京都府立大学学術報告（理学・生活科学）第41号A系列p. 1 ～ 4 (1990年11月)

2複素変数空間における固有面の社会について

近　藤　誠　造*)

西野［6］は多複素変数空間における解析函数の研究のためにその函数により定義された固有面の族に着目するという新しい観点を導入した．小生［3］，［4］は，簡単のため2複素変数空間へ制限して，解析函数により定義された族を含むより一般の族たる固有面の社会なるものを導入してその構造を調べた．その結果を解析函数の研究に役立てようと考えたのである．この小文は，この研究を以って，小生が学位申請した際に行った公開講演**) の内容要旨である．

序　文

1．$\tilde{D}$をC^2 {x，y} 中の1つの領域とする．Eを$\tilde{D}$中の内点を含まない閉集合でD（$=\tilde{D}-E$）も領域になっているものとする．F（x，y）をD中での正則または有理型函数でEの各点をその真性特異点としているものとする．F（x，y）のDの内部での性質及びEの近傍での状況について調べたい．このとき特にF（x，y）がD中で定義する固有面の社会に着目して考えたい．ここで<u>函数F（x，y）が定義する固有面の社会S</u>とは次のものである：

S＝ {F（x，y）＝ｃで定義される固有面のD中での既約成分 | ｃ∈P^1} .

そのために［3］ではまずSのもっている最っとも原始的な点集合論的な性質（正規性，連続性）のみに着目してそこから得られる性質を出した．これは西野［6］の結果が函数から離れてどこまで出るかを調べたものである．次いで［4］ではSの解析性の観点よりその真性特異性を調べた．これは同じく西野［6］が（A）型分解，（B）型分解の本質的な違いを主として領域の内部において調べたのに対して，ここでは両者が領域の境界点（退化的真性特異点）の近傍においてもその本質的違いを表すということを調べたものである．なおこれらのことと関係の深い局所解析的な社会に関する大域解析性の問題をも考える．

以下ではⅠ．で用語等の説明をしたのちⅡ．で［3］の結果を，Ⅲ．で［4］の結果を整理要約する．なおそれら以後に得た結果も一部補足要約する．

記号：P^1 {x} ＝複素変数ｘのリーマン球面；C^1 {x} ＝複素変数ｘの全平面；C^* {x} ＝C^1 {x} － {0} ；T^1＝任意の等角同値類のトーラス面；C^2 {x，y} ＝複素変数ｘ，ｙの全空間．

Ⅰ．定義，準備

2．DをC^2 {x，y} 中の領域とする．ΣをD中の<u>閉集合</u>とする．ΣがD中の<u>固有面</u>であるとは，Σの各点ｐに対してその近傍v_pとv_p中での正則函数f_p（x，y）（≠0）があって$\Sigma \cap v_p$がf_p（x，y）＝0で定義されることである．Σに対してD中での既約性，可約性が通常の如く定義される．$\mathfrak{F}$をD中の任意の固有面（既約又は可約）の族とする．$\mathfrak{F}$に属する固有面の点集合の和を$\mathfrak{F}$の台と呼び，|$\mathfrak{F}$|と記す．|$\mathfrak{F}$|がベールの第1類又は第2類の集合であるとき，$\mathfrak{F}$はそれぞれ<u>ベールの第1類</u>又は<u>第2類の族</u>であると呼ぶ．

SをD中の<u>既約な</u>固有面の族とする．SがD中の<u>固有面の社会</u>，又は簡単にD中の<u>社会</u>，であるとはSが次の2つの条件を満たすことである：

1° <u>Dの各点に対してそこを通過するSの固有面が少なくとも1つは存在する</u>；

2° <u>Sの任意の固有面を1つ固定すると，その上の点であってSの他の固有面が通過するものの集合，それは</u>

---

*）京都府立大学生活科学部応用数学講座

**）時：1989年6月2日；所：京都大学理学部数学教室

無限集合となってもよい，はD中に集積点をもたない．

この2条件1°，2°は1．において函数により定義されたSより集合論的性質を抽出したものである．

Dの点でそこを通過するSの固有面が無限にあるとき，その点をSの不定点と呼ぶ．D′をDの部分領域とする．S′をSの固有面をD′中へ制限したもののD′中での既約成分の全体とする．このときS′はD′中の社会でありSのD′への制限と呼ぶ．

3．Sの固有面の並び方のある意味でのなめらかさに関して次の3段階のものが考えられる．

1）D中の社会Sは次の条件を満たすときD中で大域解析的であると呼ばれる．即ちD中に集積点をもたない集合eと正則写像F：D－e→R，Rはリーマン面，があってすべての$c \in R$に対してその逆像F^{-1}（c）のD中での閉包がSの固有面の和として表される固有面となっているとき．このFは，特にRがP^1のときには，複素微分方程式論でSに対する第1積分と呼ばれるものである．Sが1点pで局所解析的であるとは，pの1つの近傍v_PがあってSのv_Pへの制限がv_Pで大域解析的となっていることである．

D中の大域解析的な社会Sに対して，コッホ［2］によりSの解析的射影が定義される．それはその上の点によりSの固有面が助変数表示されるリーマン面である．

D中の社会SでDの各点で局所解析的になっているものが与えられたとする．このときSは常にD中で大域解析的であるか．これが局所解析的な社会に対する大域解析性の問題である．

2）D中の社会Sは次の条件を満たすときD中で大域連続的であると呼ばれる．即ちD中に集積点をもたない集合eと連続な開写像G：D－e→R，Rはリーマン面，があってすべての$c \in R$に対してその逆像G^{-1}（c）のD中での閉包がSの固有面の和として表される固有面となっているとき．このGは1複素変数函数論におけるストイロフ［5］の内部変換の2複素変数函数への1つの拡張である．大域解析的なSは勿論大域連続的である．

西野［6］は大域解析的なSに対してその中の固有面の列の極限に関して(A)型分解，(B)型分解なる概念を導入して（［6］，62－64ページ）いろいろな結果を出した．ここで大ざっぱに言って(A)型分解とは極限の固有面は可約となるが既約に近い（仮性可約）というものであり，(B)型分解とは極限の固有面は可約しかも既約からは程遠い（真性可約）というものである．これらの概念の定義は（ルベーグ積分論で測度0の集合を無視する如く）ベールの第1類の族に属するある種の固有面を無視してなされる．これらのことは大域連続的なSに対しても同様に全て定義できて結果も全て成り立つことが示される．

3）D中の社会Sは，単なる固有面の族と考えて岡［1］の意味で正規族をなすとき，D中で大域正規的であると呼ばれる．即ちD中の各点pに対してその近傍v_Pがあって各固有面$\Sigma \in S$に対してv_P中でΣを定義する正則函数$f_\Sigma(x, y)$があって函数族$\{f_\Sigma(x, y) \mid \Sigma \in S\}$が$v_P$中で正規族をなし且つその中の任意の列の極限函数は$\equiv 0$にはならぬとできるとき．大域連続的なSは勿論大域正規的である．

D中の1点における局所連続性と局所正規性は局所解析性と同様に定義される．

Ⅱ．一般的構造

4．Sに対して上記2．での仮定1°，2°だけから出る性質として次の結果が得られる．

定理1． Sを D中で任意の社会とする：

Ⅰ．もしSがD中で大域正規的であるならば，Sに対してD中にある内点を含まない閉集合E_2があって，SはD－E_2の各点で局所連続的になっている；

Ⅱ．もしSに対して何も仮定しないならば，Sに対してD中にある内点を含まない閉集合E_2，E_3（$E_3 \subseteqq E_2$）があって，SはD－E_3の各点で局所正規的になっていて且つD－E_2の各点で局所連続的になっている．

E_2，E_3はそれぞれSの局所連続性，局所正規性の観点からの特異点集合である．この定理1は複素微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=G(x, y)\quad (G(x, y)\text{はD中での正則又は有理型函数})$$

の解によって定義される固有面の社会S_1（上に定義した固有面よりも一般の，D中でかならずしも閉集合とはならぬ，固有面の社会）に対して，G（x，y）の不定点（$G(x, y)=\frac{0}{0}$となる点（x，y））の集合をE_1とするとE_1はD中で集積点をもたない閉集合であって，S_1はD－E_1の各点で局所解析的になっているという定理の非常に弱い形での拡張であると考えられる．

定理1に関して，逆にD中に内点を含まない閉集合Eが与えられたときEで局所連続性がやぶれる，又は局所正規性がやぶれるような社会SがD中に構成できるかという作図問題を考える．これに対して次の結果が得られる．

定理2．$D=\{C^1\{x\}, |y|<1\}$ なる直積型の領域とし，$E_2=\{e_2, |y|<1\}$，$E_3=\{e_3, |y|<1\}$，e_2，e_3（$e_3\subsetneqq e_2$）は$C^1\{x\}$上で任意の内点を含まない閉集合，なる直積型の閉集合E_2，E_3（$E_3\subsetneqq E_2$）が与えられたとする．このときそれぞれ次のⅠ，Ⅱの場合で数えあげられた社会が存在する：

Ⅰ．D中のS_2でD中で大域正規的であるが，E_2の各点でのみ局所連続性がやぶれるもの；

Ⅱ．D中のS_3でE_3の各点でのみ局所正規性がやぶれ且つE_2の各点でのみ局所連続性がやぶれるもの．

注意1．C^2においてもある特殊な形の与えられた内点を含まない閉集合をE_2，E_3（$E_3\subsetneqq E_2$）とすると，C^2中の社会S_2，S_3でこの定理2のそれぞれⅠ，Ⅱの場合に述べられたのと同じ性質をもったものが存在することが示される．

Ⅲ．退化的真性特異性

5．$\tilde{D}$をC^2中の領域とし，Eを$\tilde{D}$中の内点を含まない閉集合とする．D（$=\tilde{D}-E$）も領域であると仮定する．SをD中の大域解析的な社会とする．pをEの1点とする．もしD中でSを定義する全ての正則又は有理型函数が常にpをその真性特異点としているならばpはSの真性特異点と呼ばれる．またもしD中でSを定義する正則又は有理型函数のうち少なくとも1つのものがpのある近傍まで正則又は有理型函数として接続されるならばpはSの仮性特異点と呼ばれる．

一般に$\tilde{D}$中の閉集合Eは，それが高高可算個の小領域v_i（$i=1, 2, \cdots$）とその中の固有面σ_iがあってそれらの点集合の和として表されるとき：$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}|\sigma_i|$，$\tilde{D}$中で退化的であると呼ばれる．このとき$\tilde{D}-E$は常に領域になる．$\mathfrak{F}$を$\tilde{D}$中の任意の固有面（既約又は可約）の族とする．$\mathfrak{F}$の台$|\mathfrak{F}|$が退化的集合であるとき$\mathfrak{F}$は退化的族であると呼ばれる．

定理3．$\tilde{D}$をC^2中の領域とし，Eを$\tilde{D}$中の退化的集合とする．SをD（$=\tilde{D}-E$）中の大域解析的な社会とする．SはEの少なくとも1点をその真性特異点としてもっていると仮定する．このときSの真性特異点の集合E^*（$\subsetneqq E$）は$\tilde{D}$中の退化的集合である．さらに次のことが成り立つ：

Ⅰ．Sの解析的射影は次のもののどれか1つになる：P^1，C^1，C^*，T^1；

Ⅱ．もしさらにSが高高（A）型分解しか含まないならば次のことが成り立つ：

1°　Sの固有面でE^*に集積するものの全体S^*はベールの第2類の族である；

2°　S^*に属する各固有面はある意味でE^*に強く集積する．

この定理3，Ⅱは1複素変数函数論における孤立真性特異点に関するピカールの定理の，固有面の社会という状況へのやや弱い形での拡張であると考えられる．

定理3，Ⅱを使って，大域解析性の問題に対して非常に特別な場合には肯定的に答えられる：

系．DをC^2中の領域とし，SをD中の社会とする．SはD中の各点で局所解析的で，D中で大域連続的で，高高（A）型分解しか含まず且つ分解する固有面の族Mは高高1次元測度が有限の族か又は1次元測度が有限のものの高高可算和になっている族と仮定する．（ここで1次元測度有限の族などの概念はMの台|M|を一般の固有平面で切った切り口の点集合により定義されるものである．）このときSはD中で大域解析的である．

6．定理3，Ⅰに関して，逆に退化的真性特異性をもっている大域解析的な社会Sでその解析的射影がP^1，C^1，C^*，T^1になるものが構成できるかという作図問題を考える．このとき定理3，Ⅱに関係して，高高（A）型分解しか含まないSの存在は簡単に示される．ところがさらに（B）型分解をも含むSではその真性特異点集合E^*へSの固有面は1つも集積しないという性質をもったものが多数存在することも示される．このことを正確に述べるために次の状況を設定しよう．

$\tilde{S}$を$\tilde{D}$中の1つの社会とし，そのある退化的部分族Mがあって$\tilde{S}$のD（$=\tilde{D}-|M|$）への制限Sが大域解析的となっているとする．Sは次の2つの条件を満たしているとする：

1°　Sは|M|の全ての点をその真性特異点としている；

2°　Sの解析的射影はRである．

このとき$\tilde{S}$はその内部において，対応する解析的射影Rをもって，真性特異性|M|を実現していると言う．

$\tilde{S}$の|M|の近傍での真性特異性のある意味での強さに関して次の3段階のものが考えられる．

1）$\tilde{S}$は$\tilde{D}$中で大域連続的であるとする．このとき$\tilde{S}$は$\tilde{D}$中に集積点をもたないある集合（$\subsetneqq|M|$）に属する点以外の各点では局所解析的になっていることが示される．そこでもし$\tilde{S}$が|M|の全ての点で局所解析的になっているならば$\tilde{S}$は|M|で段階1の真性特異性をもつと言う．

2）$\tilde{S}$は$\tilde{D}$中で大域正規的であるとする．もし$\tilde{S}$が｜M｜の各点で局所連続性がやぶれているならば$\tilde{S}$は｜M｜で段階2の真性特異性をもつと言う．またもし$\tilde{S}$が｜M｜のある点では局所連続的になっていても｜M｜の他の少なくとも1点で$\tilde{S}$の局所連続性がやぶれているならば$\tilde{S}$は｜M｜で段階2*の真性特異性をもつと言う．

3）もし$\tilde{S}$が｜M｜の各点で局所正規性がやぶれているならば$\tilde{S}$は｜M｜で段階3の真性特異性をもつと言う．またもし$\tilde{S}$が｜M｜のある点では局所正規的になっていても｜M｜の他の少なくとも1点で$\tilde{S}$の局所正規性がやぶれているならば$\tilde{S}$は｜M｜で段階3*の真性特異性をもつと言う．

定理4． $\tilde{D}$をC^2中で任意に与えられた領域とする，特にC^2自身であってもよい．このとき$\tilde{D}$中に次のそれぞれⅠ，Ⅱの場合で数えあげられた社会が存在する．いづれの場合も（B）型分解を含んでいる：

Ⅰ．$\tilde{D}$中の社会$\tilde{S}_1$，$\tilde{S}_2$，$\tilde{S}_3$で不定点はもたず，その内部でそれぞれ段階1，2，3の真性特異性を実現し且つ対応する解析的射影がP^1となるもの；

Ⅱ．$\tilde{D}$中の社会$\tilde{S}_1$，$\tilde{S}_2$*，$\tilde{S}_3$*で不定点はもたず，その内部でそれぞれ段階1，2*，3*の真性特異性を実現し且つ対応する解析的射影がT^1となるもの．

注意2． さらに次の種類の社会が存在することが示される．これらは全て（B）型分解を含んでおり且つこの一般の場合には大域解析性の問題に対して否定的に答えるものである：

Ⅰ．D＝{C^1 {x}，｜y｜＜1} なる直積型の領域とする．D中の社会Sでこれが（B）型分解を含んでいるという点以外は全て5．系の中で述べられたのと同じ性質をもっているが，特にその分解する固有面の族は1次元測度が有限の族であるが，D中では大域解析的でないもの；

Ⅱ．C^2においても，その分解する固有面の族は1次元測度が有限又はそれ以上の族となっているが，それぞれ次のような性質をもっているもの：

1°　C^2中の社会Sで不定点はもたず，C^2中の各点で局所解析的で，C^2中で大域連続的であるがC^2中では大域解析的でないもの；

2°　C^2中の社会Sで原点1点でのみ不定点をもち，C^2中の原点以外の各点で局所解析的で，C^2中で大域連続的であるが原点では局所解析的でないもの．

（1990年7月2日受理）

文　献

[1] 岡，多価解析函数族などについての覚え書［仏文］，広島文理科大学理学紀要（A）第4巻（1934年）93－98ページ．

[2] コッホ，多複素変数函数論に寄せて　解析的射影［独文］，ミュンスター大学数学研究所叢書　1953年．全79ページ．

[3] 近藤，2複素変数空間における固有面の社会について［仏文］，日本数学会欧文機関誌　第23巻（1971年）53－81ページ．

[4] ——〃，2複素変数空間における固有面の社会について　Ⅱ．退化的真性特異性［仏文］，京都大学理学部数学紀要　第30巻（1990年）印刷中．

[5] ストイロフ，解析函数論における位相的原理についての講義（第2版）［仏文］，パリ　ゴーチェ・ビヤール書店　函数論ボレル叢書　1956年．

[6] 西野，多複素変数整函数についての新研究（Ⅰ）［仏文］，京都大学理学部数学紀要　第8巻（1968年）49－100ページ．