2h(\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi) = c(\sqrt{2}\sin\varphi - \cos\varphi - 1) \quad \cdots\cdots(4)$$

ここで，$\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi = 0$ を満たす φ を φ_1 $(0 < \varphi_1 < \pi/2)$ とおくと $\sin\varphi_1 = \sqrt{2}/\sqrt{3}$，$\cos\varphi_1 = 1/\sqrt{3}$ である。また，$\sqrt{2}\sin\varphi - \cos\varphi - 1 = 0$ を満す φ を φ_2 $(0 < \varphi_2 < \pi/2)$ とおくと $\sin\varphi_2 = 2\sqrt{2}/3$，$\cos\varphi_2 = 1/3$ である。

次に

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi - \cos\varphi - 1}{\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi} \quad (\varphi \neq \varphi_1)$$

とおく。$0 < \varphi < \pi/2$ であるから

$$f'(\varphi) = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi + \cos\varphi - 1}{(\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi)^2} = \frac{\{\sqrt{2} - \tan(\varphi/2)\}\sin\varphi}{(\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi)^2} > 0 \quad (\varphi \neq \varphi_1)$$

従って，$f(\varphi)$ は $0 \leqq \varphi < \varphi_1$，$\varphi_1 < \varphi \leqq \pi/2$ で単調増加関数である。$\varphi_1 < \varphi_2$ であるから次の表を得る。

$f(0) = \sqrt{2}$,	$f(\varphi_1 + 0) = -\infty$,
$f(\varphi) > \sqrt{2}$ $(0 < \varphi < \varphi_1)$,	$f(\varphi) < 0$ $(\varphi_1 < \varphi < \varphi_2)$,
$f(\varphi_1 - 0) = \infty$,	$f(\varphi_2) = 0$,
	$f(\varphi) > 0$ $(\varphi_1 < \varphi < \pi/2)$,
	$f(\pi/2) = \sqrt{2} - 1$

(iii)　c，h の関係(3)

(i)と(ii)から $2h/c > \sqrt{2}$ である。

(iv)　c，h，t の関係

(4)を φ について解く。簡単のため $p=2h/c$ とおき，(4)を変形する。

$$(\sqrt{2}p-1)\cos\varphi=(p-\sqrt{2})\sin\varphi+1 \cdots\cdots(5)$$

両辺を平方し $\sin\varphi$ について整理する。

$$(3p^2-4\sqrt{2}p+3)\sin^2\varphi+2(p-\sqrt{2})\sin\varphi-2p(p-\sqrt{2})=0$$

ここで，$3p^2-4\sqrt{2}p+3>0$ である。判別式を D とおくと

$$D=4(p-\sqrt{2})(3p-\sqrt{2})(\sqrt{2}p-1)^2$$

(iii)により $p>\sqrt{2}$ であるから $D>0$。よって

$$\sin\varphi=\frac{-(p-\sqrt{2})\pm\sqrt{(p-\sqrt{2})(3p-\sqrt{2})(\sqrt{2}p-1)^2}}{3p^2-4\sqrt{2}p+3}$$

$0<\varphi<\pi/2$ から $\sin\varphi>0$，また，$p>\sqrt{2}$ であったから $-(p-\sqrt{2})<0$ であり，分母は正であるから複号±は＋のときに成立する。従って

$$\sin\varphi=\frac{-(p-\sqrt{2})+(\sqrt{2}p-1)\sqrt{(p-\sqrt{2})(3p-\sqrt{2})}}{3p^2-4\sqrt{2}p+3}$$

これを(5)に代入し

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}p-1+(p-\sqrt{2})\sqrt{(p-\sqrt{2})(3p-\sqrt{2})}}{3p^2-4\sqrt{2}p+3}$$

これらを(1)に代入すれば

$$t=\frac{\sqrt{2}c(4h^2-2\sqrt{2}hc+c^2)+(4h^2-c^2)\sqrt{2(\sqrt{2}h-c)(3\sqrt{2}h-c)}}{2(12h^2-8\sqrt{2}hc+3c^2)}$$

これは藤田定資の術である。

8．$2t-c(\sin\theta+\cos\theta)=0$ のとき

$2t=c(\sin\theta+\cos\theta)$ の両辺を平方し $2\sin\theta\cos\theta=4t^2/c^2-1$。これらを(2)に代入して θ を消去すると

$$2t\sin\varphi=c(\cos\varphi-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

(1)を代入して t を消去すると

$$2h\sin\varphi=c(1-\cos\varphi) \cdots\cdots(6)$$

二倍角公式により

$$\frac{2h}{c}=\tan\frac{\varphi}{2} \quad \cdots\cdots(7)$$

$0<\varphi<\pi/2$ であるから $2h/c<1$ である。

さて，(7)の両辺を平方し，半角公式を用いると

$$\cos\varphi=\frac{c^2-4h^2}{c^2+4h^2}$$

ここで，右辺は $2h/c<1$ から正である。この式を(6)に代入し

$$\sin\varphi=\frac{4hc}{c^2+4h^2}$$

これらを(1)に代入し

$$t=\frac{h(3c^2-4h^2)}{c^2+4h^2}$$

ところで，(1)によると t は a，b それぞれには無関係であるから $a=0$，$b=c$ とすると

$$t-c\sin\varphi=\frac{h(3c^2-4h^2)}{c^2+4h^2}-\frac{4hc^2}{c^2+4h^2}=-h<0 \quad \cdots\cdots(8)$$

他方，$c\sin\varphi$ は $a=0$，$b=c$ のときの点Eの z 座標であるから(8)は点Eが求める立方体の外部にあることを示している。これは立方体が正四角錐台に外接するという条件に反するから，$2t-c(\sin\theta+\cos\theta)=0$ は不適当である。

9．『算法古今通覧』における批評

術曰置ニ斜率一乗レ和名レ元和
半冪加ニ高冪一名レ亨乗レ元内
減ニ高因和冪一余半レ之名レ利
亨段三内減ニ元因高段二一名レ貞乗
ニ亨與レ和｜冪差及高冪一加ニ
利冪一開ニ平方一加レ利以レ貞
除レ之得ニ立方面一合レ間

『算法古今通覧』は，會田安明が寛政9年（1797）に著した本で[6]，目的はその自序によると，「……名高キ算書及ヒ其縁ノ書ヲ擧テ以テ其術技ヲ評シ尚ヲ書毎ニ過謬アル事ヲ述べ第五巻目ニ至テ自ラ所設之題術四十七条ヲ擧ケ……以テ後學ノ階梯トス……」である[7]。ここで参考にした同書の再補版には奥付がないので出版年が不明であるが，自序の年は初版と同様に寛政7年（1795）である。

さて，この本の巻之三に上で論じた藤田定資の問題を取り上げ，「此術ヲ見レバ括リ方不宜故ニ迂遠ナリ今爰ニ簡易ノ術ヲ施ス則ハ左ノ如シ」と批評し，新に術を書いている。それを現代数学の記号を用いて表わすと次のようである。

(斜率)・(和)……元

$(和/2)^2+(高)^2$ ……亨

$\{(亨)\cdot(元)-(高)\cdot(和)^2\}\div 2$ ……………………………………………………………利

$3\cdot(亨)-(元)\cdot\{2\cdot(高)\}$ ………………………………………………………………貞

$[\sqrt{(貞)\cdot\{(亨)-(和)^2\}\cdot(高)^2+(利)^2}+(利)]\div(貞)$ ………………………………立方面

藤田定資の術文は94文字で會田安明の術文は67文字である。『算法古今通覧』(再補)にはこの問題の解義がないが，両者の術の結果は同じであるから，會田安明のいう「簡易ノ術」とは，術文の字数が少ない，ということであろう。

10. おわりに

以上でこの論文の目的を達成することができた。

この論文を書くに当り，提起した問題の図は(3)から複写したものである。また，日本学士院の蔵書である(4)の複写には本学附属図書館のご尽力を得たこと，また，(5)の複写には嘗て愛知教育大学附属図書館のご協力を得たことをここに記し，関係各位に感謝の意を表する。

参考文献

(1) 日本学士院，『明治前日本数学史』(第四巻)，新訂版，昭和54年(1979)，財団法人野間科学医学研究資料館。

(2) 下平和夫，『日本人の数学感覚』，昭和61年 (1986)，PHP 研究所。

(3) 藤田定資，『精要算法』(下巻)，天明元年 (1781)，愛知教育大学蔵。

(4) 藤田定資，『精要算法解』(下巻諺解四)，写本，年紀なし，日本学士院蔵。

(5) 松永良弼，『演段品彙』，写本，年紀なし，日本学士院蔵。

(6) 松崎利雄，『再補算法古今通覧―現代訳と解説―』，平成8年 (1996)，筑波書林。

(7) 會田安明，『算法古今通覧』，再補，自序寛政7年 (1795)，愛知教育大学蔵。