ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 681.3.06:519

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ КОНКУРИРУЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДОСТАТОЧНОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

П.А. ПАВЛОВ[1], Н.С. КОВАЛЕНКО[2]
[1]Полесский государственный университет,
г. Пинск, Республика Беларусь, pin2535@tut.by,
[2]Белорусский государственный экономический университет,
г. Минск, Республика Беларусь, kovalenkons@rambler.ru

ВВЕДЕНИЕ

В связи и широким распространением принципов распределенной обработки параллельных процессов актуальными являются проблемы построения и исследования математических моделей этого вида параллелизма [1]. Данное сообщение является продолжением работы [2], в которой были решены задачи определения минимального общего времени реализации множества распределенных кооперативных процессов, конкурирующих за многократно используемый ресурс для асинхронного и первого синхронного режимов взаимодействия процессов, процессоров и блоков структурированного программного ресурса.

В настоящей работе авторами предложено решение оптимизационных задач по расчету характеристик параллельных систем, поиска критериев эффективности и оптимальности организации выполнения множества взаимодействующих распределенных процессов в условиях неограниченного параллелизма с учетом накладных расходов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Для дальнейшего изложения материала нам понадобятся понятия, введенные в работе [2].

Процесс – последовательность блоков (команд, наборов действий) $I_s = (1, 2, ..., s)$, для выполнения которых используется множество процессоров (интеллектуальных исполнителей, процессорных узлов, обрабатывающих устройств, роботов). При этом процесс называется распределенным, если все блоки или часть из них обрабатываются разными обрабатывающими устройствами. Процессы, которые для ускорения своего выполнения обрабатываются параллельно, влияя на поведение друг друга путем обмена информацией, называются *кооперативными* или *взаимодействующими* процессами.

Реентерабельные (многократно используемые) ресурсы – это ресурсы, которые характеризуются возможностью одновременного использования несколькими процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или ее часть необходимо интеллектуальным исполнителям выполнять многократно, такую последовательность будем называть *программным ресурсом*, а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Структурирование (декомпозиция) – это способ уменьшения времени выполнения больших задач, вычислений и вообще различных проблем, который предполагает то или иное разбиение задачи на блоки $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ с последующей организацией линейного или частичного порядка выполнения.

Как и в [2] математическая модель распределенной обработки конкурирующих процессов включает в себя: *p*, $p \geq 2$, процессоров; *n*, $n \geq 2$, распределенных конкурирующих процессов; *s*, $s \geq 2$, блоков структурированного программного процесса; матрицу $T = [t_{ij}]$, $i = \overline{1,n}$,

$j=\overline{1,s}$, времен выполнения блоков процессами. Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon>0$, характеризующий накладные расходы, затрачиваемые на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса множеством конкурирующих распределенных процессов. Предполагается, что все процессы используют одну копию структурированного на блоки программного ресурса. В дальнейшем будем говорить, что перечисленные объекты математической модели образуют систему конкурирующих процессов.

Определение 1.1. Систему конкурирующих процессов будем называть *одинаково распределенной*, если времена t_{ij} выполнения блоков Q_j, $j=\overline{1,s}$, программного ресурса каждым из i–х процессов совпадают и равны t_i для всех $i=\overline{1,n}$, т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1}=t_{i2}=...=t_{is}=t_i$ для всех $i=\overline{1,n}$.

Обозначим $T^n=\sum_{i=1}^{n}t_i$ суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j всеми n процессами с учетом накладных расходов и назовем набор параметров $(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n,\ T^n)$ данной системы конкурирующих процессов *характеристическим*.

2. АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ОРГАНИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

В [2,4] введены и исследованы базовые *асинхронный* и два *синхронных* режима, возникающие при организации распределенных процессов в условиях конкуренции за общий ресурс. Для вычисления наименьшего общего времени выполнения множества конкурирующих неоднородных, однородных и одинаково распределенных процессов в рамках очерченных режимов получены различные математические соотношения. Определенный теоретический и практический интерес представляет задача сравнительного анализа полученных соотношений.

Пусть $\beta=\left\{(t_1^{\varepsilon},\ t_2^{\varepsilon},\ ...,\ t_n^{\varepsilon},\ T_{\varepsilon}^n)\ \middle|\ T_{\varepsilon}^n=\sum_{i=1}^{n}t_i^{\varepsilon},\ t_i^{\varepsilon}=t_i+\varepsilon>0,\ i=\overline{1,n}\right\}$ – множество всех допустимых характеристических наборов систем одинаково распределенных конкурирующих процессов. Выделим из множества β подмножество характеристических наборов вида:

$$H(T_{\varepsilon}^n)=\{(t_1^{\varepsilon},\ t_2^{\varepsilon},\ ...,\ t_n^{\varepsilon},\ T_{\varepsilon}^n)\in\beta\ \middle|\ t_1^{\varepsilon}\le t_2^{\varepsilon}\le...\le t_l^{\varepsilon}\ge t_{l+1}^{\varepsilon}\ge...\ge t_n^{\varepsilon},\ l=\overline{1,n}\}.$$

Тогда для введенного подмножества характеристических наборов справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть* $\delta\in\mathrm{H}(T_{\varepsilon}^n)$ *– характеристический набор любой одинаково распределенной системы с параметрами p, n, s и накладными расходами* $\varepsilon>0$. *Тогда в случае* $2\le s\le p$ *минимальные общие времена* T_{op}^{ac}, T_{op}^{1} *и* T_{op}^{2} *выполнения множества одинаково распределенных конкурирующих процессов в асинхронном и базовых синхронных режимах совпадают*.

Доказательство. Пусть $t_l^{\varepsilon}=\max_{1\le i\le n}t_i^{\varepsilon}$. Тогда для асинхронного и второго синхронного режима, обеспечивающего непрерывное выполнение каждого блока Q_j всеми n процессами для любого характеристического допустимого набора одинаково распределенной системы, в том числе и для любого характеристического набора $\delta\in H(T_{\varepsilon}^n)$, при $2\le s\le p$, имеют место равенства:

$$T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon)=T_{op}^{2}(p,n,s,\varepsilon)=T_{\varepsilon}^{n}+(s-1)t_{l}^{\varepsilon}.$$

Пусть взаимодействие процессов, процессоров и блоков осуществляется в первом синхронном режиме с непрерывным выполнением блоков программного ресурса внутри каждого из процессов. В этом режиме для любого характеристического набора из множества β при $2\le s\le p$ выполняется равенство:

$$T_{op}^{1}(p,n,s,\varepsilon)=T_{\varepsilon}^{n}+(s-1)\left[t_{n}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{n}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}\right].$$

Покажем, что для любого характеристического набора $\delta\in H(T_{\varepsilon}^{n})$ выполняется равенство $t_{n}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{n}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}=t_{l}^{\varepsilon}$, тем самым будет доказана теорема.

Так как $t_{l}^{\varepsilon}=\max_{1\le i\le n}t_{i}^{\varepsilon}$, то для всех номеров $1\le i\le l\le n$ имеет место равенство $\sum_{i=2}^{l}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}=0$, а для $1\le l\le i\le n$ имеет место $\sum_{i=l+1}^{n}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}=t_{l}^{\varepsilon}-t_{n}^{\varepsilon}$.

Следовательно, $t_{n}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{n}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}=t_{n}^{\varepsilon}+t_{l}^{\varepsilon}-t_{n}^{\varepsilon}=t_{l}^{\varepsilon}$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. *Для любой одинаково распределенной системы с параметрами p, n, s и накладными расходами $\varepsilon>0$, допустимый характеристический набор которой $\delta\notin H(T_{\varepsilon}^{n})$, при $2\le s\le p$ выполняются соотношения:*

$$T_{op}^{1}(p,n,s,\varepsilon)>T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon)=T_{op}^{2}(p,n,s,\varepsilon).$$

Доказательство. Условие теоремы 2 равносильны неравенству $t_{n}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{n}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}-\max_{1\le i\le n}t_{i}^{\varepsilon}>0$. Доказательство последнего проведем индукцией по числу процессов $n,\ n\ge 2$. При $n=2$ множество всех допустимых характеристических наборов систем одинаково распределенных конкурирующих процессов $\beta=(t_{1}^{\varepsilon},\ t_{2}^{\varepsilon})$ будет принадлежать классу $H(T_{\varepsilon}^{n})$.

Пусть, далее, неравенство $T_{op}^{1}(p,n,s,\varepsilon)>T_{op}^{ac}(p,n,s,\varepsilon)$ выполняется при $n=j$, т. е. $t_{j}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}-\max_{1\le i\le j}t_{i}^{\varepsilon}>0$, покажем, что оно справедливо при $n=j+1$. Действительно, при $n=j+1$ имеем:

$$t_{j+1}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j+1}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}-\max_{1\le i\le j+1}t_{i}^{\varepsilon}=$$
$$=t_{j+1}^{\varepsilon}+\sum_{i=2}^{j}max\{t_{i-1}^{\varepsilon}-t_{i}^{\varepsilon},0\}+max\{t_{j}^{\varepsilon}-t_{j+1}^{\varepsilon},0\}-\max_{1\le i\le j+1}t_{i}^{\varepsilon}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $\max\limits_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon} = t_{j+1}^{\varepsilon}$. Имеем:

$$t_{j+1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{j} max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} - t_{j+1}^{\varepsilon} =$$

$$= \sum_{i=2}^{j} max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} > 0.$$

Здесь второе слагаемое равно нулю, так как $t_{j+1}^{\varepsilon} \ge t_j^{\varepsilon}$, а первое слагаемое больше нуля, ибо в противном случае $\delta \in H(T_{\varepsilon}^{n})$, что противоречит условию теоремы 1.2.

2) значение $\max\limits_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon}$ находится в промежутке $1 \le i \le j$. В этом случае имеем:

$$t_{j+1}^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{j} max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} - \max_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon} =$$

$$= t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} + t_j^{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{j} max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} - \max_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\}.$$

Здесь $t_j^{\varepsilon} + \sum\limits_{i=2}^{j} max\{t_{i-1}^{\varepsilon} - t_i^{\varepsilon}, 0\} - \max\limits_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon} > 0$ по индукционному предположению и в силу того, что $\max\limits_{1\le i\le j+1} t_i^{\varepsilon} = \max\limits_{1\le i\le j} t_i^{\varepsilon}$.

Покажем далее, что $t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} \ge 0$. Действительно, для $t_j^{\varepsilon} = t_{j+1}^{\varepsilon}$ равенство нулю очевидно.

При $t_j^{\varepsilon} > t_{j+1}^{\varepsilon}$ получаем $t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} = t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} + t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon} = 0$, а при $t_j^{\varepsilon} < t_{j+1}^{\varepsilon}$ имеем, что $t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} + max\{t_j^{\varepsilon} - t_{j+1}^{\varepsilon}, 0\} = t_{j+1}^{\varepsilon} - t_j^{\varepsilon} > 0$, что и требовалось доказать.

3. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Выделим в классе одинаково распределенных систем конкурирующих процессов специальный подкласс, так называемых *стационарных* систем.

Определение 3.1. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем *стационарной*, если $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t$.

В [2,4] доказано, что для одинаково распределенных систем конкурирующих процессов с учетом накладных расходов $\varepsilon > 0$ при достаточном числе процессоров, т. е. $2 \le s \le p$, для всех трех базовых режимов, введенных в [1], минимальное общее время выполнения $T(p, n, s, \varepsilon)$ совпадает и вычисляется по формуле:

$$T(p,n,s,\varepsilon)=T_{\varepsilon}^{n}+(s-1)t_{max}^{\varepsilon}, \text{ где } T_{\varepsilon}^{n}=\sum_{i=1}^{n}t_{i}^{\varepsilon},\ t_{max}^{\varepsilon}=\max_{1\le i\le n}t_{i}^{\varepsilon},\ t_{i}^{\varepsilon}=t_{i}+\varepsilon,\ i=\overline{1,n}.$$

(3.1)

Для всех трех базовых режимов в случае стационарной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов в случае неограниченного параллелизма минимальное общее время их выполнения $\overline{T}_{\varepsilon}$ определяется равенством:

$$\overline{T}_{\varepsilon}(s\le p)=(n+s-1)t_{\varepsilon}, \text{ где } t_{\varepsilon}=T^{n}/n+\varepsilon,\ T^{n}=nt. \qquad (3.2)$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов будем называть *эффективной* при фиксированных $p,\ s\ge 2$, если выполняется соотношение $\Delta_{\varepsilon}=sT^{n}-T(p,n,s,\varepsilon)\ge 0$, где sT^{n} – время выполнения s блоков всеми n процессами в последовательном режиме.

При наличии двух эффективных одинаково распределенных систем конкурирующих процессов будем считать, что первая более эффективна, чем вторая, если величина Δ_{ε} первой системы не меньше соответствующей величины второй. Для введенного подмножества одинаково распределенных систем справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при* $2\le s\le p$ *и* $\varepsilon>0$ *существует стационарная более эффективная одинаково распределенная система.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим любую эффективную одинаково распределенную систему. Согласно определению 3.2, условие эффективности с учетом (3.1) записывается в виде следующего неравенства:

$$\Delta_{\varepsilon}(s\le p)=(s-1)(T^{n}-t_{max}^{n})-(n+s-1)\varepsilon\ge 0, \qquad (3.3)$$

где $T^{n}=\sum_{i=1}^{n}t_{i},\ t_{max}^{n}=\max_{1\le i\le n}t_{i}$

Для любой стационарной одинаково распределенной системы с учетом (3.2) имеем, что

$$\overline{\Delta}_{\varepsilon}(s\le p)=(s-1)(T^{n}-t)-(n+s-1)\varepsilon\ge 0, \text{ где } t=T^{n}/n. \qquad (3.4)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 3.1, достаточно доказать выполнение неравенства $\overline{\Delta}_{\varepsilon}\ge\Delta_{\varepsilon}$ для введенных эффективных систем. Подставив в левую и правую части последнего неравенства из (3.3) и (3.4) вместо $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(s\le p)$ и $\Delta_{\varepsilon}(s\le p)$ соответствующие величины и проведя несложные преобразования, приходим к равносильному неравенству $T^{n}-t_{max}^{n}\le(n-1)t$.

Докажем справедливость последнего неравенства. Рассмотрим стационарную одинаково распределенную систему, в которой $t=\max_{1\le i\le n}t_{i}=t_{max}^{n}$. Пусть для определенности $t_{max}^{n}=t_{l}$, тогда справедлива цепочка соотношений

$$T^{n}-t_{max}^{n}=\sum_{i=1}^{l-1}t_{i}+\sum_{i=l+1}^{n}t_{i}\le(n-1)t_{max}^{n}=(n-1)t,$$

что и доказывает теорему.

Следующее утверждение устанавливает достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы в случае неограниченного параллелизма.

Т е о р е м а 3.2. *Одинаково распределенная система конкурирующих процессов с параметрами* $p,\ n,\ s,\ \varepsilon$, *удовлетворяющая соотношениям* $3 \le s \le p,\ n = s \ne 3,\ sn \ge 2(n+s-1)$ *и* $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 \le i \le n} t_i$, *является эффективной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно (3.3) условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{T^n - t_{max}^n}{\varepsilon} \ge \frac{n+s-1}{s-1}. \qquad (3.5)$$

Следовательно, для доказательства теоремы 3.2 достаточно убедиться в справедливости неравенства (3.5). Непосредственная проверка показывает, что следствием соотношений $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 \le i \le n} t_i = t_{min}^n$ является цепочка неравенств

$$\frac{T^n - t_{max}^n}{\varepsilon} \ge \frac{(n-1)t_{min}^n}{\varepsilon} \ge n-1, \qquad (3.6)$$

так как в силу выбора ε выполняется неравенство $t_{min}^n / \varepsilon \ge 1$.

Из $sn \ge 2(n+s-1)$ следует справедливость неравенства

$$n-1 \ge \frac{n+s-1}{s-1}. \qquad (3.7)$$

Проверка показывает, что неравенство (3.5) является следствием неравенств (3.6) и (3.7). Таким образом, теорема 3.2 доказана.

Ниже формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при достаточном числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов ε.

Согласно (3.4) условие эффективности любой одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется соотношениями

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0,$$

которые равносильны выполнению неравенства

$$\varepsilon \le \frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)}. \qquad (3.8)$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$.

Т е о р е м а 3.3. *Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами* $3 \le s \le p,\ T^n,\ \varepsilon > 0$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi(1+\sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} - \text{целое}, \\ max\{\varphi(1+[\sqrt{s}]),\ \varphi(2+[\sqrt{s}])\}, & \text{если } \sqrt{s} - \text{нецелое}, \end{cases}$$

(3.9)

где $\varphi(x)=\dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$, $[x]$ *– наибольшее целое, не превосходящее* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что она достигает своего максимума в точке $x=1+\sqrt{s}$ при $x>0$. Положим

$$n_0 = \begin{cases} 1+\sqrt{s}, & \text{если } \sqrt{s} - \text{целое}, \\ max\{1+[\sqrt{s}],\ 2+[\sqrt{s}]\}, & \text{если } \sqrt{s} - \text{нецелое}. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Из определения функции φ, целого n_0 и неравенства (3.8) следует, что одинаково распределенная система конкурирующих n_0 процессов является эффективной. Таким образом, доказана достаточность условий (3.9) для существования систем указанного вида.

Необходимость условий (3.9) будет доказана, если будет установлена невозможность противоположного утверждения, т. е. невозможность существования одинаково распределенной системы конкурирующих n процессов, для которой выполнялось бы неравенство противоположное неравенству (3.8) и которая была бы эффективной. Если предположить существование такой системы с n процессами, то должно выполняться соотношение $n \ne n_0$, так как выше установлено, что одинаково распределенная система с n_0 процессами эффективна. Следовательно, для нее имеет место неравенство $\varepsilon \le (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1)$, в то время как для гипотетической системы с n процессами должно выполняться в силу предположения неравенство $\varepsilon \ge (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1)$. Очевидным следствием полученных неравенств является неравенство $\varepsilon > \varepsilon$. Полученное противоречие устанавливает необходимость условий (3.9). Таким образом, доказательство теоремы 3.3 завершено.

Очевидно, такой системы нет при $n=n_0$, так как, в силу определения функции φ, для такого n выполняется неравенство противоположное неравенству (3.8) и, следовательно, такая система не может быть эффективной.

В случае $n<n_0$, в силу определения n_0, должна выполняться цепочка неравенств вида

$$\frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)} \le \frac{(s-1)T^n(n_0-1)}{n_0(n_0+s-1)} \le \varepsilon, \qquad (3.11)$$

из которой следует неэффективность предполагаемой системы с n процессами в силу (3.8).

Наконец, если $n>n_0$, то следствием неравенств (3.8) и (3.10) является неэффективность предполагаемой одинаково распределенной системы конкурирующих n процессов. Полученные противоречия во всех возможных случаях доказывают необходимость условий (3.9).

Достаточность условий (3.9) непосредственно следует из наличия функции φ со свойством (3.8). Действительно, в этом случае требуемой эффективной одинаково распределенной системы является система с $n = n_0$ конкурирующими процессами, где n_0 определяется формулой (3.8). Теорема 3.3 доказана.

На рисунке изображен график функции $y = \varphi(x),\ x > 0$, при фиксированных $s,\ T^n,\ \varepsilon$. Существование эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов определяется областью Ω. Все целочисленные точки отрезка Ω являются значениями n, при которых система будет эффективной, при этом $x_1 = 1 + [\sqrt{s}],\quad x^* = 1 + \sqrt{s},\quad x_2 = 2 + [\sqrt{s}]$.

З а м е ч а н и е. *При* $p = s = 2$ *одинаково распределенная система конкурирующих процессов будет эффективной, если выполняется неравенство* $\dfrac{\varepsilon}{T^n} \le \dfrac{n-1}{n(n+1)}$.

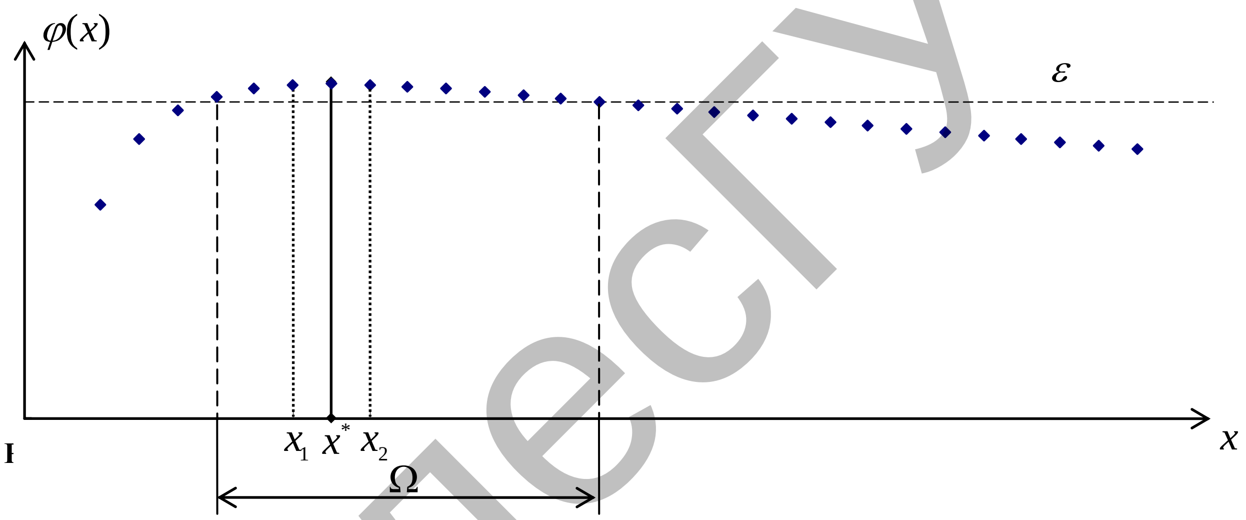

Рисунок – график функции $y = \varphi(x),\ x > 0$, **при фиксированных** $s,\ T^n,\ \varepsilon$

4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

О п р е д е л е н и е 4.1. Эффективная одинаково распределенная система называется *оптимальной*, если величина Δ_ε достигает наибольшего значения.

В разделе 3 показано, что оптимальную одинаково распределенную систему достаточно искать среди эффективных одинаково распределенных систем. Более того, в силу теоремы 3.1 оптимальную одинаково распределенную систему следует искать среди стационарных одинаково распределенных систем. Тогда с учетом (3.4) имеем:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)T^n(1 - 1/n) - (n + s - 1)\varepsilon.$$

Введем функцию действительного аргумента x вида:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x + s - 1)\varepsilon,\ x \ge 1.$$

Решение задачи об оптимальности одинаково распределенной системы, состоящей из n конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров для всех трех базовых режимов следует из теоремы.

Теорема 4.1. *Для того, чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов была оптимальной при заданных* $2 \le s \le p$, T^n, $\varepsilon > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов* n_0 *в системе равнялось одному из чисел*

$$\left[\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n],$$

в котором функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ *достигает наибольшего значения. Здесь* $[x]$ *означает наибольшее целое, не превосходящее* x, n *– заданное число.*

Доказательство.
Необходимость. Рассмотрим введенную функцию:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x+s-1)\varepsilon, \; x \ge 1.$$

Согласно определению 3.3 одинаково распределенная система будет оптимальной в той точке x, где функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения. Покажем, что функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$. Действительно,

$$\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(s-1)T^n}{x^2} - \varepsilon, \; \overline{\Delta}''_\varepsilon(x) = -\frac{2T^n(s-1)}{x^3} < 0, \text{ так как } s \ge 2, \; x > 0.$$

Следовательно, функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает максимума в точке, где первая ее производная обращается в нуль $\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = 0$, т. е. $x^* = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$.

Целочисленными точками, в которых достигается наибольшее значение функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$, будут $n_0 = [x^*]$ или $n_0 = [x^*] + 1$. Следовательно, в качестве n_0 можно выбрать одно из чисел $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1$, в которых функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p)$ принимает наибольшее значение.

Если же окажется, что ни одна из точек $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1$, в которой функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ принимает наибольшее значение не принадлежит $[2,n]$, то в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределенную систему с числом процессов $n_0 = n$.

В силу отрицательности второй производной, исследуемая функция выпукла. Следовательно, точка максимума всегда существует, а значит и существует эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов в случае, когда $n \to \infty$.

Достаточность следует из свойств выпуклости функции $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$ при $s \le p$ на отрезке $[2,n]$.

ВЫВОДЫ

Полученные необходимые и достаточные условия эффективности и оптимальности одинаково распределенных систем конкурирующих процессов имеют многочисленные области применения. В частности, они могут быть использованы при оптимизации процесса производства и доставки продукции крупными предприятиями, при проектировании и создании системного и прикладного программного обеспечения, ориентированного на многопроцессорные системы и вычислительные сети. Математическая основа является базой для эффективной организации сложных процессов различной природы в экономике, медицине, банковской сфере и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко, Н.С. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем / Н.С. Коваленко, С.А. Самаль. – Минск: Бел. навука, 2004. – 166 с.
2. Павлов, П.А. О времени реализации систем параллельных распределенных процессов / П.А. Павлов // Вестник Полесского государственного университета. – №1. – 2008. – С. 60–67.
3. Коваленко, Н.С. Системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в условиях ограниченного параллелизма и их оптимальность / Н.С. Коваленко, П.А. Павлов // Доклады НАН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. – 2006. – №2. – С. 25–29.
4. Коваленко, Н.С. Организация синхронного выполнения параллельных распределенных процессов на поточных линиях / Н.С. Коваленко, П.С. Кляус, П.А. Павлов // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально–экономического развития: материалы IX Междунар. науч. конф. Минск, 16–17 окт. 2008 г. – Минск: НИЭИ Мин–ва экономики Респ. Беларусь, 2008. – С. 482–496.
5. Kapitonova, Yu.V. Optimality of systems of identically distributed competing processes / Yu.V. Kapitonova, N.S. Kovalenko, P.A. Pavlov // Cybernetics and Systems Analysis. – New York: Springer, 2006. – P. 793–799.

PROBLEMS OF THE OPTIMUM ORGANIZATION THE COMPETING DISTRIBUTED PROCESSES AT SUFFICIENT NUMBER OF PROCESSORS

P.A. PAVLOV, N.S. KOVALENKO

Summary

Optimising problems by calculation of characteristics of systems of parallel processes, problems of search of criteria effective and optimum are solved the organizations of performance of set of the parallel distributed processes in the conditions of unlimited parallelism taking into account an overhead charge.

Поступила в редакцию 26 августа 2009 г.