JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Vol. 01 No. 02. Mei 2016.
ISSN: 2527-3159 ***E-ISSN: 2527-3167***

VEKTOR PRIORITAS DALAM *ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS* (*AHP*) DENGAN METODE NILAI EIGEN

Moh. Hafiyusholeh[1] , Ahmad Hanif Asyhar[2]

Matematika UIN SunanAmpel Surabaya, hafiyusholeh@uinsby.ac.id[1]
Matematika UIN SunanAmpel Surabaya, hanif@uinsby.ac.id[2]

Abstrak

Pada Penelitian ini dikaji metode nilai eigen yang digunakan untuk mengkonstruksivektor prioritas model pengambilan keputusan yang dikenal dengan Analytical Hierarchy Process (AHP). AHP merupakan suatu metode pengambilan keputusan yang berdasarkan pada keragaman kriteria. Melalui metode nilai eigen ini diperoleh $\lambda_{mak} \geq n$*, dengan* λ_{mak} *adalah nilai eigen maksimum dan n adalah ukuran matriks. Untuk membatasi apakah suatu keputusan yang telah diambil dengan AHP sudah valid atau belum, bisa diverifikasi dengan menggunakan indeks konsistensi.*

Kata kunci : nilai eigen, vektor eigen, AHP, matriks konsisten

Abstract

In this paper examines eigenvalues methods to construct models of decision-making priority vector as known as the Analytical Hierarchy Process (AHP). AHP is a decision making method based on the diversity criteria. Through this method obtained $\lambda_{mak} \geq n$ *with* λ_{mak} *is the maximum eigen value and n is the size of the matrix. Decision taken by the AHP is valid or not, can be verified by using an index of consistency*

Keywords: eigenvalues, eigenvectors, AHP, consistent matrix

1. Pendahuluan

Setiap orang tentu terlibat dalam pengambilan suatu keputusan, entah secara kolektif maupun secara pribadi. Namun demikian, pada tataran tertentu tidak semua orang mudah dalam mengambil suatu keputusan yang melibatkan banyak kriteria, ditambah lagi ketidakpastian atau ketidaksempurnaan informasi seringkali menyulitkan pembuat keputusan.

Salah satu solusi yang dapat digunakan untuk membantu dalam menetapkan suatu keputusan berbasis multi kriteria adalah dengan *Analytical Hierarchy Process* (AHP).

AHP dikembangkan oleh Thomas L. Saaty di Wharton School of Business, University of Pennsylvania pada sekitar tahun 1970-an dan baru dipublikasikan pada tahun 1980 dalam bukunya yang berjudul *Analytical Hierarchy Process*.

Seiring dengan perkembangan zaman, penerapan AHP telah meluas sebagai model alternatif untuk menyelasaikan bermacam-macam masalah, seperti penentuan tempat kerja bagi siswa SMK sebagaimana yang dilakukan oleh Hafiyusholeh, dkk [11], ataupun terapan yang lain. Hal ini dimungkinkan karena AHP cukup mengandalkan pada intuisi yang datang dari pengambil keputusan, yang cukup akan informasi dan memahami masalah keputusan yang dihadapi.

Dalam AHP, permasalahan yang kompleks dipecah menjadi beberapa unsur yang kemudian disusun berdasarkan hirarki. Menurut Saaty, definisi hirarki adalah suatu representasi dari sebuah permasalahan yang kompleks dalam suatu struktur tingkatan majemuk (*multilevel*) dengan tingkat pertama adalah tujuan, yang diikuti oleh ktiteria, subkriteria, dan seterusnya sampai pada tingkat terakhir [8].

Salah satu tahapan terpenting dalam AHP adalah penilaian tingkat perbandingan (*Comparative Judgment*). Prinsip ini berarti membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua elemen pada suatu tingkat tertentu dalam kaitannya dengan tingkat di atasnya yang biasa disajikan dalam bentuk matriks *pairwise comparison (PC)*. Penilaian ini merupakan inti dari AHP karena hal tersebut akan berpengaruh terhadap prioritas masing-masing elemen. Prioritas-prioritas tersebut pada akhirnya disajikan dalam bentuk vektor yang disebut dengan vektor prioritas.

Beberapa pendekatan untuk mendapatkan vektor prioritas dari matriks PC , antara lain metode nilai eigen (*Eigenvalue Method*) [5], metode Chi Square [10], metode kuadrat terkecil (LSM) [6] yang meminimumkan norm Frobrenius dari matriks PC dengan taksirannya. Metode lain disajikan oleh Gass dan Rapscak [7] yaitu dengan menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD).

Matriks PC konsisten ber-rank satu akan memiliki nilai eigen yang sama dengan ukuran matriks. Pada kenyataannya, jika matriks PC tersebut dikenakan gangguan, maka akan merubah sifat ideal dari suatu keputusan. Nilai eigen matriks tersebut berubah sebagai akibat berubahnya unsur-unsur matriks yang konsisten.

Pada kondisi tersebut, nilai eigen maksimal dapat digunakan sebagai pendekatan untuk mendapatkan vektor prioritas. Vektor prioritas yang berkorespondensi dengan nilai eigen maksimal dikenal dengan istilah vektor eigen utama. Dari Teorema Perron [3] diketahui bahwa nilai eigen maksimal yang berkorespondensi dengan vektor eigen utama merupakan akar sederhana (*simple root*).

Beberapa kajian dan analisis mengenai vektor eigen utama dari matriks PC telah dilakukan diantaranya oleh Farkas [2] yang mengkonstruksi beberapa sifat PC. Astuti dan Garnadi [1] mengkaji nilai dan vektor eigen dari matriks PC yang terganggu dengan mentransformasikannya kedalam matriks 3x3 yang lebih fleksibel. Garmenia, H., dkk [12] melakukan penelitian yang mengakji kekonsistenan matrik sebagai akibat dikenai gangguan.

Berdasarkan uraian di atas, pada Penelitian ini akan dibahas vektor prioritas dalam Analytical Hierarchy Process (AHP) dengan menggunakan metode nilai eigen.

2. Kajian Teori

2.1 Matriks Positif

Matriks positif merupakan matriks yang semua entri-entrinya berupa bilangan positif. Dalam bahasa formal, misalkan diberikan matriks $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. Matriks A dikatakan positif, jika untuk setiap unsur a_{ij} di A, $a_{ij} > 0$ untuk setiap i,j = 1, 2, ..., n. yang dinotasikan dengan $A > 0$.

Matriks positif memiliki beberapa sifat yang terkait dengan nilai dan vektor eigen yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema Perron. Pada pembuktian Teorema Perron, digunakan pula Teorema Jordan yaitu pada saat membuktikan multiplisitas aljabar dari ρ(A) adalah satu. Teorema Perron diperlukan sebagai jaminan atas nilai dan vektor eigen positif yang akan digunakan untuk mengkonstruksi vektor prioritas dalam AHP.

Beberapa sifat matriks positif yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema Perron diantaranya diketengahkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1 Misalkan $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ dengan $A > 0$ dan misalkan $x \in R^n, x > 0$.

1. Jika $\alpha, \beta \geq 0$ sehingga $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, maka $\alpha x \leq \rho(A) \leq \beta x$
2. Jika $\alpha x < Ax$, maka $\alpha < \rho(A)$
3. Jika $Ax < \beta x$, maka $\rho(A) < \beta$

Bukti dari teorema tersebut dapat dilihat di [3].

ISSN: 2527-3159 *E-ISSN: 2527-3167*

Lemma 2.1. Misalkan $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ dengan $A > 0, Ax = \lambda x, x \neq 0, dan\ |\lambda| = \rho(A)$, maka $A|x| = \rho(A)|x|$.

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|$$

Dengan demikian diperoleh $\rho(A)|x| \leq A|x|$.
Misalkan $y = A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$.
Untuk kasus $y = 0$, diperoleh $A|x| = \rho(A)|x|$
Untuk kasus $y \neq 0$, pandang

$$0 < Ay = AA|x| = \rho(A)A|x|$$

Misalkan $z = A|x|$, didapatkan $Az > \rho(A)z$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 2.1.1 didapat $\rho(A) > \rho(A)$. Hal ini kontradiksi. Jadi harusnya $y = 0$, yaitu $A|x| = \rho(A)|x|$.

Beberapa teorema yang terkait dengan matriks positif selanjutnya dapat dirangkum dalam Teorema Perron sebagai berikut:

Teorema 2.2 (Teorema Perron). Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C}), A > 0$, maka

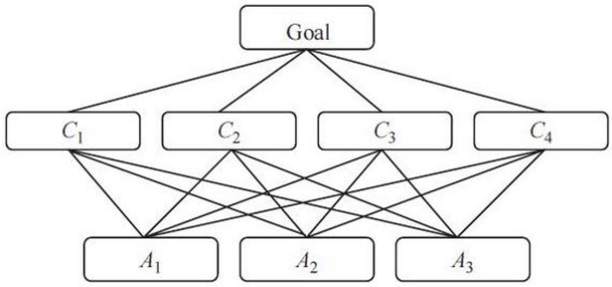
1. $\rho(A) > 0$;
2. $\rho(A)$ adalah nilai eigen A;
3. terdapat $x \in \mathbb{C}^n$dengan $x > 0$ dan $Ax = \rho(A)x$;
4. $\rho(A)$ merupakan nilai eigen sederhana dari A, yaitu $ma(\rho(A)) = 1$;
5. $|x| < \rho(A)$ untuk setiap nilai eigen $\lambda \neq \rho(A)$;

Teorema perron tersebut diperlukan sebagai jaminan bahwa nilai eigen maksimal senantiasa mempunyai nilai positif.

2.2 Analytic Hierarchy Process (AHP)

Secara umum terdapat tiga prinsip dalam menyelesaikan persoalan dengan AHP yakni *decomposition, comparative judgment, dan synthesis of priority*.

Setelah persoalan didefenisikan, maka perlu dilakukan decomposition yaitu memecah persoalan yang utuh menjadi unsur-unsur yang lebih sederhana. Dengan kata lain, setelah persoalan didefinisikan, perlu dibuat struktur hirarki yang diawali dengan tujuan umum, dilanjutkan dengan kriteria-kriteria, kemudian sub-kriteria dengan kemungkinan alternatif-alternatif pada tingkatan kriteria yang paling bawah. Apabila ingin mendapatkan hasil yang akurat, pemecahan dapat juga dilakukakan terhadap unsur-unsur sampai tidak mungkin dilakukan pemecahan lagi. Struktur hirarki keputusan dapat dapat dilihat pada Gambar berikut



Gambar 1. Struktur Hirarki

Comparative Judgment, Prinsip ini berarti membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua unsur pada suatu tingkat tertentu dalam kaitannya dengan tingkat di atasnya. Penilaian ini merupakan inti dari AHP karena ia akan berpengaruh terhadap prioritas unsur-unsur. Hasil dan penilaian ini akan tampak lebih baik apabila disajikan dalam bentuk matriks PC.

Agar diperoleh skala yang bermanfaat ketika membandingkan dua unsur, seseorang yang akan memberikan jawaban memerlukan pemahaman yang baik tentang unsur-unsur yang dibandingkan dan relevansinya terhadap kriteria atau tujuan yang akan dicapai. Adapun skala dasar yang digunakan untuk membandingkan unsur-unsur yang ada oleh Saaty [5] dibuat tabel skala perbandingan sebagai berikut;

Bobot	Unsur yang dibandingkan
1	Sama pentingnya
3	Sedikit lebih penting
5	Lebih penting
7	Sangat penting
9	Mutlak/ekstrim penting
2, 4, 6, 8	Nilai antara

JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Vol. 01 No. 02. Mei 2016.
ISSN: 2527-3159 ***E-ISSN: 2527-3167***

Tabel 1. Tabel skala perbandingan berpasangan

Synthesis of Priority. Dari setiap matriks PC yang telah dibuat kemudian dicari vektor eigennya untuk mendapatkan prioritas lokal. Karena matriks PC terdapat pada setiap tingkat, maka untuk mendapatkan prioritas globalnya harus dilakukan sintesa di antara prioritas lokal. Prosedur melakukan sintesa berbeda menurut bentuk hirarki.

Adapun tahapan proses pengambilan keputusan dengan AHP adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan masalah dan menentukan solusi yang diinginkan.
2. Membuat struktur hirarki yang diawali dengan tujuan umum, dilanjutkan dengan sub tujuan, kriteria dan kemungkinan alternatif pada tingkatan kriteria yang paling bawah.
3. Membuat matriks PC yang menggambarkan kontribusi relatif setiap unsur terhadap masing-masing tujuan atau kriteria yang setingkat di atasnya.
4. Melakukan perbandingan berpasangan sehingga diperoleh ketetapan (*judgment*) seluruhnya sebanyak n x [(n-1)/2] buah, dengan n adalah banyaknya unsur yang dibandingkan.
5. Menghitung prioritas dan menguji kekonsistenannya.
6. Mengulangi langkah 3, 4, dan 5 untuk seluruh tingkat hirarki

3. Pembahasan

Pada bagian ini akan dikaji salah satu metode untuk menentukan vector prioritas yang dikenal dengan Metode Nilai Eigen.

Misalkan terdapat n obyek yang dinotasikan dengan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ yang akan dinilai tingkat kepentingannya dengan bobot pengaruh $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Apabila diketahui nilai perbandingan unsur A_i terhadap unsur A_j adalah a_{ij}, dengan $a_{ij} \in R$ adalah entri dari matriks PC A, dapat dibuat matriks PC sebagai berikut;

$$A \cong \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

Matriks A merupakan matriks positif n x n yang *reciprocal* sehingga $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Matriks ini konsisten jika $a_{ij}.a_{jk} = a_{ik}$ untuk i, j, k = 1, 2, 3,… n.

Misalkan $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ dan A adalah matrik PC yang konsisten dengan $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, dapat diselidiki bahwa $Aw = nw$ yaitu

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_2} \\ \frac{w_1}{w_2} & 1 & \ddots & \frac{w_1}{w_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$
$$= nw$$

Dalam teori matriks, persamaan $Aw = nw$ dipenuhi hanya jika w adalah vektor eigen dari A dengan nilai eigen n. Dalam aljabar linear, semua nilai eigen $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n.$ adalah nol kecuali satu yang kemudian disebut dengan λ_{mak} .

Karena A merupakan matriks positif yang *reciprocal*, yaitu $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$, $i, j = 1,2, \dots, n$ dan $a_{ii} = 1$ untuk semua nilai i, maka berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = trace(A) = n$$

Trace dari matriks A adalah jumlah unsur-unsur diagonal matriks A.

Permasalahannya kemudian, dalam kasus umum nilai-nilai $\frac{w_i}{w_j}$ tidak dapat diberikan secara tepat. Nilai-nilai $\frac{w_i}{w_j}$ hanya

ISSN: 2527-3159 ***E-ISSN: 2527-3167***

dapat ditaksir sehingga permasalahannya sekarang adalah mendekati persamaan $Aw = nw$ dengan $A\widehat{w} = \lambda_{mak}\widehat{w}$ dengan λ_{mak} adalah nilai eigen terbesar dari matriks A.

Berkaitan dengan λ_{mak}, teorema Perron telah menjamin bahwa λ_{mak} dari matriks positif akan mempunyai nilai positif. Karena matriks $A > 0$, maka terdapat vector eigen positif yang berkaitan dengan λ_{mak}. Selain itu, λ_{mak} merupakan nilai eigen simple dengan $ma(\lambda_{mak}) = 1$. Dengan adanya sifat-sifat tersebut, maka nilai eigen dari matriks PC yang digunakan untuk mendapatkan vektor prioritas dalam AHP akan senantiasa bernilai positif. Lebih lanjut vektor prioritas yang berkorespondensi dengannya akan bernilai positif pula.

Pada praktiknya, nilai λ_{mak} yang digunakan untuk mengkonstruksi vector prioritas akan lebih besar dari ukuran matriks A sebagaimana yang diuraikan pada teorema berikut.

Teorema 3.1 Misalkan $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}), A > 0$. Jika $\widehat{w}$ merupakan vektor tak nol di $\mathbb{C}$, sehingga $A\widehat{w} = \lambda_{mak}\widehat{w}$, maka $\lambda_{mak} \geq n$

Bukti:

Karena $\widehat{w}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ_{mak}, maka berlaku

$$(A - \lambda_{mak}I)\widehat{w} = 0$$

Persamaan ke-i dari sistem persamaan linear tersebut dapat ditulis sebagai

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{w}_j - \lambda_{mak}\widehat{w}_i = 0$$

Dengan kata lain

$$\lambda_{mak} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i}$$

Selanjutnya akan diperoleh

$$n\lambda_{mak} = n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i}$$

Karena $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}},\ i,j = 1,2,\dots,n$ dan $a_{ji}\frac{\widehat{w}_i}{\widehat{w}_j} = \frac{1}{a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i}}$, dan dengan memperhatikan bahwa

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x}, x \neq 0, x = a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i},$$

maka akan diperoleh

$$\lambda_{mak} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i} + \frac{1}{a_{ij}\frac{\widehat{w}_j}{\widehat{w}_i}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n}\left(2 + \frac{\left(a_{ij}\widehat{w}_j - \widehat{w}_i\right)^2}{a_{ij}\widehat{w}_i\widehat{w}_j}\right)$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} 2 = \sum_{2}^{n} 2 + \sum_{3}^{n} 2 + \cdots + \sum_{n}^{n} 2$$

$$= 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2\big(n-(n-1)\big)$$

$$= 2[(n-1) + (n-1) + \cdots + 1]$$

$$= 2\left[\frac{(n-1)}{2}[2(n-1) + (n-2)(-1)]\right]$$

$$= 2\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]$$

$$= (n-1)n$$

Dengan demikian,

$$\lambda_{mak} = n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\left(a_{ij}\widehat{w}_j - \widehat{w}_i\right)^2}{na_{ij}\widehat{w}_i\widehat{w}_j}\right)$$

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{mak} \geq n$. dan kesamaan $\lambda_{mak} = n$ hanya akan dipenuhi jika dan hanya jika $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ untuk semua $i,j = 1,2,\dots,n$.

ISSN: 2527-3159 *E-ISSN: 2527-3167*

Dengan kata lain, jika λ_{mak} dekat dengan n, maka $\hat{w}$ konsisten. Indikator terhadap kekonsistenan diukur melalui indeks konsistensi (*Consistency Index* (CI)) yang didefinisikan sebagai

$$CI = \frac{\lambda_{mak} - n}{n - 1}$$

Batasan terhadap ketidakkonsistenan suatu matriks, oleh Saaty [8] diukur dengan menggunakan rasio konsistensi (CR) yang diperoleh dari perbandingan antara indeks konsistensi dan random indeks (RI),

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

Random indeks tersebut bergantung pada ukuran suatu matriks yang dapat disajikan sebagai berikut

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

Tabel 2. Tabel random indeks

Hasil penelitian dapat diterima jika nilai rasio konsistensi (CR) tidak lebih dari 10%. Apabila nilai rasio konsistensi lebih dari 10%, maka penilaian yang dilakukan belum dianggap konsisten.

4. Penutup

AHP merupakan salah satu metode pengambilan keputusan yang melibatkan banyak kriteria. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi vektor prioritas adalah metode nilai eigen. Dengan metode ini diperoleh nilai eigen terbesar akan lebih dari atau sama dengan *n*. Untuk membatasi apakah suatu keputusan yang telah diambil dengan AHP sudah valid atau belum, bisa diverifikasi dengan menggunakan indeks konsistensi.

Referensi

[1] Pudji Astuti, Agah D. Garnadi, On Eigenvalues and eigenvectors of perturbed pairwise comparison matrices, *Fundamental Research Grant 2008* (2008).

[2] Andras Farkas, The analysis of the principal eigenvector of pairwise comparison matrices, *Acta Polytechnica Hungarica* **4** (2007).

[3] A. Horn, Roger., A. Johnson, Charles., Matrix analysis, *Cambridge University Press*, (1985).

[4] R. Fletcher, D. Sorensen, An algorithmic derivation of the jordan canonical form, Amer. Math. Montly, 90 pp (1983) 12-16.

[5] Saaty, T.L., Decision making for leaders, *University of Pittsburg*, (1980).

[6] Baz$\acute{o}$ki, S, Solution of the least square method problem of pairwise comparison matrices, *Central European Journal of Operations Research* (2008).

[7] Gass, S.I., Rapcs$\acute{a}$k, T., Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operations Research* **154** (2004) 573-584.

[8] Saaty, T.L., The analytic hierarchy process, *University of Pittsburgh* (1988).

[9] Saaty, T.L., Decision-making with the AHP: Why is principal eigenvector necessary, EJOR **145** (2002) 85-91.

[10] Xu, Z.S., Generalized chi square method for the estimation of weights, JOTA **183 pp** (2000) 183-192

[11] Hafiyusholeh, M., Asyhar, A.H., Komaria, R., Aplikasi Metode Nilai Eigen Dalam Analytical Hierarchy Process Untuk Memilih Tempat Kerja, Jurnal Matematika Mantik Vol. 1 No. 1 (2015)

http://mantik.uinsby.ac.id/index.php/Mantik1/article/download/02-2015/3

[12] Garminia, H., Hafiyusholeh, Moh. dan Astuti, P. Pengaruh Gangguan pada Perubahan Prioritas dan Indeks Konsistensi Matriks Perbandingan Berpasangan dalam *Analytical Hierarchy Process*, Jurnal Matematika dan Sains. Desember 2010, Vol. 15 No. 3. 143