

5. *Cahn R.W., Siemers P.A., Geiger J.E., Bardhan P.* // *Acta Metal.* 1987. Vol. 35, № 11. P. 2737.
6. *Kozubski R., Sołtys J., Cadeville M.C. et al.* // *Intermetallics.* 1993. Vol. 1. P. 139.
7. *Сюткина В.И., Кислицина И.Е., Абдулов Р.З., Руденко В.К.* // *Физика металлов и металловедение.* 1986. Т. 61, № 3. С. 504.
8. *Лось В.Ф., Репецкий С.П., Гаркуша В.В.* // *Металлофизика.* 1991. Т. 13, № 9. С. 28.
9. *Барышев Е.Е., Тягунов Г.В., Степанова Н.Н.* Влияние структуры расплава на свойства жаропрочных никелевых сплавов в твердом состоянии. Екатеринбург: УрО РАН, 2010.
10. *Лепихин С.В., Степанова Н.Н., Акшенцев Ю.Н.* и др. // *Физика металлов и металловедение.* 2004. Т. 97, № 4. С. 88.
11. *Казанцева Н.В., Виноградова Н.И., Степанова Н.Н.* и др. // Там же. 2009. Т. 107, № 4. С. 401.
12. *Тягунов Г.В., Баум Б.А., Цепелев В.С.* и др. // *Завод. лаб. Диагностика материалов.* 2003. Т. 69, № 2. С. 35.
13. *Лепихин С.В., Барышев Е.Е., Тягунов Г.В.* и др. // Там же. 2005. Т. 71, № 4. С. 35.
14. *Николаев Б.В., Тягунов Г.В.* // *Расплавы.* 1995. № 4. С. 22.
15. *Савин О.В., Степанова Н.Н., Акшенцев Ю.Н.* и др. // *Физика металлов и металловедение.* 2000. Т. 90, № 1. С. 66.

УДК 669.18

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВОГО РЕЖИМА ПРИ ДОННОЙ ПРОДУВКЕ ПЕЧИ-КОВША

### Сообщение III\*

© 2013 г. С.А. Новокрещенов, В.С. Швыдкий, В.П. Жуков,  
Ю.Н. Овчинников, Д.Д. Черемисин

Уральский федеральный университет (УрФУ)  
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург

Существенное влияние на теплообмен и кинетику химических превращений при проведении огневого рафинирования меди в печи-ковше оказывают формирование и движение газовых пузырей в расплаве. В представленной математической модели рассмотрено изменение скорости пузыря, а также объема и поверхности движущегося газового пузыря по высоте расплава.

**Ключевые слова:** пузырь, печь-ковш, рафинирование меди, пора, продувка.

Formation and movement of gas bubbles in the melt affect the heat interchange and the kinetics of chemical transformations in the course of copper fire refining in a ladle-furnace. The present mathematical model considers changing the bubble speed and volume and surface of moving gas bubble through the melt height.

**Key words:** bubble, ladle-furnace, copper refining, pore, blowing through.

\* Сообщения I и II опубликованы соответственно в [1] и [2].

**Новокрещенов С.А.** – канд. техн. наук, профессор кафедры экономики и управления на металлургических предприятиях УрФУ (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19). Тел.: (343) 375-45-29. E-mail: novokreschenov@e1.ru.

**Швыдкий В.С.** – докт. техн. наук, профессор кафедры теплофизики и информатики в металлургии УрФУ. Тел.: (343) 375-48-15. E-mail: vshvit@isnet.ru.

**Жуков В.П.** – докт. техн. наук, профессор кафедры металлургии тяжелых цветных металлов (МТЦМ) УрФУ. Тел.: (343) 375-47-95. E-mail: zhukov.v.p@mail.ru.

**Овчинников Ю.Н.** – докт. техн. наук, профессор кафедры теплофизики и информатики в металлургии УрФУ. Тел.: (343) 375-48-15.

**Черемисин Д.Д.** – аспирант кафедры МТЦМ УрФУ. E-mail: e1.ry@e1.ru.

В работе [1] показано, что за счет неравномерности распределения температуры расплава и гидростатического давления по ванне печи-ковша объем всплывающего пузыря возрастает в 2,64 раза. Изменение объема и поверхности газового пузыря предопределили задачу по разработке математической модели динамики формирования пузыря и его движения в расплаве. Данные факторы оказывают заметное влияние на теплообмен и кинетику химических превращений на межфазной границе и в объеме жидкости. Поэтому их оценка, в частности как функции высоты слоя металла, имеет прикладное значение для определения степени использования газообразного реагента в пузыре по мере его подъема и, соответственно, поиска рационального уровня жидкой ванны в печи.

**Движение одиночных пузырей.** В простейшем случае скорость перемещения можно установить, если предположить его стационарность. Эта возможность определяется двумя числами подобия: числом Вебера, которое задает предельные возможности сохранения пузырем сферической формы:  $We = \sigma/[g(\rho_{ж} - \rho_{г})D_{п}^2]$ , и числом Рейнольдса:  $Re = \rho_{г}WD_{п}/\mu_{ж}$ . В случае, когда это условие соблюдается, должно быть равновесие силы сопротивления движению пузыря и подъемной силы, т.е. должно выполняться равенство

$$\zeta W^2 / (\rho_{ж} F) = V_{п} g (\rho_{ж} - \rho_{г}). \quad (1)$$

Здесь  $\zeta$  — коэффициент сопротивления давлению;  $F$  — площадь миделевого сечения пузырька,  $m^2$ ;  $D_{п}$  и  $V_{п}$  — диаметр, м, и объем пузыря,  $m^3$ ;  $W$  — скорость его движения, м/с;  $\rho_{ж}$  — плотность жидкости,  $kg/m^3$ ;  $\rho_{г}$  — плотность газа в пузыре,  $kg/m^3$ ;  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $N/m^2$ ;  $\mu_{ж}$  — динамическая вязкость жидкости,  $MPa \cdot c$ .

Отсюда

$$W = [2g(\rho_{ж} - \rho_{г})V_{п}/(\zeta F \rho_{ж})]^{1/2}. \quad (2)$$

При допущении сохранения пузырем сферической формы скорость его всплытия будет равна

$$W = [4g(\rho_{ж} - \rho_{г})D_{п}/(3\zeta \rho_{ж})]^{1/2}. \quad (3)$$

Поскольку  $\rho_{ж} \gg \rho_{г}$ , выражение (3) можно упростить до соотношения

$$W = [4gD_{п}/(3\zeta)]^{1/2}. \quad (4)$$

Таким образом, скорость движения пузырька в этом случае определяется, главным образом, двумя факторами: размером пузырька ( $D_{п}$ ) и коэффициентом

сопротивления давлению ( $\zeta$ ), который, в свою очередь, зависит от поперечного сечения пузырька. Чем меньше объем пузырька, тем ближе его форма к сферической. Вследствие подвижности поверхности раздела фаз газовый пузырек всплывает с большей скоростью, чем твердая частица или капля того же размера при прочих равных условиях. Это обусловлено тем, что жидкость «прилипает» к поверхности твердого тела и, следовательно, неподвижна относительно него. На границе же раздела жидкости и газа происходит относительное движение фаз. Поэтому при всплывании пузырька вблизи его поверхности наблюдаются меньшие градиенты скорости, чем при движении твердой частицы при аналогичных условиях. Иными словами, вязкое трение оказывает на твердую частицу большее воздействие, чем на пузырек газа. А. Рыбчинский и М. Адамар теоретическим путем получили формулу для определения скорости всплывания сферической частицы любого состава при  $Re < 2$  [3]:

$$W = \frac{g(\rho_{ж} - \rho_{г})D_{п}^2}{6\mu_{ж}} \frac{1 + \mu_{г}/\mu_{ж}}{2 + 3\mu_{г}/\mu_{ж}}. \quad (5)$$

Для условий расплава меди  $\mu_{г} \ll \mu_{ж}$ , поэтому

$$W = \frac{g(\rho_{ж} - \rho_{г})D_{п}^2}{12\mu_{ж}}. \quad (6)$$

Найдем приближенное значение скорости всплывания пузырька. Для этого учтем, что динамическая вязкость расплава меди зависит от температуры согласно выражению, полученному автором работы [4]:

$$\lg \mu_{;ж} = 800T^{-1} - 0,05 \text{ [MPa} \cdot \text{c]}. \quad (7)$$

Тогда при средней температуре расплава 1473 К [1] соответственно получим  $\mu_{ж} = 3,112 \text{ MPa} \cdot \text{c}$  и  $\rho_{ж} = 8215 \text{ kg/m}^3$ . Средний диаметр пузырька примем равным  $(10 + 17,15)/2 = 13,57 \text{ мм}$  [1]. Тогда

$$W = 9,81(8215 - 1,27) \cdot (0,014)^2 / (12 \cdot 3,11 \cdot 10^6) = 0,39 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

Следовательно,

$$Re = \rho_{г}WD_{п}/\mu_{г} = 1,27 \cdot 0,39 \cdot 10^{-6} \cdot 0,014 / (52,3 \cdot 10^{-6}) = 0,131 \cdot 10^{-3},$$

$$We = \sigma/[g(\rho_{ж} - \rho_{г})D_{п}^2] = 1,35 \cdot 9,81 / [9,81 \cdot (8215 - 1,27) \cdot (0,014)^2] = 0,892.$$

Таким образом, в случае стационарного процесса образования и всплывания пузырька размер послед-

него не может увеличиться свыше 17,15 мм, что противоречит практическим наблюдениям. Очевидно, в ковше к пузырьку интенсивно подсасывается газ, насыщающий расплав, и стационарного всплывания не происходит. С другой стороны, полученные значения чисел подобия свидетельствуют о том, что пузырек сохраняет сферическую форму.

С увеличением размера пузырьков влияние сил поверхностного натяжения по сравнению с динамическим воздействием расплава уменьшается и форма отклоняется от сферической, приобретая вид, приближающийся к гидродинамически неустойчивому сплюснутому сфероиду. Скорость движения таких пузырьков можно рассчитать исходя из закона сохранения энергии. Работа уменьшения толщины сплюснутого сфероида на величину  $dh$  равна изменению энергии, обусловленной поверхностным натяжением. Это изменение энергии равно поверхностному натяжению ( $\sigma$ ), умноженному на приращение поверхности ( $dF$ ). Таким образом,

$$\zeta W^2 / 2 (\rho_{\text{ж}} F dh) = -\sigma dF. \quad (8)$$

Знак минус в уравнении (8) обусловлен тем, что рост поперечного сечения  $F$  сопровождается уменьшением высоты пузырька. Объем пузырька при его деформации не изменяется, т.е.  $V_{\text{п}} = Fh = \text{const}$ . Поэтому

$$dV_{\text{п}} = Fdh + hdF = 0. \quad (9)$$

Заменяя в выражении (8)  $Fdh$  на  $-hdF$ , получаем

$$h = V_{\text{п}} / F = 2\sigma / (\zeta \rho_{\text{ж}} W^2). \quad (10)$$

Подставляя полученное значение  $V_{\text{п}} / F$  в (2), имеем

$$W = [4g\sigma(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}) / (\zeta^2 \rho_{\text{ж}}^2)]^{1/2}. \quad (11)$$

Эта формула была выведена автором работы [5]. Зависимость коэффициента сопротивления пузырька, обтекаемого жидкостью, от  $Re$  можно найти в различных источниках. В частности, для  $Re > 50$  хорошие результаты дает формула Д. Мура [6]:

$$\zeta = \frac{48}{Re(1 - 2,21/\sqrt{Re})}. \quad (12)$$

При  $Re > 100$  величина  $\zeta$  изменяется сравнительно мало. Поскольку значение числа Рейнольдса возрастает с увеличением  $D_{\text{п}}$ , то скорость всплывания больших пузырей должна слабо зависеть от размера. Это подтверждается расчетом  $V_{\text{п}}$  воздушных пузырей в воде в зависимости от  $D_{\text{п}}$ . При среднем размере

пузыря  $\bar{D}_{\text{п}} = 13,57$  мм скорость его подъема составляет почти 2 м/с, т.е. пузырек «проскакивает» ковш менее чем за 0,75 с.

Известно [7], что если объем пузырька превышает  $2 \text{ см}^3$ , то он приобретает форму практически правильного сферического сегмента и в жидкости любой вязкости всплывает со скоростью

$$W = (1 \pm 0,05) \sqrt{g D_{\text{п}} / 2}. \quad (13)$$

Принимая  $\bar{D}_{\text{п}} = 0,01357$  м, по формуле (13) получим  $W = 0,26 \pm 0,27$  м/с, что существенно отличается от ранее полученных данных.

Значительное расхождение результатов свидетельствует о низкой вероятности существования установившегося режима всплывания пузырька, что предполагает анализ закономерностей его нестационарного движения в расплаве.

**Закономерности нестационарного движения пузырька.** Нестационарный характер движения газового пузырька обусловлен действующими на него внешними силами и изменением геометрических размеров. При математическом описании движения пузырька через слой расплава в печи-ковше с продувкой «снизу» были приняты следующие допущения:

- инерционные силы, действующие на пузырек со стороны газового потока при продувке через отверстие в днище печи-ковша, пренебрежимо малы;
- геометрическая форма пузырька в процессе его движения через слой расплава — сферическая и сохраняется до момента касания его с поверхностью расплава;
- вследствие существенной вязкости расплава мгновенным гидродинамическим сопротивлением, которое имеет место в случае движения пузырька с большим ускорением, можно пренебречь;
- на данном этапе исследования полагаем, что расплав неподвижен;
- инерционная составляющая силы сопротивления, обусловленная присоединенной массой пузырька, практически отсутствует.

Пузырек движется в объеме расплава и при своем движении испытывает сопротивление именно со стороны расплава. Поэтому коэффициент сопротивления должен определяться свойствами расплава, а так как его выражают через число Рейнольдса, то и оно должно включать (помимо скорости движения и характерного размера) физические свойства расплава. При учете собственного движения расплава число Рейнольдса должно рассчитываться по относительной скорости движения пузырька. По-

этому уравнение движения одиночного пузыря при учете всех факторов и принятых допущений можно записать в следующем виде:

$$m_{\text{п}}dW/d\tau = V_{\text{п}}g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}) - fF_{\text{пов}}\rho_{\text{ж}}W^2/2 - (\zeta\pi D_{\text{п}}^2/4)(\rho_{\text{ж}}W^2/2), \quad (14)$$

где  $m_{\text{п}}$  — масса пузыря, кг;  $F_{\text{пов}}$  — площадь его поверхности, м<sup>2</sup>;  $f$  — коэффициент вязкостного трения.

После несложных алгебраических преобразований и принимая  $\zeta = 0,47$  [8], а  $d\tau = dh/W$ , получим

$$(\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}})W(dW/dh) = g(1 - \rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}}) - (3W^2/D_{\text{п}})(f + 0,47/4). \quad (15)$$

Обозначив  $A = \rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}}$ ,  $B = g(1 - \rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}})$ ,  $C = 3(f + 0,47/4)/D_{\text{п}}$ , имеем дифференциальное уравнение движения одиночного пузыря следующего вида:

$$WdW/dh = B/A - W^2C/A.$$

Пусть  $B/A = k(h)$ ,  $C/A = m(h)$ , тогда получаем уравнение в форме дифференциального уравнения Бернулли:

$$WdW/dh + m(h)W^2 = k(h). \quad (16)$$

Уравнение (16) решается подстановкой  $W = uz$ . В результате имеем аналитическое решение уравнения движения пузыря в виде

$$W = \exp \left\{ - \int_0^h m(h)dh \cdot \sqrt{2 \left[ \int_0^h k(h) \exp \left[ 2 \int_0^h m(h)dh \right] dh + C \right]} \right\}, \quad (17)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования — находится из условия  $h = 0$ ,  $W = 0$ .

Для численной оценки скорости движения пузыря в объеме расплава по высоте печи-ковша найдем значения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$$1. A = \rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}}.$$

Для расплава меди [4] в интервале температур 1373—1873 К имеем

$$\rho_{\text{ж}} = 8300 - 0,73(T - 1356) \text{ [кг/м}^3\text{]}.$$

Воспользовавшись ранее полученными данными по температурному полю печи-ковша [1], получим

$$\rho_{\text{ж}} = 9090,59 - 1024,19 \exp(-0,181h),$$

$$\rho_{\text{г}} = m_{\text{г}}/V_{\text{п}} = \rho_{\text{г}0}V_0/V_{\text{п}} = \rho_{\text{г}0}(V_0/V_{\text{п}}).$$

Если учесть, что ось проекций совпадает с на-

правлением вектора скорости движения пузыря, то после подстановки  $x = 1,5 - h$  в выражении  $V_{\text{п}}/V_0$  [1] окончательно получим

$$\rho_{\text{г}} = 1,27/\{1 - 1,76x - 6,89 \ln[0,64 + 0,24(1,5 - x)] + [2,70/(1 + 0,38(1,5 - x) - 1,71)]\}. \quad (18)$$

$$2. B = 9,81(1 - A).$$

$$3. C = 3(f + 0,47/4)/D_{\text{п}}(h).$$

Значение коэффициента  $f$  можно вычислить по формуле А.Д. Альтшуля [7]:

$$f = 0,074/\text{Re}^{0,2}.$$

Если принять  $\text{Re} < 400$ , что соответствует всем возможным режимам движения пузыря, то величина  $f$  составит порядка 0,07—0,02.

Тогда численное значение  $(f + 0,47/4)$  лежит в пределах 0,14—0,19. Примем эту величину равной 0,16.

Далее имеем:

$$D_{\text{п}} = (6V_{\text{п}}/3,14)^{1/3} = (1,91V_{\text{п}})^{1/3} = (1,91 \cdot 423 \cdot 10^{-9} V_{\text{п}}/V_0)^{1/3}, \quad (19)$$

где  $423 \cdot 10^{-9}$  — начальный объем пузыря, м<sup>3</sup>.

Используя уравнение [1]

$$V_{\text{п}}/V_0 = 1 - 1,76x - 6,89 \ln[0,64 + 0,24(1,5 - x)] + [2,69/(1 + 0,38(1,5 - x) - 1,71)],$$

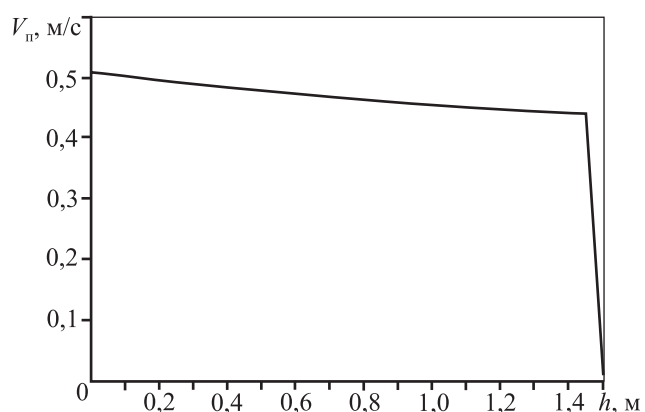
окончательно получим

$$k(h) = B/A = g[(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})/\rho_{\text{ж}}]/(\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}}) = g(\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{г}} - 1),$$

$$m(h) = C/A = 3 \cdot 0,16/(D_{\text{п}}\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{ж}}) = 0,48\rho_{\text{ж}}/(D_{\text{п}}\rho_{\text{г}}).$$

Как видно из предварительного анализа решения (17) дифференциального уравнения движения одиночного пузыря, его скорость имеет ярко выраженный нелинейный характер по высоте расплава в печи-ковше. Интегралы, входящие в решение (17), формализовать через известные функции не представляется возможным, поэтому найдем приближенное решение методом псевдопостоянных коэффициентов. Результаты расчетов представлены на рисунке.

Анализ данных рисунка свидетельствует о том, что вид графика в области ввода газа зависит от шага вычислений. В частности, координаты излома соответствуют точкам (1,45; 0,44) и (1,45; 0,19). При уменьшении шага расчетов при сохранении ординат точек излома на прежнем уровне абсциссы сдвигаются к значению 1,5. Иными словами, изменение



Распределение величины скорости всплытия пузыря по глубине расплава

скорости пузыря от 0 до 0,438 м/с происходит практически мгновенно (в пределах  $10^{-3}$  м). В основной области пространства ковша скорость подъема пузыря увеличивается практически по закону квадратичной параболы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование разработанной математической модели позволило показать характер образования и движения газового пузыря по высоте слоя расплава. Установлено, что максимальный рост скорости пузыря при его всплытии наблюдается при отрыве пузыря от «сопла» (80 % предельной скорости на выходе из слоя металла). Максимальная скорость его движения при выходе на поверхность расплава равна, по результатам расчетов, 0,507 м/с. Таким образом, газовый пузырь от момента начала своего движения до разрыва ножки проходит расстояние  $10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-3}$  м, при этом скорость его движения изменяется от нуля до 0,44 м/с. В этом интервале его форма близка к эллипсоиду вращения, большая ось которого совпадает с направлением его вектора скорости. В дальнейшем форма газового пузыря становится близкой к сферической и его скорость, изменяясь по закону квадратичной параболы, увеличивается примерно до 0,51 м/с.

Полученные данные по скорости движения пузыря в начальной области ввода газа в расплав подтверждаются результатами современных исследова-

ний гидрогазодинамических процессов внедрения газа в жидкость. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что пузырь соединен с отверстием, через которое поступает газ в расплав, газовой перемычкой — «ножкой». По данным работы [9] отрыв пузыря наступает в момент достижения критического объема газов путем разрыва «ножки». В момент отрыва «ножка» сохраняется и является зародышем нового пузыря. Такой механизм образования газовой фазы также подтверждается результатами исследований, полученных ранее [10] в опытах с использованием скоростной киносъемки, что и было учтено для адаптации разработанной модели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новокрещенов С.А., Швыдкий В.С., Жуков В.П. и др. // Изв. вузов. Цвет. металлургия. 2011. № 4. С. 61.
2. Жуков В.П., Новокрещенов С.А., Агеев Н.Г. // Там же. 2013. № 3. С. 58.
3. Коган В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1977.
4. Чурсин В.М. Плавка медных сплавов. Физико-химические и технологические основы. М.: Металлургия, 1982.
5. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
6. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник. Кн. 2. Теплоэнергетика и теплотехника. 2-е изд., перераб. / Под ред. В.А. Григорьева и Б.М. Зорина. М.: Энергоатомиздат, 1988.
7. Теплотехнический справочник. В 2 т. 2-е изд., перераб. / Под общ. ред. В.Н. Юренева и П.Д. Лебедева. М.: Энергия, 1976.
8. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат, 1965.
9. Сурин В.А., Назаров Ю.Н. Массо- и теплообмен, гидрогазодинамика металлургической ванны. М.: Металлургия, 1993.
10. Жуков В.П. Научные основы и технология переработки сульфидно-оксидных и металлических расплавов с использованием продуктов сгорания природного газа: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. Екатеринбург: УГТУ—УПИ, 1998.