JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Vol. 03 No. 01. Mei 2017.
ISSN: 2527-3159 ***E-ISSN: 2527-3167***

PENENTUAN HARGA OPSI ASIA DENGAN METODE MONTE CARLO

Surya Amami Pramuditya [1]

FKIP, Universitas Swadaya Gunung Djati [1], amamisurya@fkip-unswagati.ac.id [1]

Abstrak

Opsi adalah kontrak antara *holder* dan *writer* dimana *writer* memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* untuk membeli atau menjual aset dari *writer* dengan harga tertentu (*strike price*) dan pada waktu yang telah ditentukan dimasa datang (*maturity time*). Opsi Asia termasuk pada opsi *path dependent*. Artinya *payoff* opsi Asia tidak hanya bergantung pada harga saham saat *maturity time* saja, tetapi merupakan rata-rata harga saham selama masa jatuh temponya dan disimbolkan *A* (*average*). Monte Carlo pada dasarnya digunakan sebagai prosedur numerik untuk menaksir nilai ekspektasi *pricing product derivative*. Teknik yang digunakan adalah Monte Carlo standar dan reduksi varians. Hasilnya diperoleh harga opsi Asia *call* dan *put* untuk kedua teknik dengan selang kepercayaan 95%. Teknik reduksi varians terlihat lebih cepat memperkecil selang kepercayaan 95% dibandingkan metode standar.

Kata kunci: opsi,, Asia, Monte Carlo

Abstract

Option is a contract between a holder and a writer in which the writer grants the rights (not obligations) to the holder to buy or sell the assets of the writer at a certain price (*strike* price) at maturity time. Asian options are included in the dependent path option. This means that Asia's payoff option depends not only on the stock price at maturity time, but it is the *average* stock price during its maturity and symbolized A (*average*). Monte Carlo is basically used as a numerical procedure to estimate the expected value of pricing product derivatives. The techniques used are the standard Monte Carlo and variance reduction. The result obtained the Asia call option price and put for both techniques with 95% confidence interval. The variance reduction technique looks faster reducing 95% confidence interval than standard method.

Keyword: option, Asian, Monte Carlo

1. Pendahuluan

Hull [2] mendefinisikan opsi sebagai kontrak antara *holder* dan *writer* dimana *writer* memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* untuk membeli atau menjual suatu aset dari *writer* dengan harga tertentu (*strike* atau *exercise price*) dan pada waktu yang telah ditentukan dimasa datang (*expiry date* atau *maturity time*) [4][5]. Salah satu jenis opsi adalah opsi Asia. Opsi Asia termasuk pada opsi *path dependent* [4]. Artinya *payoff* opsi Asia tidak hanya bergantung pada harga saham saat *maturity time* saja. Di sini *payoff* opsi Asia merupakan rata-rata harga saham selama masa jatuh temponya dan disimbolkan *A* (*average*).

Metode Monte Carlo pada dasarnya digunakan sebagai prosedur numerik untuk menaksir nilai ekspektasi dari suatu peubah acak sehingga metoda ini dapat digunakan untuk permasalahan *pricing product derivative* jika direpresentasikan sebagai nilai ekspektasinya. Prosedur simulasi melibatkan *generating* dari peubah acak dengan suatu fungsi kepadatan dan dengan menggunakan *law of large number* maka rata-rata dari nilai ini dapat dinyatakan sebagai penaksir ekspektasi peubah acak tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk mencari *payoff* harga opsi Asia *call* dan *put fixed strike dan*

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

average strike disertai selang kepercayaan 95%. Selanjutnya, dicari selang kepercayaan terkecil melalui metode Monte Carlo standard dan reduksi varians.

2. Simulasi Monte Carlo

Misalkan X peubah acak dengan ekspektasi $E(X) = a$ dan $Var\ (X) = b^2$ yang nilainya belum diketahui.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_M$ adalah barisan peubah acak yang berdistribusi identik dengan X, maka penaksir tak bias untuk a [6][3] adalah

$$a_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i \qquad (1)$$

dan penaksir tak bias untuk b^2 adalah

$$b_M^2 = \frac{1}{1-M}\sum_{i=1}^{M}(X_i - a_M)^2 \qquad (2)$$

Berdasarkan teorema limit pusat untuk $M \to \infty$ berlaku

$$\frac{\sum_{i=1}^{M} X_i - Ma}{b\sqrt{M}} \sim N(0,1)$$

atau

$$\sum_{i=1}^{M} X_i \sim N(Ma, b^2 M)$$

Sehingga,

$$a_M - a = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i - a \sim N(0, {b^2}/{M})$$

$$\frac{a_M - a}{b\sqrt{M}} \sim N(0,1)$$

Akan didapatkan taksiran interval untuk a. Perhatikan

$$P\left(\left|\frac{a_M - a}{b\sqrt{M}}\right| \leq 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96 \leq \frac{a_M - a}{b\sqrt{M}} \leq 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(a_M - 1.96\frac{b}{\sqrt{M}} \leq a \leq a_M + 1.96\frac{b}{\sqrt{M}}\right) = 0.95$$

Di sini $\frac{b}{\sqrt{M}}$ merupakan *standard error* , dengan mengambil $b \approx b_M$, maka

$$P\left(a_M - 1.96\frac{b_M}{\sqrt{M}} \leq a \leq a_M + 1.96\frac{b_M}{\sqrt{M}}\right) = 0.95 \qquad (3)$$

Sehingga diperoleh selang kepercayaan 95 % untuk a adalah $[a_M - 1.96\frac{b_M}{\sqrt{M}}, a_M + 1.96\frac{b}{\sqrt{M}}]$.

Agar akurasi selang lebih akurat dapat diperoleh malalui dua cara yaitu :

1. Memperbesar simulasi M, tetapi hal ini memberikan waktu komputasi yang lama.
2. Mengecilkan b_M atau mereduksi variansi dengan menggunakan kontrol variat.

2.1 Teknik Reduksi Variansi dengan Kontrol Variat

Taksiran selang akan semakin akurat jika lebar dari selang tersebut semakin sempit/kecil, lebar selang kepercayaan dapat dipersempit dengan cara memperbanyak sampel (menambah jumlah simulasi). Namun cara ini cukup menyulitkan karena faktor $\sqrt{M}$. Sebagai contoh, untuk mendapatkan selang kepercayaan yang lebih akurat, yaitu menyusutkan selang kepercayaan dengan faktor 10 membutuhkan sampel seratus kali lebih banyak dari semula.

Cara lain yang dapat dilakukan adalah memperkecil standar deviasi (b_M) yang berarti memperkecil variansi [1]. Ide dari teknik ini dalah mengganti X_i dengan barisan peubah acak yang lain yang juga identik dengan mean sama dengan $E(X_i)$ namun dengan variansi yang lebih kecil.

Misalkan $\theta = E(X)$ ingin ditaksir dengan simulasi Monte Carlo. Andaikan ada peubah acak lain, selain X yaitu Y dengan mean $E(Y) = \mu_Y$, kemudian akan ditunjukkan $var\ (X) > var(Y)$. Tulis peubah acak

$$Z = X + c(Y - \mu_Y) \qquad (4)$$

maka nilai ekspektasi dari Z adalah

$$\begin{aligned} E\big(X + c(Y - \mu_Y)\big) &= E(X) + cE(Y - \mu_Y) \\ &= \theta + cE(Y - \mu_Y) \\ &= \theta \end{aligned}$$

Sedangakan variansinya

$$\begin{aligned} var\big(X + c(Y - \mu_Y)\big) &= var\ (X + cY) \\ &= var\ (X) + var\ (Y) + 2cov(X, cY) \\ &= var\ (X) + c^2 var(Y) + 2c\ cov(X, Y) \end{aligned} \qquad (5)$$

Pilih Y sedemikian rupa sehingga $cov(X, Y) \neq 0$. Karena $var\ (X), var(Y), Cov(X, Y)$ diketahui, maka $var\ (Z) = f(c)$ yaitu fungsi kuadrat dalam c. Minimumkan ruas kanan pada persamaan (5) terhadap c diperoleh

$$c^* = \frac{-cov(X, Y)}{var\ (Y)} \qquad (6)$$

usahakan $cov\ (Y, V)$ positif sehingga c^* negatif. Dengan mengsubsitusikan persaman (6) ke persamaan (5) diperoleh

$$var(X + c^*(Y - \mu_Y)) = var(X) - \frac{cov^2(X,Y)}{var(Y)}$$

diperoleh reduksi variansi

$$\frac{var(Z)}{var(Y)} = 1 - \frac{cov^2(X,Y)}{var(Y)var(X)} = 1 - corr^2(X,Y)$$

selanjutnya pilih

$$Y = \sum_{i=1}^{M} S(n)_i$$

dan lakukan k simulasi untuk X dan Y diperoleh $X_i$dan Y_i $(i = 1,2, \dots, k)$. Tulis

$$\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i$$

$$\widehat{cov}(X,Y) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y})$$

$$\widehat{var}\,(X,Y) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(Y_i - \bar{Y})$$

Peubah acak pembanding memiliki mean sampel

$$\hat{\theta} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(X_i + \hat{c}^*(Y - \mu_Y))$$

2.2 Model Harga Saham

Misalkan model pergerakan harga saham [3] [2] [4] [5] adalah

$$S(T) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}z}$$

dengan $Z \sim N(0,1)$ (7)

serta $= \frac{1}{N}$, dimana N merupakan banyak hari kerja dalam 1 tahun.

Selanjutnya model saham ini menghasilakan ekspektasi dari peubah acak [4][5]

$$C = e^{-rT} maks\{S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - K, 0\}$$

yaitu nilai opsi call Eropa saat T dihitung di $t = 0$.

2.3 Opsi Asia

Payoff dari Asian option ditentukan dari nilai rata-rata untuk tiap kasusnya [2][6], yaitu:

- *Average* price Asian Call (*fixed strike price*)

$$C(S,T) = maks\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - K, 0\right)$$

- *Average* price Asian Put ((*fixed strike price*))

$$P(S,T) = maks\left(E - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right)$$

- *Average Strike* Price Asian Call

$$C(S,T) = maks\left(S(T) - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right)$$

- *Average Strike* Price Asian Put

$$P(S,T) = maks\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - S(T), 0\right)$$

Pandang

$$\int_0^T S\,(\tau)d\tau \approx \Delta t \sum_{j=1}^{N} S_j \quad (8)$$

dimana N adalah banyaknya partisi dan ingat bahwa $T = N\Delta T$, maka

$$\int_0^T S\,(\tau)d\tau = \frac{1}{N\Delta t}\Delta t \sum_{j=1}^{N} S_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j \quad (9)$$

Sehingga penggunaan Monte Carlo untuk Asian Call Option memiliki payoff [3]

$$C_i(S,T) = maks\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j - K, 0\right) \quad (10)$$

atau

$$C_i(S,T) = maks\left(S(T) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_j, 0\right) \quad (11)$$

untuk $i = 1,2, \dots, M$.

Berdasarkan persamaan (9), persamaan (10) dan (11) dapat dituliskan

$$Vcprice = exp\left(-r\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j - K, 0\right)^+ \quad (12)$$

atau

$$Vcstrike = exp\left(-r\frac{n}{N}\right)\left(S_T - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j, 0\right)^+ \quad (13)$$

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

2.4 Algoritma Metode Monte Carlo

Berikut merupakan algoritma menentukan harga opsi Asia dengan Metode Monte Carlo [6].

Tabel 1. Harga Saham

Input: $S_0, K, r, \sigma, n, N, M$
Bangkitkan faktor acak $z(M,n)$
Hitung $E(X) = mu = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)/N$
$Var(X) = dev = \sigma/\sqrt{N}$
Untuk $i = 1,2,..,M$ dan $j = 1,2,..,n$
• Untuk $j = 1$, $x(i,j) = mu + dev * z(i,j)$
• Untuk $j = 2,..,n$, $x(i,j) = x(i,j-1) + (mu + dev * z(i,j))$
Harga saham $S_b(i,j) = S_0 * \exp(x(i,j))$

Tabel 2. Opsi Asia

Bangun harga saham S_b
Hitung A mean S_b sebagai harga saham selama $[0,T]$
Hitung S_n yaitu harga saham saat maturity time
Hitung payoff
Jika MC standar, maka
Jika opsi call, maka
$Vprice = \exp(-r * n/N) * max(A-K,0)$
lainnya,
$Vprice = \exp(-r * n/N) * max(K-A,0)$
Hitung mean dan standar deviasi dari $Vprice$, serta selang kepercayaan 95%
lainnya, (kontrol variat)
pilih $Y = \sum_{i=1}^{n} S_i$
Jika opsi call, maka hitung
$X = \exp(-r * n/N) * max(A-K,0)$
$Cov(X,Y)$
$Corr(X,Y)$
c^*
$Z = X + c^*(Y - \mu_Y)$
Hitung mean dan standar deviasi dari Z, serta selang kepercayaan 95%
lainnya,
$Vprice = \exp(-r * n/N) * max(K-A,0)$
$Cov(X,Y)$
$Corr(X,Y)$
c^*
$Z = X + c^*(Y - \mu_Y)$
Hitung mean dan standar deviasi dari Z, serta selang kepercayaan 95%
Hitung rasio (reduksi)

3. Hasil Dan Pembahasan

Untuk menentukan selang kepercayaan serta harga opsi Call dan Put Asia digunakan program Matlab. Program ini menggunakan data fiktif dengan $r = 6\%$; $\sigma = 0.3$; $T = 1$; $S_0 = 15$; $N = 252$; $n = 100$. Adapun r adalah suku bunga, σ adalah volatilitas, T adalah waktu satu tahun kerja, S_0 adalah harga saham awal, N adalah waktu hari kerja dan n adalah partisi waktu.

Tabel 3. Selang Kepercayaan Opsi Call Asia Monte Carlo Standar K=9

M	*Average* Price		*Average Strike*	
10	4.9872	6.3177	-0.2050	0.6875
100	5.9094	6.5492	0.5043	0.9211
1000	5.8887	6.0831	0.7038	0.8465
10000	6.0156	6.0804	0.7269	0.7719

Tabel 4. Harga Opsi Call Asia Monte Carlo Standar K=9

M	*Fixed Strike*	*Average Strike*
10	5.6525	0.2413
100	6.2293	0.7127
1000	5.9859	0.7751
10000	6.0480	0.7494

Berdasarkan tabel 3 dan tabel 4 di atas, semakin besar langkah M, maka selang kepercayaan 95% semakin kecil, sehingga taksiran harga opsi *call* Asia untuk *fixed strike* maupun *average strike* semakin baik.

Tabel 5. Selang Kepercayaan Opsi Call Asia Monte Carlo Reduksi Varians K=9

M	*Average* Price		*Average Strike*	
10	7.1584	7.1458	0.2549	1.6207
100	5.7575	5.7575	0.4718	0.8147
1000	6.0332	6.0332	0.6740	0.7982
10000	6.0314	6.0314	0.7220	0.7600

Tabel 6. Harga Opsi Call Asia Monte Carlo Reduksi Varians K=9

M	*Fixed Strike*	*Average Strike*
10	7.1584	0.9378
100	5.7575	0.6432
1000	6.0332	0.7361
10000	6.0314	0.7410

Berdasarkan tabel 5 dan tabel 6 di atas, semakin besar langkah M, maka selang kepercayaan 95% semakin kecil, sehingga taksiran harga opsi *call* Asia untuk *fixed strike* maupun *average strike* semakin baik. Teknik reduksi varians terlihat lebih cepat memperkecil selang kepercayaan 95% dibandingkan metode standar.

Tabel 7. Selang Kepercayaan Opsi Put Asia Monte Carlo Standar K=17

M	*Average* Price		*Average Strike*	
10	0.4797	2.0382	0.1392	1.0961
100	1.7892	2.3478	0.4318	0.7439
1000	1.8052	1.9740	0.5287	0.6294
10000	1.9049	1.9594	0.5406	0.5716

Tabel 8. Harga Opsi Put Asia Monte Carlo Standar K=17

M	*Fixed Strike*	*Average Strike*
10	1.2589	0.6176
100	2.0685	0.5879
1000	1.8896	0.5791
10000	1.9322	0.5561

Berdasarkan tabel 7 dan tabel 8 di atas, semakin besar langkah M, maka selang kepercayaan 95% semakin kecil, sehingga taksiran harga opsi *put* Asia untuk *fixed strike* maupun *average strike* semakin baik.

Tabel 9. Selang Kepercayaan Opsi Put Asia Monte Carlo Reduksi Varians K=17

M	*Average* Price		*Average Strike*	
10	1.4303	1.6182	0.5807	1.1102
100	1.9654	2.0924	0.4797	0.7850
1000	1.9720	2.0158	0.5212	0.6124
10000	1.8924	1.9078	0.5453	0.5744

Tabel 10. Harga Opsi Put Asia Monte Carlo Reduksi Varians K=17

M	*Fixed Strike*	*Average Strike*
10	1.5243	0.8455
100	2.0289	0.6324
1000	1.9939	0.5668
10000	1.9001	0.5599

Berdasarkan tabel 9 dan tabel 10 di atas, semakin besar langkah M, maka selang kepercayaan 95% semakin kecil, sehingga taksiran harga opsi *put* Asia untuk *fixed strike* maupun *average strike* semakin baik. Teknik reduksi varians terlihat lebih cepat memperkecil selang kepercayaan 95% dibandingkan metode standar

4. Kesimpulan

Semakin besar banyaknya langkah M, maka semakin memperkecil jarak selang kepercayaan 95%, untuk menaksir harga opsi Call maupun opsi Put. Dengan menggunakan teknik reduksi varians terlihat lebih cepat memperkecil selang kepercayaan 95% dibandingkan metode standar.

Daftar Pustaka

[1] Fu, M. C., Madan, D. B., & Wang, T. Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods. *Journal of Computational Finance*, *2*(2), (1999). 49-74.

[2] Hull, J.C., Options, Futures, and Other Derivatives (Eighth Edition). Pearson, England. (2012).

[3] Podlozhnyuk, V., & Harris, M. Monte Carlo Option Pricing. CUDA SDK. (2008).

[4] Pramuditya, S.A., & Sidarto, K. A. Penentuan Harga Opsi Asia Dengan Model Binomial Dipercepat. Repository FKIP Unswagati. (2013).

[5] Pramuditya, S.A. Perbandingan Metode Binomial dan Metode Black-Scholes Dalam Penentuan Harga Opsi. *SAINSMAT*, *5*(1). (2016).

[6] Seydel, R., Tools for Computational Finance. Springer-Verlag, Berlin. (2002).