

FREIBERGER FORSCHUNGSSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der TU Bergakademie Freiberg

B 292 Werkstoffwissenschaft, Werkstofffertigungstechnologie

Temperaturverhältnisse und Reaktionskinetik beim Ziehen und Wärmebehandeln von Draht

Dr.-Ing. Wolfhart Müller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Herausgeber: TU Bergakademie Freiberg
Der Rektor
09596 Freiberg

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme:

Müller, Wolfhart:

Temperaturverhältnisse und Reaktionskinetik beim Ziehen und
Wärmebehandeln von Draht / vorgelegt von Wolfhart Müller. –

Freiberg: TU Bergakademie, 1998

(Freiberger Forschungshefte : B ; 292 : Werkstoffwissenschaft, Werkstofffertigungstechnologie)

Zugl.: Freiberg (Sachsen), Techn. Univ., Diss., 1997

ISBN 3-86012-059-X

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung ist ohne die Zustimmung des Verlages außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Verfielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

korrigierter und vom Autor ergänzter Nachdruck 2014

© Technische Universität Bergakademie Freiberg

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0	Einleitung 7
1	Technisch-wissenschaftlicher Erkenntnisstand 8
2	Thermisches Modell 12
2.1	Zielstellung 12
2.2	Lösungsweg 13
3	Ziehen und Wärmebehandeln von Draht 15
3.1	Mechanische und thermische Verhältnisse beim Drahtziehen 15
3.1.1	Erwärmung durch Umformung 15
3.1.1.1	Wärmeübergang im Festkörperkontakt 17
3.1.1.2	Umformzone 18
3.1.1.3	Näherungslösungen nach dem Vorgehen von <i>SIEBEL/KOBITZSCH</i> 20
3.1.1.4	Thermische Draht-Ziehdüse-Kopplung 21
3.1.1.4.1	Näherungsverfahren 21
3.1.1.4.2	Temperaturmessung im Ziehwerkzeug 27
3.1.1.4.3	Numerisches Beispiel 30
3.1.1.5	Thermische Zugfolgenberechnung 35
3.1.1.5.1	Unterteilung der Drahtlänge 36
3.1.1.5.2	Aneinanderfügen der Drahtabschnitte 37
3.1.1.5.3	Anwendung auf Mehrfachzug 42
3.1.2	Drahtkühlung 45
3.1.2.1	Kühlrohr 46
3.1.2.2	Ziehtrommel 47
3.1.2.2.1	Mechanische Randbedingungen 47
3.1.2.2.2	Thermische Randbedingungen 48
3.1.2.2.2.1	Ziehtrommelwandung 49
	<i>a) Ziehtrommelaußenwand</i> 49
	<i>b) Ziehtrommelinnenwand</i> 50
3.1.2.2.2.2	Drahtoberfläche 50
3.1.2.2.3	Näherungsformeln für Temperaturen von Trommel und Draht 51
3.1.2.2.3.1	Trommeltemperatur 51
3.1.2.2.3.2	Drahttemperatur 51
	<i>a) Drahttemperatur am Trommelablauf</i> 51
	<i>b) Drahttemperatur am Trommelauflauf</i> 52
3.1.2.2.4	Thermische Draht-Ziehtrommel-Kopplung 53
3.1.2.2.5	Anwendung 55
3.1.2.3	Luft- und Ziehmitteleinfluß 58
3.1.3	Drahtdurchmesser, Schmierfilmdicke und Wärmeübergang 59
3.1.3.1	Experimentell-rechnerisches Verfahren 61
3.1.3.2	Beispiel 63

3.2	Wärmebehandlung	65
3.2.1	Konduktives Drahterwärmen im Durchlauf	65
3.2.2	Numerisches Beispiel	68
3.2.3	Temperatursteuerung	70
3.3	Werkstoffreaktion	72
3.3.1	Phänomenologisches Modell	72
3.3.1.1	Diffusion	72
	<i>a) Lamelle</i>	73
	<i>b) Faser</i>	75
	<i>c) Kugel</i>	76
3.3.1.2	Reaktionskinetik	80
3.3.1.2.1	Rekristallisation	80
3.3.1.2.2	Kornwachstum	82
3.3.1.3	Verallgemeinerung	83
3.3.2	Parameteridentifikation	86
3.3.2.1	Numerisches Verfahren	86
3.3.2.2	Beispiel	87
3.3.3	Ausblick	99
4	Schlußfolgerungen und Zusammenfassung	103
	Symbole und Abkürzungen	106
	Quellenverzeichnis	110
	<u>Anhang A</u>	127 - 256
	Inhalt Anhang A	128
A2.3	Temperaturfeld im axial bewegten Vollzylinder (Draht)	131
A2.4	Temperaturfeld im endlich langen Hohlzylinder (Ziehwerkzeug)	188
A2.5	Thermische Kopplung von Hohlzylinder und hindurchbewegtem Vollzylinder	217
A2.6	Thermoelastische Spannungen und Formänderungen	228
A3.1.1.3	Näherungslösungen nach dem Vorgehen von <i>SIEBEL/KOBITZSCH</i>	241
A3.1.2.2.1	Mechanische Randbedigungen - Schollen des Drahtes	247
	<u>Anhang B</u>	257 - 312
	Anmerkungen zu den Kapiteln	
	<u>Anhang C</u>	313 - 348
	<u>HP48/HP50-Programme:</u>	
	- Approximation der Besselfunktionen	314
	- Thermische Zugfolgenberechnung	317
	- Temperaturberechnung im axial bewegten Vollzylinder	329
	- Drahtabkühlung auf einer Ziehtrommel	340
	- Hilfsprogramme	348

0. Einleitung

Die Herstellung von Draht und Drahterzeugnissen auf hohem Qualitätsniveau ist nur möglich, wenn die Technologien des Drahtwalzens, des Gleit- bzw. Durchziehens und der Wärmebehandlungen sorgfältig aufeinander abgestimmt werden. Die Abfolge zwischen Verfestigung durch Ziehen und Entfestigung durch thermische Aktivierung bestimmt letztendlich die mechanischen Eigenschaften der gefertigten Drähte. Während das Erwärmen der Drähte im Hauben-, Topf- oder Durchziehofen oder auch beim elektrischen Widerstands-Durchlaufglühen ganz gezielt zur Rückführung des Formänderungsvermögens auf einen entsprechend duktilen Zustand durchgeführt wird, findet andererseits eine kaum beeinflussbare Eigenerwärmung des Drahtes in Abhängigkeit von Umformgrad und Umformfestigkeit während des Ziehens in der Umformzone statt. Diese naturbedingte Eigenerwärmung, bei der werkstoffabhängig ca. 85-95% der Umformarbeit in Wärme umgesetzt werden, während der Rest latent im Werkstoff verbleibt, beträgt im Einzelzug nur etwa ein- bis zweihundertfünfzig Kelvin. Jedoch finden an den Oberflächen von Draht und Ziehdüse - je nach Ziehbedingungen - durchaus wesentlich größere Temperaturerhöhungen statt. Allerdings kann auch die mittlere Drahttemperatur deutlich ansteigen, wenn bei Mehrfachzug die Drahtkühlung zwischen den einzelnen Zügen unzureichend ist, so daß sich die Enthalpien von Zug zu Zug akkumulieren. Hierdurch wiederum sind negative Auswirkungen auf die Drahteigenschaften möglich, wie sie z.B. infolge Alterungsversprödung höhergekoelter Stähle beobachtet werden.

Die thermischen Bedingungen in der Wirkfuge zwischen Draht und Ziehdüse hängen einerseits wesentlich von den Schmierungs- und Reibungsverhältnissen ab, andererseits wirken die Kontaktflächentemperaturen unmittelbar auf Schmierung und Reibung zurück. Die Kontaktflächentemperaturen, wie sie aus der tribomechanischen Wechselwirkung von Draht und Ziehdüse resultieren, haben letztlich auch Konsequenzen für den Werkzeugverschleiß und können den Eigenspannungszustand der Drähte beeinflussen. Darüberhinaus werden die Temperaturfelder von Draht und Ziehwerkzeug Wärmedehnungen und Wärmespannungen hervorrufen. Die thermisch bedingten Formänderungen der Ziehholgeometrie sind i.allg. vernachlässigbar gering. Allerdings müssen sie dennoch Berücksichtigung finden, wenn Effekten in ähnlicher Größenordnung nachgegangen werden soll, wie das z.B. bei einem experimentell-rechnerischen Verfahren der dynamischen Schmierfilmdickenbestimmung der Fall ist.

Neben den Temperaturverhältnissen, wie sie sich beim Drahtziehen in komplexem Wechselspiel von Erwärmen in der Ziehdüse und Abkühlen zwischen den Zügen bzw. auf der Zieh-scheibe/Ziehtrommel ergeben, beanspruchen Zwischen- oder Schlußwärmebehandlung gleichfalls höchste Beachtung für Eigenschaften und Qualität der Drahterzeugnisse. Durch Variation der Wärmebehandlungsbedingungen, insbesondere durch gezielte Änderung der Temperatur-Zeit-Verhältnisse, lassen sich innerhalb werkstoffbedingter und anlagenabhängiger Grenzen vielfältige Werkstoffzustände und Drahteigenschaften einstellen. Die Ermittlung günstiger oder sogar optimaler Wärmebehandlungsparameter ist aufwendig und wird deshalb nach Möglichkeit im Labormaßstab realisiert. Der Erfolg hängt dann nicht zuletzt ganz wesentlich davon ab, ob die Übertragung der Laborergebnisse auf die industrielle Wärmebehandlungsanlage hinreichend genau möglich ist. Hierfür bedient man sich wärmetechnischer Ähnlichkeits- und Modellbetrachtungen. In dieser Hinsicht besonders kompliziert liegen die Verhältnisse immer dann, wenn sich der Realvorgang hochgradig instationär darstellt. Ein solches Problem liegt z.B. beim elektrischen Widerstands-Durchlaufglühen, dem sog. Ziehglühen vor. Hierbei ist die konduktive Wärmebehandlungsanlage der Ziehmaschine unmittelbar nachgeschaltet, so daß sie der Draht mit Ziehgeschwindigkeit durchfährt. Dabei wird er, je nach Ziehgeschwindigkeit, in wenigen Hundert Millisekunden mit bis zu Zehntausend Kelvin je Sekunde konduktiv aufgeheizt, um nach Erreichen der Maximaltemperatur im Wasserbad äußerst rasch wieder abgekühlt zu werden. Dieses Wärmebehandlungsverfahren konnte sich seit Mitte der fünfziger Jahre - zunächst für Kupfer, dann für einige weitere Kupferlegierungen - auf Grund seiner Vorteile hinsichtlich Energie- und Platzbedarf in den Ziehereien zunehmend etablieren. Im Gegensatz zu Wärme-

behandlungen, die vorwiegend thermisch stationär oder quasistationär geführt werden, bereiten hier allerdings Vergleich und Bewertung thermisch aktivierter Werkstoffreaktionen ungleich größere Probleme. Offensichtlich ist erst recht unter diesen stark instationären Bedingungen die sichere Auswahl einer geeigneten thermischen Prozeßführung nur möglich, sofern eine werkstoffgerechte, reaktionskinetische Beurteilung gelingt.

Insgesamt wird ersichtlich, daß Temperaturverhältnisse und Reaktionskinetik beim Ziehen und Wärmebehandeln eine wesentliche Bedeutung für Eigenschaften und Qualität des Erzeugnisses „Draht“ besitzen. Hieraus erklärt sich, daß auf diesem Gebiet bereits seit längerem sowohl theoretisch als auch experimentell geprägte Untersuchungen durchgeführt worden sind, die ihren Niederschlag im Fachschrifttum gefunden haben.

1. Technisch-wissenschaftlicher Erkenntnisstand

Obwohl *FOURIER* [FOU 22] bereits im ersten Viertel des neunzehnten Jahrhunderts einen prinzipiellen Weg zur Berechnung von Temperaturfeldern aufzeigen konnte, haben offenbar zuerst *SIEBEL* und *KOBITZSCH* [SIE 43] den Versuch unternommen, die Erwärmung des Drahtes beim Ziehen zu ermitteln. Insbesondere schätzen sie die experimentell unzugängliche Oberflächentemperatur des Drahtes beim Durchgang durch das Ziehhol ab, indem sie vereinfachenderweise die Oberflächenkrümmung vernachlässigen, das Temperaturprofil ins Drahtinnere durch einen parabolischen Ansatz annähern und schließlich die thermische Wechselwirkung mit dem Ziehwerkzeug durch einen empirischen Faktor berücksichtigen. Da sie bei ihrer Herleitung die *FOURIER*sche Wärmeleitungsgleichung völlig ignorieren, überprüft *KORST* [KOR 48] dieses Ergebnis - unter sonst gleichen Voraussetzungen -, indem er die Differentialgleichung der Wärmeleitung entsprechend integriert und feststellt, daß *SIEBEL* und *KOBITZSCH* bis zu etwa 8,5% zu hohe Randtemperaturen erhalten. Aber auch *KORST*'s Lösung basiert noch auf dem stark vereinfachenden Modell des halbbunendlichen Körpers und einer Randbedingung, die den Wärmeaustausch mit dem Ziehwerkzeug nur durch einen quantitativ kaum gesicherten Wärmeaufteilungsbeiwert realisiert.

Ausführlicher untersucht dann *KRASILSCIKOV* [KRA 62] die Erwärmung des Drahtes beim Kaltziehen. Er bedient sich dabei einer Lösung für das Vollzylinder-Temperaturfeld, wie es auf der Grundlage der Wärmeleitungsgleichung bei vorgeschriebener Wärmestromdichte am Körperend (Randbedingung 2. Art) herzuleiten ist - z.B. [TAU 71, (5.34)]. Wärmeaufteilung zwischen Draht und Ziehwerkzeug werden ebenso diskutiert wie experimentelle Befunde der Temperaturermittlung. Auch die von [LUE 57, *Teil II*] mit einem geteilten Draht-Düse-Element gemessene Temperaturabhängigkeit, die etwa der Kubikwurzel aus der Ziehgeschwindigkeit folgt, vergleicht er mit dem auf theoretischem Wege erhaltenen Ergebnis.

In den Arbeiten von *REHDER* [REH 68], *KOPP* [KOP 68] und *VOLLMER* [VOL 71] wird zur Berechnung der Drahttrandtemperatur im Ziehhol die einfache Formel von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* herangezogen. Für die Drahtabkühlung nach dem Ziehwerkzeug gibt *REHDER*, ausgehend von einem parabolischen Temperatur-Ausgangsprofil in radialer Richtung, eine Anfangs-Randwertlösung der Wärmeleitungsgleichung an. Darüberhinaus führt er mit einem Thermorollen-Meßgerät Drahttemperaturbestimmungen durch und ermittelt experimentell die Kühlwirkung von Ziehtrommeln. *KOPP* untersucht in seiner Arbeit [KOP 68] die Erwärmungsverhältnisse in der Umformzone von Rundstäben sowohl auf theoretischem als auch auf experimentellem Wege. Unter Heranziehung der Geschwindigkeits- bzw. Bahnlinienfelder berechnet er Temperaturfelder und führt ergänzend Temperaturmessungen in mit Mantelthermoelementen bestückten Stäben bzw. Steckerproben durch. Ähnlichkeitstheoretische Betrachtungen ermöglichen die Übertragbarkeit auf geänderte geometrische, kinematische und bildsame Bedingungen.

Bereits frühzeitig wurden die Temperaturverhältnisse von Draht und Ziehwerkzeug mit den Mitteln der Elektroanalogie simuliert, z.B. *RANGER* [RAN 57], *NEDOVIZIJ* u.a. [NED 61], *TEMNIKOV* [TEM 71]. Mit wachsender Leistungsfähigkeit der Digitalrechenstechnik jedoch haben

sich verstärkt mathematisch-analytische sowie numerische Verfahren durchgesetzt. Die Ermittlung lokaler Draht- und Ziehwerkzeugtemperaturen auf der Grundlage eines numerischen Differenzenverfahrens teilt *ALTAN* [ALT 70] mit, wobei er u.a. die Bedingungen der Berechnungsbeispiele von *SIEBEL/KOBITZSCH* und von *RANGER* aus Vergleichsgründen übernimmt. Allerdings wird der Wärmeaustausch im Wirkflächenbereich von Draht und Ziehdüse idealisierend als perfekt angenommen, so daß die Oberflächentemperaturen im Bereich von Umform- und Führungslänge einander exakt entsprechen; vgl. auch *LAHOTI/ALTAN* [LAH 78]. *SNIDLE* [SNI 77] leitet mit dem Modell des halbunendlich ausgedehnten Körpers, wie bereits *KORST*, analytische Lösungen der Temperaturverhältnisse für den Draht ab, wobei er gegenüber *KORST* die lokale Änderung von Geschwindigkeit und Druck entlang der Umformzone berücksichtigt. *NEIMARLIJA* [NEI 83] berechnet das Temperaturfeld nach Diskretisierung mit der Randelementmethode (REM). Er vergleicht die Ergebnisse mit Temperaturmessungen, wobei trotz zahlreicher Unsicherheitsfaktoren von Messung und Rechnung insgesamt doch befriedigende Übereinstimmung konstatiert wird. Das Problem des endlichen Wärmeübergangswiderstands zwischen Draht und Ziehdüse im Wirkflächenbereich, hervorgerufen durch Oberflächenrauheit und Schmierfilm, wird zwar erkannt, muß jedoch - wie schon bei *ALTAN* - aus numerischen Gründen wiederum vernachlässigt werden.

Parallel zu den Bemühungen, die Temperaturverhältnisse immer genauer zu berechnen, wurden entsprechende Anstrengungen auch auf experimentell-meßtechnischem Gebiet unternommen. So bestimmen bereits *EICHINGER* und *LUEG* [EIC 41] den Anteil der im Draht latent verbleibenden Energie, indem sie der mechanischen Arbeit die Wärmemengen von Draht und Ziehwerkzeug gegenüberstellen. Dabei messen sie - neben der Ziehkraft - die Temperatur des die Ziehdüse verlassenden Drahtes auf thermoelektrische, die vom thermisch isolierten Ziehwerkzeug aufgenommene Wärmemenge dagegen auf kalorimetrische Weise. Auch bei nachfolgenden Untersuchungen zahlreicher weiterer Forscher werden die meßtechnischen Vorteile, die der thermoelektrische Effekt bietet, erfindungsreich zur Temperaturmessung an Draht und Ziehwerkzeug ausgenutzt. So werden z.B. Draht und Düse selbst als Thermopaar geschaltet [REI 50], [LUE 51], [LUE 57], oder die Mantelthermoelemente werden vor dem Ziehen geeignet in einen Draht- bzw. Stabstecker eingebettet [KOP 68], [PAW 69a] oder aber das Ziehwerkzeug selbst wird mit Thermoelementen entsprechend bestückt [KIS 68], [RIT 70], [RIT 71], [VOL 71] bzw. [PAW 73], [UYA 86].

Ungeachtet aller Unterschiede bei der Vervollkommnung experimentell-meßtechnischer sowie mathematisch-rechentechnischer Methoden besteht das gemeinsame Ziel der Forschungsanstrengungen letztlich darin, wesentlich temperaturbedingte Veränderungen von Drahtwerkstoff, Ziehschmiermittel und Werkzeug qualitativ und quantitativ möglichst umfassend und sicher einschätzen bzw. vorausbestimmen zu können. Hierbei gewonnene Erkenntnisse sollen insgesamt beitragen zur Herstellung von Drahterzeugnissen mit weiter verbesserten Qualitätsparametern bei gesteigerter Wirtschaftlichkeit.

Unter diesem Anspruch allerdings sind nicht allein die thermischen Bedingungen während des Ziehens zu beachten, sondern es kommt insbesondere auch allen Wärmebehandlungsprozessen, wie sie zwischen oder nach Ziehoperationen vorgenommen werden, eine herausragende Bedeutung zu. Verfahren und Technologie, mit der eine Wärmebehandlung durchgeführt wird, entscheiden maßgeblich sowohl über Eigenschaften und Qualität des hergestellten Drahtes als auch über ökonomische Aspekte seiner Produktion. Entsprechend vielfältig sind werkstoffkundliche und wärmetechnische Arbeiten hierzu, weshalb Zitate auf eine vergleichsweise verschwindende Auswahl beschränkt bleiben müssen.

Die Frage der Temperaturbestimmung an Drähten stellt sich also auch, sobald Erwärmungs- oder Abkühlungsvorgänge in Öfen oder Bädern z.B. beim Anlassen, Patentieren oder Durchlaufglühen durchzuführen sind. *MALLACH* führt hierzu zahlreiche Rechenbeispiele aus [MAL 65], indem er sich auf Näherungsbeziehungen aus *HEILIGENSTAEDT* [HEI 51] stützt; der Strah-

lungswärmeaustausch ist dabei im Wärmeübergangskoeffizienten zu berücksichtigen. Handelt es sich bei dem Draht/Stab um wärmetechnisch dickwandiges Gut, so ist eine Korrektur mittels Faktor nötig, der graphisch oder unter Lösung einer transzendenten Gleichung zu bestimmen ist [HEI 66]. Auch werden Formeln für den Mittelwert über den Drahtquerschnitt, für die Drahtoberfläche, die Differenz zwischen Rand und Achse des Drahtes sowie für das radiale Temperaturprofil angegeben, wobei allerdings stets eine transzendente Gleichung zusätzlich zu lösen ist.

Unter der Voraussetzung, daß der Draht als dünnwandiges Wärmgut angesehen werden kann, führen *BANGA/MESMAN* [BAN 66] eine Beziehung zur Berechnung der Drahttemperatur beim Wärmebehandeln in Durchlauföfen an. Dabei berücksichtigen sie den Wärmestrahlungsanteil exakt, vernachlässigen allerdings den konvektiven Wärmeaustausch.

Neben diesen speziellen Berechnungsformeln und Ergebnissen stellen nicht zuletzt einschlägige Fachbücher und Kompendien jene mathematischen Mittel bereit, deren sich der Technologe und Wärmetechniker zur Berechnung des Temperaturganges im Zusammenhang mit Wärmebehandlungsprozessen i.allg. bedienen kann, z.B. [CAR 59], [TAU 71], [SCH 83], [ECK 87], [GRÖ 88], [GRI 90], [HÄF 92], [BAE 94]. Erfahrungsgemäß wird die Festlegung geeigneter Randbedingungen, insbesondere die quantitativ zuverlässige Einschätzung der Wärmeübertragung, Unsicherheiten bereiten und Fragen aufwerfen, wobei sich auf zahlreiche experimentelle Untersuchungen und Ähnlichkeitstheoretische Zusammenhänge zurückgreifen läßt, z.B. [STE 87], [VDI 94]. Erhebliche zusätzliche mathematische Schwierigkeiten ergeben sich insbesondere dann, wenn im Zusammenhang mit analytisch geschlossenen Lösungsverfahren Nichtlinearitäten zu berücksichtigen sind, z.B. infolge temperaturabhängiger Stoffwerte oder nichtlinearer Randbedingungen, z.B. [JÄC 56], [JÄC 61], [MIT 75]. Der Aufwand vervielfacht sich gegenüber linearen Problemen beträchtlich, wie bereits einer Wärmeleitungsaufgabe bei nichtlinearen Randbedingungen im geometrisch vergleichsweise sehr einfachen Fall des halbumendlichen Körpers zu entnehmen ist [TAO 81].

Die wärmetechnischen Berechnungen sind als notwendige Voraussetzung auf dem Weg zum eigentlichen Ziel anzusehen, das darin besteht, die Temperaturführung so zu gestalten, daß das Halbzeug bzw. der Draht die gewünschten Eigenschaften ausbilden kann. Bei Kohlenstoffstählen z.B. wird zur Einstellung eines feinlamellaren perlitischen Gefüges eine sogen. Patentierbehandlung (Austenitisieren+Sorbitisieren) durchgeführt, wodurch dem Draht eine große Duktilität - bei relativ hoher Festigkeit - zurückgegeben wird [ECK 87, Kap. 4.1].

Werden die „Fertig“-Drahte vom Abnehmer nicht ziehart, sondern mit niedrigeren Festigkeiten verlangt, so können - wenn nicht „auf Festigkeit“ gezogen oder nachgezogen [LEP 97] wird - entsprechende Schlußglühungen erforderlich werden. Insbesondere beim Ziehen von Kupfer und einigen Kupfer-Legierungsdrähten, Aluminiumdrähten, aber ggf. auch von Stahldrähten hat sich das konduktive Durchlauf-Widerstandsglügen, speziell auch als kombiniertes Ziehen und Glügen (Ziehglügen), durchgesetzt. Hierbei wird der mit Ziehgeschwindigkeit aus der mehrzügigen Ziehmaschine kommende hochverfestigte Draht in einer sich unmittelbar anschließenden (oder vollintegrierten) elektrischen Durchlauf-Widerstandsglühe, in der der Draht zwischen mehreren spannungführenden Kontaktrollen konduktiv aufgeheizt wird, im Zehntelsekundenbereich vollständig oder teilweise rekristallisierend wärmebehandelt [ROH 69], [SCH 69]. Jedoch bereits während des Ziehens ist der Draht neben den mechanischen Beanspruchungen stets auch unvermeidlichen thermischen Belastungen ausgesetzt, was sich sowohl auf den Ziehprozeß selbst (Schmierungsbedingungen, Ziehdüsenverschleiß) als auch auf die Drahteigenschaften (Eigenspannungen, mechanische Eigenschaften) mehr oder weniger stark auswirkt. So wird z.B. beim Ziehen von höher kohlenstoffhaltigen Drähten im Mehrfachzug eine wirksame Drahtkühlung erforderlich, um Erscheinungen der Alterungsversprödung zu unterbinden [YAM 83], [AER 87], [DAH 93, Kap. D3.2.2.3].

Allerdings stellt die Wärmebehandlung trotz langjähriger Anstrengungen und partieller Fortschritte noch immer ein empirisch ausgerichtetes Arbeitsgebiet dar. Das liegt nicht allein an der Werkstoffvielfalt, diverse mechanisch-thermische Behandlungszustände eingeschlossen, sondern auch am komplizierten thermisch-aktivierten Reaktionsverhalten vieler Werkstoffe und Legierungen. Während Wärmebehandlungsanlagen und thermische Prozeßführung besonders in den letzten fünfzehn Jahren ein hohes Entwicklungsniveau erreicht haben, vgl. z.B. [EBN 87], [LEH 87], [NOL 88], [KRA 88], [PÖT 88], [RUF 88], [KLE 89], [SCH 89], [LIE 92], ist die hinlängliche Charakterisierung eines Werkstoffs nach wie vor mit umfangreichen und i.allg. recht aufwendigen werkstoff- und metallkundlichen Untersuchungen verbunden - z.B. [PUP 90], [MEN 91]. Diese Anstrengungen werden letztlich um des bedeutenden Vorteils willen unternommen, eine flexiblere Gestaltung der Fertigung und die Optimierung von Wärmebehandlungstechnologien bei höchster Produktqualität zu erreichen.

Hierzu ist die mathematische Kopplung von Wärmebehandlung und Werkstoffreaktion erforderlich, d.h., ein thermisch-reaktionskinetisches Simulationsmodell wird benötigt. Während die reaktionskinetischen Verhältnisse unter isothermen Bedingungen seit den Arbeiten von [KOL 37], [AVR 39] und [JOH 39] theoretisch prinzipiell bekannt sind, ist das Interesse, auch nichtisotherme Bedingungen einer quantitativ-analytischen Behandlung zugänglich zu machen, offenbar erst in jüngerer Zeit stärker geworden [STE 78], [LEH 87a], [OTT 88], [REG 89], [MÜL 94], [NEI 95], [BRA 97]. Das ist insofern verwunderlich, als thermische Prozesse eigentlich stets instationär sind oder zumindest instationäre Anteile aufweisen; einen Prozeß dennoch als stationär zu betrachten, kommt einer mit Genauigkeitsverlust einhergehenden Idealisierung gleich. Der realitätsnäheren Beschreibung anisothermer Vorgänge kommen die Fortschritte der Rechentechnik entgegen, die eine breitere Anwendung rechenintensiver numerischer Methoden überhaupt erst möglich gemacht haben. Das betrifft in noch höherem Maße die aufwendige Modellierung und Computersimulation metallkundlicher Phänomene auf mikrostruktureller Ebene bis hin zur stärkeren Einbeziehung stereologischer Aspekte, z.B. [RIC 91], [ABB 92], [RIC 93], [GUN 95], [IND 96], [FAN 97].

Die stetige Weiterentwicklung verschiedener Modellvorstellungen führte zu einer immer umfassenderen qualitativen und quantitativen Charakterisierung der Materialeigenschaften in Abhängigkeit von Werkstoffausgangszustand und Prozeßbedingungen, eine Entwicklung, die auf anwendungstechnisch orientierte Bereiche der verarbeitenden Industrie künftig noch stärker ausstrahlen wird. Einzelne Werkstoffeigenschaften oder auch eine Kombination entsprechender Eigenschaften werden sich Kundenwünschen zunehmend besser anpassen lassen, wobei die Computersimulation mit deskriptiven und adaptiven Modellen an Bedeutung weiter gewinnen wird.

Während der Bearbeitung verschiedener Aufgaben aus Forschung und Industrie, insbesondere zum Ziehen und Wärmebehandeln von Draht, traten wiederholt auch Fragen auf, die mit den im Fachschrifttum angegebenen Methoden und Ergebnissen nicht immer befriedigend beantwortet werden konnten. Für die rechnerische Ermittlung der Temperaturverhältnisse beim Ziehen und Wärmebehandeln sind zwar zahlreiche Einzelergebnisse vorhanden, jedoch beruhen diese auf z.T. sehr unterschiedlichen Voraussetzungen, wie schon ausgeführt wurde. Es ist deshalb mitunter schwer oder sogar unmöglich, übergreifende Zusammenhänge zwischen einzelnen Herangehensweisen und Ergebnissen zu vermuten oder gar zu erkennen. Eine gezielte Auswahl bzw. qualifizierte Entscheidung für eines von mehreren wärmetechnischen Modellen ist damit zumindest sehr erschwert. Insbesondere den Fragen der Wärmeübergangsrandbedingungen (lineare 1., 2. oder 3. Art oder nichtlineare) oder der Körpergeometrie (halbunendlicher Körper, Vollzylinder) wurde im Fachschrifttum offenbar nur begrenzte Aufmerksamkeit zuteil. Vergleichende Betrachtungen auf der Grundlage eines umfassenderen wärmetechnischen Modells fehlen bisher.

Aber auch die Probleme der Ankopplung von Draht und Ziehöse unter besonderer Berücksichtigung des Wärmeübergangswiderstands in der Wirkfuge, die Durchmesseränderung des Drahtes infolge überlagerter mechanisch-thermischer Formänderung des Ziehholts oder auch der

Fragenkomplex zur Wechselwirkung von Drahtwindungen und Ziehtrommel im mechanisch-thermischen Kontakt sind - zumindest mit mathematisch-analytischen Modellen - offenbar noch nicht gelöst worden. Die thermischen Berechnungen von Einzelzügen, insbesondere jedoch auch von Zugfolgen in Mehrfachzügen erfordern sowohl die Berücksichtigung der Drahterwärmung durch Formänderungs- und Reibungsarbeit einschließlich der Draht-Ziehöse-Kopplung als auch der Drahtkühlung zwischen den Zügen einschließlich Draht-Ziehtrommel-Wechselwirkung.

Im Rahmen der Entwicklung, Verbesserung und Optimierung von Wärmebehandlungstechnologien ergibt sich immer wieder die Notwendigkeit, Werkstoff- bzw. Drahteigenschaften, die i.allg. unter verschiedenen nichtisothermen Glühbedingungen gewonnen worden sind, miteinander vergleichen und bewerten zu müssen. Die in der Drahtindustrie hierbei angewandte, überwiegend rein empirische Vorgehensweise ist sehr aufwendig, nur begrenzt genau sowie auf andere Temperatur-Zeit-Bedingungen und Wärmebehandlungsanlagen kaum übertragbar. Eine Ursache für diese unbefriedigende Situation ist wohl darin zu suchen, daß ein hinreichend anwenderfreundliches Modell für diesen Anwendungsfall nicht existiert. Dieser Mangel tritt um so deutlicher in Erscheinung, je kürzer die Wärmebehandlungszeiten und damit je ausgeprägter instationär die thermischen Verhältnisse werden. Die Verfahren des Durchlaufglühens und insbesondere des sogen. „Ziehglühens“, bei dem die Wärmebehandlung i.allg. nicht länger als wenige Zehntelsekunden dauert, sind davon besonders betroffen. Aber auch bei längerwährenden Wärmebehandlungen im Hauben- oder Topföfen können nur näherungsweise berücksichtigte oder sogar vernachlässigte Aufwärm- und Abkühlphasen die Qualität und optimale Gestaltung von Technologie und Fertigung beeinträchtigen bzw. verhindern.

2. Thermisches Modell

Der vorliegende Erkenntnisstand zu Temperaturverhältnissen und Reaktionskinetik beim Ziehen und Wärmebehandeln von Draht sowie die auf diesem Gebiet festgestellten Defizite haben Veranlassung gegeben, die folgenden Problemkreise einer intensiveren Analyse und Bearbeitung zu unterziehen.

2.1 Zielstellung

1. Entwicklung eines mathematischen Modells auf der Basis von bewegtem Vollzylinder und endlich langem Hohlzylinder zur Berechnung der thermischen Verhältnisse von Draht und Ziehöse/Ziehtrommel beim Ziehen sowie beim Wärmebehandeln von Drähten bzw. Stäben. Dieses mathematische Modell soll so beschaffen sein, daß es einerseits im Sinne weitestgehender Realitätstreue bis etwa an die Grenzen dessen geht, was mit durchgängig analytischen Mitteln bei vertretbarem Aufwand noch möglich ist, andererseits soll es durch Vereinfachung und asymptotische Näherung die Spezialisierung entsprechender Lösungen zulassen, um Schrifttumsergebnisse damit vergleichen und in den neuen, allgemeineren Kontext einordnen zu können.
2. Herleitung analytischer Beziehungen zur Berechnung thermoelastischer Spannungen und Formänderungen von Voll- und Hohlzylinder mit dem Ziel, die Auswirkungen von Armierungszustand (Schrumpfübermaß) und radialen Druck- und Temperaturverhältnissen des Ziehwerkzeugs auf den Durchmesser des gezogenen Drahtes zu ermitteln.
3. Anwendung des thermischen Modells auf Drahterwärmung durch Umformung im Einzel- und Mehrfachzug, auf Kopplung Draht-Ziehöse und Draht-Ziehtrommel und schließlich auf die Temperaturberechnung beim Wärmebehandeln von ruhenden oder axial bewegten Drähten.
4. Herleitung eines halbempirischen Werkstoffmodells auf der Grundlage von Diffusion und Reaktionskinetik, mit dem eine quantitative Beschreibung und Bewertung charakteristischer Werkstoffeigenschaften beim Wärmebehandeln, insbesondere auch in Abhängigkeit stärker instationärer Temperatur-Zeit-Verhältnisse, möglich wird.

Diese Aufgabenstellung zur mathematisch-physikalischen Modellierung von Temperaturverhältnissen beim Ziehen und Wärmebehandeln sowie von thermisch aktivierten Werkstoffreaktionen erfordert die Hinzuziehung mathematischer Methoden, wie sie ingenieurtechnischem Personal nach Art und Umfang i.allg. nicht geläufig sind. Diese Methoden sind mathematisch anspruchsvoll und entsprechend aufwendig. Damit dennoch die ingenieur- und anwendungstechnischen Aspekte der Arbeit gegenüber den eher methodisch-handwerklichen gebührend hervortreten, werden die umfangreicheren Herleitungen und Lösungsdarstellungen des thermischen Modells in einem Anhang A wiedergegeben. Ungeachtet dessen erschließen sich die vielfältigen Möglichkeiten und der Variantenreichtum des thermischen Modells in vollem Umfange erst dann, wenn Querbezüge und Zusammenhänge deutlich werden. Hierfür stellen die Lösungsherleitungen das erforderliche „Gerüst“ bzw. das verbindende „Netz“ bereit. Deshalb ist für eine schöpferische Anwendung sowie zur Realisierung des Anspruchs, mehrere im Fachschrifttum verstreut vorhandene analytische Lösungen unter dem weitreichenderen Modell wiederfinden zu wollen, das Nachschlagen in diesem Anhang A unumgänglich. Zur Erleichterung der Zuordnung der Kapitel des Anhangs A zu jenen des Hauptteils tragen sie dieselben Nummern, die sie bei unmittelbarer Eingliederung in den Hauptteil haben würden. Die Anmerkungen des Anhangs B beziehen sich sowohl auf den Hauptteil der Arbeit als auch auf den Anhang A, der Anhang C schließlich enthält ausgewählte Programmbeispiele.

Insgesamt sind die genannten wärmetechnischen Fragestellungen und thermisch aktivierten Werkstoffreaktionen mit mathematisch-analytischen Mitteln - unter gelegentlicher Einbeziehung experimenteller Ergebnisse - zu untersuchen, nicht zuletzt mit dem Ziel, auf der Grundlage geschlossen-analytischer Lösungsdarstellungen sowohl qualitative Aussagen als auch vergleichsweise schnelle Algorithmen für numerische Untersuchungen oder ggf. On-line- bzw. Prozeßsteuerungen zu ermöglichen.

2.2 Lösungsweg

Die mathematisch-physikalische Modellierung von Vorgängen des Wärme- und Stofftransports beim Ziehen und Wärmebehandeln von Draht wird durchgängig dahingehend angestrebt, die mathematischen Resultate stets als analytisch geschlossene Lösungsgleichungen bzw. Näherungslösungen zu erhalten. Das hat zunächst den unschätzbaren Vorteil, eine solche Lösung jederzeit näher analysieren zu können, z.B. um die Wirkungsrichtung einzelner Parameter qualitativ abzuschätzen, ohne daß erst in z.T. aufwendigen Rechnungen numerische Resultate erzielt werden müssen. Aber selbst numerische Berechnungen auf der Grundlage analytischer Lösungen sind vorteilhafterweise i.allg. weit weniger aufwendig bezüglich der erforderlichen Ressourcen an Hardware, Software und Rechenzeit, als dies bei vordergründig numerisch ausgerichteten Lösungsmethoden (z.B. FDM, FEM, REM) der Fall ist [DAH 93, Kap. B4.8-B4.10]. Darüberhinaus erlaubt ein entsprechendes mathematisch-analytisches Modell einige bereits seit längerem für ingenieurspezifische Fragestellungen verwendete Berechnungsformeln in den erweiterten Kontext einzuordnen und zu bewerten.

Allerdings sind mit einem Modell, das Ergebnisse in der Form analytischer Lösungen vorsieht, aus zwingenden mathematischen Gründen auch gewisse Vereinfachungen hinzunehmen. Das betrifft vor allem Fragen der Geometrie, z.B. im Bereich der Umformzone für Draht und Ziehwerkzeug, wie auch Nichtlinearitäten, die aus der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte oder aus dem Strahlungswärmeaustausch mit der Umgebung entstehen. Deshalb wird von der Berücksichtigung einer impliziten Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte abgesehen, wie es im Zusammenhang mit durchgängig analytischen Lösungsmethoden, von Spezialproblemen abgesehen, gezwungenermaßen allgemein üblich ist [BAE 94, Kap. 2.1.4].

Als Verkörperung des Drahtes/Stabes kann natürlicherweise der Vollzylinder dienen. Die konische Abweichung im Bereich der Umformzone infolge des Ziehdüsenhalbwinkels (ca. $4-10^\circ$) wird durch einen geeignet mittleren Durchmesser auszugleichen sein. Entsprechend soll der

Ziehdüsenkern durch einen endlich langen Hohlzylinder approximiert werden. Die jeweiligen Anfangs-Randwertprobleme werden ausnahmslos für modifizierte bzw. erweiterte Randbedingungen 3. Art gelöst - siehe hierzu Kapitel A2.3. Eine solche verallgemeinerte Bedingung ist universeller anwendbar als eine gewöhnliche Randbedingung dritter Art, denn sie schließt nicht nur die Randbedingungen erster Art (Oberflächentemperatur vorgegeben), zweiter Art (Wärme-flußdichte an der Oberfläche vorgegeben) und vierter Art (Oberfläche vollständig wärmeisoliert) als Grenzfälle mit ein, sondern gestattet insbesondere die gleichzeitige Berücksichtigung von *NEWTON*schem Wärmeübergang (konventionelle Randbedingung 3. Art) und weiteren Oberflächenquellen, wie sie z.B. durch Reibung (Randbedingung 2. Art) entstehen. Als Methode zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen vom Wärmeleitungstyp wird die zweidimensionale *LAPLACE*-Transformation herangezogen - im Falle des axial bewegten Vollzylinders für zwei sich einseitig ins Unendliche erstreckende Gebiete (in Zeit- und Achsrichtung), im Falle des Hohlzylinders bleibt das Transformationsgebiet in Achsrichtung endlich.

Im Gegensatz dazu wird im Zusammenhang mit der Modellbildung zur Beschreibung thermisch aktivierter Werkstoffreaktionen der Reihemethode nach *FOURIER* der Vorzug eingeräumt, wenn analytische Lösungen für Anfangs-Randwertaufgaben bei der Diffusion von Platte, Vollzylinder und Vollkugel herzuleiten sind.

Die Herleitungen und Lösungen von Voll- und Hohlzylinder sind in den Kapiteln A2.3 und A2.4 des Anhangs A nachzuschlagen. Die thermische Kopplung beider Körper wird in Kapitel A2.5 vorgenommen, während Formeln zur Berechnung der thermoelastischen Formänderungen und Spannungen in Kapitel A2.6 des Anhangs A wiedergegeben werden. Einige konkrete Anwendungen des thermischen Modells zum Ziehen von Drähten auf Einzel- und Mehrfachziehmaschinen, zur Drahtkühlung, zu thermoelastischen Auswirkungen sowie zum Wärmebehandeln ruhender und axial bewegter Drähte in Wärmebehandlungsanlagen, speziell zum elektrischen Durchlauf-Widerstandsglühen, wird in Kapitel 3.2 dargestellt. Für das thermisch aktivierte Werkstoffverhalten durch Wärmebehandlung wird in Kapitel 3.3 ein Werkstoffmodell auf der Grundlage von Diffusion und Reaktionskinetik hergeleitet und seine Anwendung wird vorgestellt.

3 Ziehen und Wärmebehandeln von Draht

Das Gleitziehen bzw. Ziehen von Drähten aus metallischen Werkstoffen ist ein Zug-Druck-Umformverfahren, bei dem ein Draht durch eine schwach konische Ziehöse gezogen wird, so daß sich sein Durchmesser verjüngt und seine Länge, dem Gesetz der Volumenkonstanz folgend, entsprechend vergrößert. Die hierbei stattfindende plastische Formänderung geht einher mit einer Verfestigung des Drahtes, die bis zu einem gewissen Grad durchaus erwünscht ist bzw. gefordert wird. Durch geeigneten Werkstoffeinsatz sowie angemessene Ziehbedingungen und Umformgrade sind Zugfestigkeiten von $1800-2000 \text{ N/mm}^2$ bei Spannbeton- und Seildrähten, etwa $2500-3000 \text{ N/mm}^2$ bei Federdrähten oder sogar 2900 bis zu 3600 N/mm^2 bei hochfesten Stahlkorddrähten für Stahlgürtelreifen zu erreichen. Andererseits erschöpft sich mit wachsender Formänderung infolge gleichsam wachsender Versetzungsdichte das Umformvermögen eines Werkstoffs zunehmend, so daß es zur Erreichung gewisser Gesamtformänderungen bzw. Durchmesserreduktionen notwendig sein kann, eine oder sogar mehrere entfestigende Wärmebehandlungen, sogen. Zwischenglühungen in den Ziehprozeß einzugliedern. Beim Durchlauf-Widerstandsglühen von Draht z.B. liegen hochinstationäre Temperatur-Zeit-Verhältnisse vor, so daß die Bewertung des Rekristallisationsverlaufs und der einhergehenden Werkstoffreaktion mit dem herkömmlichen *JOHNSON-MEHL-AVRAMI*-Ansatz nicht mehr gegeben ist. Eine Weiterentwicklung reaktionskinetischer Beziehungen zur quantitativen Bewertung statischer Rekristallisations- und Kornwachstumsphänomene, insbesondere für instationäre Bedingungen, wird erforderlich.

3.1 Mechanische und thermische Verhältnisse beim Drahtziehen

Die Spezifizierung der thermischen Randbedingungen und Quellen bedingt zunächst, einige allgemein mechanische und umformtechnische Überlegungen anzustellen. Während beim Ziehen die Erwärmungsvorgänge immer unmittelbar aus der Umwandlung mechanischer Arbeit (Umform- und Reibungsarbeit) resultieren, besitzt die Flächenpressung des Drahtes auf der Ziehtrommel - und damit die Drahtspannung selbst - für die Drahtkühlung herausragende Bedeutung. Insbesondere die mit der mechanisch-thermischen Kopplung „Draht-Ziehöse“ oder „Draht-Ziehtrommel“ verbundenen Fragen der Wärmeübertragung sind für die Problemlösung wichtig. Die Größenordnung des Wärmeübergangs im Festkörperkontakt wird u.a. von der Dicke des Schmierfilms auf dem Draht während des Ziehens abhängen.

3.1.1 Erwärmung durch Umformung

Die Quellen der Erwärmung infolge Umformung ergeben sich zum einen als innere bzw. Volumenquellen q_V , die aus der fast vollständig in Wärme umgesetzten Umformleistung resultieren, und zum anderen als äußere bzw. Randquellen q_R , die aus der Reibarbeit zwischen den Wirkflächen hervorgehen [EIC 41]. Die plastische Dissipationswärme entspricht fast vollständig dem Produkt aus Fließspannung σ_F und Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_V$, d.h., der spezifischen Umformleistung, so daß sich die volumenbezogene Wärmequellendichte zu

$$q_V = \eta \cdot \sigma_F \cdot \dot{\epsilon}_V \quad (3.1.1-1)$$

ergibt; der materialabhängige Faktor η nimmt Werte im Bereich $0,86 < \eta < 0,95$ an und berücksichtigt, daß ein geringer Teil der Umformarbeit als latente Energie im Umformgut gespeichert bleibt, ein Anteil, der i.allg. experimentell zu bestimmen ist [DAH 93, Kap. B 3.6.4.1], [HEL 98].

Die Randquellen können unter Verwendung eines Wärmeverteilungskoeffizienten $m \in (0,1)$ vorgegeben werden als Wärmequellendichte an der Drahtoberfläche (Index D)

$$q_{RD} = m \cdot q_{R_{ges}} \quad (3.1.1-2)$$

und als Wärmequellendichte an der Ziehholoberfläche (Index Z)

$$\mathbf{q}_{RZ} = (1 - m) \cdot \mathbf{q}_{R_{ges}} \quad (3.1.1-3)$$

so daß für die Summe

$$\mathbf{q}_{RD} + \mathbf{q}_{RZ} = \mathbf{q}_{R_{ges}} \quad (3.1.1-4)$$

gilt. Die aus der äußeren Reibarbeit insgesamt hervorgehende Wärmequellendichte - vgl. auch [DAH 93, Kap. B 3.6.4.6] - berechnet sich dabei zu

$$\mathbf{q}_{R_{ges}} := \tau_R \cdot v_R \quad (3.1.1-5)$$

wobei die Kontakt-Schubspannung zwischen den mit der Geschwindigkeit v_R gegeneinander bewegten Wirkflächen bei Vorliegen z.B. COULOMBScher Reibungszustände bekanntlich durch

$$\tau_R = \mu \cdot \sigma_N \quad (3.1.1-6)$$

gegeben ist, wenn μ den Reibungsbeiwert und σ_N die Kontakt-Normalspannung bezeichnen.

Die Wahl des Wärmearaufteilungsbeiwertes m hat sich nach der Art der verwendeten Randbedingung zu richten. Bei Vorliegen von Lösungen für **Randbedingung 2. Art**, z.B. in der asymptotisch entwickelten Form (A2.3.2.8-5.3) bzw. (A2.3.2.8-5.4), die im vorliegenden Zusammenhang aus den entsprechenden Lösungen für erweiterte Randbedingungen 3. Art (A2.3.1-5) durch α bzw. $h \rightarrow 0$ hervorgegangen sind, läßt sich grob abschätzen, daß der ziehgeschwindigkeitsabhängige Wärmearaufteilungsbeiwert im Bereich $0,5 \leq m < 1$ liegen sollte; der kleinere m -Wert für kleine, m -Werte nahe Eins für große Geschwindigkeiten. Für einen über die Wirkfugenlänge (in achsialer Richtung) gemittelten Wärmearaufteilungsbeiwert \tilde{m} schlagen SIEBEL und KOBITZSCH, je nach Ziehgeschwindigkeit, einen Wert etwa im Bereich $0,8 \leq \tilde{m} < 1$ vor (der kleinere Wert bei kleineren Ziehgeschwindigkeiten von ca. 1 m/s) [SIE 43], eine Aussage, die in Kapitel 3.1.1.4.1 überprüft und präzisiert wird.

Liegt dagegen eine erweiterte **Randbedingung 3. Art** der Form (A2.3-3) vor, so ist für den Wärmearaufteilungsbeiwert stets, d.h., unabhängig von der Ziehgeschwindigkeit, $m = \frac{1}{2}$ anzusetzen, so daß die Randquellen durch

$$\mathbf{q}_{RD} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}_{R_{ges}} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}_{RZ} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}_{R_{ges}} \quad (3.1.1-7)$$

gegeben sind; der jeweils selbe Zahlenfaktor bringt die Gleichberechtigung der Wirkflächen von Ziehhol und Draht an der Wärmeentstehung durch Reibung gemäß dem Prinzip „*actio=reactio*“ zum Ausdruck. Im Gegensatz zur Randbedingung 2. Art, wofür sich ein Wärmearaufteilungsbeiwert m i.allg. nur schwer quantifizieren läßt, handelt es sich bei dem Faktor $\frac{1}{2}$ in (3.1.1-7) in Verbindung mit einer um Randquellen erweiterten Randbedingung 3. Art nicht um eine aus Mangel an Information getroffene Festlegung, sondern um die physikalisch einzig mögliche Annahme. Denn die Randquellen im Wirkfugenbereich von Draht und Ziehhol werden nicht aus einem gemeinsamen Reservoir gespeist, aus dem sie dann mehr oder weniger Energie - je nach thermischen Bedingungen - auf die Wirkflächen abführen und quantitativ unterschiedlich an die Festkörper weitergeben, wie es bei flüchtiger Betrachtung scheinen könnte. Jede Randquelle ist vielmehr substantiell - geometrisch, energetisch und stofflich - an die Reibfläche des jeweiligen Reibpartners untrennbar gebunden. Deshalb und infolge des mechanischen Prinzips „*actio=reactio*“ sind beide Reibpartner völlig gleichberechtigt am Entstehen der mechanischen Dissipationsleistung beteiligt, so daß allein die symmetrische Aufteilung von $\mathbf{q}_{R_{ges}}$ auf beide Randquellen gerechtfertigt ist (vgl. DAH 93, Kap. B 3.6.4.7). Die thermische Wechselwirkung bzw.

thermische Kopplung erfolgt durch den Wärmeaustausch zwischen den Reibflächen, wobei dieser Wärmeaustausch durch eine Wärmeübergangsbedingung nach *NEWTON*, also nach einer (erweiterten) Randbedingung 3. Art, wie z.B. (A2.3.1-5) und (A2.4.1-6) - approximiert wird. Eine wesentliche Rolle kommt hierbei der Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des Wirkflächenkontakts von Draht und Ziehhol zu, worauf zunächst eingegangen werden soll.

3.1.1.1 Wärmeübergang im Festkörperkontakt

Die thermische Kopplung von Draht und Ziehöse erfordert neben z.B. den Lösungen des Kapitels A2.5 die Kenntnis der Wärmeübergangsverhältnisse. Dabei ist insbesondere der innige Kontakt von Draht und Ziehöse im Wirkflächenbereich zu berücksichtigen. Von Bedeutung ist, welche Größenordnung der Wärmeübergangskoeffizient im Wirkflächenbereich annimmt.

LUEG und *POMP* hatten für den ruhenden metallischen Kontakt auf experimentellem Wege Wärmeübergangskoeffizienten etwa im Bereich von $5 \cdot 10^3$ bis $1 \cdot 10^4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ ermittelt [LUE 41]. Sie stellten insbesondere fest, daß sowohl Zunderschichten als auch geringste Unebenheiten der Kontaktflächen einen großen Einfluß auf den Wärmeübergang ausüben. In Untersuchungen von *KLAFS* zur Temperaturverteilung in Werkzeug und Werkstück beim Warmumformen [KLA 69] werden, je nach Temperaturniveau, Schmiermittel und Flächenpressung, Wärmeübergangskoeffizienten zwischen 10^4 und $10^5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ ermittelt, wobei eingeräumt wird, daß beim plastischen Umformen noch weit höhere Wärmeübergangskoeffizienten auftreten können. Untersuchungen beim Walzen unter Berücksichtigung einer Zunderschicht zeigen [PAW 69], [BRU 74], daß zwischen Walze und Walzgut Wärmedurchgangskoeffizienten k in derselben Größenordnung auftreten, so daß, da $\alpha > k$ gilt, auch hier Wärmeübergangskoeffizienten von mindestens dieser Höhe zu erwarten sind (Anhang B, *Anmerkung 1*).

Welcher Wärmeübergangskoeffizient für den Wärmeaustausch zwischen Draht und Ziehöse im Wirkflächenabschnitt, jeweils in Abhängigkeit der Ziehbedingungen, im Einzelfall anzunehmen ist, läßt sich letztlich nur unter Rückgriff auf gemessene Ziehösentemperaturen ermitteln. Eigene hierzu durchgeführte Ziehversuche, bei denen Temperaturmessungen an vier Ziehösen in mit jeweils fünf oder sechs Mikromantelthermoelementen präparierten Hartmetallkernen vorgenommen wurden, haben ergeben, daß selbst bei guten Schmierzuständen nahe hydrodynamischer Verhältnisse der maximale Temperaturunterschied zwischen Draht und Ziehholoberfläche am Ziehholeinlauf einen Wert von etwa 100 K kaum überschreiten und der Wärmeübergangskoeffizient einen Wert in der Größenordnung von $(10^5 \dots 10^6) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ kaum unterschreiten wird.

Dieses Resultat befindet sich übrigens in Übereinstimmung mit einer auf anderem Wege für den Wärmeübergang zwischen Festkörperflächen leicht herzuleitenden, sogar für aufeinander gleitende Flächen in guter Näherung gültigen Abschätzung, wonach

$$\alpha \geq \frac{\lambda_s}{s} \tag{3.1.1.1-1}$$

gilt (Anhang B, *Anm.2*), wenn λ_s die Wärmeleitfähigkeit und s die mittlere Dicke des Schmierfilms sind; das Gleichheitszeichen gilt bei völliger Trennung der Oberflächen durch das Schmiermittel, also bei hydrodynamischer Schmierung. Die während eigener Ziehversuche u.a. ermittelten Schmierfilmdicken von $(0,05 \dots 1) \mu\text{m}$ bestätigen unter Berücksichtigung der für Trockenseifen charakteristischen Wärmeleitfähigkeiten [GOT 84] im Bereich von $(0,1 \dots 0,2) \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ die Größenordnung für den zwischen Draht- und Ziehholoberfläche wirksamen Wärmeübergangskoeffizienten. Eine Präzisierung sollte unter Einbeziehung gewisser Charakteristika der sich berührenden Oberflächen und Ziehmittel [KIS 63], [HEL 53] sowie unter

Berücksichtigung neuerer Erkenntnisse auf dem Gebiet der Nanotribologie [KRI 96] möglich werden.

3.1.1.2 Umformzone

In der Umformzone, die von der Kontur des Ziehholts begrenzt wird, findet die plastische Formänderung statt, die als Hauptwärmequelle anzusehen ist [NEU 65]. Die Volumenquelle (3.1.1-1) ist i.allg. eine Funktion des Ortes und der Zeit, weil sowohl die Fließspannung als auch die Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit orts- und zeitabhängig sind. Die Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit in Zylinderkoordinaten ergibt sich zu

$$\dot{\epsilon}_V = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{rz}^2}, \quad (3.1.1.2-1)$$

wobei die Dehngeschwindigkeiten in radialer, tangentialer und axialer Richtung durch

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (3.1.1.2-2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \right) \\ &= \frac{v_r}{r} \quad \left(\text{infolge Rotationssymmetrie } \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \right) \end{aligned} \quad (3.1.1.2-2.2)$$

und

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.1.1.2-2.3)$$

sowie die Schiebungsgeschwindigkeit durch

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (3.1.1.2-2.4)$$

gegeben sind [KOP 68], [EDE 75].

Das Ziehholprofil ist mehr oder weniger konisch oder konisch-ballig ausgebildet. Da jedoch die Temperaturfunktionen aus Gründen mathematischer Vereinfachung für die Geometrie des geraden Voll- und Hohlzylinders abgeleitet werden - vgl. Kapitel A2.3 - A2.5 des Anhangs A, sind die Volumenquellen durch eine geeignete Vorschrift von der realen Kegel- auf die fiktive Zylindersymmetrie zu transformieren.

Das heißt, für gegebene Quellen $\mathbf{q}_V(z,r) > 0$, wie sie in einem durch Rotation einer Kurve $R = R(z) \geq r \geq 0$ (Ziehholprofil) im Intervall $0 \leq z_A \leq z \leq z_B$ um die z -Achse entstandenen Rotationskörper (Umformzone) vorliegen, wird eine möglichst ähnliche Funktion $\mathbf{q}_V^*(z,r) > 0$ in einem Ersatzzylinder gleicher Länge gesucht, dessen Radius R^* so gewählt werden sollte, daß die Wärmemenge unverändert bleibt

$$\int_{z_A}^{z_B} \int_0^{R(z)} r \cdot \mathbf{q}_V(z,r) \cdot dr dz = \int_{z_A}^{z_B} \int_0^{R^*} r \cdot \mathbf{q}_V^*(z,r) \cdot dr dz. \quad (3.1.1.2-3)$$

Es bietet sich an, die Ersatzquellen $\mathbf{q}_V^*(z,r)$ aus den Originalquellen $\mathbf{q}_V(z,r)$ durch Dilatation bzw. Kontraktion der Radiuskoordinate - im Verhältnis der Begrenzungsradien von realer Umformzone und Ersatzzylinder - festzulegen:

$$\mathbf{q}_V^*(z,r) = \mathbf{q}_V(z, \frac{R(z)}{R^*} r); \quad 0 \leq r \leq R^*. \quad (3.1.1.2-4)$$

Der thermisch äquivalente Radius ergibt sich damit zu

$$R^* = \sqrt{\int_{z_A}^{z_B} \int_0^{R(z)} r \cdot \mathbf{q}_V(z,r) \cdot dr dz} / \sqrt{\int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{R^2(z)} \cdot \int_0^{R(z)} r \cdot \mathbf{q}_V(z,r) \cdot dr dz}. \quad (3.1.1.2-5)$$

Zur konkreten Ermittlung der Wärmequellen (3.1.1-1) mit (3.1.1.2-1) sind auf der Grundlage der Allgemeinen Plastizitätstheorie der Bewegungszustand und die Spannungsverteilung in der Umformzone zu bestimmen. Hierfür ist i.allg. die Lösung eines aus zehn Gleichungen bestehenden Systems erforderlich (drei Gleichgewichtsbedingungen [LAN 72, Bd.1(4.76)], eine Kontinuitätsbeziehung [LAN 72, Bd.1(4.94)], sechs Gleichungen des Stoffgesetzes [LAN 72, Bd.1(4.99)]) - von einfachen Spezialfällen abgesehen konnten geschlossene Lösungen für die meisten technisch wichtigen Anwendungen noch nicht angegeben werden. Selbst im vorliegenden Falle, wo infolge axialsymmetrischer Verhältnisse nur noch sieben Unbekannte aus einem entsprechenden Gleichungssystem - zwei Gleichgewichtsbedingungen, eine Fließbedingung und vier Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen - zu bestimmen sind [PAW 66, S. 385f], haben sich analytisch geschlossene Lösungen noch nicht finden lassen. Dagegen existieren verschiedenste Näherungslösungen, für deren Herleitung Vereinfachungen hinsichtlich Anfangs- und Randbedingungen, Werkstofffluß, Fließkriterium oder Geometrie vorgenommen wurden. Beim Drahtziehen haben sich zur Bestimmung des Kraft- und Arbeitsbedarfs besonders die Elementare Plastizitätstheorie [LIP 67], [DAH 93, B 4.4] und das Schrankenverfahren [AVI 83], [DAH 93, B 4.6] als hilfreich erwiesen. Stützt man sich z.B. auf das Schrankenverfahren nach [EDE 75] und verwendet für ein konisches Ziehholprofil (Ziehholöffnungswinkel $2\tilde{\alpha}$) mit $R(z) = R_0 - z \cdot \tan \alpha$ mittels der Transformation $z_{Eder} = z_A + R_0 \cdot \cot \tilde{\alpha} - z$ eine in Ziehrichtung orientierte z -Achse, bei der die Umformzone bei $z = z_A$ beginnt und bei $z = z_B$ endet, so werden mit den Dehnungs- und Schiebungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\varphi = v_0 \frac{R_0^2 \cdot \cot^2 \tilde{\alpha}}{(z_A + R_0 \cot \tilde{\alpha} - z)^3} \quad (3.1.1.2-6.1)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -2 \dot{\epsilon}_r \quad (3.1.1.2-6.2)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = -3 \frac{r}{z_A + R_0 \cot \tilde{\alpha} - z} \cdot \dot{\epsilon}_r \quad (3.1.1.2-6.3)$$

die Quellen entsprechend (3.1.1-1) und (3.1.1.2-1) schließlich zu

$$\mathbf{q}_V(z,r) = 2\eta \cdot \sigma_F(z,r) \cdot \dot{\epsilon}_r(z) \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{r}{z_A + R_0 \cot \tilde{\alpha} - z} \right)^2} \quad (3.1.1.2-7)$$

erhalten.

Soll die lokale Inhomogenität des Quellenfeldes vernachlässigt werden, so kann für die Umformzone der volumenbezogene Mittelwert der Umformwärmequellen

$$\bar{q}_V = \frac{2\pi}{z_B - z_A} \cdot \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{A(z)} \cdot \int_0^{R(z)} r \cdot \mathbf{q}_V(z,r) \cdot dr dz \equiv \frac{2\pi}{V^*} \cdot \int_{z_A}^{z_B} \int_0^{R^*} r \cdot \mathbf{q}_V^*(z,r) \cdot dr dz \quad (3.1.1.2-8)$$

herangezogen werden, wobei $A(z) = \pi \cdot R^2(z)$ die Querschnittsfläche der realen Umformzone und $V^* = \pi \cdot (z_B - z_A) \cdot R^{*2}$ das Volumen des thermisch äquivalenten Ersatzzylinders mit dem Radius (3.1.1.2-5) bezeichnen.

Eine wesentliche Bedeutung für die Ausbildung der Temperaturverhältnisse in den Randbereichen von Draht und Ziehhol kommt den reibungsbedingten Randquellen (3.1.1-5) zu. Diese an der radialen Begrenzung zur Umformzone lokalisierten äußeren Quellen weisen - abgesehen von einer möglichen Zeitabhängigkeit - stets eine mehr oder weniger ausgeprägte Ortsabhängigkeit auf. Insbesondere Untersuchungen von *ARMSTROFF* haben das qualitativ erwartete Ergebnis bestätigt, daß zwei Maxima der Kontaktnormalspannung $\sigma_N = \sigma_N(z)$ entlang der Wirkfuge zwischen Draht und Ziehhol auftreten können, das erste am Beginn, das zweite am Ende der Umformzone [ARM 67], [PAW 67]. In Ziehversuchen, für die zwei nach dem Membranprinzip präparierte, mit unterschiedlichen Ziehholprofilen versehene Ziehwerkzeuge eingesetzt wurden, ermittelte *HILDEBRAND* gleichfalls Kontaktnormalspannungen z.T. ähnlichen Verlaufes [HIL 88]. Mit diesen Ergebnissen und unter Verwendung parallel gemessener Zieh- bzw. Axialkräfte, wie sie beim „Ausleeren“, d.h., beim Durchgang eines Drahtendes durch das Ziehhol auftreten, berechnet er schließlich die Ortsabhängigkeiten von Reibwert $\mu = \mu(z)$ und Kontaktschubspannung $\tau_R = \tau_R(z)$.

Ungeachtet dieser prinzipiellen experimentellen und theoretischen Fortschritte, wird eine breitere Anwendung ortsabhängiger Randquellen auch weiterhin wohl daran scheitern, daß quantitative Resultate stets nur mit erheblichem experimentellem Aufwand zu erhalten sind. Um dennoch die Randquellen wenigstens summarisch in der richtigen Größenordnung berücksichtigen zu können, läßt sich ein flächenspezifischer Mittelwert

$$\bar{q}_R = \frac{2\pi}{A_R} \cdot \int_{z_A}^{z_B} q_R(z) \cdot R(z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dz} R(z)\right)^2} dz, \quad (3.1.1.2-9.1)$$

wie er sich bei Kenntnis der Ortsabhängigkeit für die nominelle Reibfläche

$$A_R = 2\pi \int_{z_A}^{z_B} R(z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dz} R(z)\right)^2} dz \quad (3.1.1.2-9.2)$$

ergeben würde, heranziehen. Dafür ist jedoch bereits die Verwendung integraler Vorgaben für Reibwert und Kontaktnormalspannung, wie sie unter Rückrechnung z.B. aus elementaren Ziehtheorien resultieren, noch immer ein praktikabler Behelf.

3.1.1.3 Näherungslösungen nach dem Vorgehen von *SIEBEL/KOBITZSCH*

Zur Bestimmung der Drahttrandtemperatur werden häufig noch die Überschlagsformeln von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* wegen deren Einfachheit gern herangezogen. Im Kontext der auf der Grundlage der Wärmeleitungsgleichung hergeleiteten Lösungen und Näherungslösungen (Kapitel A2.3) ist es durchaus interessant, auf die Eigenart der Näherungsbetrachtung [SIE 43], die bekanntlich ein parabolisches Temperaturprofil zwischen Drahtachse und Drahttrand voraussetzt, etwas näher einzugehen. So wird im Kapitel A3.1.1.3 des Anhangs A u.a. eine neue Lösung hergeleitet, die gegenüber der von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* zusätzlich Rotationssymmetrie und einen erweiterten Wärmeübergang 3. Art berücksichtigt:

$$g_R(z) \approx (g_U + \frac{q_R}{\alpha}) B \dot{v} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} Fo} + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{4} B \dot{v} \right) Fo + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{17}{20} B \dot{v} + \frac{22}{15} B \dot{v}^2 \right) Fo \sqrt{Fo} + \dots \right\};$$

q_R gemäß (3.1.1-7), (3.1.1.3-1)

wofür der Vergleich mit der entsprechenden, auf der Basis der Wärmeleitungsgleichung entstandenen asymptotischen Lösung (A2.3.2.8-5.2) - zumindest in qualitativer Hinsicht - erstaunlich zufriedenstellend ausfällt.

Im folgenden Kapitel 3.1.1.4 wird ein einfaches Näherungsverfahren zur thermischen Draht-Ziehdüse-Kopplung angegeben sowie eine quantitative Abschätzung für den Wärmeeufteilungsbeiwert m vorgenommen, wie ihn Lösungen für Randbedingung 2. Art - also speziell auch die ursprünglichen Formeln von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* - benötigen.

3.1.1.4 Thermische Draht-Ziehdüse-Kopplung

Theoretische Berechnungen zur thermischen Wechselwirkung zwischen Voll- und Hohlzylinder sind in Kapitel A2.5 durchgeführt worden. Nachfolgend werden zwei Alternativen zur konkreten Berechnung der thermischen Draht-Düse-Kopplung vorgestellt:

- Temperaturmessung und Temperaturfeldberechnung gemäß Kapitel A2.5.2 mit dem Ziel, den Wärmeübergang im Festkörperkontakt zwischen Draht und Düse zu präzisieren.
- Herleitung leicht anwendbarer Überschlagsformeln. Damit wird z.B. die Durchrechnung ganzer Zugfolgen mit einfachen Mitteln, z.B. mit Pocket-PC, möglich. Eine Formel zur quantitativen Abschätzung des Wärmeeufteilungsbeiwertes m wird angegeben, der bei Verwendung von Lösungen für Randbedingung 2. Art benötigt wird.

3.1.1.4.1 Näherungsverfahren

Zur rechnerischen Kopplung der Temperaturfelder von Draht und Ziehdüse über deren Randbedingungen liegen für den Draht die in Kapitel A2.3 bereits abgeleiteten analytischen Lösungen unterschiedlichen Näherungsgrades vor. Für die Ziehdüse muß eine für das Näherungsverfahren möglichst zweckmäßige Lösung gesucht werden.

Für eine sehr grobe Näherungsbetrachtung kann die Ziehdüse als ein den Draht entlang der Umformzone eng umschließender Hohlzylinder mit einem Innenradius $r = R_1 \cong R$ (Draht) und Außenradius $r = R_2 > R_1$ aufgefaßt werden. Von einer Ortsabhängigkeit des Temperaturfeldes in axialer Richtung wird, wenn auch in offensichtlichem Gegensatz zur (r,z) -Abhängigkeit der Temperaturen eines realen Ziehwerkzeugs, abgesehen. Es können die Lösungen für den unendlich langen Hohlzylinder herangezogen werden, die im stationären Fall dann tatsächlich sehr einfach und damit für den vorgesehenen Zweck besonders geeignet sind - die unendliche Länge des Hohlzylinders ist in erster Näherung insofern unbedenklich, als Wärmeleitung drahtseitig in Achsrichtung vernachlässigt wird und damit eine direkte thermische Beeinflussung des Drahtabschnittes der Umform- und Führungszone durch außerhalb davon ebenfalls (gezwungenermaßen) vom Hohlzylinder umgebene Drahtabschnitte ausgeschlossen ist.

Faktisch bedeutet das, daß sowohl ein an beiden Stirnflächen real vorhandener Wärmeaustausch mit der Umgebung wie auch eine entsprechende Ortsabhängigkeit der Randbedingungen entlang der Mantelflächen vernachlässigt wird. Es ist dann anstelle einer eigentlich von der z -Koordinate abhängenden Randfunktion $r(z)$ jeweils der über die Länge der Umformzone L gemittelte Wert gemäß

$$\tilde{r} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L r(z) \cdot dz$$

(3.1.1.4-1)

als Randwert in die Lösung $\tilde{\mathcal{G}}_Z(r)$ für den Hohlzylinder, die selbst als entsprechender Mittelwert aufzufassen ist, einzusetzen; das hochgestellte Symbol \sim dient zur Unterscheidung gegenüber den mit hochgestelltem Querbalken gekennzeichneten Mittelwerten bezüglich radialer Richtung¹.

Damit werden für den unendlich langen Hohlzylinder an der inneren und äußeren Mantelfläche folgende Randbedingungen 3. Art (bzw. erweiterte 3. Art) vorgeschrieben:

$$\text{- für } r = R_1: \quad -\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_1) = -h_1 \cdot \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_1) + \tilde{\mathbf{r}}_1, \quad h_1 := \frac{\alpha_1}{\lambda_Z}, \quad (3.1.1.4-2)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{r}}_1 := h_1 \cdot \tilde{\mathcal{G}}_{U1} + \frac{1}{\lambda_Z} \tilde{q}_{RZ},$$

$$\text{- für } r = R_2: \quad -\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_2) = h_2 \cdot (\tilde{\mathcal{G}}_{U2} - \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_2)), \quad h_2 := \frac{\alpha_2}{\lambda_Z}. \quad (3.1.1.4-3)$$

Die Lösung für den stationären Fall ($t \rightarrow \infty$) kann unmittelbar aus [TAU 71, (6.110)] entnommen werden:

$$\tilde{\mathcal{G}}_Z(r) = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot R_1 \cdot (1 + h_2 R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{r}) + \tilde{\mathcal{G}}_{U2} \cdot h_2 R_2 \cdot (1 + h_1 R_1 \cdot \ln \frac{r}{R_1})}{h_1 R_1 + h_2 R_2 + h_1 R_1 \cdot h_2 R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.1.1.4-4.1)$$

Läßt sich am äußeren Hohlzylindermantel anstelle der Umgebungstemperatur $\tilde{\mathcal{G}}_{U2}$ sogar eine mittlere Oberflächentemperatur $\tilde{\mathcal{G}}_{R2} \equiv \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_2)$ abschätzen oder durch Temperaturmessungen angeben, wobei $r = R_2$ durchaus nicht an die reale Abmessung der Ziehdüse gebunden zu sein braucht (z.B. wenn Meßwerte vom Inneren der Ziehdüse vorliegen), so verwendet man besser die entsprechende Lösung für Randbedingung 1. Art bei $r = R_2$, die sofort aus (3.1.1.4-4.1) mit ($h_2 \rightarrow \infty$) und $\tilde{\mathcal{G}}_{U2} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{R2}$ erhalten wird

$$\tilde{\mathcal{G}}_Z(r) = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{r} + \tilde{\mathcal{G}}_{R2} \cdot (1 + h_1 R_1 \cdot \ln \frac{r}{R_1})}{1 + h_1 R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.1.1.4-4.2)$$

Unter vorausgesetzter Richtungsunabhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Umformgut und Ziehwerkzeug, also $\alpha_1 = \alpha$, läßt sich die thermische Kopplung des Drahtes mit der Ziehdüse (analog auch umgekehrt) über deren Randbedingungen nunmehr wie folgt erreichen: In die Randbedingung (A2.3.1-5) des Drahtes wird an Stelle der Umgebungstemperatur \mathcal{G}_U die mittlere Hohlzylinderinnenrandtemperatur $\tilde{\mathcal{G}}_{R1} \equiv \tilde{\mathcal{G}}_Z(R_1)$ nach (3.1.1.4-4) - hierin allerdings von $\tilde{\mathcal{G}}_{U1} = \tilde{\mathcal{G}}_D(R)$ wieder zu $\mathcal{G}_D(R, z)$ zurückgehend - eingesetzt. Die dabei entstehende Gleichung läßt sich auf eine mit der ursprünglichen Bedingung (A2.3.1-5) selbstähnliche Form zurückführen. Damit wird die zu (A2.3.1-5) formal gleiche „Kopplungs-Randbedingung“ für den Draht erhalten

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}_D(R, z) = -h_{DZ} \cdot \mathcal{G}_D(R, z) + \mathbf{r}_{DZ}; \quad (3.1.1.4-5)$$

¹ Beachte: Während in Kapitel A2.5 mit $z = L$ die Hohlzylinderlänge bezeichnet wurde, ist damit jetzt die Länge der Umformzone $L = z_B - z_A$ gemeint. Die Tilde \sim wird nachfolgend entgegen dem Gebrauch in den Kapiteln A2.4.3.1, A2.4.3.2 und A2.5 als Abkürzung für den Mittelwert in Achsrichtung verwendet.

mit der Randfunktion

$$\mathbf{r}_{DZ} = \mathbf{r}_{DZ}(z) := h_{DZ} \cdot \tilde{\mathcal{G}}_{DZ} + \frac{q_{R_D}(z)}{\lambda_D}, \quad (3.1.1.4-5.1)$$

und dem bezogenen Wärmeübergangskoeffizienten

$$h_{DZ} := \frac{\alpha_{DZ}}{\lambda_D}. \quad (3.1.1.4-5.2)$$

Wird Lösung (3.1.1.4-4.1) verwendet, so sind α_{DZ} und $\tilde{\mathcal{G}}_{DZ}$ durch

$$\alpha_{DZ} := \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k_Z} + \frac{R_I}{R_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}; \quad k_Z := \frac{\lambda_Z}{R_I \cdot \ln \frac{R_2}{R_I}}$$

und

$$\tilde{\mathcal{G}}_{DZ} := \tilde{\mathcal{G}}_{U2} + \tilde{q}_{RZ} \cdot \left(\frac{1}{k_Z} + \frac{R_I}{R_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2} \right), \quad (3.1.1.4-6.1)$$

speziell für $h_2 \rightarrow \infty$ und $\tilde{\mathcal{G}}_{U2} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{R2}$ entsprechend (3.1.1.4-4.2) dagegen durch

$$\alpha_{DZ} := \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k_Z} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{G}}_{DZ} := \tilde{\mathcal{G}}_{R2} + \frac{\tilde{q}_{RZ}}{k_Z} \quad (3.1.1.4-6.2)$$

gegeben; eine Erweiterung für den Fall des mehrschichtigen Hohlzylinders (Ziehdüse mit Fassung usw.) siehe Anhang.

Werden in den Lösungen für den Draht h und \mathbf{r} durch h_{DZ} und \mathbf{r}_{DZ} bzw. \mathcal{G}_U durch $\tilde{\mathcal{G}}_{DZ}$ entsprechend (3.1.1.4-5) und (3.1.1.4-6) ersetzt, so lassen sich die Drahttemperaturen der Umformzone unter näherungsweise Berücksichtigung einer thermischen Wechselwirkung mit der Ziehdüse unmittelbar berechnen.

Bei dieser Betrachtung wurde allerdings davon ausgegangen, daß die Randquellen $q_{R_{ges}}$ von der Wirkflächentemperatur unabhängig sind. Es ist jedoch bekannt, daß sowohl die Viskosität des Ziehmittels als auch Grenzflächenreaktionen [THI 67] zwischen Draht und Ziehholwand i.allg. druck- und temperaturabhängig sind, so daß auch die Reibungsverhältnisse eine entsprechende Abhängigkeit aufweisen werden. Infolge der Temperaturabhängigkeit der Reibungsverhältnisse sind dann auch die Randquellen selbst wieder temperaturabhängig und es besteht eine Rückkopplung zu den Wirkflächentemperaturen $\mathcal{G}_W = \mathcal{G}_W(z)$, d.h., $q_{R_{ges}} = q_{R_{ges}}(\mathcal{G}_W)$. Kann dieser Temperatureinfluß näherungsweise als linearer Zusammenhang erfaßt werden, d.h.,

$$q_{R_{ges}}(z) \cong q_{R0}(z) + q_{Rg}(z) \cdot \mathcal{G}_W(z), \quad (3.1.1.4-7)$$

so bleiben die Randbedingungen ebenfalls linear und das Problem läßt sich direkt lösen.

Unter Verwendung von α_{DZ} und $\tilde{\mathcal{G}}_{DZ}$ - z.B. nach (3.1.1.4-6.2) - wird anstelle der Randfunktion (3.1.1.4-5.1) die modifizierte Randfunktion

$$\mathbf{r}_{DZ} := \frac{1}{\lambda_D} \cdot \left[\alpha_{DZ} \cdot \tilde{\mathcal{G}}_{R2} + \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z} \right) \cdot \frac{q_{R0}}{2} \right] \quad (3.1.1.4-8.1)$$

und anstelle des relativen Wärmeübergangskoeffizienten (3.1.1.4-5.2) der modifizierte bezogene Wärmeübergangskoeffizient

$$h_{DZ} := \frac{1}{\lambda_D} \left[\alpha_{DZ} - \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z} \right) \cdot \frac{q_{Rg}}{2} \right] \quad (3.1.1.4-8.2)$$

erhalten. Wenn der Reibungsbeiwert im betreffenden Temperaturintervall durch

$$\mu \cong \mu_0 + \mu_g \cdot \mathcal{G}_W(z) \quad (3.1.1.4-9)$$

angenähert werden kann, so werden wegen (3.1.1-5) die Koeffizienten der Randquelle (3.1.1.4-7) durch

$$q_{R0} := \mu_0 \cdot \sigma_N \cdot v_R \quad \text{und} \quad q_{Rg} := \mu_g \cdot \sigma_N \cdot v_R \quad (3.1.1.4-10)$$

bestimmt; die auf die Ziehholoberfläche wirkende Normalspannung σ_N läßt sich unter Verwendung einer Ziehtheorie rechnerisch - Anhang B: (B3.1.1.4.1-2.3) bzw. (B3.1.1.4.1-2.17) - oder im Einzelfall ggf. auch experimentell - z.B. [HIL 88] - ermitteln. Einfachsterweise ist die mittlere Normalspannung σ_{Nm} heranzuziehen - Anhang B: (B3.1.1.4.1-2.9) bzw. (B3.1.1.4.1-2.18).

Da sich der Reibungsbeiwert mit wachsender Temperatur i.allg. verringert, d.h., es gilt $\mu_g < 0$, wird sich ein thermisches Gleichgewicht einstellen, dessen Temperaturniveau gegenüber konstantem Reibwert entsprechend niedriger ist. Speziell für $\mu_g = 0$ ergeben sich - unter Berücksichtigung von (3.1.1.4-6.2) - wieder die Beziehungen (3.1.1.4-5.1), (3.1.1.4-5.2).

Der Gedankengang kann ganz analog auch umgekehrt zur Kopplung der Ziehdüse mit dem Draht geführt werden, wobei sich eine zu (3.1.1.4-2) selbstähnliche „Kopplungs-Randbedingung“ für die Ziehdüse ergibt. Allerdings dürfte das infolge des extremen Näherungscharakters des Ziehdüsenmodells, welches über den Temperaturverlauf in z -Richtung gar keine Aussage gestattet, uninteressant sein, so daß die entsprechenden Beziehungen hier nicht erst angegeben werden. Um zu annähernd realistischen Ziehdüsentemperaturen zu gelangen, ist wesentlich mehr mathematisch-rechentechnischer Aufwand erforderlich, wie Kapitel A2.5 zu entnehmen ist.

Werden zur Berechnung der Drahttemperaturen in der Umformzone anstelle entsprechender Lösungen für die Kopplungs-Randbedingung (3.1.1.4-5) die Lösungen für Randbedingung 2. Art verwendet, z.B. in einer asymptotisch entwickelten Form (A2.3.2.8-5.3) bzw. (A2.3.2.8-5.4), so ist q_{RD} anstelle nach (3.1.1.4-5) gemäß (3.1.1-2) einzusetzen.

Der Wärmearbeitungsbeiwert m wird unmittelbar durch Gleichsetzen der Randbedingung 2. Art mit der Kopplungs-Randbedingung (3.1.1.4-5) zu

$$\begin{aligned} m = m(z) &= \frac{r_{DZ} - h_{DZ} \cdot \mathcal{G}_D(R, z)}{q_{Rges}} \cdot \lambda_D \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha_{DZ}}{q_{Rges}(z)} \left(\tilde{\mathcal{G}}_{DZ} - \mathcal{G}_D(R, z) \right) \end{aligned} \quad (3.1.1.4-11)$$

erhalten, wobei als Drahttrandtemperatur $\mathcal{G}_D(R, z)$ wieder die entsprechenden zur Kopplungs-Randbedingung (3.1.1.4-5) gehörenden Lösungen mit $q_{RD} = \frac{1}{2} \cdot q_{Rges}$ nach (3.1.1-7) heranzuziehen sind. Es ist unmittelbar zu erkennen, daß $m(z)$ bei $z = 0$ seinen Maximalwert erreicht, während der rechnerische Minimalwert $m = 1/2$ erst im extrem unrealistischen Grenzfall für $\alpha = \alpha_{DZ} = 0$ - vgl. Abschätzung (3.1.1.1-1) - angenommen wird.

Speziell im Falle ortsunabhängiger Randfunktionen und Quellen erhält man näherungsweise, z.B. unter Verwendung der ersten Glieder der Reihe der asymptotischen Lösung (A2.3.2.8-5.2), den Wärmeverteilungskoeffizienten explizit zu

$$m(z) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\alpha_{DZ}}{q_{Rges}} \cdot \left(\tilde{g}_{DZ} - g_0 - q_V \cdot \frac{a_D z}{\lambda_D v} \right) \right\} \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha_{DZ}}{\lambda_D} \cdot \sqrt{\frac{a_D z}{v}} \right). \quad (3.1.1.4-12.1)$$

Wird z.B. (3.1.1.4-6.2) benutzt und berücksichtigt, daß häufig

$\left| \frac{2 k_Z}{q_{Rges}} \left(g_{R2} - g_0 - q_V \cdot \frac{a_D z}{\lambda_D v} \right) \right| \ll 1$ gilt, so ist der Beiwert durch

$$m(z) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{k_Z}{\alpha}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{k_Z}{\alpha}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k_Z}{\lambda_D} \cdot \sqrt{\frac{a_D z}{v}} \right), \quad (3.1.1.4-12.2)$$

gegeben, dessen Abhängigkeit von den dimensionslosen Parametern $\frac{\alpha}{k_Z}$ und $\frac{k_Z}{\lambda_D} \sqrt{\frac{a_D z}{v}}$ auch aus dem folgenden Bild zu ersehen ist.

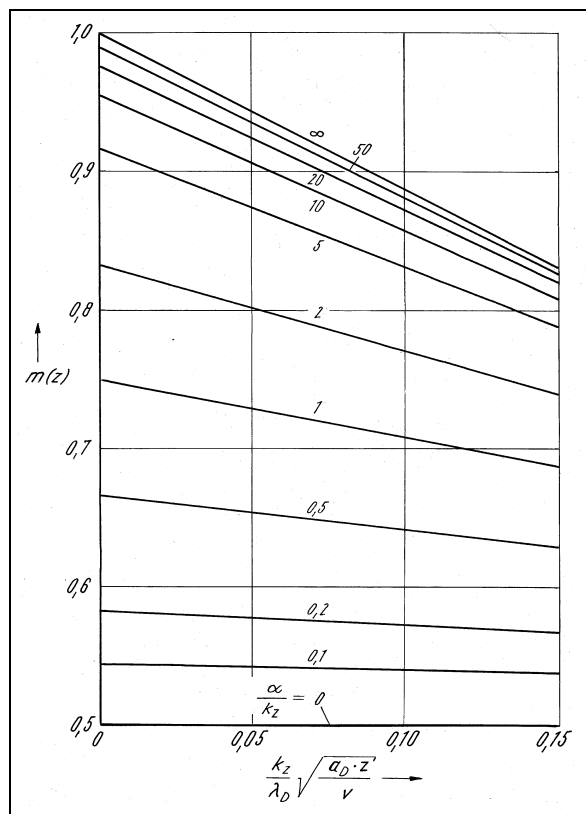


Bild 3.1.1-1: Wärmeverteilungskoeffizient bei Randbedingung 2. Art

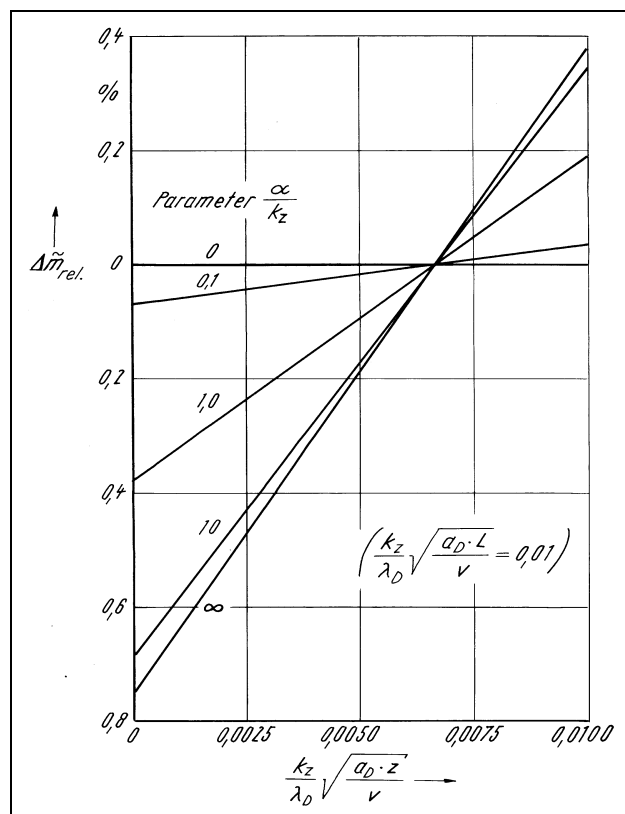


Bild 3.1.1-2: Relative prozentuale Abweichung des Mittelwertes

Die bereits von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* gebrachten Aussagen [SIE 43] zum qualitativen Verhalten von $m(z)$ werden in der Form (3.1.1.4-12.2) leicht überschaubar quantitativ untersetzt sowie in qualitativer Hinsicht im wesentlichen bestätigt bzw. präzisiert.

Im Fachschrifttum hat m , in Anlehnung an [SIE 43], lediglich als Mittelwert für die Umformzone Eingang gefunden, wobei die Werte nach oben oder unten entsprechend abgeändert werden. Dagegen ist es jetzt möglich, durch Anwendung des verallgemeinerten ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf (3.1.1.4-11) - nach Multiplikation der Gleichung mit $q_{R_{ges}}(z)$ - zum mittleren Wärmeverteilungskoeffizienten

$$\tilde{m} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_{DZ}}{\tilde{q}_{R_{ges}}} \cdot (\tilde{g}_{DZ} - \tilde{g}_D(R)) \quad (3.1.1.4-13)$$

zu gelangen, wobei $\tilde{q}_{R_{ges}}$ und $\tilde{g}_D(R)$ die gemäß Vorschrift (3.1.1.4-1) gebildeten Mittelwerte sind.

Speziell wieder im Falle ortsunabhängiger Randfunktionen und Quellen wird der mittlere Wärmeverteilungskoeffizient, auch ohne erst den Umweg über \tilde{g}_D mit (3.1.1.4-13) zu gehen, unmittelbar aus (3.1.1.4-12.2) entsprechend dortiger Näherung zu

$$\tilde{m} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{k_Z}{\alpha}} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{k_Z}{\alpha}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k_Z}{\lambda_D} \cdot \sqrt{\frac{a_D \cdot L}{\nu}} \right) \quad (3.1.1.4-14)$$

erhalten.

Die relative prozentuale Abweichung gegenüber (3.1.1.4-12.2) $\Delta\tilde{m}_{rel} = \left(\frac{\tilde{m}}{m(z)} - 1 \right) \cdot 100\%$ ist beispielshalber für $\frac{k_Z}{\lambda_D} \cdot \sqrt{\frac{a_D \cdot L}{\nu}} = 0,01$ in Bild 3.1.1-2, die entsprechende Abhängigkeit des Mittelwertes selbst im folgenden Bild dargestellt.

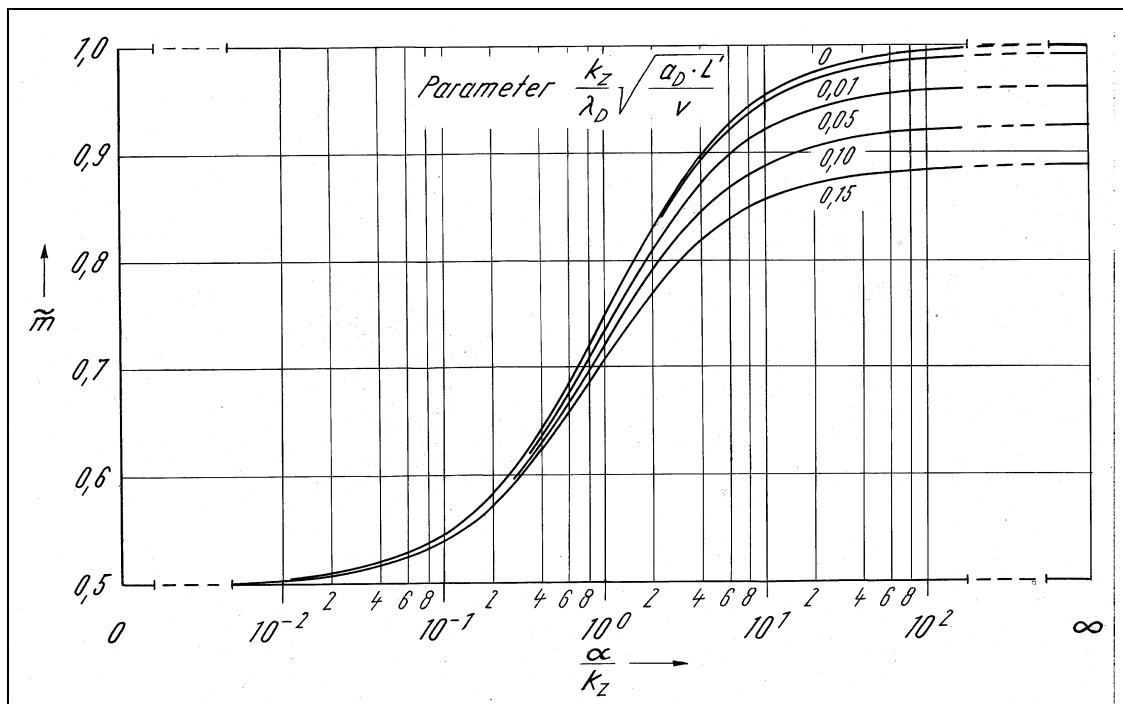


Bild 3.1.1-3: Mittlerer Wärmeverteilungskoeffizient bei Randbedingungen 2. Art

Wird berücksichtigt, daß infolge Abschätzung (3.1.1.1-1) der technisch relevante Bereich im wesentlichen durch $\frac{\alpha}{k_z} > 1$ gegeben ist, so bewegt sich der mittlere Wärmeverteilungskoeffizient - in Übereinstimmung mit den Angaben von *SIEBEL/KOBITZSCH* [SIE 43] - in der Tat hauptsächlich im Bereich $0,7 < \tilde{m} < 1$.

Zusammenfassend hierzu bleibt festzustellen: Das Verwenden von Lösungen gemäß Randbedingung 2. Art, wie sie z.B. von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* und weiteren Autoren ausschließlich benutzt wurden, mit Randquellen (3.1.1-2), (3.1.1-3) und einem Wärmeverteilungskoeffizient m nach einer der Formeln (3.1.1.4-11) bis (3.1.1.4-14) ist gut möglich. Es stellt allerdings i.allg., sofern $\alpha > 0$ vorliegt, stets einen Umweg dar. Denn die vermeintlich einfachere Problemlösung durch Verwendung einer „einfacheren“ Lösung (für $\alpha = 0$) wird, weil $\alpha > 0$ zu berücksichtigen ist, erkauft durch das Auftreten der neuen Korrekturgröße „ m “. Der Zahlenwert von m hängt natürlich wieder ganz konkret von den Wärmeübergangsverhältnissen ab, so daß zu seiner Quantifizierung dann letztlich doch wieder eine Lösung für Randbedingung 3. Art benötigt wird, wie zu sehen war. Aus diesem Grunde sind Lösungen für erweiterte Randbedingung 3. Art grundsätzlich vorzuziehen, wobei dann lediglich r durch r_{DZ} und h durch h_{DZ} gemäß Kopplungs-Randbedingung (3.1.1.4-5) mit (3.1.1.4-6) zu ersetzen sind. Im Einzelfall kann auch einer Lösung für Randbedingung 2. Art der Vorzug gegeben werden, dann jedoch mit einem präzisierten Wärmeverteilungskoeffizient nach (3.1.1.4-12) oder (3.1.1.4-14).

Auch wenn die hier abgeleiteten Beziehungen für die Kopplungs-Randbedingung oder den Wärmeverteilungskoeffizient nur Näherungscharakter tragen, stellen sie gegenüber einer überwiegend empirischen Vorgehensweise eine deutlich solidere Grundlage und damit einen Fortschritt zur genaueren Berücksichtigung von Drahttemperaturen in der Umformzone dar.

3.1.1.4.2 Temperaturmessung im Ziehwerkzeug

Für eine experimentell-rechnerische Präzisierung der Wärmeübergangsverhältnisse im Kontakt- bzw. Wirkfugenbereich zwischen Draht und Ziehöse wurden Temperaturen im Ziehwerkzeug gemessen. In vier längsgeteilten Hartmetallziehwerkzeugen (HMZ 1...HMZ 4) für Fertigdrahtdurchmesser von 1 mm sind mit je fünf oder sechs NiCr-Ni-Mikromantelthermoelementen von 0,16 und 0,21 mm Manteldurchmesser bestückt. Die Lage der Thermoelemente in der Teilungsebene des Werkzeugs HMZ 1 zeigt Bild 3.1.1-4. Die Verwendung von Mantelthermoelementen mit so geringem Durchmesser erfolgte mit Rücksicht darauf, alle Einflüsse, die das Temperaturfeld im Hartmetallkern verändern, zu minimieren. Nachdem entsprechende Nuten in die eine Ziehkernhälfte elektroerosiv eingebracht waren, wurden die Mantelthermoelemente unter Verwendung von Silberleitlack eingebettet.

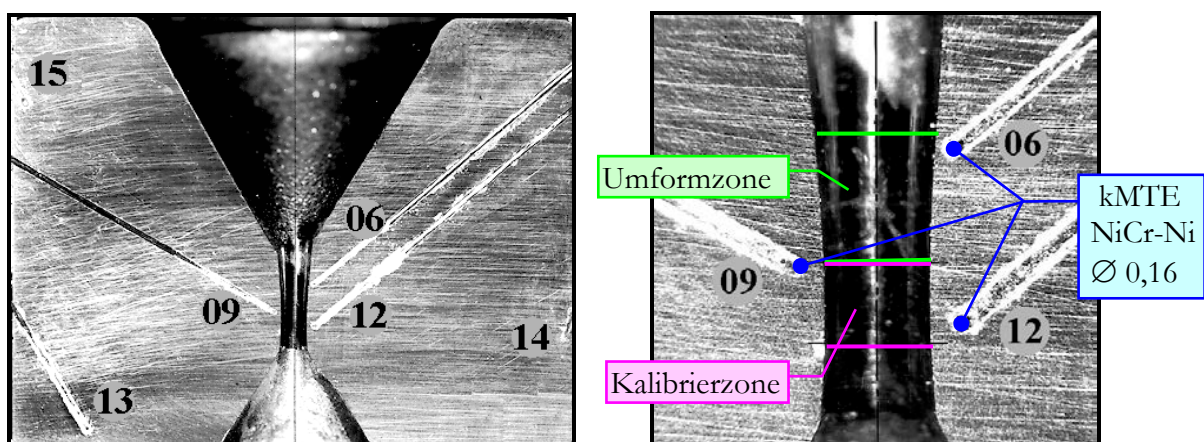


Bild 3.1.1-4: HMZ 1 - Kern mit Anordnung der Thermoelement-Meßstellen

Um aus den beiden Hälften eines jeden Ziehwerkzeugs wieder einen festen Matrizenverband zu erhalten, waren die zusammengehörenden Ziehkern-Fassungshälften in einen kräftig ausgelegten äußeren Armierungsring eingesenkt worden. Ein fertig präpariertes Werkzeug in Einbaulage, angeflanscht am vertikal angeordneten Kraftmeßhebel, zeigt das nebenstehende Bild, wobei im linken Bildteil außerdem eine Temperaturmeßrolle zur Erfassung der Drahttemperatur zu sehen ist.

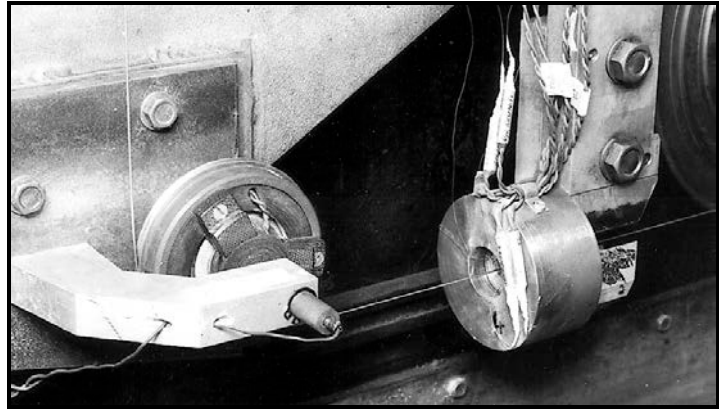


Bild 3.1.1-5: Zieh- und Temperaturmeßwerkzeug in Einbaulage

Die Versuche wurden auf einer bis zu vierzügigen, einzelgeregelten Laborziehmaschine durchgeführt. Eine Spulenablaufregelung gewährleistete die Einstellung relativ geschwindigkeitsunabhängiger Gegenzugspannungen auf vorgegebenem Niveau. Zur weiteren Charakterisierung der Ziehmaschine seien die wichtigsten technischen Angaben hinsichtlich des Anwendungsbereichs mitgeteilt:

- **Antrieb:** vier einzelgeregelte Gleichstrommaschinen
- **Drahtdurchmesser:** ca. 0,1 . . . 1 mm
- **Ziehgeschwindigkeit** (stufenlos einstellbar): 0 . . . 20 m/s
- **Kraftmessung:** Ziehkraft, Gegenkraft, Gesamt- bzw. Abzugskraft (mit Halbleiterkraftmeßdosen, Hebelübersetzung)
- **Geschwindigkeitsmessung:** digitale Drehzahlnehmer (IGR), gekoppelt mit Drahtumlenkrollen (Umschlingungswinkel 180°)
- **Drahtverlängerung:** elektronisch gebildet aus Drahtgeschwindigkeiten vor und nach dem Ziehwerkzeug

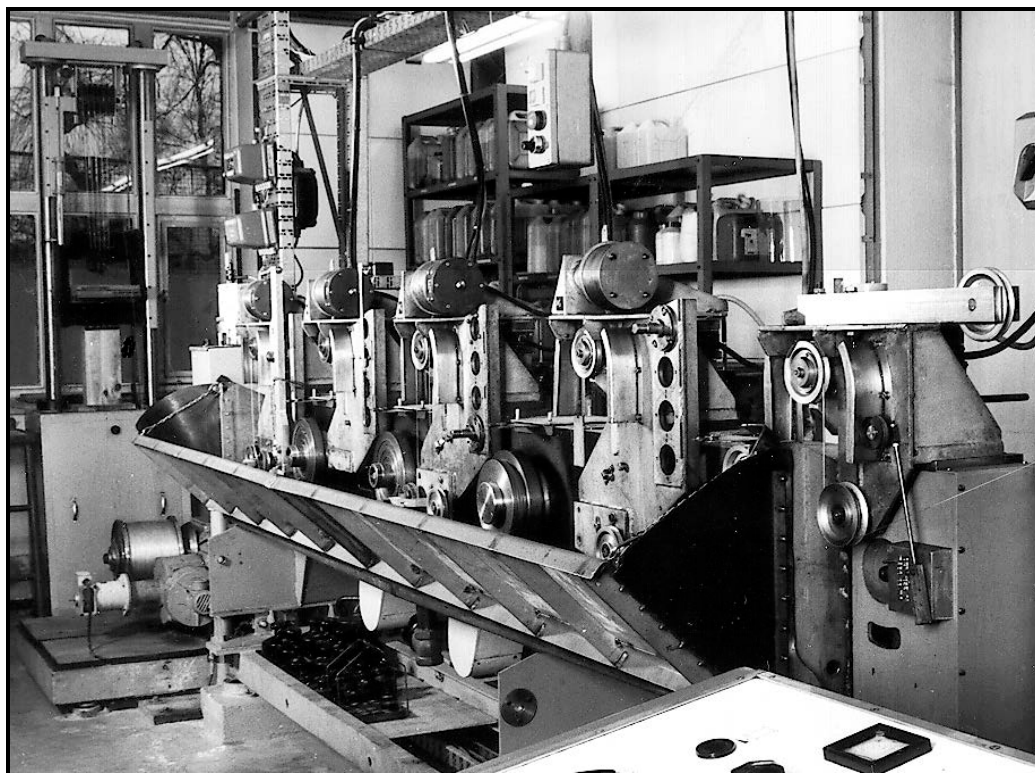


Bild 3.1.1-6: Labor-Feindrahtziehmaschine

Die Versuche zur Temperaturmessung mit den vier Versuchsziehwerkzeugen wurden auf Einzelzug beschränkt. Das Versuchsprogramm mit seinen insgesamt 58 Versuchen ist im Anhang B tabellarisch wiedergegeben. Dabei ist anzumerken, daß bei den Versuchsplänen 141-148 je Versuch sechs Geschwindigkeitsniveaus von $0,125; 0,25; 0,5; 1; 2; 4 \text{ m/s}$ und bei den Plänen 145-147 zusätzlich 8 m/s realisiert worden sind. Als Versuchsmaterial wurde für die Pläne 141-144 Messingdraht (CuZn37) unterschiedlicher Ausgangsfestigkeit und für die Pläne 145-148 vermessingter Stahlkorddraht (U8A) verwendet. Für die Pläne 141-144 waren je Werkstoffzustand (Festigkeitsniveau) drei verschiedene Gegenzüge, etwa im Verhältnis 1:2:3 eingestellt worden, bei den Plänen 145-147 zwei Gegenzüge im Verhältnis 1:3 und beim Plan 148 vier Gegenzüge im Verhältnis 1:17:24:3. Stellvertretend werden hier lediglich einige Ergebnisse des Versuchs 1 aus Versuchsplan 145 vorgestellt. Bild 3.1.1-7 zeigt die gemessenen Kräfte.

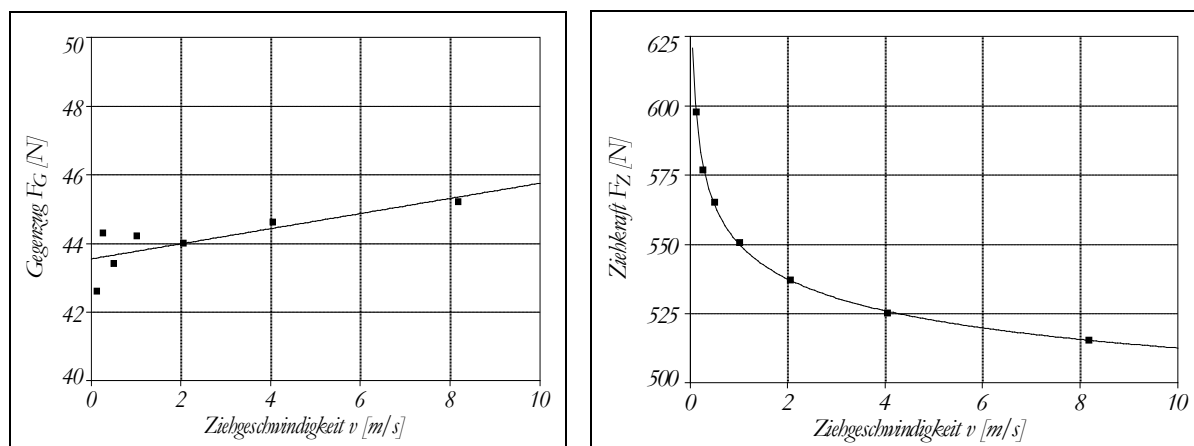


Bild 3.1.1-7: Gegenzug- und Ziehkraftmeßwerte für Plan 145, Versuch 1

Im folgenden Bild wird die Ziehgeschwindigkeitsabhängigkeit der im geteilten Hartmetallkern (HMZ 1) gemessenen Temperaturen sowie der nach verschiedenen Ziehtheorien berechneten Reibwerte (vgl. Anhang B zu Kap. 3.1.1.4.1) dargestellt.

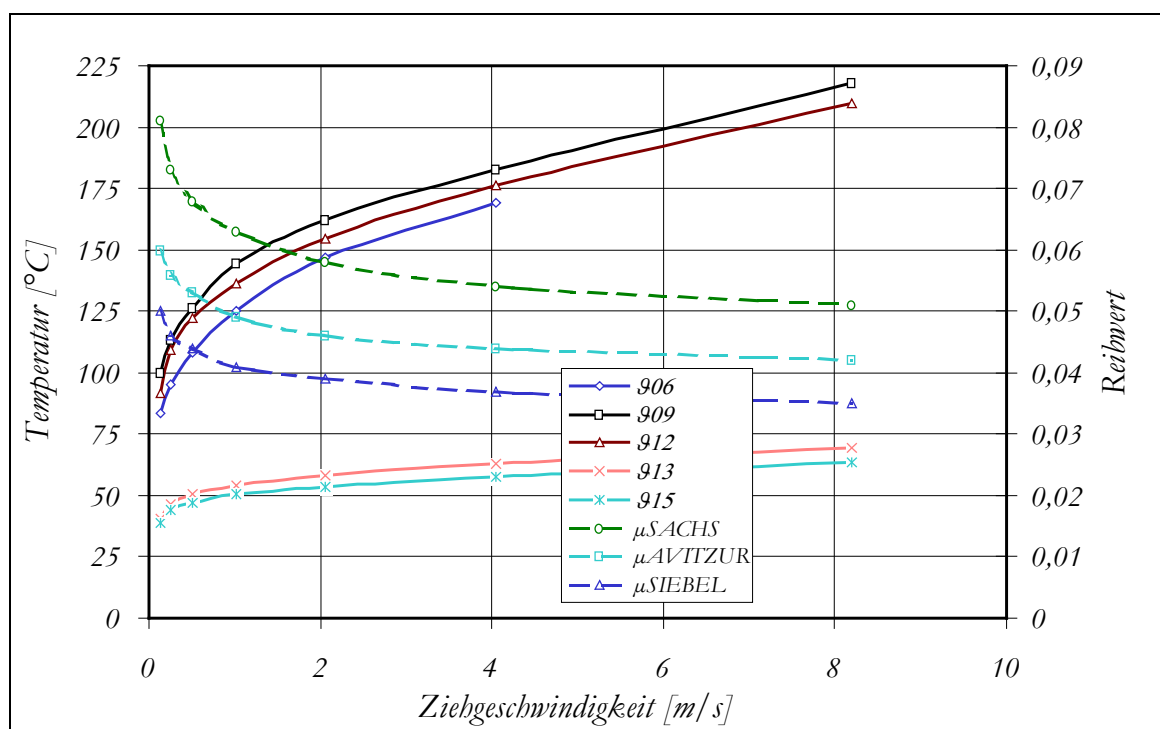


Bild 3.1.1-8: Temperatur ϑ und Reibwert μ für Plan 145, Versuch 1

Nur erwähnt werde in diesem Zusammenhang, daß eine Verdreifachung der Gegenkraft gegenüber Versuch 1 bei Versuch 2 eine Ziehkraftverminderung von fünf bis sieben Prozent und eine Temperaturabsenkung an der Meßstelle 09 von zwei bis drei Prozent bewirkt hat.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Ziehdüsentemperaturen - wie auch der Drahtoberflächentemperatur - läßt sich recht gut durch Potenzfunktionen approximieren, wobei sich die gebrochenen Potenzen etwa zwischen $1/5$ und $1/3$ bewegen. Im Vergleich zum theoretisch gefundenen Ergebnis, wonach die Drahtoberflächentemperatur \mathcal{G}_R im Falle konstanter Kontakt-Schubspannung $\tau_R = konst.$ der Geschwindigkeit zur Potenz $1/2$, also einer Wurzelfunktion proportional ist - vgl. z.B. (A2.3.2.8-5.4) bzw. (A3.1.1.3-6) mit (3.1.1-2), ist dieses Resultat qualitativ durchaus zu erwarten gewesen. Denn bei den Versuchen waren die Reibungsverhältnisse im Ziehhol nicht konstant, wie die aus Ziehkraften und Gegenzugkräften berechneten Reibwerte belegen (Bild 3.1.1-8). Die Reibung verringert sich mit wachsender Ziehgeschwindigkeit sogar recht deutlich um etwa 30-40%, so daß die Erwärmung von Draht und Ziehdüse insgesamt entsprechend geringer ausfallen mußte². Die Reibwerte lassen sich durch einen Potenzansatz $\mu(v) \sim v^c$ mit Potenzwerten zwischen $c = -0,1$ und $c = -0,2$ approximieren. Damit ergibt sich für die Drahtoberflächentemperatur eine Geschwindigkeitsabhängigkeit von

$\mathcal{G}_R(v) \sim v^{0,5-(0,1 \dots 0,2)} = v^{0,3 \dots 0,4}$. Auch LUEG und TREPTOW ermittelten bei ihren Messungen mit einem Draht-Düse-Element eine Temperaturabhängigkeit, die etwa der dritten Wurzel aus der Ziehgeschwindigkeit folgt [LUE 57, Teil II].

3.1.1.4.3 Numerisches Beispiel

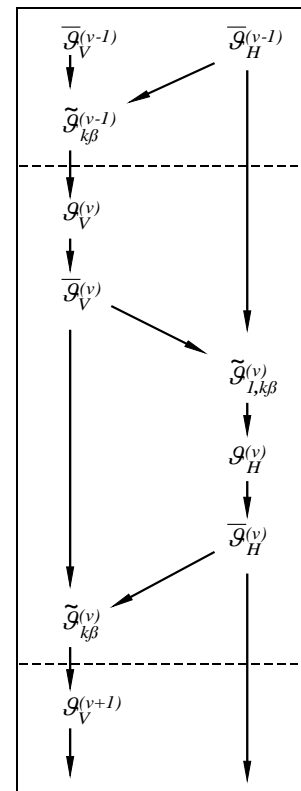
Um den Wärmeübergang in der Wirkfuge gegenüber der Abschätzung (3.1.1.1-1) unter konkreten Ziehbedingungen zu präzisieren, werden die Meßergebnisse für die Ziehgeschwindigkeit von 4 m/s zugrunde gelegt. Die thermische Kopplung von Draht und Ziehwerkzeug wird hier nicht nach der Näherungsmethode des Kapitels 3.1.1.4.1, sondern entsprechend der in Kapitel A2.5.2 erläuterten Vorgehensweise vorgenommen.

Um numerische Konvergenz des Verfahrens zu sichern, werden unter Verwendung der echten Randtemperaturen von Voll- und Hohlzylinder $\mathcal{G}_V = \mathcal{G}_V(z, R)$, $\mathcal{G}_H = \mathcal{G}_H(z, R_I)$ neue, sogen. gewichtete Randtemperaturen durch (A2.5.2-6.1) und (A2.5.2-6.2) eingeführt. Die Berechnung der *Spline*-Koeffizienten für die fiktiven Randfunktionen bzw. Umgebungstemperaturen (vgl. Kap. A2.4.3.1 bzw. A2.5.2) wird wie folgt realisiert:

Die Koeffizienten der fiktiven Umgebungstemperatur des Vollzylinders

lassen sich durch $\tilde{\mathcal{G}}_{k\beta} = \tilde{\mathcal{G}}_{k\beta}^* - \sum_{\eta=\beta}^{\beta_E} \tilde{\mathcal{G}}_{(k-1)\eta}^* \cdot \left(\frac{\eta}{\beta}\right) \cdot (L_k - L_{k-1})^{\eta-\beta}$ und

$\tilde{\mathcal{G}}_{(-1)\eta}^* = 0$ angeben, wobei sich die $\tilde{\mathcal{G}}_{k\beta}^*$ für jedes Intervall ($L_k + 0 \leq z \leq L_{k+1} - 0$) durch Ausgleichsrechnung (oder Interpolation) unter Verwendung von $m_k \geq \beta_E + 1$ Stützstellen aus der Forderung



² In Übereinstimmung hiermit befindet sich das aus einer dynamisch ermittelten Durchmesseränderung ergebende Resultat, wonach der Schmierfilm bis zu Ziehgeschwindigkeiten von 1 m/s rasch anwächst - vgl. Kapitel 3.1.3.2.

$$\sum_{i=1}^{m_k} \left\{ \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \tilde{g}_{k\beta}^* \cdot (z_i - L_k)^\beta - \left[\frac{\alpha(z_i)}{\bar{\alpha}} \cdot \mathcal{G}_U(z_i) + \left(1 - \frac{\alpha(z_i)}{\bar{\alpha}} \right) \cdot \bar{\mathcal{G}}_V(z_i, R) \right] \right\}^2 \rightarrow \mathbf{MIN} \quad \text{bestimmen. Die}$$

Umgebungstemperatur ist durch $\mathcal{G}_U(z) := \mathcal{G}_{UV}(z) + \Delta\theta_{AB}(z) \cdot \bar{\mathcal{G}}_H(z, R_I)$ gegeben, $\bar{\alpha} = \lambda_V \cdot \bar{h}$ entsprechend (A2.5.2-7). Die tatsächliche Umgebungstemperatur außerhalb des Draht-Düse-Kontakts besitzt die spezifische Eigenschaft $\mathcal{G}_{UV}(z) = (1 - \Delta\theta_{AB}(z)) \cdot \mathcal{G}_{UV}(z)$. Wird sie gleichfalls

durch einen *Spline*-Ansatz $\mathcal{G}_{UV}(z) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} g_{k\beta}^{(UV)} \cdot (z - L_k)^\beta$ dargestellt, wobei die

$g_{k\beta}^{(UV)}$ aus den real vorliegenden Umgebungstemperaturen wiederum durch Ausgleichsrechnung gewonnen werden, so sind die *Spline*-Koeffizienten für das bei $z = z_A$ beginnende Intervall, damit tatsächlich $\mathcal{G}_{UV}(z) = (1 - \Delta\theta_{AB}(z)) \cdot \mathcal{G}_{UV}(z)$ gilt, durch

$$g_{A\beta}^{(UV)} = - \sum_{k=0}^{A-1} \sum_{\eta=\beta}^{\beta_E} g_{k\eta}^{(UV)} \cdot \binom{\eta}{\beta} \cdot (L_A - L_{k-1})^{\eta-\beta} \quad \text{und} \quad g_{k\beta}^{(UV)} = 0 \quad \text{für} \quad A < k < B \quad \text{festzulegen.}$$

Für den Hohlzylinder-Innenrand gelten ganz analoge Beziehungen, so daß auf deren explizite Formulierung hier verzichtet werden kann.

Die Wärmequellen infolge Werkstoffumformung lassen sich durch einen gemischten *Spline-BESSEL*-Ansatz (A2.3.2.5-5) berücksichtigen, wobei die Anzahl der Summanden der *BESSEL*-Reihe geeignet festzulegen ist. Die Koeffizientenbestimmung erfolgt wiederum nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme für einen Ersatzzylinder mit dem Radius (3.1.1.2-5) und ein Quellenfeld (3.1.1.2-4), wobei allgemein (3.1.1-1) mit (3.1.1.2-1) oder speziell nach dem Schrankenverfahren z.B. das *EDER*sche Ergebnis (3.1.1.2-7) herangezogen werden können. Wird die Ortsabhängigkeit des Quellenfeldes vernachlässigt, so ist anstelle (3.1.1.2-7) mit dem Mittelwert (3.1.1.2-8) zu rechnen; die Integration wird, wenn schon nicht analytisch geschlossen, so doch numerisch stets möglich sein. Will man diesen Aufwand umgehen, so lassen sich die inneren Wärmequellen aus Umform- und Schiebsarbeit direkt berechnen, einfachsterweise z.B. als $q_V \approx \eta \cdot \sigma_{Fm} \cdot \left(\varphi + \frac{2}{3} \tan \tilde{\alpha} \right) \cdot \tilde{V} / (z_B - z_A)$ mit dem Umformgrad $\varphi = 2 \ln(d_A / d_B)$.

Die Festlegung der Wärmequellen infolge Reibung zwischen Draht und Ziehöse kann entsprechend (3.1.1-7) mit (3.1.1-5), (3.1.1-6), besser noch entsprechend (3.1.1.4-7) mit (3.1.1.4-10) und (B3.1.1.4.1-2.17) erfolgen. Allerdings werden elementare Ziehtheorien die beiden Spannungsmaxima im Bereich des Ziehholein- und -auslaufs, wie sie meßtechnisch festgestellt worden sind [ARM 67], [HIL 88], im Normalspannungsverlauf nicht nachbilden. Für eine realitätsnähere, insbesondere ortsabhängige Beschreibung der Spannungsverhältnisse sind die Methoden der Visioplastizität und der Finiten Elemente unabdingbar. Unabhängig jedoch davon, auf welche Weise der Normalspannungsverlauf gewonnen wird, lassen sich die Randquellen formal mathematisch wiederum durch einen *Spline*-Ansatz der Art (A2.3.2.5-1) unter Heranziehung der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme approximieren. Mangels hinreichender Kenntnis der lokalen Abhängigkeit wird man sich jedoch i.allg. mit Näherungen für den Mittelwert (3.1.1.2-9.1) bzw. mit überschlägigen Werten, z.B. als $q_{R_{ges}} \approx \sigma_{Nm} \cdot \mu \cdot v_R$ mit σ_{Nm} (siehe Anhang B (B3.1.1.4.1-2.9) bzw. (B3.1.1.4.1-2.18)) oder, wenn schließlich noch $\sigma_{Nm} \approx \sigma_{Fm}$ akzeptiert wird, in weitergehender Näherung mit $q_{R_{ges}} \approx \sigma_{Fm} \cdot \mu \cdot v_R$ begnügen müssen.

Auch die Berechnungen zum Beispiel bedienen sich der einfachen Näherungen für konstante Quellen. Für die Größe der Randquellen in der Wirkfuge ergibt sich im Bereich der Umformzone ein mittlerer Wert von $q_{R_{ges}} \approx 113 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$ und in der Führungs- bzw. Kalibrierzone ein Wert von $q_{R_{ges}} \approx 30 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$. Zum Zwecke der Demonstration, wie sich ortsabhängige Randquellen auswirken, wurden diese abschnittsweise konstanten Quellen allerdings dahingehend manipuliert, daß sie - unter Erhaltung der gesamten Wärmequellendichte - relative Maxima am Beginn und Ende der Umformzone widerspiegeln. Den Quellenverlauf, mit dem im Beispiel gerechnet wird, zeigt in Bild 3.1.1-9 die ausgezogene Linie.

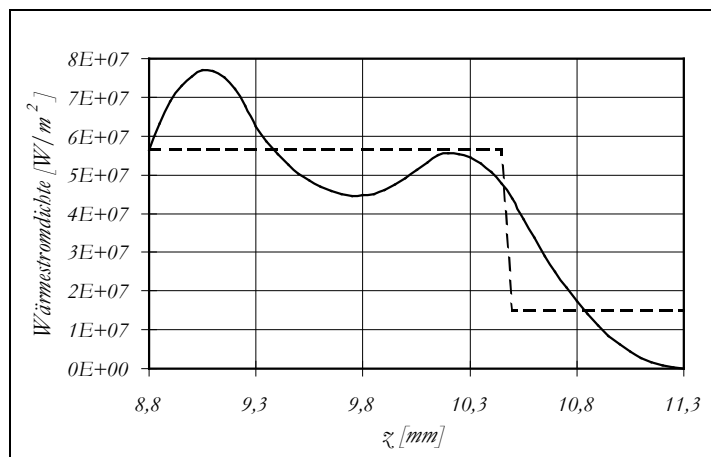


Bild 3.1.1-9: Randquellenverlauf $q_{RD} = q_{RZ}$ für Plan 145, Versuch 1, $v_R \approx 3,4 \text{ m/s}$

Für die inneren, aus ideeller Umformung und Schiebung resultierenden Quellen ergibt sich eine Wärmequellendichte von $q_V \approx 7,6 \cdot 10^{11} \text{ W/m}^3$, wobei für die Umwandlung mechanischer Arbeit in Wärme ein Verwertungsfaktor von $\eta = 0,9$ angenommen wurde. Der Hartmetallkern des Bildes 3.1.1-6 wurde geometrisch durch einen volumengleichen Hohlzylinder mit den Abmessungen $R_1 = 0,551 \text{ mm}$, $R_2 = 11 \text{ mm}$ und $L = 16 \text{ mm}$ angenähert. Als *Spline*-Knoten bei $z = L_k$ wurden $L_1 = 7,4 \text{ mm}$, $L_2 = 8,8 \text{ mm}$ (Beginn Umformzone), $L_3 = 9,3 \text{ mm}$, $L_4 = 10 \text{ mm}$, $L_5 = 10,5 \text{ mm}$ (Ende Umform-, Beginn Kalibrierzone), $L_6 = 11,3 \text{ mm}$ (Ende Kalibrierzone), $L_7 = 12,5 \text{ mm}$ gewählt.

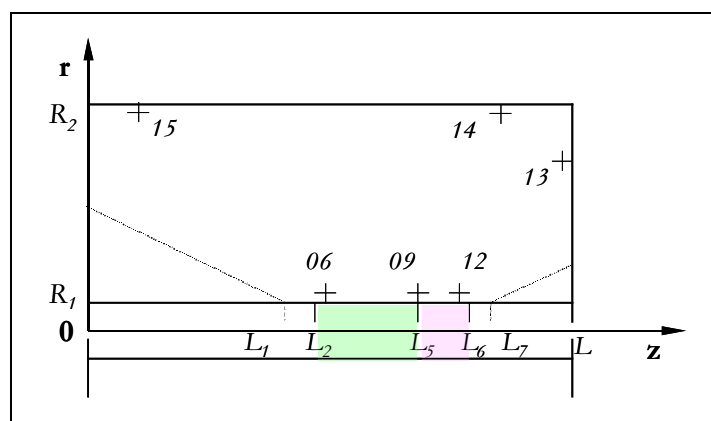


Bild 3.1.1-10: Ersatz-Hohlzylinder für HMZ 1 mit Meßstellenanordnung

Für die Oberflächenbereiche von Draht und Ziehöse, die mit der Umgebungsluft im Wärmeaustausch standen, sind eine Umgebungstemperatur von $\vartheta_U = 20^\circ\text{C}$ (entspricht gleichzeitig der Drahteinlaufemperatur) und ein Wärmeübergangskoeffizient von

$\alpha_K = 20 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ zugrunde gelegt worden. Nach mehreren Berechnungen mit dem Ziel, eine möglichst gute Annäherung an die in der Ziehöse gemessenen Temperaturen zu erreichen, wurden für den Wärmeübergang im Kontakt- bzw. Wirkfugenbereich Wärmeübergangskoeffizienten als günstig ermittelt, die Werte von $\alpha = 1,2 \cdot 10^6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ entlang der Umformzone und $\alpha = 4 \cdot 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ entlang der Kalibrierzone aufweisen.

Die mit diesen Angaben durchgeführte Berechnung wurde mit einem BASIC-Programm auf einem PC HP 9845C durchgeführt. Nach insgesamt 52 Iterationen war das Abbruchkriterium, wonach das Rechenergebnis akzeptiert wird, sobald die maximale Temperaturänderung zum vorangegangenen Iterationsschritt die Grenze von einem Zehntel Grad unterschreitet, erfüllt. Ausgewählte Temperaturen können der betreffenden Tabelle des Anhangs B entnommen werden. Das nebenstehende Bild zeigt auszugsweise die Temperaturen der einander zugewandten Oberflächen von Voll- und Hohlzylinder.

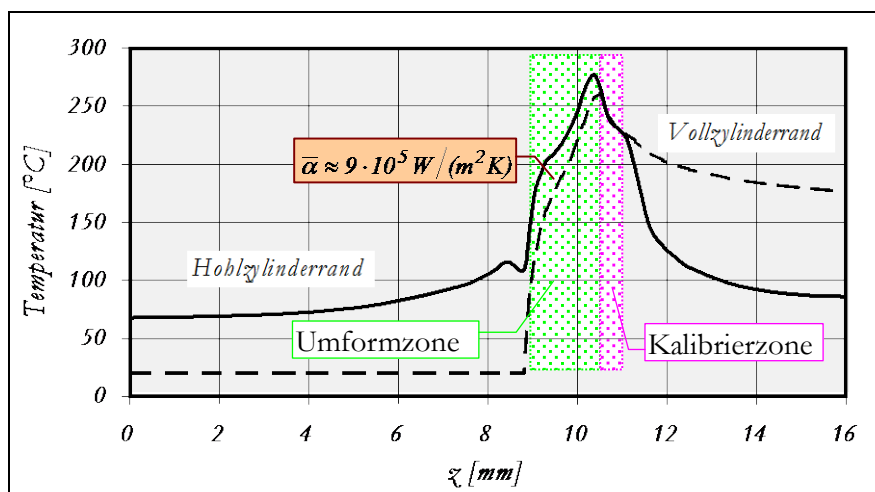


Bild 3.1.1-11: Randtemperaturen von Voll- und Hohlzylinder bei thermischer Kopplung

Der Vergleich von gemessenen und berechneten Ziehösentemperaturen ergibt eine Standardabweichung von ca. $5,5 \text{ K}$, wobei die Temperaturen an den einzelnen Meßstellen der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen sind. Dieses Ergebnis zeigt trotz modellinhärenter Abstraktionen und vereinfachter Randbedingungen eine befriedigende Übereinstimmung mit den Meßwerten. Damit aber wird auch die Abschätzung des Wärmeübergangs im Wirkfugenbereich, wie sie mit (3.1.1.1-1) vorliegt, für diese konkreten Bedingungen präzisiert. Denn mit dieser Berechnung hat sich als gewichtetes Mittel über die gesamte Kontakt- bzw. Wirkfugenlänge ein Wert von etwa $\bar{\alpha} \approx 9 \cdot 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ herausgestellt. Aus der Abschätzung (3.1.1.1-1) folgt andererseits bei beobachteter Schmierfilmdicke von $s \approx 1 \mu\text{m}$ (vgl. Bild 3.1.3-3) ein Wert von $\alpha \geq (1 \dots 2) \cdot 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, was mit dem genaueren Ergebnis durchaus noch verträglich ist.

Meßstelle	z [mm]	r [mm]	Temperaturen [°C]	
			gemessen	berechnet
06	9,3	0,8	170	168
09	10,5	0,9	183	194
12	11,1	0,9	177	171
13	15,5	8,5	63	67
14	11,8	10,6	62	62
15	2,3	10,6	57	58

Einen exemplarischen Einblick in das qualitative Verhalten der thermischen Wechselwirkung von Draht und Ziehöse sollen einige weitere Ergebnisse vermitteln, die in Simulationsrechnungen, ebenfalls in Anlehnung an die Ausführungen des Kapitels A2.5.2, erhalten worden sind. Während mit den Bildern 3.1.1-12 und 3.1.1-13 der Einfluß stark unterschiedlicher Ziehösenkühlung anschaulich wird, zeigen die Bilder 3.1.1-14 und 3.1.1-15 bei gegenüber Bild 3.1.1-13 unverändert intensiver Kühlung des Ziehösenkerns, wie sich verschiedene Randquellenverläufe $q_R(z)$ - die

integralen Werte sind in allen Beispielen dieselben - auf die Temperaturfelder von Draht und Ziehdüse auswirken. Die umformungsbedingten inneren Quellen sind hier einfachsterweise als ortsunabhängig angesetzt worden. Der Temperaturengleich des 4 mm starken Stahldrahtes erfolgt nach Verlassen des Hartmetallkerns (Länge 17 mm, Durchmesser 22 mm) bei einer Ziehgeschwindigkeit von 1 m/s sehr rasch. Bereits zehn Zentimeter hinter dem Ziehwerkzeug sind radiale Temperaturunterschiede weitgehend ausgeglichen.

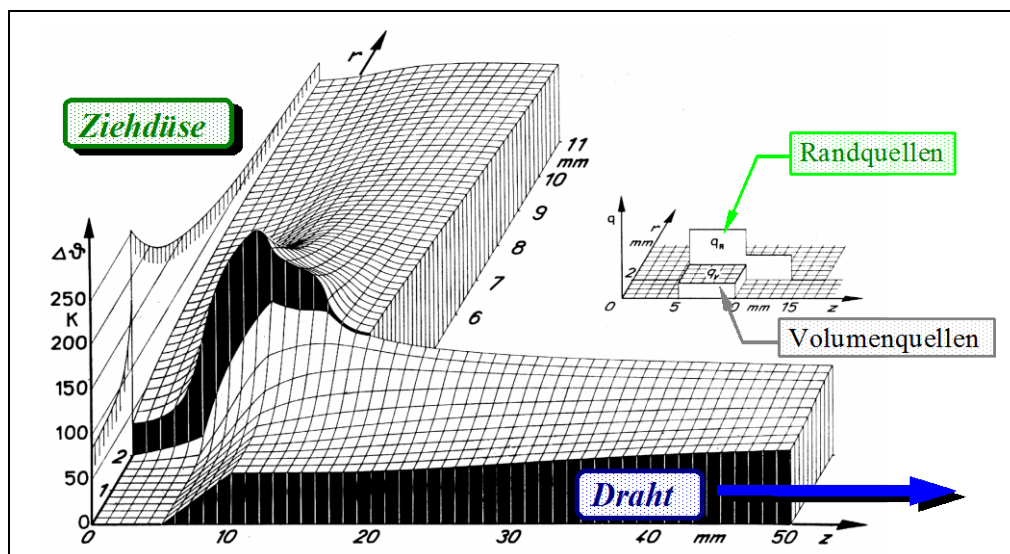


Bild 3.1.1-12: Temperaturfeld „Draht-Ziehdüse“ ohne Ziehdüsenkühlung

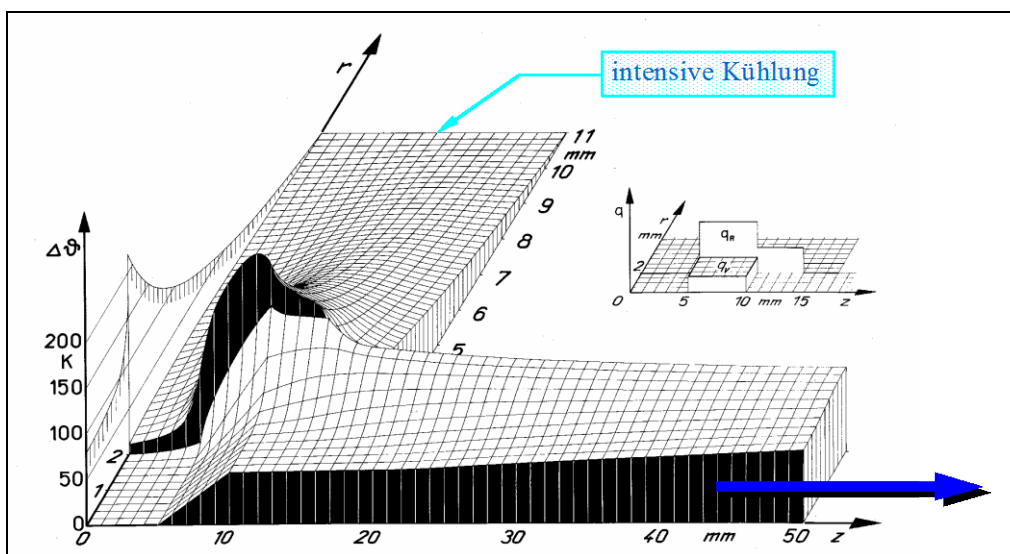


Bild 3.1.1-13: Temperaturfeld „Draht-Ziehdüse“ mit Ziehdüsenkühlung

Anhand der folgenden Bilder 3.1.1-14 und 3.1.1-15 ist zu erkennen, daß bei weitgehend übereinstimmenden Maximaltemperaturen die Temperaturverhältnisse der Ziehdüse im Bereich des Innenrandes verhältnismäßig stark vom Randquellenverlauf beeinflusst werden [UYA 85]. Offenbar werden die am Beginn oder/und Ende der Umformzone auftretenden Spannungsmaxima in ihrer verschleißfördernden Wirkung durch die inhomogeneren Temperaturverhältnisse am Ziehdüseninnenrand noch verstärkt. Zur Senkung des Ziehdüsenverschleißes ist es deshalb auch in Anbetracht der thermischen Belastung wünschenswert, nach Ziehholkonturen und Ziehbedingungen zu suchen, die möglichst homogene Spannungsverläufe auf möglichst niedrigem Niveau ermöglichen. Ein in dieser Hinsicht sehr günstiges Ziehholprofil weist das sogenannte sigmoidale Profil auf. Die Werkstoffumlenkungen erfolgen weitestgehend harmonisch fließend.

Allerdings ist die Herstellung einer solchen Ziehholkontur so kompliziert und aufwendig, daß sie in die Zieherei praxis bisher nicht eingeführt werden konnte.

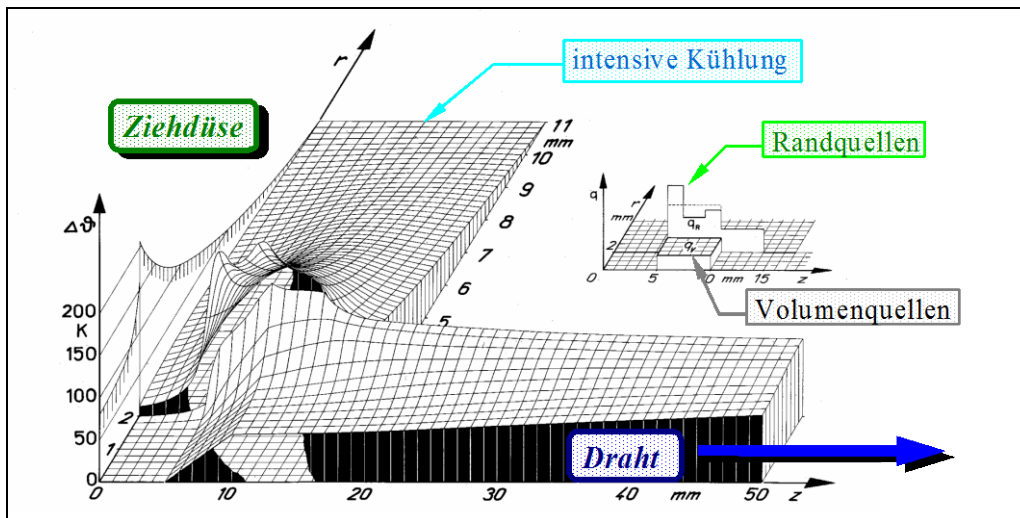


Bild 3.1.1-14: Temperaturfeld „Draht-Ziehdüse“ mit idealisiert ortsabhängigem Schubspannungsverlauf

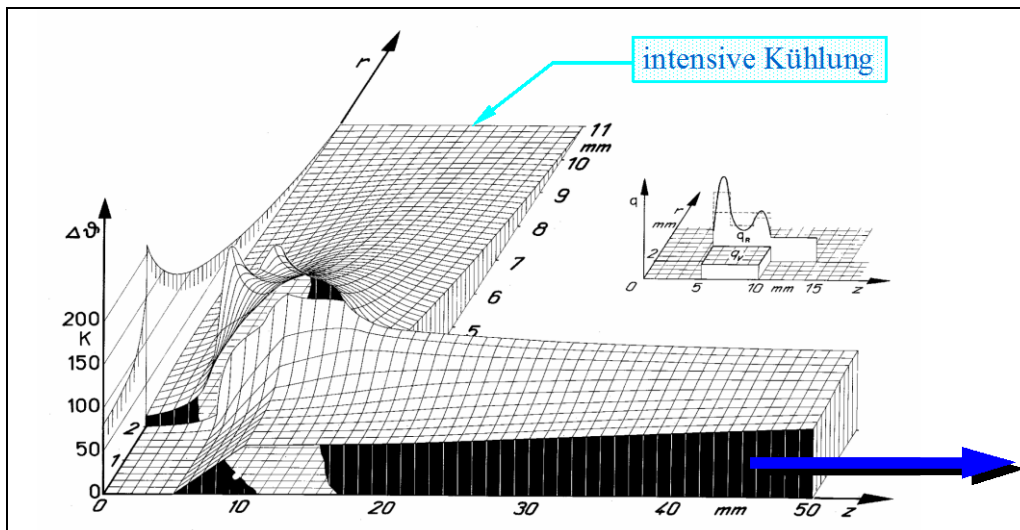


Bild 3.1.1-15: Temperaturfeld „Draht-Ziehdüse“ mit real ortsabhängigem Schubspannungsverlauf

Im Gegensatz zur Ziehdüse erweist sich der Draht gegenüber Änderungen des Randquellenverlaufes als relativ unempfindlich. Jedoch können die im Randbereich auftretenden größeren Temperaturunterschiede Auswirkungen auf den mechanischen Eigenspannungszustand nach dem Ziehen haben [KNA 85].

3.1.1.5 Thermische Zugfolgenberechnung

Beim Ziehen von z.B. hochgekohten Stahldrähten sind Versprödungsvorgänge durch Reckalterung, wie sie durch Eigenerwärmung bei ungenügender Drahtkühlung auftreten können, besonders gefürchtet [YAM 83], [PET 85], [AER 87]. In diesem Zusammenhang stehen intensive Bemühungen zur Verbesserung der Kühlleistung von Ziehanlagen. Andererseits kann eine gewisse Erhöhung der Drahttemperatur während der Umformung werkstofftechnisch durchaus auch erwünscht sein. Aus diesen Gründen werden Wolfram- und Molybdän-Drähte für die Glühwendelfertigung oder auch spezielle Stähle (Schnellarbeits- und Werkzeugstähle, z.B. zur Ver-

besserung der Drallwalzfähigkeit bei der nachfolgenden Spiralbohrerfertigung) teilweise warm- oder halbwarm gezogen - siehe auch [MAR 87], [KOP 82].

Für die Optimierung der thermischen Verhältnisse auf einer Ziehanlage im Hinblick auf technologische, energetische und qualitativ werkstoffliche Aspekte ist die Beschreibung der thermischen Verhältnisse im Mehrfachzug mit den insgesamt komplizierten Verhältnisse von Wärmeentstehung und Wärmeübertragung auf der Grundlage bereits abgeleiteter analytischer Beziehungen möglich.

Die in Draht und Ziehwerkzeug infolge Umformung und Reibung entstehende Wärme wird permanent an die Umgebung abgeführt. Als Umgebung des Drahtes sind zwischen den Ziehstufen sowohl die Ziehscheiben bzw. Ziehtrommeln, die i.allg. zwangsgekühlt werden, als auch Kühlmedien anzusehen, d.h., die Umgebungsluft im Falle des Trockenziehens und das Zieh-Kühlmittel im Falle des Naßziehens. Die örtlich stark variierenden Wärmeübergangsbedingungen schließen eine unmittelbare Übernahme der für den Vollzylinder und für konstante α -Werte abgeleiteten Lösungen des Kapitels A2.3 aus. Allerdings wird auch das Aufsuchen entsprechender Lösungen auf der Grundlage der Kapitel A2.4.3.1 bzw. A2.5.1 zusätzlichen, nicht unerheblichen Aufwand erfordern. Deshalb soll ein Weg beschritten werden, der sich die höheren Ziehgeschwindigkeiten zunutze macht, wie sie bei praxisrelevantem Drahtziehen i.allg. vorkommen. Dann trifft die Abschätzung $Pe := \frac{vR}{a} \gg 1$ zu (vgl. Kap. A2.3.2.2), womit in guter bis sehr guter Näherung axiale Wärmeleitung vernachlässigt werden kann.

Das ist von erheblichem Vorteil, denn damit läßt sich der halbunendlich lange Vollzylinder bzw. Draht in kurze Abschnitte unterteilen. Jeder z -Abschnitt kann dann seine eigenen Vorgaben bekommen: thermische Stoffwerte, Wärmeübergangs- und Emissionskoeffizient, Axialgeschwindigkeit, Durchmesser, Umgebungstemperatur, flächen- und volumenbezogene Quellterme. Selbst wenn einige oder alle Größen innerhalb eines z -Abschnitts als konstant angenommen werden, indem z.B. geeignet gebildete Mittelwerte Verwendung finden, wird sich bei angemessen feiner, axialer Unterteilung des Drahtes ein zuverlässiges Abbild der Temperaturverhältnisse dennoch erzielen lassen. Selbstverständlich dient die radiale Temperaturverteilung am Ende eines Drahtabschnittes gleichzeitig als Starttemperatur des Folgeabschnittes.

Nachfolgend soll die thermische Zugfolgenberechnung für den stationären Ziehbetrieb, bei dem sich lokal ein thermischer Gleichgewichtszustand eingestellt hat, vorgenommen werden. Damit können die weiteren Betrachtungen auf den relativ einfachen Temperaturfunktionen der Kapitel A2.3.2.3 und A2.3.2.5 aufbauen.

3.1.1.5.1 Unterteilung der Drahtlänge

Es werden die Lösungen (A2.3.2.3-3) bzw. (A2.3.2.5-6) jeweils nur für gewisse Drahtabschnitte $L_{j-1} \leq z \leq L_j$ betrachtet, wobei ein Abschnitt j und damit dessen Länge $\Delta L_j := L_j - L_{j-1}$ dabei so festzulegen ist, daß sich sowohl die Stoffgrößen λ_j, ρ_j, c_j als auch die Wärmeübertragungsparameter h_j bzw. α_j und ggf. ε_j innerhalb der interessierenden Abschnitte in hinreichender Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen als konstant angeben lassen.

Das abschnittsweise Aneinanderfügen von Lösungen erfolgt in Bewegungsrichtung des Drahtes, indem jeweils die Temperatur am Ende eines Drahtabschnitts j zur Starttemperatur des folgenden Abschnitts $(j+1)$ gemäß $\mathfrak{G}_{j+1}(r) := \mathfrak{G}_j(r, L_j)$ gemacht wird. Praktisch kann das so realisiert werden, daß in die betreffende Lösung des Randwertproblems für die Starttemperatur $\mathfrak{G}(r)$ ein geeigneter Funktionsansatz, z.B. als DINI-Reihe, eingeführt wird. Die Koeffizienten des Ansatzes

lassen sich dann analytisch exakt (A2.3.2.5-4) oder aber numerisch-approximativ aus bekanntem $\mathcal{G}(r, L_j)$ des vorangegangenen Drahtabschnitts durch Ausgleichsrechnung bestimmen.

Relativ problemlos lassen sich im Rahmen dieses Modells die Änderungen des Drahtdurchmessers und der Drahtgeschwindigkeit durch Querschnittsreduktion berücksichtigen. Je nach Länge der Drahtabschnitte, die das Ziehhol unterteilen, werden die (mittleren) Durchmesser und (mittleren) Geschwindigkeiten mehr oder weniger große Sprünge aufweisen. Zur Verminderung der stets vorhandenen Unsicherheit bei der Ermittlung der Wärmeübergangsverhältnisse und damit zur Präzisierung der je Drahtabschnitt vorzugebenden mittleren Wärmeübergangskoeffizienten α_j lassen sich empirisch gefundene Abhängigkeiten zwischen den drei nach *NUßELT*, *PRANDTL* und *REYNOLDS* benannten dimensionslosen Kennzahlen nutzen [VDI 94, *Ge1-4*], [SCH 83].

Aus methodischer Sicht stellt die vorgenommene Unterteilung der Drahtlänge in gewisser Weise eine Diskretisierung des thermischen Problems dar. Das wird in dieser konkreten Form ermöglicht durch Vernachlässigung der axialen Wärmeleitung gegenüber dem an die Drahtbewegung gebundenen Wärme- und Stofftransport. Durch die Maßnahme, den Draht in mehrere Abschnitte zu unterteilen, existieren nunmehr im Prinzip zwar für jeden dieser Abschnitte voneinander unabhängige Temperaturfunktionen, jedoch erst durch deren fortlaufende Verknüpfung wird eine Beschreibung des Gesamtproblems möglich.

3.1.1.5.2 Aneinanderfügen der Drahtabschnitte

Die Verknüpfung - und damit das Aneinanderfügen der Drahtabschnitte unter Gewährleistung der physikalisch begründeten Forderung nach Stetigkeit der Temperaturverhältnisse - bedeutet aus mathematischer Sicht, die *DINI*-Koeffizienten (A2.3.2.5-4) zu berechnen. Das soll nunmehr unter Verwendung von Lösung (A2.3.2.3-3) explizit erfolgen. Dabei wird das Radiusintervall $r \in \langle 0, R_{j-1} \rangle$ aus dem ($j-1$)-ten Abschnitt durch Transformation mit dem Dilatationsparameter $\Lambda_{j-1} = R_{j-1}/R_j$ auf das Intervall $r \in \langle 0, R_j \rangle$ des j -ten Abschnitts abgebildet. Die *DINI*-Koeffizienten (A2.3.2.5-4) berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{m_j} &= \frac{Z_{m_j}}{N_{m_j}}; & N_{m_j} &:= \frac{R_j^2}{2} \cdot \left(1 + \left(h_j R_j / \mu_{m_j} \right)^2 \right) \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_{m_j}), \\ Z_{m_j} &:= \int_0^{R_j} r \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{m_j} \frac{r}{R_j}\right) \cdot \mathcal{G}_{j-1}(r, L_{j-1}) \cdot dr \\ &= \int_0^{R_j} r \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{m_j} \frac{r}{R_j}\right) \cdot \left\{ \frac{v_{j-1}}{a_{j-1}} \cdot \int_0^{R_{j-1}} \mathbf{g}_{a_{j-1}}(L_{j-1}, 0; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_{j-1}(\rho) \cdot d\rho + \dots \right. \\ &\quad \dots + \int_0^{L_{j-1}} \mathbf{g}_{a_{j-1}}(L_{j-1}, \zeta; r, R_{j-1}) \cdot \mathbf{r}_{j-1}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{\lambda_{j-1}} \cdot \int_0^{L_{j-1}} \int_0^{R_{j-1}} \mathbf{g}_{a_{j-1}}(L_{j-1}, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_{v_{j-1}}(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \right\} \cdot dr \end{aligned} \quad (3.1.1.5-1.1)$$

mit

$$\mathbf{g}_{a_j}(z, \zeta; r, \rho) = \frac{a_j}{v_j} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{k_j} \frac{\rho}{R_j}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{k_j} \cdot \lambda_j \frac{r}{R_j}\right)}{N_{k_j}} \cdot e^{-\mu_{k_j}^2 \frac{a_j(z-\zeta)}{v_j R_j^2}}. \quad (3.1.1.5-1.2)$$

Unter Verwendung der Eigenwertgleichungen des j -ten und des vorangegangenen $(j-1)$ -ten Drahtabschnittes, also wegen (A2.3.1-10) unter Verwendung der transzendenten Gleichungen $h_j R_j \cdot \mathbf{J}_0(\mu_{n_j}) - \mu_{n_j} \cdot \mathbf{J}_1(\mu_{n_j}) = 0$ und $h_{j-1} R_{j-1} \cdot \mathbf{J}_0(\mu_{n_{j-1}}) - \mu_{n_{j-1}} \cdot \mathbf{J}_1(\mu_{n_{j-1}}) = 0$ ergibt die Integration über $r \in \langle 0, R_j \rangle$

$$\int_0^{R_j} r \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{m_j} \frac{r}{R_j}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{n_{j-1}} \frac{r}{R_j}\right) \cdot dr = \begin{cases} (h_j R_j - h_{j-1} R_{j-1}) R_j^2 \cdot \frac{\mathbf{J}_0(\mu_{m_j}) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_{n_{j-1}})}{\mu_{m_j}^2 - \mu_{n_{j-1}}^2} & \text{für } h_j R_j \neq h_{j-1} R_{j-1} \\ 0 & \text{für } n \neq m \\ N_{m_j} & \text{für } n = m \end{cases} \quad \text{und für } h_j R_j = h_{j-1} R_{j-1}, \quad (3.1.1.5-2)$$

so daß für die DINI-Koeffizienten schließlich

$$\mathfrak{g}_{m_j} = \frac{v_{j-1}}{a_{j-1}} \cdot \int_0^{R_{j-1}} \gamma_{m_j}(L_{j-1}, 0; \rho) \cdot \mathfrak{g}_{0_{j-1}}(\rho) \cdot d\rho + \int_0^{L_{j-1}} \gamma_{m_j}(L_{j-1}, \zeta; R_{j-1}) \cdot \mathbf{r}_{j-1}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ \dots + \frac{1}{\lambda_{j-1}} \cdot \int_0^{L_{j-1}} \int_0^{R_{j-1}} \gamma_{m_j}(L_{j-1}, \zeta; \rho) \cdot \mathbf{q}_{v_{j-1}}(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \quad (3.1.1.5-3.1)$$

mit

$$\gamma_{m_j}(z, \zeta; \rho) = \begin{cases} (h_j R_j - h_{j-1} R_{j-1}) \cdot \frac{a_{j-1} \cdot R_j^2}{v_{j-1}} \cdot \frac{\mathbf{J}_0(\mu_{m_j})}{N_{m_j}} \\ \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot \mathbf{J}_0(\mu_{k_{j-1}}) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{k_{j-1}} \frac{\rho}{R_{j-1}}\right)}{(\mu_{m_j}^2 - \mu_{k_{j-1}}^2) \cdot N_{k_{j-1}}} \cdot e^{-\mu_{k_{j-1}}^2 \frac{a_{j-1}(z-\zeta)}{v_{j-1} R_{j-1}^2}} & \text{für } h_j R_j \neq h_{j-1} R_{j-1} \\ \frac{a_{j-1}}{v_{j-1}} \cdot \frac{\rho}{N_{m_{j-1}}} \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_{m_j} \frac{\rho}{R_{j-1}}\right) \cdot e^{-\mu_{m_{j-1}}^2 \frac{a_{j-1}(z-\zeta)}{v_{j-1} R_{j-1}^2}} & \text{für } h_j R_j = h_{j-1} R_{j-1} \end{cases} \quad (3.1.1.5-3.2)$$

erhalten wird; das spezielle Resultat folgt aus dem allgemeineren, wenn beachtet wird, daß

$$N_{m_{j-1}} = \left(\frac{R_{j-1}}{R_j} \right)^2 \cdot N_{m_j} \quad \text{für } h_j R_j = h_{j-1} R_{j-1} \quad (\text{und damit } \mu_{m_j} = \mu_{m_{j-1}}) \text{ gilt sowie daß der}$$

$$\text{Grenzübergang } \lim_{h_{j-1} R_{j-1} \rightarrow h_j R_j} \frac{h_j R_j - h_{j-1} R_{j-1}}{\mu_{m_j}^2 - \mu_{m_{j-1}}^2} = \frac{N_{m_j}}{R_j^2 \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_{m_j})} \text{ zum Ergebnis hat.}$$

Mit (3.1.1.5-3) liegen die *DINI*-Koeffizienten der gesuchten Starttemperaturverteilung für den j -ten Drahtabschnitt explizit vor. Einsetzen der Starttemperatur als *DINI*-Reihe entsprechend (A2.3.2.5-4) in (A2.3.2.3-3) hat auf das Temperaturfeld dieses Abschnittes dann die bereits an Lösung (A2.3.2.5-6) - bzw. deren erstem Summanden - ablesbare Auswirkung. Das Aneinanderfügen von Temperaturfunktionen (A2.3.2.3-3) bzw. (A2.3.2.5-6), deren Gültigkeitsbereich auf axiale Drahtabschnitte eingeschränkt wurde, erfolgt nunmehr durch fortgesetzte Aktualisierung der Starttemperaturen (A2.3.2.5-4) unter Verwendung der Koeffizienten (3.1.1.5-3), womit letztlich das thermische Gesamtproblem gelöst ist.

Allerdings ist das Rechnen mit der Lösung (A2.3.2.5-6) oder noch allgemeiner mit (A2.3.2.3-3) eigentlich erst dann zu rechtfertigen, wenn sich auch die Randfunktionen und Quellen entsprechend detailliert und quantitativ genau genug vorgeben lassen. Aber gerade die zuverlässige Ermittlung aller Randbedingung und Wärmequellen bringt einen i.allg. erheblichen Aufwand mit sich, der unter technisch-ökonomischen Restriktionen in der industriellen Zieherei Praxis üblicherweise nicht akzeptiert wird. Wenn überhaupt, läßt sich häufig nur eine meßtechnisch grobmaschige Rasterung zur quantitativen Erfassung von Randfunktionen und Quellen realisieren. Unter diesem Aspekt ist es durchaus zweckmäßig, auch über weitere rechentechnische Vereinfachungen nachzudenken.

Eine den praxisverbundenen Belangen wesentlich entgegenkommende Vereinfachung ergibt sich, wenn genauso wie die thermischen Stoffwerte und Wärmeübergangsbedingungen auch die Randfunktionen und Quellen je Drahtabschnitt als unveränderliche Größen angesehen werden. Es wird bei der Bestimmung der Randfunktionen und Quellen auf die Erfassung einer z -Abhängigkeit bewußt verzichtet zugunsten eines brauchbaren Mittelwertes je Drahtabschnitt, d.h., vereinfachend soll $\mathbf{r}_j(z) = \mathbf{r}_j = h_j \mathcal{G}_j + q_{R_j} / \lambda_j = \text{konst.}$ und $\mathbf{q}_{V_j}(z) = q_{V_j} = \text{konst.}$ gelten. Die Temperaturfunktion eines j -ten Drahtabschnitts, also im Gebiet $L_{j-1} \leq z \leq L_j$, $0 \leq r \leq R_j$, nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j(z, r) &= \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{V_j}}{\lambda_j} \left(\frac{R_j}{2} \right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R_j} \right)^2 + \frac{2}{h_j R_j} \right) - \dots \\ &\dots - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{V_j}}{\lambda_j} \left(\frac{R_j}{\mu_{n_j}} \right)^2 \right) \cdot A_{n_j} - \mathcal{G}_{n_j} \right] \cdot \mathbf{J}_0 \left(\mu_{n_j} \frac{r}{R_j} \right) \cdot e^{-\mu_{n_j}^2 \frac{q_j \Delta z_j}{v_j R_j^2}} \end{aligned} \quad (3.1.1.5-4.1)$$

an; wobei abkürzend

$$A_{n_j} := \frac{2 h_j R_j}{((h_j R_j)^2 + \mu_{n_j}^2) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_{n_j})}, \quad \Delta z_j := z - L_{j-1}$$

gesetzt wurde.

Die *DINI*-Koeffizienten der Starttemperatur, vereinfachend für $\mathcal{G}_{0_{j-1}}(r) = \bar{\mathcal{G}}_{0_{j-1}} = konst.$, sind durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{n_j} = A_{n_j} \cdot & \left[\frac{\tilde{r}_{j-1}}{h_{j-1}} + \frac{\tilde{q}_{V_{j-1}} R_{j-1}^2}{\lambda_{j-1}} \left[\frac{1}{\mu_{n_j}^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_j R_j} - \frac{1}{h_{j-1} R_{j-1}} \right) \right] - 2 \frac{h_{j-1} R_{j-1}}{h_j R_j} (h_j R_j - h_{j-1} R_{j-1}) \cdot \dots \right. \\
& \left. \frac{\tilde{r}_{j-1}}{h_{j-1}} + \frac{\tilde{q}_{V_{j-1}}}{\lambda_{j-1}} \left(\frac{R_{j-1}}{\mu_{n_j}} \right)^2 - \dots \right. \\
& \dots \cdot \mu_{n_j}^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\tilde{r}_{j-1}}{h_{j-1}} - \bar{\mathcal{G}}_{0_{j-1}} + \frac{\tilde{q}_{V_{j-1}}}{\lambda_{j-1}} \left(\frac{R_{j-1}}{\mu_{k_{j-1}}} \right)^2}{(\mu_{n_j}^2 - \mu_{k_{j-1}}^2) ((h_{j-1} R_{j-1})^2 + \mu_{k_{j-1}}^2)} \cdot e^{-\mu_{k_{j-1}}^2 \frac{a_{j-1} \Delta L_{j-1}}{v_{j-1} R_{j-1}^2}} \quad \text{für } h_j R_j \neq h_{j-1} R_{j-1} \\
& \dots - \left[\frac{\tilde{r}_{j-1}}{h_{j-1}} - \bar{\mathcal{G}}_{0_{j-1}} + \frac{\tilde{q}_{V_{j-1}}}{\lambda_{j-1}} \left(\frac{R_{j-1}}{\mu_{n_j}} \right)^2 \right] \cdot e^{-\mu_{n_j}^2 \frac{a_{j-1} \Delta L_{j-1}}{v_{j-1} R_{j-1}^2}} \quad \text{für } h_j R_j = h_{j-1} R_{j-1}.
\end{aligned} \tag{3.1.1.5-4.2}$$

gegeben.

Bei der Herleitung von (3.1.1.5-4.2) wurden u.a. zwei konvergenzbeschleunigende Reihensumationen vorgenommen, deren Formeln im Anhang B angegeben sind. Speziell für den ersten Drahtabschnitt ($j=1$) oder im Falle, daß je Abschnitt nur Starttemperaturmittelwerte $\bar{\mathcal{G}}_j$ vorliegen, sind die *DINI*-Koeffizienten (3.1.1.5-4.2) durch $\mathcal{G}_{n_j} := A_{n_j} \cdot \bar{\mathcal{G}}_j$ zu ersetzen.

Für die radial gemittelte Temperatur (A2.3.2.6-1.2) eines j -ten Abschnitts gilt analog

$$\bar{\mathcal{G}}_j(z) = \frac{\tilde{r}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{V_j} R_j^2}{2 \lambda_j} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{h_j R_j} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\tilde{r}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{V_j}}{\lambda_j} \left(\frac{R_j}{\mu_{n_j}} \right)^2 \right) \cdot \bar{A}_{n_j} - \bar{\mathcal{G}}_{n_j} \right] \cdot e^{-\mu_{n_j}^2 \frac{a_j \Delta z_j}{v_j R_j^2}} \tag{3.1.1.5-5}$$

$$\text{mit } \bar{A}_{n_j} := \frac{(2 h_j R_j)^2}{\mu_{n_j}^2 \cdot ((h_j R_j)^2 + \mu_{n_j}^2)}, \quad \bar{\mathcal{G}}_{n_j} = \frac{\bar{A}_{n_j}}{A_{n_j}} \cdot \mathcal{G}_{n_j} \quad \text{und} \quad \Delta z_j := z - L_{j-1}.$$

Entsprechend wird für die kalorische Temperatur (A2.3.2.6-7) in einem j -ten Abschnitt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}_j(z) = & \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{Vj} R_j^2}{2\lambda_j} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{h_j R_j} \right) + \frac{1}{8} \frac{v_j R_j^2}{a_j \Delta z_j} \left[\left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} \right) \left(1 + \frac{4}{h_j R_j} \right) + \dots \right. \\
& \dots + \frac{\tilde{q}_{Vj-1} R_{j-1}^2}{2\lambda_{j-1}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{h_j R_j} + \frac{1}{h_{j-1} R_{j-1}} + \frac{4}{h_j R_j \cdot h_{j-1} R_{j-1}} \right) - \dots \\
& \left. \dots - \frac{\tilde{q}_{Vj} R_j^2}{2\lambda_j} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{h_j R_j} + \frac{4}{(h_j R_j)^2} \right) \right] + \dots \\
& \dots + \frac{v_j R_j^2}{a_j \Delta z_j} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{Vj}}{\lambda_j} \left(\frac{R_j}{\mu_{nj}} \right)^2 \right) \cdot \bar{A}_{nj} - \bar{\mathcal{G}}_{nj} \right] \cdot \frac{e^{-\mu_{nj}^2 \frac{a_j \Delta z_j}{v_j R_j^2}}}{\mu_{nj}^2} - \dots \\
& \dots - \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_{j-1}}{h_{j-1}} + \frac{\tilde{q}_{Vj-1}}{\lambda_{j-1}} \left(\frac{R_{j-1}}{\mu_{nj-1}} \right)^2 - \bar{\mathcal{G}}_{0j-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\mu_{nj-1}^2} - \frac{h_j R_j - h_{j-1} R_{j-1}}{2 h_j R_j \cdot h_{j-1} R_{j-1}} \right) \cdot \bar{A}_{nj-1} \cdot e^{-\mu_{nj-1}^2 \frac{a_{j-1} \Delta L_{j-1}}{v_{j-1} R_{j-1}^2}} \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{3.1.1.5-6.1}$$

erhalten.

Für den ersten Drahtabschnitt ($j = 1$) oder bei Vorgabe von Starttemperaturmittelwerten $\bar{\mathcal{G}}_j$ je Abschnitt gilt statt (3.1.1.5-6.1) die Formel

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}_j(z) = & \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{Vj} R_j^2}{2\lambda_j} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{h_j R_j} \right) - \dots \\
& \dots - \frac{1}{8} \frac{v_j R_j^2}{a_j \Delta z_j} \left[\left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} - \bar{\mathcal{G}}_{0j} \right) \left(1 + \frac{4}{h_j R_j} \right) + \frac{\tilde{q}_{Vj} R_j^2}{2\lambda_j} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{h_j R_j} + \frac{4}{(h_j R_j)^2} \right) \right] + \dots \\
& \dots + \frac{v_j R_j^2}{a_j \Delta z_j} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{h_j} + \frac{\tilde{q}_{Vj}}{\lambda_j} \left(\frac{R_j}{\mu_{nj}} \right)^2 - \bar{\mathcal{G}}_{0j} \right) \frac{\bar{A}_{nj}}{\mu_{nj}^2} \cdot e^{-\mu_{nj}^2 \frac{a_j \Delta z_j}{v_j R_j^2}}
\end{aligned}
\tag{3.1.1.5-6.2}$$

Auch zur Herstellung der Formelausdrücke (3.1.1.5-6) wurde von konvergenzbeschleunigenden Reihensummationen Gebrauch gemacht - vgl. Anhang B. Die Mitberechnung der kalorischen Temperatur gestattet z.B. die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte - unter Verwendung einer Iterationsschleife - entsprechend zu berücksichtigen.

Darüberhinaus lassen sich die Formeln (3.1.1.5-4) bis (3.1.1.5-6) auch im Falle nichtlinearer Randbedingungen, z.B. bei der Modellierung des Warmziehens, verwenden, indem entsprechend Kapitel A2.3.2.10 die Aktualisierung der Randfunktion \mathbf{r} und des relativen Wärmeübergangskoeffizienten h gemäß der Beziehungen (A2.3.2.10-4) vorgenommen wird. Speziell für den (oder die) im Ziehholbereich liegenden Drahtabschnitt(e) kann die Wechselwirkung mit der Ziehdüse

entsprechend Kapitel 3.1.1.4 durch Aktualisierung der Randfunktion v und des relativen Wärmeübergangskoeffizienten h gemäß den Gleichungen (3.1.1.4-8) berücksichtigt werden.

Zur Rechtfertigung der in die Formeln (3.1.1.5-4) bis (3.1.1.5-6) eingeflossenen Vereinfachung, im jeweils vorangegangenen ($j-1$)-ten Drahtabschnitt lediglich den Starttemperaturmittelwert zu verwenden, sei im Nachhinein angemerkt, daß sich auf Grund des relativ rasch, nämlich exponentiell abklingenden Einflusses von $\mathcal{G}_{0,j-1}(r)$ - vgl. erster Term (A2.3.2.5.6) - i.allg. kaum nennenswerte Auswirkungen auf die radialen Temperaturverhältnisse im gerade betrachteten j -ten Drahtabschnitt ergeben werden. Andernfalls stehen mit (3.1.1.5-3) die entsprechend allgemeineren *DINI*-Koeffizienten zur Verfügung, womit die Aufgabe, wie dort angegeben, zu lösen ist.

Mit den hier vorgestellten analytischen Lösungen zur Modellierung der Temperaturverhältnisse des Drahtes über mehrere Ziehstufen hinweg existiert ein hinreichend einfacher mathematischer Formalismus, der numerische Berechnungen nicht allein auf PC, sondern bereits auch auf „Handheld“-Rechnern möglich macht - für den Pocket-PC *HP48GX* ist entsprechende Software programmiert worden. Damit zahlt sich der zunächst erforderliche, nicht geringe mathematisch-analytische Aufwand letztlich günstig auf Programmumfang, Speicheranforderung und Rechenzeit aus, ein Vorteil, der schlanke Rechentechnik im Zuge steigender Mobilität und Flexibilität unterstützt.

3.1.1.5.3 Anwendung auf Mehrfachzug

Die Berechnung der Drahttemperaturen wird beispielshalber für das Ziehen unlegierten stark verzinkten Stahldrahtes auf einer 11-zügigen Naßziehmaschine vorgenommen. Insbesondere soll überprüft werden, ob die Temperaturen an der Drahtoberfläche so groß werden, daß die Zinkschicht partiell an- bzw. aufschmelzen kann. Diesen Verdacht hatten Drahtsteckerproben aus dem Ziehdüsenbereich - nach Drahtriß der Ziehmaschine entnommen und mit dem Raster-elektronenmikroskop betrachtet - nahegelegt.

Der Ausgangsdraht mit einem Durchmesser von $1,5\text{ mm}$ wird entsprechend nachstehender Zugfolge bei einer Ziehgeschwindigkeit (letzter Zug) von 15 m/s auf einen Fertigdrahtdurchmesser von $0,5\text{ mm}$ heruntergezogen. Als Ziehwerkzeuge sind Hartmetallziehdüsen mit einem Ziehholöffnungswinkel von $2\alpha = 10^\circ$ und einem Außendurchmesser von 53 mm im Einsatz. Die Drähte durchlaufen die Stufenkonenmaschine vollständig getaucht im Ziehmittelbad. Die Abstände zwischen den Zügen, die gleichzeitig die Kühlstrecke darstellen, betragen zwischen $0,7$ und $1,3\text{ m}$; im Beispiel wird mit konstant 1 m Kühlänge gerechnet. Für Ziehmitteltemperatur und Wärmeübergang zwischen Draht und Ziehmittel werden vereinfachend einheitlich

Zug	d [mm]	ε [%]	v [m/s]	σ_F [N/mm ²]
0	1,50	-	1,67	567
1	1,36	17,8	2,03	953
2	1,23	18,2	2,48	1047
3	1,11	18,6	3,04	1077
4	1,01	17,2	3,68	1109
5	0,91	18,8	4,53	1136
6	0,82	18,8	5,58	1161
7	0,75	16,3	6,67	1186
8	0,68	17,8	8,11	1204
9	0,61	19,5	10,08	1221
10	0,55	18,7	12,40	1239
11	0,50	17,4	15,00	1258

$\mathcal{G}_U = 40^\circ\text{C}$ und $\alpha = 6\text{ kW/(m}^2\text{K)}$ angesetzt, während für den Außenrand des Ziehwerkzeugs $\tilde{\mathcal{G}}_{R2} = 50^\circ\text{C}$ angenommen werden. Zur Charakterisierung der Umformfestigkeit des Drahtwerkstoffes in den einzelnen Umformstufen werden anstelle von Fließkurvenwerten ersatzweise die bei $0,2\%$ bleibender Dehnung auftretenden Spannungen $R_{p0,2}$ herangezogen.

Die Approximation der Reibzahl wurde durch eine quasi-lineare Treppenfunktion der Form

$$\mu := \begin{cases} \mu_{01} + \mu_{g1} \cdot \vartheta & \text{für } \vartheta \leq \vartheta_S \\ \mu_{02} + \mu_{g2} \cdot \vartheta & \text{für } \vartheta > \vartheta_S \end{cases} \quad (3.1.1.5-7)$$

vorgenommen. Hierdurch läßt sich sowohl eine Temperaturabhängigkeit entsprechend (3.1.1.4-9) berücksichtigen als auch jene sprunghafte Reibwertverminderung, die eintritt, wenn die Oberfläche des niedriger schmelzenden Reibpartners die Schmelztemperatur erreicht, was bei der Paarung Zink-Hartmetall bei $\vartheta_S \cong 420 \text{ }^\circ\text{C}$ geschieht, wie es das folgende Bild zeigt.

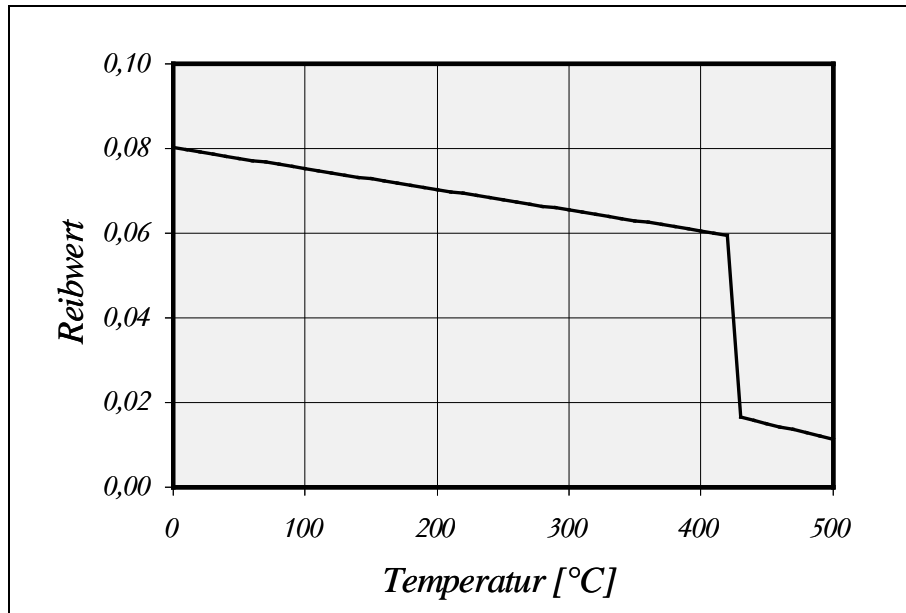


Bild 3.1.1-16: Reibwert-Temperaturabhängigkeit

Die Koeffizienten des Reibwertansatzes (3.1.1.5-7) werden im konkreten Fall zu $\mu_{01} = 0,0801$, $\mu_{g1} = -4,916 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\mu_{02} = 0,0496$, $\mu_{g2} = -7,677 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ angenommen.

Bei der Einschätzung und überschlägigen Festlegung des Wärmeübergangs zwischen Draht und Ziehhol wird davon ausgegangen, daß mit dem verwendeten Naßziehmittel keine annähernd hydrodynamischen Reibungszustände zu realisieren sind; in Laborziehversuchen wurden „Schmierfilmdicken“ in der Größenordnung von lediglich 10^{-4} mm oder weniger beobachtet. Deshalb wird jetzt im Vergleich mit der Abschätzung (3.1.1.1-1) und dem Ergebnis des Kapitels 3.1.1.4.3 ein Wert von $\alpha \sim 5 \cdot 10^6 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ als angemessen angesehen.

Die Berechnungen werden mit den Formeln (3.1.1.5-4) und (3.1.1.5-5) für drahtabschnittsweise konstante Randbedingungen durchgeführt, wobei die Draht-Ziehdüse-Wechselwirkung gemäß der Formeln (3.1.1.4-8) Berücksichtigung findet. Das entsprechende HP48-Rechenprogramm, mit dem sich auch die kalorischen Temperaturen (3.1.1.5-6) berechnen lassen, ist im Anhang C mit knappen Erläuterungen angegeben. Im Anhang B werden die Rechenergebnisse auszugsweise in Tabellenform aufgeführt. Im folgenden Bild sind neben der mittleren Drahtquerschnittstemperatur die Temperaturen an der Drahtoberfläche und im Drahtkern dargestellt. Aus Darstellungsgründen ist der Abszissenmaßstab der Kühlabschnitte zwischen den Zügen gegenüber dem Maßstab der Erwärmungsabschnitte im Ziehhol stark gestaucht.

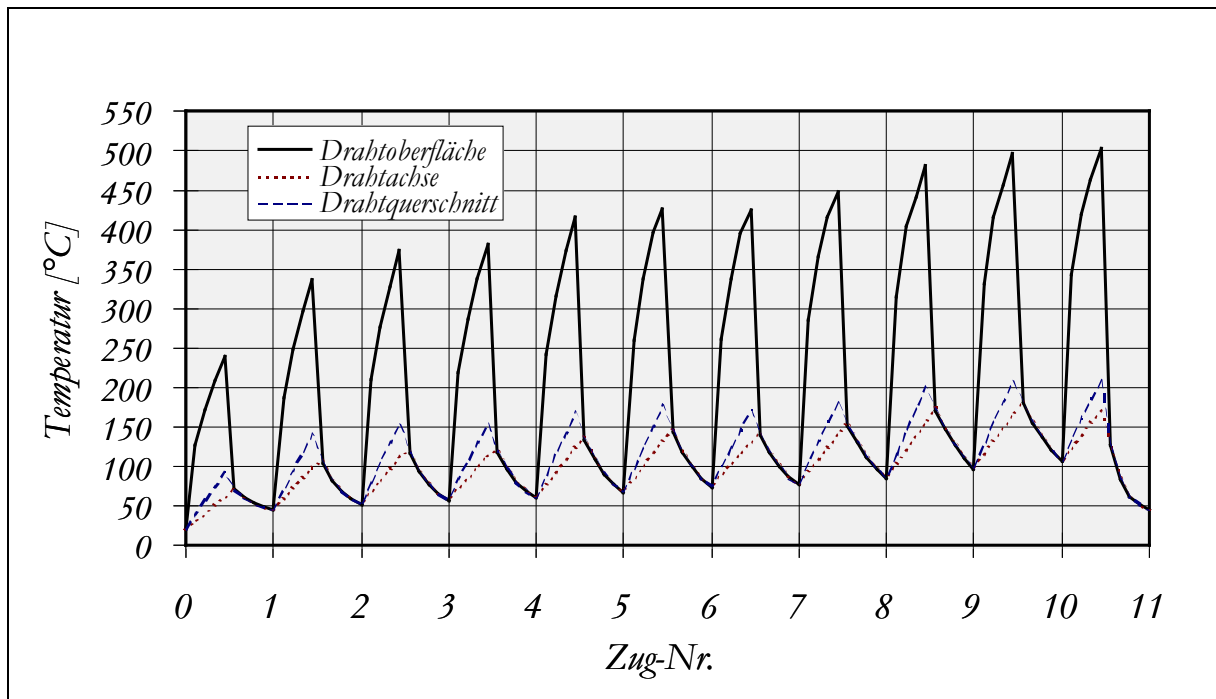


Bild 3.1.1-17: Drahttemperaturen beim Ziehen von stark verzinktem Stahldraht

Es ist insbesondere zu sehen, daß im fünften Zug die Schmelztemperatur von Zink erreicht wird. Durch die starke Reibwertverringering von ca. $0,06$ auf unter $0,02$ findet in den nächsten beiden Zügen vorerst keine nennenswerte Erhöhung der Spitzentemperatur statt. Erst im achten Zug, nachdem Ziehgeschwindigkeit und Umformfestigkeit weiter angewachsen sind, tritt wieder eine entsprechende Temperaturerhöhung ein. Während die Drahtoberfläche im elften Zug die 500°C Marke knapp überschreitet, bleiben mittlere Temperatur des Drahtquerschnitts und Drahtkern-temperatur im Bereich zwischen $100\text{-}200^{\circ}\text{C}$.

Wie gezeigt, ist ein Anschmelzen der Zinkschicht in einem zur Kalibrierzone hin verlagerten Teilabschnitt des Ziehholts durchaus möglich. Die damit einhergehende sprunghafte Reibwertverringering erlaubt es in praktischer Konsequenz, den Fettanteil des Naßziehmittels entsprechend herabzusetzen; die erweichte bzw. angeschmolzene Zinkschicht übernimmt einen Teil der Schmierfunktion. Durch geeignete geometrische Ziehholgestaltung (Ziehholöffnungswinkel) und Einführung eines Ziehdüsenvorsatzelementes konnten die Ziehbedingungen auch hinsichtlich einer Verringerung von Zinkabrieb optimiert werden, so daß schließlich neben einer drastischen Zinkeinsparung ein deutlich stabilerer Ziehprozeß erreicht wurde [SCH 81].

3.1.2 Drahtkühlung

Die bei der Umformung durch Umwandlung mechanischer Arbeit in Wärme erfolgende Temperaturzunahme des Drahtes kann - werkstoff-, umform- und anlagenabhängig - zu mehr oder weniger unerwünschten Folgeerscheinungen führen. Deshalb kommt der Drahtkühlung aus werkstofflicher, technologischer und ggf. sogar anlagentechnischer Sicht nicht unerhebliche Bedeutung zu. Stellvertretend seien folgende Problemkreise genannt: Verformungsinduzierte Alterung höher kohlenstoffhaltiger Stahldrähte, Reck- und Abschreckalterung [EIS 59, *Band III, Kap. V/25*], thermische Lagerüberlastung, Spulenflanschdeformation oder Spulenbruch und Drahtschädigung infolge zu hoher Drahtspannungen nach Spulenabkühlung, Verschleiß von Ziehscheiben bzw. Ziehtrommeln, Schmierungs-, Reibungs- und Eigenspannungsprobleme, Ziehdüsenverschleiß. Insbesondere beim mehrzügigen Trockenziehen mit höheren Ziehgeschwindigkeiten können sich die Enthalpien von Zug zu Zug akkumulieren, wenn das durch geeignete Kühlmaßnahmen nicht verhindert wird.

Damit besitzt die Kühlung des Drahtes während des Ziehens besonders für den Technologen herausragende Bedeutung. Infolge gesteigerter Leistungsansprüche, z.B. hinsichtlich Ziehgeschwindigkeit und Querschnittsabnahme, werden aber auch an die Hersteller von Drahtziehmaschinen höhere Anforderungen hinsichtlich der Intensität der Drahtkühlung gestellt. Entsprechend vielfältig sind die Bemühungen zur Erhöhung der Kühlleistung in den vergangenen Jahrzehnten gewesen [EIS 63], [STU 63], [NAK 76], [HUR 83], [PAM 84], [PET 84], [OTT 91]. Die Lösungsmöglichkeiten reichen dabei von der Ziehwerkzeugkühlung über die Drahtkühlung mit Kühlrohr (Wasser/Luft), die Ziehtrommelkühlung (innen Wasser, außen Luft oder Wasserdampf) bis hin zu geschlossenen Hochleistungs-Naßziehmaschinen (*VEETRAC*) [TOM 80], [PAM 84], [MAR 91]. Jedoch nicht nur anlagentechnisch, sondern auch durch Additivierung des Kühlwassers läßt sich der Wärmeübergang und damit die Kühlleistung verbessern [BRÜ 87].

Große praktische Bedeutung für die Drahtkühlung hat besonders die Ziehtrommel-Innenkühlung erlangt, bei der die Trommelwand entweder über das Innere der Trommelglocke oder über in die Trommelwand eingegossene Rohrschlangen mit Wasser zwangsgekühlt wird. Dagegen bleiben die Ziehtrommel-Außenkühlung, bei der einige Drahtwindungen auf der Trommel mit einem Wasserfilm benetzt werden [PET 85], oder die Kühlung mit Kühlrohr, bei der ein wasserdurchströmtes Rohr dem Ziehwerkzeug unmittelbar nachgeordnet ist [FUJ 74], trotz größerer Kühlwirkung, jedoch höheren Aufwands wegen auf empfindliche Werkstoffe beschränkt. Eine Kühlung der Ziehwerkzeuge (direkt oder indirekt) wirkt sich auf die Drahttemperatur kaum aus, kann jedoch zu verlängerter Haltbarkeit der Ziehwerkzeuge beitragen [PIE 72], [PAW 85].

Auch wenn sich einige der aufwendigeren Anlagen und Maßnahmen für spezielle Anwendungen und Produkte im Stahldrahtbereich trotz höherer Anschaffungs- und Betriebskosten durchsetzen konnten, bleibt es andererseits unter dem Aspekt konstruktiver Einfachheit und aus Kostengründen weiterhin sinnvoll, die Ziehtrommel - als ohnehin unverzichtbarem Element einer jeden Trockenziehmaschine - einer eingehenderen Betrachtung und Optimierung, und eben nicht zuletzt auch unter wärmetechnischen Gesichtspunkten, zu unterziehen. Zu Vergleichszwecken wird jedoch vorab knapp dargestellt, welche Temperaturabsenkung durch ein dem Ziehwerkzeug direkt nachgeschaltetes Kühlrohr bereits zu erzielen ist.

3.1.2.1 Kühlrohr

Das direkte Kühlen des Drahtes unmittelbar im Anschluß an das Ziehwerkzeug geht auf ein von NAKAMURA entwickeltes Verfahren (Bild 3.1.2-1) zurück [NAK 76]. Mit den Abkühlbedingungen beim Durchgang des Drahtes durch ein wasserdurchströmtes Kühlrohr hat sich ausführlich KEUPER [KEU 84] beschäftigt. Ausgehend von einer Näherung für die Drahttemperatur ermittelt er unter Heranziehung experimenteller Ergebnisse Wärmeübergangskoeffizienten, um schließlich für den Wärmeübergang zwischen Stahldraht und Wasser die in Bild 3.1.2-2 wiedergegebenen Abhängigkeiten zu erhalten (Drahtdurchmesser $1,4\text{ mm}$, Kühlrohrlänge 145 mm).

Unter diesen Wärmeübertragungsbedingungen ergaben sich für den Draht Abkühlungsverhältnisse, wiederum in Abhängigkeit von Drahteinlauftemperatur und Drahtgeschwindigkeit, wofür KEUPER Bild 3.1.2-3 angibt.

Im Bereich der Filmverdampfung - bei hohen Drahttemperaturen - entsteht an der Drahtoberfläche Wasserdampf, der die Wärmeabfuhr fast vollständig verhindert. Allerdings wird sich i.allg. die Art des Wärmeübergangs je nach Drahtgeschwindigkeit und Drahteinlauftemperatur vom Kühlrohreintritt bis zum Kühlrohraustritt deutlich ändern. Während bei Pulsationsströmung örtlich mit Wärmeübergängen bis zu $100\text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$ zu rechnen ist, werden etwa $26\text{ kW}/(\text{m}^2\text{K})$ als mittlerer Wert angegeben [PAW 85].

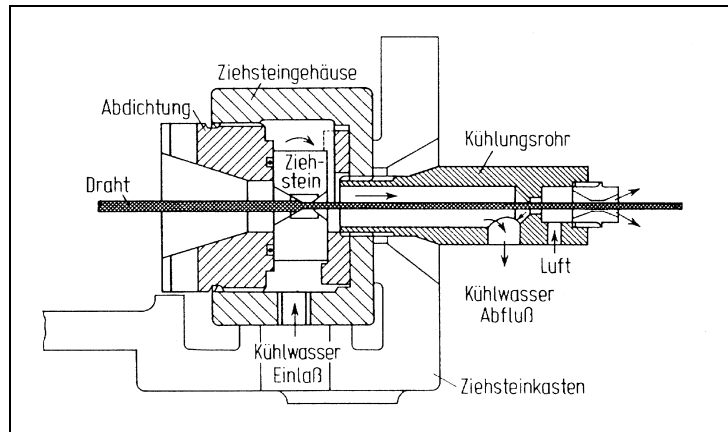


Bild 3.1.2-1: Kühlrohr-Wasserkühlung [NAK 76]

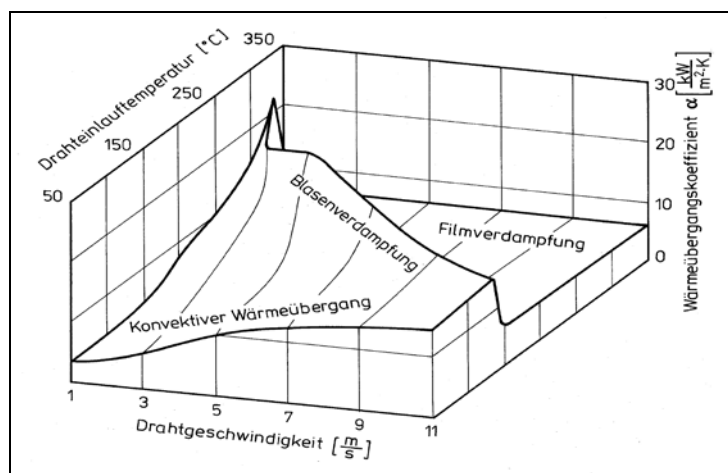


Bild 3.1.2-2: Wärmeübergang [KEU 84, Bild 68]

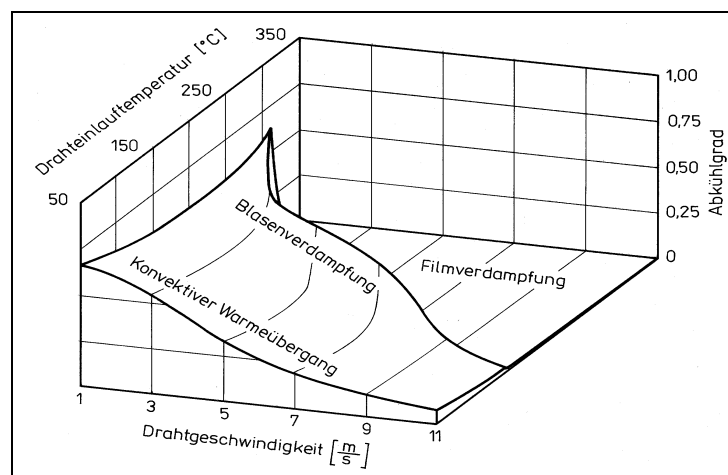


Bild 3.1.2-3: Draht-Abkühlgrad³ [KEU 84, Bild 69]

Mit diesen Angaben und einer Berechnungsformel für die Drahttemperatur lassen sich die Möglichkeiten zur direkten Drahtkühlung abschätzen. Dabei wird festgestellt [SAU 83], daß bei niedrigen Drahtgeschwindigkeiten ($\leq 1\text{ m/s}$) und Drahtdurchmessern in der Größenordnung von

³ Der Abkühlgrad ist definiert als Verhältnis aus der bis zum Betrachtungszeitpunkt bereits realisierten Temperaturabsenkung zur theoretisch insgesamt möglichen Temperaturabsenkung.

1 mm bereits mit Kühlrohr­längen von 200 mm der Draht weitgehend heruntergekühlt wird. Mit wachsender Ziehgeschwindigkeit muß sich die Kühlrohr­länge wie $l_K \sim \frac{\rho c}{4\alpha} \cdot v \cdot d$ verhalten - vgl.

Anhang B, also gleichfalls nahezu direkt proportional zur Drahtgeschwindigkeit anwachsen, um etwa die gleiche Drahtabkühlung zu bewirken. Damit ergeben sich spätestens bei Ziehgeschwindigkeiten von $>10\text{ m/s}$ i.allg. unvertretbar große Kühlrohr­längen von $>1\text{ m}$. Nicht zuletzt diese Tatsache unterstreicht, daß der Untersuchung und Optimierung der Kühlverhältnisse auf einer Ziehtrommel entsprechende Bedeutung zukommt.

3.1.2.2 Ziehtrommel

Für die wärmetechnisch zielgerichtete Auslegung einer Ziehtrommel ist ein entsprechendes thermisches Modell erforderlich, mit dem insbesondere die Wärmeübertragung zwischen Draht und Trommelaußenwand sowie Wasserströmung und Trommelinnenwand nachgebildet wird. Ein die tatsächliche Trommelgeometrie vollständig berücksichtigendes Modell wird jedoch relativ aufwendig (Bild 3.1.2-4), da ohne Heranziehung einschlägiger mathematisch-numerischer Verfahren, wie z.B. Differenzen- oder FE-Methode, eine Problemlösung nicht gelingt.

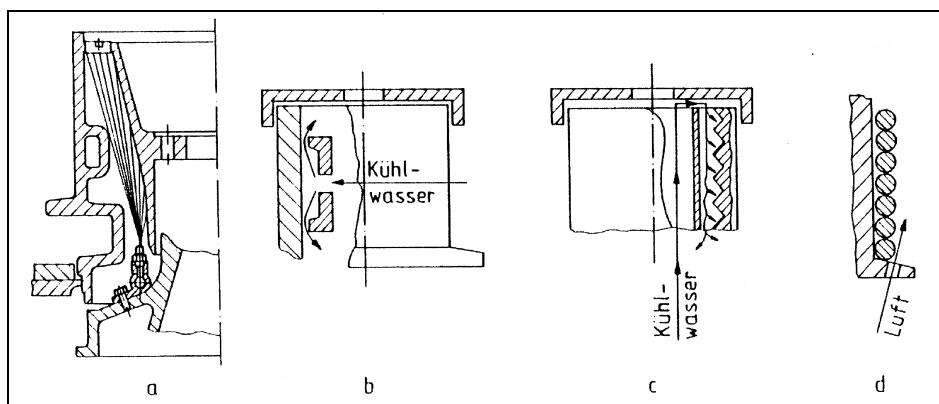


Bild 3.1.2-4: Ziehtrommelquerschnitt (**a** Spritz-, **b** Vollmantel-, **c** Schrauben-, **d** kombinierte Wasser-Luft-Kühlung) [BRÜ 87]

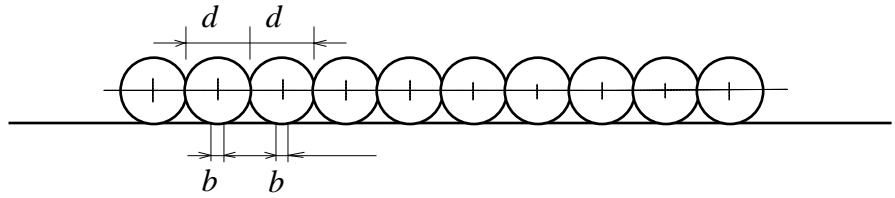
Ein elementares Modell und Berechnungsverfahren läßt sich jedoch durch geeignete geometrische und wärmetechnische Vereinfachungen bereitstellen. Bei Vorgabe entsprechender Wärmeübergangskoeffizienten, Umgebungstemperaturen sowie der Drahttemperatur am Trommelauf­laufpunkt können mit einem solchen Modell sowohl die Drahttemperaturabsenkung als auch die mittleren Temperaturen an den Trommelaußen- und -innenrändern berechnet werden. Damit liegen dann unmittelbar die entscheidenden Größen vor, um das Kühlvermögen einer Ziehtrommel sicherer beurteilen und entsprechend zielgerichtet verändern oder sogar optimieren zu können. Das energetische Wechselspiel zwischen Draht und Ziehtrommel wird an einer einzelnen Ziehtrommel näher untersucht, zuerst für die Kräfte und Spannungen, anschließend für den Wärmeaustausch. Für das thermische Berechnungsmodell sind zunächst die Randbedingungen - mechanische und thermische - zu formulieren.

3.1.2.2.1 Mechanische Randbedingungen

Für den Kraft- und Arbeitsbedarf sowie die thermischen Verhältnisse auf einer mehrzügigen Ziehmaschine sind nicht allein die Vorgänge im Ziehhol - Umformung und Reibung - maßgebend, sondern auch die Bedingungen zwischen Draht und Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel sind angemessen zu berücksichtigen. Als wesentliche Voraussetzung zur Abschätzung des Wärmeübergangs im unmittelbaren Berührungs- bzw. Kontaktbereich zwischen Draht und Ziehtrommel ist die mittlere Kontaktbreite \tilde{b} , wie sie sich infolge Drahtabplattung durch „Pressung“ des Drahtes gegen die Trommelwandung einstellt, zu bestimmen. Hierfür ist zunächst eine Analyse

der an einer Ziehtrommel vorliegenden Kraftverhältnisse erforderlich. Dabei zeigt sich, daß sich das Lastdrehmoment aus einem Tangential- und einem Axial- bzw. Schollkraftanteil zusammensetzt. Um beide Anteile quantitativ einschätzen und vergleichen zu können, werden die erforderlichen Beziehungen zwischen Kräften und Drehmomenten, einschließlich der Verhältnisse im Mehrfachzug, im betreffenden Kapitel des Anhangs A hergeleitet.

Bei einem Drahtdurchmesser d ergibt sich für den Kontakt einer Drahtlage mit einer parallelen Wand gemäß nebenstehender Anordnung eine mittlere gedrückte Breite \tilde{b} , die aus den HERTZschen Formeln [CZI 96, E100] folgt:



$$\tilde{b} = 4 \cdot \sqrt{\frac{d}{\pi \cdot E}} \cdot \tilde{p}_L; \quad E := 2 \frac{E_T \cdot E_D}{(1 - \nu_T^2) E_D + (1 - \nu_D^2) E_T}; \quad (3.1.2.2.1-1)$$

die Elastizitätsmoduli sind mit E und die Querdehnzahlen von Draht und Wand mit ν bezeichnet. Die mittlere Linienlast

$$\tilde{p}_L = \frac{A \cdot \sigma_N}{\pi \cdot (D_2 + d) \cdot w}; \quad A = \frac{\pi}{4} d^2, \quad (D_2: \text{Trommelaußendurchmesser}) \quad (3.1.2.2.1-2)$$

mit der beim „Schollen“ des Drahtes die Ziehtrommel von w Drahtlagen „geschnürt“ wird, setzt sich aus der kumulativen Wirkung der Normalspannungsanteile aller Drahtumschlingungen auf die Trommelwandung entsprechend

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{Auf} - \sigma_{Ab}}{\mu_T} \leq \frac{1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}}{\mu_T} \cdot \sigma_{Auf} \quad (3.1.2.2.1-3)$$

zusammen, wobei $\sigma_{Auf} \geq 0$ und $\sigma_{Ab} \geq 0$ die tangential am Auf- bzw. Ablaufpunkt der Ziehtrommel angreifenden Drahtlängsspannungen und μ_T der die Reibungsverhältnisse zwischen Draht und Trommel charakterisierende Reibwert sind; vgl. Kapitel A3.1.2.2.1 im Anhang A und speziell die Herleitung der Gl. (A3.1.2.2.1-3).

Der Wärmeübergang im direkten Kontakt zwischen Draht und Trommel auf der Breite b läßt sich wieder mit der Relation (3.1.1.1-1) abschätzen. Für einen zwischen Draht und Trommel stets vorhandenen Restschmierfilm, dessen Dicke unter der mittleren Pressung \tilde{p}_L in der Größenordnung $s = s(b, p_L) \sim 10^{-6} m$ anzunehmen ist, ergibt sich dann im effektiven Kontaktbereich Draht-Trommel ein Wärmeübergangskoeffizient von etwa $\alpha_L \geq 10^5 W / (m^2 K)$.

3.1.2.2.2 Thermische Randbedingungen

Die thermischen Randbedingungen werden für Draht und Trommel getrennt festgelegt. Sie werden jeweils als Randbedingung dritter Art (NEWTONscher Wärmeübergang) formuliert oder auf eine solche Form zurückgeführt. Obwohl eine durchgängige Berücksichtigung des Strahlungswärmeaustauschs prinzipiell möglich ist, soll der Strahlungsanteil - bis auf den unmittelbaren Austausch zwischen den Drahtlagen und der Trommel - einfachheitshalber vernachlässigt werden, was angesichts des relativ niedrigen Temperaturbereichs ($< 200 \text{ }^\circ\text{C}$) gerechtfertigt ist.

Da hinsichtlich der Wärmeübergangskoeffizienten und Temperaturen häufig Mehrfachindizes erforderlich sind, sei generell vereinbart: Der erste Index gibt an, ob sich die Größe auf

den Körper selbst oder dessen Umgebung bezieht: D - Draht, T - Trommel bzw. $T1$ - Trommelinnenrand und $T2$ - Trommelaußenrand, U - Umgebung. Im Falle, daß der erste Index ein U ist, folgt im zweiten Index der Körperbezug und erst mit dem dritten Index wird die Art der Umgebung spezifiziert. Stellt dagegen bereits der erste Index den Körperbezug her, so charakterisiert der folgende Index den Bezug zur Umgebung. Obwohl die Bedeutung mancher Bezeichnung im jeweiligen Kontext verständlich wird, vorab einige Beispiele:

α_{T2U} , \mathcal{G}_{UT2U} : Wärmeübergangskoeffizient und Umgebungstemperatur an der Trommelaußenwand in dem Bereich, der von den Drahtlagen nicht überdeckt wird.

α_{DU} , \mathcal{G}_{UDU} : Wärmeübergangskoeffizient und Umgebungstemperatur für den Draht an der der Trommel abgewandten Oberfläche.

3.1.2.2.1 Ziehtrommelwandung

Die reale Ziehtrommel besitzt mehrere außen- und innenliegende Oberflächenbereiche, an denen Wärmeübertragung mit der jeweiligen Umgebung zu den dort vorliegenden Bedingungen stattfindet. Für die wärmetechnische Untersuchung der Ziehtrommel ist es jedoch nicht in jedem Falle erforderlich, die vollständige Geometrie der Ziehtrommel zu modellieren. Sollen wärmetechnisch weniger die lokalen als vielmehr die globalen Verhältnisse nachgebildet werden, wird sich ein qualitativ-quantitativ ausreichend guter Überblick bereits dann gewinnen lassen, wenn eine Beschränkung auf jene Wärmeübertragungsflächen vorgenommen wird, die für den Wärmeaustausch zwischen Draht und Trommel sowie Trommel und Kühlmedien (Wasser, Luft) maßgebend sind. Damit ist es naheliegend, die Wärmeübertragungsverhältnisse der Ziehtrommel einfachsterweise durch einen Hohlzylinder anzunähern, der am Außenmantel einesteils durch die Drahtlagen, andernteils durch Umgebungsluft und am Innenmantel durch eine Wasser- oder Wasser-Luft-Strömung beaufschlagt ist.

a) Ziehtrommelaußenwand

Der flächenbezogene Wärmestrom an der äußeren Trommel- bzw. Hohlzylinderwand bei $r = R_2$ ist im Bereich zwischen Drahtlage und Trommelwand infolge Leitung, Konvektion und Strahlung durch

$$\lambda_T \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_T(R_2, x)}{\partial r} = \alpha_{T2D} \cdot (\mathcal{G}_D - \mathcal{G}_T(R_2, x)); \quad \mathcal{G}_D \equiv \mathcal{G}_D(R, z) \quad (3.1.2.2.2-1)$$

$$\text{mit} \quad \alpha_{T2D} = \frac{1}{d} \cdot [(d-b) \cdot (\alpha_K + \alpha_S) + b \cdot \alpha_L] \quad (3.1.2.2.2-1.1)$$

$$\text{und} \quad \alpha_S = \varepsilon_{T2D} \cdot \sigma \cdot \frac{\Theta_{T2}^4 - \Theta_D^4}{\mathcal{G}_{T2} - \mathcal{G}_D}; \quad \mathcal{G}_{T2} \equiv \mathcal{G}_T(R_2, x), \quad (3.1.2.2.2-1.2)$$

gegeben - vgl. (A2.3.2.10-2) und (A2.3.3.2-11.2); da Draht- und Ziehtrommelachse nicht zusammenfallen, werde hier letztere mit x bezeichnet.

In dem von Drahtwindungen nicht überdeckten Bereich gilt:

$$-\lambda_T \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_T(R_2, x)}{\partial r} = -\alpha_{T2U} \cdot (\mathcal{G}_{UT2U} - \mathcal{G}_T(R_2, x)), \quad (3.1.2.2.2-2)$$

wobei als Umgebungstemperatur \mathcal{G}_{UT2U} die Lufttemperatur einzusetzen ist und für den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten α_{T2U} die Strömungsverhältnisse um die rotierende Trommel zu berücksichtigen sind.

Im Bestreben, das Temperaturmodell möglichst einfach zu halten, wird jetzt vorausgesetzt, daß Wärmeleitung in Richtung der Trommelachse gegenüber dem radialen Wärmetransport vernachlässigt werden darf. Das ist gerechtfertigt, solange die Wanddicke der Trommel hinreichend gering

gegenüber der Trommelabmessung in Achsrichtung (Trommelhöhe) sowie der Überdeckungs-
länge durch den Draht (nicht zu kleine Windungszahl) ist. Damit läßt sich für die Ziehtrommel
vereinfachend mit achsrichtungsunabhängigen Temperaturen rechnen und die beiden Rand-
bedingungen (3.1.2.2.2-1) und (3.1.2.2.2-2) dürfen entsprechend ihrer Flächenanteile auf der
Ziehtrommel, die von den Drahtwindungen bedeckt bzw. nicht bedeckt werden, zu einer neuen
Randbedingung zusammengezogen werden. Bezeichnet $0 < \chi_D \leq 1$ den von den Draht-
windungen überdeckten Flächenanteil, so wird durch anteilige Summation von (3.1.2.2.2-1) und
(3.1.2.2.2-2) eine kumulative Trommelrandbedingung bei $r = R_2$ erhalten:

$$\lambda_T \cdot \frac{\partial \vartheta_T(R_2, x)}{\partial r} = \alpha_{T2} \cdot (\vartheta_{UT2} - \vartheta_T(R_2, x)) \quad (3.1.2.2.2-3)$$

mit

$$\alpha_{T2} = \chi_D \cdot \alpha_{DT} + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U} \quad (3.1.2.2.2-3.1)$$

$$\vartheta_{UT2} = \frac{\chi_D \cdot \alpha_{DT} \cdot \vartheta_D + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U} \cdot \vartheta_{UD}}{\chi_D \cdot \alpha_{DT} + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U}} \quad (3.1.2.2.2-3.2)$$

b) Ziehtrommelinnenwand

Für die wassergekühlte Trommelinnenwand gilt

$$-\lambda_T \cdot \frac{\partial \vartheta_T(R_1, x)}{\partial r} = \alpha_{T1} \cdot (\vartheta_{UT1} - \vartheta_T(R_1, x)) \quad (3.1.2.2.2-4)$$

wobei als Umgebungstemperatur ϑ_{UT1} die mittlere Wassertemperatur einzusetzen ist und für den
Wärmeübergangskoeffizienten α_{T1} näherungsweise die Verhältnisse für axiale Ringspaltströmung
zu berücksichtigen sind - vgl. [VDI 94, **Gd2 Gl.(10) mit Gb3 Gln. (5,6)**]. Die tatsächlichen
Strömungsverhältnisse unterscheiden sich davon allerdings dadurch, daß infolge Rotation der
Ziehtrommel der Strömung in Axialrichtung eine Komponente in Trommel-Umfangsrichtung
überlagert ist. Der tatsächliche Turbulenzgrad wird damit größer sein, als dies bei rein axialer
Strömung der Fall ist, so daß demgegenüber auch die Wärmeübertragung intensiver stattfindet.
Unmittelbar anwendbare Berechnungsformeln für diese Mischströmung sind jedoch nicht
bekannt.

3.1.2.2.2.2 Drahtoberfläche

Die Draht-Randbedingung bei $r = R$ auf der der Trommel zugewandten Seite:

$$\lambda_D \cdot \frac{\partial \vartheta_D(R, z)}{\partial r} = \alpha_{DT} \cdot (\vartheta_{T2} - \vartheta_D(R, z)); \quad \alpha_{DT} \equiv \alpha_{T2D}; \quad (3.1.2.2.2-5.1)$$

α_{T2D} entsprechend (3.1.2.2.2-1.1).

Draht-Randbedingung auf der der Trommel abgewandten Seite:

$$\lambda_D \cdot \frac{\partial \vartheta_D(R, z)}{\partial r} = \alpha_{DU} \cdot (\vartheta_{UDU} - \vartheta_D(R, z)). \quad (3.1.2.2.2-5.2)$$

Im Rahmen des Modells ist es nunmehr von Vorteil, wenn ausschließlich mit über den Drahtquer-
schnitt gemittelten Temperaturen gerechnet wird. Damit können die beiden, jeweils nur entlang
einer Hälfte des Drahtumfangs wirkenden Randbedingungen (3.1.2.2.2-5.1) und (3.1.2.2.2-5.2) zu

$$\begin{aligned}\lambda_D \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_D(R,z)}{\partial r} &= \frac{1}{2} \cdot [\alpha_{DU} \cdot (\mathcal{G}_{UDU} - \mathcal{G}_D(R,z)) + \alpha_{DT} \cdot (\mathcal{G}_{T2} - \mathcal{G}_D(R,z))] \\ &= \frac{\alpha_{DU} + \alpha_{DT}}{2} \cdot \left(\frac{\alpha_{DU} \cdot \mathcal{G}_{UDU} + \alpha_{DT} \cdot \mathcal{G}_{T2}}{\alpha_{DU} + \alpha_{DT}} - \mathcal{G}_D(R,z) \right)\end{aligned}\quad (3.1.2.2.2-5.3)$$

zusammengezogen werden, womit wieder eine herkömmliche, eine lineare Randbedingung 3. Art

$$\lambda_D \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_D(R,z)}{\partial r} = \alpha_D \cdot (\mathcal{G}_{UD} - \mathcal{G}_D(R,z)) \quad (3.1.2.2.2-6)$$

$$\text{mit } \alpha_D = \frac{\alpha_{DU} + \alpha_{DT}}{2}, \quad \mathcal{G}_{UD} = \frac{\alpha_{DU} \cdot \mathcal{G}_{UDU} + \alpha_{DT} \cdot \mathcal{G}_{T2}}{\alpha_{DU} + \alpha_{DT}} \quad (3.1.2.2.2-6.1, 6.2)$$

zur Verfügung steht.

3.1.2.2.3 Näherungsformeln für Temperaturen von Trommel und Draht

Bei der Formulierung der Randbedingungen wurden bereits wärmetechnische und geometrische Vereinfachungen vorgenommen, damit - unter weitgehend richtiger Erfassung der Wärmeübertragungsverhältnisse - möglichst leicht zu handhabende Berechnungsbeziehungen erhalten werden können. Die Ausführungen zeigen andererseits, wie etwa vorzugehen wäre, wenn die wärmetechnischen Betrachtungen zum Problem „Drahtkühlung auf der Ziehtrommel“ unter weit weniger einschränkenden Voraussetzungen erfolgen sollen.

3.1.2.2.3.1 Trommeltemperatur

Wird die Wärmeübertragung im thermisch stationären Fall nicht je Drahtwindung, sondern kumulativ für alle Drahtlagen betrachtet, d.h., in Gl. (3.1.2.2.2-3.2) wird als Drahttemperatur \mathcal{G}_D die kalorische Drahttemperatur des Berührungsbereichs Draht-Trommel eingesetzt, so kann die stationäre Lösung des unendlich langen Hohlzylinders für Randbedingungen 3. Art verwendet werden - vgl. [TAU 71, (6.110)]:

$$\mathcal{G}_T(r) = \frac{\alpha_{T1} \mathcal{G}_{U1} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\alpha_{T2}}{\lambda_T} \cdot \ln \frac{R_2}{r} \right) + \alpha_{T2} \mathcal{G}_{U2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\alpha_{T1}}{\lambda_T} \cdot \ln \frac{r}{R_1} \right)}{\frac{\alpha_{T1}}{R_2} + \frac{\alpha_{T2}}{R_1} + \frac{\alpha_{T1} \alpha_{T2}}{\lambda_T} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.1.2.2.3-1)$$

Für α_{T1} ist der Wärmeübergang zwischen Kühlwasser und Trommelinnenwand - unter Beachtung der Strömungsverhältnisse; vgl. Kapitel 3.1.2.2.2.1b) - und für \mathcal{G}_{U1} die Wassertemperatur, für α_{T2} nach (3.1.2.2.2-3.1) und für $\mathcal{G}_{U2} = \mathcal{G}_{UT2}$ nach (3.1.2.2.2-3.2) einzusetzen; Trommel-(Ersatz-)radien $R_1 \leq r \leq R_2$.

3.1.2.2.3.2 Drahttemperatur

Als Drahttemperaturen werden, aus bereits genanntem Grunde, die über den Drahtquerschnitt gemittelten Temperaturen $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}(z) = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r \cdot \mathcal{G}(z,r) \cdot dr$ verwendet.

a) Drahttemperatur am Trommelablauf

Besonders einfach liegen die Verhältnisse, wenn lediglich die kalorische Wechselwirkung zwischen Draht und Trommel betrachtet wird. Dann kann z.B. mit der Formel für die kalorische Drahttemperatur - vgl. (A2.3.3.2-14)

$$\tilde{\bar{g}} \equiv \tilde{\bar{g}}(z) = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_{z_0}^z \bar{g}(\xi) \cdot d\xi = \bar{g}_\infty - (\bar{g}(z) - \bar{g}_0) \cdot \left(\ln \frac{\bar{g}_\infty - \bar{g}_0}{\bar{g}_\infty - \bar{g}(z)} \right)^{-1}, \quad (3.1.2.2.3-2)$$

gerechnet werden, wobei die Temperatur des Beharrungszustandes durch $\bar{g}_\infty \cong \mathcal{G}_{UD}$ nach (3.1.2.2.2-6.2) gegeben ist. Wenn weiterhin $\bar{g} = \bar{g}_0$ die Drahttemperatur des auf die Trommel auflaufenden Drahtes (Starttemperatur) und $\bar{g} = \bar{g}_E$ die Drahttemperatur des von der Trommel ablaufenden Drahtes (Endtemperatur) bezeichnen, so gilt für die kalorische Drahttemperatur im Bereich der Trommelberührung:

$$\tilde{\bar{g}}_E = \mathcal{G}_{UD} - (\bar{g}_E - \bar{g}_0) \cdot \left(\ln \frac{\mathcal{G}_{UD} - \bar{g}_0}{\mathcal{G}_{UD} - \bar{g}_E} \right)^{-1}. \quad (3.1.2.2.3-2.1)$$

Näherungsweise darf diese Temperatur als Randtemperatur des Drahtes in die Randbedingung der Trommel (3.1.2.2.2-3.2) eingesetzt werden $\mathcal{G}_D \approx \tilde{\bar{g}}_E$. Wenn die Temperatur \bar{g}_E und damit auch $\tilde{\bar{g}}_E$ bekannt ist, kann die Trommeltemperatur nach (3.1.2.2.3-1) unmittelbar angegeben werden. Andernfalls läßt sich die Drahttemperatur am Trommelablauf einfach berechnen - vgl. (A2.3.3.2-3.5):

$$\bar{g}_E \approx \bar{g}_0 + (\mathcal{G}_{UD} - \bar{g}_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{4\alpha_D}{\rho c d v} z_E} \right); \quad (3.1.2.2.3-2.2)$$

dabei bezeichnen z_E die Drahtlänge auf der Ziehtrommel und v die Drahtgeschwindigkeit; α_D und \mathcal{G}_{UD} siehe (3.1.2.2.2-6.1, 6.2).

Wegen der Abhängigkeiten $\mathcal{G}_{UD} = \mathcal{G}_{UD}(\mathcal{G}_{T2})$ und $\mathcal{G}_{T2} = \mathcal{G}_{T2}(\mathcal{G}_D)$ mit $\mathcal{G}_D \approx \tilde{\bar{g}}_E$ kann die Berechnung dann nur simultan-iterativ mit der Trommelrandtemperatur bei $r = R_2$ nach (3.1.2.2.3-1) und mit den Drahttemperaturen nach (3.1.2.2.2-8.1, 8.2) erfolgen.

b) Drahttemperatur am Trommelauflauf

Als Temperatur \bar{g}_0 , mit der der Draht auf die Ziehtrommel aufläuft, lassen sich beispielsweise die Formeln aus Kapitel 3.1.1.5.2 heranziehen. Für eine überschlägige Betrachtung genügt es jedoch bereits, die für den Drahtquerschnitt mittlere Temperatur, mit der der Draht die Ziehöse verläßt, zu berechnen. Sie ist einfachsterweise - vgl. (A2.3.2.8-6.1) für $\alpha \rightarrow 0$, d.h. eine Randbedingung 2. Art - durch

$$\bar{g}_{DZE} \approx \bar{g}_{DZ0} + \left(\tilde{\bar{q}}_V + 4 \frac{\tilde{q}_{RD}}{\tilde{d}} \right) \cdot \frac{L}{\tilde{v} \rho c}; \quad (3.1.2.2.3-3)$$

gegeben; dabei bezeichnen \bar{g}_{DZ0} die Drahttemperatur am Ziehösenanfang, d_0 den Drahtdurchmesser am Ziehöseneinlauf, $\tilde{d} = (d_0 + d)/2$ und $\tilde{v} = v \cdot (\tilde{d}/d)^2$ die mittleren Werte von Drahtdurchmesser und Drahtgeschwindigkeit, $L = \frac{d_0 - d}{2 \tan \tilde{\alpha}}$ die effektive Ziehollänge eines konischen Ziehholprofils mit $2\tilde{\alpha}$ als Ziehholöffnungswinkel, $\tilde{\bar{q}}_V$ die aus Umform- und Schiebungsbearbeitung resultierenden Wärmequellen nach (3.1.1.2-8), \tilde{q}_{RD} die aus Reibungsverlusten entstehenden Wärmequellen (3.1.1-2) mit dem Wärmeverteilungsbeiwert \tilde{m} entsprechend (3.1.1.4-14), $q_{R_{ges}}$ nach (3.1.1-5) bzw. (3.1.1.2-9) oder überschlägig auch als $q_{R_{ges}} \approx \sigma_{Fm} \cdot \mu \cdot \tilde{v}$.

Obwohl die Drahtoberflächentemperatur nach der Ziehöse - weitgehend infolge Wärmeleitung in das Drahtinnere - rasch abnimmt, verringert sich die mittlere Temperatur des Drahtes zwischen Ziehöse und Trommelauflaufstelle bei nicht zu niedrigen Zieh- bzw. Drahtgeschwindigkeiten (bzw. kurzen Abkühlzeiten) praktisch kaum. Deshalb und in Anbetracht ohnehin bereits getroffener Modellvereinfachungen kann diese Abkühlstrecke nicht selten vernachlässigt werden, so daß in Gl. (3.1.2.2.3-2.2) vereinfachend $\bar{\vartheta}_0 \approx \bar{\vartheta}_{DZE}$ einzusetzen ist - andernfalls läßt sich die genaue Temperaturabsenkung unter Beachtung der Wärmeübergangsbedingungen (Kapitel 3.1.2.3) z.B. wieder mit den betreffenden Beziehungen aus Kapitel 3.1.1.5.2 berechnen.

3.1.2.2.4 Thermische Draht-Ziehtrommel-Kopplung

Mit den angegebenen sehr einfachen Näherungsbeziehungen läßt sich die thermische Wechselwirkung zwischen Draht und Trommel, insbesondere hinsichtlich ihres Einflusses auf die Drahtkühlung, bereits recht brauchbar simulieren. Das wird unter Verwendung der Lösungen (3.1.2.2.3-2.1) für die kalorische Drahttemperatur $\tilde{\vartheta}_E$ und (3.1.2.2.3-1) für die (mittlere) Ziehtrommel-Randtemperatur $\vartheta_T(R_2)$ realisiert. Dabei wird die Ankopplung numerisch-iterativ vorgenommen. Zum Iterationsstart sind einige Größen geeignet zu initialisieren. Im ersten Iterationsschritt kann bei der Drahttemperaturberechnung z.B. die Trommelkühlung vernachlässigt werden. Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, sei hier lediglich der Berechnungsablauf einer Iterationsschleife im ν -ten Schritt noch einmal formelmäßig zusammengestellt:

$$\bullet \quad \bar{\vartheta}_E^{(\nu)} := \bar{\vartheta}_0 + (\vartheta_{UD}^{(\nu-1)} - \bar{\vartheta}_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{4\alpha_D^{(\nu-1)}}{\rho c d \nu} z_E} \right) \quad (3.1.2.2.4-1)$$

$$\bullet \quad \tilde{\vartheta}_E^{(\nu)} := \vartheta_{UD}^{(\nu-1)} - \left(\bar{\vartheta}_E^{(\nu)} - \bar{\vartheta}_0 \right) \cdot \left(\ln \frac{\vartheta_{UD}^{(\nu-1)} - \bar{\vartheta}_0}{\vartheta_{UD}^{(\nu-1)} - \bar{\vartheta}_E^{(\nu)}} \right)^{-1} \quad (3.1.2.2.4-2)$$

$$\bullet \quad \alpha_S^{(\nu)} := \varepsilon_{T2D} \cdot \sigma \cdot \frac{\Theta_{T2}^{4(\nu-1)} - \tilde{\Theta}_E^{4(\nu)}}{\vartheta_{T2}^{(\nu-1)} - \tilde{\vartheta}_E^{(\nu)}} \quad (3.1.2.2.4-3)$$

$$\bullet \quad \alpha_{T2D}^{(\nu)} := \frac{1}{d} \cdot \left[(d-b) \cdot (\alpha_K + \alpha_S^{(\nu)}) + b \cdot \alpha_L \right] \quad (3.1.2.2.4-4)$$

$$\bullet \quad \alpha_{T2}^{(\nu)} := \chi_D \cdot \alpha_{T2D}^{(\nu)} + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U} \quad (3.1.2.2.4-5)$$

$$\bullet \quad \alpha_D^{(\nu)} := \frac{\alpha_{DU} + \alpha_{T2D}^{(\nu)}}{2} \quad (3.1.2.2.4-6)$$

$$\bullet \quad \vartheta_{UD}^{(\nu)} := \frac{\alpha_{DU} \cdot \vartheta_{UDU} + \alpha_{T2D}^{(\nu)} \cdot \vartheta_{T2}^{(\nu-1)}}{\alpha_{DU} + \alpha_{T2D}^{(\nu)}} \quad (3.1.2.2.4-7)$$

$$\bullet \quad \vartheta_{UT2}^{(\nu)} := \frac{\chi_D \cdot \alpha_{T2D}^{(\nu)} \cdot \tilde{\vartheta}_E^{(\nu)} + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U} \cdot \vartheta_{UD}^{(\nu)}}{\chi_D \cdot \alpha_{T2D}^{(\nu)} + (1 - \chi_D) \cdot \alpha_{T2U}} \quad (3.1.2.2.4-8)$$

$$\bullet \quad \vartheta_{T2}^{(\nu)} := \frac{\alpha_{T1} \vartheta_{U1} \cdot \frac{1}{R_2} + \alpha_{T2}^{(\nu)} \vartheta_{UT2}^{(\nu)} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\alpha_{T1}}{\lambda_T} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}{\frac{\alpha_{T1}}{R_2} + \frac{\alpha_{T2}^{(\nu)}}{R_1} + \frac{\alpha_{T1} \alpha_{T2}^{(\nu)}}{\lambda_T} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.1.2.2.4-9)$$

Hier endet die Schleife mit dem Test, ob die Differenz der soeben berechneten Trommelrandtemperatur zu der des vorangegangenen Zyklus eine vorgegebene Genauigkeitsschranke $\delta \mathcal{G}_{T_2}$ unterschreitet. Wenn die Bedingung $\left| \mathcal{G}_{T_2}^{(v)} - \mathcal{G}_{T_2}^{(v-1)} \right| \leq \delta \mathcal{G}_{T_2}$ erfüllt ist, kann die Berechnung beendet werden, andernfalls ist eine weitere Schleife zu durchlaufen. Es hat sich gezeigt, daß dieses Verfahren i.allg. numerisch sehr rasch konvergiert. Liegen die Stoffwerte des Drahtes ρ und c als Funktionen der Temperatur vor, so können sie mittels der kalorischen Drahttemperatur bei jedem Iterationsschritt aktualisiert werden. Gleichermäßen läßt sich eine temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit der Ziehtrommel berücksichtigen, wenn je Schritt die mittlere Hohlzylinder-temperatur $\bar{\mathcal{G}}_T = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r \cdot \mathcal{G}_T(r) \cdot dr$ gebildet wird.

Art, Aufwand und Niveau der Modellierung sind etwa vergleichbar mit der in Kapitel 3.1.1.4.1 angegebenen Draht-Ziehöse-Kopplung. Immerhin sei angemerkt, daß mit grundsätzlich gleichen Schritten auch eine anspruchsvollere Modellierung möglich ist. So läßt sich ein qualitativ höherwertiges Modell bereits unter Verwendung z -Abhängigkeit aufweisender Lösungen für Draht und Hohlzylinder der Kapitel A2.3 und A2.4 gewinnen - dann etwa vergleichbar hinsichtlich Aufwand und Qualität dem Modell von Kapitel A2.5. Eine noch weitergehende Betrachtung allerdings wird sowohl für den Draht (Vollzylinder) als auch für die Ziehtrommel (Hohlzylinder) zusätzlich Ortsabhängigkeit in Umfangsrichtung ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) zu berücksichtigen haben, so daß dann der Wärmeleitungsterm in den Differentialgleichungen (A2.3.1-1) und

(A2.4.1 1) entsprechend zu ergänzen, d.h., durch $\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \varphi^2}$ zu ersetzen ist;

vgl. (A2.3-1).

Hierfür sind die nunmehr von einer weiteren Variable abhängenden Lösungen aufzusuchen, ein mathematischer Aufwand, der allerdings nur sinnvoll scheint, wenn sich auch die diversen Wärmeübergangsbedingungen detailliert genug ermitteln lassen - ein gleichfalls hoher, nicht zu unterschätzender Aufwand. Erfreulicherweise wird die Beantwortung ingenieurspezifischer und betriebstechnologischer Fragestellungen bereits mit geringeren Modellanforderungen auskommen, was die vorgelegte Näherungsbetrachtung zeigen soll.

3.1.2.2.5 Anwendung

Zur Überprüfung der Aussagefähigkeit und Brauchbarkeit des vorgelegten Modells wird eine 12-zügige Geradeausziehmaschine zum Ziehen von patentiertem Walzdraht $D75$ betrachtet. Diese Ziehanlage besitzt durchgängig mit Wasser innengekühlte Ziehtrommeln, deren Außen-Nennabmessungen in den ersten vier Blöcken $\varnothing 600\text{mm} \times 600\text{mm}$ und in den Blöcken fünf bis zwölf $\varnothing 500\text{mm} \times 350\text{mm}$ betragen. Gezogen wurde Walzdraht mit $\varnothing 5,5\text{mm}$ über die Abmessungen \varnothing [mm] $4,95 \rightarrow 4,45 \rightarrow 4,03 \rightarrow 3,65 \rightarrow 3,3 \rightarrow 2,93 \rightarrow 2,66 \rightarrow 2,49 \rightarrow 2,25 \rightarrow 1,96 \rightarrow 1,74$ an $1,6\text{ mm}$. Der Kühlwasserstrom je Ziehblock wird mit ca. $1\text{ m}^3/\text{h}$ angegeben. Die Temperaturen des zu- und abfließenden Kühlwassers sind nicht je Block, sondern nur kumulativ bekannt: Die Vorlauftemperatur beträgt ca. $15\text{ }^\circ\text{C}$, die Rücklauftemperatur ca. $21\text{ }^\circ\text{C}$.

Da für den Wärmeübergang *Wasser-Trommelinnenwand* eine geeignete Berechnungsvorschrift bisher offenbar noch fehlt - vgl. Abschnitt 3.1.2.2.2.1 b), wird stattdessen eine Abschätzung vorgenommen. Basierend auf Angaben in [STA 94], können speziell für die wassergekühlte Innenseite einer rotierenden *600-er* Trommel und für REYNOLDSzahlen $Re \geq 500$ Wärmeübergangskoeffizienten (in $[W/(m^2K)]$) von etwa

$$\alpha_{TI} \approx \begin{cases} 0,16 \cdot Re + 428 & \text{für } Re \leq 4600 \\ 0,29 \cdot Re - 170 & \text{für } Re \geq 4600 \end{cases} \quad (3.1.2.2.5-1)$$

verwendet werden.

Zur Berechnung der REYNOLDSzahl $Re = \frac{\omega \cdot d_h}{\nu_w}$ ist allerdings zu beachten, daß sich die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ω im Bereich der Trommelinnenwand nicht allein aus einer axialen Komponente $\omega_{ax} = \dot{V}/A_S$ auf Grund des Volumenstromes \dot{V} durch den Ringspaltquerschnitt $A_S = \pi/4 \cdot (d_a^2 - d_i^2)$, sondern zusätzlich aus einer Komponente in Ringspalt-Umfangsrichtung $\omega_\psi = \frac{D_1}{D_2+d} \cdot v$ infolge Trommelrotation zusammensetzt (Drahtgeschwindigkeit v , hydraul. Durchmesser $d_h = d_a - d_i$, kinemat. Viskosität des Wassers ν_w). Wie bereits in Kapitel 3.1.2.2.2.1b) festgestellt, ist eine hinreichend allgemeingültige Charakteristik dieser Mischströmung für Ziehtrommeln nicht bekannt, so daß hier lediglich von einer halbempirischen, keineswegs gesicherten Beziehung Gebrauch gemacht werden kann. Als effektive Strömungsgeschwindigkeit ω werde - bei nicht zu kleinen Trommeldrehzahlen bzw. Ziehgeschwindigkeiten - das geometrische Mittel beider Komponenten herangezogen:

$$\omega \approx \sqrt{\omega_{ax} \cdot \omega_\psi} \quad (3.1.2.2.5-2)$$

Für den Wärmeübergang zwischen Draht und Trommel im Bereich des Berührungskontakts wird ein Wert von $\alpha_L = 5 \cdot 10^5 [W/(m^2K)]$ verwendet; vgl. Kapitel 3.1.2.2.1.

Stellvertretend für die gesamte Zugfolge werden lediglich die Temperaturen für die Verhältnisse an den Trommeln 2, 11 und 12 berechnet⁴ (Tabelle 1). Erforderliche Rechenvorgaben sind der betreffenden Tabelle im Anhang B zu entnehmen.

⁴ Die mit wachsender Ziehgeschwindigkeit leicht ansteigende Drahttemperatur an der Trommelaufaufstelle wurde im Interesse direkter Vergleichbarkeit der Abkühlergebnisse vernachlässigt.

	Trommel 2		Trommel 11		Trommel 12	
v_{Draht} [m/s]	0,9	1,43	6	9,3	7,1	11,1
Draht-Ø [mm]	4,45	4,45	1,74	1,74	1,6	1,6
Windungszahl w	102	102	50	50	5/15	5/15
\tilde{p}_L [N/m]	784	784	358	358	617	617
\tilde{b} [μm]	8,8	8,8	3,7	3,7	4,7	4,7
$\vartheta_{\text{D, Auflauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	158	158	229	229	186	186
$\vartheta_{\text{D, Ablauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	24	27	30	39	38	58
α_{T1} [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$]	805	884	1484	1845	1615	2010
ϑ_{T1} [$^{\circ}\text{C}$]	23	25	25	27	23	24
ϑ_{T2} [$^{\circ}\text{C}$]	24	27	29	31	25	27

Es ist zu erkennen, daß die Temperatur $\vartheta_{\text{D, Ablauf}}$, mit der der Draht die Ziehtrommel jeweils wieder verläßt, bei höheren Drahtgeschwindigkeiten nicht ohne weiteres auf Raumtemperatur heruntergekühlt wird. Erwartungsgemäß werden die Kühlverhältnisse - bei sonst gleichbleibenden Bedingungen - um so ungünstiger, je geringer die Windungszahl und je größer die Drahtgeschwindigkeit sind.

Eine Verdoppelung des Kühlmitteldurchsatzes von 1 auf 2 m^3/h bringt für Trommel 12 gemäß Rechnung nur noch eine geringe Absenkung der Drahttemperatur von etwa zwei Grad. Das liegt daran, daß die resultierende Strömungsgeschwindigkeit ω des Kühlwassers mit wachsenden Trommeldrehzahlen - entsprechend Beziehung (3.1.2.2.5-2) - zunehmend durch die Relativgeschwindigkeit zwischen rotierender Trommelwand und Kühlwasser und weniger durch die ohnehin nur relativ geringe axiale Durchflußkomponente bestimmt wird. Allerdings ist zu beachten, daß die Beziehungen (3.1.2.2.5-1), (3.1.2.2.5-2) für diesen Anwendungsfall, da empirisch nicht hinreichend abgesichert, nur heuristischen Wert beanspruchen, wenigstens solange entsprechende Untersuchungsergebnisse für eine Präzisierung oder Korrektur dieser Abhängigkeiten noch fehlen.

Führt man - ungeachtet dieser Unsicherheit - die Rechnungen von Tabelle 1 anstelle mit Ziehgeschwindigkeiten von 7 und 11 m/s mit 14 und 18 m/s aus, so ergeben sich die folgenden Verhältnisse (Tabelle 2).

	Trommel 2		Trommel 11		Trommel 12	
v_{Draht} [m/s]	1,8	2,3	11,8	15,2	14	18
$\vartheta_{\text{D, Auflauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	158	158	229	229	186	186
$\vartheta_{\text{D, Ablauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	29	31	48	61	71	86
α_{T1} [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$]	927	975	2070	2333	2245	2525
ϑ_{T1} [$^{\circ}\text{C}$]	27	28	28	28	24	24
ϑ_{T2} [$^{\circ}\text{C}$]	29	31	33	35	27	28

Erwartungsgemäß sind die Temperaturen $\vartheta_{\text{D, Ablauf}}$ gegenüber den Angaben in Tabelle 1 entsprechend angestiegen trotz gleichfalls intensiver gewordenen Wärmeübergangs zwischen Kühlwasser und Trommelinnenwand.

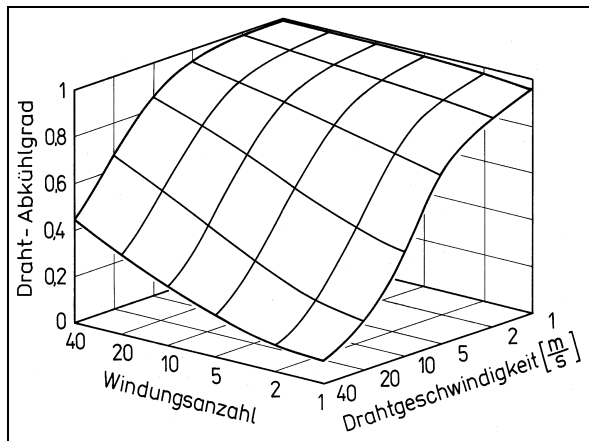
Wird lediglich die Anzahl der Trommelumschlingungen von Trommeln 11 und 12 verdoppelt von 50 bzw. 20 auf 100 bzw. 40, so ergeben sich die folgenden Verhältnisse (Tabelle 3).

Tabelle 3:

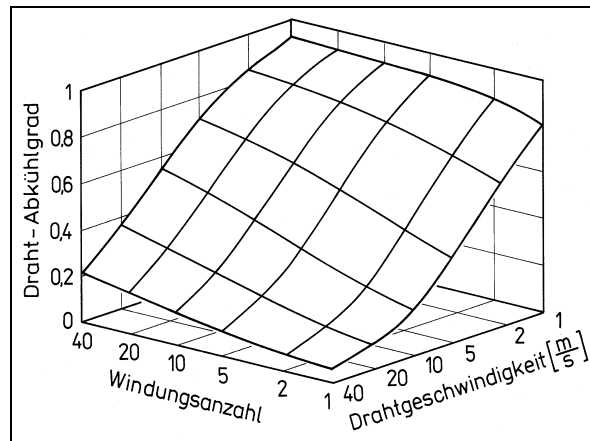
	Trommel 2		Trommel 11		Trommel 12	
v_{Draht} [m/s]	1,8	2,3	11,8	15,2	14	18
Windungszahl w	102	102	100	100	10/30	10/30
\tilde{p}_L [N/m]	784	784	179	179	309	309
\tilde{b} [μm]	8,8	8,8	2,6	2,6	3,3	3,3
$\vartheta_{\text{D,Anlauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	158	158	229	229	186	186
$\vartheta_{\text{D,Ablauf}}$ [$^{\circ}\text{C}$]	29	31	38	47	54	67
α_{T1} [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$]	927	975	2070	2333	2245	2525
ϑ_{T1} [$^{\circ}\text{C}$]	27	28	28	29	24	25
ϑ_{T2} [$^{\circ}\text{C}$]	29	31	34	36	29	29

Obwohl mit wachsender Anzahl an Trommelumschlingungen die mittlere Linienpressung und damit auch die effektive Kontaktbreite zwischen Einzeldraht und Trommel abnimmt, überwiegt dennoch insgesamt der Zuwachs an Berührungs- bzw. Kontaktfläche auf Grund der größeren auf der Trommel gespeicherten Drahtlänge. Damit wird die Temperatur des ablaufenden Drahtes letztlich abgesenkt, wie der Vergleich mit Tabelle 2 unmittelbar zeigt.

Die berechneten Abkühlverhältnisse des Drahtes auf der Ziehtrommel 12 in Abhängigkeit von Drahtgeschwindigkeit und Anzahl der Drahtwindungen zeigen für zwei Drahtdurchmesser (1,6 mm und 4,8 mm) die beiden folgenden Bilder.



Drahtdurchmesser 1,6 mm



Drahtdurchmesser 4,8 mm

Bilder 3.1.2-5, 3.1.2-6: Abkühlgrad bei Ziehtrommelkühlung

Dabei ist zu berücksichtigen, daß infolge der Voraussetzung nicht zu kleiner Windungszahlen (Kapitel 3.1.2.2.1a) der Abkühlgrad für weniger zehnte Windungen zunehmend unsicherer werden dürfte. Auch wenn die Darstellungen infolge teils nur ungesicherter Eingangsparameter sowie fehlender Meßergebnisse einer Präzisierung bedürfen, vermitteln sie dennoch bereits sehr eindrucksvoll die Wirksamkeit der Ziehtrommelkühlung, insbesondere im Vergleich zur in Kapitel 3.1.2.1 mit Bild 3.1.2-3 zitierten Kühlrohrkühlung.

Weitere und detailliertere numerische Untersuchungen, z.B. zum Einfluß der Trommelgröße (Durchmesser, Länge, Wandstärke), zur Ringspaltbemessung zwischen rotierender Außen- und feststehender Innentrommel, zu kinematischen sowie Wärmeübertragungsverhältnissen sind mit dem Modell ebenfalls möglich.

Zur Modellierung der Drahtkühlung auf Ziehtrommeln kann festgestellt werden:

- Mit dem angegebenen Rechenmodell zum Einfluß verschiedener Parameter auf die Drahtkühlung durch eine oder mehrere Ziehtrommeln läßt sich das thermische Wechselspiel zwischen Draht und Ziehtrommel gezielt untersuchen.
- Mit diesem Modell, das von der komplizierten Realgeometrie einer Ziehtrommel weitgehend abstrahiert, werden dennoch die wichtigsten Abmessungs-, Geschwindigkeits- und Werkstoffeinflüsse offenbar zufriedenstellend widergespiegelt und quantitativ zuverlässige Daten gewonnen.
- Empirisch nur ungenügend abgesichert sind die Wärmeübergangsverhältnisse zwischen Kühlwasser und Trommelinnenwandung sowie Trommelaußenwand und Drahtlagen. Durch eine entsprechende Präzisierung läßt sich die Genauigkeit der Berechnung noch steigern.
- Zur Überprüfung und angemessenen Weiterentwicklung des Modells sowie zur Erlangung einer größeren Aussagesicherheit, insbesondere hinsichtlich quantitativer Ergebnisse, sind Experimente und gezielte Temperaturmessungen erforderlich.

3.1.2.3 Luft- und Ziehmitteleinfluß

Die Abkühlung des Drahtes während des Trockenziehens erfolgt nicht nur durch aktive Kühlmaßnahmen der Kühlrohr- oder Trommelkühlung, sondern sie findet bereits auf dem Weg vom Ziehwerkzeug zur Ziehtrommel durch konvektive Wärmeübertragung an die Umgebungsluft statt. Die Temperaturabsenkung ist leicht anzugeben, wenn sich die Wärmeübergangsverhältnisse abschätzen lassen. Ganz allgemein ist mit Wärmeübergangskoeffizienten zu rechnen, die gegenüber Kühlrohrkühlung um mindestens zwei bis drei Größenordnungen kleiner sind. Damit bleibt dieser Kühlanteil insgesamt entsprechend gering, ohne jedoch - zumindest bei dünneren Drähten oder niedrigen Drahtgeschwindigkeiten - gänzlich vernachlässigt werden zu können. Hinsichtlich des Wärmeüberganges an umströmten Zylindern kann auf Standardwerke [SCH 83], [VDI 94], insbesondere auf die Arbeiten [HIL 33], [REH 68], [GNI 75] und [SUC 76] zurückgegriffen werden. Dabei werden neben Drahtdurchmesser und Strömungsgeschwindigkeit in den beiden letztgenannten Arbeiten auch Anströmwinkel, Turbulenzgrad und Lufttemperatur berücksichtigt (siehe auch die betreffende Anmerkung zu Kap. 3.2.2 im Anhang B). Inwieweit der Restschmierfilm, dessen rheologische Eigenschaften ausführlich in [GOT 84] untersucht worden sind, auf den Wärmeübergang Einfluß nimmt, ist zwar explizit nicht untersucht worden, jedoch läßt sich der kumulative Wärmeübergang *Draht-Schmierfilm-Luft* α_{Σ} aus dem Wärmedurchgangswiderstand $1/\alpha_{\Sigma} = 1/\alpha_{SM} + 1/\alpha$ ermitteln. Infolge der Abschätzung (3.1.1.1-1) für den Schmierfilmanteil α_{SM} , der den der Umgebungsluft α i.allg. um drei bis sechs Größenordnungen übersteigt, gilt letztlich wegen $\alpha_{SM} \gg \alpha$ die Näherung $\alpha_{\Sigma} \approx \alpha$. D.h., ein dünner Restschmierfilm wird den Wärmeübergang kaum nennenswert vermindern, wie auch das numerische Beispiel für eine Schmierfilmdicke von $1 \mu m$ verdeutlicht.

d [mm]	v [m/s]	α [W/(m ² K)]	α_{Σ} [W/(m ² K)]
0,1	0	150	149,775
1	0	33	32,989
10	0	21	20,996
0,1	10	463	460,866
1	10	139	138,807
10	10	50	49,975

3.1.3 Drahtdurchmesser, Schmierfilmdicke und Wärmeübergang

Für die elastischen Formänderungen von Draht und Ziehöse werden von [LIP 67, Kap.6.2.8] einfache Näherungsbeziehungen angegeben. Eine Abschätzung auch der thermischen Einflüsse von Draht und Ziehwerkzeug auf den Drahtdurchmesser d kann mit den Formeln (A2.6.2-1) für den Vollzylinder und (A2.6.1-4) für den einfachen, besser (A2.6.3-1) für den doppelwandigen Hohlzylinder, vorgenommen werden. Dabei ist festzuhalten, daß der Drahtdurchmesser im wesentlichen durch den Ziehholdurchmesser, d.h., insbesondere durch den effektiven Durchmesser der Führungs- bzw. Kalibrierzone bestimmt wird, sein endgültiges Maß erreicht er jedoch erst nach Abkühlung und mechanischer Entlastung; Schmiermittel- und ggf. Schmiermittel-trägerschichten sind gesondert zu berücksichtigen.

Die Durchmesseränderung des Ziehholzes infolge Änderung der Spannungsverhältnisse am Hohlzylinderinnen- und -außenmantel $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ sowie infolge Temperaturänderung $\Delta\vartheta(r)$ ergibt sich, wenn zunächst Gleichung (A2.6.1-4) des einfachen Hohlzylinders für $r = R_1$ verwendet wird, zu

$$u_1 = u(R_1) = (1 + \nu) \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left[2(1 - \nu) R_2^2 \frac{\Delta\sigma_2}{E} - \left((1 - 2\nu) R_1^2 + R_2^2 \right) \frac{\Delta\sigma_1}{E} + 2\beta \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) d\rho \right]. \quad (3.1.3-1)$$

Gestützt auf die in Kapitel A2.6.2 angeführten Ergebnisse aus [UNG 84] wird auch im vorliegenden Zusammenhang davon ausgegangen, daß die Berücksichtigung einer zusätzlichen Abhängigkeit der Randspannungen und Temperaturverhältnisse in axialer Richtung, d.h. $\Delta\sigma_i \rightarrow \Delta\sigma_i(z)$ und $\Delta\vartheta(r) \rightarrow \Delta\vartheta(z, r)$, in gleicher Weise wie dort näherungsweise möglich ist:

$$u_1(z) \approx (1 + \nu) \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left[2(1 - \nu) R_2^2 \frac{\Delta\sigma_2(z)}{E} - \left((1 - 2\nu) R_1^2 + R_2^2 \right) \frac{\Delta\sigma_1(z)}{E} + 2\beta \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(z, \rho) \cdot d\rho \right]. \quad (3.1.3-2)$$

Übereinstimmend mit der Erfahrung, haben Zugspannungen am Außenrand $\Delta\sigma_2(z) > 0$ oder Druckspannungen am Innenrand $\Delta\sigma_1(z) < 0$ stets eine Vergrößerung des Innendurchmessers zur Folge ($u_1 > 0$). Ebenso trivial ist auch die Feststellung, daß Temperaturerhöhungen $\Delta\vartheta(z, r) > 0$ eine Vergrößerung, Temperaturerniedrigungen $\Delta\vartheta(z, r) < 0$ eine Verringerung des Innendurchmessers bewirken. Über die Verschiebungsrichtung bei Temperaturänderungen, die in einem (z, r) -Teilbereich positiv, in einem anderen dagegen negativ ausfallen, kann erst die konkrete Rechnung nähere Informationen liefern. Bemerkenswert ist, daß am Innenrand der Temperatureinfluß mit wachsendem Hohlzylinder-Außendurchmesser langsam verschwindet, sofern außerhalb einer Schranke $R_g \in (R_1, R_2)$ keine Temperaturänderung stattfindet, d.h., solange im Intervall $r \in (R_g, R_2)$ unverändert $\Delta\vartheta = 0$ vorliegt. Anders ausgedrückt: In einer einfachen, unendlich ausgedehnten „Scheibe“ bleibt eine lokal begrenzte, auf den konzentrischen Innenbereich $r \in (R_1, R_g)$ eingeschränkte Temperaturänderung $\Delta\vartheta \neq 0$ wegen $u_1 = 0$ letztlich ohne Einfluß auf den Lochdurchmesser $d = 2R_1 = konst.$

Beim armierten Ring dagegen ist der lokale Einfluß i.allg. auch in diesem Grenzfall vorhanden.

Wegen vorausgesetztem $\Delta\vartheta = 0$ für $r > R_g$ folgt $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R_2^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right) = 0$, so daß

$$\begin{aligned}
k_I^{(\infty)} = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} k_I = & \frac{R_I^2}{\left(1 - \left(\frac{R_I}{R}\right)^2\right) \frac{E'_I}{1 + \nu'_I} + \left(\frac{1 - \nu'_I}{1 + \nu'_I} + \left(\frac{R_I}{R}\right)^2\right) \frac{E'_{II}}{1 + \nu'_{II}}} \cdot \\
& \cdot \left\{ (-I) \cdot \left[1 + \frac{1 - \nu'_I}{1 + \nu'_{II}} \cdot \frac{E'_{II}}{E'_I} \right] \cdot \sigma_1 + \frac{2}{1 + \nu'_{II}} \cdot \sigma_2 - \dots \right. \\
& \left. \dots - \frac{E'_{II}}{1 + \nu'_{II}} \cdot \frac{u_R}{R} + \left[E'_I - \frac{1 + \nu'_I}{1 + \nu'_{II}} \cdot E'_{II} \right] \frac{\beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \vartheta(\rho) \cdot d\rho \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.3-3.1}$$

resultiert und die i.allg. von Null verschiedene Radialverschiebung am Innenrand aus (A2.6.3-1) zu

$$\begin{aligned}
u_I^{(\infty)} = & (1 - \nu'_I) \frac{R_I}{E'_I} \cdot \sigma_1 + \frac{2}{1 + \nu'_I} \cdot \frac{k_I^{(\infty)}}{R_I} \\
= & \frac{2R_I}{\left(1 - \left(\frac{R_I}{R}\right)^2\right) \frac{E'_I}{1 + \nu'_I} + \left(\frac{1 - \nu'_I}{1 + \nu'_I} + \left(\frac{R_I}{R}\right)^2\right) \frac{E'_{II}}{1 + \nu'_{II}}} \cdot \\
& \cdot \left\{ \left(-\frac{I}{2}\right) \cdot \left[1 + \frac{1 - \nu'_I}{1 + \nu'_I} \left(\frac{R_I}{R}\right)^2 + \frac{1 - \nu'_I}{1 + \nu'_{II}} \left(1 - \left(\frac{R_I}{R}\right)^2\right) \cdot \frac{E'_{II}}{E'_I} \right] \cdot \sigma_1 + \dots \right. \\
& \left. \dots + \frac{2}{(1 + \nu'_I)(1 + \nu'_{II})} \cdot \sigma_2 - \frac{E'_{II}}{(1 + \nu'_I)(1 + \nu'_{II})} \cdot \frac{u_R}{R} + \dots \right. \\
& \left. \dots + \left[\frac{E'_I}{1 + \nu'_I} - \frac{E'_{II}}{1 + \nu'_{II}} \right] \frac{\beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \vartheta(\rho) \cdot d\rho \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.3-3.2}$$

erhalten wird. Der letzte Summand zeigt noch einmal deutlich, daß ein thermisch bedingtes „Zugehen“ des Ziehholts infolge Erwärmung nur dann eintritt, wenn das Armierungsmaterial steifer bzw. härter als das Kernmaterial ist. Für das Ziehwerkzeug trifft das jedoch nicht zu. Weiterhin wird eine bereits bei der einfachen, unendlich ausgedehnten Scheibe bemerkte Tatsache bestätigt: die thermische Unempfindlichkeit am Innenrand. Der thermische Einfluß auf die Radialverschiebung am Innenrand reduziert sich auch im doppelschichtigen, unendlich ausgedehnten Hohlzylinder um so mehr, je weniger sich Kern- und Armierungsmaterial hinsichtlich Elastizitätsmodul und Querdehnzahl voneinander unterscheiden, um im Grenzfall gleicher Materialien schließlich vollständig zu verschwinden.

Die Betrachtungen zur Thermoelastizität eines armierten Rings werden herangezogen, um auf experimentell-rechnerischem Wege eine Präzisierung der dynamischen Schmierfilmdicke aus geschwindigkeitsabhängig gemessenen Drahtdurchmessern vornehmen zu können. Die Schmierfilmdicke wiederum ist erforderlich zur Abschätzung des Wärmeübergangs in der Wirkfuge zwischen Draht und Ziehdüse.

3.1.3.1 Experimentell-rechnerisches Verfahren

Die größten Temperaturänderungen erfährt die Ziehdüse jeweils am Beginn und Ende eines Ziehvorgangs. Zum Ziehbeginn wird die Temperatur im Verlaufe einer gewissen Zeit von Raumtemperatur auf ein stationäres Temperaturniveau angehoben. Dessen Höhe hängt von einer ganzen Reihe von Einflußfaktoren ab, so z.B. von Form, Größe und Wärmeleiteigenschaften des Ziehwerkzeugs, von den Kühlbedingungen, von der Ziehgeschwindigkeit, vom Drahtwerkstoff, Drahtdurchmesser, Umformgrad u.a.m. Umgekehrt kühlt das Ziehwerkzeug nach Beendigung des Ziehvorganges wieder auf Raumtemperatur ab. Die Temperaturschwankungen während des Ziehens, die z.B. durch stochastische Einflüsse der Schmier- und Kühlbedingungen hervorgerufen werden, sind von wesentlich geringerer Größenordnung und in aller Regel ohne Bedeutung für den Drahtdurchmesser.

Bei Ziehversuchen ist wiederholt beobachtet worden, daß in einem gewissen Ziehgeschwindigkeitsbereich mit ansteigender Ziehgeschwindigkeit eine zwar nur geringfügige, jedoch systematische Verringerung des Drahtdurchmessers gegenüber dem Ausgangszustand eintritt. Ein Beispiel hierzu zeigt das folgende Bild.

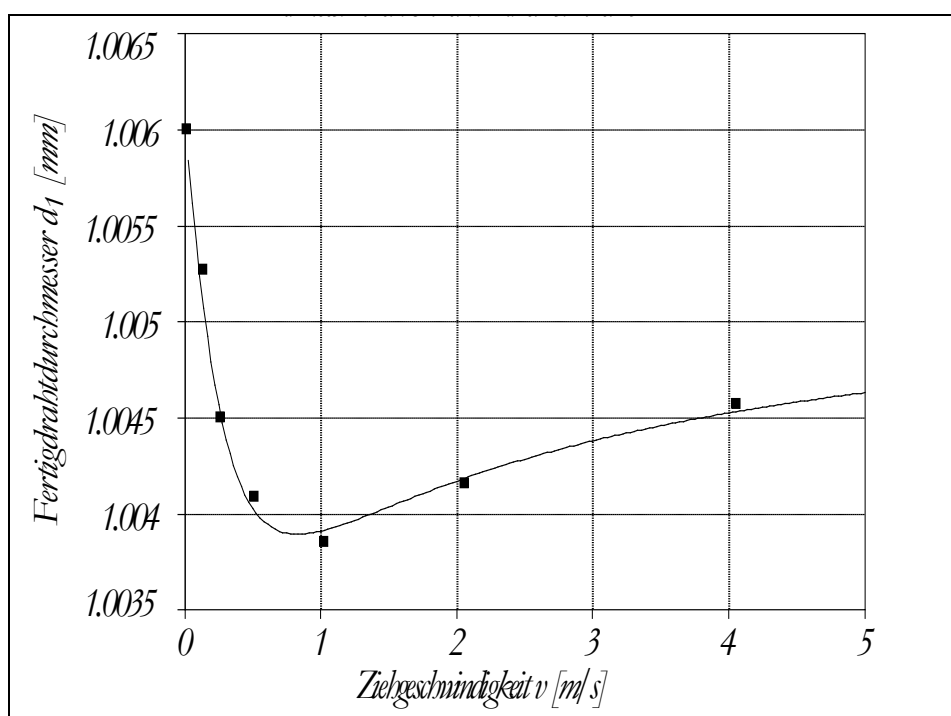


Bild 3.1.3-1: Fertigdrahtdurchmesseränderung (Plan 145, Versuch 1)

Der Drahtdurchmesser ist unmittelbar während des Ziehprozesses ermittelt worden, wobei allerdings darauf geachtet wurde, daß bis jeweils zur Messung der thermische Beharrungszustand eingetreten war. Für seine eigentümliche, jedoch systematisch wiederkehrende Ziehgeschwindigkeitsabhängigkeit, die sich - bezogen auf den Durchmesser - im Promille- oder auch nur Zehntel-Promille-Bereich bewegt, kann ein thermisches „Zugehen“ der Ziehdüse (bis etwa 1 m/s), wie gezeigt, ausgeschlossen werden. Es liegt deshalb nahe, diesen Effekt auf die Schmierungsverhältnisse zurückzuführen.

Bereits *TATTERSALL* [TAT 61] hat, aufbauend auf Resultaten zur hydrodynamischen Schmierung beim Drahtziehen von *CHRISTOPHERSON* und *NAYLOR* [CHR 55], Schmierfilmdicken auf theoretisch-rechnerischem, aber auch auf experimentellem Wege ermittelt. Diese Ergebnisse zeigen tatsächlich ein qualitativ recht ähnliches Erscheinungsbild [PAW 65, *Bild 5*] und bestätigen damit einen entsprechenden direkten Zusammenhang zwischen Schmierfilmdicke und Drahtdurchmesser.

Es kann von der Vorstellung ausgegangen werden, daß mit zunehmender Ziehgeschwindigkeit der Schmiermitteldruck im Ziehholeinlauftrichter zunächst einmal ansteigt. Als Folge davon wächst der spezifische Schmiermitteldurchsatz durch das Ziehhol, jedenfalls solange die Viskositäts-Charakteristik des Ziehschmiermittels das zuläßt. Denn mit wachsender Temperatur sinkt die Viskosität des Schmiermittels⁵ im Wirkfugenbereich von Draht und Ziehhol, weshalb es unterhalb eines kritischen Viskositätswertes dem Widerstand des Umformgutes trotz weiter steigender Ziehgeschwindigkeit und Pumpwirkung im Ziehholeinlauftrichter immer weniger standhalten kann. Oberhalb einer bestimmten Ziehgeschwindigkeit (und Temperatur) wird die Schmierfilmdicke also wieder abnehmen. Folgerichtig spiegelt sich diese Abhängigkeit im Drahtdurchmesser entsprechend wider.

Es bleibt nachzuweisen, inwieweit sich bei Variation der Ziehgeschwindigkeit die Schmierfilmdicke, die einer direkten Messung während des Ziehens nicht zugänglich ist, tatsächlich ändert. Zu diesem Zweck wird der tatsächliche Drahtdurchmesser, d.h., der Drahtdurchmesser ohne Schmierfilm, meßtechnisch bestimmt und dem aktuellen Ziehholdurchmesser der Führungs- bzw. Kalibrierzone gegengerechnet.

Die Drahtdurchmesseränderung kann z.B. aus der Änderung der Drahtverlängerung, also aus der Geschwindigkeitsdifferenz des Drahtes von vor und nach dem Ziehwerkzeug berechnet werden - ggf. unter thermischer Längen-Korrektur des die Ziehdüse verlassenden Drahtes⁶. Die thermisch-elastische Maßveränderung des armierten Ziehrings, insbesondere des Ziehdüseninnendurchmessers, als Reaktion auf die Variation der Ziehgeschwindigkeit und damit auf die Temperaturänderung $\Delta\mathcal{G}(r;v)$, läßt sich z.B. mit der Beziehung für die Radialverschiebung $u_I = u_I(v) = c_I \cdot R_I + k_I/R_I$ aus (A2.6.3-1) für $r = R_I$ abschätzen. Damit erhält man die Schmierfilmdicke zu

$$s(v) = R_I + \Delta u_I(v) - \frac{1}{2}d(v); \quad (3.1.3-4.1)$$

Δu_I ist jener Verschiebungsanteil, der sich als Differenz aus dynamischer ($v > 0$) und statischer ($v \rightarrow 0$) Radialverschiebung zu $\Delta u_I(v) := u_I(v) - u_I(v \rightarrow 0)$ mit $\sigma_I(v \rightarrow 0) := p_m < 0$ ergibt, wenn $p_m < 0$ den aus der Umformung resultierenden mittleren Ziehhol-Innendruck bezeichnet.

Unter Beachtung, daß die Schmierfilmdicke auf einen Wert Null (oder doch sehr nahe Null) zurückgeht, wenn die Ziehgeschwindigkeit bis zum Stillstand vermindert wird, kann für den Drahtdurchmesser auch $d(v) = 2 \cdot R_I + \Delta d(v)$ geschrieben werden. Damit ist die Schmierfilmdicke allein vom berechenbaren Radialverschiebungsanteil $\Delta u_I(v)$ und von der experimentell zugänglichen Drahtdurchmesseränderung $\Delta d(v)$ abhängig:

$$\begin{aligned} s(v) &= \Delta u_I(v) - \frac{1}{2}\Delta d(v) \\ &= (1 + c_I(v) - c_I(0)) \cdot R_I + \frac{k_I(v) - k_I(0)}{R_I} - \frac{1}{2}d(v), \end{aligned} \quad (3.1.3-4.2)$$

⁵ Auf die Druck-Temperatur-Abhängigkeit der Viskosität trifft näherungsweise der Ansatz $\eta \approx \eta^* \cdot \exp\left(\frac{a+b \cdot p}{1+c \cdot \mathcal{G}}\right)$ zu, wobei alle Koeffizienten positiv sind. TATTERSALL führt stattdessen eine „scheinbare“ Viskosität ein, indem er die v -Abhängigkeit von Druck und Temperatur durch einen Ansatz $\eta = \eta_0 \cdot \exp(-B \cdot v)$ approximiert.

⁶ Die querkontraktionsbedingte Drahtdurchmesseränderung $\Delta d = d(\sigma_z = 0) - d(\sigma_z)$ mit dem Drahtdurchmesser $d = [1 - \nu_D \cdot (\sigma_z/E_D)] \cdot d(\sigma_z = 0)$ ist nur indirekt infolge der Drahtlängsspannung $\sigma_z = \sigma_z(\mu, s)$ mit Reibwert $\mu = \mu(v)$ im Ziehhol und mit $s = s(v)$ leicht, i.allg. vernachlässigbar geschwindigkeitsabhängig.

wobei für R_I der nominelle Ziehholradius zu setzen ist; wegen $\Delta u_I(v \rightarrow 0) \rightarrow 0$ und $\Delta d(v \rightarrow 0) \rightarrow 0$ ergibt sich voraussetzungsgemäß wieder $s(v \rightarrow 0) \rightarrow 0$.

Eine Vorstellung von der Größenordnung der thermisch bedingten Maßänderung wird vermittelt, wenn z.B. für dieselben Parameter, die dem numerischen Beispiel des Kapitels A2.6.3 zugrunde gelegt wurden, die Radialverschiebung am Innenradius in Abhängigkeit von der Innenrandtemperatur $\vartheta_I = \vartheta_I(v)$ betrachtet wird. Bei einem Temperaturanstieg für ϑ_I von 0 auf 250 °C wächst die Radialverschiebung Δu_I um etwa $3,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$, d.h., der Ziehholdurchmesser vergrößert sich um $0,7 \text{ }\mu\text{m}$. Das zeigt, daß die thermisch bedingte Änderung des Ziehholdurchmessers in der Größenordnung des Schmierfilms liegen kann und damit für eine Schmierfilmdickenbestimmung entsprechend obiger Überlegung durchaus berücksichtigt werden muß. Die Schmierfilmdicke dient der Abschätzung des Wärmeübergangs im Wirkfugenabschnitt von Draht und Ziehdüse (vgl. Kapitel 3.1.1.1) sowie - in geringerem Maße - des Wärmeübergangs zwischen Draht und Luft (vgl. Kapitel 3.1.2.3).

3.1.3.2 Beispiel

Den numerischen Berechnungen wird das mit Bild 3.1.3-1 eingeführte Beispiel zugrundegelegt. Die Temperatur an der Ziehdüsenoberfläche ist gemessen worden (vgl. Kapitel 3.1.1.4.2) und in Bild 3.1.3-2 dargestellt.

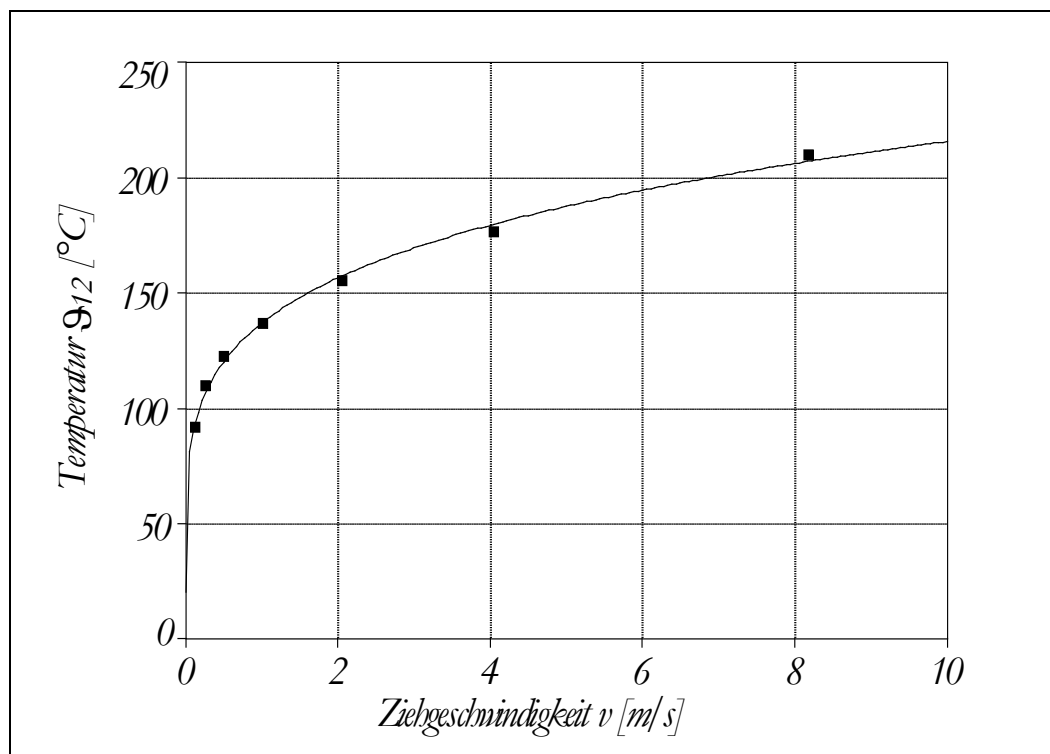


Bild 3.1.3-2: Ziehdüsentemperatur am Ziehholinnenrand

Diese Temperatur wird als Ziehring-Innenwandtemperatur ϑ_I verwendet; die Erwärmung an der Ziehringaußenwand war vernachlässigbar gering, so daß dort mit $\vartheta_2 = 20^\circ\text{C}$ gerechnet wird. Als Stoffwerte für das Ziehwerkzeug werden die bereits am Schluß von Kapitel A2.6.3 benutzten Daten herangezogen. Die radialen Abmaße des einfach armierten Versuchsziehwerkzeugs sind durch die Halbmesser $R_I = d_I(v=0)/2 = 0,503 \text{ mm}$, $R = 11 \text{ mm}$ und $R_2 = 40 \text{ mm}$ gegeben, die aus dem Ziehversuch berechnete mittlere Ziehholnormalspannung beträgt $\sigma_I = -860 \text{ N/mm}^2$.

Die Berechnung wird mit Gleichung (3.1.3-4.2) vorgenommen, wobei für die Schmierfilmdicke die in Bild 3.1.3-3 gezeigte Abhängigkeit erhalten wird (durchgezogene Kurve). Der ziehgeschwindigkeitsabhängige Verlauf der Schmierfilmdicke, wie ihn bereits TATTERSALL gefunden hatte [TAT 61], wird auch mit dieser Untersuchungsmethode prinzipiell bestätigt.

Der Korrekturanteil infolge thermisch bedingter Durchmesseränderung des Ziehrings beträgt im vorliegenden Beispiel - geschwindigkeitsabhängig - etwa zwischen zwanzig und vierzig Prozent der gesamten Schmierfilmdicke. Ohne Berücksichtigung dieses Effekts wären um diesen Betrag zu kleine Schmierfilmdicken erhalten worden.

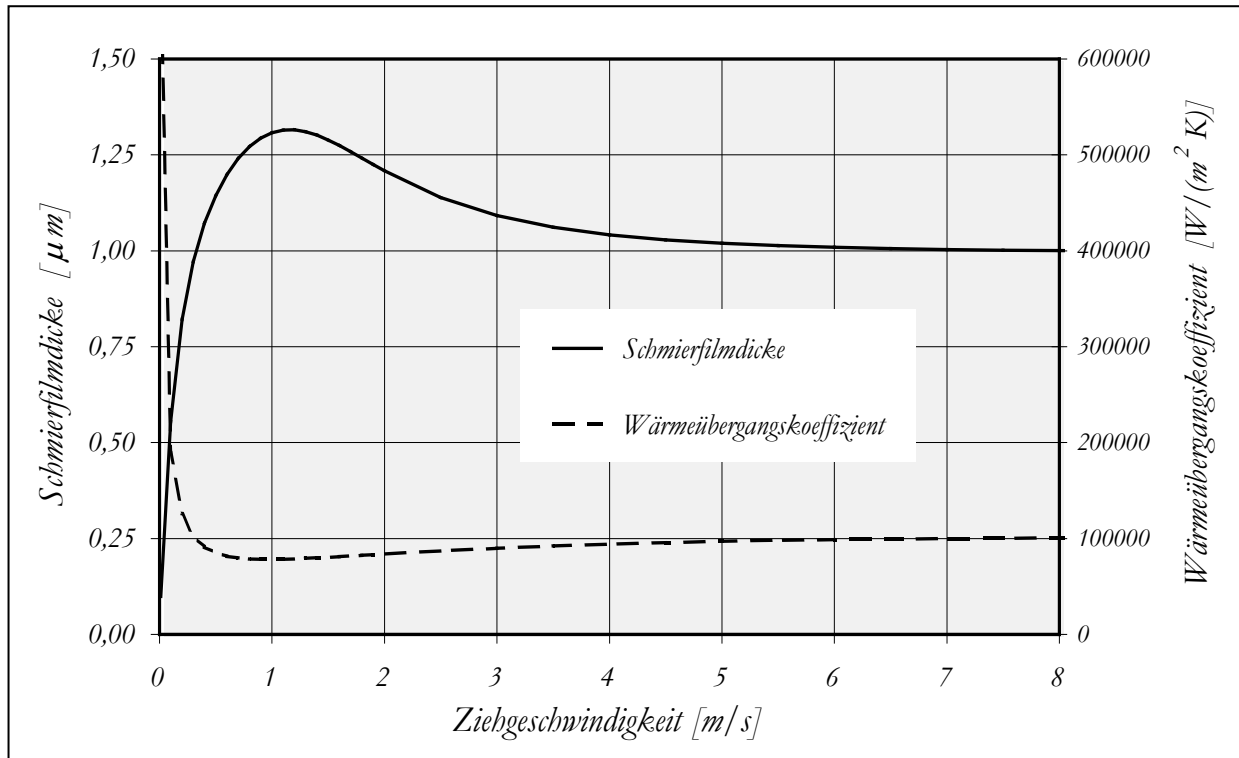


Bild 3.1.3-3: Schmierfilmdicke und Wärmeübergangskoeffizient

Unter Verwendung der Relation (3.1.1.1-1) läßt sich schließlich eine untere Schranke für den Wärmeübergang zwischen Draht und Ziehdüse im Wirkfugenbereich abschätzen, die durch die gestrichelte Kurve in Bild 3.1.3-3 repräsentiert wird.

3.2 Wärmebehandlung

Das Wärmebehandeln von gezogenem Draht dient bekanntlich entweder der Verbesserung seiner plastischen Eigenschaften (Erhöhung der Duktilität), um weitere Umformschritte zu ermöglichen, oder aber der definierten Einstellung mechanischer oder elektrischer Kennwerte, wie vom Abnehmer gefordert. Dieses Ziel läßt sich unter unterschiedlichen thermischen Bedingungen verwirklichen. Infolge der bedingten Austauschbarkeit von Temperatur und Zeit bei der Einstellung bestimmter Materialeigenschaften besteht die Möglichkeit, eine Wärmebehandlung entweder bei niedrigeren Temperaturen und längeren Zeiten oder umgekehrt bei höheren Temperaturen und kürzeren Zeiten durchzuführen. Welche technischen Maßnahmen zur Realisierung entsprechender Temperatur-Zeit-Bedingungen vorgesehen werden, ist dann nicht zuletzt ein ökonomisches Problem.

Ein Überblick über Verfahren sowie Technik der Wärmebehandlung wird allgemein z.B. in [ECK 87, Kap.3 und 6], in [FLE 92] für gasbeheizte Schnellerwärmung sowie in [KLE 89] speziell für Draht und Band vermittelt. Die Wärmebehandlung von Draht erfolgt vorwiegend ruhend als Drahtbund bzw. Drahtspule im Topf- bzw. Haubenofen oder axial bewegt als Drahtaderdurchlauf im Rohrofen. Die indirekte Beheizung kann als elektrische Widerstands- oder als Brennstoffbeheizung ausgeführt sein, wobei durch Schutzgaseinsatz der Oxidation der Drahtoberfläche entgegengewirkt wird. Insbesondere bei dünneren Drähten und umwandlungsfreien, nicht aushärtenden Werkstoffen wird zunehmend die ökonomisch günstige Draht-Direkterwärmung in der Art des elektrisch-konduktiven Durchlaufverfahrens angewendet. Auch die Drahtwärmebehandlung im Durchlauf-Wirbelbettofen gewinnt z.B. beim Stahldrahtpatentieren Bedeutung [SOM 88].

Für eine sichere Beurteilung und Vorausbestimmung des Werkstoffverhaltens erfordern Wärmebehandlungsprozesse eine möglichst präzise Kenntnis der zu realisierenden Temperatur-Zeit-Verhältnisse. Dabei ist insbesondere die Abschätzung adäquater Wärmeübertragungsverhältnisse nicht immer leicht möglich - vgl. z.B. [STE 87], [LEH 87], [NOL 88], [PÖT 89], [LEH 92, 3. Lb]. Auf die Berechnung einer Wärmetönung, wie sie bei Phasenumwandlung auftritt, soll jedoch nicht näher eingegangen werden - vgl. jedoch die Anmerkung in Anhang B zu Kapitel 3.3.1.2.1.

Aus der Vielfalt unterschiedlicher Wärmebehandlungen wird stellvertretend etwas näher auf die Temperaturberechnung beim kombinierten Ziehen und Glühen von Drähten in elektrischen Durchlauf-Widerstandsglühen mit ihren - werkstoffbezogen - hochinstationären Temperatur-Zeit-Bedingungen eingegangen.

3.2.1 Konduktives Drahterwärmen im Durchlauf

Das etwa seit dem Jahre 1955 eingeführte elektrische Durchlauf-Widerstandsglühen, insbesondere als kombiniertes Ziehen und Glühen (Ziehglühen), hat sich als Verfahren der Schnellerwärmung aus wirtschaftlichen Erwägungen seither besonders bei umwandlungsfreien, nicht aushärtbaren und hinreichend rasch rekristallisierenden Werkstoffen wie Kupfer und einigen Kupferlegierungen (Messing, Zinnbronze) durchgesetzt [ROH 69], [SCH 69], [KIR 74], [HEN 90], [MEN 90].

Zur Temperaturberechnung beim Schnellerwärmen von Verbunddrähten verwendet *MENGE* ein numerisches Modell, bei dem der Draht zeitlich und räumlich diskretisiert wird [MEN 91], [MEN 91a]. Hierfür lassen sich auch analytisch geschlossene Lösungen finden [TAU 71, Kap. 12.4]. Etwas näher werde der Zusammenhang betrachtet, der zwischen elektrischen Vorgaben bzw. Einstellungen (Spannung U , Strom I und Leistung P) einerseits sowie Temperaturverhältnissen und mechanischen Eigenschaften des Drahtes andererseits besteht.

Wird an einen elektrischen Leiter mit dem Querschnitt $A = \pi/4 \cdot d^2$ im Abstand L eine Spannung U angelegt, so erwärmt sich das vom Strom I durchflossene Leiterstück bekanntlich um so

stärker, je höher die Spannung, je geringer der Widerstand⁷ R und je niedriger die Wärmeabfuhr an die Umgebung sind. Der Erwärmungsverlauf läßt sich mit den vorn angegebenen Temperaturfunktionen berechnen, wenn als Quellen-Leistungsdichte $q_V = P/V$ die im Leiter-volumen $V = A \cdot L$ umgesetzte elektrische Leistung $P = U \cdot I$ verwendet wird. Da eine elektrische Durchlauf- Widerstandsglühe i.allg. aus zwei, drei oder mehr Abschnitten besteht, in denen der Draht über Kontaktrollen läuft und dabei mit unterschiedlichen elektrischen Spannungen beaufschlagt wird, sind die Temperaturberechnungen gleichfalls abschnittsweise vorzunehmen.

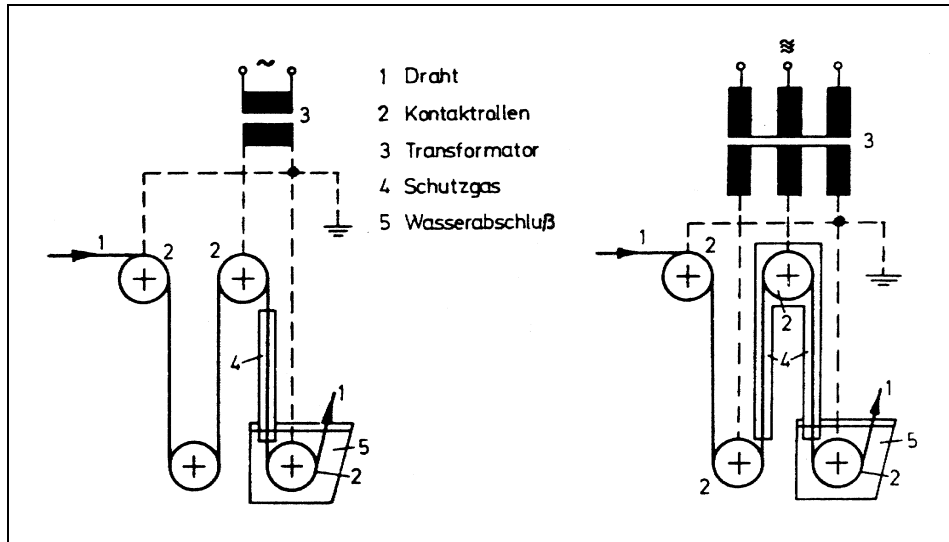


Bild 3.2-1: Elektrisches Zwei- und Drei-Strecken-Glühschema [SCH 69]

Werden die Erwärmungsverhältnisse des Drahtes einfachsterweise als adiabat angesehen, was i.allg. infolge hoher Ziehgeschwindigkeit und entsprechend kurzer Erwärmungszeit (im Zehntel-sekundenbereich) zunächst so falsch nicht ist, so läßt sich die Temperaturerhöhung entsprechend

$$(A2.3.2.8-5.4) \text{ in einer Glühstrecke } 0 \leq z \leq L \text{ zu } \Delta\vartheta \approx \frac{z}{\rho c v} \cdot q_V = \frac{P}{\rho c v \cdot A} \cdot \frac{z}{L} \text{ überschlägig}$$

berechnen. Da sich die elektrische Leistung infolge des OHMschen Gesetzes auch durch $P = U^2/R = R \cdot I^2$ ausgedrückt läßt, werden umgekehrt zur Erreichung einer bestimmten Temperaturänderung für Spannung, Strom und Leistung die folgenden Proportionalitäten erhalten:

$$U \sim \sqrt{v/\kappa_\beta}, \quad I \sim d^2 \sqrt{v \cdot \kappa_\beta}, \quad P \sim d^2 v. \quad (3.2.1-2.1)$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar jene halbempirischen Beziehungen, auf denen z.B. die Datenblätter bzw. Nomogramme der Ziehglühanlagenhersteller und -betreiber beruhen:

$$U = k_U \cdot \sqrt{v}, \quad I = k_I \cdot d^2 \sqrt{v}, \quad P = k_P \cdot d^2 v; \quad (3.2.1-2.2)$$

die Koeffizienten k_U , k_I und k_P sind werkstoff- und anlagenbezogen auf experimentellem Wege zu bestimmen.

⁷ Der elektrische Widerstand ist temperaturabhängig und ergibt sich bei veränderlichem Leiterquerschnitt $A(z)$ und einem durch $\rho_\beta(z) = (1 + \beta \cdot (\vartheta(z) - \vartheta_\beta)) / \kappa_\beta$ definierten spezifischen elektr. Widerstand allgemein zu

$$R = \int_{(L)} \frac{\rho_\beta(z)}{A(z)} dz. \text{ Beim Ziehglühen ist der Drahtquerschnitt konstant, so daß der Widerstand eines Drahtstücks, das}$$

eine mittlere Temperatur $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{L} \int_{(L)} \vartheta(z) dz$ und einen mittleren spezif. Widerstand $\tilde{\rho}_\beta = \frac{1}{L} \int_{(L)} \rho_\beta(z) dz$ besitzt, zu

$$R = (L \cdot \tilde{\rho}_\beta) / A \text{ berechnet wird; } \kappa_\beta \text{ ist die spezif. elektr. Leitfähigkeit zur Bezugstemperatur } \vartheta_\beta.$$

Allerdings werden durch elektrische Vorgaben in der einfachen Form (3.2.1-2.2) weder der Wärmeaustausch noch der elektrische temperaturabhängige Leiterwiderstand noch spezifische, zur Realisierung bestimmter Werkstoffeigenschaften erforderliche Temperatur-Zeit-Charakteristika explizit berücksichtigt. Damit die gleichen Glühresultate bzw. Werkstoffeigenschaften erzielt werden - unabhängig von der Ziehgeschwindigkeit, insbesondere während des Hoch- oder Herunterfahrens der Glühe, sind wenigstens folgende Voraussetzungen zu erfüllen:

- Ermittlung der Drahttemperaturen unter Berücksichtigung der Wärmeübertragungsverhältnisse
- Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit (und damit Ortsabhängigkeit) des elektrischen Widerstandes im Draht
- Kenntnis und Einbeziehung des reaktionskinetischen Werkstoffverhaltens für stark instationäre Temperatur-Zeit-Bedingungen.

Insbesondere die Charakterisierung des reaktionskinetischen Werkstoffverhaltens ist zunächst mit einem gewissen experimentellen und auch mathematisch-numerischen Aufwand verbunden (vgl. Kapitel 3.3). Werden diese Zusammenhänge jedoch nicht hinreichend beachtet, so führt das zwangsläufig zu den u.a. in [MEN 91, Kap. 4.2.5.4] festgestellten Problemen und Diskrepanzen zwischen elektrischen Wärmebehandlungsvorgaben einerseits und Entfestigungsergebnissen andererseits. In der Praxis behilft man sich anstelle (3.2.1-2.2) bei der Vorgabe z.B. der Glühspannung mit Potenzansätzen der Form

$$U = k_U \cdot v^{m_U} , \quad (3.2.1-3)$$

wobei die Parameter k_U , m_U wiederum empirisch, in aufwendigen Experimenten werkstoff- und anlagenbezogen ermittelt werden.

Obwohl die Glüheneinstellung gemäß einem Potenzansatz (3.2.1-3) gegenüber (3.2.1-2.2) durchaus eine bessere Anpassung an Werkstoffvorgaben ermöglicht, handelt es sich dennoch nur um eine Näherung, die die thermischen und entfestigungskinetischen Zusammenhänge noch immer nicht explizit berücksichtigt oder erkennen läßt. Das wird erst möglich, indem für bekanntes thermisch aktiviertes Entfestigungsverhalten $X = X(\Theta(t))$ jene Schar von Temperatur-Zeit-Verläufen $\Theta_v(t)$ ermittelt wird, die für gewünschte Werkstoffeigenschaften $X = X_{End}$ den Temperatur-Zeit-Bedingungen der betreffenden Durchlauf-Widerstandsglühe beim Hoch- oder Herunterfahren entspricht oder möglichst nahekommt. Damit läßt sich dann umgekehrt eine elektrische Spannungsfunktion $U = U(\Theta_v) = U(v)$ festlegen, die die Anlage gerade so steuert, daß die vorgegebene Werkstoffentfestigung $X = X_{End}$ eintritt. Eine auf diese Weise erhaltene Spannung $U(v)$ wird i.allg. eine gegenüber (3.2.1-3) subtilere Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweisen, verbunden mit dem Vorteil wirklich geschwindigkeitsunabhängiger, noch gleichmäßigerer Drahteigenschaften.

Während die thermische Berechnung von Durchlaufglühen, je nach Anforderungen und Randbedingungen, mit den Ergebnissen (A2.3.1-19c), (A2.3.2.4-3), den Näherungen der Kapitel A2.3.2.8 und A2.3.2.9 oder z.B. vorteilhafterweise auch mit (A2.3.3.2-7.5) oder dem in Kapitel A2.3.3.2.3.2 angegebenen Verfahren vorgenommen werden kann⁸, erfordert die werkstoffgerechte Einbeziehung des thermisch aktivierten Entfestigungsverhaltens unter den in einer elektrischen Widerstand-Durchlaufglühanlage herrschenden, werkstoffbezogen thermisch hoch instationären Bedingungen zusätzliche Überlegungen [MÜL 94], worauf in Kapitel 3.3 zurückgekommen wird.

⁸ Solche Berechnungen wurden für Zwei- und Dreistrecken-Glühanlagen durchgeführt; diese sind bereits auf Pocket-PC HP48 vorteilhaft möglich.

3.2.2 Numerisches Beispiel

Ohne bereits an dieser Stelle auf das thermisch aktivierte Werkstoffverhalten in der oben beschriebenen Weise explizit eingehen zu können, soll immerhin die Berechnung der Temperaturverhältnisse beim Wärmebehandeln von axial fortbewegtem Draht an einem Beispiel zum „Ziehglühen“ von Messingdraht illustriert werden.

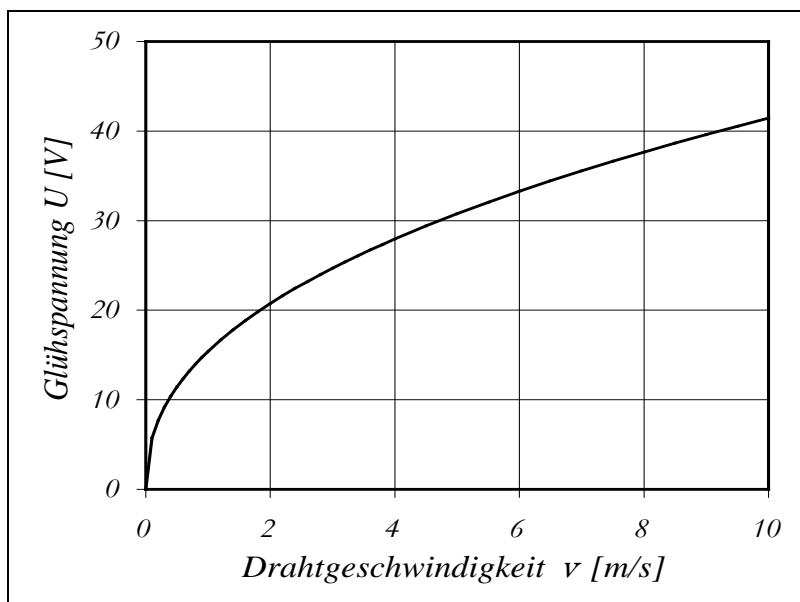


Bild 3.2-2: Glühspannungskurve für CuZn36-Draht

Dabei wird ein CuZn36-Draht, von einem Durchmesser $0,9\text{mm}$ mit einer Geschwindigkeit von 5m/s an $0,5\text{mm}$ gezogen ($R_m \approx 720\text{ N/mm}^2$, $R_{p0,2} \approx 705\text{ N/mm}^2$, $A_{l=100} < 1\%$), in einer der Ziehanlage nachgestellten elektrischen Dreistrecken-Widerstandsdurchlaufglühe⁹ entfestigend wärmebehandelt. Die Steuerung der Anlage wird mit empirisch erhaltener Glühspannungskurve (3.2.1-3) durch $U = 15,4 \cdot v^{0,43}$ vorgenommen; U in Volt für v in Meter je Sekunde.

Auf seinem Weg durch die drei Wärmebehandlungsstreckendurchläufer der Draht sehr unterschiedliche Medien: Umgebungsluft in der Vorheizstrecke, Wasserdampf in Hauptheiz- und Nachheizstrecke. Darüberhinaus findet ein gewisser Wärmeaustausch zwischen Draht und Kontaktrollen statt und schließlich erfolgt eine Intensivkühlung des Drahtes im Wasserbad, das gleichzeitig die dritte Kontaktrolle kühlend umspült.

Damit sind die Verhältnisse des Wärmeübergangs nicht ganz einfach zu beschreiben, denn neben der Unsicherheit hinsichtlich der Wärmeübergangskoeffizienten sind auch über die Umgebungstemperaturen i.allg. nur unscharfe Angaben vorhanden. Mit [SUC 76] läßt sich für die Vorwärmstrecke ein Wärmeübergangskoeffizient etwa zwischen 50 und $200\text{ W/(m}^2\text{K)}$ abschätzen. In der dampfbeaufschlagten Hauptheizstrecke werden Wärmeübergangskoeffizienten in der Größenordnung von $10^3\text{ W/(m}^2\text{K)}$ anzusetzen sein [MEN 91], während für die hochturbulente Wasser- bzw. Wasser-Dampf-Abkühlung im letzten Streckenabschnitt Werte in der Größenordnung von 10^4 und $10^5\text{ W/(m}^2\text{K)}$ anzunehmen sind - vgl. [KEU 84], [PAW 85].

Die tatsächlich verwendeten Zahlenwerte sind der Tabelle im Anhang B zu entnehmen. Dort werden auch Einzelheiten zum Berechnungsverfahren angegeben. Das Berechnungsergebnis für drei Drahtgeschwindigkeiten von 1 , 5 und 10 m/s zeigen die beiden folgenden Bilder.

⁹ Gleichstrom Widerstands-Durchlaufglühe Typ R120 (Fa. NIEHOFF)

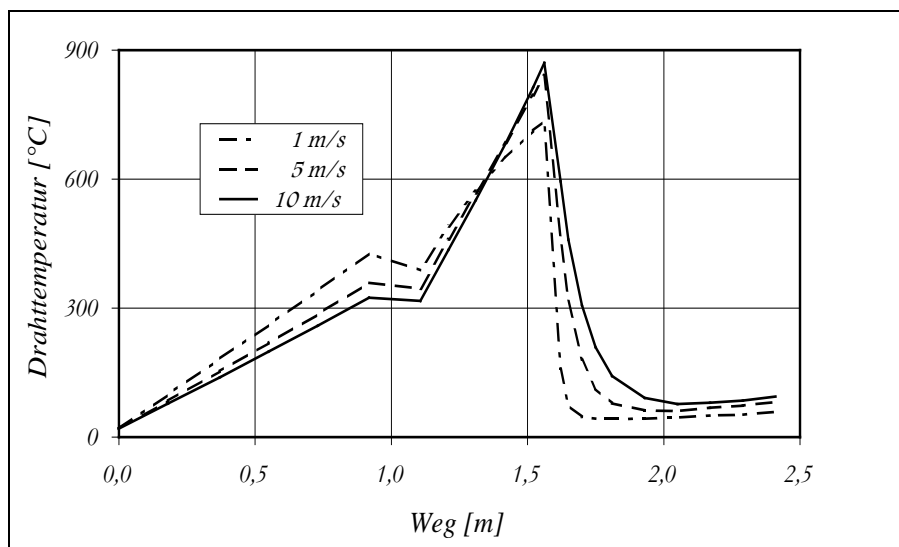


Bild 3.2-3.1: Temperatur-Weg-Abhängigkeit beim Durchlauf-Widerstandsglöhnen

Die Drahttemperaturen entlang des Wärmebehandlungsweges zeigen ein recht ähnliches Erscheinungsbild. In der Vorheizstrecke wird der Draht zunächst in den Bereich von 300-390°C aufgewärmt, während seine Temperatur in der Haupheizstrecke dann auf etwa 740-870°C ansteigt. Mit dem Eintritt in das Wasserbad wird der Draht sehr rasch auf Temperaturen unter 100°C heruntergekühlt. In der Nachheizstrecke schließlich erwärmt sich der Draht noch einmal geringfügig, wodurch seine rasche Trocknung unterstützt wird. Eine Werkstoffreaktion, wie sie durch thermische Aktivierung ausgelöst wird, verläuft jedoch auch wesentlich zeitabhängig.

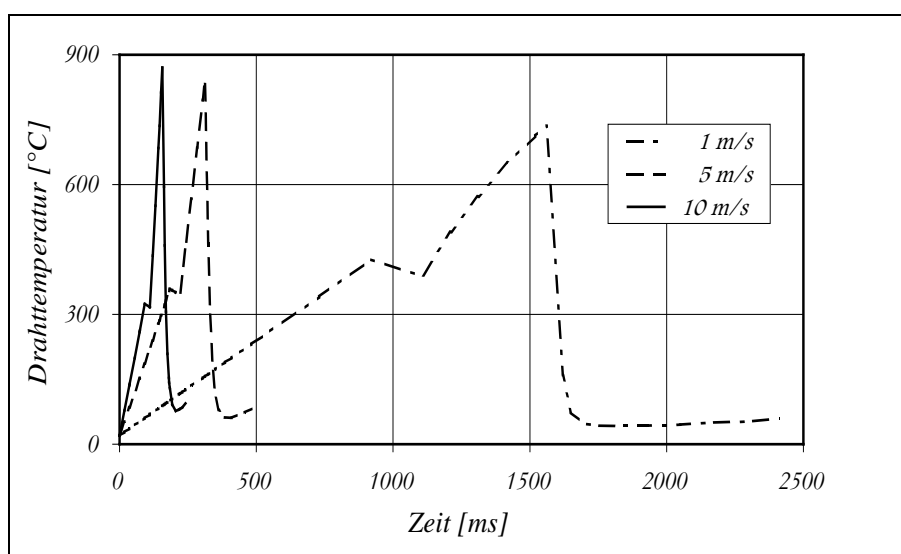


Bild 3.2-3.2: Temperatur-Zeit-Abhängigkeit beim Durchlauf-Widerstandsglöhnen

Die Glühspannung (3.2.1-3) realisiert eine mit steigender Drahtgeschwindigkeit ebenfalls ansteigende Spitzentemperatur. Die mit wachsender Drahtgeschwindigkeit einhergehende Verkürzung der Wärmebehandlungszeit soll dabei durch den Temperaturzuwachs in der Temperaturspitze gerade so kompensiert werden, daß von der Drahtgeschwindigkeit weitestgehend unabhängige Werkstoffeigenschaften erhalten werden. Die Werkstoffprüfung ermittelte für die „ziehgeglühten“ Drähte eine Zugfestigkeit im Bereich $R_m \approx 415-435 \text{ N/mm}^2$, eine Festigkeit bei der 0,2-Dehngrenze von $R_{p0,2} \approx 220-250 \text{ N/mm}^2$ und eine Bruchdehnung von $A_{l=100} \approx 27-31\%$. Bei einem gegenüber (3.2.1-3) werkstoffgerechteren Ansatz für die Steuerspannung $U(v)$ sollte allerdings eine noch bessere Konstanz der Werkstoffeigenschaften erreichbar sein.

3.2.3 Temperatursteuerung

Die Berechnung von Temperaturen zu vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen sowie inneren Wärmequellen stellt eine häufige Aufgabe dar. Wichtiger allerdings sind nicht selten Fragestellungen, bei denen umgekehrt Randfunktionen oder innere Quellen aufzusuchen sind, gerade so, daß ein gewünschter, vorgegebener Temperaturverlauf erhalten wird. Beim elektrischen Durchlauf-Widerstandsglühen z.B. liegt eine Aufgabenstellung dieser Art vor, denn hier sollen die elektrischen Glühwerte so eingestellt werden, daß der damit erzielte Temperaturverlauf letztlich die gewünschten mechanischen Eigenschaften am wärmebehandelten Draht bewirkt. Dabei sind i.allg. noch Nebenbedingungen sowohl technischer als auch ökonomischer Art zu berücksichtigen, weshalb nicht selten sogar ein Optimierungsproblem zu lösen ist. Jedoch bereits die einfache Umkehraufgabe kann mit einigem mathematischem Aufwand verbunden sein, wie das Beispiel der gezielten Walzenkühlung zeigt [UNG 84]. Hierbei wird die Kühlmittelbeaufschlagung (oder der Wärmeübergang) entlang der Walzenachse so gesteuert, daß die thermisch bedingte Walzenballigkeit einen vorgegebenen Verlauf annimmt.

Analog könnte im vorliegenden Kontext an eine entsprechend aufwendige Ziehsteinkühlung gedacht werden, die die thermoelastische Formänderung des Ziehholts und damit die Drahtdurchmesseränderung auskorrigiert bzw. minimiert, eine Überlegung, die in der Praxis am ungünstigen Aufwand-Nutzen-Verhältnis scheitert. Dagegen wird die gesteuerte Drahtkühlung durch die Ziehtrommel in der Tat eine sinnvolle Anwendung darstellen, indem z.B. der Kühlwasserstrom gezielt so eingestellt bzw. gesteuert wird, daß der Draht mit der gewünschten Temperatur von der Ziehtrommel abläuft. Diese Aufgabe ist - zumindest rechnerisch - relativ leicht auf iterativem Wege mit einem Programm zu bewerkstelligen, das auf dem Algorithmus des Kapitels 3.1.2.2.4 beruht und das für die Simulationsrechnungen des Kapitels 3.1.2.2.5 bereits genutzt worden war.

In Einzelfällen kann eine Steueraufgabe auch ohne größeren mathematischen Aufwand mit entsprechenden Näherungslösungen direkt gelöst werden. Ist eine solche Lösung einfach genug aufgebaut, so gelingt es mitunter, sie nach der steuernden Quelle oder Randfunktion analytisch explizit auflösen - vgl. insbesondere die Ergebnisse für kurze und lange Zeiten (Kapitel A2.3.2.8 und A2.3.2.9) sowie die Lösungen für wärmetechnisch dünnwandiges Gut (Kapitel A2.3.3). Beispielshalber werde angenommen, daß auf Grund reaktionskinetischer Betrachtungen und technisch-ökonomischer Gesichtspunkte ein bestimmter Temperatur-Zeit-Verlauf (Glüh-Temperaturkurve) favorisiert worden ist - vgl. Kapitel 3.3.1.2.1. Diesen Verlauf beim konduktiven Glühen realisieren zu wollen, bedeutet, zunächst eine Näherungsgleichung zu suchen, die sich leicht nach dem Term mit der volumenbezogenen Wärmequelle auflösen läßt. Hier bietet sich insbesondere die gewöhnliche Differentialgleichung (A2.3.3.1-6) an, denn mit (A2.3.3.1-8) werden für vorgegebenen Glüh-Temperaturverlauf $\bar{\Theta}(t) = \bar{\mathcal{H}}(t) + \Theta_C$ und unter Berücksichtigung von Konvektion und Strahlung die Quellen zu

$$q_V(t) = \rho c \cdot \bar{\Theta}'(t) + 4 \frac{C(t)}{d} \cdot \left(\bar{\Theta}^4(t) - \Theta_{US}^4(t) \right) + 4 \frac{\alpha(t)}{d} \cdot \left(\bar{\Theta}(t) - \Theta_{UK}(t) \right) \quad (3.2.3-1)$$

und damit die erforderliche elektrische Leistung explizit zu

$$P(t) = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot L \cdot q_V(t) \quad (3.2.3-2)$$

erhalten¹⁰.

Ein stillstehender Draht mit dem Durchmesser d und der Länge L , der von einer geeignet veränderlichen Stromquelle gemäß (3.2.3-2) gespeist wird, erfährt dann genau jene Erwärmungs-

¹⁰ Nicht alle beliebigen Temperaturverläufe lassen sich allein durch entsprechende Leistungssteuerung realisieren. So entsteht bei gezielt rascher Abkühlung die Notwendigkeit, auch die Umgebungstemperatur und den Wärmeübergang zu steuern, z.B. durch Änderung der Umgebungsbedingungen (Luft → Wasser).

bzw. Abkühlungsverhältnisse, die durch den Temperaturverlauf $\bar{\Theta}(t)$ bzw. $\bar{\mathcal{G}}(t)$, in Abhängigkeit der übrigen Randfunktionen, vorgegeben waren. Damit läßt sich z.B. eine entsprechend ausgerüstete statische Laborglühanlage so steuern, daß reaktionskinetische Werkstoffuntersuchungen bei wohldefinierten, ggf. auch hoch instationären Bedingungen durchführbar werden. Die Glühverhältnisse können thermisch nahezu perfekt simuliert werden, so daß sich die sowohl personell und energetisch aufwendigen als auch materialintensiven Betriebsuntersuchungen auf Produktionsanlagen, wie sie zur Ermittlung von Glühkurven, d.h., zur Bestimmung der Parameter in (3.2.1-3), bisher als unumgänglich angesehen wurden, vorteilhafterweise stark verringern lassen¹¹.

Nicht selten jedoch wird die Verwendung einer Näherungslösung aus prinzipiellen oder Genauigkeitsgründen ausscheiden. Dann liegt häufig eine Temperaturgleichung vor, bei der ein Auflösen nach der steuernden Größe explizit nicht möglich oder zu kompliziert ist. In diesem Falle lassen sich numerische Ergebnisse dennoch gewinnen, indem effiziente Suchverfahren (Solverprozeduren) hinzugezogen werden [HÄF 92, Kap. 9].

¹¹ Speziell beim Simulieren des „Ziehglühens“ auf einer statischen Laboranlage ist natürlich zu beachten, daß elektrische Durchlauf-Widerstandsglühn als Zwei-, Drei- oder Mehrstreckenglühn angelegt sind, bei denen der durchlaufende Draht innerhalb je einer Glühstrecke mit einer konstanten Spannung bzw. Leistung (im stationären Betrieb) beaufschlagt wird. Es kann so immer nur eine Folge quasilinearere Aufheizabschnitte entstehen, womit die zur Simulation zu verwendenden Temperatur-Zeit-Verläufe sinnvollerweise auf diese quasilinearen Verhältnisse einzuschränken sind.

3.3 Werkstoffreaktion

Fast alle technischen Prozesse zur thermischen Beeinflussung von Werkstoffeigenschaften beinhalten instationäre Verfahrenskomponenten. Durch Messung gewonnene Informationen entstammen häufig nichtisothermen Bedingungen. Dieser Umstand erschwert die Bewertung entsprechender Meßergebnisse. Ein Vergleich bzw. die Gewährleistung der Übertragbarkeit von unter Labor- und Praxisbedingungen gewonnenen Ergebnissen ist dann ohne Anwendung entsprechender mathematisch-physikalischer Modelle mit der gewünschten Sicherheit oft nicht möglich. Obwohl Wärmebehandlungsprozesse genaugenommen immer instationäre Bereiche (Aufheizen und Abkühlen) enthalten, wird nicht selten versucht, diese als vernachlässigbar anzusehen oder aber den Vorgang so aufzuteilen, daß quasistationäre Abschnitte entstehen [LEH 87a], [LEH 94]. Für spezielle Wärmebehandlungszyklen sowie vorzugsweise diffusionsgesteuerte Werkstoffreaktionen wird in [MAY 66] eine allgemeiner anwendbare Auswertemethode eingeführt, wobei entsprechende Beziehungen zur Äquivalenz zwischen Zeit und Temperatur angegeben werden. Im Beitrag [BOY 77] zur Kinetik von Festkörperreaktionen unter nichtisothermen Bedingungen werden elf kinetische Ansätze herangezogen, um für jeweils konstante Aufheizgeschwindigkeit den wahrscheinlichsten Reaktionsmechanismus - Diffusion und Keimbildung, chemische und Phasengrenzreaktion - mittels statistischer Testverfahren zu ermitteln; vgl. auch [HEM 89, Kap. 9]. Ebenfalls für nichtisotherme Bedingungen werden in [OTT 88], [REG 89] und [NEI 95] Methoden angegeben, womit die Berechnung der zur Rekristallisation erforderlichen Zeit unter gewissen Voraussetzungen möglich ist. Einfache Näherungsbeziehungen, die einen Vergleich von anisothermen (lineare Aufheizung und Abkühlung) mit isothermen Bedingungen für das Kornwachstum ermöglichen, werden in [BOU 93] hergeleitet.

Während sich konkrete Untersuchungen und Modellbetrachtungen häufig nur auf sehr spezielle, insbesondere lineare Temperatur-Zeit-Abhängigkeiten beschränken [SCH 83a], [MEY 89], gebietet die große Vielfalt an technisch zu realisierenden Wärmebehandlungsabläufen, daß Berechnungs- und Bewertungsgrundlagen auch für beliebig nichtisotherme Bedingungen zur Verfügung stehen. Es werden deshalb im folgenden grundlegende mathematische Beziehungen hergeleitet, die eine qualitative und quantitative Beschreibung kinetischer Abläufe von thermisch aktivierten Prozessen gestatten, wobei unterschiedliche - im Rahmen der Gültigkeitsgrenzen - und insbesondere auch beliebig instationäre Temperatur-Zeit-Realisationen vorliegen dürfen. Es wird angestrebt sowohl Entfestigungsprozesse, wie Erholung, Rekristallisation und Kornwachstum, als auch entsprechende diffusionsgesteuerte Aushärtungsprozesse zu beschreiben.

3.3.1 Phänomenologisches Modell

Zur Herleitung der gewünschten Beziehungen sind zwei Wege möglich: Für die Beschreibung von Werkstoffänderungen, die vorwiegend auf Wanderungs- und Ausgleichsmechanismen beruhen, können zum einen die Theorie der Diffusion und entsprechende Diffusionsgleichungen, zum anderen geeignete kinetische Gleichungen herangezogen werden. Während im ersten Fall Bedingungen erhalten werden, die eine Bewertung bzw. einen Vergleich unterschiedlicher Wärmebehandlungen gestatten, lassen sich aus kinetischen Gleichungen darüberhinaus z.B. Formeln zur Berechnung von Rekristallisationsgrad, Korngröße oder davon wesentlich abhängende Erscheinungen, wie z.B. Härte, Festigkeit und Dehnung gewinnen. Beide Wege werden verfolgt.

3.3.1.1 Diffusion

Die atomare und kontinuumsmechanische Beschreibung spezieller Diffusionsmechanismen, wie sie in Festkörpern bei der Leerstellen-, Zwischengitter-, Korngrenzen- oder Oberflächendiffusion für konstante, orts- oder auch konzentrationsabhängige Diffusionskoeffizienten und thermodynamische Triebkräfte einzeln oder parallel in Erscheinung treten, läßt das komplexe Wechselspiel zwischen Werkstoffreaktion und Werkstoffeigenschaften erkennen, z.B. [ZOU 70], [HÄB 72], [WEI 79], [HAA 84], [GOT 84a], [TRO 84], [CRU 92], [RIC 91], [RIC 93], [IND 96]. Diffusionsvorgänge besitzen darüberhinaus stets auch eine starke Temperaturabhängigkeit. Die

Berücksichtigung dieser Temperaturabhängigkeit unter isothermen Bedingungen bereitet keinerlei zusätzliche mathematische Schwierigkeiten. Das ändert sich jedoch unter anisothermen Bedingungen. Ist die Temperatur z.B. eine zeitabhängige Prozeßfunktion, was bei technischen Wärmebehandlungsabläufen i.allg. stets der Fall ist, so ist dann die instationäre Diffusionsgleichung für zeitabhängigen Diffusionskoeffizienten zu lösen.

Stellvertretend für Diffusionsabläufe, wie sie in polykristallinen Festkörpern stattfinden, werden nachfolgend drei Diffusionsaufgaben etwas näher betrachtet. Gegenüber Realverhältnissen stärker abstrahierend, sollen die in einer Kristallmatrix eingebetteten Teilchen als platten-, zylinder- oder kugelförmig angenommen werden. Dabei ist die Frage zu beantworten, welche Zeitabhängigkeiten diese Modellpartikel unter den idealisierten Diffusionsbedingungen aufweisen und welche Verallgemeinerungen ggf. erlaubt sind. Mit der Betrachtung der ebenen Platte, Scheibe bzw. Lamelle wird begonnen.

a) *Lamelle*

Die Dicke L der Lamelle sei gegenüber deren Flächenausdehnung so klein, daß der Einfluß der Lamellenränder in Umfangsrichtung gegenüber dem Einfluß von Lamellenober- und Lamellenunterseite auf das Diffusionsgeschehen vernachlässigt werden kann. Eine solche Lamelle tritt mit ihrer Umgebung in einen Konzentrationsaustausch ein. Dieser wird sowohl von dem vereinfachend orts- und konzentrationsunabhängigen, jedoch zeitabhängigen Diffusionskoeffizienten $D = D(t) = D(\vartheta(t))$ als auch von den an Ober- und Unterseite der Lamelle vorliegenden Randbedingungen bestimmt; noch allgemeiner kann der Konzentrationsverlauf sogar von hypothetischen Konzentrationsquellen/-senken $\omega = \omega(t, x)$ im Lamelleninneren beeinflußt werden. Es interessiert nun, wie sich eine im Anfangszeitpunkt vorliegende Konzentrationsverteilung $c_A(x)$ im Laufe der Zeit ändert, welchen qualitativen und quantitativen Zusammenhang die Konzentration $c(t, x)$ von den genannten Einflußgrößen aufweist. Somit stellt sich die Aufgabe, eine mathematische Lösung für die zeitabhängige, räumlich eindimensionale Konzentrationsverteilung $c(t, x)$ zu finden, wenn gegeben sind:

- Anfangsbedingung

$$c(0, x) = c_A(x); \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.3.1.1-1)$$

- Randbedingungen (erweiterte 3. Art)

$$\frac{\partial c(t, 0)}{\partial x} = k_0 \cdot c(t, 0) - r_0(t) \quad \text{bei } x = 0 \quad \text{mit } r_0(t) = k_0 \cdot c_{U_0}(t) + \omega_0(t) \quad (3.3.1.1-2.1)$$

$$\frac{\partial c(t, L)}{\partial x} = -k_L \cdot c(t, L) + r_L(t) \quad \text{bei } x = L \quad \text{mit } r_L(t) = k_L \cdot c_{U_L}(t) + \omega_L(t); \quad (3.3.1.1-2.2)$$

damit sind Umgebungskonzentrationen $c_{U_0}(t)$ und $c_{U_L}(t)$ sowie ggf. Konzentrationsquellen bzw. -senken $\omega_0(t)$ und $\omega_L(t)$ an Lamellenober- und -unterseite vorgeschrieben, wobei der Konzentrationsaustausch zwischen Lamelle und Umgebung über die Diffusionsaustauschkoeffizienten k_0, k_L geregelt wird. Wie bereits bei erweiterter Wärmeleitungsrandbedingung 3. Art, werden auch hier mehrere Grenzsituationen mit berücksichtigt:

Randbedingung 1. Art für $k_0, k_L \rightarrow \infty$, d.h., die Konzentration der Oberflächen wird mit $c_{U_0}(t) \rightarrow c_0(t) = c(t, 0)$ und $c_{U_L}(t) \rightarrow c_L(t) = c(t, L)$ vorgegeben

Randbedingung 2. Art für $k_0, k_L \rightarrow 0$ und $\omega_0 \neq 0, \omega_L \neq 0$

Randbedingung 4. Art (nach [TAU 71]) für $k_0, k_L \rightarrow 0$ und $\omega_0 = \omega_L = 0$, womit an Lamellenober- oder/und -unterseite Diffusionssperren vorliegen.

- Differentialgleichung (2. FICKsches Gesetz, vgl. z.B. [TRO 84, Kap. 30])

$$\frac{\partial c(t,x)}{\partial t} - \mathbf{D}(t) \cdot \frac{\partial^2 c(t,x)}{\partial x^2} = \boldsymbol{\omega}(t,x). \quad (3.3.1.1-3)$$

Das Lösen der Anfangs-Randwertaufgabe (3.3.1.1-1) - (3.3.1.1-3) werde nach der Methode von FOURIER vorgenommen – Herleitung siehe Anhang B (*Formelnumerierung dort fortlaufend*). Die Lösung hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned} c(t,x) &= \int_0^L \mathbf{g}(t,0;x,\xi) \cdot c_A(\xi) \cdot d\xi + \dots \\ &\dots + \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot [\mathbf{g}(t,\tau;x,0) \cdot \mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{g}(t,\tau;x,L) \cdot \mathbf{r}_L(\tau)] \cdot d\tau + \dots \\ &\dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;x,\xi) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau,\xi) \cdot d\xi \cdot d\tau \end{aligned} \quad (3.3.1.1-15.1)$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\mathbf{g}(t,\tau;x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) \cdot X_n(\xi)}{f_n^{(N)}} \cdot e^{-\left(\frac{v_n}{L}\right)^2 \cdot \int_{\tau}^t \mathbf{D}(\zeta) \cdot d\zeta}. \quad (3.3.1.1-15.2)$$

Können Umgebungskonzentrationen und Quellen als zeitlich konstant angesehen werden, d.h., $c_{U_0}(t) = c_{U_0} = konst.$, $c_{U_L}(t) = c_{U_L} = konst.$, $\boldsymbol{\omega}_0(t) = \boldsymbol{\omega}_0 = konst.$, $\boldsymbol{\omega}_L(t) = \boldsymbol{\omega}_L = konst.$ bzw. $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0 = konst.$ und $\mathbf{r}_L(t) = \mathbf{r}_L = konst.$, sowie $\boldsymbol{\omega}(t,x) = \boldsymbol{\omega}(x)$, so wird das Diffusionsgeschehen durch

$$\begin{aligned} c(t,x) &= \frac{\mathbf{r}_0 \cdot L \cdot (1 + k_L(L-x)) + \mathbf{r}_L \cdot L \cdot (1 + k_0 x)}{k_0 L + k_L L + k_0 L \cdot k_L L} + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{f_n^{(N)}} \cdot e^{-\left(\frac{v_n}{L}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(t)} \cdot \left\{ \int_0^L X_n(\xi) \cdot c_A(\xi) \cdot d\xi - \dots \right. \\ &\quad \dots - \left(\frac{L}{v_n}\right)^2 \cdot [\mathbf{r}_0 \cdot X_n(0) + \mathbf{r}_L \cdot X_n(L)] + \dots \\ &\quad \left. \dots + \int_0^t e^{-\left(\frac{v_n}{L}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(\tau)} \cdot d\tau \cdot \int_0^L X_n(\xi) \cdot \boldsymbol{\omega}(\xi) \cdot d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.3.1.1-16.1)$$

mit

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.3.1.1-16.2)$$

beschrieben¹². Vom letzten Summanden, dem Quellterm, einmal abgesehen, ist zu erkennen, daß das Zeitverhalten von Diffusionsvorgängen unter diesen Umständen allein durch das Integral über den Diffusionskoeffizienten, d.h., nur durch $\mathcal{I}(t)$ bestimmt wird.

b) Faser

Wenn nicht Lamellen, sondern lange Zylinder bzw. Stäbchen oder Fasern einer vergleichbaren Diffusionssituation ausgesetzt werden, lautet das entsprechende Anfangs-Randwertproblem:

- Anfangsbedingung

$$c(0,r) = c_A(r); \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.3.1.1-17)$$

- Symmetriebedingung

$$\frac{\partial c(t,0)}{\partial r} = 0 \quad \text{bei } r=0 \quad (3.3.1.1-18.1)$$

- Randbedingung (erweiterte 3. Art)

$$\frac{\partial c(t,R)}{\partial r} = -k_R \cdot c(t,R) + r(t) \quad \text{bei } r=R \quad \text{mit } r(t) = k_R \cdot c_U(t) + \omega_R(t); \quad (3.3.1.1-18.2)$$

damit sind die Umgebungskonzentration $c_U(t)$ sowie ggf. Konzentrationsquellen $\omega_R(t)$ am Faserrand bei $r=R$ vorgeschrieben, der Konzentrationsaustausch zwischen Faser und Umgebung wird über den Diffusionsaustauschkoeffizienten k_R geregelt. Wie bereits bei erweiterter Wärmeleitungsrandbedingung 3. Art, werden auch hier mehrere Grenzfälle mit erfaßt:

Randbedingung 1. Art für $k_R \rightarrow \infty$, d.h., die Konzentration an der Zylinder- bzw. Faseroberfläche wird mit $c_U(t) \rightarrow c_R(t) = c(t,R)$ vorgegeben

Randbedingung 2. Art für speziell $k_R \rightarrow 0$ und $\omega_R \neq 0$

Randbedingung 4. Art für $k_R \rightarrow 0$ und $\omega_R = 0$, d.h., es liegen an der Faseroberfläche Diffusionssperren vor.

- Differentialgleichung (2. FICKsches Gesetz)

$$\frac{\partial c(t,r)}{\partial t} - D(t) \cdot \left(\frac{\partial^2 c(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c(t,r)}{\partial r} \right) = \omega(t,r). \quad (3.3.1.1-19)$$

Das Lösen dieser axialsymmetrischen Aufgabe kann praktisch mit den gleichen Mitteln wie im ebenen Fall erfolgen, nur daß sich das aus der entsprechenden STURM-LIOUVILLE-Aufgabe ergebende Orthogonalsystem nicht mehr aus trigonometrischen, sondern aus Zylinderfunktionen aufbaut und somit anstelle der FOURIER-Reihe eine DINI-Reihe der Art (A2.3.1-R1) tritt. Unter Verzicht auf weitere Einzelheiten der Herleitung - vgl. Anhang B (*Formelnumerierung fortlaufend*) -

¹² Für die Integration $\int_0^t D(\tau) \cdot \exp\left(-\left(\frac{v_n}{L}\right)^2 \cdot \int_\tau^t D(\zeta) \cdot d\zeta\right) \cdot d\tau = \left(\frac{L}{v_n}\right)^2 \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{v_n}{L}\right)^2 \cdot \int_0^t D(\tau) \cdot d\tau\right)\right)$

wurde von der Regel „Integration durch Substitution“ Gebrauch gemacht und eine Reihensumation erfolgte als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{f_n^{(N)}} \cdot \left(\frac{L}{v_n}\right)^2 \cdot [r_0 \cdot X_n(0) + r_L \cdot X_n(L)] = \frac{r_0 \cdot L \cdot (1 + k_L(L-x)) + r_L \cdot L \cdot (1 + k_0x)}{k_0L + k_LL + k_0L \cdot k_LL}$$

wird als Ergebnis des Anfangs-Randwertproblems (3.3.1.1-17) - (3.3.1.1-19) schließlich die folgende Lösung erhalten:

$$c(t,r) = \int_0^R \mathbf{g}(t,0;r,\rho) \cdot c_A(\rho) \cdot d\rho + \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{g}(t,\tau;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau) \cdot d\tau + \dots \quad (3.3.1.1-30.1)$$

$$\dots + \int_0^t \int_0^R \mathbf{g}(t,\tau;r,\rho) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau,\rho) \cdot d\rho \cdot d\tau$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\mathbf{g}(t,\tau;r,\rho) = \rho \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{f_n^{(N)}} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \cdot \int_{\tau}^t \mathbf{D}(\zeta) \cdot d\zeta} \quad (3.3.1.1-30.2)$$

sowie mit $f_n^{(N)}$ entsprechend (A2.3.1-R1) und den Eigenwerten μ_n aus (A2.3.1-10), wobei $k_R \hat{=} h$ zu beachten ist. Werden Umgebungskonzentration und Quellen als zeitlich konstant angesehen, d.h., $c_U(t) = c_U = konst.$, $\boldsymbol{\omega}_R(t) = \boldsymbol{\omega}_R = konst.$ bzw. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} = konst.$, und $\boldsymbol{\omega}(t,r) = \boldsymbol{\omega}(r)$, so wird die Konzentrationsverteilung durch

$$c(t,r) = \frac{\mathbf{r}}{k_R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{f_n^{(N)}} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(t)} \cdot \left\{ \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot c_A(\rho) \cdot d\rho - \dots \right. \quad (3.3.1.1-31)$$

$$\left. \dots - \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 \cdot R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) \cdot \mathbf{r} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(\tau)} \cdot d\tau \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}(\rho) \cdot d\rho \right\}$$

widergespiegelt. Wird der letzte Summand, der Quellterm, außeracht gelassen, so ist festzustellen, daß das Zeitverhalten von Diffusionsvorgängen auch im Zylinder bzw. in einer Faser wiederum allein von dem Integral über den Diffusionskoeffizienten, d.h., nur von $\mathcal{I}(t)$ entsprechend (3.3.1.1-16.2) abhängt.

c) Kugel

Werden nicht Lamellen oder Fasern, sondern kugelige bzw. globulare Partikel einer vergleichbaren Diffusionssituation ausgesetzt, lautet das entsprechende Anfangs-Randwertproblem:

- Anfangs-, Symmetrie- und Randbedingung entsprechen mit (3.3.1.1-17) und (3.3.1.1-18) formal genau denen des Zylinders (Faser)
- Differentialgleichung (2. FICKSches Gesetz)

$$\frac{\partial c(t,r)}{\partial t} - \mathbf{D}(t) \cdot \left(\frac{\partial^2 c(t,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial c(t,r)}{\partial r} \right) = \boldsymbol{\omega}(t,r). \quad (3.3.1.1-32)$$

Das Lösen dieser kugelsymmetrischen Aufgabe kann wiederum mit prinzipiell denselben mathematischen Mitteln erfolgen, nur daß sich das aus der entsprechenden STURM-LIOUVILLE-Aufgabe ergebende Orthogonalsystem entsprechend ändert. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen - vgl. Anhang B (Formelnumerierung dort fortlaufend) - wird als Ergebnis des Anfangs-Randwertproblems schließlich erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t,r) &= \int_0^R \mathbf{g}(t,0;r,\rho) \cdot \mathbf{c}_A(\rho) \cdot d\rho + \dots \\
&\dots + \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{g}(t,\tau;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau) \cdot d\tau + \dots \\
&\dots + \int_0^t \int_0^R \mathbf{g}(t,\tau;r,\rho) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau,\rho) \cdot d\rho \cdot d\tau
\end{aligned} \tag{3.3.1.1-45.1}$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\mathbf{g}(t,\tau;r,\rho) = \frac{\rho}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(v_n \frac{r}{R}) \cdot \sin(v_n \frac{\rho}{R})}{f_n^{(N)}} \cdot \mathbf{e}^{-\left(\frac{v_n}{R}\right)^2 \cdot \int_{\tau}^t \mathbf{D}(\zeta) \cdot d\zeta} ; \tag{3.3.1.1-45.2}$$

Eigenwerte v_n und $f_n^{(N)}$ siehe Anhang B.

Werden Umgebungskonzentration und Quellen als zeitlich konstant angesehen, d.h., $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} = konst.$ und $\boldsymbol{\omega}(t,r) = \boldsymbol{\omega}(r)$, so wird die Konzentrationsverteilung durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t,r) &= \frac{\mathbf{r}}{k_R} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(v_n \frac{r}{R})}{f_n^{(N)}} \cdot \mathbf{e}^{-\left(\frac{v_n}{R}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(t)} \cdot \left\{ \int_0^R \rho \cdot \sin(v_n \frac{\rho}{R}) \cdot \mathbf{c}_A(\rho) \cdot d\rho - \dots \right. \\
&\dots - \left. \left(\frac{R}{v_n}\right)^2 \cdot R \cdot \sin(v_n) \cdot \mathbf{r} + \dots \right. \\
&\left. \dots + \int_0^t \mathbf{e}^{-\left(\frac{v_n}{R}\right)^2 \cdot \mathcal{I}(\tau)} \cdot d\tau \cdot \int_0^R \rho \cdot \sin(v_n \frac{\rho}{R}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\rho) \cdot d\rho \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.1.1-46}$$

widergespiegelt. Vom letzten Summanden, dem Quellterm, wiederum abgesehen, ist auch hier zu erkennen, daß das Zeitverhalten von Diffusionsvorgängen in kugeligen bzw. globularen Partikeln fast schon erwartungsgemäß durch das Integral über den Diffusionskoeffizienten, d.h., allein durch $\mathcal{I}(t)$ - vgl. (3.3.1.1-16.2) - bestimmt wird.

Werden diese Betrachtungen lediglich für die Konzentrationsmittelwerte über den Partikelquerschnitt angestellt, so läßt sich diese soeben ausgesprochene Erkenntnis sogar noch etwas übersichtlicher darstellen. Es ergibt sich dann für alle drei Modellpartikel aus den betreffenden partiellen Differentialgleichungen durch lokale Mittelung, d.h., durch $\bar{c}_L(t) = 1/L \cdot \int_0^L \mathbf{c}(t,x) dx$ bei der Lamelle, $\bar{c}_F(t) = 2/R^2 \cdot \int_0^R r \cdot \mathbf{c}(t,r) dr$ bei der Faser und $\bar{c}_K(t) = 3/R^3 \cdot \int_0^R r^2 \cdot \mathbf{c}(t,r) dr$ bei der Kugel, und unter Verwendung der jeweiligen Randbedingungen eine gewöhnliche lineare und inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\bar{\mathbf{c}}'(t) + \mathbf{g}(t) \cdot \bar{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{3.3.1.1-47.1}$$

deren Lösung durch

$$\bar{\mathbf{c}}(t) = \bar{\mathbf{c}}_A \cdot \mathbf{e}^{-\int_0^t \mathbf{g}(\tau) \cdot d\tau} + \int_0^t \mathbf{f}(\tau) \cdot \mathbf{e}^{-\int_{\tau}^t \mathbf{g}(\zeta) \cdot d\zeta} \cdot d\tau \tag{3.3.1.1-47.2}$$

gegeben ist; die beiden Zeitfunktionen $\mathbf{g}(t) := k \cdot \mathbf{D}(t)$ und $\mathbf{f}(t) := \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \bar{\omega}(t)$ enthalten neben dem Diffusionskoeffizienten die Einflüsse an den jeweiligen Körperändern, zusammengefaßt in dem neuen Koeffizienten $k = konst.$ und einer Randfunktion $\mathbf{r}(t)$, sowie das örtliche Mittel ggf. vorhandener Quellen $\bar{\omega}(t)$. Speziell für einen sich selbst überlassenen Diffusionsablauf möge in etwa wieder $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} = konst.$ und $\bar{\omega}(t) = \bar{\omega} = konst.$ gelten, so daß dann vorliegt:

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= \bar{c}_A \cdot e^{-k \cdot \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot d\tau} + \frac{\mathbf{r}}{k} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot \int_0^t \mathbf{D}(\tau) \cdot d\tau} \right) + \bar{\omega} \cdot \int_0^t e^{-k \cdot \int_0^\tau \mathbf{D}(\zeta) \cdot d\zeta} \cdot d\tau \\ &= \frac{\mathbf{r}}{k} + \left(\bar{c}_A - \frac{\mathbf{r}}{k} + \bar{\omega} \cdot \int_0^t e^{k \cdot \mathbf{I}(\tau)} \cdot d\tau \right) \cdot e^{-k \cdot \mathbf{I}(t)} \end{aligned} \quad (3.3.1.1-47.3)$$

oder bei $\mathbf{r} = \bar{\omega} = 0$: $\bar{c}(t) = \bar{c}_A \cdot e^{-k \cdot \mathbf{I}(t)}$ bzww. $X(t) := \frac{\bar{c}_A - \bar{c}(t)}{\bar{c}_A} = 1 - e^{-k \cdot \mathbf{I}(t)}$. (3.3.1.1-47.4)

Diese Form der Lösung repräsentiert einen reaktionskinetischen Ansatz, der dem ursprünglich für isotherme Verhältnisse ($\mathbf{D}(t) = konst.$) formulierten *AVRAMI*-Ansatz entspricht (abgesehen vom *AVRAMI*-Exponenten - vgl. *Kap. 3.3.1.2*, dem hier der Wert 1 zukommt.)

Damit gilt für die drei Modellpartikel insgesamt, daß das Zeitverhalten des Diffusionsgeschehens wesentlich, wenn nicht ausschließlich von der Funktion $\mathbf{I}(t)$ abhängt, zumindest solange die Umgebungskonzentration nicht deutlich zeitabhängig wird und solange Quellen fehlen. Das ist eine wichtige Aussage insofern, als in realen polykristallinen Werkstoffen derartige strukturelle Bestandteile üblicherweise statistisch verteilt stets vorhanden sind (Zementitlamellen, Sphärographit, Korngrenzen, Ausscheidungen u.ä.). Es ist zu erwarten, daß alle wesentlich diffusionsgesteuerten Eigenschaftsänderungen diese Zeitabhängigkeit (3.3.1.1-16.2), die also direkt und nahezu ausschließlich vom Diffusionskoeffizienten abhängt, widerspiegeln¹³.

Vorausgesetzt, diese Schlußweise ist für reale Werkstoffe tatsächlich - wenigstens näherungsweise - zutreffend, so läßt sich schon jetzt eine weitere Folgerung anknüpfen: Wird ein konkreter Werkstoff bestimmten Ausgangszustandes (Verfestigungsgrad) unter im wesentlichen unveränderten Randbedingungen verschiedenen diffusionsgesteuerten Behandlungen ausgesetzt, so werden sich im Idealfall die Behandlungsergebnisse dennoch solange nicht voneinander unterscheiden, solange die betreffenden $\mathbf{I}(t)$ -Werte miteinander übereinstimmen, d.h., solange die Relation

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_1(t_1) = \mathbf{I}_2(t_2) = \dots = \mathbf{I}_k(t_k) \quad (3.3.1.1-48)$$

gewährleistet bleibt; das ist bemerkenswerterweise trotz verschiedener Zeitfunktionen des Diffusionskoeffizienten $\mathbf{D}(t) \neq \mathbf{D}_1(t) \neq \mathbf{D}_2(t) \neq \dots \neq \mathbf{D}_k(t)$ und unterschiedlicher, jedoch geeignet darauf abgestimmter Behandlungszeiten $t \neq t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k$ möglich.

Allerdings ist der Diffusionskoeffizient ursprünglich nicht eine zeitabhängige, sondern eine orts-, konzentrations- und vor allem temperaturabhängige Größe. Seine Temperaturabhängigkeit kann z.B., wie allgemein üblich, durch einen *ARRHENIUS*-Ansatz

$$\mathbf{D}(t) = D_0 \cdot e^{\frac{-Q}{\mathcal{R} \cdot \Theta(t)}} \quad (3.3.1.1-49)$$

¹³ Am realen Diffusionsgeschehen nehmen stets verschiedene Partikel, die sich hinsichtlich Art (*Diffusionskoeffizient*) und Form (*lamellar, faserförmig, sphäroidisch, prismatisch*) voneinander unterscheiden können, gleichzeitig teil (vgl. z.B. [SKA 74]). Diese Partikel werden, zumindest zeitweise, unabhängig nebeneinander existieren oder zueinander in „Konkurrenz“ geraten.

dargestellt werden, wobei die Temperatur allerdings bereits als zeitabhängige Prozeßfunktion berücksichtigt wird; $\mathcal{R} = 8,315 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ bezeichnet die universelle Gaskonstante. Einführen eines solcherart definierten Diffusionskoeffizienten in (3.3.1.1-16.2) ergibt schließlich - wenn noch geeignet auf die charakteristische, statistisch mittlere Partikelabmessung L (auch stellvertretend für den Radius R) bezogen wird - eine dimensionslose Größe, die als „thermische Aktivierung“ bezeichnet werden soll:

$$I_L(t) = \frac{D_0}{L^2} \cdot \int_0^t e^{\frac{-Q}{\mathcal{R}\cdot\Theta(\tau)}} \cdot d\tau. \quad (3.3.1.1-49.1)$$

Sie kumuliert den mit der Aktivierungsenergie Q gewichteten Temperatur-Zeit-Ablauf und charakterisiert damit für praktisch beliebig instationäre Verhältnisse die in einer Zeitspanne t insgesamt eingebrachte Menge an thermischer Aktivierung. Obwohl Aktivierungsenergie Q und Mengenfaktor D_0 zumindest in gewissen Temperatur-Zeitbereichen, in denen der werkstoffliche Reaktions- bzw. Diffusionsablauf seine Charakteristik nicht bzw. nicht nennenswert ändert¹⁴, als konstant angesehen werden können, besteht hierfür aus mathematisch-physikalischer Sicht - wie den Diffusionsaufgaben zu entnehmen war - keine Notwendigkeit, so daß sich sogar wesentlich allgemeiner auch für $D_0 = D_0(t) = D_0(t, \mathcal{I}(t))$ und $Q = Q(t) = Q(t, \mathcal{I}(t))$ betreffende Temperatur- bzw. Zeitabhängigkeiten berücksichtigen lassen:

$$I_L(t) = \frac{1}{L^2} \cdot \int_0^t D_0(\tau) \cdot e^{\frac{-Q(\tau)}{\mathcal{R}\cdot\Theta(\tau)}} \cdot d\tau. \quad (3.3.1.1-49.2)$$

Werden evtl. nicht ganz unberechtigte Bedenken, daß sich Werkstoffreaktionen allein auf der Grundlage von derartig stark vereinfachten Diffusionsmodellen überhaupt hinreichend brauchbar beschreiben lassen, weiterhin zurückgestellt, so läßt sich folgern, daß unterschiedlichste Wärmebehandlungsprozesse, mit denen auf thermischem Wege zielgerichtete Werkstoffbeeinflussung herbeizuführen ist, über die Beziehungen (3.3.1.1-49) unmittelbar miteinander vergleichbar werden.

So wird zum Beispiel ein Werkstoff¹⁵ bestimmten Ausgangszustandes, der Wärmebehandlungen nach zwei unterschiedlichen Temperatur-Zeit-Verläufen erfährt, praktisch dennoch gleiche End Eigenschaften aufweisen, sofern nur die Bedingung

$$\boxed{\int_0^{t_1} e^{\frac{-Q}{\mathcal{R}\cdot\Theta_1(\tau)}} \cdot d\tau = \int_0^{t_2} e^{\frac{-Q}{\mathcal{R}\cdot\Theta_2(\tau)}} \cdot d\tau} \quad (3.3.1.1-50)$$

eingehalten wird. Diese Beziehung gestattet sowohl den Vergleich praktisch beliebiger anisothermer Wärmebehandlungen untereinander als natürlich auch den Vergleich von anisothermen und isothermen Bedingungen. Auf diese Weise lassen sich insbesondere eine Äquivalenztemperatur $\Theta_{\bar{A}}$ und eine Äquivalenzzeit $t_{\bar{A}}$ definieren, die angeben, welche Temperatur und Zeit unter isothermen Bedingungen einzuhalten sind, damit sich das gleiche Ergebnis wie im anisothermen Fall einstellt - oder umgekehrt:

¹⁴ - solange z.B. Phasenänderungen und Keimbildungsvorgänge nicht auftreten -

¹⁵ Sofern er den Modellvoraussetzungen in etwa genügt, d.h., sofern die Umgebungskonzentration in erster Näherung zeitunabhängig ist und Konzentrationsquellen (bzw. -senken) weitestgehend fehlen und sofern diese Verhältnisse dann auch durch veränderte Temperatur-Zeit-Zyklen nicht nennenswert gestört werden!

$$t_{\dot{A}} \cdot e^{\frac{-Q}{\mathcal{R} \cdot \Theta_{\dot{A}}}} = \int_0^t e^{\frac{-Q}{\mathcal{R} \cdot \Theta(\tau)}} d\tau; \quad (3.3.1.1-50.1)$$

eine entsprechende Beziehung teilte kürzlich auch NEIDEL [NEI 95, *Gln. (74), (83)*] bzw. [NEI 95a, *Gl. (5)*] mit.

Im einfachsten Falle verhalten sich verschiedene rein isotherme Wärmebehandlungen genau dann zueinander äquivalent, wenn die Bedingung

$$t_1 \cdot e^{\frac{-Q}{\mathcal{R} \cdot \Theta_1}} = t_2 \cdot e^{\frac{-Q}{\mathcal{R} \cdot \Theta_2}} \quad (3.3.1.1-50.2)$$

eingehalten wird, eine Gleichung, die bereits in [MAY 66] angegeben worden war.

3.3.1.2 Reaktionskinetik

Diese durch Analyse des Diffusionsgeschehens erhaltenen Ergebnisse lassen sich auch auf der Grundlage kinetischer Grundgleichungen irreversibler Reaktionen herleiten. Obwohl die Fachdiskussion, welcher kinetische Ansatz als jeweils geeignetster für ein Problem oder eine Problemklasse anzusehen ist, noch nicht abgeschlossen zu sein scheint [BOY 77], [SCH 83], [RIC 91], haben sich zur Beschreibung von Rekristallisations- und Kornwachstumsprozessen Ansätze der Form

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt} = f(X) \cdot g(t) \quad (3.3.1.2-1)$$

bewährt und werden weitgehend akzeptiert. In dem Separationsansatz (3.3.1.2-1), der mit der Dgl. (3.3.1.1-47.1) für $\mathbf{r} = \bar{\omega} = 0$ auffallend korrespondiert, ist die Umsatzgeschwindigkeit \dot{X} einer Umsatzfunktion $f(X)$ direkt proportional mit einem im allgemeinen zeitabhängigen Proportionalitätsfaktor $g = g(t)$. Ein Vorteil des Ansatzes (3.3.1.2-1) besteht darin, daß die Lösung dieser Differentialgleichung durch Trennung der Variablen in vielen Fällen leicht herzustellen ist, zumindest sofern die Integration auf geschlossene Ausdrücke führt. Trennung der Variablen und Integration ergibt zunächst die Gleichung

$$F(X) = G(t) \quad (3.3.1.2-2)$$

mit
$$F(X) = \int_{X_0}^X \frac{1}{f(x)} \cdot dx \quad (3.3.1.2-2.1)$$

und
$$G(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.3.1.2-2.2)$$

Um die Integrationen explizit vornehmen zu können, sind die Funktionen $f(X)$ und $g(t)$ problem- bzw. aufgabenbezogen zu spezifizieren. Das werde beispielshalber zunächst für Rekristallisation, anschließend exemplarisch für Kornwachstum durchgeführt.

3.3.1.2.1 Rekristallisation

Zur Berechnung des Rekristallisationsgrades X werden im Schrifttum verschiedene Ansätze für die Umsatzfunktion $f(X)$ betrachtet. Im einfachsten Fall $f(X) := X$ ergibt sich die bereits bekannte Lösung (3.3.1.1-47.4). Als zur Beschreibung des Rekristallisationsablaufs besonders geeignet werden von [SCH 93a] Umsatzfunktionen der Form

$$f(X) = (1 - X) \cdot \left\{ \ln \frac{1}{1 - X} \right\}^p \quad (3.3.1.2-3)$$

angesehen. Der Parameter p ist mit dem sogen. *AVRAMI*-Exponenten q verbunden durch die Relation $p = 1 - \frac{1}{q}$. Wird nunmehr $F(X)$ nach (3.3.1.2-2.1) mit (3.3.1.2-3), z.B. unter Verwendung

der Substitution $u = \left(\ln \frac{1}{1 - x} \right)^{1-p}$, berechnet, in Gleichung (3.3.1.2-2) eingesetzt und nach X umgestellt, so erhält man

$$X(t) = 1 - e^{-\left\{ q \sqrt[q]{\ln \frac{1}{1 - X_0}} + \frac{1}{q} \cdot G(t) \right\}^q}, \quad (3.3.1.2-4)$$

wobei der Ausgangsrekristallisationsgrad $X_0 = X(t=t_0)$ nicht selten Null zu setzen sein wird, so daß noch kürzer zu schreiben ist:

$$X(t) = 1 - e^{-\left\{ \frac{1}{q} \cdot G(t) \right\}^q}. \quad (3.3.1.2-4.1)$$

Um schließlich die Funktion $G(t)$ bestimmen zu können, wird noch ein geeigneter Ansatz für $g(t)$ benötigt. Bei thermisch aktivierten Vorgängen wird auch hierfür fast immer ein *BOLTZMANN-ARRHENIUS*-Ansatz verwendet. Identifiziert man im vorliegenden Zusammenhang $g(t)$ mit (3.3.1.1-49), setzt formal den neuen Koeffizienten k_X für D_0 und bemerkt, daß $G(t)$ mit der Aktivierung $I(t)$ nach (3.3.1.1-49.1,2) übereinstimmt, so läßt sich der Rekristallisationsgrad explizit in Abhängigkeit von der Aktivierung darstellen gemäß

$$X(t) = 1 - e^{-\left[\frac{I_X(t)}{q} \right]^q} \quad (3.3.1.2-4.2)$$

mit
$$I_X(t) = k_X \cdot \int_{t_0}^t e^{\frac{-Q_X}{\mathcal{R} \cdot \Theta(\tau)}} d\tau. \quad (3.3.1.2-4.3)$$

Die Funktion (3.3.1.2-4.2) stellt mit (3.3.1.2-4.3) die auf „beliebige“ Temperatur-Zeit-Verläufe ausgedehnte Verallgemeinerung einer entsprechenden isothermen Gleichung dar, die letztlich auf Arbeiten von *KOLMOGOROV*, *JOHNSON-MEHL* und *AVRAMI* zurückgeht. Denn für zeitunabhängige Temperatur $\Theta(t) = \Theta_k = konst.$ und $t_0 = 0$ wird aus (3.3.1.2-4.2), (3.3.1.2-4.3) unmittelbar wieder die oft zitierte *AVRAMI*-Gleichung in der Form

$$X(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T} \right)^q} \quad (3.3.1.2-4.4)$$

mit der Zeitkonstante

$$T = \frac{q}{k_X} \cdot e^{\frac{Q_X}{\mathcal{R} \cdot \Theta_k}} \quad (3.3.1.2-4.5)$$

erhalten.

Aus den für anisotherme Verhältnisse abgeleiteten Beziehungen (3.3.1.2-4.2), (3.3.1.2-4.3) ist zu ersehen, daß auch hier allein die Funktion $I_X(t)$ für den Zeitablauf der Rekristallisation verantwortlich ist. Damit wird weiterhin deutlich, daß zur Erreichung gleicher Rekristallisationsgrade bei unterschiedlich instationären Wärmebehandlungen wiederum die Bedingungen

(3.3.1.1-50), (3.3.1.1-50.1) und (3.3.1.1-50.2) gelten, bzw. umgekehrt, daß jene Bedingungen auch aus (3.3.1.2-4.2) ganz unmittelbar hervorgehen.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß sich die in Kapitel 3.2.3 formulierte Aufgabe, eine elektrische Durchlauf-Widerstandsglühanlage thermisch genau so zu steuern, daß der Draht vorgegebene Eigenschaften annimmt, jetzt sogar formelmäßig geschlossen lösen läßt. Denn ausgehend von (3.3.1.2-1) kann nunmehr nach dem gesuchten Temperaturverlauf explizit aufgelöst werden

$$\Theta(t) = \frac{Q_X}{\mathcal{R}} \cdot \ln^{-1} \left(k_X \frac{f(\mathbf{X}(t))}{\dot{\mathbf{X}}(t)} \right), \quad (3.3.1.2-4.6)$$

wobei natürlich ein reaktionskinetisch zulässiger Zeitverlauf $\mathbf{X}(t)$ vorauszusetzen ist. Einsetzen von (3.3.1.2-4.6) in (3.2.3-1) liefert die erforderliche Leistung-Zeit-Abhängigkeit zur werkstoffgerechten Steuerung einer Durchlauf-Widerstandsglühanlage oder einer Wärmebehandlungsanlage ganz allgemein. Dabei ist zu beachten, daß Umwandlungsvorgänge i.allg. endotherm oder exotherm ablaufen - vgl. die betreffende Anmerkung im Anhang B.

So erfreulich dieses Ergebnis vom theoretischen Standpunkt aus auch ist, in der Praxis wird die Realisierung eines speziellen $\mathbf{X}(t)$ -Verlaufs an den thermischen Möglichkeiten konkreter Wärmebehandlungsanlagen i.allg. scheitern. Immerhin gibt es dann wenigstens zwei Alternativen, wofür (3.3.1.2-4.6) die Richtung vorgibt: Zum einen ließe sich aus der Menge aller mit der Wärmebehandlungsanlage realisierbaren Einstellungen vielleicht ein Temperaturverlauf $\Theta^*(t)$ herausfinden, der dem idealen am nächsten kommt¹⁶ und dabei die Werkstoffeigenschaften immer noch hinreichend realisiert. Zum anderen könnte umgekehrt aus der Menge aller in Frage kommender $\mathbf{X}(t)$ -Verläufe nach jenem $\mathbf{X}^*(t)$ -Verlauf gefragt werden, der unter realisierbaren Wärmebehandlungsbedingungen die geforderten Werkstoffeigenschaften am ehesten garantiert. Hierbei sind natürlich immer auch weitere technisch-ökonomische Bedingungen zu berücksichtigen, eine Aufgabe der Wärmebehandlungsoptimierung.

Angemerkt sei noch, daß sich die Anwendung obiger Beziehungen nicht ausschließlich auf den Rekristallisationsgrad X zu beschränken braucht, sondern daß auch alle unmittelbar von der Rekristallisation abhängenden mechanischen Werkstoffeigenschaften einer entsprechenden Beschreibung zugänglich werden, wenn diese Eigenschaften durch entsprechende Transformation auf das Intervall $(0, 1)$ geeignet bezogen werden.

3.3.1.2.2 Kornwachstum

Im Zusammenhang mit Fragen zum Kornwachstum werden in der Arbeit [BOU 93] zeitlich lineare Erwärmungs- und Abkühlungsverhältnisse und deren Vergleichbarkeit mit isothermer Wärmebehandlung untersucht. In dieser Arbeit wird auch eine der Gleichung (3.3.1.2-1) entsprechende kinetische Gleichung zur Berechnung des Kornwachstums bzw. der Korngröße \mathcal{D} herangezogen:

$$\dot{\mathcal{D}} \equiv \frac{d\mathcal{D}}{dt} = f(\mathcal{D}) \cdot g(t), \quad (3.3.1.2-5)$$

allerdings mit

$$f(\mathcal{D}) = n^{-1} \cdot \mathcal{D}^{-(n-1)}. \quad (3.3.1.2-6)$$

Die Funktion $g(t)$ sei wieder vom *BOLTZMANN-ARRHENIUS*-Typ (3.3.1.1-49), der Mengenfaktor werde jedoch mit $k_{\mathcal{D}}$ anstelle D_0 bezeichnet.

¹⁶ Das ist z.B. der Fall, wenn der Abstand $\|\Theta(t) - \Theta^*(t)\| = \sqrt{\int_0^{t_E} (\Theta(\tau) - \Theta^*(\tau))^2 \cdot d\tau}$ minimal wird.

Ohne mathematische Schwierigkeiten erhält man das zum Ergebnis (3.3.1.2-4) adäquate Resultat für die Korngröße

$$\mathcal{D}(t) = \sqrt[n]{\mathcal{D}_0^n + \mathbf{I}_{\mathcal{D}}(t)} \quad (3.3.1.2-7.1)$$

mit der Aktivierung

$$\mathbf{I}_{\mathcal{D}}(t) = k_{\mathcal{D}} \cdot \int_{t_0}^t e^{\frac{-Q_{\mathcal{D}}}{\mathcal{R} \cdot \Theta(\tau)}} \cdot d\tau \quad (3.3.1.2-7.2)$$

und der Ausgangskorngröße $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(t=t_0)$ sowie dem Korngrößenexponenten n .

Auch in diesem Falle wird also Vergleichbarkeit unterschiedlicher anisothermer oder auch isothermer Wärmebehandlungen durch die Bedingungen (3.3.1.1-50), (3.3.1.1-50.1) oder (3.3.1.1-50.2) herbeigeführt.

3.3.1.3 Verallgemeinerung

Die Ausführungen zu Diffusion und Reaktionskinetik haben gezeigt, daß sich die Kriterien zur Beurteilung der Wirksamkeit unterschiedlicher Wärmebehandlungen als praktisch unabhängig vom jeweils untersuchten Problem erweisen. Das ist zumindest für die Betrachtungen zu Rekristallisation und Kornwachstum zu erwarten gewesen, da von der jeweils prinzipiell gleichen Differentialgleichung auszugehen war. Für einen Separationsansatz (3.3.1.2-1) gilt nämlich, daß die - wie auch immer - technisch sinnvoll vorgegebene „Prozeßfunktion“ $\mathbf{g}(t)$ den Zeitablauf einer Umsetzung gemäß (3.3.1.2-2) mit (3.3.1.2-2.2) durch die Gleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) = \int_{t_0}^t \mathbf{g}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.3.1.3-1)$$

bestimmt. Deshalb läßt sich verallgemeinernd feststellen:

Solange eine Differentialgleichung der Form (3.3.1.2-1) einen thermisch aktivierten Umwandlungsvorgang hinreichend gut zu approximieren gestattet, lassen sich Umwandlungsfortschritte für unterschiedliche, zeitabhängige Aktivierungen durch (3.3.1.3-1) messen und miteinander vergleichen. Prinzipiell darf $\mathbf{g}(t)$ sogar eine gegenüber dem *ARRHENIUS*-Ansatz abweichende Form annehmen.

Grundsätzlich sind wegen (3.3.1.3-1) etwa gleiche Umwandlungszustände auf k verschiedenen Wegen immer dann erreichbar, wenn

$$\int_{(t_1)} \mathbf{g}_1(\tau) \cdot d\tau = \int_{(t_2)} \mathbf{g}_2(\tau) \cdot d\tau = \dots = \int_{(t_k)} \mathbf{g}_k(\tau) \cdot d\tau \quad (3.3.1.3-2)$$

gewährleistet werden kann. Alle Wärmebehandlungen, die einer Gleichungskette (3.3.1.3-2) genügen, sind - natürlich nur im Rahmen eines konkret durch den werkstoffphysikalischen Zusammenhang gegebenen Geltungsbereichs - als einander gleichwertig anzusehen.

Daß diese auf anderem Wege gewonnene Beziehung das formal exakte Gegenstück zu Gleichungskette (3.3.1.1-48) darstellt, ist sehr befriedigend und erklärt sich letztlich aus der subtilen Verwandtschaft der Strukturen von Diffusionsgleichungen des Typs (3.3.1.1-3) bzw. (3.3.1.1-47.1) oder (3.3.1.1-47.4) und kinetischen Reaktionsgleichungen des Typs (3.3.1.2-1) oder (3.3.1.2-4.2).

Wie gezeigt, ist für den Zeitablauf von thermisch aktivierten Reaktionen allein die rechte Seite der Gleichung (3.3.1.3-1) verantwortlich. Sie beschreibt die während einer Zeitdauer $(t-t_0)$ in den Werkstoff insgesamt eingebrachte „Aktivierung“, sofern die Zeitfunktion $g(t)$ den Vorgang gut genug repräsentiert. Zur Beschreibung thermisch aktivierter Entfestigungsvorgänge hat sich der einfache Ansatz (3.3.1.1-49) nach *ARRHENIUS* besonders bewährt; vgl. die spezifizierten $I(t)$ -Funktionen (3.3.1.1-49.1,2), (3.3.1.2-4.3) und (3.3.1.2-7.2). Bei Phasenumwandlungsvorgängen dagegen wird ein Produktansatz aus *ARRHENIUS*-Funktionen bevorzugt, um die Prozesse von Keimbildung und Keimwachstum entsprechend berücksichtigen zu können [ASK 96, Kap. 11.2].

Es ist mit diesen Ansätzen jedoch auch zu erkennen, daß im Prinzip für alle Temperaturen $\Theta(t) > 0$ - auch dann, wenn sie nur wenig größer als Null sind - bei endlichen Zeitspannen $(t-t_0) > 0$ stets auch die Aktivierung $I(t) > 0$ ist, also endlich bleibt, was zwangsläufig $F(X) > 0$ und damit letztlich $X > 0$ zur Folge hat. Im Experiment dagegen wird immer erst oberhalb gewisser Schwellenwerte von Temperatur und Zeit, also oberhalb von Mindest- bzw. Bezugstemperaturen Θ_B oder oberhalb sog. Inkubationszeiten t_B , d.h., erst für $\Theta(t) \geq \Theta_B > 0$ und $t > t_B > 0$, eine nennenswerte, meßbare Werkstoffreaktion beobachtet [KLI 74, Kap. 4.2], [GOT 98, Kap. 7.5]. Damit zeigt sich, daß die einfache *ARRHENIUS*-Beziehung in der bisher verwendeten Form den Vorgang offenbar nicht hinreichend realistisch beschreibt.

Es wird deshalb für die Zeitfunktion $g(t)$ ein modifizierter *ARRHENIUS*-Ansatz eingeführt:

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \Theta(t) \leq \Theta_B \text{ oder } 0 \leq t \leq t_B \\ k_B \cdot e^{\frac{-Q_B}{R \cdot (\Theta(t) - \Theta_B)}} & \text{sonst, wobei i.allg. } t_B = t_B(\Theta_B) \text{ gilt.} \end{cases} \quad (3.3.1.3-3)$$

Dieser Ansatz vermeidet die aufgezeigte Schwierigkeit und enthält den ursprünglichen *ARRHENIUS*-Ansatz im Grenzfall mit $\Theta_B = t_B = 0$ weiterhin. Allerdings erfordert er zusätzlich die Kenntnis der jeweiligen Bezugstemperatur Θ_B sowie der Inkubationszeit t_B , die von der Bezugstemperatur Θ_B i.allg. selbst abhängt. Die Bezugstemperatur stellt gemäß Definition (3.3.1.3-3) eine asymptotische Grenztemperatur dar. Sie trennt den Temperaturbereich, in dem der Werkstoff niemals eine Reaktion zeigt - welche Zeitdauer auch verstreicht - von dem für die Wärmebehandlung interessanteren Temperaturbereich, in dem Umwandlungs-, Aushärtungs- und Entfestigungsvorgänge (z.B. Rekristallisation, Kornwachstum) ablaufen. Im einfachsten Fall läßt sich das reaktionskinetische Verhalten eines Werkstoffes durch das Wertetripel k_B , Θ_B und Q_B in einem einseitig nach unten abgeschlossenen Temperatur-Zeit-Bereich eindeutig festlegen.

Die Gleichung $\Theta(t) - \Theta_B = 0$ in Verbindung mit

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} \Big|_{(t=t_j)} \neq 0 \quad (3.3.1.3-3.1)$$

liefert jene Zeitpunkte $t = t_j$, an denen die Prozeßtemperatur $\Theta(t)$ die Bezugstemperatur Θ_B über- oder unterschreitet; das kann an keiner, an genau einer oder auch an mehreren n Stellen der Fall sein. Damit läßt sich für $j = 0, 1, 2, \dots, n$, d.h. für $(n+1)$ Zeitintervalle $g(t)$ nach (3.3.1.3-3) auch zeitbezogen so formulieren:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t_{2j-1} \leq t \leq t_{2j} \\ k_B \cdot e^{\frac{-Q_B}{R \cdot (\Theta(t) - \Theta_B)}} & \text{für } t_{2j} < t < t_{2j+1}, \end{cases} \quad (3.3.1.3-3.2)$$

wobei diese Indizierung davon ausgeht, daß im ersten Zeitabschnitt, d.h., in $t_0 < t < t_1$, für die Prozeßfunktion $g(t) > 0$ gilt.

Nach Einführen dieses Ansatzes in (3.3.1.3-1) ergibt sich, wenn $[n/2]$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $n/2$ ist, bezeichnet:

$$F(X(t)) = k_B \cdot \sum_{i=1}^{[n/2]} \left\{ \int_{t_{2(i-1)}}^{t_{2i-1}} e^{\frac{-Q_B}{R \cdot (\Theta(\tau) - \Theta_B)}} \cdot d\tau \right\}. \quad (3.3.1.3-4)$$

Die Integrale der Form

$$J_a(t) = \int_{t_a}^t e^{\frac{-Q_B}{R \cdot (\Theta(\tau) - \Theta_B)}} \cdot d\tau \equiv \int_{t_a}^t e^{\frac{-Q_B}{R \cdot (\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_B)}} \cdot d\tau$$

können mit numerischen, teilweise auch mit analytischen Methoden ausgewertet werden.

Außerdem ist es infolge der Differenzbildung zwischen Prozeß- und Bezugstemperatur $\Theta(t) - \Theta_B$ erlaubt, an Stelle der thermodynamischen Temperaturen Θ auf Temperaturen \mathcal{G} überzugehen, die auf andere Temperaturskalen bezogen sind. Für einige häufiger auftretende Temperatur-Zeit-Funktionen lassen sich die entsprechenden Integrale explizit darstellen, worauf nur verwiesen sei [MÜL 94, Kap. 3.2].

Es wurde bereits im Zusammenhang mit der Formulierung der Aktivierung (3.3.1.1-49.2) festgestellt, daß es immer bei Auftreten von Änderungen der Phasenzusammensetzung oder bei Keimbildungsvorgängen erforderlich ist, Mengenfaktor und Aktivierungsenergie als von Zeit bzw. Temperatur abhängig zu betrachten (vgl. auch [OTT 96]). Außerdem ist bei mehrphasigen Werkstoffen stets davon auszugehen, daß die thermisch aktivierte, kumulative Werkstoffreaktion nicht nur von einem, sondern von verschiedenen, gleichzeitig oder auch zeitlich versetzt wirkenden Reaktionsmechanismen in entsprechender Weise beeinflusst wird - vgl. z.B. [GOR 74], [HEL 74], [KEH 77], [VOL 89, Kap. 2.1.2], [KLU 94, Kap. 13.5, 13.7]. Unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse läßt sich dann die Prozeßgleichung (3.3.1.3-1) auch hierfür durch

$$F_j(X_j(t)) = I_j(t) \quad (3.3.1.3-5)$$

weiter verallgemeinern, indem die zu m unterschiedlichen Reaktionsmechanismen gehörenden Aktivierungen

$$I_j(t, \mathcal{G}(t)) := \int_{t_j}^t \theta(\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_j) \cdot k_j(\tau) \cdot e^{\frac{-Q_j(\tau)}{R \cdot (\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_j)}} \cdot d\tau; \quad (3.3.1.3-5.1)$$

zur Gesamtreaktion mit den Gewichten γ_j anteilig beitragen:

$$X = \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot X_j(I_j) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^m \gamma_j = 1; \quad (3.3.1.3-5.2)$$

schreibvereinfachend wurde bei den mit j indizierten Parametern der Index B fortgelassen.

Das Ergebnis der Werkstoffreaktion $X = X(I)$ hängt damit, wenigstens solange die m Reaktionsmechanismen wechselwirkungsfrei ablaufen, von der gewichteten Summe der Einzel-

reaktionen ab. Der Vergleich zweier Wärmebehandlungen $\{t_1, \mathcal{G}_1(t)\}$ und $\{t_2, \mathcal{G}_2(t)\}$ wird nun nicht mehr durch (3.3.1.1-50), sondern allgemeiner durch

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \mathbf{X}_j(I_j(t_1, \mathcal{G}_1(t))) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \mathbf{X}_j(I_j(t_2, \mathcal{G}_2(t))) \quad (3.3.1.3-6)$$

ermöglicht.

3.3.2 Parameteridentifikation

Die Hauptschwierigkeit im Hinblick auf konkrete Anwendungen liegt darin, daß die Parameter bzw. Parameterfunktionen für Aktivierungsenergie, Mengenfaktor und Bezugs- bzw. Grenztemperatur zunächst noch unbekannt sind. Deren quantitative Bestimmung allein auf theoretischem Wege, z.B. aus festkörpertheoretisch begründeten Modellen und metallphysikalisch elementaren Stoffwerten heraus, ist gegenwärtig noch nicht möglich und wird auf diesem Wege auch für die nähere Zukunft mit der nötigen Genauigkeit kaum zu erwarten sein. Alternativ bietet sich jedoch an, die betreffenden kinetischen Parameter k_j , \mathcal{G}_j und Q_j (bzw. Parameterfunktionen) und, je nach Aufgabenstellung und Gestalt der Funktionen $F(\cdot)$ bzw. $\mathbf{X}(\cdot)$, ggf. weitere Parameter, wie z.B. *AVRAMI*- oder Korngößenexponenten q_j , n_j , auf empirischem bzw. halbempirischem Wege unter Einbeziehung experimenteller Ergebnisse zu approximieren.

Allerdings handelt es sich auch hierbei noch immer um eine sowohl experimentell aufwendige wie mathematisch-numerisch höchst anspruchsvolle Aufgabe. Durch eine „optimale“ Bestimmung dieser Modellparameter wird das Modell gewissermaßen geeicht. Hierbei handelt es sich um inverse, nichtlineare Probleme, die sich in numerischer Hinsicht z.T. als recht problematisch herausstellen können [HOF 99], [ZEI 96, Kap. 1.12.1.8]. Besonders im Falle von Parameterfunktionen wird eine Regression - wenn überhaupt - nur gelingen, wenn Informationen über deren qualitatives Verhalten vorliegen und ein entsprechender Funktionsansatz aufgestellt werden kann; konkretere Untersuchungen hierzu sind noch nicht angestellt worden.

3.3.2.1 Numerisches Verfahren

Bei der Parameterberechnung für m Reaktionsmechanismen auf der Grundlage empirisch-experimenteller Daten kann praktisch so vorgegangen werden, daß zu einer bestimmten Anzahl $N \gg N_p$ an Meßwerten der Umsatz- bzw. Zielgröße \mathbf{X} für Zeitpunkte $t = t_n$ eine Lösung des folgenden diskreten Quadratmittelpblems aufgesucht wird:

$$S = S(q_j, k_j, \mathcal{G}_j, Q_j) = \left\| \mathbf{X}(t, \mathcal{G}(t); q_j, k_j, \mathcal{G}_j, Q_j) - \mathbf{X} \right\|^2 \\ = \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{X}(t_n, \mathcal{G}_n(t); q_j, k_j, \mathcal{G}_j, Q_j) - X_n \right]^2 \xrightarrow{(q_j, k_j, \mathcal{G}_j, Q_j)} \mathbf{MIN}; \quad (3.3.2-1)$$

verschieden indizierte Temperaturverläufe $\mathcal{G}_n(t)$ und $\mathcal{G}_k(t)$ brauchen sich nicht notwendigerweise voneinander zu unterscheiden. Die Anzahl der insgesamt zu bestimmenden Parameter, für die ggf. noch Nebenbedingungen zu formulieren sind, ergibt sich wegen $j = 1, 2, \dots, m$ hier speziell zu $N_p = 4 \cdot m$.

Im Interesse einer möglichst guten Modellanpassung ist es wichtig - wie bei Ausgleichsproblemen grundsätzlich -, daß neben dem Vorliegen einer hinreichend großen Anzahl geeignet genauer

Meßwerte insbesondere auch der Wertebereich der Zielgröße $X_n = \mathbf{X}(t_n, \mathcal{G}_n(t))$ den vom Modell insgesamt zu repräsentierenden Bereich geeignet überdeckt. Zur konkreten numerischen Behandlung nichtlinearer Quadratmittelprobleme (3.3.2-1) sind Hinweise z.B. in [SCH 91, Kap. 7], [FAI 94, Kap. 10] und - mit Einschränkungen - in [HÄF 92, Kap. 10] zu finden. Man kann versuchen auf entsprechende Standardsoftware zurückzugreifen, wie sie über National Algorithms Group (NAG) und die International Mathematics and Statistics Library (IMSL) zu erhalten ist; vgl. [FAI 94, Kap. 10.5 + Anhang B]. Aber selbst kommerzielle *Windows*-Programmpakete wie z.B. *Mathematica* und *TableCurve*¹⁷ besitzen Routinen zum Lösen nichtlinearer Quadratmittelprobleme, die insbesondere auch wegen komfortabler Visualisierungs- und Graphikfähigkeiten vorteilhaft herangezogen werden können¹⁸.

Allerdings kann es selbst bei Nutzung von Standardsoftware noch nötig oder zweckmäßig sein, eigene Parameterstartwerte aus dem konkreten Modellansatz heraus abzuschätzen - Startwerte, wie sie die Verfahren der nichtlinearen Quadratmittelapproximation, z.B. nach *LEVENBERG-MARQUARDT* [FAI 94, Kap. 10.5] oder als regularisierte *GAUß-NEWTON*-Version, in jedem Falle benötigen; hierzu sei beispielshalber auf den Anhang B verwiesen.

Letztlich entscheidet die Güte der Korrelation zwischen den Meßwerten und den mit den Modellparametern ermittelten Rechenwerten über die Annahme oder Ablehnung des konkreten Modells. Im Falle einer Ablehnung ist zunächst zu prüfen, ob durch eine geeignete Unterteilung des experimentell untersuchten Temperatur-Zeit-Bereichs eine grundsätzlich bessere Korrelation für Teilbereiche erzielt werden kann. Das würde dann z.B. darauf hinweisen, daß sich die Reaktionsabläufe im Werkstoff in diesen - strenggenommen nur mit einer gewissen Unschärfe gegeneinander abgrenzbaren - Temperatur-Zeit-Bereichen wesentlich voneinander unterscheiden bezüglich der Intensität (Größenordnung, Quantität) oder sogar der Art (Verlauf, Qualität). Führt eine Unterteilung in kleinere Temperatur-Zeit-Bereiche zu keinem befriedigenden Ergebnis, so muß vermutet werden, daß entweder die Annahme konstanter bzw. abschnittsweise konstanter Modellparameter nicht gerechtfertigt war, oder aber, daß die Funktionen $\mathbf{X}(\cdot)$, $\mathbf{I}(\cdot)$ in der verwendeten Form dem Reaktionsverhalten des Werkstoffes prinzipiell nicht hinreichend Rechnung tragen und die Modellvorstellungen entsprechend weiterzuentwickeln sind.

3.3.2.2 Beispiel

Im Rahmen eines Forschungsvorhabens des Instituts für Metallformung zur Untersuchung des statischen Entfestigungsverhaltens von kaltverfestigten Drähten aus verschiedenen Ni- und Cu-Legierungen sind umfangreiche Meß- und Prüfergebnisse entstanden [DUS 97]. Diese Wärmebehandlungsresultate sind auszuwerten und in ihrer Zeit-Temperatur-Abhängigkeit durch einen geeigneten reaktionskinetischen Modellansatz zu approximieren.

Aus der Reihe der untersuchten Ni-Legierungen wird beispielshalber die austenitische NiCr2Mn-Legierung herangezogen, die auch als Werkstoff für Zündkerzenelektroden verwendet wird. Sie enthält neben 95% Ni noch 1,75% Cr, 2% Mn, 0,3% Ti, 0,17% Zr, 0,04% Co, 0,017% Al und 0,012% C. Die Entfestigungsglühungen wurden an Drähten mit einem Durchmesser von 2,2 mm bei einem Vorumformgrad von $\varphi = 2$ in einem Wärmerohr im Labor-Muffelofen unter Schutzatmosphäre durchgeführt. Die Wärmebehandlungsbedingungen sowie erste Ergebnisse der techno-

¹⁷ *TableCurve3D* ist bis hin zur Graphik komfortabel, allerdings (zumindest in der Version 2) nur mit gewissen Einschränkungen für anisotherme Verhältnisse geeignet.

¹⁸ Nur am Rande sei vermerkt, daß sogar zwei für Pocket-PC *HP48GX* geschriebene ProgrammROUTINEN, zum einen als gedämpftes *GAUß-NEWTON*-Verfahren, zum anderen als *Trust-Region-GAUß-NEWTON*-Verfahren auf der Basis der Algorithmen [SCH 91, Kap. 7, Ziffer 7.5.4 und 7.5.7] zufriedenstellend laufen - von den inakzeptabel hohen Rechenzeiten einmal abgesehen. Achtung: In [SCH 91, Kap. 7, Ziffer 7.5.4] ist Zeile SK2 zu korrigieren in

$$\mathbf{While} \left[\left\| \mathbf{F}^k \right\|^2 - \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{s}^k) \right\|^2 \right] < \delta \cdot \left[\left\| \mathbf{F}^k \right\|^2 - \left\| \mathbf{F}^k + \alpha_k \mathbf{J}_k \mathbf{s}^k \right\|^2 \right] \mathbf{do} \alpha_k := \rho * \alpha_k.$$

logischen Werkstoffprüfung (Zugfestigkeit σ_{ZB} , 0,2-Dehngrenze $\sigma_{0,2}$, Bruchdehnung ε_{ZB} und deren auf das Intervall $(0, 1)$ linear transformierte Abhängigkeiten X_σ, X_ε) sind der Tabelle des Anhangs B zu entnehmen¹⁹. Die Drahterwärmung bis zum Beharrungszustand zeigt Bild 3.3-1.

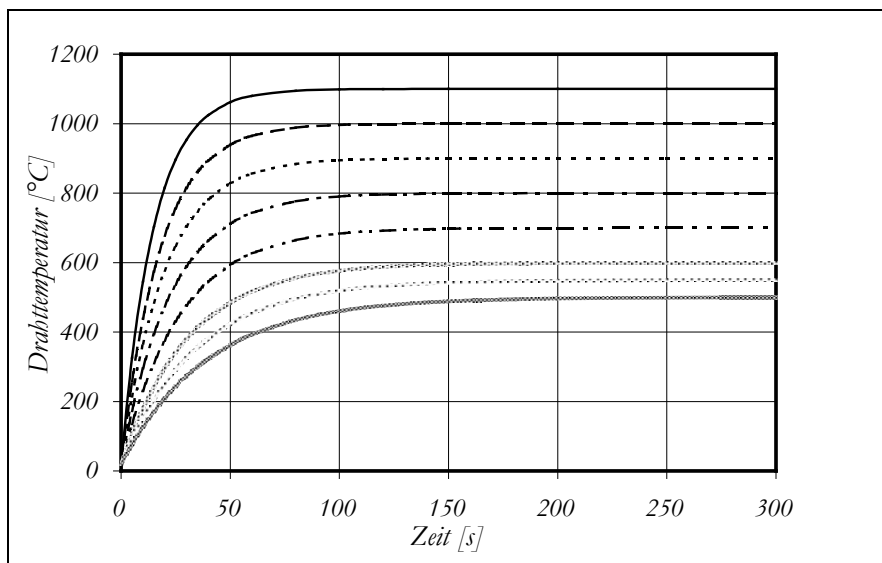


Bild 3.3-1: Drahterwärmung im Laborofen

Es ist zu erkennen, daß die Aufheizphase, zumindest für die Versuche mit den kürzeren Wärmebehandlungszeiten von 30s, 60s, 90s und 120s nicht vernachlässigt werden darf. Im Gegensatz dazu fand die Abkühlung der relativ dünnen Drahtproben im Wasserbad so rasch statt, daß sie vereinfachend als plötzlicher, zeitloser Vorgang betrachtet werden kann.

Diese Drahttemperaturverläufe, wie sie sich bei Ofenerwärmung ergeben haben, lassen sich in guter Näherung durch einen Ansatz - vgl. (A2.3.3.2-3.2)

$$\vartheta_D(t) \approx \vartheta_A + (\vartheta_U - \vartheta_A) \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (3.3.2.2-1)$$

mit der Anfangstemperatur $\vartheta_A \approx 20\text{ °C}$ und der Zeitkonstante

$$T = T(\vartheta_U) = T_0 + T_1 \cdot \vartheta_U + T_2 \cdot \vartheta_U^2;$$

$$T_0 = 74,19\text{ s} \quad T_1 = -0,08985\text{ s } ^\circ\text{C}^{-1} \quad T_2 = 0,00003298\text{ s } ^\circ\text{C}^{-2}$$

beschreiben.

Im konkreten Beispiel zeigt der Vergleich mit den entsprechenden Werten vor der Wärmebehandlung (Ausgangseigenschaften: $\sigma_{ZB} = 1125\text{ MPa}$, $\sigma_{0,2} = 1114\text{ MPa}$, $\varepsilon_{ZB} = 1,1\%$), daß Aushärtungserscheinungen nicht aufgetreten sind - im Gegensatz zu hochwarmfesten Legierungen [HEN 76, S. 321ff], wo die analytische Beschreibung der Werkstoffeigenschaften nach Wärmebehandlung modifiziert vorzunehmen ist (vgl. Kap. 3.3.3).

Für die Approximation des thermisch aktivierten Entfestigungsverhaltens werden Modellgleichungen gemäß (3.3.1.3-5) verwendet. Bei Berücksichtigung von m Aktivierungsreaktionen sind die Festigkeitseigenschaften (Zug- und Umformfestigkeit, Härte) des Werkstoffs durch

¹⁹ Die genannten Werkstoffprüfwerte stehen beispielhalber und stellvertretend für alle Werkstoffeigenschaften, die sich auf mech. Spannungs- oder Dehnungsgrößen beziehen. Um das besser zum Ausdruck zu bringen, wird von der speziellen in der Werkstoffprüfung üblichen Notation, diese Größen mit R und A zu bezeichnen, abgewichen. Stattdessen werden nach DIN 1304 die Symbole σ für die mech. Spannung und ε für die Dehnung bevorzugt.

$$\sigma = \sigma_{MIN} + (\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}) \cdot \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot e^{-\left(\frac{I_j(t, \vartheta(t))}{q_j}\right)^{q_j}} \quad (3.3.2.2-2)$$

und für die Bruchdehnung oder die Brucheinschnürung durch

$$\varepsilon = \varepsilon_{MIN} + (\varepsilon_{MAX} - \varepsilon_{MIN}) \cdot \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{I_j(t, \vartheta(t))}{q_j}\right)^{q_j}} \right) \quad (3.3.2.2-3)$$

gegeben. Eine ggf. vorhandene Zeitabhängigkeit der Parameter, wie sie in den Aktivierungen (3.3.1.3-5.1) zugelassen ist (und die bei anisothermen Temperaturverhältnissen infolge einer Temperaturabhängigkeit dieser Parameter i.allg. auch in Erscheinung tritt), werde im vorliegenden Zusammenhang vernachlässigt, d.h., diese Parameter sind vereinfachend als konstant anzusehen:

$$I_j(t) = k_{Bj} \cdot \int_0^t \theta(\vartheta(\tau) - \vartheta_{Bj}) \cdot e^{-\frac{Q_{Bj}}{R \cdot (\vartheta(\tau) - \vartheta_{Bj})}} \cdot d\tau; \quad (3.3.2.2-4)$$

Mengenfaktor $k_B = konst.$ in $[1/s]$, Aktivierungsenergie $Q_B = konst.$ in $[J/mol]$.

Für die Identifikation der Parameter läßt sich das Programm *TableCurve3D* vorteilhaft nutzen. Einen guten Überblick über das thermisch aktivierte Entfestigungsverhalten erhält man bereits dann, wenn die Parameter zwar für anisotherme Verhältnisse berechnet, jedoch die Werkstoffeigenschaften (z.B. Zug- und Umformfestigkeit, Bruchdehnung) zunächst einmal in Abhängigkeit der zeitunabhängigen Ofentemperaturen und der Wärmebehandlungsdauern dargestellt werden. Die Zugfestigkeit in Abhängigkeit von Ofentemperatur und Ofen- bzw. Glühzeit, berechnet für einen Reaktionsmechanismus bzw. eine Aktivierung ($m = 1$), zeigt Bild 3.3-2.1.

Bild 3.3-2.1:

Zugfestigkeit von NiCr2Mn-
Drähten ($d = 2,2 \text{ mm}$,
 $\varphi = 2$) nach
Wärmebehandlung

($q = 0,84256$;

$k_B = 2916,3 \text{ s}^{-1}$;

$\vartheta_B = -273 \text{ °C}$;

$Q_B = 116927 \text{ J/mol}$;

$\sigma_{ZB_{MIN}} = 544,1 \text{ MPa}$;

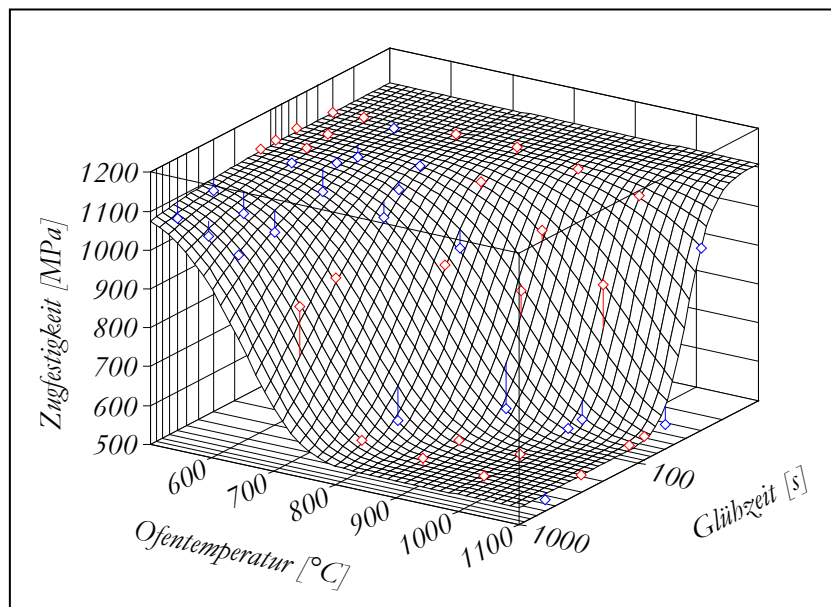
$\sigma_{ZB_{MAX}} = 1108,9 \text{ MPa}$;

Standardabweichung

$\delta\sigma_{ZB} \approx 38,9 \text{ MPa}$;

Bestimmtheitsmaß

$r^2 \approx 0,972$)



Meßwerte, die oberhalb der Regressionsfläche liegen, sind durch rote, jene, die darunter liegen, sind durch blaue Rauten kenntlich gemacht; die Länge des Strichs am Rautensymbol entspricht dem Ordinatenabstand des Meßwertes zur Regressionsfläche.

Für den Werkstoffprüfwert „0,2%-Dehngrenze“, der ersatzweise auch als Anhalt für die Fließspannung herangezogen wird und deshalb - in Anlehnung an den Begriff Zugfestigkeit - nachfolgend mit Umform- bzw. Fließfestigkeit bezeichnet wird, wurden folgende Abhängigkeiten gefunden:

Bild 3.3-3.1:

Umformfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten ($d = 2,2 \text{ mm}$, $\varphi = 2$) nach Wärmebehandlung

$$(q = 0,79024; k_B = 3748,9 \text{ s}^{-1};$$

$$g_B = -273 \text{ °C};$$

$$Q_B = 121064 \text{ J/mol};$$

$$\sigma_{0,2_{MIN}} = 140,4 \text{ MPa};$$

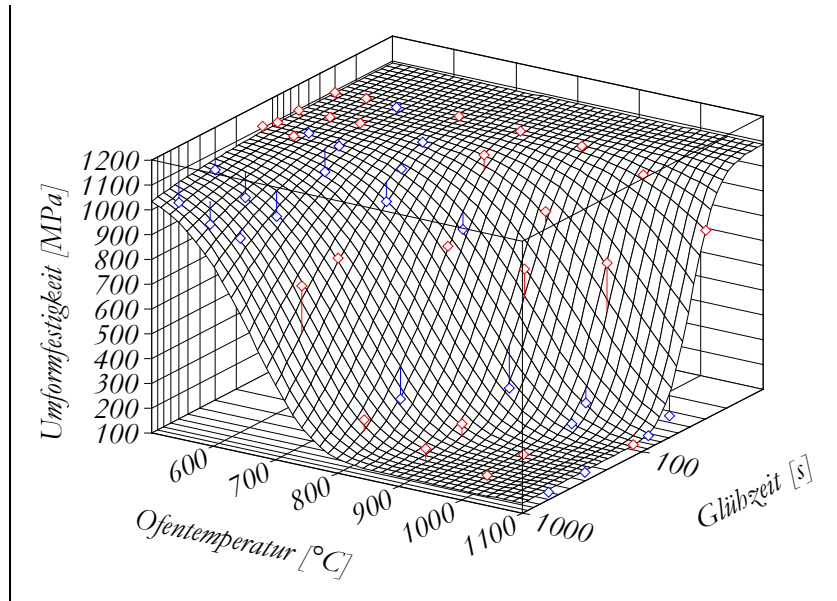
$$\sigma_{0,2_{MAX}} = 1088,7 \text{ MPa};$$

Standardabweichung

$$\delta\sigma_{0,2} \approx 63,4 \text{ MPa};$$

Bestimmtheitsmaß

$$r^2 \approx 0,972)$$



Ganz analog läßt sich die Bruchdehnung für eine einzelne Aktivierungsreaktion darstellen:

Bild 3.3-4.1:

Bruchdehnung von NiCr2Mn-Drähten ($d = 2,2 \text{ mm}$, $\varphi = 2$) nach Wärmebehandlung

$$(q = 0,89971; k_B = 5207,4 \text{ s}^{-1};$$

$$g_B = -273 \text{ °C};$$

$$Q_B = 125701 \text{ J/mol};$$

$$\varepsilon_{MIN} = 2,871 \text{ %};$$

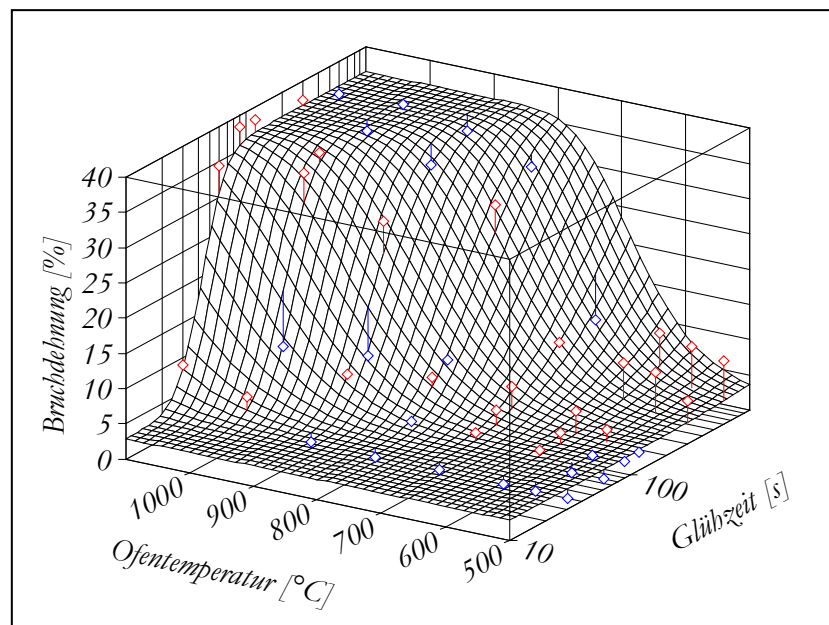
$$\varepsilon_{MAX} = 36,5 \text{ %};$$

Standardabweichung

$$\delta\varepsilon_{ZB} \approx 3,0 \text{ %};$$

Bestimmtheitsmaß

$$r^2 \approx 0,950)$$



Besonders im Bereich niedriger Temperaturen und längerer Zeiten ist bei Berücksichtigung nur eines Aktivierungsmechanismus die Übereinstimmung zwischen Meß- und Modellwerten zunächst nicht so gut. Eine bessere Anpassung an die Meßwerte wird jedoch erreicht, wenn weitere Freiheitsgrade, z.B. infolge eines parallel ablaufenden zweiten Reaktions- bzw. Aktivierungsmechanismus zugelassen werden.

Bild 3.3-2.2:

Zugfestigkeit von NiCr2Mn-
Drähten ($d = 2,2 \text{ mm}$,
 $\varphi = 2$) nach
Wärmebehandlung

$$(q_1 = 21,047;$$

$$k_{B1} = 7,8077 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B1} = 504,5 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{B1} = 8983 \text{ J/mol};$$

$$q_2 = 0,64406;$$

$$k_{B2} = 741,85 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B2} = -273 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{B2} = 95816 \text{ J/mol};$$

$$\sigma_{ZB_{MIN}} = 561 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{ZB_{MAX}} = 1122 \text{ MPa};$$

Standardabweichung $\delta\sigma_{ZB} \approx 15,4 \text{ MPa}$; Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,996$)

Die günstigsten Aktivierungsgewichte wurden zu $\gamma_1 = 0,54$ und $\gamma_2 = 0,46$ ermittelt.

Sowohl die optische Übereinstimmung zwischen Meßwerten und „Modellnetz“ als auch der Vergleich mit Bild 3.3-2.1 (Bestimmtheitsmaß und Standardabweichung) lassen die deutliche Verbesserung erkennen, die durch Berücksichtigung eines zweiten Aktivierungsmechanismus erreicht wird. Das trifft analog auch auf Umformfestigkeit und Bruchdehnung zu:

Bild 3.3-3.2:

Umformfestigkeit von
NiCr2Mn-Drähten
($d = 2,2 \text{ mm}$, $\varphi = 2$) nach
Wärmebehandlung

$$(q_1 = 22,525;$$

$$k_{B1} = 7,9457 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B1} = 507,5 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{B1} = 8714 \text{ J/mol};$$

$$q_2 = 0,52517;$$

$$k_{B2} = 417,61 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B2} = -273 \text{ }^\circ\text{C};$$

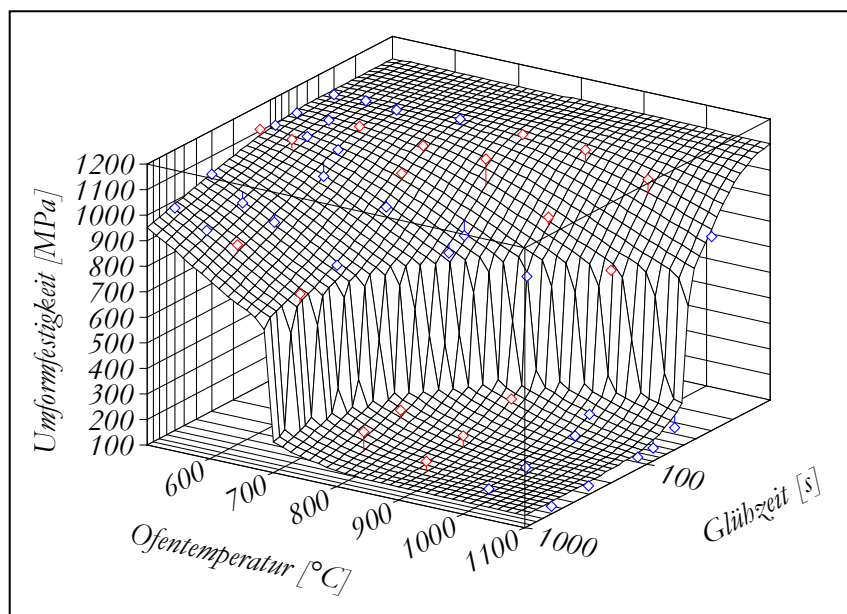
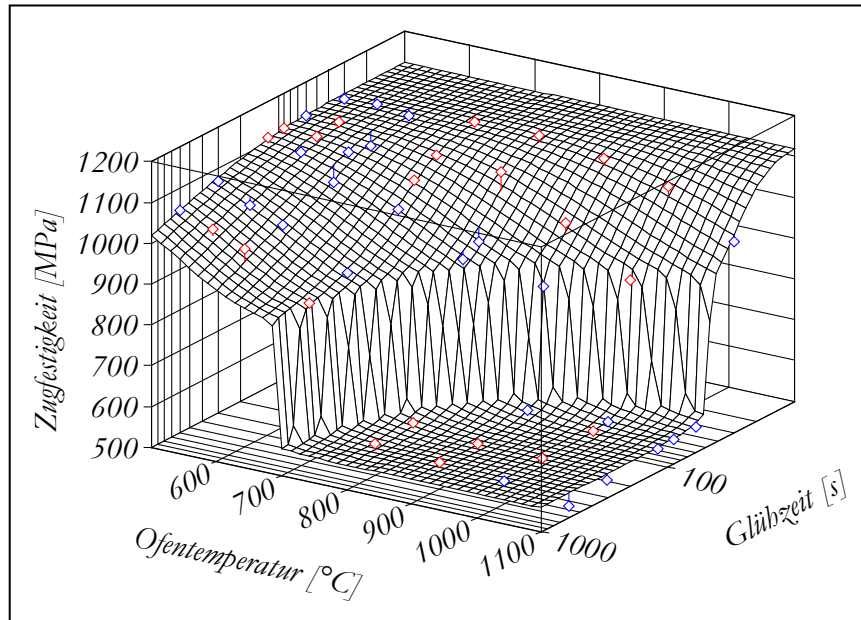
$$Q_{B2} = 98638 \text{ J/mol};$$

$$\sigma_{0,2_{MIN}} = 150 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{0,2_{MAX}} = 1112 \text{ MPa};$$

Standardabweichung $\delta\sigma_{0,2} \approx 30,9 \text{ MPa}$; Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,994$)

Die günstigsten Gewichte wurden zu $\gamma_1 = 0,46$ und $\gamma_2 = 0,54$ ermittelt.



Für die Bruchdehnung ergibt sich die folgende Darstellung.

Bild 3.3-4.2:

Bruchdehnung von
NiCr2Mn-Drähten
($d = 2,2 \text{ mm}$, $\varphi = 2$) nach
Wärmebehandlung

$$q_1 = 8,3487;$$

$$k_{B1} = 13,256 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B1} = 444,0 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{B1} = 17293 \text{ J/mol};$$

$$q_2 = 0,77539;$$

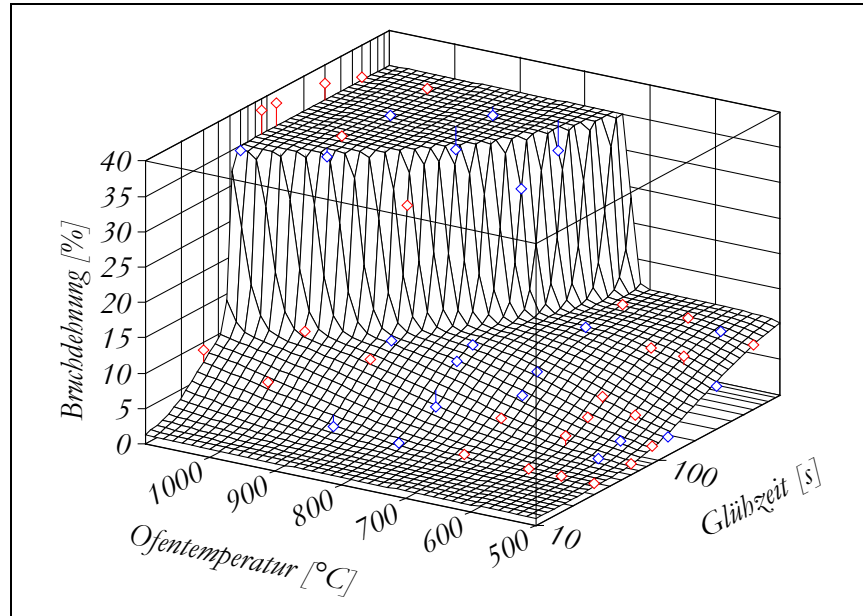
$$k_{B2} = 19,674 \text{ s}^{-1};$$

$$g_{B2} = -273 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{B2} = 56637 \text{ J/mol};$$

$$\varepsilon_{MIN} = 1,1 \text{ } \%;$$

$$\varepsilon_{MAX} = 35,0 \text{ } \%;$$



Standardabweichung $\delta\varepsilon_{ZB} \approx 1,2 \text{ } \%$; Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,992$)

Die günstigsten Gewichte ergaben sich zu $\gamma_1 = 0,71$ und $\gamma_2 = 0,29$.

Aus den Bildern lassen sich die verschiedenen Stadien der thermisch aktivierten Entfestigung ablesen, wie noch einmal die folgenden beiden, gegenüber den Bildern 3.3-2.2 und 3.3-4.2 ergänzten Darstellungen, zeigen sollen. Neben den Gebieten, in denen Erholung und Rekristallisation ablaufen, erkennt man auch einen kleinen Bereich, in dem eine temporäre Verzögerung der Erholung stattzufinden scheint.

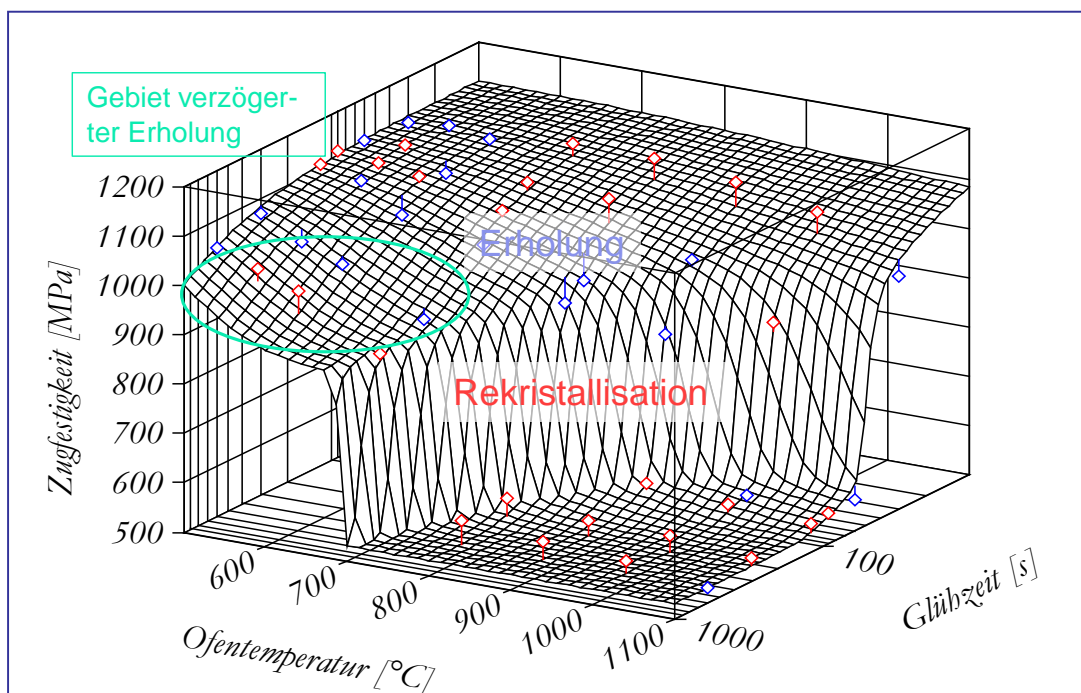


Bild 3.3-2.2a: Zugfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten nach Wärmebehandlung

Dieses Verhalten ist noch ausgeprägter bei der Bruchdehnung zu beobachten. Vermutlich handelt es sich um einen partiellen Aushärtungsvorgang. Unabhängig davon zeigt sich, dass mit der Art der hier entwickelten Modellbildung auf Basis der JMAK-Kinetik eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Modell zu erreichen ist. Das ist nicht zuletzt der physikalisch begründeten Struktur der Modellgleichungen zuzuschreiben, wenngleich die Modellparameter in Anknüpfung an experimentelle Daten zu bestimmen sind, was auch zur Bezeichnung *halbempirische* bzw. *halbphysikalische* Vorgehensweise geführt hat.

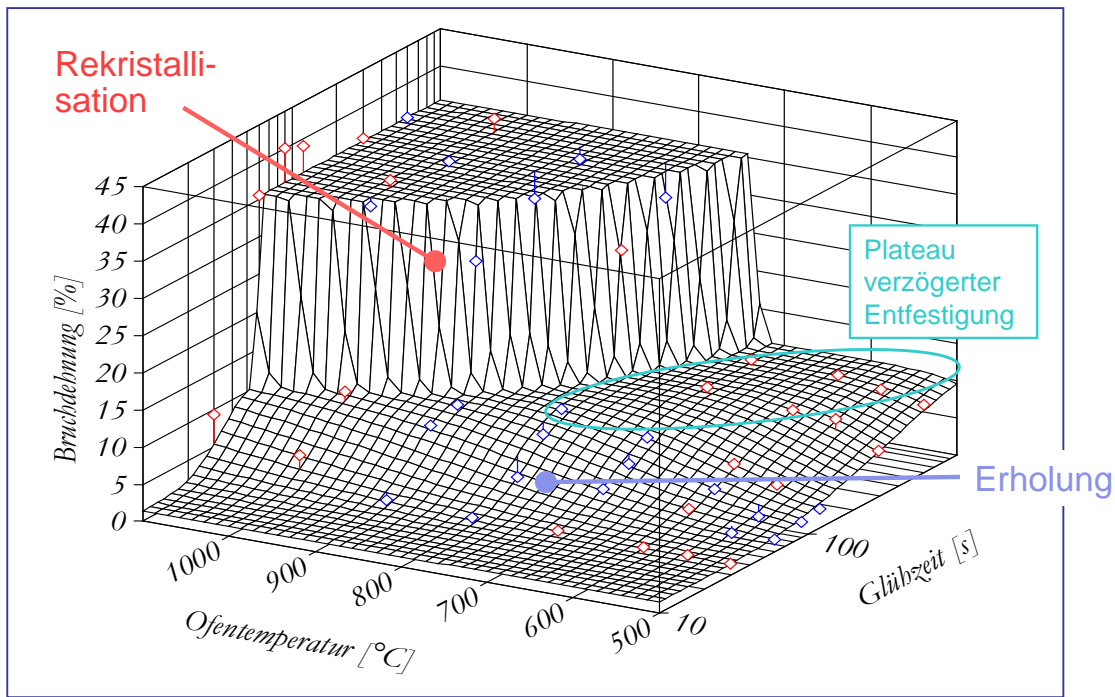


Bild 3.3-4.2a: Bruchdehnung von NiCr2Mn-Drähten nach Wärmebehandlung

Insgesamt wird deutlich, daß bei Berücksichtigung eines zweiten Reaktions- bzw. Aktivierungsmechanismus nicht schlechthin eine bessere Übereinstimmung zwischen Meß- und Modellwerten erreicht wird, sondern auch - besonders anschaulich im Falle der Bruchdehnung -, wie sich durch Überlagerung mehrerer Reaktionsmechanismen die thermisch aktivierten Entfestigungsvorgänge recht genau nachbilden lassen. Die verzögerte Entfestigung mit dem auffälligen Nebenplateau bei Glühzeiten oberhalb 200 s und unterhalb 700°C (Bild 3.3-4.2a) wird vermutlich durch einen temporären Aushärtungsvorgang infolge Ausscheidung einer Sigma-Phase hervorgerufen, die hier als intermetallische CrMn-Verbindung auftritt [SCH 91a, Kap. 6.2]. Bei genauerer Betrachtung läßt neben der Zugfestigkeit (Bild 3.3-2.2a) selbst die Umformfestigkeit in diesem Temperatur-Zeit-Bereich, speziell im Randbereich zum Steilabfall, eine Verzögerung der Entfestigung andeutungsweise erkennen - vgl. Bild 3.3-3.2; eine metallkundliche Untersuchung dieses Phänomens wurde hier nicht durchgeführt.

Diese Art der Auswertung kann bereits im Stadium der Planung und Präzisierung weiterer Wärmebehandlungsversuche sehr nützlich sein. So ist es sinnvoll, bereits nach den z.B. ersten zehn oder fünfzehn Versuchen eine Parameteridentifikation - zunächst für eine Aktivierung - mit dem Ziel durchzuführen, dieses vorläufige Modell zur zweckmäßigen Festlegung weiterer experimenteller Wärmebehandlungseinstellungen heranzuziehen; in diesem Zusammenhang läßt sich ein guter Überblick bereits gewinnen, wenn für die Approximation anstelle der zeitabhängigen Drahttemperaturen $\mathcal{A}(t)$ vereinfachend die konstanten Ofentemperaturen \mathcal{A}_T benutzt werden. Insbesondere zur Eingrenzung des Temperatur-Zeit-Bereichs, der den relativ schmalen Steilabfall charakterisiert, lassen sich die Regressionsergebnisse vorteilhaft verwenden. Damit letztlich kann

der Versuchsaufwand reduziert und die Qualität der Versuchsergebnisse in ihrer Gesamtheit verbessert werden.

Ein weiterer, viel wesentlicherer Vorteil der Parameteridentifikation im Rahmen des reaktionskinetischen Modells besteht darin, Wärmebehandlungsfortschritte nicht mehr nur spezifisch anlagenbezogen in Abhängigkeit von Ofentemperatur und Zeit, sondern werkstoffbezogen in Abhängigkeit der konkreten Aktivierungen berechnen und darstellen zu können. Damit wird die wichtigste Voraussetzung für eine Übertragbarkeit auf andere Wärmebehandlungsanlagen und Wärmebehandlungsverhältnisse realisiert.

Für das Entfestigungsverhalten von Zug- und Umformfestigkeit sowie Bruchdehnung werden folgende Verläufe erhalten, wenn zunächst wieder nur ein Aktivierungsmechanismus zur Approximation zugelassen wird:

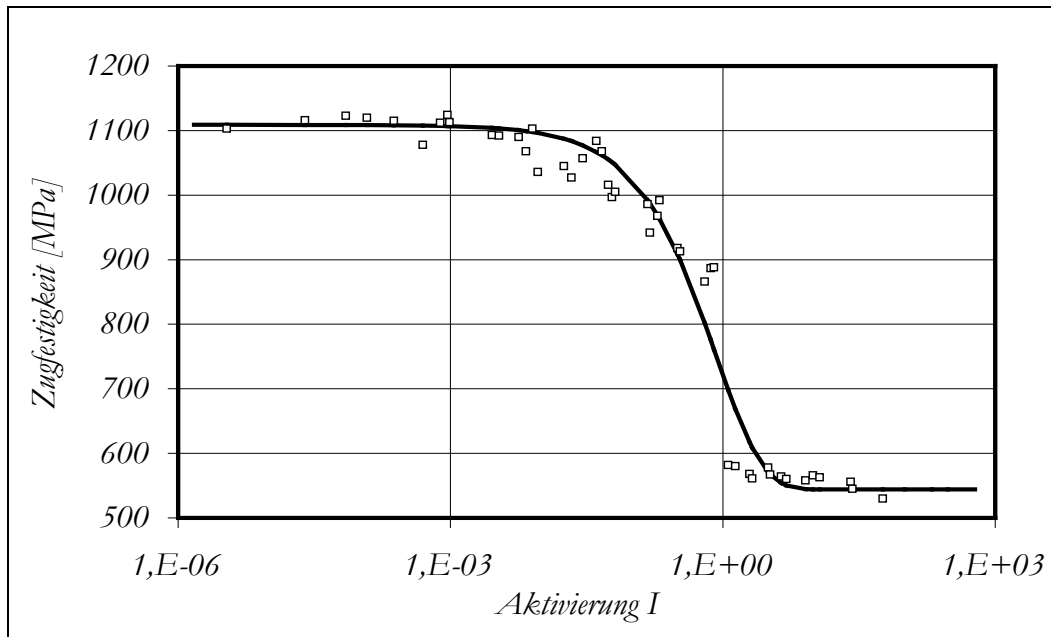


Bild 3.3-5.1: Zugfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit einer Aktivierung (gleiche Parameter wie Bild 3.3-2.1)

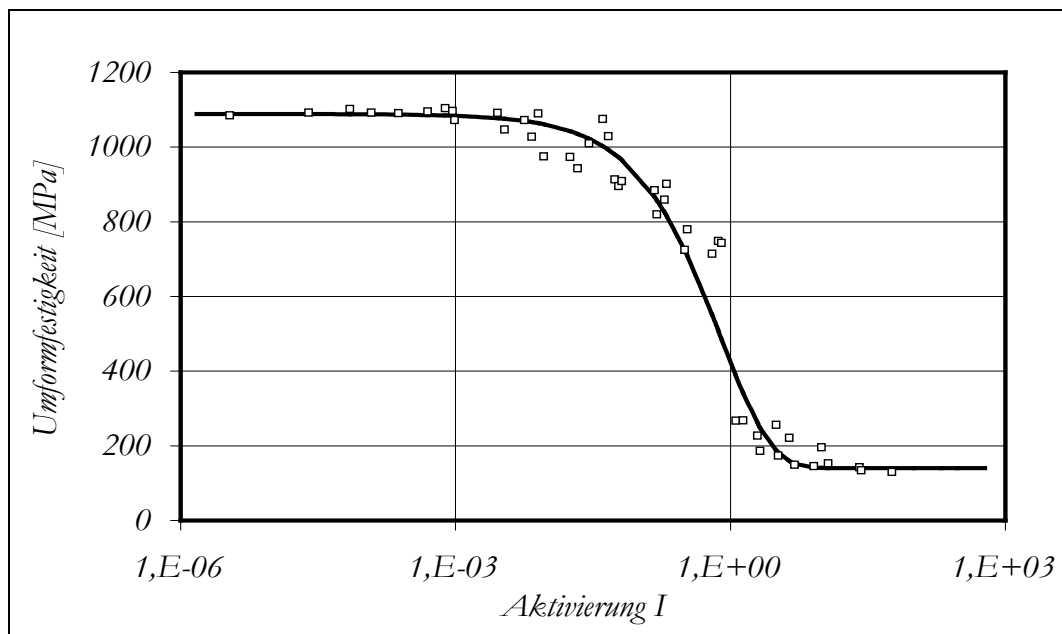


Bild 3.3-6.1: Umformfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit einer Aktivierung (gleiche Parameter wie Bild 3.3-3.1)

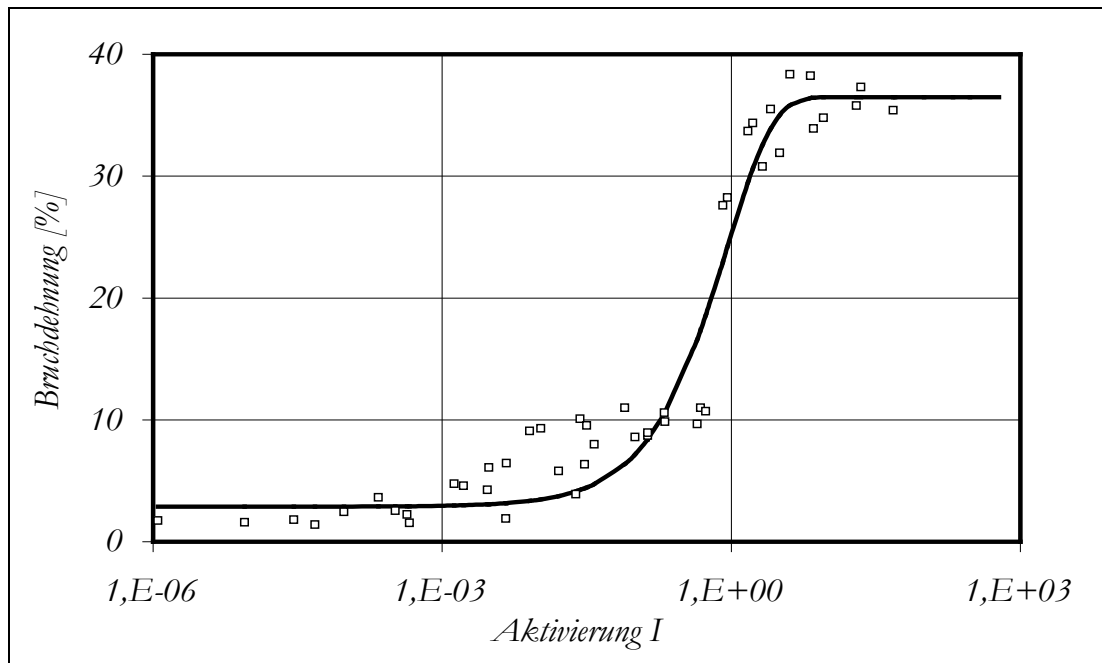


Bild 3.3-7.1: Bruchdehnung von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit einer Aktivierung (gleiche Parameter wie Bild 3.3-4.1)

Der sigmoidale Verlauf des thermisch aktivierten Entfestigungsverhaltens - unter isothermen Bedingungen in Abhängigkeit von konstanter Temperatur oder/und Zeit - bleibt auch im anisothermen Fall, in Abhängigkeit von der Aktivierung, erhalten. Dabei verdeutlichen die Darstellungen die Zweckmäßigkeit und Bedeutung der Größe „Aktivierung“, in der Zeit- und (instationäre) Temperaturverhältnisse geeignet miteinander verbunden sind.

Bei Berücksichtigung von zwei Aktivierungsmechanismen ergeben sich Eigenschaftsflächen in Abhängigkeit der beiden Aktivierungen.

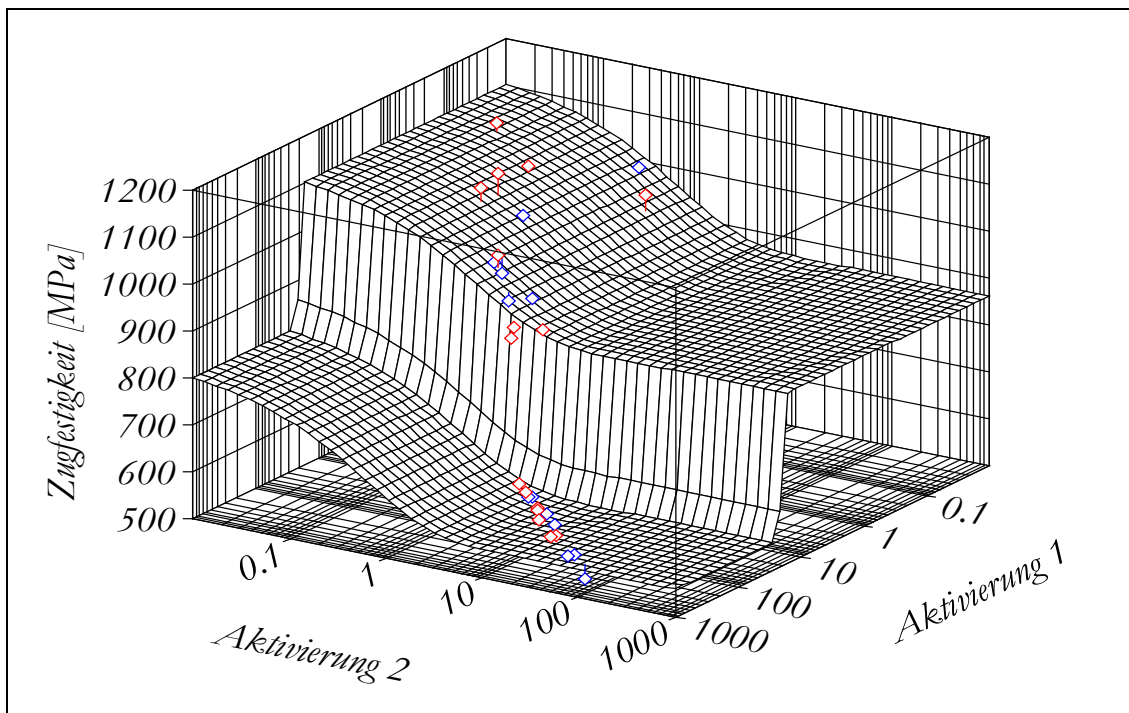


Bild 3.3-5.2: Zugfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit zweier Aktivierungen (gleiche Parameter wie Bild 3.3-2.2)

Für Umformfestigkeit und Bruchdehnung ergeben sich ganz ähnliche Abbildungen:

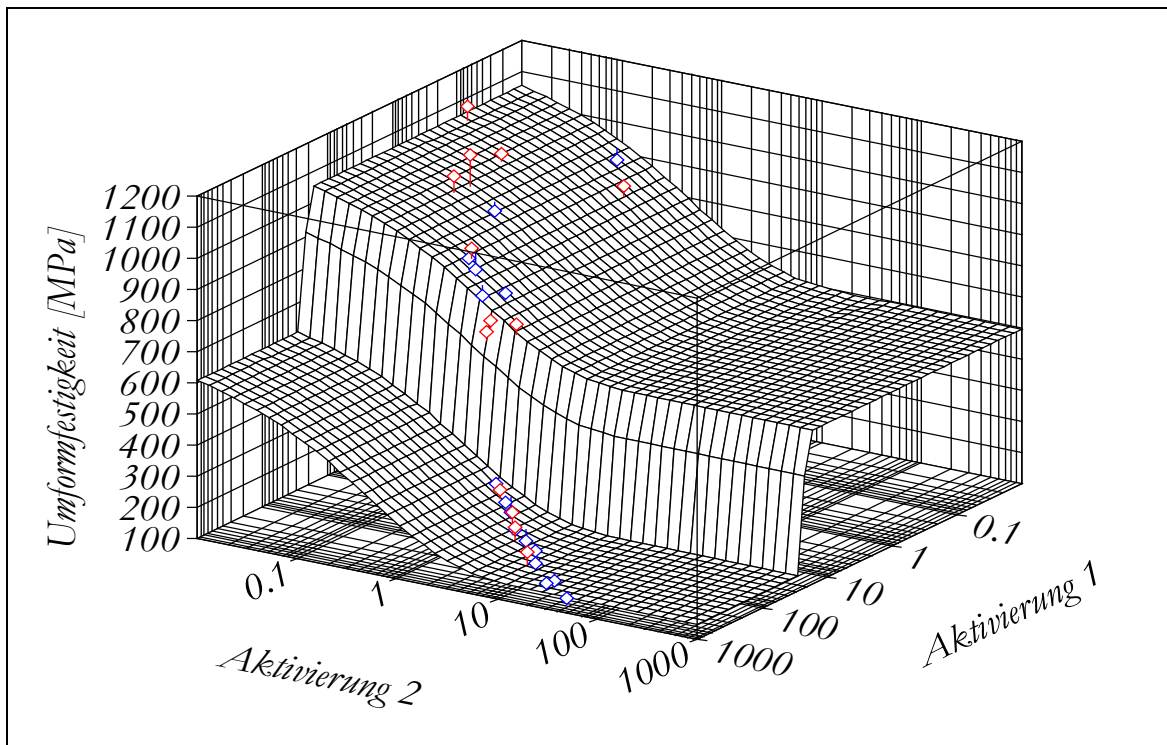


Bild 3.3-6.2: Umformfestigkeit von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit zweier Aktivierungen (gleiche Parameter wie Bild 3.3-3.2)

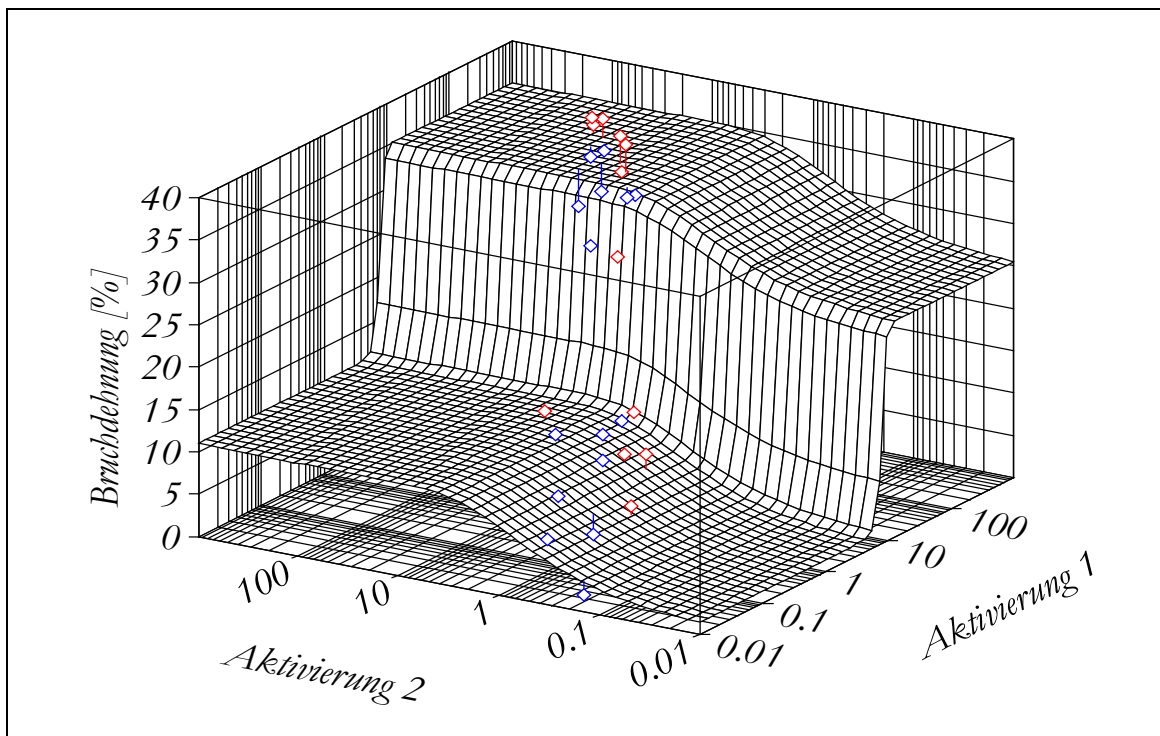


Bild 3.3-7.2: Bruchdehnung von NiCr2Mn-Drähten in Abhängigkeit zweier Aktivierungen (gleiche Parameter wie Bild 3.3-4.2)

Bei der Interpretation der Bilder, in denen Werkstoffeigenschaften in Abhängigkeit zweier Aktivierungen dargestellt wurden, ist zu beachten, daß diese Aktivierungen nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Über Drahttemperatur $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$ und Zeit sind sie miteinander gewissermaßen verbunden. Daraus erklärt sich auch die spezifische Verteilung der Meßwerte, die eher spurartig gebündelt als flächig gestreut die fiktive Regressionsfläche umgibt.

Diese Darstellungen verdeutlichen noch einmal den prinzipiellen Unterschied zwischen Wärmebehandlungen, die anisotherm oder - im idealisierten Grenzfall - isotherm geführt werden:

Während im isothermen Fall die Werkstoffeigenschaften lediglich von den beiden unabhängigen Variablen (konstante) Temperatur und Zeit abhängen, ist unter anisothermen Bedingungen das Wärmebehandlungsergebnis auf subtilere Weise mit den Temperatur-Zeit-Verhältnissen verknüpft. Eine thermisch aktivierte Werkstoffeigenschaftsänderung ist dann nicht mehr nur von Temperatur und Dauer der Wärmebehandlung, sondern vom gesamten thermischen Verlauf bis zum betreffenden Behandlungszeitpunkt abhängig. Die „Erinnerung“ an die thermischen Bedingungen, denen der Werkstoff ausgesetzt war - das „Gedächtnis“ für die Temperatur-Zeit-Reise des Wärmegutes, realisiert die „Aktivierung“ genannte Größe $\mathbf{I} = \mathbf{I}(t, \mathcal{G}(t))$. Dabei ist es - zumindest innerhalb gewisser Grenzen - unerheblich, auf welchem thermischen Wege ein bestimmter Wert von \mathbf{I} , und damit ein bestimmtes Enfestigungsergebnis, erreicht wird - genau wie es die verallgemeinerte Austauschbarkeit von Temperatur und Zeit (3.3.1.3-6) zum Ausdruck bringt.

Eine weitere Steigerung der Genauigkeit der Meßwertapproximation läßt sich ggf. durch Hinzunahme weiterer Aktivierungsreaktionen erreichen, jedoch gestaltet sich mit wachsender Anzahl die Parameteridentifikation zunehmend aufwendiger und schwieriger. Das liegt insbesondere auch daran, daß mit wachsender Anzahl an freien Parametern die Suche geeigneter Iterationsstartwerte immer umfangreicher und komplizierter wird. Die Chance, tatsächlich das globale Minimum im Sinne von (3.3.2-1) und damit die beste Approximation zu finden, nimmt eher ab. Die numerische Praxis zeigt, daß - zumindest im Rahmen der Rechengenauigkeit - durchaus mehrere lokale Minima für (3.3.2-1) existieren können. Damit sind dann fast gleichwertig gute Approximationen mit verschiedenen Parametersätzen möglich, bei denen sich die einzelnen Parameter von Parametersatz zu Parametersatz u.U. sogar erheblich voneinander unterscheiden. Auch reagieren die Parametersätze z.T. empfindlich auf kleinere Änderungen der Meßwerte. Dieses relativ instabile Verhalten bei der Parameterbestimmung läßt sich bei nichtlinearen Problemen der Parameteridentifikation nicht selten ganz allgemein beobachten. Obwohl das Werkstoffmodell die realen Verhältnisse mit diesen Parametern gut bzw. sehr gut widerspiegelt, bleiben deren Zahlenwerte dann ohne tiefere Bedeutung. Eine physikalische Interpretation der Parameterwerte ist damit leider nicht unbedingt sinnvoll oder verbietet sich sogar.

Insgesamt gesehen wird die Qualität der Approximation letztlich durch Anzahl und Genauigkeit der Meßwerte sowie durch den (unbekannten) Modellfehler begrenzt. Sind die Modellparameter, die den Ausgleich der Meßergebnisse realisieren, schließlich ermittelt, so sind damit die folgenden Vorteile verbunden:

- Das Modell komprimiert die mehr oder weniger umfangreichen Meßergebnisse in einer kompakten Formel.
- Die mit dem Modell berechneten Ergebnisse sind i.allg. deutlich genauer als die ursprünglichen Meßdaten (Meßfehlerausgleich).
- Mit dem Modell sind Interpolationsrechnungen innerhalb des experimentell erfaßten Temperatur-Zeit-Bereichs möglich, d.h., auch dort, wo keine punktuellen Meßergebnisse vorliegen, existieren Informationen.
- Ebenso lassen sich mit dem Modell Extrapolationsrechnungen durchführen, d.h., auch außerhalb des Temperatur-Zeit-Bereichs, in dem gemessen wurde, liefert das Modell Informationen. Wie gut diese Informationen sind und wie rasch sie mit wachsendem

Abstand vom Bereich, in dem Meßergebnisse vorliegen, an Zuverlässigkeit verlieren, muß offenbleiben, solange zusätzliche Meßergebnisse in diesem Bereich fehlen.

- Das Modell gestattet die quantitative Bewertung unterschiedlicher Wärmebehandlungen (Wärmebehandlungsvergleich). Insbesondere die Vorausbestimmung all jener Temperatur-Zeit-Verhältnisse, die zu gleichen Werkstoffeigenschaften führen, ist mit den mathematischen Beziehungen möglich (Wärmebehandlungsoptimierung).

Damit gewinnt das Wärmebehandeln in technologischer Hinsicht wesentlichen Spielraum hinzu und kann anderen Erfordernissen, wie sie sich z.B. bei In-Line-Prozessen häufig ergeben, entsprechend leichter angepaßt werden. Das sei anschauungshalber kurz erläutert.

Sollen eine bestimmte Festigkeit $\hat{\sigma} \in (\sigma_{MIN}, \sigma_{MAX})$ oder Dehnung $\hat{\varepsilon} \in (\varepsilon_{MIN}, \varepsilon_{MAX})$ durch eine Wärmebehandlung eingestellt werden, so kann mit den Gleichungen (3.3.2.2-2) bzw. (3.3.2.2-3) im Prinzip die Mannigfaltigkeit aller Temperatur-Zeit-Bedingungen ermittelt werden, die die Forderung $\sigma = \hat{\sigma}$ bzw. $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ erfüllt. Für die praktische Berechnung wird man so vorgehen, daß zu sinnvollen, insbesondere wärmetechnisch vorteilhaft realisierbaren Temperaturfunktionen $\mathcal{G}(t)$ die erforderlichen Wärmebehandlungszeiten t iterativ, z.B. mit einer Solverprozedur berechnet werden. Aus allen potentiell in Frage kommenden Temperatur-Zeit-Verhältnissen können schließlich jene Bedingungen favorisiert werden, die sich unter Beachtung technisch-ökonomischer Restriktionen am günstigsten umsetzen lassen.

In diesem Sinne werde beispielshalber gefordert, die Zugfestigkeit durch geeignete Wärmebehandlung auf einen Wert von $\sigma_{ZB} = 900 \text{ MPa}$ einzustellen. Zusätzlich lassen sich Nebenbedingungen berücksichtigen, die z.B. darin bestehen können, möglichst niedrige Umformfestigkeit und hohe Bruchdehnung anzustreben oder aber die Wärmebehandlungszeit (bei maximal zulässiger Ofentemperatur) zu minimieren. Die Ergebnisse ausgewählter Berechnungen, die mit den reaktionskinetischen Parametersätzen für Zugfestigkeit (Bild 3.3-2.2), für Umformfestigkeit (Bild 3.3-3.2) und für Bruchdehnung (Bild 3.3-4.2) vorgenommen worden sind, werden in Tabelle 4 wiedergegeben.

Tabelle 4: Ofen glühungen, die auf eine Zugfestigkeit von $\sigma_{ZB} = 900 \text{ MPa}$ führen

Nr.	Drahttemperatur $\mathcal{G}(t)$ [°C]	Glühzeit t [s]	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	ε_{ZB} [%]
1	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 700 \text{ °C}$ und $T = 27,5 \text{ s}$	421,6	752,0	10,9
2	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 800 \text{ °C}$ und $T = 23,4 \text{ s}$	159,6	752,5	10,6
3	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 900 \text{ °C}$ und $T = 20,0 \text{ s}$	87,4	758,8	10,3
4	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 1000 \text{ °C}$ und $T = 17,3 \text{ s}$	58,9	756,6	10,3
5	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 1100 \text{ °C}$ und $T = 15,3 \text{ s}$	43,7	751,6	10,7
6	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 1150 \text{ °C}$ und $T = 14,5 \text{ s}$	38,5	749,5	11,0
7	(3.3.2.2-1) mit $\mathcal{G}_U = 1200 \text{ °C}$ und $T = 13,9 \text{ s}$	34,4	747,0	11,2

Wie zu sehen ist, erfüllt die Wärmebehandlung Nr. 7 die Nebenbedingung mit der Forderung nach vergleichsweise niedriger Umformfestigkeit und hoher Bruchdehnung, während eine Verkürzung der Wärmebehandlungszeiten naturgemäß nur über eine entsprechende Anhebung der Ofentemperaturen zu realisieren ist.

Eine weitere Verkürzung der Glühzeit läßt sich allerdings auch erreichen, indem die Aufheizung nicht mehr im Ofen, sondern auf konduktivem Wege und damit wesentlich schneller vorgenom-

men wird. Wenn ein Draht z.B. in $0,5\text{ s}$ mit einer Geschwindigkeit $\dot{\vartheta} = 2400\text{ K/s}$ von $\vartheta_I = 20\text{ °C}$ auf eine Temperatur $\vartheta(t=t_1) = 1200\text{ °C}$ linear aufgeheizt, bei dieser Temperatur für die Dauer von lediglich $5,5\text{ s}$ gehalten und schließlich im Wasserbad rasch abgekühlt wird, so ergibt das gleichfalls eine Absenkung der Zugfestigkeit auf 900 MPa . Ausgewählte Rechenbeispiele für konduktive Schnellerwärmung mit dem idealisierten Temperaturverlauf

$$\vartheta(t) := \begin{cases} \vartheta_I + \dot{\vartheta} \cdot \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 & \text{(Aufheizen)} \\ t_1 & \text{für } t_1 < t \leq t_2 & \text{(Halten)} \end{cases} \\ (3.3.2.2-1) & \text{für } t_2 < t \leq t_3 & \text{(Abkühlen)} \\ \text{mit } \vartheta_A := \vartheta_I + \dot{\vartheta} \cdot t_1, \vartheta_U := \vartheta_I, T := 0,2\text{ s} \end{cases} \quad (3.3.2.2-5)$$

zeigt Tabelle 5. Die Wärmebehandlungszeit t_3 ergibt sich als Summe aus Aufheiz-, Halte- und Abkühlzeit.

Tabelle 5: Konduktive Glühungen, die auf eine Zugfestigkeit von $\sigma_{ZB} = 900\text{ MPa}$ führen

Nr.	Drahttemperatur $\vartheta(t)$ nach (3.3.2.2-5)			t_3 [s]	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	ε_{ZB} [%]
	t_1 [s]	$\dot{\vartheta}$ [K/s]	t_2 [s]			
1	0,5	2400	5,99	7,4	740,9	8,8
2	0,5	2200	10,25	11,7	742,7	10,4
3	0,5	2000	17,86	19,3	747,0	11,5
4	1,0	1200	6,46	7,9	741,0	8,8
5	1,0	1100	10,55	12,0	742,6	10,4
6	1,0	1000	18,22	19,6	747,0	11,5

Auch bei diesen Kurzzeitwärmebehandlungen lassen sich - bei gleicher Zugfestigkeit - geringfügig unterschiedliche Umformfestigkeiten und Bruchdehnungen einstellen, wobei interessanterweise sogar eine leichte Anhebung der Zähigkeit bei gleichzeitiger Zunahme der Umformfestigkeit zu konstatieren ist. Allerdings ist auch zu beachten, daß die Kurzzeitergebnisse durch Extrapolation aus den Langzeitergebnissen hervorgegangen sind und insofern zunächst mit einer größeren Unsicherheit behaftet sind. Um Gewißheit über die Brauchbarkeit der Extrapolationsergebnisse zu erlangen, sind entsprechende Kontrollversuche erforderlich.

3.3.3 Ausblick

Die reaktionskinetisch begründeten Modellgleichungen berücksichtigen unterschiedliche, zeitlich und thermisch parallel oder auch versetzt ablaufende Entfestigungsmechanismen. Die Widerspiegelung der realen Werkstoffentfestigung erfolgt durch Superposition elementarer Reaktionsmechanismen vom sigmoidalen Typ, etwa vergleichbar dem Zusammensetzen einer komplexen Schwingungsform aus verschiedenen Grundschwingungen entsprechend einer *FOURIERSchen* Analyse - vgl. Anhang B, *Anm. 1*.

Wie bereits angesprochen, können bei mehrphasigen Werkstoffen und Legierungen während der Wärmebehandlung neben thermisch aktivierten Entfestigungsmechanismen gleichfalls Aushärtungs- bzw. Verfestigungsvorgänge ablaufen. Für eine Anzahl von m_E Entfestigungs- und m_A Aushärtungsmechanismen läßt sich eine naheliegende Verallgemeinerung der Beziehungen (3.3.2.2-2) und (3.3.2.2-3) durch die Funktionen

$$\sigma = \sigma_{MIN} + (\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{m_E} \gamma_j \cdot e^{-\left(\frac{I_j(t, \vartheta(t))}{q_j}\right)^{q_j}} + \sum_{j=1}^{m_A} \gamma_{m_E+j} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{I_{m_E+j}(t, \vartheta(t))}{q_{m_E+j}}\right)^{q_{m_E+j}}} \right) \right\} \quad (3.3.3-1)$$

und

$$\varepsilon = \varepsilon_{MIN} + (\varepsilon_{MAX} - \varepsilon_{MIN}) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{m_E} \gamma_j \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{I_j(t, \vartheta(t))}{q_j}\right)^{q_j}} \right) + \sum_{j=1}^{m_A} \gamma_{m_E+j} \cdot e^{-\left(\frac{I_{m_E+j}(t, \vartheta(t))}{q_{m_E+j}}\right)^{q_{m_E+j}}} \right\} \quad (3.3.3-2)$$

formulieren. Allerdings werden die Gewichte γ_j für Entfestigungs- (1. Summenterm) und Aushärtungsmechanismen (2. Summenterm) jetzt nicht mehr der bei (3.3.1.3-5.2) genannten Summe genügen. Denn während die Funktionen (3.3.2.2-2) und (3.3.2.2-3) ihre Extrema stets nur bei $t \rightarrow 0$ und bei $t \rightarrow \infty$ aufweisen, liegen die Extrema der Funktionen (3.3.3-1) und (3.3.3-2) i.allg. bei Zeiten $t = t_{EXTR}$ vor, die prinzipiell innerhalb des gesamten Zeitbereichs $0 < t_{EXTR} < \infty$ auftreten können. Eine Bedingung zur Bestimmung der Gewichte hat deshalb allgemeiner zu berücksichtigen, daß der Ausdruck in geschweifeter Klammer von (3.3.3-1) bzw. (3.3.3-2) bei $t = t_{EXTR}$ entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annimmt, eine Forderung, die zwar nicht streng, jedoch im Rahmen der Quadratmittelapproximation angenähert zu erfüllen ist. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß für die Gewichte γ_j sowohl positive als auch negative Werte zuzulassen

sind und daß $\sum_{j=1}^{m_A+m_E} \gamma_j > 1$ gelten muß - vgl Anhang B, *Anm. 2*.

Lediglich hingewiesen sei auf den erwünschten Umstand, daß im Grenzfall fehlender Aushärtungsvorgänge, d.h., für $m_A = 0$, die Beziehungen (3.3.3-1), (3.3.3-2) unmittelbar wieder in (3.3.2.2-2), (3.3.2.2-3) übergehen. Der umgekehrte Grenzfall, daß ausschließlich Aushärtungsvorgänge die thermisch beeinflusste Werkstoffreaktion bestimmen, ist mit $m_E = 0$ ebenso enthalten, dürfte jedoch von weit geringerem praktischen Interesse sein.

Als Beispiel einer Überlagerung von thermisch aktiverter Entfestigung und partieller Aushärtung sei der Zugfestigkeitsverlauf von hochwarmfesten NiCr23Fe-Drähten angeführt, die vor der Wärmebehandlung mit einem Umformgrad $\varphi = 2$ an den Durchmesser $d = 2,2 \text{ mm}$ vorgezogen worden waren. Die Berechnung erfolgte - wiederum auf der Grundlage der Erwärmungsbedingungen (Ofen) und Meßwerte aus [DUS 97] - für zwei Entfestigungs- und zwei Aushärtungsmechanismen.

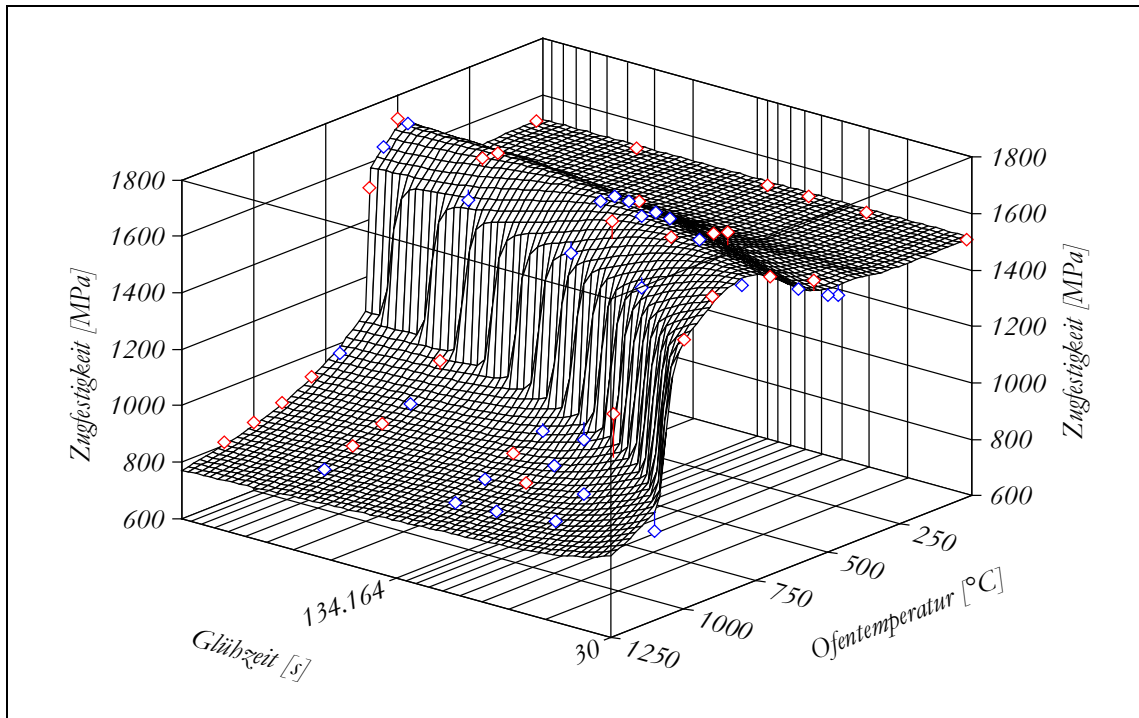


Bild 3.3-9: Zugfestigkeit von NiCr23Fe-Drähten nach Wärmebehandlung

(Standardabweichung $\delta\sigma_{ZB} \approx 28,5$ MPa; Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,993$)

Es ist recht eindrucksvoll der Festigkeitsanstieg in einem dem Steilabfall zum Entfestigungsbereich vorgelagerten Temperatur-Zeit-Bereich zu erkennen - ein Charakteristikum aushärtbarer Legierungen.

Die bisherigen Betrachtungen haben sich ausschließlich auf thermisch aktivierte Werkstoffreaktionen bezogen, die im Erwärmungsfall oberhalb gewisser Grenz- bzw. Bezugstemperaturen $\mathcal{A}(t) > \mathcal{A}_B$ ablaufen, wie z.B. Erholungs-, Rekristallisations- und Kornwachstumsvorgänge, sowie damit im Zusammenhang stehende Werkstoffeigenschaftsänderungen. Bekanntlich können bei Wärmebehandlungen jedoch auch im Abkühlungsfall, bei Unterschreiten bestimmter Grenz- bzw. Bezugstemperaturen $\mathcal{A}(t) < \hat{\mathcal{A}}_B$, thermisch aktivierte Umwandlungsvorgänge stattfinden. Auch hierfür lassen sich die Modellgleichungen sinngemäß anwenden. Die Umwandlungsvorgänge sind ebenfalls mit mehr oder weniger ausgeprägten Wärmetönungen verbunden, worauf die Anmerkung zu Kapitel 3.3.1.2.1 in Anhang B gleichermaßen zutrifft.

Während die konkreten Beispielrechnungen stets für konstante Aktivierungsenergie und konstanten Mengen- bzw. Frequenzfaktor durchgeführt wurden, ist es, wie bereits im Zusammenhang mit (3.3.1.1-49.2) ausgeführt, prinzipiell erlaubt, diese als Konstanten behandelten Größen durch eine geeignete Zeit- bzw. Temperatur-Zeitabhängigkeit (dann natürlich unter dem Integralzeichen!) zu ersetzen. Damit lässt sich berücksichtigen, dass diese Größen tatsächlich mehr oder weniger vom Wärmebehandlungsverlauf und von der damit einhergehenden Gefügeveränderung abhängig sind. Das bedeutet, dass statt der konstanten Größen entsprechende Temperatur-Zeitfunktionen zu generieren sind. Allerdings ist das Entwickeln geeigneter Funktionsansätze, die die Verhältnisse nicht nur empirisch approximieren, sondern die einigermaßen physikalisch begründet sind, nochmals eine anspruchsvolle Aufgabe.

Insgesamt und abschließend bleibt festzuhalten, daß sich thermisch aktivierte, vorrangig diffusionsgesteuerte Werkstoffreaktionen durch Beziehungen der Art (3.3.3-1) und (3.3.3-2) beschreiben, vergleichen und quantitativ bewerten lassen. Für das Ergebnis einer Wärmebehandlung, d.h., für die Werkstoffeigenschaften, sind - bei gegebenem Werkstoffausgangszustand - allein

die Temperaturverhältnisse in ihrer Zeitabhängigkeit maßgebend. Der Temperaturverlauf, dem der Werkstoff ausgesetzt ist, wird nicht nur punktuell oder näherungsweise berücksichtigt, sondern er wird in seiner Gesamtheit in die Bewertung einbezogen. Damit sind insbesondere auch thermisch stärker instationäre Verfahren einer angemessenen Modellierung zugänglich geworden. Der analytisch geschlossene Modellansatz gestattet darüberhinaus die Approximation parallel ablaufender thermisch aktivierter Entfestigungs- und Verfestigungsvorgänge und erlaubt damit sogar die Beschreibung von solchen mehrphasigen Werkstoffen, die auch zur Ausscheidung fähige Anteile enthalten und aushärten können. Der zunächst erforderliche experimentelle und numerische Aufwand zur Charakterisierung des thermisch aktivierten Reaktionsverhaltens eines Werkstoffs macht sich dann bezahlt, wenn eine Wärmebehandlungstechnologie neu ausgearbeitet oder eine ältere abgeändert bzw. optimiert werden soll. Denn mit den Formeln des physikalisch begründeten Modells sowie mit dem werkstoffspezifischen Parametersatz lassen sich jederzeit für verschiedenste Temperatur-Zeit-Verläufe die resultierenden Werkstoffeigenschaften (z.B. Rekristallisationsgrad, mechanische oder elektrische Eigenschaften) vorausberechnen. Umgekehrt - und nicht selten noch wichtiger - ist es sogar möglich, genau jene Temperaturverhältnisse unter Beachtung technischer Restriktionen einer betreffenden Wärmebehandlungseinrichtung zu favorisieren, die im Rahmen einer Gesamttechnologie die gewünschten Werkstoffeigenschaften bei möglichst wirtschaftlicher Fertigung gewährleisten.

4. Schlußfolgerungen und Zusammenfassung

Zur Ermittlung der Temperaturverhältnisse beim Ziehen und Wärmebehandeln von Draht wurde zunächst die partielle Differentialgleichung der Wärmeleitung unter allgemein gehaltenen, jedoch linearen Randbedingungen und Quellen mit der mathematischen Methode der zweidimensionalen *LAPLACE*-Transformation (für halbunendliche und endliche Gebiete) sowohl für den bewegten Vollzylinder als auch für den ruhenden, endlich langen Hohlzylinder analytisch geschlossen gelöst. Diese beiden Draht und Ziehring repräsentierenden Modellkörper werden im Hinblick auf technische Anwendungen mit mathematischen Mitteln entweder erweitert, z.B. zur Berücksichtigung von Wärmestrahlung oder orts- und zeitabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten, oder - im Falle des Vollzylinders - spezialisiert, z.B. als asymptotische Näherungen für kurze und lange Zeiten sowie als wärmetechnisch dünnwandiger Körper. Dabei werden einerseits neue Lösungsdarstellungen gefunden, andererseits gelingen Vergleich und Einordnung im Fachschrifttum vorliegender Einzelergebnisse. In diesem Zusammenhang erweist sich die durchgängig mathematisch-analytische Betrachtungsweise als das einzig angemessene Instrument. Selbst die originäre Drahttemperaturberechnung von *SIEBEL/KOBITZSCH* läßt sich mit dem hier vorgelegten Modell vergleichend bewerten. Dabei wird der bisher nur halbempirisch verfügbare Wärmeverteilungskoeffizient jetzt sogar als Funktion der Abmessungs- und Stoffdaten des Systems „Draht-Ziehdüse“ sowie des Kontaktwärmeübergangs und der Drahtgeschwindigkeit formuliert.

Die Modellierung der thermischen Verhältnisse von Draht und Ziehdüse während des Gleitziehens erfordert, die mechanisch und thermisch extremen Verhältnisse im Kontakt- bzw. Wirkfugenbereich angemessen zu berücksichtigen. Deshalb wird das Problem der thermischen Kopplung von Voll- und Hohlzylinder im stationären Fall mathematisch näher untersucht. Dabei werden für die Temperaturfelder des gekoppelten Systems - je nach Herangehensweise - Lösungsdarstellungen in Form von Integralgleichungen oder Integralgleichungssystemen erhalten. Diese Integralgleichungen bzw. Integralgleichungssysteme werden jedoch nicht explizit gelöst, sondern als Grundlage für ein iteratives Näherungsverfahren herangezogen. Dieses Verfahren bedient sich in seiner für numerische Berechnung vorgesehenen Variante der hinsichtlich Randfunktionen und Quellen durch Polynom-Splines spezialisierten Lösungen. Die thermische Kopplung unter Berücksichtigung ortsabhängiger Wärmeübergangskoeffizienten erfolgt über die Randfunktionen von Vollzylinder außen- und Hohlzylinderinnenrand, und zwar durch iterativ wechselseitige Berechnung dieser Randtemperaturen mit Aktualisierung der jeweiligen Randfunktion. Numerische Berechnungen belegen die Brauchbarkeit des Iterationsverfahrens und werden verwendet, um unter Einbeziehung von Temperaturmeßergebnissen auf den effektiven mittleren Wärmeübergang im Kontaktbereich von Draht und Ziehdüse zu schließen. Dabei wird dieselbe Größenordnung gefunden, die auch auf anderem Wege mittels asymptotischer Abschätzung erhalten wird. Weitere numerische Simulationen mit diesem Modell zeigen exemplarisch die Einflüsse von Ziehdüsenkühlung und Schubspannungsverlauf im Wirkfugenbereich. Die Berechnungen bestätigen, daß die Kühlung des Ziehwerkzeugs nahezu bedeutungslos für die Erniedrigung der Drahttemperaturen bleibt. Selbst eine Variation des Schubspannungsverlaufs wirkt sich nur unwesentlich auf die Temperaturverhältnisse des Drahtes aus im Gegensatz zu den Ziehdüsentemperaturen, die weit empfindlicher reagieren.

Diese iterativ-numerischen Berechnungen zur thermischen Draht-Düse-Koppelung werden immer dann erforderlich, wenn Fragen von vordergründig lokalem Charakter im Ziehdüsenbereich zu beantworten sind. Das wird in der Zieherei praxis jedoch eher die Ausnahme darstellen. Häufiger interessiert dagegen, welche Temperaturen ein Draht während einer mehrzügigen Umformfolge durchläuft und welche besonderen Maßnahmen zu seiner Kühlung ggf. zu treffen sind. Hierfür ist es nicht sonderlich zweckmäßig, wenn die thermische Kopplung von Draht und Ziehdüse in dieser aufwendigen iterativen Form für die Zugfolgenrechnung verwendet wird. Deshalb wird ein Verfahren vorgeschlagen, das den Ziehdüsen einfluß über eine geeignete Modifikation von Randfunktion und Wärmeübergangskoeffizient näherungsweise berücksichtigt. Eine weitere Vereinfachung wird eingeführt, indem der Draht bzw. der bewegte Vollzylinder in miteinander

„thermisch verheftete“ Abschnitte unterteilt wird, wobei für jeden dieser Abschnitte konstante Randbedingungen und Quellen vorgeschrieben werden. Durch sinnvolle Unterteilung läßt sich - ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust - erheblicher Rechenaufwand einsparen. Die hierfür benötigten Berechnungsbeziehungen werden spezialisiert aus allgemeingültigeren Lösungen für solche Ziehbedingungen, bei denen Wärmeleitung gegenüber dem an den Stofftransport gebundenen Wärmetransport vernachlässigt werden kann. Für die Umformzonen mit unterschiedlich konischen Berandungen werden thermisch äquivalente Ersatzzylinder eingeführt. Die Randquellen infolge Reibung in der Wirkfuge berücksichtigen einen temperaturabhängigen Reibwert als einfach oder auch doppelt lineare Funktion. Ein Beispiel zum Naßziehen von unlegiertem stark verzinktem Stahldraht auf einer elfzügigen Ziehmaschine wird numerisch durchgerechnet, wobei sich zeigt, daß die Zinkschicht partiell anschmelzen kann. Dieser Effekt wirkt sich zieherleichternd aus und gestattet die Herabsetzung des Fettanteils in der Ziehemulsion.

Das Abführen der durch Umformung und Reibung im Draht erzeugten Wärme ist besonders im Zusammenhang mit alterungsanfälligen Stählen von Bedeutung. Deshalb verdienen die Maßnahmen der Drahtkühlung hohe Aufmerksamkeit. Während eine Kühlung des Ziehwerkzeugs, wie bereits festgestellt, für diesen Zweck völlig ungeeignet ist, läßt sich eine Drahtkühlung durch Wassereinsatz sehr effektiv entweder direkt mit einem dem Ziehwerkzeug unmittelbar nachgeschalteten, wasserdurchströmten Kühlrohr oder aber indirekt mit einer innengekühlten Ziehtrommel durchführen. Während Untersuchungsergebnisse zum Kühlrohr im Fachschrifttum vorliegen, fehlte ein entsprechendes Berechnungs- und Simulationsmodell für die Ziehtrommel bisher. Deshalb werden - nach eingehender Analyse der mechanischen und thermischen Randbedingungen - Berechnungsbeziehungen hergeleitet, mit denen sich das Abkühlvermögen des Drahtes auf der Ziehtrommel in Abhängigkeit von Draht- und Trommelabmessungen, Windungsanzahl, Drahtgeschwindigkeit, Kühlmittel-Volumenstrom und weiterer Parameter bestimmen läßt. Die Abkühlung des Drahtes erfolgt bei ansonsten vergleichbaren Bedingungen umso vollständiger, je kleiner der Drahtdurchmesser, je größer Windungsanzahl und Trommeldurchmesser, je kleiner die Drahtgeschwindigkeit und je größer der Kühlmitteldurchsatz in der Zeiteinheit sind. Diese bereits der Anschauung zu entlehnenden Wirkungsrichtungen werden in einem numerischen Beispiel quantitativ untersucht. Zur Verringerung der Unsicherheit bei der quantitativen Festlegung der in die Rechnung eingehenden Koeffizienten, besonders hinsichtlich der Wärmeübergänge, sollten allerdings in Modellexperimenten weitere Untersuchungen mit vergleichenden Temperaturmessungen vorgenommen werden.

Eine Frage, welche Abhängigkeit der Drahtdurchmesser infolge thermoelastischer Formänderung des Ziehholts während des Ziehens aufweist, tauchte im Zusammenhang mit experimentellen Ergebnissen zur „dynamischen“ Bestimmung der Schmierfilmdicke auf. Durch Herleitung geschlossen analytischer Lösungen aus den thermoelastischen Grundgleichungen beim ebenen Spannungs- und Verzerrungszustand für die Probleme des Voll- und Hohlzylinders und schließlich des doppelwandigen Hohlzylinders konnten die Spannungs-Verzerrungs-Verhältnisse eines einfach armierten Ziehrings simuliert werden. Die numerische Auswertung in Verbindung mit konkreten Meßergebnissen zum Drahtdurchmesser zeigt schließlich, daß die thermoelastischen Formänderungen der Ziehdüse insbesondere dann nicht vernachlässigt werden dürfen, wenn eine Berechnung der Schmierfilmdicke aus der Durchmesseränderung erfolgt. Im vorliegenden Fall hat die thermoelastische Korrektur einen Anteil von zwanzig bis vierzig Prozent ausgemacht, um den die Schmierfilmdicke sonst zu niedrig ermittelt worden wäre. Auf der Grundlage der ziehgeschwindigkeitsabhängigen Schmierfilmdicke wird eine untere Schranke für den Wärmeübergang in der Wirkfuge zwischen Draht und Ziehdüse abgeschätzt.

Die Wärmebehandlung von Draht und Drahterzeugnissen dient der Einstellung gewünschter mechanischer oder elektrischer Eigenschaftswerte. Etwas näher wird das elektrische Durchlauf-Widerstandsglühn betrachtet, wobei besonders auf den Zusammenhang zwischen elektrischen Einstellungen, Temperatur-Zeit-Verhältnissen und Werkstoffentfestigung eingegangen wird. Es kann gezeigt werden, daß die üblicherweise zur Glüheneinstellung verwendeten halbempirischen

Überschlagsformeln Temperatur-Zeit-Verläufe und Wärmebehandlungsresultate realisieren, die aus prinzipiellen Gründen keine gleichbleibenden, allenfalls näherungsweise ziehgeschwindigkeitsunabhängige Werkstoffeigenschaften zur Folge haben. Weil thermisch aktivierte Werkstoffreaktionen sowohl temperatur- wie zeitabhängig ablaufen, sind zusätzlich werkstoffkundliche Betrachtungen reaktionskinetischer Art anzustellen.

Thermisch aktivierte Werkstoffreaktionen erfolgen vorwiegend diffusionsgesteuert. Deshalb wird das Diffusionsverhalten von lamellaren, faserigen und globulitischen Partikeln oder Strukturen, wie sie in realen metallischen Werkstoffen vorkommen, modellhaft an den Lösungen der Anfangs-Randwertaufgaben von Platte, Zylinder und Kugel bei jeweils zeitabhängigem Diffusionskoeffizienten studiert. Nach Einführen einer zeitabhängigen Prozeßtemperatur werden kinetische Gleichungen angegeben, die sich im Unterschied zu den bekannten Beziehungen von *KOLMOGOROV*, *JOHNSON-MEHL* und *AVRAMI* auch unmittelbar auf thermisch instationäre Verhältnisse anwenden lassen, den klassischen Grenzfall thermisch stationärer Bedingungen einschließend. Das phänomenologische Modell wird auf mehrere parallel wirkende kinetische Reaktionsmechanismen erweitert und schließlich herangezogen, um am Beispiel der Wärmebehandlung des Nickelwerkstoffs NiCr2Mn unter Einbeziehung experimenteller Ergebnisse seine Anwendung und Möglichkeiten konkret vorzuführen. Das Beispiel zeigt u.a., daß sich mit diesem physikalisch begründeten Modell thermisch aktivierte Entfestigungsvorgänge bereits bei Berücksichtigung von nur zwei Entfestigungsmechanismen mit sehr hohem Bestimmtheitsmaß approximieren lassen. Die zahlreichen mechanischen Werkstoffprüfwerte zu Festigkeiten und Dehnung werden jeweils in einer kompakten Formel verdichtet, womit sich dann umgekehrt zu einer vorgegebenen Werkstoffeigenschaft geeignete Temperatur-Zeit-Verläufe bestimmen lassen. Damit ist das Ziel, eine Wärmebehandlung im voraus so zu bestimmen, daß gewünschte Werkstoffeigenschaften realisiert werden, prinzipiell erreicht. Darüberhinaus wird gezeigt, daß sich mit einem solchen reaktionskinetischen Modell auch thermisch aktivierte Aushärtungsprozesse beschreiben lassen oder noch allgemeiner, daß sich sogar die partielle Überlagerung aus Entfestigungs- und Verfestigungsprozessen approximieren läßt.

Die vorgenommenen theoretischen Untersuchungen haben insgesamt gezeigt, welche Vorteile und weitreichende Möglichkeiten eine durchgängig mathematisch-analytische Behandlung mit sich bringt. Diese hier verfolgte Vorgehensweise hat es nicht nur erlaubt, aus dem Fachschrifttum bekannte Einzelresultate in einen größeren Zusammenhang einzuordnen, sondern läßt auch Abhängigkeiten und Wirkungsrichtungen - im Gegensatz zu vordergründig numerischen Methoden - unmittelbar hervortreten. Die programmtechnische Umsetzung für numerische Berechnungen erfordert zwar auch einen nicht zu unterschätzenden Aufwand, jedoch sind die Anforderungen an die Rechnerressourcen i.allg. weit geringer als bei Orientierung auf ausschließlich numerische Methoden. Insbesondere dann, wenn nur wenige Temperaturen an ausgewählten Punkten zu berechnen oder schnelle Algorithmen für On-line- bzw. Prozeßsteuerungen bereitzustellen sind, bietet die Auswertung analytischer Berechnungsformeln prinzipielle Vorteile. Diese Aspekte zusammengenommen stellen einen wichtigen Vorzug dar, der den Einsatz schlanker Rechentechnik möglich macht - nicht zuletzt auch im Sinne steigender Mobilität und Flexibilität.

Symbole und Abkürzungen

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$	Temperaturleitfähigkeit
b	gedrückte Breite im Kontakt Draht-Ziehtrommel (Kap. 3.1.2.2.2.1)
$b = \sqrt{\lambda \rho c}$	Wärmeeindringkoeffizient
c	(isobare) spezifische Wärmekapazität, Parameter (A3.1.2.2.1-12), Konzentration (Kap. 3.3.1.1)
d	Drahtdurchmesser, Banddicke (Kap. A2.3.3)
$e = 2,71828\dots$	<i>EULER</i> sche Zahl
$e_{\beta}^{()}$	unvollständige <i>e</i> -Funktion; vgl. (A2.3.2.5-F1)
$f()$	Funktion (in verschiedenen Zusammenhängen)
$g(), \bar{g}()$	<i>GREEN</i> sche (Original-) Funktionen (Kap. A2.3, A2.4, 3.3.1.1), Kinetik- bzw. Prozeßfunktion (Kap. 3.3.1.2, 3.3.1.3)
$h = \frac{\alpha}{\lambda}$	relativer Wärmeübergangskoeffizient
i	imaginäre Einheit, Zählindex
j	Zählindex, Index eines Drahtabschnittes (Kap. 3.1.1.5)
k	Zähl- bzw. Summationsindex, Werkstoffparameter (Kap. 3.3), Korrekturfaktor (Kap. A2.3.2.9), Wärmedurchgangskoeffizient (Kap. 3.1.1.4)
l	charakteristische Länge
m, \tilde{m}	Summationsindex, Wärmeverteilungskoeffizient (Kap. 3.1.1), Anzahl der Reaktionsmechanismen (Kap. 3.3.1.3, 3.3.2)
n	Summationsindex
p	<i>LAPLACE</i> -Bildvariable zur Originalvariable z (Kap. A2.3.1, A2.4.1)
$q := \sqrt{\frac{v}{a}} \cdot p$	Abkürzung (Kap. A2.3.2.8)
$q_R()$	flächenbezogene Wärmequellendichte am Körperperrand
$q_V()$	volumenbezogene Wärmequellendichte im Körpervolumen (<i>Wärmequellendichten werden im Schrifttum z.T. als \dot{q} bezeichnet</i>)
r, r_0	Radialkoordinate bzw. -variable, wärmeunbeeinflusster Drahtkern (Kap. A3.1.1.3)
s	<i>LAPLACE</i> -Bildvariable zu Originalvariable t ; Kap. A2.3.1, A2.4.1, Schmierfilmdicke (Kap. 3.1.1.1, 3.1.3)
t	Zeit
u	Abkürzung (Kap. A2.3.2.8)

v	Drahtgeschwindigkeit
v_R	Relativgeschwindigkeit Draht-Ziehholoberfläche (Kap. 3.1.1)
w	Abkürzung (Kap. A2.3.2.8), Windungszahl (Kap. A3.1.2.2.1)
x, x_0	Koordinate, Wärmeeindringtiefe (Kap. A3.1.1.3)
y	Variable (Kap. A2.3.2.8)
z	Axialkoordinate bzw. -variable
A_n, \bar{A}_n	Abkürzungen; siehe (A2.3.2.5-8), (A2.3.2.6-6)
$\mathcal{B}\mathcal{I}\mathcal{O}\mathcal{T} := hR \equiv \frac{\alpha}{\lambda} R$	<i>BIOT</i> -Zahl
C	Strahlungsaustauschkoeffizient (Kap. A2.3.2.10)
C_n, D_n, E_n	Reihenoeffizienten (Kap. A2.3.2.8, (A2.3.2.8-3))
D	Wanddicke des Hohlzylinders $D = R_2 - R_1$; (Kap. A2.4, 2.3), Diffusionskoeffizient (Kap.3.3.1.1), Durchmesser von Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel (Kap. 3.1.2.2)
D_n	Abkürzung (A2.3.1-11.2)
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft
$F(\cdot)$	\mathfrak{F} -Bildfunktionen: Vollzylinder (A2.3.1-3.2), Hohlzylinder (A2.4.1-2.2), (A2.4.1-2.3)
$\hat{F}_a(\cdot), \hat{F}_b(\cdot), \hat{F}_c(\cdot)$	\mathfrak{F} -Bildfunktionen: (A2.3.1-14a-c) und (A2.3.1-17.2a-c)
$\mathcal{F}\mathcal{O} := \frac{az}{vR^2} = \frac{at}{R^2}$	<i>FOURIER</i> -Zahl
$G(\cdot), \bar{G}(\cdot)$	<i>GREENS</i> che Funktionen im Bildbereich
$I(\cdot)$	thermische Aktivierung (Kap. 3.3)
$I_\nu(\cdot)$	modifizierte <i>BESSELS</i> che Funktion 1. Art, ν -ter Ordnung
$\mathcal{I}(\cdot)$	siehe (3.3.1.1-16.2)
$J_\nu(\cdot)$	<i>BESSELS</i> che Funktion 1. Art, ν -ter Ordnung
$K_\nu(\cdot)$	modifizierte <i>BESSELS</i> che Funktion 2. Art, ν -ter Ordnung
L	Länge eines Drahtabschnitts, Länge des Hohlzylinders
M	Drehmoment (Kap. A3.1.2.2.1.2)
$N_\nu(\cdot)$	<i>BESSELS</i> che Funktion 2. Art, ν -ter Ordnung bzw. <i>NEUMANN</i> sche Funktion ν -ter Ordnung
N	Meßwertanzahl (Kap. 3.3.2.1), Normalkraft (Kap. A3.1.2.2.1.2)
$Nu := \frac{\alpha l}{\lambda}$	<i>NUßELT</i> -Zahl

$Pe := \frac{\omega l}{a}$	PECLET-Zahl
$Pr := \frac{\nu}{a}$	PRANDTL-Zahl; ν kinemat. Viskosität
Q	Aktivierungsenergie
$Q_R(\cdot), Q_V(\cdot)$	\mathfrak{Q} -Bildfunktionen zu $q_R(\cdot), q_V(\cdot)$
$R = d/2$	Draht- bzw. Strangradius (d Drahtdurchmesser)
$\mathcal{R} = 8,315$	Universelle Gaskonstante in $J/(mol \cdot K)$
$Re := \frac{\rho \omega l}{\eta}$	REYNOLDS-Zahl
T	Zeitkonstante (A2.3.3.2-7.4)
T_K, T_S	Zeitkonstanten (Kap. A2.3.3.2.1, A2.3.3.2.2)
$X = d/2$	halbe Banddicke (d Banddicke), Rekristallisationsgrad (Kap. 3.3.1.2)
$Z_0(\cdot)$	Verallgemeinerte Zylinderfunktion; vgl. (A2.3.1-8.2)
$Z_\eta(\cdot), \bar{Z}_\eta(\cdot)$	Verallgemeinerte Zylinderfunktion (Kap. A2.4.1)
$\mathfrak{Z}_\eta(\cdot), \bar{\mathfrak{Z}}_\eta(\cdot)$	Verallgemeinerte Zylinderfunktion (Kap. A2.4.2.2)
α	Wärmeübergangskoeffizient, Winkel
β	Summationsindex (Kap. A2.3.2.5, A2.4.2.3, A2.5.2), Linearer Wärmeausdehnungskoeffizient (Kap. A2.6)
γ	Gewichtsfaktor (Kap. 3.3)
$\delta(x) := \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \infty; & x = 0 \end{cases}$	DIRAC-Distribution (A2.3.2.2-D1)
Δ	LAPLACE-Operator, Differenz
$\theta(x) := \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$	HEAVISIDEsche Einheitssprungfunktion (A2.3.2.5-D3)
$\Delta\theta_{AB}(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z_A < z < z_B \\ 0 & \text{für } z < z_A \text{ und } z > z_B \end{cases}$	(vgl. auch (A2.5-D4))
ε	Emissionsgrad bzw. Emissionsverhältnis (Kap. A2.3.2.10), Dehnung
ζ	Integrationsvariable
η	dynamische Viskosität, Parameter (Kap. A2.3.2.9), Wirkungsgrad
$\mathfrak{H}(\cdot)$	Temperaturfunktion, CELSIUS-Temperatur
$\Theta(\cdot)$	Temperatur-Bildfunktion, Thermodynam. (absolute) Temperatur
κ	Abkürzung: (A2.3.1.-3.1), (A2.3.2.2-2.1), (A2.3.2.3-1.1), (A2.4.1-2.1)

κ_{β}	spezifische elektrische Leitfähigkeit (Kap. 3.2.2.2)
λ	Wärmeleitfähigkeit
μ	Reibungsbeiwert
μ_n	Eigenwert: (A2.3.1-10), (Kap. A2.3.2.7), (A2.4.1-10), (Kap. A2.4.2.4)
ν	Querkontraktionszahl, kinematische Viskosität
ν_n	Eigenwert: (A2.4.1-17), (Kap. A2.4.2.4)
ξ	Integrationsvariable
ρ	Dichte, Integrationsvariable
ρ_{β}	spezifischer elektrischer Widerstand (Kap. 3.2.2.2)
σ	mechanische Spannung
$\sigma \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$	STEFAN-BOLTZMANN-Konstante
$\pi = 3,1415\dots$	LUDOLFsche Zahl
φ	Abkürzung, vgl. (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8)
$\tilde{\varphi} := 4 \cdot \varphi^4 / C$	Abkürzung (Kap. A2.3.3.2.3.1)
$\Phi := \sqrt{1 + \frac{\tilde{\varphi}}{y_I^2}}$	Abkürzung (A2.3.3.2-7.1)
ω	Stömungsgeschwindigkeit, Konzentrationsquelle/-senke (Kap. 3.3.1.1)
ϖ	Abkürzung, vgl. (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8)

Quellenverzeichnis

- [ABB 92] Abbruzzese, G./Brozzo, P. (Hrsg.): Grain Growth in Polycrystalline Materials (Proceedings of the 1. International Conference, 18.-21.6.1991 in Rom) Materials Science Forum **94-96**(1992)
- [AER 87] Aernoudt, E.: Werkstoffkundliche Fragen beim Ziehen von Stangen, Drähten und Rohren. Vortragstext aus dem Sammelband [FUN 88]
- [ALT 70] Altan, T.: Heat generation and temperatures in wire and rod drawing Wire Journal **3**(1970)3, S. 54-59
- [ARM 67] Armstroff, O.: Der Spannungszustand beim Hohlzug von Rohren und beim Rohrziehen mit fliegendem Dorn. Dissertation, TH Clausthal 1967
- [ASK 96] Askeland, D. R.: Materialwissenschaften Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg·Berlin·Oxford 1996
- [ATA 83] Atanasiu, N.: Minimieren der Ziehspannungen verbessert die Güte des Drahtes Drahtwelt **69**(1983)4, S. 81-85
- [AVI 75] Avitzur, B./Hahn, W.C./Iscovici, S.: Limit analysis of flow through conical converging dies. J. of the Franklin Institute **299**(1975)5, S. 339-358
- [AVI 82] Avitzur, B.: Study of flow through conical converging dies (Part I-III) Wire Industry **49**(1982)6, S. 449-454; **49**(1982)7, S. 503-506; **49**(1982)8, S. 613-619
- [AVI 83] Avitzur, B.: Handbook of Metal Forming Processes J. Wiley, NewYork 1983
- [AVI 89] Avitzur, B.: Flow through dies (Part I+II) Wire Industry **56**(1989)4, S. 243-249; **56**(1989)6, S. 390-393
- [AVR 39] Avrami, M.: Kinetics of phase change (Part I-III). J.Chemical Physics **7**(1939)12, S. 1103-1112; **8**(1940)2, S. 212-224; **9**(1941)2, S. 177-184
- [BAC 78] Bacherer Soliz, G.: Elementare Plastizitätstheorie der Umformtechnik in werkstoffgerechter Darstellung. Dissertation, RWTH Aachen 1978
- [BAC 83] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Akademie-Verlag Berlin 1983
- [BAE 94] Baehr, H. D./Stephan, K.: Wärme- und Stoffübertragung Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1994
- [BAN 66] Banga, U. H./Mesman, W.: Durchlauföfen für Stabmaterial Philip´s Technische Rundschau **27**(1966)12, S. 339-344
- [BER 74] Berg, L.: Operatorenrechnung. Band 2: Funktionentheoretische Methode VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974
- [BET 93] Betten, J.: Kontinuumsmechanik - Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork . . . 1993
- [BOD 77] Bodem, H.: Ziehen und Tiefziehen mit Hartmetallwerkzeugen Technische Rundschau (Bern) **69**(1977)37, S. 29 und 31
- [BOW 57] Bowden, F. P./Freitag, E. H.: Einige neuere Versuchsergebnisse über die Reibung fester Körper. VDI-Berichte **20**(1957), S. 101-108
- [BOW 59] Bowden, F. P./Tabor, D.: Reibung und Schmierung fester Körper Springer-Verlag Berlin·Göttingen·Heidelberg 1959
- [BÖH 74] Böhmer, K.: Spline-Funktionen, Theorie und Anwendung B.G. Teubner Stuttgart 1974

- [BOU 93] Bourell, D. L./Kaysser, W.: Effect of nonisothermal heating or cooling on grain growth. *Acta metall. Mater.* **41**(1993)10, S. 2933-2937
- [BOY 77] Boy, S./Böhme, K.: Beitrag zur Kinetik von Festkörperreaktionen unter nichtisothermen Bedingungen. *Thermochimica Acta* **20**(1977)2, S. 195-209
- [BRA 97] Bratland, D. H./Grong, Ø./Shercliff, H./Myhr, O. R./Tjøtta, S.: Modelling of precipitation reactions in industrial processing *Acta materialia* **45**(1997)1, S. 1-22
- [BRO 79] Bronstein, I. N./Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1979
- [BRU 74] Bruns, E.: Wärmeübergang und Temperaturfelder beim Warmwalzen von Stahl unter besonderer Berücksichtigung des Zündereinflusses Dissertation, TU Clausthal 1974
- [BRÜ 65] Brühl, R.: Zusammenstellung und Vergleich von Ergebnissen verschiedener Temperaturmessungen beim Ziehen von Stahldraht. *Drahtwelt* **51**(1965)5, S. 237-245
- [BRÜ 69] Brühl, R.: Temperaturmessungen beim Ziehen von Stahldrähten im praktischen Betriebsablauf. *Drahtwelt* **55**(1969)7, S. 413-417
- [BRÜ 87] Brühl, R.: Höhere Ziehgeschwindigkeiten mit Hilfe von Tensiden *Drahtwelt* **73**(1987)11, S. 203-206
- [CAH 56] Cahn, J. W.: Transformation kinetics during continuous cooling *Acta Metallurgica* **4**(1956), S. 572-575
- [CAR 59] Carslaw, H. S./Jaeger, J. C.: Conduction of heat in solids Oxford University Press 1959
- [CHR 55] Christopherson, D. G./Naylor, H.: Promotion of fluid lubrication in wire drawing. *Proc. Instn. mech. Engrs.* **169**(1955) , S. 643-653
- [CIE 88] Cieslak, L./Ozgowicz, W./Kalinowska-Ozgowicz, E.: Thermomechanische Wärmebehandlung von Draht mit Schnellerwärmung. *Draht* **39**(1988)4, S. 520-524
- [COO 69] Cooper, M. G./Mikic, B. B./Yovanovich, M. M.: Thermal contact conductance *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**(1969)3, S. 279-300
- [CRU 92] Crusius, S./Höglund, L./Knoop, U./Inden, G./Agren, J.: On the Growth of Ferrite Allotriomorphs in Fe-C Alloys *Z. f. Metallkunde* **83**(1992)10, S. 729-738
- [CZI 96] Czichos, H.: HÜTTE - Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1996. (30. Aufl.)
- [DAH 93] Dahl, W./Kopp, R./Pawelski, O. (Hrsg.): Umformtechnik, Plastomechanik und Werkstoffkunde Verlag Stahleisen, Düsseldorf/Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1993
- [DEB 76] Debenath, L./Thomas, J. G.: On Finite Laplace Transformation with Applications *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)* **56**(1976) , S. 559-563
- [DOE 50] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation
Band 1: Theorie der Laplace-Transformation
Band 2 u. 3: Anwendungen der Laplace-Transformation
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart; 1950 (Bd.1), 1955 (Bd.2), 1956 (Bd.3)
- [DOE 67] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. R. Oldenbourg Verlag München·Wien 1967

- [DOE 76] Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser Verlag Basel & Stuttgart 1976 (3. Auflage)
- [DUS 97] Dusdorf, A.: Experimentelle Untersuchung des statischen Entfestigungsverhaltens von Ni-Basis- und Cu-Werkstoffen (AiF-Forschungsthema 10208B). Vortrag, Drahtwerk Bärenstein der Krupp VDM GmbH am 22.01.1997
- [EBN 87] Ebner, P. H.: Kaltstauchdraht wärmebehandeln in Hochkonvektions-Haubenöfen Drahtwelt **73(1987)3**, S. 42-44
- [EDE 75] Eder, E.: Ermittlung eines Spannungsfeldes für das Draht- und Stangenziehen mit Hilfe des Schrankenverfahrens. Z. ind. Fertigung **65(1975)10**, S. 615-618
- [ECK 74] Eckstein, H.-J. (Hrsg.): Ausscheidungen in metallischen Werkstoffen (4 Bände). Kolloquium der Bergakademie Freiberg und der Montanwissenschaftlichen Gesellschaft der DDR vom 6.-8.2.1974, Freiberg 1974
- [ECK 87] Eckstein, H.-J. (Hrsg.): Technologie der Wärmebehandlung von Stahl VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1987 (2. Aufl.)
- [EIC 41] Eichinger, A./Lueg, W.: Erwärmung von Draht und Düse beim Kaltziehen Mitt. Kaiser-Wilhelm-Institut f. Eisenforschung Düsseldorf **23(1941)2**, S. 21-30
- [EIS 59] Eisenkolb, F.: Einführung in die Werkstoffkunde (4 Bände) VEB Verlag Technik Berlin 1957-1960
- [EIS 63] Eisenhuth, C.: Der Einfluß der bei Einzel- und Mehrfachziehmaschinen entstehenden Temperaturen auf die mechanischen Eigenschaften der gezogenen Drähte Stahl und Eisen **83(1963)23**, S. 1459-1466
- [ENG 66] Engelhardt, W./Neubauer, A.: Die Temperatur in der Umformzone bei Kaltumformvorgängen und die Möglichkeiten ihrer Erfassung am Beisp. des Drahtzuges Wiss. Z. der TH „Otto von Guericke“, Magdeburg **10(1966)1/2**, S. 99-106
- [ENG 85] Engeln-Müllges, G./Reutter, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure Bibliographisches Institut Mannheim, Wien u. Zürich 1985
- [FAI 94] Faires, J. D./Burden, R. L.: Numerische Methoden Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg·Berlin·Oxford 1994
- [FAN 97] Fan, D./Chen, L.-Q.: Computer simulation of grain growth using a continuum field model. Acta materialia **45(1997)2**, S. 611-622
- [FEL 76] Felder, E./Le Floch, A.: Measurement of thermomechanical conditions in wire drawing dies. Annals of the CIRP (Oxford) **25(1976)1**, S. 173-177
- [FLA 79] Flanders, N. A./Alexander, E. M.: Analysis of wire temperatures and power requirements on multipass drawing productivity. Wire Journal **12(1979)3**, S. 60-64 (Diskussion S. 65-68)
- [FLE 92] Fleischer, Th.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Berechnung und Optimierung der Aufheißvorgänge in gasbeheizten Schnellerwärmungsanlagen Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1992
- [FOU 22] Fourier, J.: Théorie analytique de la chaleur. Didot, Paris 1822 (Deutsche Übersetzung von Weinstein, B.: Analytische Theorie der Wärme. Springer-Verlag, Berlin 1884)
- [FRO 92] Frost, H. J.: Stochastic models of grain growth. In [ABB 92, S. 903-908]
- [FRY 74] Frydrych, J./Krawiarz, T. u.a.: Einfluß des Drahtdurchmessers auf die ZTU-Schaubilder beim Patentieren von C-Stählen Drahtwelt **60(1974)4**, S. 134-141

- [FUJ 74] Fujita, T./Kawakami, H./Yamada, Y./Tetsuo, Y./Minoru, N.:
Verfahren zum Kühlen von Stahldraht
OE Patentschrift Nr. 2429996 (AT: 22.06.1974)
- [FUL 61] Fuller, D. D.: Theorie und Praxis der Schmierung
VEB Verlag Technik Berlin und Verlag Berliner Union Stuttgart 1961
- [FUN 88] Funke, P. (Hrsg.): Ziehen von Drähten, Stangen und Rohren
Vortragstexte eines Symposiums der DGM 1987
DGM Informationsgesellschaft-Verlag, Oberursel 1988
- [GAL 76] Galizin, A. S./Shukovski, A. N.: Integralnőe preobrasovanija i specialnőe funkzii
v sadatchach teploprovodnosti
(Integraltransformationen und spezielle Funktionen in Wärmeleitungsaufgaben)
Verlag „Naukowa dumka“, Kiew 1976
- [GEL 64] Geleji, A.: Das elastisch-plastische Biegen von Rundstäben
C.I.R.P.-Annalen **12**(1964)3, S. 165-169
- [GNI 75] Gnielinski, V.: Berechnung mittlerer Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten an
laminar und turbulent überströmten Einzelkörpern mit Hilfe einer einzelnen
Gleichung. Z. Forsch. Ing.-Wes. **41**(1975)5, S. 145-153
- [GOD 82] God, Ch./Scherl, P.: Elektrische Erwärmungsverfahren und ihre Wirkungsweise
Drahtwelt **68**(1982)12, S. 317-320
- [GOD 83] God, Ch./Scherl, P.: Elektrische Wärmebehandlung bei der Drahtherstellung
Drahtwelt **69**(1983)3, S. 57-61
- [GÖL 81] Göldner, H.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981
- [GOR 74] Gorelik, S.: Einfluß der Ausscheidungen auf die Rekristallisationsvorgänge.
Vortragsmanuskript, abgedruckt in [ECK 74, Band 1]
- [GOT 84] Gottschalk, R.: Einfluß der Zusammensetzung von Ziehseifen für das Draht-
ziehen auf ihre rheologischen Eigenschaften. Dissertation, RWTH Aachen 1984
- [GOT 84a] Gottstein, G. (Hrsg): Rekristallisation metallischer Werkstoffe
Deutsche Gesellschaft für Metallkunde, Oberursel 1984
- [GOT 98] Gottstein, G.: Physikalische Grundlagen der Materialkunde
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1998
- [GRI 90] Grigull, U./Sandner, H.: Wärmeleitung
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1990
- [GRÖ 88] Gröber, H./Erk, S./Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1988
- [GUN 95] Gun, I. G.: Modellierung des Rekristallisationsprozesses auf der Basis eines
kontinuierlichen Ansatzes. Dissertation TU Bergakademie Freiberg 1995
- [HAA 84] Haasen, P.: Physikalische Metallkunde
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork·Tokyo 1984
- [HÄF 92] Häfner, F./Sames, D./Voigt, H. D.: Wärme- und Stofftransport
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork u.a. 1992
- [HAR 68] Hart, J. F.: Computer Approximations
John Wiley&Sons, NewYork 1968

- [HÄB 72] Häßner, A.: Beitrag zur phänomenologischen Beschreibung der Diffusion in Metallen mit Korngrenzen. Freiburger Forschungsheft B168 VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1972
- [HEI 51, 66] Heiligenstaedt, W.: Wärmetechnische Berechnung für Industrieöfen. Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf, 1951 (3. Aufl.) und 1966 (4. Aufl.)
- [HEL 53] Held, W.: Der Wärmeübergang zwischen bearbeiteten Oberflächen Dissertation, TH Braunschweig 1953
- [HEL 57] Held, W.: Der Wärmeübergang zwischen bearbeiteten Oberflächen Allgemeine Wärmetechnik **8**(1957)1, S. 1-8
- [HEL 74] Helbig, H./Steyer, H.-L.: Zum Rekristallisationsverhalten von Stählen unter besonderer Berücksichtigung von Ausscheidungen. In [SMW 74, Teil 2, S. 37-99]
- [HEL 98] Helm, D./Haupt, P.: Rekonstruktion der Wärmeproduktion in Festkörpern und das daraus resultierende Verhältnis von gespeicherter Energie zu inelastischer Arbeit. ZAMM **78**(1998)52; Section 1-13 (H-Z), S471-S472
- [HEM 89] Hemminger, W. F./Cammenga, H. K.: Methoden der Thermischen Analyse Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork u.a. 1989
- [HEN 76] Henkel, O. (Hrsg.): Intermetallische Phasen VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1976
- [HEN 80] Hensel, A./Tröltzsch, F./von Wolfersdorf, L.: Berechnung der Abkühlung von Feinstahl und Draht in Kühlstrecken. Neue Hütte **25**(1980)2, S. 299-301
- [HEN 90] Hensel, A./Poluchin, P. I./Poluchin, W. P. (Hrsg.): Technologie der Metallformung Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1990
- [HIL 33] Hilpert, R.: Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom Technische Mechanik und Thermodynamik, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **4**(1933)5, S. 215-224
- [HIL 87] Hildebrand, M./Unger, F.: Ermittlung von Reibung und Schubspannung im Ziehhol. Neue Hütte **32**(1987)11, S. 426-429
- [HIL 88] Hildebrand, M.: Die Ermittlung der Spannungsfelder im Werkstoff und im Werkzeug beim Durchziehen. Dissertation, Bergakademie Freiberg 1988
- [HOF 99] Hofmann, B.: Mathematik inverser Probleme B.G. Teubner Stuttgart u. Leipzig 1999
- [HOR 95] Hornbogen, E./Warlimont, H.: Metallkunde - Aufbau und Eigenschaften von Metallen und Legierungen. Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork u.a. 1995
- [HUR 83] Hurst, M. J.: A new direct cooling device „The Hydravac“ Wire Industry **50**(1983)11, S. 653-656
- [ILS 90] Ilschner, B.: Werkstoffwissenschaften - Eigenschaften, Vorgänge, Technologien Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork u.a. 1990
- [IND 96] Inden, G./Neumann, P.: Simulation of diffusion controlled phase transformations in steels. Steel research **67**(1996)10, S. 401-407
- [JÄC 56] Jäckel, H.: Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge. Dissertation, Bergakademie Freiberg 1956
- [JÄC 61] Jäckel, H.: Nichtlineare Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern Wiss. Z. der Hochschule für Maschinenbau Karl-Marx-Stadt **3**(1961)2, S. 23-40

- [JOH 39] Johnson, W. A./Mehl, R. F.: Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. Trans. AIME **135**(1939), S. 416-442 (Discussion S. 442-458)
- [KAH 95] Kahn, P. B.: Mathematische Methoden für Wissenschaftler und Ingenieure Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1995
- [KAM 61] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen (*Band I*) Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1961 (7. Aufl.)
- [KAR 68] Kartak, B. R./Levanov, A. N./Tarnovskij, I. Ja./Burkin, S. P.: Issledovanie kontaktnych naprjazénij pri volocénii aljuminija i medi (Untersuchung der Spannungsverteilung zwischen Draht und Ziehhol beim Ziehen von Aluminium und Kupfer) Cvetnaja metallurgija **11**(1968)6, S. 116-120
- [KEH 77] Kehlen, H./Kuschel, F./Sackmann, H.: Grundlagen der chemischen Kinetik Wiss. Taschenbuch, Bd. 148, Akademie-Verlag Berlin 1977
- [KER 74] Kerth, W./Mack, K.: Kraftübertragung zwischen Rolle und Band an kontinuierlich arbeitenden Bandreckmaschinen Blech Rohre Profile **21**(1974)2, S. 51-56; 4, S. 130-132; 10, S. 380-386
- [KEU 84] Keuper, R.: Die direkte Kühlung beim Ziehen von Stahldraht Dissertation, RWTH Aachen 1984
- [KIR 74] Kirchberg, K.: Entfestigungs- bzw. Rekristallisationsverhalten von Kupferwerkstoffen. In [SMW 74, Teil 5, S. 59-92]
- [KIS 63] Kiss, M.: Der Wärmeübergang zwischen sich berührenden metallischen Oberflächen. Neue Technik Zürich **5**(1963)12, S. 714-724
- [KIS 68] Kiss, E.: Untersuchungsergebnisse an einem Mehrfachdrahtzug mit erhöhten Ziehgeschwindigkeiten. Neue Hütte **13**(1968)3, S. 164-169
- [KLA 69] Klafs, U.: Ein Beitrag zur Bestimmung der Temperaturverteilung in Werkzeug und Werkstück beim Warmumformen. Dissertation, TU Hannover 1969
- [KLE 87] Klemens, D./Buddenberg, H.: Wärmebehandlung von Draht Draht **38**(1987)6, S. 455-457
- [KLE 89] Klemens, D.: Neuzeitliche Wärmebehandlung von Drähten und Bändern Draht **40**(1989)4, S. 284-287
- [KLI 74] Klimanek, P.: Grundlagen von Entfestigungsvorgängen. In [SMW 74, Teil 1, S. 50-73]
- [KLU 88] Klubovic, V. V./Rubanik, V. V./Carenko, Ju. V.: Drahtziehen mit Elektrokontakterwärmung im Ultraschallfeld. Freiburger Forschungsheft B 266 VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1988
- [KLU 94] Kluge, G./Neugebauer, G.: Grundlagen der Thermodynamik Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1994
- [KNA 85] Knap, F.: Bedingungen beim Drahtziehen beeinflussen Restspannungen Drahtwelt **71**(1985)2, S. 41-45
- [KNE 61] Kneschke, A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme
Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Band 2: Partielle Differentialgleichungen
Band 3: Anwendungen der Differentialgleichungen
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1957 (Bd. 1), 1959 (Bd. 2), 1961 (Bd. 3)
- [KNE 71] Kneschke, A./Bandemer, H.: Hydrodynamische Theorie des Drahtziehens Neue Hütte **16**(1971)4, S. 225-234

- [KOC 77] Koch, E.: Non-isothermal Reaction Analysis
Academic Press, London·NewYork·SanFrancisco 1977
- [KOH 94] Kohlhéb, R./Buza, G./Réti, T./Gergely, M.: Comparative analysis of kinetic models used for description of non-isothermal austenite transformation.
Materials Science Forum **163-165**(1994), S. 667-672
- [KOL 37] Kolmogorov, A. N.: (Statistik der Kristallisationsvorgänge in Metallen)
Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Matematicheskaja **1**(1937)3, S. 355-359
- [KOP 68] Kopp, R.: Untersuchung über das Temperaturfeld beim Ziehen von Rundstäben
Dissertation, TU Clausthal 1968
- [KOP 82] Kopp, R./Tzscheuschler, H.: Stand und Einsatzmöglichkeiten des Warmziehens Draht **33**(1982)3, S. 116-119
- [KOR 48] Korst, H.: Die Temperaturverteilung im Ziehgut beim Drahtziehen
Österreichisches Ingenieur-Archiv **2**(1948)2, S. 132-137
- [KOW 30] Kowalewski, G.: Integralgleichungen
Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930
- [KÖR 40] Körber, F./Eichinger, A.: Die Grundlagen der bildsamen Verformung
Mitt. Kaiser-Wilhelm-Institut f. Eisenforschung **22**(1940), S. 57-80
- [KRA 62] Krasilscikov, R. B.: Nagrev pri choldnom volocenii provoloki
(Erwärmung beim Kaltziehen von Draht)
Verlag Metallurgisdat, Moskau 1962
- [KRA 63] Kratzer, A./Franz, W.: Transzendente Funktionen (2. Aufl.)
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1963
- [KRA 71] Kragelski, I. W.: Reibung und Verschleiß
VEB Verlag Technik Berlin 1971
- [KRA 82] Kragelski, I. V./Dobycin, M. N./Kombalov, V. S.:
Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß
VEB Verlag Technik Berlin 1982
- [KRA 88] Kramer, C.: Hochkonvektionsanlagen für die Wärmebehandlung von Halbzeugen (2 Teile). Blech Rohre Profile **35**(1988)7, S. 489-493; 9, S. 633-637
- [KRI 96] Krim, J.: Reibung auf atomarer Ebene
Spektrum der Wissenschaft (1996)12, S. 80-85
- [KUM 89] Kumar, V./Crane, L. W./Cole, I. M.: The hot drawing of non-ferrous metals.
Wire Ind. **56**(1989)2, S. 124-125
- [LAH 78] Lahoti, G. D./Altan, T.: Prediction of metal flow and temperatures in axialsymmetric deformation processes.
In: Proceedeings of 21. Sagamore army material research conference „Advances in deformation processing“, Plenum Press NewYork·London 1978, p. 99-125
- [LAN 72] Lange, K.: Lehrbuch der Umformtechnik
Band 1: Grundlagen,
Band 2: Massivumformung,
Band 3: Blechumformung
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1984, 1988, 1990 (bzw. 1972-75)
- [LEH 87] Lehnert, W./Vetter, P.: Wärmetechnische Optimierung von Haubenglühanlagen
Drahtwelt **73**(1987)2, S. 19-22

- [LEH 87a] Lehnert, W./Vetter, P.: Gefüge und Eigenschaften haubengeglühter Stahldrähte Drahtwelt **73**(1987)4/5, S. 57-61
- [LEH 91] Lehnert, W.: Grundlagen der Plastizitätsmechanik Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden 1991
- [LEH 91a] Lehnert, W.: Theoretische Grundlagen moderner Technologien beim Drahtziehen. Drahtwelt **77**(1991)4, S. 18-28
- [LEH 92] Lehnert, W./Wohlfarth, U.: Wärmetechnische Grundlagen für Industrieöfen Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden 1992
- [LEH 93] Lehnert, W./Cuong, N. D./Wehage, H.: Werkstoffgefüge beim Walzen von Draht und Stabstahl. Draht **44**(1993)10, S. 559-566
- [LEH 94] Lehnert, W.: Wärmebehandlung kaltumgeformter Werkstoffe MEFORM 94 (Vortrag 8), TU Bergakademie Freiberg, 23.-25.2.1994
- [LEP 97] Lepach, W.: LAN-Kabel mit eng tolerierten Eigenschaften Draht **48**(1997)6, S. 16-17
- [LEW 52] Lewin, W. I./Grosberg, J. I.: Differentialgleichungen der mathemat. Physik Verlag Technik Berlin 1952
- [LIE 92] Liesch, J./Hubert, R./Christophe, J.: Optimale Steuerung des Haubenofen-Glühprozesses. Stahl und Eisen **112**(1992)11, S. 91-98
- [LIP 67] Lippmann, H./Mahrenholtz, O.: Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1967
- [LÖH 69] Löhr, D.: Über die Wechselwirkung von Reibung, Schmierung, Wärmeübertragung und Temperaturfeld bei der Warmumformung von Stahl Dissertation, TU Clausthal 1969
- [LÜC 92] Lücke, K./Abbruzzese, G./Heckelmann, I.: Statistical theorie of 2-D grain growth based on first principles and ist topological foundation. [ABB 92, S. 3-16]
- [LUE 41] Lueg, W./Pomp, A.: Wärmeübergang und Wärmeverlust beim Schmieden und Pressen. Mitt. Kaiser-Wilhelm-Institut f. Eisenforschung **23**(1941)8, S. 105-120
Lueg, W.: Die Wärmeübergangszahl bei der Berührung fester metallischer Körper Mitt. Kaiser-Wilhelm-Institut f. Eisenforschung **23**(1941)8, S. 121-122
- [LUE 51] Lueg, W.: Temperaturmessungen beim Drahtziehen mit einem Draht-Düse-Thermoelement. Stahl und Eisen **71**(1951)22, S. 1140-1147
- [LUE 57] Lueg, W./Treptow, K.-H.: Temperaturmessungen beim Ziehen von Stahldraht
I. Teil: Stahl und Eisen **76**(1956)25, S. 1690-1698
II. Teil: Stahl und Eisen **77**(1957)13, S. 859-867
- [MAL 63] Mallach, W.: Der Einfluß des Schlupfes bei gleitenden Drahtziehmaschinen auf Kraftbedarf und Verschleiß. Draht **14**(1963)4, S. 161-171
- [MAL 65] Mallach, W.: Der Erwärmungsvorgang bei der Wärmebehandlung von Drähten Draht **16**(1965)9, S. 641-647
- [MAR 65] Marciniak, H./Weiss, H.: Temperatura drutu i jej pomiar podczas ciagnienia (Messung der Drahttemperatur beim Ziehen). Hutnik (Katowice) **32**(1965)12, S. 422-426
- [MAR 69] Marciniak, H.: Pomiar temperatury podczas ciagnienia drutu (Temperaturmessung beim Drahtziehen). Hutnik (Katowice) **36**(1969)3, S. 124-128

- [MAR 86] Marcol, J./Mikulec, Z.: Problematik des Patentierens von Stahldraht Drahtwelt **72**(1986)1/2, S. 3-7
- [MAR 86] Marcol, J./Mikulec, Z.: Anlagenarten zum Patentieren von Drähten aus Stahl Drahtwelt **72**(1986)3, S. 37-41
- [MAR 87] Maraité, K.-D., Kopp, R.: Halbwarmziehen Vortragstext aus dem Sammelband [FUN 88]
- [MAR 91] Marcol, J.: Der Einfluß des Kohlenstoffs . . . auf die Eigenschaften des gezogenen Drahtes aus Kohlenstoffstählen . . . Draht **42**(1991)7/8, S. 514-523
- [MAY 66] Maynier, Ph./Martin, P. F./Bastien, P./Sébille, J.: Etablissement d'une équivalence entre le temps et la température d'austénitisation Memoires scientifiques rev. Metallurg. **63**(1966)12, S. 997-1016
- [MAY 72] Maynier, Ph./Toitot, M./Dollet, J./Bastien, P.: Application des lois de la diffusion aux traitements thermiques de l'acier Memoires scientifiques rev. Metallurg. **69**(1972)7/8, S. 501-511
- [MEL 53] Melan, E./Parkus, H.: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder Springer-Verlag Wien 1953
- [MEN 90] Menge, R.: Entwicklungstendenzen beim Ziehglühen von Drähten im VEB Walzwerk Hettstedt KDT - Techn. Mitt. d. Mansfeld Kombinats **31**(1990)1, S. 18-20
- [MEN 91] Menge, R.: Beitrag zur Schnellwärmebehandlung von Kupferlegierungs- und Verbunddrähten. Dissertation Bergakademie Freiberg 1991
- [MEN 91a] Menge, R.: Theoretische Betrachtungen zur Schnellerwärmung von Kupferlegierungs- und Verbunddrähten. Draht **42**(1991)5, S. 323-335
- [MEY 89] Meyer, U.: Einfluß verschiedener Verformungsparameter auf die Rekristallisationskinetik von Kupfer. Dissertation TU Braunschweig 1989
- [MIT 75] Mitropolski, J. A.: Randwertaufgaben der Wärmeleitungstheorie (russ.) Math. Inst. d. Ukrainischen Akademie d. Wissenschaften, Kiew 1975
- [MOE 85] Moeller, H.: Energiesparende Durchziehöfen für die Feindrahtherstellung Drahtwelt **71**(1985)10, S. 213-215
- [MÜL 94] Müller, W.: Beitrag zur quantitativen Bewertung thermisch aktivierter Werkstoffreaktionen. Materialwissenschaft und Werkstofftechnik **25**(1994)8, S. 341-348
- [MUS 81] Muschik, W.: Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) **61**(1981) T213-219
- [NAG 81] Nagy, A. T.: The thermal phenomena in the drawing die. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae **93**(1981)3/4, S. 367-374
- [NAK 76] Nakamura, Y./Fujita, H./Kawakami, H./Yamada, Y.: New Cooling System for High-Speed Wire Drawing. Wire Journal **9**(1976)7, S. 59-66
- [NED 61] Nedovizij, I. N./Gel'fand, I. M./Al'ter, V. F.: Verwendung eines elektrischen Modells zur Bestimmung der Temperatur in der Formänderungszone beim Ziehen. STAL in Deutsch **1**(1961)10, S. 1045-1048
- [NEI 83] Neimarlija, N.: Analysis of temperature field and optimization of cooling system of dies for dry steel-wire drawing. Master Thesis (Sarajevo) 1983 (vgl. auch: Neimarlija, N./Hanjalic', K.: Numerical simulation of temperature field in dies for dry steel-wire drawing. Vortrag zur 7. Landeskonferenz „Kaltumformung der Eisenhüttenindustrie“ in Salgotarjan (Ungarn) vom 11.-13.10.1983, Konferenzband Sektion B)

- [NEI 95] Neidel, P.: Prozeßmodell eines Banddurchlaufofens zur Erzielung vorgegebener Werkstoffeigenschaften bei der Rekristallisationsglühung von Kupfer- und Messingbändern. Dissertation RWTH Aachen 1995
- [NEI 95a] Neidel, P./Woelk, G.: Prozeßführung eines Banddurchlaufofens zur Erzielung vorgegebener Werkstoffeigenschaften. Metall **49**(1995)9, S. 596-600
- [NES 89] Nesenenko, G. A.: Boundary layer of the heat equation in several variables with nonlinear boundary condition as a power-type function
Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) **69**(1989)1, S. 51-52
- [NEU 65] Neubauer, A.: Temperatureentwicklung in der Umformzone eines Kaltumformvorganges. Z. Fertigungstechnik und Betrieb **15**(1965)2, S. 74-77
- [NEU 83] Neubert, X./Langbein, W.: Neue Erkenntnisse beim Ziehen von Feindrähten aus Edelstahl und Kupfer. Freiburger Forschungsheft B 237
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1983
- [NOL 88] Noll, A.: Die Wärmebehandlung von Qualitätsdrähten in Kompaktcoils
Draht **39**(1988)4, S. 524-526
- [ORZ 72] Orzechowski, H./Sikora, E.: Wplyw cisnienia smaru na temperature ciagadla (Einfluß des Schmiermitteldrucks auf die Temperatur des Ziehsteins)
Rudy i Metale Niezelazne **17**(1972)3, S. 98-99
- [OTT 88] Ott, D.: Berücksichtigung eines nichtisothermen Temperaturverlaufs beim Weichglühen von Metallen. Metall **42**(1988)11, S. 1091-1093
- [OTT 91] . . . : Die OTT-Direkt-Kühlssysteme. Z. Draht **42**(1991)12, S. 922
- [OTT 92] Ott, D.: Verfahren zum Weichglühen von Metallen bei nichtisothermem Temperaturverlauf. Metall **45**(1991)11, S. 1136-1141 und **46**(1992)1, S. 55-59
- [OTT 96] Ott, D.: Untersuchungen zum isothermen und nicht-isothermen Aushärten von Legierungen. Metall **49**(1995)10, S. 650-654 und **50**(1996)3, S. 197-201
- [PAM 84] Pamplin, J. W.: Direkte Wasserkühlung des Drahtes beim Ziehen mit V-Nut-Scheibe. Drahtwelt **70**(1984)6/7, S. 157-160
- [PAN 92] Pande, C. S.: A stochastic theory of grain growth. In [ABB 92, S. 351-360]
- [PAR 59] Parkus, H.: Instationäre Wärmespannungen
Springer-Verlag Wien 1959
- [PAW 62] Pawelski, O.: Einfluß des zylindrischen Führungsteils in Ziehwerkzeugen auf die Spannungen beim Draht- und Stabziehen.
Stahl und Eisen **82**(1962)21, S. 1456-1457
- [PAW 65] Pawelski, O.: Theoretische Betrachtungen und Versuche zum Erzeugen dicker Schmierfilme beim Drahtziehen. Stahl und Eisen **85**(1965)3, S. 145-148
- [PAW 66] Pawelski, O. (Hrsg.): Grundlagen der bildsamen Formgebung
Verlag Stahleisen Düsseldorf 1966
- [PAW 67] Pawelski, O./Armstroff, O.: Überprüfung der Theorie der Druckverteilung beim Rohr- und Stabziehen. Archiv für das Eisenhüttenwesen **38**(1967)12, S. 899-904
- [PAW 69] Pawelski, O.: Berechnung der Wärmedurchgangszahl für das Warmwalzen und Schmieden. Archiv für das Eisenhüttenwesen **40**(1969)10, S. 821-827
- [PAW 69a] Pawelski, O./Kopp, R.: Messung der Temperaturverteilung beim Ziehen von Rundstäben. Stahl und Eisen **89**(1969)24, S. 1345-1353

- [PAW 70] Pawelski, O./Kopp, R.: Berechnung des Temperaturfeldes beim Stab- und Drahtziehen. *Archiv des Eisenhüttenwesens* **41**(1970)2, S. 201-208
- [PAW 73] Pawelski, O./Vollmer, H.: Über die Oberflächentemperatur beim Ziehen von Stahldraht. *Stahl und Eisen* **93**(1973)10, S. 439-445
- [PAW 76] Pawelski, O./Vollmer, H.: Thermische Simulation des Einflusses der Ziegeschwindigkeit auf die mechanischen Eigenschaften gezogener Stahldrähte. *Archiv des Eisenhüttenwesens* **47**(1976)1, S. 9-13
- [PAW 82] Pawelski, O./Kaspar, R./Peichl, L.: Thermomechanische Behandlung von Stählen. *Drahtwelt* **68**(1982)2, S. 25-30
- [PAW 85] Pawelski, O./Rasp, W./Keuper, R.: Direktes Kühlen von Stahldraht verbessert den Wärmeübergang. *Drahtwelt* **71**(1985)1, S. 9-13
- [PET 84] Petkovic, D.: OTT direct cooling system
Wire Journal int. **17**(1984)12, S. 57-62
- [PET 85] Petkovic, D.: Hochgekohlte Stahldrähte direkt gekühlt ziehen
Drahtwelt **71**(1985)9, S. 185-186
- [PIE 72] Pietroni, P.: Ziehsteinhalter für Drahtziehmaschinen
OE Patentschrift Nr. 319877 (AT: 19.12.1972)
- [PLA 80] Planer, F. E.: Die Vorheizung von Leitern (3 Teile)
Draht **80**(1980)3, S. 144-146; 4, S. 218-220; 5, S. 368-370
- [POL 96] Polyanin, A. D./Zaitsev, V. F.: *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg·Berlin·Oxford 1996
- [POL 79] Polzer, G./Meißner, F.: *Grundlagen zu Reibung und Verschleiß*
VEB Deutscher Verlag für Gundstoffindustrie, Leipzig 1979
- [PÖT 88] Pötke, W./Jeschar, R./Kehse, G.: Wärmetransport beim Glühen von Coils in Haubenöfen mit Wasserstoff als Schutzgas.
Stahl und Eisen **108**(1988)12, S. 581-585
- [PÖT 89] Pötke, W.: Einfluß der Ofenatmosphäre auf den Wärmeübergang
DGM-Fortbildungsseminar Wärmebehandlung, Aachen 9.-13.10.1989
- [PRE 85] Preuß, W./ Bleyer, A./ Preuß, H.: *Distributionen und Operatoren*
Ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1985
- [PUP 90] Pupke, F.: *Rekristallisationsverhalten hochverformter Cu-Drähte*
Dissertation, Bergakademie Freiberg 1990
- [PYS 80] Pysz, G./Krumnacker, M.: Beitrag zum Zusammenhang zwischen Korngröße, Zugfestigkeit, Härte und Verfestigungsexponent.
Neue Hütte **80**(1980)7, S. 256-258
- [RAM 90] Ramamurthy, H./Ramadhyani, S./Viskanta, R.: Modeling of heat transfer in indirectly-fired continuous reheating furnace. Konferenz-Einzelbericht: Transport phenomena in Materials Processing 1990, the Winter Annual Meeting of the ASME (Dallas, USA) 25.-30.11.1990, Vol. HTD-146 (1990), S. 37-46
- [RAN 57] Ranger, A. E.: An electrical analogue for estimating die temperatures during wire drawing. *J. Iron and Steel Inst.* **185**(1957)3, S. 383-388
- [REG 89] Réger, M./Takács, S./Réti, T.: Modellierung der Rekristallisationskinetik von Weichstahl. VI. Konferenz „Metallkundliche Probleme der Werkstoffentwicklung“, Freiberg 13.-15.9.1989, S. 153-168

- [REH 68] Rehder, O. A.: Untersuchungen über den Einfluß der Ziehgeschwindigkeit auf das Ziehen von patentiertem Stahldraht. Dissertation, TU Berlin 1968
- [REI 50] Reichel, W.: Temperaturmessung beim Stangen- und Drahtzug und die Frage überkritischer Ziehgeschwindigkeiten. *Stahl und Eisen* **70**(1950)25, S. 1141-1146
- [REI 74] Reisz, G.: Theoretische Untersuchung über die Verteilung der beim Ziehen entstehenden Wärmemengen. *Neue Hütte* **19**(1974)4, S. 204-206
- [RET 87] Rèti, T./Gergely, M./Tardy, P.: Mathematical treatment of non-isothermal transformations. *Materials Science and Technology* **3**(1987), S. 365-371
- [RET 94] Rèti, T./Bell, T./Sun, Y./Bloyce, A.: Computer prediction of austenite transformation under non-isothermal conditions. *Materials Science Forum* **163-165**(1994), S. 673-680
- [RET 96] Rèti, T./ Felde, I ./Horvath, L. et al.: Quenchant Performance Analysis Using Computer Simulation. *Heat Treatment of Metals* (1996)1, S. 11-14
- [RET 99] Rèti, T./Felde, I.: A non-linear extension of the additivity rule. *Computational Materials Science* **15**(1999), S. 466-482
- [RIC 91] Richter, H./Klimanek, P./Hensger, K.-E.: Grundlagen und Methoden der rechnergestützten Modellierung von statischen Rekristallisationsprozessen *Freiberger Forschungsheft B 272*. Dtsch. Verl. f. Grundstoffind., Leipzig 1991
- [RIC 93] Richter, H.: Beitrag zur rechnergestützten Modellierung des normalen Kornwachstums in metallischen Werkstoffen
Dissertation, TU Bergakademie Freiberg 1993
- [RIT 70] Rittmann, K.: Untersuchungen über den Einfluß großer Ziehgeschwindigkeiten beim Kaltziehen von Stabstahl. Dissertation TU Hannover 1970
- [RIT 71] Rittmann, K.: Temperaturerhöhungen der Ziehholoberfläche beim Kaltziehen von Stabstahl mit großen Ziehgeschwindigkeiten
Archiv für das Eisenhüttenwesen **42**(1971)4, S. 265-271
- [ROH 69] Rohde, A.: Einsatz von Widerstandserwärmungsanlagen für Stahldraht im Durchlauf vor und nach Ziehoperationen. *Drahtwelt* **55**(1969)4, S. 208-209
- [RUF 88] Rufer, J.-M.: Die Wärmebehandlung von Halbfabrikaten wie Drähte, Profile und Bänder aus NE-Metallen (2 Teile). *Draht* **39**(1988)3, S. 417-427; 5, S. 602
- [SAC 27] Sachs, G.: Zur Theorie des Ziehvorganges
Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) **7**(1927)3, S. 235-236
- [SAM 95] Samarskii, A. A./Vabishchevich, P. N.: *Computational Heat Transfer*
John Wiley&Sons, Chichester·NewYork·Brisbane·Toronto·Signapore 1995
- [SAU 67] Sauer, R./Szabo', I. (Hrsg.): *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Band 1*
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork 1967
- [SAU 83] Sauer, R./Keuper, R./Pawelski, O.: Berechnung und Meßmethode zur Bestimmung des Temperaturgefälles und des Wärmeübergangskoeff. bei der direkten Kühlung von Stahldraht. *Arch. Eisenhüttenwesen* **54**(1983)5, S. 203-208
- [SCH 50] Schmeidler, W.: *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*
Band 1: Lineare Integralgleichungen
Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.-G., Leipzig 1950
- [SCH 69] Scheucher, E.: *Rekristallisations-Kinetik von Kupfer im Bereich sehr kurzer Zeiten*. Dissertation Universität Erlangen-Nürnberg 1969

- [SCH 77] Schenk, R.: Dreidimensionale, instationäre Temperaturverteilung in durchströmten zylindrischen Rohren. *ZAMM* **57**(1977)1, S. 33-40
- [SCH 81] Schlegel, J./Petzold, K.-M./Peters, R./Edelmann, K.: Verbesserung der Ziehfähigkeit beim Naßziehen unlegierter verzinkter Stahldrähte. *Neue Hütte* **26**(1981)9, S. 336-340
- [SCH 83] Schack, A.: *Der industrielle Wärmeübergang*
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1983 (8. Aufl.)
- [SCH 83a] Schönborn, K.-H.: Untersuchung des Rekristallisationsablaufs in plastisch verformten Metallen mit Hilfe kalorischer Meßverfahren
Dissertation TU Braunschweig 1983
- [SCH 85] Schönborn, K.-H.: Untersuchung der Rekristallisationskinetik in hochverformtem Kupfer und Silber mit Hilfe isothermer und anisothermer kalorischer Meßverfahren. *Z. f. Metallkunde* **76**(1985)3, S. 198-207
- [SCH 88] Schedler, W.: *Hartmetall für den Praktiker*
VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1988
- [SCH 89] Scherl, P./God, Chr.: *Stahldrähte Warmbehandeln*
Drahtwelt **75**(1989)2, S. 22-27
- [SCH 91] Schwetlick, H./Kretzschmar, H.: *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig 1991
- [SCH 91a] Schatt, W. (Hrsg.): *Werkstoffe des Maschinen-, Anlagen- und Apparatebaues*
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1991
- [SEI 55] Seith, W.: *Diffusion in Metallen*
Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1955
- [SIE 43] Siebel, E./Kobitzsch, R.: Die Erwärmung des Ziehgutes beim Drahtziehen
Stahl und Eisen **63**(1943)6, S. 110-113
- [SIE 47] Siebel, E.: Der derzeitige Stand der Erkenntnisse über die mechanischen Vorgänge beim Drahtziehen. *Stahl und Eisen* **66/67**(1947)11/12, S. 172-180
- [SKA 74] Skakov, Ju. A.: Theoretische Grundlagen der Kinetik der Ausscheidungen in Legierungen. Vortragsmanuskript, abgedruckt in [ECK 74, *Band 1*]
- [SMI 68] Smirnow, W. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik - Teil II*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968 (8. Auflage)
- [SMW 74] Sektion Metallurgie und Werkstofftechnik der BA Freiberg (Hrsg.): *Verfestigung und Entfestigung metallischer Werkstoffe (5 Teile)*;
Vortagsreihe anlässlich einer Weiterbildungsveranstaltung des Wissenschaftsbereiches Metallformung vom 10. bis 14.06.1974. Bergakademie Freiberg 1974
- [SNI 77] Snidle, R. W.: Contribution to the theory of frictional heating and the distribution of temperature in wires and strips during drawing.
Wear (Amsterdam) **44**(1977)2, S. 279-294
- [SOM 88] Sommer, P.: Grundlegende Betrachtungen zur Atmosphärenregelung bei kontinuierlicher Drahtwärmebehandlung im Durchlauf-Wirbelbettöfen
Draht **39**(1988)10, S. 1034-1036
- [SON 75] Sonntag, G.: Zur Kraftübertragung zwischen Rolle und Band
Forsch. Ing.-Wes. **41**(1975)1, S. 29-31
- [SPÄ 73] Späth, H.: *Algorithmen für elementare Ausgleichsmodelle*
R. Oldenbourg Verlag München-Wien 1973

- [SPÄ 74] Späth, H.: Algorithmen für multivariable Ausgleichsmodelle
R. Oldenbourg Verlag München·Wien 1974
- [STA 94] Staudte, W./Thumm, S./Miersch, L.: Konstruktionsanalyse Drahtziehmaschinen, Teilkomplex Trommelkühlung, Abschnitt 3: Wärmetechnische Überschlagsrechnungen zur Bestimmung der Kühlintensität
TU Bergakademie Freiberg, Inst. f. Wärmetechnik und Thermodynamik 1994
- [STE 78] Steyer, H.-L.: Zum Einfluß der Aufheizgeschwindigkeit auf den Ablauf der Primärrekristallisation kaltgewalzter unberuhigter Bandstähle
Dissertation, Bergakademie Freiberg 1978
- [STE 85] Steininger, Z.: Fähigkeit zum Kaltziehen von Kohlenstoffstählen
Drahtwelt **71**(1985)11, S. 232-235
- [STE 87] Steinhardt, R./Krivandin, V. A. (Hrsg.): Grundlagen der Industrieofentechnik
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1987
- [STU 63] Sturgeon, G. M./Guy, V. H.: Drahtkühlen beim Ziehen
Drahtwelt **49**(1963)10, S. 431-438
- [SUC 76] Sucker, D./Brauer, H.: Stationärer Stoff- und Wärmeübergang an stationär quer angeströmten Zylindern. Wärme- und Stoffübertragung **9**(1976)1, S. 1-12
- [SZA 84] Szabo', I.: Einführung in die Technische Mechanik
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork·Tokyo 1984
- [SZA 85] Szabo', I.: Höhere Technische Mechanik
Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·NewYork·Tokyo 1985
- [TAO 81] Tao, L. N.: Heat conduction with nonlinear boundary condition
Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) **32**(1981), S. 144-155
- [TAT 61] Tattersall, G. H.: Hydrodynamic lubrication in wire drawing
J. Mechanical Engineering Science **3**(1961)4, S. 378-393
- [TAU 71] Tautz, H.: Wärmeleitung und Temperatenausgleich
Akademie-Verlag Berlin 1971 / Verlag Chemie Weinheim 1971
- [TEM 71] Temnikov, A. V./Ivanov, E. M.: Rascet i elektromodelirovanie temperatur pri volocenii provoloki (Berechnung und elektrische Simulation der Temperatur beim Drahtziehen). Fizika i chimija obrabotki materialov (1971)1, S. 25-30
- [THI 67] Thiessen, P.-A./Meyer, K./Heinicke, G.: Grundlagen der Tribochemie
Akademie Verlag Berlin 1967
- [THO 32] Thompson, F. C./Dyson, H. G.: The measurement of the surface temperature of the metal during the drawing of wire. Metallurgia (Manchester) **6**(1932), S. 191-192
- [TOL 55] Tolstow, G. P.: Fourierreihen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955
- [TOM 80] Tomlinson, W. M./Pamplin, J. W./Shillito, R.: Veetrac - a new concept in wire drawing. Wire Journal **13**(1980)4, S. 66-69
- [TRE 73] Tretjakov, A. W./Sjusin, W. I.: Mechanitscheskie swoistwa metallov i splavov . . (Mechanische Eigenschaften von Metallen und Legierungen bei der bildsamen Formgebung). Isdat. Metallurgija Moskau 1973
- [TRO 58] Trostel, R.: Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Ingenieur-Archiv **26**(1958)2, S. 134-142
- [TRO 84] Troost, A.: Einführung in die allgemeine Werkstoffkunde metallischer Werkstoffe (Band 1). B-I-Wissenschaftsverlag, Mannheim·Wien·Zürich 1984 (2. Aufl.)

- [TRO 92] Troost, A./Akin, O./Bottin, R.: Ziehkraftformeln beim Drahtziehen
Draht **43**(1992)9, S. 735-738
- [TRO 92a] Troost, A./Akin, O./Bottin, R.: Zur elementaren Plastizitätstheorie der
mechanischen Umformverfahren in werkstoffgerechter Darstellung
Draht **43**(1992)11, S. 907-911
- [TYC 59] Tychonoff, A. N./Samarski, A. A.:
Differentialgleichungen der mathematischen Physik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959
- [UNG 79] Unger, F./Weber, K.-H./von Wolfersdorf, L.: Mathematische Untersuchungen
zum stationären Kaltbandwalzprozeß. Freiburger Forschungsheft B 205
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1979
- [UNG 80] Unger, F.: Mathematische Untersuchungen zur Temperaturverteilung und
zum thermischen Walzprofil beim Kaltwalzen.
Dissertation B, Bergakademie Freiberg 1980
- [UNG 84] Unger, F.: Berechnungen zum Temperaturverhalten und zum thermischen
Walzprofil von Kaltwalzen. Freiburger Forschungsheft B 241
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1984
- [UYA 85] Uyar, M./Funke, P.: Tribologische Untersuchungen beim Ziehen von Drähten,
Stangen und Rohren. Vortrag zur V. Internationalen Konferenz über das Ziehen
von Stahldrähten, Podolányky CSSR 1985
- [UYA 86] Uyar, M.: Oberflächenuntersuchungen unter Berücksichtigung
der tribologischen Aspekte beim Drahtziehen. (IWU-Bericht 7)
DGM Informationsgesellschaft-Verlag 1986
- [UYA 87] Uyar, M.: Untersuchung der Oberflächenschichten unter Berücksichtigung der
tribologischen Aspekte beim Drahtziehen
Vortragstext aus dem Sammelband [FUN 88]
- [VDI 94] VDI-Wärmeatlas: Berechnungsblätter für den Wärmeübergang. (7. Aufl.)
VDI-Verlag, 1994
- [VIC 66] Vicév, L.: Vlijanie na nagrjavenoto na tela i djuzata pri studenoto . . .
(Einfluß der Draht- und Ziehdüsenenerwärmung beim Kaltziehen auf die
Ziehleistung). Maszinostroenie (Sofia) **15**(1966)7, S. 309-311
- [VIS 87] Visintin, A.: Mathematical models of solid-solid phase transitions in steel
IMA Journal of Applied Mathematics **39**(1987), S. 143-157
- [VOL 71] Vollmer, H.: Einfluß hoher Ziehgeschwindigkeiten auf die mechanischen
Eigenschaften von Stahldraht. Dissertation, TU Clausthal 1971
- [VOL 89] Vollertsen, F./Vogler, S.: Werkstoffeigenschaften und Mikrostruktur
Carl Hanser Verlag München·Wien 1989
- [VOE 50] Voelker, D./Doetsch, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation
Verlag Birkhäuser Basel 1950
- [WEB 71] Weber, K.-H.: Betrachtungen zur hydrodynamischen Ziehtheorie
Neue Hütte **16**(1971)4, S. 235-238
- [WEI 79] Weißmantel, Chr./Hamann, C.: Grundlagen der Festkörperphysik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979
- [WEI 93] Weinhold, H./Poeßnecker, W./Eickemeyer, J.:
Gut geschmiert - Hydrodynamische Druckschmierung mit festen Seifenfilmen
beim Drahtziehen. Drahtwelt **79**(1993)5, S. 28-31

- [WIN 61] Winter, F. W.: Temperaturmessungen in der Drahtindustrie
Drahtwelt **47**(1961)9, S. 830-834
- [WLA 72] Wladimirow, W.S.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972
- [WON 94] Wong, C. W.: Mathematische Physik
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg·Berlin·Oxford 1994
- [WRI 73] Wright, R. N.: Control of heating during wire drawing
Wire Journal **6**(1973)9, S. 135-140
- [YAM 83] Yamada, Y./Kawakami, Y./Tsuji, K.:
Die Kaltverfestigung von hochgekohten Stahldrähten
Draht **34**(1983)2, S. 45-47
- [ZAW 72] Zawadski, J./Orzechowski, H.: Okreslenie grubosci filmu smaru . . .
(Bestimmung der Dicke des Schmierfilms während des Ziehens von Drähten und
Stäben in einem hydrostatisch-hydrodynamisch gekoppelten System)
Archivum hutnictwa **17**(1972)1, S. 73-82
- [ZEI 96] Zeidler, E. (Hrsg.): Teubner-Taschenbuch der Mathematik (2 Bände)
B.G. Teubner Stuttgart·Leipzig 1996
(vollständig überarbeitete und wesentlich erweiterte Ausgabe von [BRO 79])
- [ZOM 94] Zompi, A./Cipparrone, M./Levi, R.: Rechnerunterstütztes Drahtziehen
Draht **45**(1994)1/2, S. 21-27
- [ZOU 70] Zouhar, G. (Hrsg.): Erholung, Rekristallisation und Kornwachstum der Eisen-
werkstoffe. Freiburger Forschungsheft B 153
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1970

Anhang A

Anhang A

INHALT:

A2.3	Temperaturfeld im axial bewegten Vollzylinder (Draht)	131
A2.3.1	Allgemeiner Fall	133
A2.3.2	Spezialisierungen	145
A2.3.2.1	Stationäre Verhältnisse	145
A2.3.2.2	Vernachlässigung axialer Wärmeleitung	146
A2.3.2.3	Stationäre Verhältnisse und Vernachlässigung axialer Wärmeleitung	150
A2.3.2.4	Vernachlässigung von Wärmeleitung und Bewegung in Achsrichtung	151
A2.3.2.5	Rand- und Gebietsfunktionen	152
A2.3.2.6	Mittlere Temperaturen	155
A2.3.2.7	Eigenwerte für Vollzylinder	158
A2.3.2.8	Näherung für kurze Zeiten	159
A2.3.2.9	Näherung für lange Zeiten	164
A2.3.2.10	Nichtlineare Randbedingungen	167
A2.3.3	Wärmetechnisch dünnwandiges Wärmgut	171
A2.3.3.1	Temperaturmodell	171
A2.3.3.1.1	Mittelung	171
A2.3.3.1.2	Randbedingungen	173
A2.3.3.1.3	Näherungsdifferentialgleichung	174
A2.3.3.2	Analytische Lösungen	176
A2.3.3.2.1	Konvektive Wärmeübertragung	176
A2.3.3.2.2	Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung	179
A2.3.3.2.3	Wärmeübertragung durch Konvektion und Wärmestrahlung	182
A2.3.3.2.3.1	Geschlossene Lösungsgleichung	182
A2.3.3.2.3.2	Lösungsverfahren für iterative Berechnung	185
A2.3.3.2.4	Temperatur- oder zeitabhängige Einflußgrößen	187
A2.4	Temperaturfeld im endlich langen Hohlzylinder (Ziehwerkzeug)	188
A2.4.1	Allgemeiner Fall	188
A2.4.2	Spezielle Lösungen	198
A2.4.2.1	Zeitlich konstante Randfunktionen und Quellen	198
A2.4.2.2	Stationäre Verhältnisse	198
A2.4.2.3	Spezielle Rand- und Gebietsfunktionen	202
A2.4.2.4	Eigenwerte für Hohlzylinder	206
A2.4.3	Zeit- und ortsveränderliche Wärmeübergangskoeffizienten	209
A2.4.3.1	Ortsabhängiger Wärmeübergang	210
	a) <i>Randbedingungs substitution</i>	210
	b) <i>Randfunktionsmodifikation</i>	212
	c) <i>Randfunktionsiteration</i>	213
A2.4.3.2	Näherungsverfahren für zeit- und ortsabhängige Wärmeübergangskoeffizienten	214

A2.5	Thermische Kopplung von Hohlzylinder und hindurchbewegtem Vollzylinder	217
A2.5.1	Lösungsverfahren	219
	<i>a) Direktes Verfahren</i>	219
	<i>b) Indirektes Verfahren</i>	221
	<i>c) Iteratives Verfahren</i>	222
A2.5.2	Numerisch-iterative Realisation	222
A2.6	Thermoelastische Spannungen und Formänderungen	228
A2.6.1	Hohlzylinder	230
A2.6.2	Vollzylinder	232
A2.6.3	Einfach armierter Ring	232
A3.1.1.3	Näherungslösungen nach dem Vorgehen von <i>SIEBEL/KOBITZSCH</i>	241
A3.1.2.2.1	Mechanische Randbedingungen - Schollen des Drahtes	247
A3.1.2.2.1.1	Tangential-, Normal- und Axialkraft	247
A3.1.2.2.1.2	Lastdrehmoment an der Ziehtrommel	249
A3.1.2.2.1.3	Trommel-Einzelzug	251
A3.1.2.2.1.4	Trommel-Mehrfachzug	254

A2.3 Temperaturfeld im axial bewegten Vollzylinder

Das Temperaturfeld $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, z, r, \varphi)$ in einem Vollzylinder, der sich an einem ruhenden und mit einem Koordinatensystem fest verbundenen Beobachter in axialer Richtung vorbeibewegt, läßt sich bekanntlich durch die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = a \cdot \Delta \mathcal{G} + \frac{q_V}{\rho c}; \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{A2.3-1})$$

beschreiben [GRÖ 88, S.150f] bzw. [SAM 95, Kap. 2.1.1]; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

bezeichnet den LAPLACE-Operator, die Quellen im Inneren sind als volumenspezifische Wärmequellendichte durch $q_V = q_V(t, z, r, \varphi)$ vorzugeben, weiterhin seien Temperaturleitfähigkeit a , Dichte ρ und spezifische Wärmekapazität c vereinfachend als unabhängig von Temperatur oder anderen Variablen angenommen, die Axialgeschwindigkeit v sei ebenfalls konstant.

Obwohl auch die Betrachtungsweise eines mit dem Vollzylinder mitbewegten Beobachters - und Koordinatensystems - prinzipiell denkbar ist, wird im vorliegenden ingenieurtechnischen Zusammenhang obiger Anschauung eindeutig der Vorzug eingeräumt. Denn damit nehmen die Quellen und Randfunktionen, die technischerseits durch Wärmebehandlungs- und Umformanlagen bedingt sind, gemeinsam mit dem Beobachter gegenüber dem bewegten Draht resp. Vollzylinder eine ortsfeste Position ein. Die mathematische Formulierung der Quellen und Randfunktionen läßt sich damit auf natürlichere und letztlich einfachere Weise erledigen, als dies bei einem mit dem Draht mitbewegten Bezugssystem der Fall wäre.

Zur Einschränkung der Lösungsmannigfaltigkeit, wie sie durch eine Differentialgleichung der Art (A2.3-1) repräsentiert wird, auf naturwissenschaftlich-technisch sinnvolle Lösungen ist die Vorgabe von Randbedingungen entsprechend der durch (t, z, r, φ) bestehenden Dimensionalität des Problems notwendig [DOE 50, Bd. 3, Kap. 17, §1]. Die Frage, welche Randbedingungen vorgegeben werden können, um eine gewünschte Lösung zu charakterisieren, ist nicht allgemein, sondern nur problembezogen unter Beachtung von Kompatibilitätsbedingungen möglich [DOE 50, Bd. 3, Kap. 20]. Im vorliegenden Zusammenhang lassen sich die folgenden Bedingungen realisieren:

- Auf dem Zeitrand wird eine Anfangsbedingung

$$\mathcal{G}(0, z, r, \varphi) = \mathcal{G}_A(z, r, \varphi) \quad (\text{A2.3-2})$$

vorgeschrieben, wobei zum Zeitpunkt $t=0$ das Temperaturfeld $\mathcal{G}_A(z, r, \varphi)$ als bekannt vorauszusetzen ist.

- Der Wärmeaustausch sowohl an den Gebietsgrenzen bei $z=0$ (Startbedingung) als auch bei $r=R$ (Zylinderoberfläche) werde jeweils als lineare Randbedingung 3. Art realisiert. Dabei sollen jedoch neben NEWTONschen Wärmeübergang von vornherein zusätzlich Randquellen q , wie sie z.B. durch Reibung entstehen, mit berücksichtigt werden, so daß z.B. am Zylindermantel

$$\lambda \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R, \varphi) = \alpha \cdot (\mathcal{G}_f(t, z, \varphi) - \mathcal{G}(t, z, R, \varphi)) + q(t, z, \varphi) \quad (\text{A2.3-3})$$

bzw. kürzer

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R, \varphi) = -h \cdot \mathcal{G}(t, z, R, \varphi) + r(t, z, \varphi) \quad (\text{A2.3-3.1})$$

mit der Randfunktion

$$r(t, r, \varphi) = h \cdot \mathcal{G}_f(t, r, \varphi) + \frac{1}{\lambda} \cdot q(t, r, \varphi), \quad h = \alpha / \lambda = \text{konst.} \quad (\text{A2.3-3.2})$$

vorliegt. Diese modifizierte bzw. erweiterte Randbedingung 3. Art schließt vorteilhafterweise für $h \rightarrow \infty$ die Randbedingung 1. Art (Oberflächentemperatur wird vorgeschrieben), für $h \rightarrow 0$ die Randbedingung 2. Art (flächenspezifische Wärmequellendichte wird vorgeschrieben) und für $h=0$, $\mathbf{q}=0$ die Randbedingung 4. Art (adiabatischer Körpertrand) mit ein, so daß bei Bedarf durch entsprechende Grenzübergänge die betreffenden Lösungen aus denjenigen 3. Art bei vergleichsweise nur geringem Mehraufwand separiert werden können. Außerdem wird durch diese Herangehensweise der tiefere Zusammenhang von Lösungen unterschiedlicher Spezialisierungsgrade sichtbar. Die zusätzliche Berücksichtigung zeit- und ortsabhängiger Wärmeübergangskoeffizienten sowie nichtlinearer Verhältnisse beim Strahlungswärmeaustausch kann aus mathematischen Gründen allerdings erst danach erfolgen.

Im Hinblick auf die in Kapitel 3 zum Ziehen und Wärmebehandeln von Draht- bzw. Stabmaterial betrachteten technischen Anwendungen soll eine wesentliche Vereinfachung vorgenommen werden, die darauf beruht, daß bei diesen Anwendungen stets Verhältnisse vorliegen, die entweder exakt oder doch in guter bis sehr guter Näherung als rotationssymmetrisch anzusehen sind. Die Umgebungsbedingungen und auch die inneren und Randquellen können dann als in Umfangsrichtung unveränderlich vorausgesetzt werden, womit die betreffenden Differentialquotienten wegfallen und sich die Zahl der unabhängigen Variablen von vier auf drei Variable reduziert.

Zur Lösung des Anfangs-Randwertproblems (A2.3-1) - (A2.3-3) (incl. hier nicht explizit angeschriebener Startbedingung, die gleichfalls eine Randbedingung von der Art (A2.3-3) sein kann) kommen unterschiedliche Methoden in Betracht. Stellvertretend für namhafte Verfahren, die auf analytisch geschlossene Lösungen führen, sind hier sowohl die *FOURIERS*che Methode der Separation der Variablen und Entwicklung in Orthogonalreihen [ZEI 96, Kap. 1.13.2.1] als auch die Methode der *LAPLACE*-Transformation [ZEI 96, Kap. 1.11.1], die sich wichtiger Hilfsmittel und Sätze der komplexen Funktionentheorie bedient, zu nennen. Die Methode der *LAPLACE*-Transformation ist insbesondere insofern interessant, als je transformierte Variable die Operation der Differentiation auf eine einfache Multiplikation reduziert wird - sofern die betreffenden Koeffizienten von der jeweiligen Variable unabhängig waren. Damit ist man u.U. in der Lage, aus einer partiellen Differentialgleichung eine viel einfacher zu lösende gewöhnliche Differentialgleichung oder gar nur eine algebraische Gleichung zu machen. Vorteilhafterweise werden dabei die Randbedingungen in die transformierten, komplexwertigen Gleichungen des Bildbereichs automatisch übernommen; Eindeutigkeitsatz und Lösbarkeitsbedingungen ergeben Beziehungen zwischen den Randbedingungen, sogen. Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingungen [DOE 50, Bd. 3, Kap. 20], wodurch sich deren gegenseitige Abhängigkeiten klären lassen. Der möglicherweise schwierigste Teil kann in der *LAPLACE*-Rücktransformation bestehen, ein Schritt, bei dem zur Lösung des Bildbereichs die zugehörige Lösung des Originalbereichs aufzusuchen ist. Besonders auch im Falle, daß man an Näherungslösungen für große oder kleine Werte einer Variablen interessiert ist, lassen sich unter Verwendung gewisser Grenzwertsätze vorteilhaft zunächst asymptotische Entwicklungen im Bildbereich herstellen, deren rücktransformiertes Original dann die gesuchte Näherung darstellt; eine entsprechende Lösung auf direktem Wege zu finden, kann u.U. nicht gelingen oder zumindest sehr viel schwieriger sein. Insgesamt gibt die Methode der *LAPLACE*-Transformation ein relativ stringentes Instrumentarium an die Hand, um Anfangs-Randwertaufgaben zu lösen, zumindest sofern Randbedingungen und Differentialgleichungen linear und die Koeffizienten bezüglich der zu transformierenden Variablen konstant sind.

Im wesentlichen aus diesen Gründen heraus sollen nachfolgend die Wärmeleitungsprobleme unter Verwendung der Methode der *LAPLACE*-Transformation gelöst werden, während demgegenüber in Kapitel 3.3 beim Lösen gewisser Diffusionsprobleme mit variablem Diffusionskoeffizienten der *FOURIERS*chen Methode der Vorzug eingeräumt wird.

Wie bei allen Methoden, so ist auch bei der Anwendung der *FOURIER*schen Reihenentwicklung oder der *LAPLACE*-Transformation prinzipiell zu beachten, daß nicht selten Operationen durchgeführt werden müssen (z.B. Vertauschung von Integrations- und Summationsreihenfolgen, Differentiation von Reihen und Summen), deren Legitimation erst im nachhinein erbracht werden kann. Auch bei den nachfolgenden Herleitungen werden mancherlei Operationen erforderlich werden, bei denen jeweils stillschweigend unterstellt wird, daß sie zulässig sind. Eine Rechtfertigung dieser Schritte wird dann erst nachträglich mit der Verifikation des Endergebnisses möglich sein.

Im folgenden ist die Kenntnis der Lösungsmethoden insoweit vorauszusetzen, als mit Rücksicht auf den Umfang jeweils nur der Lösungsweg mit den wichtigsten Schritten und Zwischenergebnissen angegeben werden kann - für weiterführende Exkurse sei auf die Spezialliteratur verwiesen.

A2.3.1 Allgemeiner Fall

In den weiteren auf rotationssymmetrische Verhältnisse eingeschränkten Betrachtungen vereinfacht sich die Dgl. (A2.3-1) infolge $\partial^2 g / \partial \varphi^2 = 0$ entsprechend. Das Temperaturfeld $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, z, r)$ im axial (z -Richtung) mit konstanter Geschwindigkeit v gegenüber einem feststehenden (z, r) -Zylinderkoordinatensystem fortbewegten homogenen isotropen Vollzylinder lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} \right) - v \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} + \frac{1}{\rho c} \mathbf{q}_V ; \quad (\text{A2.3.1-1})$$

$$0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq r \leq R$$

mit Temperaturleitfähigkeit $a = \lambda / (\rho c) = konst.$, Dichte $\rho = konst.$, spezif. Wärmekapazität $c = konst.$ und Axialgeschwindigkeit $v = konst.$

Eine Möglichkeit zur Lösung dieser linearen partiellen Differentialgleichung unter noch näher festzulegenden Anfangs- und Randbedingungen besteht in der Anwendung einer geeigneten Transformationsmethode. Wie bereits gesagt, bietet sich die Methode der zweidimensionalen *LAPLACE*-Transformation bezüglich der beiden Variablen t und z an [VOE 50], wobei das folgende Transformations- bzw. Korrespondenzschema angewendet wird:

Die Originalfunktion $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, z, r)$ wird durch die zweidimensionale Integraltransformation

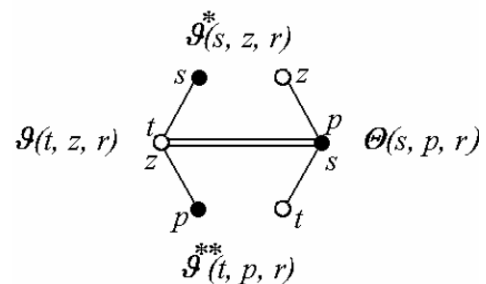
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st - pz} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dz dt = \Theta(s, p, r) \text{ oder durch zwei}$$

nacheinander ausgeführte eindimensionale

$$\text{Transformationen } \int_0^\infty e^{-st} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dt = \mathcal{G}^*(s, z, r) \text{ und}$$

$$\int_0^\infty e^{-pz} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dz = \mathcal{G}^{**}(t, p, r) \text{ in die komplexwertige Bildfunktion } \Theta(s, p, r) \equiv \mathcal{L}^2 \{ \mathcal{G}(t, z, r) \}$$

überführt; die Radiusvariable r wird von der Transformation nicht berührt, an die Stelle der reellen Variablen t, z im Originalbereich treten die komplexwertigen Variablen s, p im Bildbereich.



Die Transformation der Differentialquotienten ergibt entsprechend der einschlägigen Regeln:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t, z, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} s \cdot \Theta(s, p, r) - \mathcal{G}^{**}(0, p, r);$$

$\mathcal{G}^{**}(0, p, r)$ resultiert aus der bezüglich z transformierten Anfangsbedingung

$$\mathcal{G}(0, z, r) = \mathcal{G}_A(z, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \mathcal{G}^{**}(0, p, r) = \mathcal{G}_A^{**}(p, r),$$

wenn $\mathcal{G}_A(z, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \mathcal{G}_A^{**}(p, r)$ die vorzugebende Anfangstemperaturverteilung im Original- bzw. im Bildbereich darstellt,

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, z, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} p \cdot \Theta(s, p, r) - \mathcal{G}^*(s, 0, r)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{G}(t, z, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} p^2 \cdot \Theta(s, p, r) - p \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, r) - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r),$$

wobei als Startbedingung bei $z = 0$ - je nach Interessenlage und Sachverhalt - entweder die radiale Temperaturverteilung $\mathcal{G}(t, 0, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \mathcal{G}^*(s, 0, r)$ oder der axiale Gradient $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, 0, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r)$ vorzugeben ist; über die jeweils andere Funktion kann dann nicht mehr frei verfügt werden. Sie wird in der weiteren Rechnung - unter Ausnutzung der Eigenschaft, daß eine \mathcal{G}^2 -Transformierte in einem Paar rechter Halbebenen der komplexen s - und p -Ebenen eine holomorphe Funktion ist [VOE 50, Satz 4] - aus einer sog. Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingung hervorgehen.

Als Startbedingung bei $z = 0$ sollen folgende Varianten berücksichtigt werden:

a) Randbedingung 1. Art (Vorgabe der Starttemperatur):

$$\mathcal{G}(t, 0, r) = \mathcal{G}_0(t, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \mathcal{G}^*(s, 0, r) = \mathcal{G}_0^*(s, r) \quad (\text{A2.3.1-2a})$$

b) Randbedingung 2. Art (Vorgabe des Starttemperaturgradienten):

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, 0, r) = \mathcal{G}_{z,0}(t, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r) = \mathcal{G}_{z,0}^*(s, r) \quad (\text{A2.3.1-2b})$$

c) Randbedingung 3. Art (Vorgabe konvektiver Wärmeübergang + Randquellen):

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, 0, r) = h_0 \cdot \mathcal{G}(t, 0, r) - \mathbf{r}_0(t, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r) = h_0 \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, r) - \mathbf{r}_0^*(s, r) \quad (\text{A2.3.1-2c})$$

mit der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}_0(t, r) = h_0 \cdot \mathcal{G}_{U0}(t, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0(t, r) \stackrel{t}{\circ} \stackrel{s}{\bullet} \underset{z}{\longleftarrow} \underset{p}{\longrightarrow} \mathbf{r}_0^*(s, r) = h_0 \cdot \mathcal{G}_{U0}^*(s, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0^*(s, r)$$

und mit dem relativen Wärmeübergangskoeffizienten $h_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda}$.

Anmerkung: Startbedingungen b) und c) sind nur im Falle verschwindender Axialgeschwindigkeit $v = 0$ physikalisch relevant, jedoch enthält Startbedingung c) als Grenzfälle die Bedingungen a) und b):

Startbedingung b) ergibt sich aus der Bedingung c) durch den

Übergang $h_0 \rightarrow 0$ und $\mathbf{q}_0(t,r) \rightarrow -\lambda \cdot \mathcal{G}_{z,0}(t,r)$,

Startbedingung a) ergibt sich aus der Bedingung c) durch Grenzübergang $h_0 \rightarrow \infty$ sowie $\mathcal{G}_{U,0}(t,r) \rightarrow \mathcal{G}(t,r)$ und $\mathbf{q}_0(t,r) \rightarrow 0$.

Durch die zweifache Integraltransformation wird aus der partiellen Differentialgleichung für $\mathcal{G}(t,z,r)$ bezüglich t , z und r im Originalbereich eine nur noch gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\Theta(s,p,r)$ bezüglich r im Bildbereich erhalten:

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Theta}{dr} + \kappa^2 \cdot \Theta = F, \quad \Theta = \Theta(s,p,r) \quad (\text{A2.3.1-3})$$

$$\text{mit} \quad \kappa^2 = p^2 - \frac{v}{a}p - \frac{1}{a}s \quad (\text{A2.3.1-3.1})$$

$$F = \mathbf{F}(s,p,r) = \left(p^2 - \frac{v}{a}\right) \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r) - \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p,r) - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{Q}_V(s,p,r) \quad (\text{A2.3.1-3.2})$$

sowie mit rotationssymmetrischer Volumenquelle $\mathbf{q}_V(t,z,r) \stackrel{t}{\longleftarrow} \stackrel{s}{\longrightarrow} \mathcal{Q}_V(s,p,r)$.

Die Lösung dieser inhomogenen *BESSELS*chen Differentialgleichung wird aus der Lösung der betreffenden homogenen Gleichung z.B. unter Verwendung der Variation der Konstanten gewonnen:

$$\begin{aligned} \Theta(s,p,r) &= \mathbf{A}(s,p) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa r) + \mathbf{B}(s,p) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa r) + \dots \\ &\dots + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^r \rho \cdot [\mathbf{N}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa \rho) - \mathbf{J}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa \rho)] \cdot \mathbf{F}(s,p,\rho) d\rho ; \end{aligned} \quad (\text{A2.3.1-4})$$

\mathbf{J}_ν und \mathbf{N}_ν sind die *BESSELS*chen und *NEUMANN*schen Funktionen ν -ter Ordnung.

Zur Bestimmung der beiden noch unbestimmten Koeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} stehen eine Rand- und eine Symmetriebedingung zur Verfügung:

- Randbedingung am Zylindermantel bei $r = R$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t,z,R) = -h \cdot \mathcal{G}(t,z,R) + \mathbf{r}(t,z) \stackrel{t}{\longleftarrow} \stackrel{s}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial r} \Theta(s,p,R) = -h \cdot \Theta(s,p,R) + \mathfrak{H}(s,p); \quad (\text{A2.3.1-5.1})$$

mit der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}(t,z) = h \cdot \mathcal{G}_U(t,z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(t,z) \stackrel{t}{\longleftarrow} \stackrel{s}{\longrightarrow} \mathfrak{H}(s,p) = h \cdot \Theta_U(s,p) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{Q}_R(s,p), \quad (\text{A2.3.1-5.2})$$

wobei neben relativem Wärmeübergangskoeffizienten $h := \alpha/\lambda$ die Umgebungstemperatur $\mathcal{G}_U(t,z)$ und die Randquelle $\mathbf{q}_R(t,z)$ als bekannt vorauszusetzen sind. Ebenso wie bei Startbedingung c) enthält diese erweiterte Randbedingung 3. Art die Spezialfälle der Randbedingung 1. und 2. Art, die durch entsprechende Grenzwertbetrachtungen separiert werden können und deshalb hier nicht explizit formuliert werden müssen²⁰.

²⁰ Die Start- und Randbedingungen (A2.3.1-2) und (A2.3.1-5) sind bezüglich der Randtemperaturen als lineare Randbedingungen angesetzt worden, um analytisch geschlossene Lösungen zu ermöglichen. Liegen jedoch Wärmeübertragungsverhältnisse vor, bei denen der Anteil der Wärmestrahlung gegenüber dem der Konvektion nicht mehr zu vernachlässigen ist, so sind nichtlineare Randbedingungen zu verwenden - vgl. Kapitel A2.3.2.10.

Infolge rotationssymmetrischer Randbedingungen und Volumenquellen \mathbf{q}_V besteht Zylindersymmetrie für das Temperaturfeld, so daß sich eine entsprechende Bedingung formulieren läßt:

- Symmetriebedingung bei $r = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \vartheta(t, z, 0) = 0 \quad \begin{array}{c} t \\ \longleftarrow \\ z \end{array} \quad \begin{array}{c} s \\ \longrightarrow \\ p \end{array} \quad \frac{\partial}{\partial r} \Theta(s, p, 0) = 0. \quad (\text{A2.3.1-6})$$

Differentiation von Gl. (A2.3.1-4) nach dem Radius ergibt

$$\frac{\partial}{\partial r} \Theta(s, p, r) = -\kappa \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(s, p) \cdot \mathbf{J}_1(\kappa r) + \mathbf{B}(s, p) \cdot \mathbf{N}_1(\kappa r) + \dots \\ \dots + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^r \rho \cdot [\mathbf{N}_1(\kappa r) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa \rho) - \mathbf{J}_1(\kappa r) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa \rho)] \cdot \mathbf{F}(s, p, \rho) d\rho \end{array} \right\}, \quad (\text{A2.3.1-7})$$

woraus, da der Temperaturgradient $\frac{\partial}{\partial r} \Theta(s, p, r)$ stets auch für $r \rightarrow 0$ endlich bleiben muß (vgl. speziell Gl. (A2.3.1-6)), während die NEUMANNsche Funktion dort gegen $-\infty$ strebt, unmittelbar das Verschwinden des Koeffizienten \mathbf{B} zu fordern ist.

Unter Verwendung der Randbedingung (A2.3.1-5) folgt dann mit $\mathbf{B} = 0$ aus Gl. (A2.3.1-7) der zweite Koeffizient:

$$\mathbf{A}(s, p) = \frac{1}{h \cdot \mathbf{J}_0(\kappa R) - \kappa \cdot \mathbf{J}_1(\kappa R)} \cdot \left\{ \mathfrak{H}(s, p) - \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{Z}_0(\kappa \rho) \cdot \mathbf{F}(s, p, \rho) d\rho \right\}, \quad (\text{A2.3.1-8.1})$$

wobei \mathbf{Z}_0 abkürzend für

$$\mathbf{Z}_0(\kappa r) = [h \cdot \mathbf{N}_0(\kappa R) - \kappa \cdot \mathbf{N}_1(\kappa R)] \cdot \mathbf{J}_0(\kappa r) - [h \cdot \mathbf{J}_0(\kappa R) - \kappa \cdot \mathbf{J}_1(\kappa R)] \cdot \mathbf{N}_0(\kappa r) \quad (\text{A2.3.1-8.2})$$

steht; speziell gilt $\mathbf{Z}_0(\kappa R) = \frac{2}{\pi R}$.

Einsetzen der jetzt vorliegenden Koeffizienten in den Lösungsansatz (A2.3.1-4) ergibt - nach entsprechenden Umformungen - das Temperaturfeld im Bildbereich

$$\Theta(s, p, r) = \mathbf{G}(s, p; r, R) \cdot \mathfrak{H}(s, p) - \int_0^R \mathbf{G}(s, p; r, \rho) \cdot \mathbf{F}(s, p, \rho) d\rho, \quad (\text{A2.3.1-9.1})$$

wobei \mathbf{G} die noch nicht entwickelte Form der GREENSchen Funktion des Bildbereichs bezeichnet:

$$\mathbf{G}(s, p; r, \rho) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho}{h \cdot \mathbf{J}_0(\kappa R) - \kappa \cdot \mathbf{J}_1(\kappa R)} \cdot \begin{cases} \mathbf{Z}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa \rho) & \text{für } 0 \leq \rho \leq r \leq R \\ \mathbf{J}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{Z}_0(\kappa \rho) & \text{für } 0 \leq r \leq \rho \leq R \end{cases}. \quad (\text{A2.3.1-9.2})$$

Zur Rücktransformation dieser Lösung vom Bildbereich in den Originalbereich ist das funktionentheoretische Verhalten, insbesondere das Auftreten von Singularitäten hinsichtlich der komplexen Variablen s und p , maßgebend. Solche Singularitäten treten an den Nullstellen $\kappa = \kappa_n$ des Nenners auf, also für $h \cdot \mathbf{J}_0(\kappa_n R) - \kappa_n \cdot \mathbf{J}_1(\kappa_n R) = 0$ bzw., wegen (A2.3.1-3.1), bei

$\kappa_n = \pm \sqrt{p_n^2 - \frac{v}{a} p_n - \frac{s}{a}} = \pm \frac{\mu_n}{R}$ mit Eigenwerten μ_n , die sich als positive, aufsteigend geordnete Nullstellen aus der Eigenwertgleichung

$$\boxed{hR \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) - \mu_n \cdot \mathbf{J}_1(\mu_n) = 0} \quad (\text{A2.3.1-10})$$

ergeben.

Daraus folgt, daß $\Theta(s, p, r)$ Polstellen bei $p = p_n^\pm(s) = \frac{v}{2a} \pm \sqrt{\frac{s}{a} + D_n}$ besitzt, (A2.3.1-11.1)

die - wenn s der rechten Halbebene der komplexen s -Ebene angehört - der gesamten komplexen p -Ebene angehören; Abkürzung $D_n := \left(\frac{v}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$. (A2.3.1-11.2)

Damit $\Theta(s, p, r)$ in einem Paar rechter Halbebenen analytisch wird²¹, müssen die durch

$p_n^+ = \frac{v}{2a} + \sqrt{\frac{s}{a} + D_n}$ verursachten Singularitäten dadurch beseitigt werden, daß der Zähler von $\Theta(s, p, r)$ für $p = p_n^+ = p_n^+(s)$ mit mindestens gleicher Vielfachheit wie der Nenner verschwindet, woraus folgende Schar von Bedingungsgleichungen folgt:

$$\text{Zähler}\left\{\mathbf{G}(s, p_n^+; r, R)\right\} \cdot \mathbf{R}(s, p_n^+) - \int_0^R \text{Zähler}\left\{\mathbf{G}(s, p_n^+; r, \rho)\right\} \cdot \mathbf{F}(s, p_n^+, \rho) d\rho = 0. \quad (\text{A2.3.1-12})$$

Unter Beachtung der Gleichung $h \cdot \mathbf{N}_0(\mu_n) - \frac{\mu_n}{R} \cdot \mathbf{N}_1(\mu_n) = \frac{2}{\pi R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)}$ ergibt sich

$$\mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) = \frac{2}{\pi R} \cdot \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mathbf{J}_0(\mu_n)} \quad \text{und es vereinfacht sich damit die Schar der Bedingungs-}$$

gleichungen zu

$$\mathfrak{H}(s, p_n^+) - \frac{1}{R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \mathbf{F}(s, p_n^+, \rho) d\rho = 0. \quad (\text{A2.3.1-13})$$

Diese Gleichung besagt, daß das radiale Temperaturprofil $\mathcal{G}^*(s, 0, r) \xrightarrow{s \rightarrow t} \mathcal{G}(t, 0, r) = \mathfrak{G}(t, r)$ bei $z = 0$ und dessen z -Ableitung $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r) \xrightarrow{s \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, 0, r)$ nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden dürfen, wie eingangs bereits angekündigt wurde.

Je nachdem, ob Startbedingung (A2.3.1-2a), (A2.3.1-2b) oder (A2.3.1-2c) vorgegeben wird, ergibt sich aus (A2.3.1-13) die jeweilige Bedingungsgleichung zur Bestimmung der noch fehlenden Funktion $\mathcal{G}^*(s, 0, r)$ oder $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, r)$:

²¹ vgl. [VOE 50, Satz 4]

- für Startbedingung (A2.3.1-2a):

$$\begin{aligned} \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho &= \\ &= R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) \cdot \mathfrak{H}(s, p_n^+) + \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \widehat{\mathbf{F}}_a(s, p_n^+, \rho) \cdot d\rho \end{aligned}$$

$$\text{mit } \widehat{\mathbf{F}}_a(s, p, r) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p, r) - \left(p - \frac{v}{a}\right) \cdot \mathcal{G}_0^*(s, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(s, p, r) \quad (\text{A2.3.1-14a})$$

- für Startbedingung (A2.3.1-2b):

$$\begin{aligned} \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho &= \\ &= \frac{1}{p_n^+ - \frac{v}{a}} \cdot \left[R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) \cdot \mathfrak{H}(s, p_n^+) + \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \widehat{\mathbf{F}}_b(s, p_n^+, \rho) \cdot d\rho \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \widehat{\mathbf{F}}_b(s, p, r) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p, r) - \mathcal{G}_{z,0}^*(s, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(s, p, r) \quad (\text{A2.3.1-14b})$$

- für Startbedingung (A2.3.1-2c):

$$\begin{aligned} \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho &= \\ &= \frac{1}{p_n^+ - \frac{v}{a} + h_0} \cdot \left[R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) \cdot \mathfrak{H}(s, p_n^+) + \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \widehat{\mathbf{F}}_c(s, p_n^+, \rho) \cdot d\rho \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \widehat{\mathbf{F}}_c(s, p, r) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p, r) + \mathbf{r}_0^*(s, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(s, p, r) \quad (\text{A2.3.1-14c})$$

Wie unmittelbar zu sehen ist, beschreibt jede der Gleichungen (A2.3.1-14) genau die Zählerfunktion der Koeffizienten, die der gesuchten Funktion eine *DINI*-Reihe der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right), & f_n &:= \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \\ f_n^{(Z)} &:= \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \mathbf{f}(\rho) \cdot d\rho \\ f_n^{(N)} &:= \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0^2\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot d\rho \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \left[\mathbf{J}_0^2(\mu_n) + \mathbf{J}_1^2(\mu_n) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{hR}{\mu_n}\right)^2 \right] \cdot (R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n))^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.3.1-R1})$$

zuordnet; μ_n aus (A2.3.1-10).

Damit wird z.B. im Falle (A2.3.1-14a) für den Gradienten $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r)$ folgende *DINI*-Reihe erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r) = \frac{2}{R} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\left[1 + \left(\frac{hR}{\mu_n}\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot \left\{ \mathfrak{H}(s, p_n^+) + \frac{1}{R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \widehat{\mathbf{F}}_a(s, p_n^+, \rho) \cdot d\rho \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.1-15})$$

Diese Lösung wie die entsprechenden Lösungen der Fälle b) und c) werden in dieser expliziten Form für die weitere Ermittlung des Endergebnisses nicht benötigt, so daß auf deren Anschreiben hier verzichtet werden kann.

Die mathematisch korrekte Rücktransformation der transzendenten Bildfunktion (A2.3.1-9) hat eigentlich auf der Grundlage des komplexen Umkehrintegrals unter Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel (*CAUCHY*scher Residuensatz) zu erfolgen. Allerdings ist es i.allg. recht aufwendig, jeden der erforderlichen Zwischenschritte im voraus legitimieren zu wollen, wobei im vorliegenden Zusammenhang noch erschwerend hinzukommt, daß die in den Anfangs-, Start- und Randbedingungen sowie Quellen enthaltenen Funktionen noch nicht einmal näher spezifiziert sind. In Anlehnung an das Vorgehen in [VOE 50, Kap.6] soll deshalb zunächst angenommen werden, daß alle vorzunehmenden Schritte statthaft sind. Nach Vorliegen des Endergebnisses kann - neben der Probe auf Richtigkeit, d.h., ob die so erhaltene Lösung die Differentialgleichung sowie die Anfangs-, Start- und Randbedingungen erfüllt - auch geklärt werden, wie allgemein und weitreichend die Voraussetzungen und Bedingungen tatsächlich sein dürfen, unter denen die Lösung gesichert und anwendbar ist (Fortsetzungsprinzip).

Zur Erleichterung der Rücktransformation der meromorphen Bildfunktion (A2.3.1-9) ist die Entwicklung in eine - die Polstellen reproduzierende - unendliche Partialbruchreihe vorteilhaft. Es zeigt sich hierbei, daß diese gesuchte Partialbruchreihe automatisch erhalten wird, wenn die Bildfunktion in eine *DINI*-Reihe für zweifaches Argument entwickelt wird.

$$\begin{aligned} f(r, \rho) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right), & f_n &:= \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \\ f_n^{(Z)} &:= \int_0^R r \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^r \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot f(r, \rho) \cdot d\rho dr \\ f_n^{(N)} &:= \int_0^R r \cdot \mathbf{J}_0^2\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^r \rho \cdot \mathbf{J}_0^2\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot d\rho dr \\ &= \frac{R^4}{8} \cdot \left[\mathbf{J}_0^2(\mu_n) + \mathbf{J}_1^2(\mu_n) \right]^2 = \frac{1}{8} \cdot \left[1 + \left(\frac{hR}{\mu_n}\right)^2 \right]^2 \cdot (R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n))^4 \end{aligned}$$

(A2.3.1-R2)

Die Entwicklung von \mathbf{G} entsprechend (A2.3.1-9.2) ergibt:

$$\mathbf{G}(s,p;r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,p;\rho) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)$$

mit

$$G_n(s,p;\rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{-1}{(p - p_n^+) \cdot (p - p_n^-)} .$$

(A2.3.1-16)

Werden die rechten Seiten von (A2.3.1-14a), (A2.3.1-14b) und (A2.3.1-14c) in (A2.3.1-9.1) mit \mathbf{G} als (A2.3.1-16) eingesetzt, so ergibt das für die Temperaturen im Bildbereich zunächst folgende Darstellungen:

- für Startbedingung (A2.3.1-2a)

$$\begin{aligned} \Theta(s,p,r) = & \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,p;R) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left[\mathfrak{H}(s,p) - \mathfrak{H}(s,p_n^+) \right] + \dots \\ & \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^R G_n(s,p;\rho) \cdot \left[\widehat{\mathbf{F}}_a(s,p,\rho) - \widehat{\mathbf{F}}_a(s,p_n^+,\rho) \right] \cdot d\rho \end{aligned}$$

(A2.3.1-16a)

- für Startbedingung (A2.3.1-2b)

$$\begin{aligned} \Theta(s,p,r) = & \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,p;R) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left[\mathfrak{H}(s,p) - \frac{p - \frac{\nu}{a}}{p_n^+ - \frac{\nu}{a}} \cdot \mathfrak{H}(s,p_n^+) \right] + \dots \\ & \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^R G_n(s,p;\rho) \cdot \left[\widehat{\mathbf{F}}_b(s,p,\rho) - \frac{p - \frac{\nu}{a}}{p_n^+ - \frac{\nu}{a}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_b(s,p_n^+,\rho) \right] \cdot d\rho \end{aligned}$$

(A2.3.1-16b)

- für Startbedingung (A2.3.1-2c)

$$\begin{aligned} \Theta(s,p,r) = & \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,p;R) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left[\mathfrak{H}(s,p) - \frac{p - \frac{\nu}{a} + h_0}{p_n^+ - \frac{\nu}{a} + h_0} \cdot \mathfrak{H}(s,p_n^+) \right] + \dots \\ & \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \int_0^R G_n(s,p;\rho) \cdot \left[\widehat{\mathbf{F}}_c(s,p,\rho) - \frac{p - \frac{\nu}{a} + h_0}{p_n^+ - \frac{\nu}{a} + h_0} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_c(s,p_n^+,\rho) \right] \cdot d\rho \end{aligned}$$

(A2.3.1-16c)

Unter Einführung der betreffenden \mathfrak{H} -Integrale für Anfangs-, Start-, Randfunktionen und Quellen lassen sich anstelle (A2.3.1-16a), (A2.3.1-16b), (A2.3.1-16c) auch folgende Darstellungen angeben:

- für Startbedingung (A2.3.1-2a)

$$\begin{aligned}
 \Theta(s,p,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(s,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathfrak{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 &\quad \dots + \int_0^\infty \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{G}_a(s,\tau;p,0;r,\rho) \cdot \mathfrak{G}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\quad \dots + \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-17.1a}$$

mit

$$\mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}_n(s,p;\rho) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left(e^{-p\cdot\zeta} - e^{-p_n^+\cdot\zeta} \right) \cdot e^{-s\cdot\tau} \tag{A2.3.1-17.2a}$$

- für Startbedingung (A2.3.1-2b)

$$\begin{aligned}
 \Theta(s,p,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_b(s,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathfrak{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta - \dots \\
 &\quad \dots - \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_b(s,\tau;p,0;r,\rho) \cdot \mathfrak{G}_{z,0}(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\quad \dots + \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{G}_b(s,\tau;p,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_b(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-17.1b}$$

mit

$$\mathbf{G}_b(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}_n(s,p;\rho) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left(e^{-p\cdot\zeta} - \frac{p - \frac{v}{a}}{p_n^+ - \frac{v}{a}} \cdot e^{-p_n^+\cdot\zeta} \right) \cdot e^{-s\cdot\tau} \tag{A2.3.1-17.2b}$$

- für Startbedingung (A2.3.1-2c)

$$\begin{aligned}
 \Theta(s,p,r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_c(s,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathfrak{g}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 & \dots + \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_c(s,\tau;p,0;r,\rho) \cdot \mathfrak{r}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{G}_c(s,\tau;p,\zeta;r,R) \cdot \mathfrak{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_c(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathfrak{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-17.1c}$$

mit

$$\mathbf{G}_c(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) = \sum_{n=1}^\infty G_n(s,p;\rho) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left(e^{-p\cdot\zeta} - \frac{p - \frac{v}{a} + h_0}{p_n^+ - \frac{v}{a} + h_0} \cdot e^{-p_n^+\cdot\zeta} \right) \cdot e^{-s\cdot\tau} \tag{A2.3.1-17.2c}$$

Die Rücktransformation der Bildfunktionen (A2.3.1-17a-c), die als Partialbruchreihen eine bereits sehr einfache Bauart hinsichtlich der beiden Bildvariablen s und p aufweisen, können - vorausgesetzt, die Vertauschung von Summation und Integration ist statthaft - unter Verwendung betreffender Korrespondenzen schrittweise zurück transformiert werden.

Folgende Partialbrüche sind zurück zu transformieren:

- für Startbedingung a)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^{-p\cdot\zeta} - e^{-p_n^+\cdot\zeta}}{(p - p_n^+) \cdot (p - p_n^-)} \cdot e^{-s\cdot\tau} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \hline p \\ \hline z \end{array} \\
 & \frac{e^{-s\cdot\tau}}{p_n^+ - p_n^-} \cdot \begin{cases} e^{p_n^- \cdot z} \cdot \left(e^{-p_n^- \cdot \zeta} - e^{-p^+ \cdot \zeta} \right) & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \\ \left(e^{p_n^+ \cdot z} - e^{p^- \cdot z} \right) \cdot e^{-p_n^+ \cdot \zeta} & \text{für } z < \zeta < \infty \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dieses Zwischenergebnis läßt sich auf die Gestalt

$$\frac{e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)}}{2\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} \cdot e^{-s\cdot\tau} \cdot \begin{cases} e^{-(z-\zeta)\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} - e^{-(z+\zeta)\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \\ e^{-(\zeta-z)\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} - e^{-(\zeta+z)\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} & \text{für } z < \zeta < \infty \end{cases}$$

bringen, so daß mit der Korrespondenz

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}}}{\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} \cdot \begin{array}{c} s \\ \bullet \quad \circ \\ \hline t \end{array} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \cdot e^{-aD_n t - \frac{x^2}{4at}}$$

und unter Beachtung des Verschiebungssatzes die gesuchte Korrespondenz als

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^{-p \cdot \zeta} - e^{-p_n^+ \cdot \zeta}}{(p - p_n^+) \cdot (p - p_n^-)} \cdot e^{-s \cdot \tau} \\
 & \quad \bullet \xrightarrow{p} \overset{s}{\bullet} \xrightarrow{t} \circ \xrightarrow{z} \quad \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \sinh\left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}\right) \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)} - a \cdot D_n \cdot (t-\tau)}
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-18a}$$

für $t \geq \tau$ zur Verfügung steht.

- für Startbedingungen b) und c)

Mit den Abkürzungen $k = \frac{v}{a}$ im Falle b) und $k = \frac{v}{a} - h_0$ im Falle c) läßt sich die Transformation für beide Fälle einheitlich durchführen:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^{-p \cdot \zeta} - \frac{p-k}{p_n^+ - k} e^{-p_n^+ \cdot \zeta}}{(p - p_n^+) \cdot (p - p_n^-)} \cdot e^{-s \cdot \tau} \quad \bullet \xrightarrow{p} \circ \xrightarrow{z} \\
 & \frac{e^{-s \cdot \tau}}{(p_n^+ - p_n^-)(p_n^+ - k)} \cdot \begin{cases} e^{p_n^- \cdot z} \cdot \left((p_n^+ - k) \cdot e^{-p_n^- \cdot \zeta} - (p_n^- - k) \cdot e^{-p^+ \cdot \zeta} \right) & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \\ \left((p_n^+ - k) \cdot e^{p_n^+ \cdot z} - (p_n^- - k) \cdot e^{p^- \cdot z} \right) \cdot e^{-p_n^+ \cdot \zeta} & \text{für } z < \zeta < \infty \end{cases} \\
 & = \frac{e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)}}{2\sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} \cdot e^{-s \cdot \tau} \cdot \begin{cases} e^{-(z-\zeta) \cdot \sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} + \dots & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \\ \dots + \frac{\sqrt{\frac{s}{a} + D_n} - \left(\frac{v}{2a} - k\right)}{\sqrt{\frac{s}{a} + D_n} + \left(\frac{v}{2a} - k\right)} \cdot e^{-(z+\zeta) \cdot \sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} & \\ e^{-(\zeta-z) \cdot \sqrt{\frac{s}{a} + D_n}} + \dots & \text{für } z < \zeta < \infty \end{cases} \\
 & \bullet \xrightarrow{p} \overset{s}{\bullet} \xrightarrow{t} \circ \xrightarrow{z} \left\{ \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \cosh\left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}\right) - a \cdot \left(\frac{v}{2a} - k\right) \cdot e^{\frac{-z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}} \cdot e^{\omega^2} \cdot \operatorname{erfc}(\omega) \right\} \cdot \\
 & \quad \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)} - a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \\
 & \quad \text{mit } \omega = \frac{z+\zeta}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + \left(\frac{v}{2a} - k\right) \cdot \sqrt{a \cdot (t-\tau)} \quad \text{und } t \geq \tau, \tag{A2.3.1-18b, c}
 \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{erfc}(\cdot) = 1 - \operatorname{erf}(\cdot)$ das Komplement des GAUßschen Fehlerintegrals bezeichnet.

Mit diesen Korrespondenzen lassen sich die Lösungen im Originalbereich nunmehr vollständig angeben:

- für Startbedingung (A2.3.1-2a)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{g}_a(t,0;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t,\tau;z,0;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau,
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-19.1a}$$

wobei die Zeitintegrale vom Faltungstyp sind und die GREENSche Funktion durch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) = & \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{\frac{v(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)}}{2a}} \cdot \sinh\left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}\right) \\
 & \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)}
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-19.2a}$$

für $0 \leq \tau \leq t$, $0 \leq z, \zeta < \infty$ gegeben ist; μ_n aus (A2.3.1-10) und D_n entsprechend (A2.3.1-11.2).

- für Startbedingungen (A2.3.1-2b) und (A2.3.1-2c):

Die Lösung der Startbedingung b) geht aus der Lösung der Bedingung c) durch Grenzübergang für $h_0 \rightarrow 0$ und $\mathbf{q}_0(t,r) \rightarrow -\lambda \cdot \mathcal{G}_{z,0}(t,r)$ unmittelbar hervor, so daß hier nur die Lösung für Startbedingung c) angeschrieben werden braucht:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{g}_c(t,0;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^R \mathbf{g}_c(t,\tau;z,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{g}_c(t,\tau;z,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{g}_c(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau,
 \end{aligned} \tag{A2.3.1-19.1c}$$

wobei die Zeitintegrale vom Faltungstyp sind und die GREENSche Funktion durch

$$\mathbf{g}_c(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) = \left\{ \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \cosh\left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}\right) - a \cdot \left(h_0 - \frac{v}{2a}\right) \cdot e^{-\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}} \cdot e^{\omega_c^2} \cdot \operatorname{erfc}(\omega_c) \right\} \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)}} \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot J_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \quad (\text{A2.3.1-19.2c})$$

mit $\omega_c = \omega_c(t, \tau; z, \zeta) := \frac{z + \zeta}{2\sqrt{a \cdot (t-\tau)}} + \left(h_0 - \frac{v}{2a}\right) \cdot \sqrt{a \cdot (t-\tau)}$ und $0 \leq \tau \leq t$, $0 \leq z, \zeta < \infty$

gegeben ist; μ_n aus (A2.3.1-10) und D_n entsprechend (A2.3.1-11.2).

Anzumerken ist, daß Lösung (A2.3.1-19a) auch aus Lösung (A2.3.1-19c) erhalten wird durch Grenzübergang $h_0 \rightarrow \infty$ sowie mit den Spezifizierungen $\mathcal{G}_{U0}(t, r) \rightarrow \mathcal{G}(t, r)$ und $\mathbf{q}_0(t, r) \rightarrow 0$.

Damit ist das Anfangs-Randwertproblem des axial bewegten Vollzylinders für allgemein gehaltene Anfangs-, Start- und Randfunktionen vollständig gelöst, wie durch Verifikation der Lösung anhand der Differentialgleichung sowie der Anfangs-, Start-, Rand- und Symmetriebedingungen nachgewiesen werden kann. Ein solcher Nachweis sollte korrekterweise insbesondere auch deshalb geführt werden, weil im Zusammenhang mit der Rücktransformation einige Annahmen gemacht worden waren, deren Richtigkeit - und damit die des Ergebnisses - sonst offen bliebe.

A2.3.2 Spezialisierungen

Der Lösungsvorrat (A2.3.1-19) bzw. (A2.3.1-17) kann - je nach Problemstellung und Modellanforderungen - mannigfachen Spezialisierungen und Vereinfachungen unterworfen werden, ohne daß jene Lösungen für den betreffenden Zusammenhang separat aufs neue hergeleitet werden müssen. So werden z.B. für thermische Betrachtungen beim Ziehen und Durchlaufglühen überwiegend stationäre, zeitunabhängige Verhältnisse interessieren, so daß man zweckmäßigerweise mit einer entsprechend einfacheren Formel wird arbeiten wollen. Viel Spielraum ist bei der Konkretisierung der Anfangs-, Start-, und Randbedingungen sowie der Volumenquellen durch spezielle Funktionsansätze gegeben. Diese sollten so gewählt werden, daß sie einerseits möglichst alle technisch relevanten Anforderungen genau genug beschreiben und andererseits von hinreichend einfacher Bauart sind, um die Integrale noch geschlossen berechnen zu können. Die vorzunehmenden Spezialisierungen werden im Hinblick auf nachfolgende Anwendungen vorbereitend vorgenommen, was - zunächst ohne weitere Begründung - hier immer nur für eine der drei Lösungsvarianten (A2.3.1-19a-c) geschehen soll.

A2.3.2.1 Stationäre Verhältnisse

Immer wenn *stationäre Verhältnisse* vorliegen, d.h., wenn keine Zeitabhängigkeiten der Wärmequellen am Zylinderrand und im Volumen auftreten und wenn der Einfluß der Anfangstemperaturverteilung bzw. deren Abklingen nicht weiter interessieren, lassen sich die Lösungen (A2.3.1-17) bzw. (A2.3.1-19) durch Grenzübergang entsprechend spezialisieren. Aus der Lösung im Bildbereich für $s \rightarrow 0$ (vgl. Grenzwertsatz für $t \rightarrow \infty$) werden neue Bildfunktionen erhalten. Hier werde nur die häufiger benötigte Lösung für Startbedingung (A2.3.1-2a) angegeben:

$$\begin{aligned} \Theta(p,r) = & \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{G}_a(p,0;r,\rho) \cdot \mathfrak{g}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^\infty \mathbf{G}_a(p,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.1-1.1a})$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\mathbf{G}_a(p,\zeta;r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}_n(0,p;\rho) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left(e^{-p\zeta} - e^{-\mu_n^+(0)\zeta} \right) \quad (\text{A2.3.2.1-1.2a})$$

Die Lösung des Originalbereichs wird entweder durch Rücktransformation der Bildfunktion (A2.3.2.1-1.1a) oder direkt durch Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ aus der Originalfunktion (A2.3.1-19a) gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(z,r) = & \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(z,0;r,\rho) \cdot \mathfrak{g}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^\infty \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.1-2.1a})$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,\rho) = & \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)}}{\sqrt{D_n}} \\ & \cdot \begin{cases} e^{-z\sqrt{D_n}} \cdot \sinh(\zeta \cdot \sqrt{D_n}) & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \\ \sinh(z \cdot \sqrt{D_n}) \cdot e^{-\zeta \sqrt{D_n}} & \text{für } z < \zeta < \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.1-2.2a})$$

sowie mit μ_n aus (A2.3.1-10) und D_n gemäß (A2.3.1-11.2).

A2.3.2.2 Vernachlässigung axialer Wärmeleitung

Zur Ermittlung der Drahttemperaturen beim Drahtziehen kann ohne nennenswerten Verlust an Genauigkeit, sofern die Ziehgeschwindigkeiten nicht zu klein sind, der Anteil des axialen Wärmetransports infolge Leitung gegenüber dem an den Massentransport gebundenen Anteil vernachlässigt werden, d.h., solange

$$a \cdot \left| \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial z^2} \right| \ll v \cdot \left| \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial z} \right| \text{ angenommen werden kann, darf statt der}$$

Dgl. (A2.3.1-1) näherungsweise von der einfacheren Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial r} \right) - v \cdot \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial z} + \frac{1}{\rho c} \cdot \mathbf{q}_V \quad (\text{A2.3.2.2-1})$$

ausgegangen werden²².

²² Das ist etwa für $\mathcal{P}e := (vR)/a \gg 1$ bzw. $(zR)/(at) \gg 1$ gegeben (vgl. auch Anhang B: zu Kap. A2.3.2.5-3).

Als Lösung im Bildbereich wird, ausgehend von (A2.3.1-3), formal die Funktion (A2.3.1-9) erhalten, jetzt allerdings mit

$$\kappa^2 = -\frac{v}{a}p - \frac{1}{a}s \quad (\text{A2.3.2.2-2.1})$$

$$F = \mathbf{F}(s,p,r) = -\frac{v}{a} \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) - \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p,r) - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{Q}_V(s,p,r) . \quad (\text{A2.3.2.2-2.2})$$

Damit besitzt $\Theta(s,p,r)$ Polstellen bei $p = p_n = -\frac{a}{v} \cdot \left[\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2 \right]$, die - wenn s in der rechten Halbebene liegt - ausschließlich der linken Halbebene angehören, so daß $\Theta(s,p,r)$ in einem Paar rechter Halbebenen analytisch ist und damit als \mathcal{G}^2 -Transformierte unmittelbar rücktransformiert werden darf; die Eigenwerte μ_n wiederum aus der Eigenwertgleichung (A2.3.1-10). Nach Entwicklung von (A2.3.1-9.2) in eine *DINI*-Reihe und nach einigen Umformungen läßt sich die Bildfunktion für Startbedingung (A2.3.1-2a) schließlich in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \Theta(s,p,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(s,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\ &\dots + \frac{v}{a} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(s,\tau;p,0;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\ &\dots + \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\tau d\zeta + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.2-3.1})$$

mit der *GREENS*chen Funktion in entwickelter Form

$$\mathbf{G}_a(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(\frac{hR}{\mu_n}\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{e^{-s\tau - p\zeta}}{\frac{s}{a} + \frac{v}{a}p + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2} . \quad (\text{A2.3.2.2-3.2})$$

Die Rücktransformation erfolgt unter Verwendung der *DIRAC*schen Distribution

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.3.2.2-D1})$$

mit der Korrespondenz

$$\frac{1}{\frac{1}{a} \cdot s + \frac{v}{a} \cdot p + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ p \\ \diagdown \\ \circ \\ s \end{array} \begin{array}{c} \frac{a}{v} \cdot e^{-\frac{z}{v} \left[s + a \cdot \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \right]} \\ \\ a \cdot e^{-vt \left[p + \frac{a}{v} \cdot \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \right]} \end{array} \begin{array}{c} s \quad t \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \frac{a}{v} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{az}{vR^2}} \cdot \delta\left(t - \frac{z}{v}\right) \\ \\ a \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{at}{R^2}} \cdot \delta(z - vt) ; \end{array}$$

die Gleichheit beider Ergebnisse läßt sich mit [PRE 85, (91), (110), (111)] nachweisen.

Unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes wird die Lösung im Originalbereich zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^z \int_0^R \mathbf{g}_a(t,0;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 &\dots + \frac{V}{a} \cdot \int_0^t \int_0^R \mathbf{g}_a(t,\tau;z,0;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_0^z \mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^z \int_0^R \mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{A2.3.2.2-4.1}$$

mit der GREENSche Funktion

$$\mathbf{g}_a(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \begin{cases} \frac{a}{v} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{a(z-\zeta)}{vR^2}} \cdot \delta\left(t-\tau-\frac{z-\zeta}{v}\right) \\ \text{oder } a \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{a(t-\tau)}{R^2}} \cdot \delta(z-\zeta-v(t-\tau)) \end{cases} \tag{A2.3.2.2-4.2}$$

für $0 \leq \tau \leq t$, $0 \leq \zeta \leq z$ erhalten.

Erwartungsgemäß erstrecken sich das Integrationsintervall und damit der Einfluß von Randbedingung und Quellen - im Gegensatz zu den axiale Wärmeleitung berücksichtigenden Lösungen (A2.3.1-19) - nicht mehr auf die Gesamtlänge des einseitig unendlich langen Vollzylinders, sondern nur noch auf den ersten Abschnitt von $z=0$ bis zum aktuellen Ort der Beobachtung z .

Wegen der Eigenschaft der DIRACschen Delta-Distribution - $\theta(x)$ siehe (A2.3.2.5-D3) -

$$\boxed{\int_{x_0}^x \delta(\xi - x_1) \cdot f(\xi) \cdot d\xi = \theta(x - x_1) \cdot f(x_1) \quad \text{für } x_1 \geq x_0} \tag{A2.3.2.2-D2}$$

läßt sich der Lösung (A2.3.2.2-4) eine etwas anschaulichere Form geben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_{\bar{a}}(t;z;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(z-vt, \rho) \cdot d\rho + \frac{V}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_{\bar{a}}(t;z;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_0\left(t-\frac{z}{v}, \rho\right) \cdot d\rho + \dots \\
 &\dots + \int_0^{z \leq vt} \mathbf{g}_{\bar{a}}(t;\zeta;r,R) \cdot \mathbf{r}\left(t-\frac{\zeta}{v}, z-\zeta\right) \cdot d\zeta + \int_0^{t < z/v} \mathbf{g}_{\bar{a}}(\tau;z;r,R) \cdot \mathbf{r}(t-\tau, z-v\tau) \cdot d\tau + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^R \left[\int_0^{z \leq vt} \mathbf{g}_{\bar{a}}(t;\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V\left(t-\frac{\zeta}{v}, z-\zeta, \rho\right) \cdot d\zeta + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \int_0^{t < z/v} \mathbf{g}_{\bar{a}}(\tau;z;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(t-\tau, z-v\tau, \rho) \cdot d\tau \right] \cdot d\rho
 \end{aligned} \tag{A2.3.2.2-5.1}$$

mit

$$g_{\bar{a}}(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot J_0^2(\mu_n)} \cdot \begin{cases} a \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{z}{v} \\ \frac{a}{v} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a\zeta}{vR^2}} & \text{für } \frac{z}{v} < t \end{cases}, \quad (\text{A2.3.2.2-5.2})$$

wobei zu beachten ist, daß eine Anfangs-, Rand- oder Quellenfunktion jeweils Null zu setzen ist, sobald ein Argument negativ wird.

Das zeigt z.B., daß sich die Anfangstemperaturverteilung $\mathcal{G}_A(z, r)$ auf das Temperaturfeld nur in einem Teilzylinder ($z \geq v \cdot t$, $0 \leq r \leq R$) auswirkt. Das war auf Grund der ausgeschlossenen bzw. vernachlässigten Wärmeleitung in Achsrichtung auch zu erwarten gewesen, denn die abklingende Anfangstemperaturverteilung wird mit dem Massentransport hinwegtransportiert. Demgegenüber erstreckt sich die Wirkung einer bei $z = 0$ vorgegebenen Starttemperatur $\mathcal{G}_0(t, r)$ in einen mit der Zeit anwachsenden Zylinderabschnitt ($0 \leq z \leq v \cdot t$, $0 \leq r \leq R$), während das Temperaturfeld außerhalb ($z > v \cdot t$) davon nicht erreicht wird. Dieses Lösungsverhalten wird allein durch den an den Massentransport gebundenen Wärmetransport verursacht und hat nichts damit zu tun, daß Wärmeausbreitung ein grundsätzlich zeitabhängiger, je nach Medium unterschiedlich schneller Vorgang ist.

In diesem Zusammenhang eine prinzipielle Anmerkung zur *FOURIERS*chen Wärmeleitungsgleichung:

Die *FOURIERS*che Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ. Im Gegensatz zu Wellen-, Schwingungs- oder Telegraphengleichung, die statt der ersten Ableitung nach der Zeit (oder zusätzlich dazu) eine zweite Zeitableitung aufweisen und bei denen sich Wirkungen in Übereinstimmung mit experimentellen Befunden mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, hat sie die unangenehme Eigenschaft, daß sich Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Das jedoch steht in offensichtlichem Gegensatz zu grundlegenden Prinzipien der Physik. Dieser unerwünschte Effekt der Wärmeleitungs- oder auch der Diffusionsgleichung, der auch als Paradox der Wärmeleitungs- bzw. Diffusionstheorie bezeichnet wird, läßt sich besonders leicht erkennen, wenn beispielsweise Gleichung (A2.3.1-19a) auf einfachstmögliche Verhältnisse reduziert wird, z.B., indem Anfangstemperatur \mathcal{G}_A , innere Quellen q_V und Randquellen \mathbf{r} bei $r = R$, d.h., speziell q_R und h , sowie Axialgeschwindigkeit v allesamt Null gesetzt werden. Speziell für konstante Starttemperatur $\mathcal{G}_0 = konst.$ wird die Lösung dann auch noch vom Radius unabhängig, d.h., es wird die Lösung eines in z -Richtung halbinendlichen Körpers erhalten. Sie besitzt die besonders einfache Form $\mathcal{G}(t, z) = \mathcal{G}_0 \cdot \text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$. Obwohl die *erfc*-Funktion - das Komplement des Fehlerintegrals - mit wachsendem Argument asymptotisch sehr rasch gegen Null strebt (vgl. Bild A2.3-2), erreicht sie diesen Wert jedoch erst mit über alle Grenzen wachsendem Argument exakt. Das wiederum zeigt, daß für ein festes $t > 0$ zu jedem $z < \infty$ tatsächlich ein $\mathcal{G} > 0$ gehört, was letztlich den Sachverhalt der unendlich schnellen Wärmeausbreitung bestätigt.

Es hat z.B. im Rahmen der rationalen Thermodynamik erfolgreiche Bemühungen gegeben, diesen Widerspruch aufzulösen, wobei gezeigt wurde, daß zur Beschreibung von Wärmeleit- und Diffusionsphänomenen genaugenommen Differentialgleichungen von hyperbolischem Typ oder

Integrodifferentialgleichungen herangezogen werden müßten²³. Diesen Sachverhalt zu kennen, kann zur sachlich richtigen Interpretation entsprechender Beziehungen durchaus wichtig sein. Allerdings stellt die *FOURIERS*che Wärmeleitungsgleichung - trotz dieses physikalischen Einwandes - für praktisch alle wärmetechnisch relevante Aufgabenstellungen auch weiterhin eine ausgezeichnete Näherung dar.

A2.3.2.3 Stationäre Verhältnisse und Vernachlässigung axialer Wärmeleitung

Werden die Bedingungen des Kapitels A2.3.2.2 weiterhin auf stationäre Verhältnisse, d.h., auf $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$ bei zeitunabhängigen Start- und Randbedingungen sowie Volumenquellen, eingeschränkt, so folgt entsprechend einem Grenzwertsatz der \mathfrak{L} -Transformation für $s \rightarrow 0$ im Bildbereich ($t \rightarrow \infty$ im Originalbereich) die Funktion (A2.3.1-9), nunmehr allerdings mit

$$\kappa^2 = -\frac{v}{a}p \quad \text{bzw.} \quad \kappa = i \cdot q \quad \text{mit} \quad q := \sqrt{\frac{v}{a} \cdot p} \quad (\text{A2.3.2.3-1.1})$$

$$\Theta(p, r) = \mathbf{G}(p; r, R) \cdot \mathfrak{H}(p) + \int_0^R \mathbf{G}(p; r, \rho) \cdot \left(\frac{v}{a} \cdot \mathfrak{g}_0(\rho) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(p, \rho) \right) d\rho \quad (\text{A2.3.2.3-1.2})$$

mit

$$\mathbf{G}(p; r, \rho) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho}{h \cdot \mathbf{J}_0(iqR) - iq \cdot \mathbf{J}_1(iqR)} \cdot \begin{cases} \mathbf{Z}_0(iqr) \cdot \mathbf{J}_0(iq\rho) & \text{für } 0 \leq \rho \leq r \leq R \\ \mathbf{J}_0(iqr) \cdot \mathbf{Z}_0(iq\rho) & \text{für } 0 \leq r \leq \rho \leq R \end{cases} \quad (\text{A2.3.2.3-1.3})$$

Die entwickelte Form wird auch direkt aus (A2.3.2.2-3) unmittelbar (für Startbedingung (A2.3.1-2a)) erhalten:

$$\begin{aligned} \Theta(p, r) = & \frac{v}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{G}_a(p, 0; r, \rho) \cdot \mathfrak{g}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^\infty \mathbf{G}_a(p, \zeta; r, R) \cdot \mathfrak{r}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_a(p, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.3-2.1})$$

mit der *GREENS*chen Funktion

$$\mathbf{G}_a(p, \zeta; r, \rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{e^{-p\zeta}}{\frac{v}{a}p + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2} \quad (\text{A2.3.2.3-2.2})$$

Nach eindimensionaler Rücktransformation ergibt sich die Lösung im Originalbereich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(z, r) = & \frac{v}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_a(z, 0; r, \rho) \cdot \mathfrak{g}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^z \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, R) \cdot \mathfrak{r}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^z \int_0^R \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.3-3.1})$$

mit der *GREENS*chen Funktion

$$\mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) = \frac{a}{v} \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{a(z-\zeta)}{vR^2}}; \quad 0 \leq \zeta \leq z. \quad (\text{A2.3.2.3-3.2})$$

²³ Vgl. [SAM 95, Kap. 2.1.4], ZAMM 55(1975)T211-T212, ZAMM 57(1977)T36-T42, ZAMM 61(1981)T213-T219.

Dieses Ergebnis wird auch direkt aus (A2.3.2.2-5) für $t \rightarrow \infty$ erhalten.

Eine Untersuchung der GREENSchen Funktion (A2.3.2.3-3.2) für kleine Werte $z \rightarrow 0$ zeigt, daß sie für $0 \leq r, \rho < R$ den Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) = \frac{a}{v} \cdot \delta(r - \rho)$ besitzt²⁴.

A2.3.2.4 Vernachlässigung von Wärmeleitung und Bewegung in Achsrichtung

Den Spezialfall einer Kreisscheibe bzw. eines Kreiszyinders, bei dem Wärmeleitung nur noch in Richtung der Radiuskoordinate zugelassen wird, beschreibt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho c} \mathbf{q}_V. \quad (\text{A2.3.2.4-1})$$

Eine Lösung läßt sich auf verschiedenen Wegen aus den bereits vorliegenden Ergebnissen gewinnen, z.B. als Spezialfall der Bildfunktion (A2.3.1-17b) bzw. der zugehörigen, nicht explizit angeschriebenen Originalfunktion (A2.3.1-19b), indem die z -Abhängigkeiten aufgegeben werden. Dann sind die Anfangstemperatur, die Randbedingung (A2.3.1-5) sowie die inneren Quellen von der Variablen z unabhängig, d.h.: $\mathcal{G}_A(z, r) \rightarrow \mathcal{G}_A(r)$, $\mathbf{r}(t, z) \rightarrow \mathbf{r}(t) = h \cdot \mathcal{G}_U(t) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(t)$ sowie $\mathbf{q}_V(t, z, r) \rightarrow \mathbf{q}_V(t, r)$. Startgradient und Axialgeschwindigkeit sind Null zu setzen, so daß für $\mathcal{G}_{z,0}(t, r) \rightarrow 0$ (adiabat) und $v = 0$ aus (A2.3.1-17b), nach Integration über ζ und Rücktransformation $\bullet \xrightarrow{p} \circ \xrightarrow{z}$, zunächst die Bildfunktion

$$\begin{aligned} \Theta(s, r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{G}_b(s, 0; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_A(\rho) \cdot d\rho + \int_0^\infty \mathbf{G}_b(s, \tau; r, R) \cdot \mathbf{r}(\tau) \cdot d\tau + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \int_0^R \mathbf{G}_b(s, \tau; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.4-2.1})$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\mathbf{G}_b(s, \tau; r, \rho) = \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{e^{-s\tau}}{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2}, \quad (\text{A2.3.2.4-2.2})$$

resultiert. Dieses Ergebnis folgt ganz analog auch aus der Bildfunktion (A2.3.2.2-3) für $v = 0$.

Zur Bildfunktion (A2.3.2.4-2) läßt sich schließlich die Temperatur-Originalfunktion herstellen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_b(t, 0; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_A(\rho) \cdot d\rho + \int_0^t \mathbf{g}_b(t, \tau; r, R) \cdot \mathbf{r}(\tau) \cdot d\tau + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^R \mathbf{g}_b(t, \tau; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.4-3.1})$$

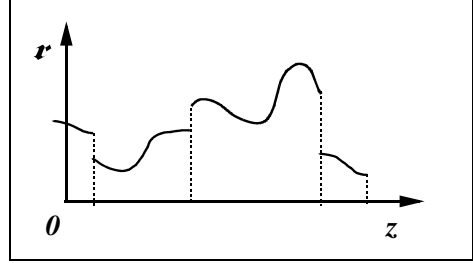
mit der GREENSche Funktion

$$\mathbf{g}_b(t, \tau; r, \rho) = a \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{a(t-\tau)}{R^2}}; \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (\text{A2.3.2.4-3.2})$$

²⁴ vgl. Kapitel A2.3.2.8

A2.3.2.5 Rand- und Gebietsfunktionen

Zur detaillierteren analytischen oder numerischen Auswertung ist es erforderlich, die mittels GREENscher Funktion angegebenen Lösungsdarstellungen ganz konkreten Rand- und Quellenfunktionen anzupassen. Dabei werden die Randfunktionen und Quellen - je nach physikalisch-technischen Gegebenheiten - sehr unterschiedliche Eigenschaften, insbesondere auch Unstetigkeiten zu berücksichtigen haben. Damit die allgemeinen Lösungen nicht jedesmal - je nach Anforderungen - erneut integriert werden müssen, sind spezielle Funktionsansätze auszuwählen. Diese sollen einerseits so flexibel sein, daß sich physikalisch-technische Belange hinreichend präzise nachbilden lassen und andererseits sollen sie von einfacher Bauart sein, damit analytisch geschlossene Lösungsdarstellungen möglich bleiben. Zur Berücksichtigung der z - und t -Abhängigkeiten der Randfunktion bei $r=R$ bieten sich unter diesem Blickwinkel *Spline*-Funktionen an $t \in (0, \infty)$, $z \in (0, \infty)$:



$$\mathbf{r}(z) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(z-L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} (z-L_k)^\beta \quad \mathfrak{H}(p) := \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot \frac{\beta!}{p^{\beta+1}} e^{-L_k p}; \quad (\text{A2.3.2.5-1})$$

die *Spline*-Koeffizienten der Randfunktion lassen sich z.B. aus den *Spline*-Koeffizienten von Umgebungstemperatur $\mathfrak{G}_U(z)$ und Randquelle $\mathbf{q}_R(z)$ gewinnen: $\mathbf{r}_{k\beta} := h \cdot \mathfrak{G}_{k\beta} + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_{k\beta}$.

Bei zusätzlicher Zeitabhängigkeit

$$\mathbf{r}(t,z) := \sum_{i=0}^{i_E} \theta(t-T_i) \sum_{\eta=0}^{\eta_E} \hat{\mathbf{r}}_{i\eta} (t-T_i)^\eta \cdot \sum_{j=0}^{j_E} \theta(z-L_j) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{j\beta} (z-L_j)^\beta$$

$$\hat{\mathfrak{H}}(s,p) := \sum_{i=0}^{i_E} \sum_{\eta=0}^{\eta_E} \hat{\mathbf{r}}_{i\eta} \cdot \frac{\eta!}{s^{\eta+1}} e^{-T_i s} \cdot \sum_{j=0}^{j_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{j\beta} \cdot \frac{\beta!}{p^{\beta+1}} e^{-L_j p}, \quad (\text{A2.3.2.5-2})$$

wobei $\theta(x) := \begin{cases} 0, & \text{solange } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ (A2.3.2.5-D3)

die HEAVISIDESche Einheitssprungfunktion und T_i und L_j die sogen. Knoten, die nicht äquidistant zu sein brauchen, bezeichnen. Häufig werden kubische Splines ($\eta_E = 3$, $\beta_E = 3$) verwendet. Die *Spline*-Koeffizienten $\hat{\mathbf{r}}_{i\eta}$ bzw. $\mathbf{r}_{j\beta}$ lassen sich zu vorgegebenen (Meß-)Werten so berechnen, daß die zu approximierenden Vorgaben - je nach Zweck - entweder interpoliert oder aber - was insbesondere bei Meßwerten sinnvoller ist - ausgeglichen werden. Aus numerischer Sicht ist es zweckmäßig, den Einfluß der *Spline*-Koeffizienten, z.B. $\mathbf{r}_{k\beta}$, jeweils nur auf das zugehörige Intervall $L_k \leq z < L_{k+1}$ zu beschränken. Das wird erreicht, indem im nachfolgenden Intervall $L_{k+1} \leq z < L_{k+2}$ nicht einfach die den dortigen Funktionsverlauf approximierenden Koeffizienten $\mathbf{r}_{(k+1)\beta}$, sondern modifizierte Koeffizienten $\mathbf{r}_{(k+1)\beta}^* := \mathbf{r}_{(k+1)\beta} - \mathbf{r}_{k\beta}^*$ herangezogen werden, die den aus dem vorangegangenen k -ten Intervall herrührenden „Nachhall“ durch Abzug

von $\mathbf{r}_{k\beta}^* = \sum_{j=\beta}^{\beta_E} \mathbf{r}_{kj} \cdot \binom{j}{\beta} \cdot (L_{k+1} - L_k)^{j-\beta}$ exakt kompensieren²⁵.

²⁵ Vgl. Anhang B. Weitere Einzelheiten zur Koeffizientenbestimmung siehe auch [BÖH 74] und [ENG 85].

Beim Drahtziehen interessieren häufig nur die Temperaturverhältnisse unter thermisch stationären Verhältnissen, so daß nachfolgende Betrachtungen auf diesen Fall, d.h., auf zeitunabhängige Start- und Randbedingungen sowie $t \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben sollen.

Für die r -Abhängigkeit einer Startbedingung bei $z = 0$ läßt sich, sofern Stetigkeit vorliegt, z.B. ein Ansatz der Form

$$\mathbf{r}_0(r) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma_E} (\mathbf{r}_{a\gamma} + \mathbf{r}_{b\gamma} \cdot \ln r) \cdot r^{2\gamma} \quad (\text{A2.3.2.5-3})$$

verwenden, wobei die Parameter $\mathbf{r}_{a\gamma}$ und $\mathbf{r}_{b\gamma}$ z.B. wieder durch Ausgleichsrechnung aus einem vorgegebenen Werteverlauf zu erhalten sind.

Während obige Ansätze den Vorteil einer gewissen Anschaulichkeit besitzen, besteht eine weitere und elegante Möglichkeit zur Anpassung von Randwerten und Quellen auch darin, diese in die jeweils passende Orthogonalreihe zu entwickeln. Hinsichtlich der z -Abhängigkeiten läßt sich eine Entwicklung in *FOURIER*-Reihen und bezüglich r -Richtung in Reihen nach Zylinderfunktionen entsprechend (A2.3.1-R1) realisieren. Während im vorliegenden Zusammenhang jedoch dem *Spline*-Ansatz (A2.3.2.5-1) gegenüber einer *FOURIER*-Entwicklung der Vorzug gegeben werden soll, werde bei $z = 0$ als Startbedingung nicht ein Ansatz (A2.3.2.5-3), sondern ein Reihenansatz entsprechend (A2.3.1-R1) verwendet. Die als bekannt vorauszusetzende Starttemperatur $\mathcal{G}_0(r)$ soll also durch folgenden Ansatz approximiert werden:

$$\mathcal{G}_0(r) := \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{G}_m \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right); \quad r \in (0, R), \quad \mu_m \text{ aus (A2.3.1-10),} \quad (\text{A2.3.2.5-4})$$

$$\text{DINI -Koeff. } \mathcal{G}_m = \frac{2\mu_m^2}{\left((hR)^2 + \mu_m^2\right) \cdot (R \mathbf{J}_0(\mu_m))^2} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_m \frac{\rho}{R}\right) \cdot \mathcal{G}_0(\rho) \cdot d\rho.$$

Entsprechend werde für die Quellen in $z \in (0, \infty)$, $r \in (0, R)$ ein Produktansatz gewählt:

$$\mathbf{q}_V(z, r) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} q_{k\beta}^{(V)}(r) \cdot (z - L_k)^\beta$$

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \\ z \quad p \end{array} \quad \mathbf{Q}_V(p, r) := \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} q_{k\beta}^{(V)}(r) \cdot \frac{\beta!}{p^{\beta+1}} e^{-L_k p} \quad (\text{A2.3.2.5-5})$$

mit $q_{k\beta}^{(V)}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{k\beta m}^{(V)} \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{D}\right)$ und den Koeffizienten

$$q_{k\beta m}^{(V)} = \frac{2\mu_m^2}{\left((hR)^2 + \mu_m^2\right) \cdot (R \mathbf{J}_0(\mu_m))^2} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_m \frac{\rho}{R}\right) \cdot q_{k\beta}^{(V)}(\rho) \cdot d\rho.$$

Eine Spezifizierung der Lösung soll hier nur für einen für das Drahtziehen wichtigen Spezialfall, d.h., für nicht zu kleine Ziehgeschwindigkeit und thermisch stationäre Verhältnisse vorgenommen werden. Es kann dann in guter Näherung von der Lösung (A2.3.2.3-2) bzw. (A2.3.2.3-3) ausgegangen werden. Ohne weitere Einzelheiten sei hier nur das Ergebnis für den Originalbereich mitgeteilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(z,r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} z} + \dots \\
 &\dots + \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z-L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \beta! \cdot \left(-\frac{vR^2}{a}\right)^\beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2R \cdot \mathbf{r}_{k\beta} + \frac{q_{k\beta n}^{(v)}}{\lambda} \cdot \frac{R^2 \cdot \left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)}{\mu_n^2} \right\} \\
 &\quad \cdot \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^{2\beta} \cdot \left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot \left\{ \mathbf{e}_\beta \begin{matrix} -\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-L_k) & -\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-L_k) \\ & -e \end{matrix} \right\};
 \end{aligned} \tag{A2.3.2.5-6.1}$$

hierin bezeichnet \mathbf{e}_β die unvollständige e -Funktion, die durch

$$\mathbf{e}_\beta^x := \sum_{j=0}^{\beta} \frac{x^j}{j!}; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbf{e}_\beta^x = e^x \tag{A2.3.2.5-F1}$$

festgelegt ist.

Nach konvergenzverbessernder Reihensummutation²⁶ entsprechend

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^{2v} \cdot \left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} = \frac{(-1)^v}{2hR \cdot 4^v \cdot (v!)^2} \cdot \sum_{\xi=0}^v C_{v\xi} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2\xi} \tag{A2.3.2.5-S1}$$

$$C_{v\xi} \text{ rekursiv aus } C_{v\xi} = - \sum_{j=1}^{v-\xi} \left(\frac{\xi+j}{\xi}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2j}{hR}\right) \cdot C_{v(\xi+j)}; \quad C_{vv} = 1$$

wird statt (A2.3.2.5-6.1) auch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(z,r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} z} + \dots \\
 &\dots + R \cdot \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z-L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot \beta! \cdot \left\{ \frac{1}{hR} \cdot \sum_{v=0}^{\beta} \frac{(z-L_k)^{\beta-v}}{(\beta-v)! \cdot (v!)^2 \cdot \left(4 \frac{a}{vR^2}\right)^v} \cdot \sum_{\xi=0}^v C_{v\xi} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2\xi} - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - 2 \left(-\frac{vR^2}{a}\right)^\beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^{2\beta} \cdot \left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-L_k)} \right\} + \dots \\
 &\dots + \frac{a}{\lambda v} \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z-L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \frac{(-1)^\beta \cdot \beta!}{\left(\frac{a}{vR^2}\right)^{\beta+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_{k\beta n}^{(v)} \cdot \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^{2(\beta+1)}} \cdot \left\{ \mathbf{e}_\beta \begin{matrix} -\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-L_k) & -\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-L_k) \\ & -e \end{matrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{A2.3.2.5-6.2}$$

erhalten; die unvollständige e -Funktion \mathbf{e}_β entsprechend (A2.3.2.5-F1).

²⁶ Vgl. auch Anhang B

Wie für die Ergebnisse (A2.3.2.5-6.2) bzw. (A2.3.2.5-6.1) leicht zu überlegen ist, kann die obere Summationsgrenze zum Index k für jeweils einen konkreten Wert z , der zwischen zwei benachbarten Knoten liegt, z.B. zwischen den Knoten $(M-1)$ und M , also für $L_{M-1} < z \leq L_M$, durch $k_E := M-1$ festgelegt werden; die Einheitssprungfunktionen $\theta(z-L_k)$ sind dann alle gleich Eins und bedürfen - da sie nur als Faktor auftreten - keiner Beachtung mehr.

In praxisrelevanten Anwendungen ist es nicht selten sogar möglich und infolge Vereinfachung auch zweckmäßig, auf jeweils drahtabschnittsweise ortsunabhängige Randfunktionen und Quellen, d.h. auf $\mathcal{G}_0(r) = \mathcal{G}_0 = \text{konst.}$, $\mathbf{r}(z) := h \cdot \mathcal{G}_U + q_R/\lambda = \text{konst.}$ und $\mathbf{q}_V(r,z) = q_V = \text{konst.}$ überzugehen. Dann wird aus (A2.3.2.3-1.2) die spezielle Bildfunktion

$$\Theta(p,r) = \frac{h \cdot \mathcal{G}_U + \frac{1}{\lambda} \cdot q_R}{p} \cdot \mathbf{G}(p;r,R) + \left(\frac{v}{a} \cdot \mathcal{G}_0 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{q_V}{p} \right) \cdot \int_0^R \mathbf{G}(p;r,\rho) d\rho \quad (\text{A2.3.2.5-7.1})$$

erhalten, wofür infolge $\int_0^R \mathbf{G}(p;r,\rho) \cdot d\rho = \frac{a}{v p} \cdot (1 - h \cdot \mathbf{G}(p;r,R))$

auch explizit

$$\Theta(p,r) = \frac{\mathcal{G}_0}{p} + \frac{q_V}{p^2 \cdot \rho c v} + \left((h \cdot \Delta \mathcal{G}_U + \frac{q_R}{\lambda}) \cdot \frac{1}{p} - h \cdot \frac{q_V}{p^2 \cdot \rho c v} \right) \cdot \mathbf{G}(p;r,R). \quad (\text{A2.3.2.5-7.2})$$

mit $\mathbf{G}(p;r,R) = \frac{\mathbf{J}_0(iqr)}{h \cdot \mathbf{J}_0(iqR) - iq \cdot \mathbf{J}_1(iqR)}$ (A2.3.2.5-7.3)

geschrieben werden kann.

Durch Rücktransformation der Bildfunktion (A2.3.2.5-7.2) oder auch direkt aus (A2.3.2.5-6.2) - unter Verwendung der Bezeichnungen $\Delta \mathcal{G} := \mathcal{G}(r,z) - \mathcal{G}_0$ und $\Delta \mathcal{G}_U := \mathcal{G}_U - \mathcal{G}_0$ - wird die folgende Lösung erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G} &= \Delta \mathcal{G}_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V \cdot R}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2}{hR} \right) \right) - \dots \\ &\dots - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta \mathcal{G}_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V \cdot R}{\mu_n^2} \right) \right) \cdot A_n \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{az}{vR^2}} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.5-8})$$

$$A_n := \frac{2hR}{((hR)^2 + \mu_n^2) \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)}$$

vgl. [TAU 71, Abb.4.10 und Tab. C7] und siehe Anmerkung im Anhang B.

A2.3.2.6 Mittlere Temperaturen

Zur Charakterisierung der thermischen Verhältnisse beim Ziehen und Wärmebehandeln von Draht kann es durchaus von Interesse sein, nicht nur lokale Temperaturen bzw. örtliche Temperaturverteilungen im Stab- bzw. Drahterzeugnis zu kennen, sondern auch über mittlere Temperaturen informiert zu sein. Je nach Fragestellung kann es sinnvoll sein, entweder einen Mittelwert

zu gegebenen Zeitpunkten zu bilden über den Drahtquerschnitt, den Drahtlängsschnitt oder über ein Drahtvolumen, oder aber einen Zeitmittelwert zu bilden für einen Ort, einen Körperschnitt oder ein Drahtvolumen. Es ist hier jedoch weder möglich noch sinnvoll, auf dem Hintergrund der bereits abgeleiteten zahlreichen Temperaturfunktionen alle Möglichkeiten der Mittelwertbildung und deren Lösungen explizit anzugeben. Deshalb sollen hier lediglich zwei einfache Beispiele betrachtet werden, die beim Drahtziehen zur thermischen Berechnung von Mehrfachzügen benötigt werden.

Zunächst wird der Temperaturmittelwert über dem Drahtquerschnitt $A = \pi R^2$ berechnet. Die über dem Querschnitt mittleren Temperaturen ergeben sich im Bildbereich zu

$$\bar{\Theta}(s,p) = \frac{2\pi}{A} \cdot \int_0^R r \cdot \Theta(s,p,r) \cdot dr \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Theta}(p) = \frac{2\pi}{A} \cdot \int_0^R r \cdot \Theta(p,r) \cdot dr \quad (\text{A2.3.2.6-1.1})$$

sowie im Originalbereich zu

$$\bar{\mathcal{G}}(t,z) = \frac{2\pi}{A} \cdot \int_0^R r \cdot \mathcal{G}(t,z,r) \cdot dr \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathcal{G}}(z) = \frac{2\pi}{A} \cdot \int_0^R r \cdot \mathcal{G}(z,r) \cdot dr. \quad (\text{A2.3.2.6-1.2})$$

Es werde vorausgesetzt, daß Summations- und Integrationsreihenfolgen vertauschbar sind. Die über den Radius gemäß (A2.3.2.6-1) auszuführende Integration ist für alle Temperaturfunktionen von Bild- und Originalbereich, beginnend bei (A2.3.1-16), stets dieselbe:

$$\int_0^R r \cdot \mathbf{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \cdot dr = \frac{R^2}{\mu_n} \cdot \mathbf{J}_1(\mu_n) = hR \cdot \left(\frac{R}{\mu_n}\right)^2 \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n), \quad (\text{A2.3.2.6-2})$$

wobei zuletzt die Eigenwertgleichung (A2.3.1-10) herangezogen wurde. Damit ist in den GREENSchen Funktionen bei der Summation über n anstelle $\mathbf{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)$ nunmehr $2hR \frac{\mathbf{J}_0(\mu_n)}{\mu_n^2}$ zu verwenden. Z.B. lautet damit die mittlere Temperatur der Originalfunktion (A2.3.2.3-3):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}(z) = & \frac{v}{a} \cdot \int_0^R \bar{\mathbf{g}}_a(z,0;\rho) \cdot \mathcal{G}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^z \bar{\mathbf{g}}_a(z,\zeta;R) \cdot \mathbf{r}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^z \int_0^R \bar{\mathbf{g}}_a(z,\zeta;\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.6-3.1})$$

mit der GREENSchen Funktion

$$\bar{\mathbf{g}}_a(z,\zeta;\rho) = 4hR \cdot \frac{a}{vR^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[\mu_n^2 + (hR)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n)} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z-\zeta)}; \quad z \geq \zeta. \quad (\text{A2.3.2.6-3.2})$$

Natürlich kann auch von der Bildfunktion (A2.3.2.3-1.2) ausgegangen werden, wodurch mit (A2.3.2.6-1.1) zunächst die Bildfunktion

$$\bar{\Theta}(p) = \bar{\mathbf{G}}(p;R) \cdot \mathbf{r}(p) + \int_0^R \bar{\mathbf{G}}(p;\rho) \cdot \left(\frac{v}{a} \cdot \mathcal{G}_0(\rho) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(p,\rho) \right) d\rho \quad (\text{A2.3.2.6-4.1})$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{G}}(p;r) = \frac{2\pi}{A} \cdot \int_0^R \rho \cdot \mathbf{G}(p;\rho,r) \cdot d\rho = \frac{2r}{R^2} \cdot \frac{a}{v} \cdot \frac{1-h \cdot \mathbf{G}(p;r,R)}{p} \quad (\text{A2.3.2.6-4.2})$$

erhalten wird.

Speziell für ortsunabhängige Start- und Randbedingungen sowie Quellen, d.h., für $\mathcal{G}_0(r) = \mathcal{G}_0 = \text{konst.}$, $\mathbf{r}(z) := h \cdot \mathcal{G}_U + q_R / \lambda = \text{konst.}$ und $\mathbf{q}_V(z,r) = q_V = \text{konst.}$, wird hieraus, ebenso wie durch Rücktransformation der gemäß (A2.3.2.6-1.1) integrierten Bildfunktion (A2.3.2.5-7.2), die Bildfunktion

$$\bar{\Theta}(p,r) = \frac{\mathcal{G}_0}{p} + \frac{q_V}{p^2 \cdot \rho c v} + \left((h \cdot \Delta \mathcal{G}_U + \frac{q_R}{\lambda}) \cdot \frac{1}{p} - h \cdot \frac{q_V}{p^2 \cdot \rho c v} \right) \cdot \bar{\mathbf{G}}(p;R) \quad (\text{A2.3.2.6-5})$$

erhalten.

Hieraus folgt - wie auch aus (A2.3.2.5-8) - die Lösung für die mittlere Temperatur im Originalbereich

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathcal{G}} &= \Delta \mathcal{G}_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V \cdot R}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) \right) - \dots \\ &\dots - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta \mathcal{G}_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V \cdot R}{\mu_n^2} \right) \right) \cdot \bar{A}_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{az}{vR^2}} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.6-6})$$

$$\text{mit } \bar{A}_n := \frac{(2hR)^2}{\mu_n^2 \cdot ((hR)^2 + \mu_n^2)},$$

wobei abkürzend $\Delta \bar{\mathcal{G}} := \bar{\mathcal{G}}(z) - \mathcal{G}_0$ und $\Delta \mathcal{G}_U := \mathcal{G}_U - \mathcal{G}_0$ gesetzt wurde; μ_n aus (A2.3.1-10); vgl. auch [TAU 71, *Abb. 4.9 und Tab. C.7*]. Sofern $q_V = 0$ gilt, lassen sich für grobe Überschlagszwecke Diagramme heranziehen [TAU 71, *Abb. 4.11 - 4.14*] oder [VDI 94, *Ec7*; mit $\bar{\Theta} := 1 - \frac{\Delta \bar{\mathcal{G}}}{\Delta \mathcal{G}_U + q_R/\alpha}$]; siehe auch Anmerkung im Anhang B.

Weiterhin kann die Mittelwertbildung (A2.3.2.6-1.2) auch direkt auf die Dgl. (A2.3.2.4-1) angewandt werden, wovon in Kapitel A2.3.3 im Zusammenhang mit Berechnungen zu wärmetechnisch dünnwandigem Wärmgut Gebrauch gemacht wird.

Eine gegenüber (A2.3.2.6-1.2) zusätzliche Mittelwertbildung in Achsrichtung ergibt dann den Mittelwert über ein bestimmtes Zylindervolumen:

$$\bar{\bar{\mathcal{G}}}(t) = \frac{2\pi}{A \cdot (z_1 - z_0)} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \int_0^R r \cdot \mathcal{G}(t,z,r) \cdot dr \cdot dz = \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \bar{\mathcal{G}}(t,z) \cdot dz$$

bzw. für zeitunabhängige Bedingungen

$$\bar{\bar{\mathcal{G}}} = \frac{2\pi}{A \cdot (z_1 - z_0)} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \int_0^R r \cdot \mathcal{G}(z,r) \cdot dr \cdot dz = \frac{1}{z_1 - z_0} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \bar{\mathcal{G}}(z) \cdot dz; \quad (\text{A2.3.2.6-7})$$

dieser Volumenmittelwert der Temperatur im Zylinderabschnitt zwischen z_0 und z_1 wird auch als kalorische Temperatur bezeichnet. Die kalorische Temperatur kann insbesondere für jene

Lösungen, bei denen der Wärmeleitungs- gegenüber dem Konvektionsanteil (in z -Richtung) vernachlässigt wird, dazu verwendet werden, die thermischen Stoffwerte wenigstens zylinder- bzw. drahtabschnittsweise an die mittleren Temperaturen anzupassen (vgl. Kap. A2.3.3.2.4).

A2.3.2.7 Eigenwerte für Vollzylinder

Zur Berechnung der Vollzylindertemperaturen ist u.a. die Kenntnis der Eigenwerte erforderlich. Diese ergeben sich bekanntlich als Nullstellen der transzendenten Eigenwertgleichung (A2.3.1-10). Allerdings läßt sich für diese Eigenwerte keine geschlossene Lösungsformel angeben, jedoch sind effiziente Näherungsverfahren anwendbar. Iterative Verfahren gestatten eine praktisch beliebig genaue Eigenwertberechnung. Dabei wird der Eigenwert, ausgehend von einem hinreichend genauen Schätzwert, solange iterativ verbessert, bis eine vorgegebene Genauigkeit erreicht ist. Da alle Nullstellen von (A2.3.1-10) einfach sind, ist das *NEWTON*-Verfahren anwendbar, das für den ν -ten Schritt lautet:

$$\mu^{(\nu+1)} := \mu^{(\nu)} - \frac{f(\mu^{(\nu)})}{f'(\mu^{(\nu)})} \quad \text{mit} \quad f(\mu) := hR \cdot J_0(\mu) - \mu \cdot J_1(\mu) \quad (\text{A2.3.2.7-1})$$

$$\text{und} \quad f'(\mu) := -\mu \cdot J_0'(\mu) - hR \cdot J_1(\mu) \neq 0.$$

Damit allerdings die Nullstellenbestimmung ohne Auslassung einzelner Nullstellen funktioniert, sind gewisse Kenntnisse über deren Lage in Abhängigkeit von hR und n erforderlich. Näherungsformeln lassen sich durch Potenzreihenentwicklung von $f(\mu)$ und weitere Umformungen gewinnen. Ohne Herleitung seien die Ergebnisse angeführt:

- für kleinen Parameter $hR \geq 0$, insbesondere für $\frac{hR - \frac{3}{8}}{\mu_n} \ll 1$ gilt

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2} \left(n - \frac{3}{4} \right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(n - \frac{3}{4} \right)^2 + hR - \frac{3}{8}} \quad (\text{A2.3.2.7-2.1})$$

- für großen Parameter hR , insbesondere für $\frac{hR - \frac{3}{8}}{\mu_n} \gg 1$ gilt

$$\mu_n \approx \frac{\pi \cdot \left(n - \frac{1}{4} \right)}{1 + \frac{1}{hR - \frac{3}{8}}} \quad (\text{A2.3.2.7-2.2})$$

Für den ersten Eigenwert ($n = 1$) läßt sich eine genauere Formel finden:

$$\mu_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2hR} + \frac{1}{\mu_{1,\infty}^2} \cdot \frac{\xi + 2hR}{1 + 2hR}}}; \quad (0 \leq \mu_1 \leq \mu_{1,\infty}), \quad (\text{A2.3.2.7-2.3})$$

wobei $\mu_{1,\infty} = 2,40483 \dots$ die erste Nullstelle von (A2.3.1-10) für $hR \rightarrow \infty$, d.h., von $J_0(\mu_1) = 0$ darstellt. Der relative prozentuale Fehler der Näherung (A2.3.2.7-2.3) gegenüber dem exakten μ_1 -Wert wird in Abhängigkeit des Produkts hR für ausgewählte Werte des freien Parameters ξ in Bild A2.3-1 dargestellt. Wird jedoch der Parameter ξ seinerseits als von hR abhängig betrachtet, so läßt sich mit dem Ansatz $\xi = \xi(hR) := a_1 + a_2 \cdot \arctan(a_3 \cdot (hR - a_4))$ und den Koeffizienten $a_1 = 1,457584$; $a_2 = -1,42675$; $a_3 = 0,4476852$; $a_4 = -1,264643$ eine weitere deutliche Genauigkeitssteigerung erzielen. Der relative Fehler liegt damit sogar stets unterhalb von 0,01 %.

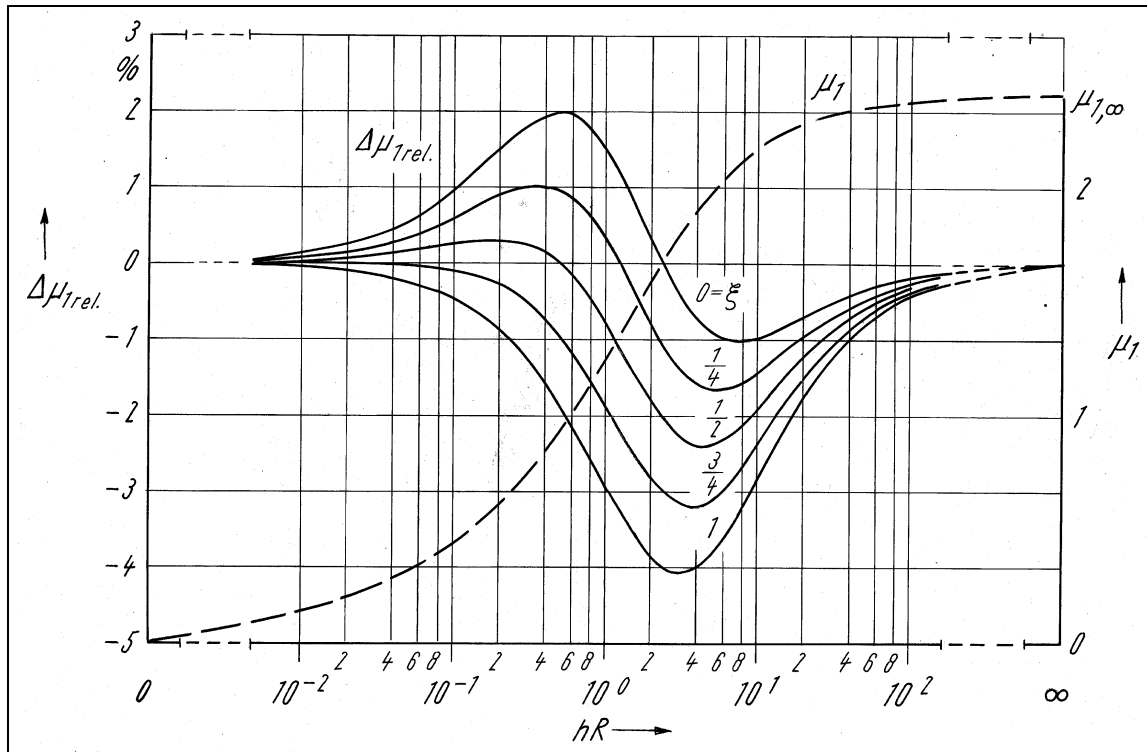


Bild A2.3-1: Erster Eigenwert (Vollzylinder)

Die mit den Näherungsformeln (A2.3.2.7-2.1 . . 3) berechneten Werte können als Iterationsstartwerte $\mu_n^{(0)}$ für das *NEWTON*-Verfahren (A2.3.2.7-1) dienen. Unter Verwendung der Formel (A2.3.2.7-2.3) lassen sich auch geschlossene Näherungsformeln der Drahttemperatur für größere Zeiten gewinnen - vgl. Kapitel A2.3.2.9.

A2.3.2.8 Näherung für kurze Zeiten

Für die Analyse und Berechnung der Vollzylinder- bzw. Drahttemperaturen ist es mitunter zweckmäßig, nicht ausschließlich mit den bisher in Reihendarstellung angegebenen Lösungen zu arbeiten, sondern Näherungslösungen anzustreben, die einfacher aufgebaut sind und deshalb Wirkungsrichtungen einzelner Parameter auf die Temperaturverhältnisse bereits qualitativ besser abschätzen lassen. Die Anwendung von Näherungslösungen kann aber auch dann vorteilhaft sein, wenn Rechenaufwand gespart werden soll bzw. wenn für bestimmte Variablen- oder Parameterwerte die numerische Konvergenz der klassischen Reihenslösungen unbefriedigend ist. So ist z.B. zu erkennen, daß in obigen Lösungen die Reihen umso schlechter konvergieren, je kleiner der Betrag des Arguments der e -Funktion wird, insbesondere also, je kleiner t ist bzw. je kleiner z und je größer v sind. Diese Bedingungen treffen aber für den Draht im Bereich des Ziehholts, das der Draht üblicherweise mit hoher Geschwindigkeit auf kurzem Weg und demzufolge in kürzester Zeit durchquert, weitgehend zu. Hier kann dann eine asymptotische Entwicklung der Lösung für kleine z - bzw. t -Werte sinnvoll sein²⁷.

Bei der Herleitung einer entsprechenden Lösung ist es jedoch zweckmäßig, nicht von der Original-, sondern jeweils von der einfacheren Bildfunktion auszugehen und sich der Äquivalenz zu bedienen, daß kleinen Werten der Originalvariablen große Werte der entsprechenden Bildvariablen entsprechen und umgekehrt. Stellvertretend werde zur Lösung (A2.3.2.3-3) eine

²⁷ Das ist etwa für *FOURIER*-Zahlen $FO = (az)/(vR^2) = (at)/R^2 < 10^{-1}$ gegeben.

asymptotische Darstellung für $z \rightarrow 0$ (bzw. $p \rightarrow \infty$) gesucht, wobei von der Unterfunktion (A2.3.2.3-2.1) ausgegangen wird, allerdings statt (A2.3.2.3-2.2) mit

$\mathbf{G}_a(p, \zeta; r, \rho) := e^{-p \cdot \zeta} \cdot \mathbf{G}(p; r, \rho)$ und $\mathbf{G}(p; r, \rho)$ entsprechend (A2.3.2.3-1.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_a(p, \zeta; r, \rho) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho \cdot e^{-p \cdot \zeta}}{h \cdot \mathbf{J}_0(iqR) - iq \cdot \mathbf{J}_1(iqR)} \cdot \begin{cases} \mathbf{Z}_0(iqr) \cdot \mathbf{J}_0(iq\rho) & \text{für } 0 \leq \rho \leq r \leq R \\ \mathbf{J}_0(iqr) \cdot \mathbf{Z}_0(iq\rho) & \text{für } 0 \leq r \leq \rho \leq R \end{cases} \\ &= \rho \cdot e^{-p \cdot \zeta} \cdot \begin{cases} \left[\mathbf{K}_0(qr) - \frac{h \cdot \mathbf{K}_0(qR) - q \cdot \mathbf{K}_1(qR)}{h \cdot \mathbf{I}_0(qR) + q \cdot \mathbf{I}_1(qR)} \cdot \mathbf{I}_0(qr) \right] \cdot \mathbf{I}_0(q\rho) & \text{für } 0 \leq \rho \leq r \leq R \\ \left[\mathbf{K}_0(q\rho) - \frac{h \cdot \mathbf{K}_0(qR) - q \cdot \mathbf{K}_1(qR)}{h \cdot \mathbf{I}_0(qR) + q \cdot \mathbf{I}_1(qR)} \cdot \mathbf{I}_0(q\rho) \right] \cdot \mathbf{I}_0(qr) & \text{für } 0 \leq r \leq \rho \leq R; \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-1.1})$$

mit $q := \sqrt{\frac{v}{a}} \cdot p$; \mathbf{Z}_0 siehe (A2.3.1-8.2).

Anstelle der modifizierten *BESSEL*funktionen 1. und 2. Art - \mathbf{I}_j und \mathbf{K}_j - können für $p \rightarrow \infty$ bzw. $q \rightarrow \infty$ deren asymptotische Reihen, z.B. [TAU 71, A 5.15-A 5.18], verwendet werden. Bei hinreichend großem q genügt es, nur wenige der ersten Reihensummanden zu berücksichtigen und die entstehende Entwicklung geeignet abzubrechen. Begnügt man sich mit den allerersten Summanden, so entsteht:

$$\mathbf{G}_a(p, \zeta; r, \rho) \sim \frac{e^{-p \cdot \zeta}}{2q} \sqrt{\frac{\rho}{r}} \cdot \begin{cases} e^{-q(r-\rho)} - \frac{h-q}{h+q} \cdot e^{-q(2R-r-\rho)} & \text{für } 0 \leq \rho \leq r \leq R \\ e^{-q(\rho-r)} - \frac{h-q}{h+q} \cdot e^{-q(2R-r-\rho)} & \text{für } 0 \leq r \leq \rho \leq R. \end{cases} \quad (\text{A2.3.2.8-1.2})$$

Rücktransformation mit den entsprechenden Korrespondenzen, z.B. [TAU 71, C1-5.5, 7.1, 7.2] ergibt für $0 \leq \zeta \leq z$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) &\sim \frac{a}{v} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{\pi a(z-\zeta)}} \cdot \left(e^{-\frac{(r-\rho)^2 \cdot v}{4a(z-\zeta)}} + e^{-\frac{(2R-r-\rho)^2 \cdot v}{4a(z-\zeta)}} \right) - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - h \cdot e^{-h(2R-r-\rho) + h^2 \frac{a}{v}(z-\zeta)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{2R-r-\rho}{2\sqrt{\frac{a}{v}(z-\zeta)}} + h\sqrt{\frac{a}{v}(z-\zeta)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-1.3})$$

Dies stellt die asymptotische Entwicklung zur Originalfunktion (A2.3.2.3-3.2) für kleine z -Werte dar. Weiterhin läßt sich aus dieser Entwicklung (A2.3.2.8-1.3) für $z \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung des Ergebnisses [WLA 72, S.91 (32)] auch

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) &= \frac{a}{v} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{r}} \cdot (\delta(r-\rho) + \delta(2R-r-\rho)) \\ &= \frac{a}{v} \cdot \delta(r-\rho) \end{aligned}$$

für $0 \leq r, \rho \leq R$ folgern. Ein Vergleich mit der entsprechenden direkt für die Originalfunktion (A2.3.2.3-3.2) geführten Grenzwertbetrachtung ergibt damit die Beziehung

$$\frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(\frac{hR}{\mu_n}\right)^2\right] \cdot J_0^2(\mu_n)} = \delta(r-\rho) \quad \text{für } 0 \leq r, \rho \leq R, \quad (\text{A2.3.2.8-2})$$

die u.a. bei der Überprüfung der Lösungen auf Richtigkeit nützlich ist; vgl. Anhang B.

Zur Herleitung einer asymptotischen Näherungslösung der Drahttemperaturen im Ziehhol kann von der Bildfunktion (A2.3.2.3-1.2) ausgegangen werden. Sollen einfachsterweise nur konstante Start- und Randfunktionen, d.h., $\mathcal{G}_0 = \text{konst.}$ und $\mathbf{r} = h \cdot \mathcal{G}_U + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R = \text{konst.}$ sowie konstante Volumenquelle $\mathbf{q}_V = \text{konst.}$ vorliegen, so kann von der dafür bereits spezialisierten Bildfunktion (A2.3.2.5-7.2) ausgegangen werden.

Eine asymptotische Entwicklung für $z \rightarrow 0$, deren Existenz vorauszusetzen ist, läßt sich gemäß [DOE 76, Satz 33.1] über die entsprechende asymptotische Entwicklung der zugeordneten Bildfunktion für $p \rightarrow \infty$ herleiten. Unter Verwendung der halbkonvergenten Reihen der BESSELfunktionen imaginären Arguments [TAU 71, S.337, A5.15/16] kann (A2.3.2.5-7.3), d.h.,

$$\mathbf{G}(p; r, R) = \frac{J_0(iqr)}{h \cdot J_0(iqR) - iq \cdot J_1(iqR)} \quad \text{durch Division der Potenzreihen von Zähler und$$

Nenner z.B. auf folgende hinsichtlich $p \rightarrow \infty$ (bzw. $q \rightarrow \infty$) asymptotische Form gebracht werden

$$\mathbf{G}(p; r, R) \sim \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{-q(R-r)} \cdot \sum_{n=0}^N \frac{C_n(r)}{R^n \cdot q^{n+1}}, \quad r > 0 \quad (\text{A2.3.2.8-3.1})$$

mit

$$\begin{aligned} C_n(r) &= D_n(r) - \sum_{k=1}^n E_k \cdot C_{n-k}(r) \\ D_n(r) &:= \frac{((2n-1)!!)^2}{n! \cdot 8^n} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^n; \quad D_0(r) = 1 \\ E_k &:= \frac{D_k(R)}{(2k-1)^2} \cdot (8k \cdot hR - (2k-1)(2k+1)), \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-3.2})$$

wovon die ersten vier Koeffizienten explizit durch

$$C_0(r) = 1$$

$$C_1(r) = \frac{R}{8r} + \frac{3}{8} - hR$$

$$C_2(r) = \frac{9}{128} \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{3}{64} \frac{R}{r} + \frac{33}{128} - \frac{hR}{8} \frac{R}{r} - \frac{7hR}{8} + (hR)^2$$

$$\begin{aligned} C_3(r) &= \frac{75}{1024} \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{27}{1024} \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{33}{1024} \frac{R}{r} + \frac{249}{1024} - \frac{9hR}{128} \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{7hR}{64} \frac{R}{r} - \dots \\ &\dots - \frac{105hR}{128} + \frac{(hR)^2}{8} \frac{R}{r} + \frac{11(hR)^2}{8} - (hR)^3 \end{aligned}$$

gegeben sind.

Bei Benutzung entsprechender Korrespondenzen [TAU 71, Tab. C.1] wird aus (A2.3.2.5-7.2) mit (A2.3.2.8-3.1) die asymptotische Darstellung der Originalfunktion für $z \rightarrow 0$, $r > 0$ erhalten:

$$\Delta \vartheta \sim \left(h \cdot \Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\lambda} \right) \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \sum_{n=0}^{N_1} C_n(r) \cdot \frac{w^{n+1}}{R^n} \cdot \text{int}_{n+1} \text{erfc} \frac{R-r}{w} + \dots$$

$$\dots + \frac{q_V}{\lambda} \cdot \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - h \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \right) \cdot \sum_{n=0}^{N_2} C_n(r) \cdot \frac{w^{n+3}}{R^n} \cdot \text{int}_{n+3} \text{erfc} \frac{R-r}{w}$$

mit $\Delta \vartheta := \vartheta(z, r) - \vartheta_0$, $\Delta \vartheta_U := \vartheta_U - \vartheta_0$, $w := 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{v}} z$, (A2.3.2.8-3.3)

wobei die oberen Summationsindizes $N_{1,2}$ höchstens so groß zu wählen sind, daß die halbkonvergenten Reihen vor dem Glied abbrechen, dessen Betrag am kleinsten ausfällt. Die Funktionen $\text{int}_n \text{erfc}(y)$ ergeben sich durch Integration aus $\int_y^\infty \text{int}_{n-1} \text{erfc}(\xi) \cdot d\xi = \text{int}_n \text{erfc}(y)$ für

natürliche Zahlen $n = 1, 2, \dots$, wobei $\text{int}_0 \text{erfc}(y) = \text{erfc}(y) = 1 - \text{erf}(y)$ das Komplement des GAUßschen Fehlerintegrals $\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot y^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k!}$ ist. Es gilt die Rekursionsformel

$2n \cdot \text{int}_n \text{erfc}(y) = \text{int}_{n-2} \text{erfc}(y) - 2y \cdot \text{int}_{n-1} \text{erfc}(y)$, so daß sich alle $\text{int}_n \text{erfc}$ -Funktionen infolge $\text{int}_0 \text{erfc}(y) = \text{erfc}(y)$, $\text{int}_1 \text{erfc}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} - y \cdot \text{erfc}(y)$ durch die Funktionen e^{-y^2} und $\text{erfc}(y)$ ausdrücken lassen [TAU 71, (A 6.22)]. Für große y -Werte ($y > 3$) läßt sich vorteilhaft die asymptotische Reihe

$$\text{erfc}(y) \sim \frac{e^{-y^2}}{y \sqrt{\pi}} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \cdot \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot y^{2k}} \right)$$

verwenden. Weitere Einzelheiten zu diesen Funktionen sind in [TAU 71, A6.] zu finden; eine Orientierung über die Funktionsverläufe gibt Bild A2.3-2.

Die asymptotische Lösung (A2.3.2.8-3.3) ist vorzugsweise für kleinere Werte hR geeignet, während für größere Werte hR anstelle (A2.3.2.8-3.1) besser von der asymptotischen Form

$$G(p; r, R) \sim \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \frac{e^{-q(R-r)}}{q + \frac{E_1}{R}}, \quad r > 0$$

(A2.3.2.8-4.1)

für p bzw. $q \rightarrow \infty$ auszugehen ist. Damit wird für $z \rightarrow 0$, $r > 0$ aus (A2.3.2.5-7.2) die asymptotische Originalfunktion unter Verwendung der Korrespondenz [TAU 71, Tab. C.1, 7.] und der Abkürzungen

$$E_1 := hR - \frac{3}{8}, \quad u := \frac{R-r}{w} + \frac{w}{2R} E_1,$$

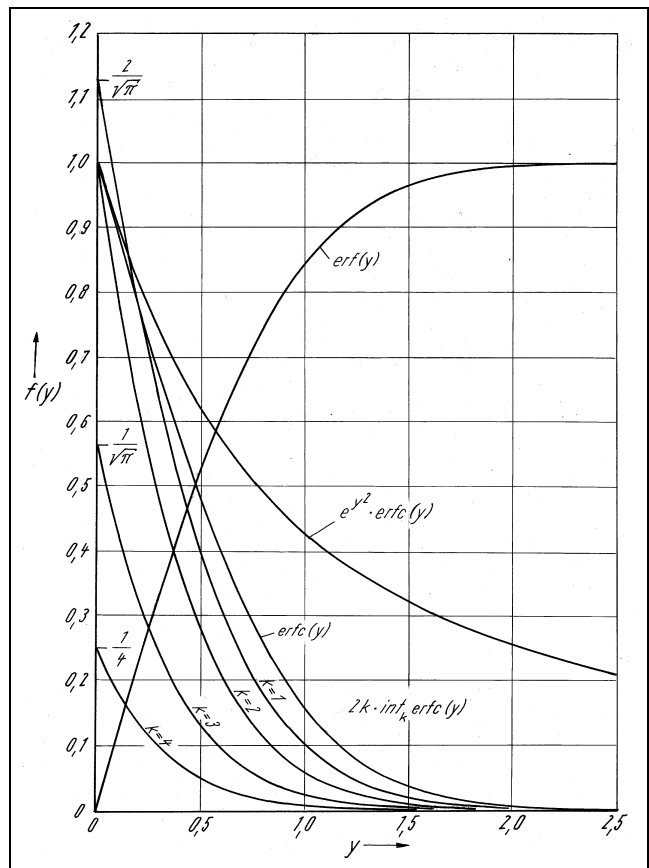


Bild A2.3-2: Fehlerintegrale (error functions)

$w := 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{v}} z$ erhalten zu

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta \sim & \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} \right) \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \frac{hR}{E_I} \cdot \left(\operatorname{erfc} \frac{R-r}{w} - e^{-\left(\frac{R-r}{w}\right)^2} \cdot e^{u^2} \cdot \operatorname{erfc}(u) \right) + \dots \\ & \dots + \frac{q_V \cdot R^2}{\lambda} \cdot \left\{ \left(\frac{w}{2R} \right)^2 + \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \frac{hR}{E_I^3} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R-r}{w}\right)^2} \cdot e^{u^2} \cdot \operatorname{erfc}(u) - \sum_{k=0}^2 \left(-\frac{w}{R} E_I \right)^k \cdot \operatorname{int}_k \operatorname{erfc} \frac{R-r}{w} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-4.2})$$

Der Bereich numerisch befriedigender Ergebnisse läßt sich für die beiden asymptotischen Lösungen größenordnungsmäßig angeben, und zwar speziell für den Drahttrand $r = R$ durch $\left(\frac{w}{2R}\right)^2 < 10^{-1}$ sowie $hR < 10^0$ für (A2.3.2.8-3.3) und $hR > 10^0$ für (A2.3.2.8-4.2), während allgemeiner für (A2.3.2.8-3.3) die Bedingung $0 \leq h \cdot w \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \operatorname{int}_1 \operatorname{erfc} \frac{R-r}{w} \ll 1$ herangezogen werden kann.

Werden als abkürzende Bezeichnungen die *FOURIER*-Zahl $\mathcal{F}\mathcal{O} := \left(\frac{w}{2R}\right)^2 \equiv \frac{az}{vR^2}$ und die *BIOT*-Zahl $\mathcal{B}\mathcal{U} := hR \equiv \frac{\alpha}{\lambda} R$ eingeführt, so wird statt (A2.3.2.8-3.3) die äquivalente Form

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta \sim & \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} \right) \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \sum_{n=0}^{N_1} C_n(r) \cdot \sqrt{(4\mathcal{F}\mathcal{O})^{n+1}} \cdot \operatorname{int}_{n+1} \operatorname{erfc} \frac{R-r}{2R\sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}}} + \dots \\ & \dots + \frac{q_V}{\lambda} \cdot \left(R^2 \cdot \mathcal{F}\mathcal{O} - \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \sum_{n=0}^{N_2} C_n(r) \cdot \sqrt{(4\mathcal{F}\mathcal{O})^{n+3}} \cdot \operatorname{int}_{n+3} \operatorname{erfc} \frac{R-r}{2R\sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}}} \right); \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-5.1})$$

mit $\Delta \vartheta := \vartheta(z, r) - \vartheta_0$, $\Delta \vartheta_U := \vartheta_U - \vartheta_0$,

die insbesondere für kleinere $\mathcal{B}\mathcal{U}$ -Werte brauchbar ist, erhalten.

Das asymptotische Verhalten der Lösungen ist besonders leicht überschaubar am Drahttrand bei $r = R$. Unter Berücksichtigung von $\operatorname{int}_n \operatorname{erfc}(0) = 2^{-n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, vgl. [TAU 71, (A 6.27)], ergibt sich aus (A2.3.2.8-5.1) als Randtemperatur $\Delta \vartheta_R := \vartheta(R, z) - \vartheta_0$:

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_R \sim & \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} \right) \cdot \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{\pi} \mathcal{F}\mathcal{O}} + \left(\frac{1}{2} - \mathcal{B}\mathcal{U} \right) \cdot \mathcal{F}\mathcal{O} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{8} - \mathcal{B}\mathcal{U} + \mathcal{B}\mathcal{U}^2 \right) \cdot \mathcal{F}\mathcal{O} \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}} + \dots \right) + \dots \\ & \dots + q_V \cdot \frac{R^2}{\lambda} \cdot \mathcal{F}\mathcal{O} \cdot \left(1 - \mathcal{B}\mathcal{U} \cdot \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \mathcal{B}\mathcal{U} \right) \cdot \mathcal{F}\mathcal{O} + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-5.2})$$

Speziell für α bzw. $\mathcal{B}\mathcal{U} \rightarrow 0$, also für adiabatische Verhältnisse, wird hieraus unmittelbar

$$\Delta \vartheta_{R_{ad.}} \sim q_R \cdot \sqrt{\frac{4z}{\pi \lambda \rho c v}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}} + \frac{2}{3} \mathcal{F}\mathcal{O} + \dots \right) + q_V \cdot \frac{z}{\rho c v}, \quad (\text{A2.3.2.8-5.3})$$

erhalten bzw. - bei hinreichend kleinen $\mathcal{F}\mathcal{O}$ -Zahlen - noch kürzer

$$\Delta \vartheta_{Rad.} \sim q_R \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{z}{\lambda \rho c v}} + q_V \cdot \frac{z}{\rho c v}. \quad (\text{A2.3.2.8-5.4})$$

Damit hat sich für diesen asymptotischen Grenzfall exakt die entsprechende Lösung des halbbunendlichen Körpers für Randbedingung 2. Art ergeben [TAU 71, (7.13)], mit der bereits KORST [KOR 48] das Ergebnis von SIEBEL und KOBITZSCH [SIE 43] verglichen hat - vgl. Kapitel A3.1.1.3.

Vollständigkeitshalber seien noch die zu (A2.3.2.8-5.1) gehörenden mittleren Temperaturen angegeben:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\vartheta} \sim & \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} \right) \cdot 2 \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \mathcal{F} \sigma \cdot \left(1 - \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{\bar{N}_1} C_n(R) \cdot \frac{\sqrt{(\mathcal{F} \sigma)^n}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}+1\right)} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{q_V \cdot R^2}{\lambda} \cdot \mathcal{F} \sigma \cdot \left((1 - \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \mathcal{F} \sigma) + (2 \mathcal{B} \dot{\nu})^2 \cdot \sum_{n=0}^{\bar{N}_2} C_n(R) \cdot \frac{\sqrt{(\mathcal{F} \sigma)^{n+2}}}{(n+5) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2}+1\right)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-6.1})$$

mit $\Delta \bar{\vartheta} := \bar{\vartheta}(z) - \vartheta_0$, $\Delta \vartheta_U := \vartheta_U - \vartheta_0$,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\vartheta} \sim & \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} \right) \cdot \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \mathcal{F} \sigma \cdot \left(1 - 2 \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{\tilde{N}_1} C_n(R) \cdot \frac{\sqrt{(\mathcal{F} \sigma)^{n+1}}}{\Gamma\left(\frac{n+5}{2}+1\right)} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{q_V \cdot R^2}{\lambda} \cdot \mathcal{F} \sigma \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \mathcal{B} \dot{\nu} \cdot \mathcal{F} \sigma \right) + (2 \mathcal{B} \dot{\nu})^2 \cdot \sum_{n=0}^{\tilde{N}_2} C_n(R) \cdot \frac{\sqrt{(\mathcal{F} \sigma)^{n+3}}}{(n+7) \cdot \Gamma\left(\frac{n+5}{2}+1\right)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.8-6.2})$$

mit $\Delta \tilde{\vartheta} := \tilde{\vartheta} - \vartheta_0$, $\Delta \vartheta_U := \vartheta_U - \vartheta_0$.

A2.3.2.9 Näherung für lange Zeiten

Zur Temperaturberechnung für die Wärmebehandlung von Drähten werden in der betrieblichen Praxis gern einfache Näherungsformeln herangezogen - z.B. [MAL 65], deren Aufstellung auf [HEI 51] zurückgeht. Diese dort speziell für $q_R = q_V = 0$ und konstante Umgebungstemperatur $\vartheta_U = konst.$ angegebenen, teilweise „mehr zufällig als logisch“ gefundenen Beziehungen - Zitat [HEI 51, S.220 oben], lassen sich sehr übersichtlich und analytisch sauber aus den weiter vorn angegebenen exakten Lösungen (A2.3.2.5-8) und (A2.3.2.6-6) herleiten. Zum Vergleich mit [MAL 65] bzw. [HEI 51, Kap.VIII.1] werde dafür jetzt wieder die zeitabhängige Form (Substitution $z/v = t$) bevorzugt, jedoch soll sofort der allgemeinere Fall $q_R \neq 0$, $q_V \neq 0$ betrachtet werden.

Es kann zunächst davon ausgegangen werden, daß es in Anbetracht der guten Konvergenz der unendlichen Reihen von (A2.3.2.5-8) und (A2.3.2.6-6) - solange die FOURIER-Zahl $\mathcal{F} \sigma := \frac{at}{R^2}$

keinen zu kleinen Wert annimmt, etwa für $\mathcal{F} \sigma > 10^0$ - näherungsweise ausreicht, wenn lediglich das erste Reihenglied berücksichtigt wird. Wird für den ersten Eigenwert die Näherungsformel (A2.3.2.7-2.3) verwendet und einfachsterweise $\xi = 1$ spezifiziert, so ergibt sich

$$\mu_1^2 \approx \left(\frac{1}{2hR} + \frac{1}{\mu_{1,\infty}^2} \right)^{-1} = 2hR \cdot \eta = \mu_{1,\infty}^2 \cdot (1 - \eta) \quad (\text{A2.3.2.9-1})$$

mit abkürzend

$$\eta := \left(1 + \frac{2hR}{\mu_{1,\infty}^2} \right)^{-1} = 1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_{1,\infty}} \right)^2. \quad (\text{A2.3.2.9-2.1})$$

Zur Berechnung der Änderung der mittleren Drahttemperatur gemäß (A2.3.2.6-6) wird damit näherungsweise

$$\bar{A}_1 := \frac{1}{\eta \cdot \left(\frac{hR}{2} + \eta \right)} \approx 1 \quad (\text{A2.3.2.9-3})$$

infolge

$$\eta \cdot \left(\frac{hR}{2} + \eta \right) = \left(1 + \frac{1}{2}hR + \frac{1}{\mu_{1,\infty}^2} (hR)^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{\mu_{1,\infty}^2} hR \right)^{-2} = 1 + \varepsilon \sim 1, \quad (\text{A2.3.2.9-4})$$

erhalten, denn für das Restglied $\varepsilon := \frac{\frac{1}{2} - 4\mu_{1,\infty}^{-2} + \mu_{1,\infty}^{-2} \cdot (1 - 4\mu_{1,\infty}^{-2}) \cdot hR}{1 + 4\mu_{1,\infty}^{-2} \cdot hR + 4\mu_{1,\infty}^{-4} \cdot (hR)^2} \cdot hR$

läßt sich $|\varepsilon| < 0,45$ abschätzen, wobei für den eingeschränkten, aber technisch wichtigen Bereich $0 \leq hR \leq 6$ sogar $|\varepsilon| < 0,1$ gilt. Somit wird gegenüber (A2.3.2.6-6) für die Änderung der mittleren Drahttemperatur die Näherungsformel

$$\Delta \bar{\vartheta} \approx \Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) - \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R}{2\alpha\eta} \right) \cdot e^{-2hR \cdot \eta \cdot \frac{at}{R^2}} \quad (\text{A2.3.2.9-5.1})$$

mit $\Delta \bar{\vartheta} := \bar{\vartheta}(t) - \vartheta_A$, $\Delta \vartheta_U := \vartheta_U - \vartheta_A$

erhalten, die für $q_R = q_V = 0$ direkt mit der entsprechenden aus [MAL 65] bzw. [HEI 51] vergleichbar ist. Im Gegensatz zu [MAL 65] bzw. [HEI 51, Kap. VIII, 1.b)], wo der Parameter τ (hier η) einem Diagramm zu entnehmen war oder auch im Vergleich zu [HEI 66], wo für η der erste Eigenwert zunächst iterativ zu berechnen ist, konnte jetzt mit (A2.3.2.9-2.1) ein geschlossener Formelausdruck gewonnen werden. Es ist klar, daß durch andere Spezifizierung von ξ in (A2.3.2.7-2.3) gegenüber (A2.3.2.9-2.1) modifizierte Parameter η entsprechend

$$\eta := \left(1 + \frac{2hR}{\mu_{1,\infty}^2} \cdot \frac{\xi + 2hR}{1 + 2hR} \right)^{-1} \quad (\text{A2.3.2.9-2.2})$$

erhalten werden. Wird in (A2.3.2.9-5.1) näherungsweise noch

$$\frac{q_V \cdot R}{2\alpha\eta} \equiv \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \cdot \frac{1}{hR \cdot \eta} \approx \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) \quad (\text{A2.3.2.9-6})$$

substituiert, so gelangt man unmittelbar zum Ergebnis

$$\Delta \bar{\vartheta} \approx \left\{ \Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) \right\} \cdot \left(1 - e^{-2hR \cdot \eta \cdot \frac{at}{R^2}} \right) \quad (\text{A2.3.2.9-5.2})$$

bzw. speziell für $0 \leq hR \ll 1$ infolge $\eta \approx 1$ zu

$$\Delta \bar{\vartheta} \sim \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R}{2\alpha} \right) \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{\alpha t}{\rho c R}} \right), \quad (\text{A2.3.2.9-5.3})$$

einer Näherung, die insbesondere bei größeren Zeiten (bzw. $t = z/v$), kleinen Durchmessern sowie bei nicht zu geringer Wärmeleitfähigkeit vorteilhaft anwendbar ist²⁸.

Während [MAL 65] bzw. [HEI 51, *Kap. VIII, 1.b*] zwar einen Formelausdruck für die Drahtoberfläche bei $r = R$ anführen, fehlt eine Näherung der r -Abhängigkeit. In [HEI 66] wird dann zwar eine Formel auch hierfür angegeben, jedoch in einer Form, die noch die *BESSEL*-Funktion enthält und bei der der erste Eigenwert iterativ aus der transzendenten Eigenwertgleichung bestimmt werden muß. Eine einfache, geschlossene Näherungslösung für alle $r \in \langle 0, R \rangle$ läßt sich jedoch auch in diesem Falle finden, wenn eine geeignete Näherung für die *BESSEL*-Funktion herangezogen wird. Für diesen Zweck erweist sich die Näherung

$$J_0(x) \approx \frac{1 - \left(\frac{x}{\mu_{1,\infty}} \right)^2}{1 + k \cdot \left(\frac{x}{\mu_{1,\infty}} \right)^2}, \quad k = 0,5 \dots 1 \quad (\text{A2.3.2.9-7})$$

wegen großer Einfachheit und hinlänglicher Genauigkeit bei kleinem Argument $x \in \langle 0, \mu_{1,\infty} \rangle$ als geeignet. Unter Beachtung von (A2.3.2.9-1), (A2.3.2.9-2.1) und (A2.3.2.9-4) wird dann wegen

$$J_0\left(\mu_1 \frac{r}{R}\right) \approx \frac{1 - (1 - \eta) \left(\frac{r}{R} \right)^2}{1 + k \cdot (1 - \eta) \left(\frac{r}{R} \right)^2}, \quad J_0(\mu_1) \approx \frac{\eta}{1 + k \cdot (1 - \eta)}$$

und $A_1 \approx \frac{1}{\left(\frac{hR}{2} + \eta \right) \cdot J_0(\mu_1)} \approx 1 + k \cdot (1 - \eta)$

unmittelbar die Lösung

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_r &\approx \Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1}{hR} \right) - \dots \\ &\dots - \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R}{2\alpha\eta} \right) \cdot [1 + k \cdot (1 - \eta)] \cdot \frac{1 - (1 - \eta) \left(\frac{r}{R} \right)^2}{1 + k \cdot (1 - \eta) \left(\frac{r}{R} \right)^2} \cdot e^{-2hR \cdot \eta \cdot \frac{\alpha t}{R^2}} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.9-8.1})$$

erhalten; $\Delta \vartheta_r := \vartheta(t, r) - \vartheta_A$. Speziell für $0 \leq hR \ll 1$ ergibt sich infolge $\eta \rightarrow 1$ die Näherungsformel

$$\Delta \vartheta_r \approx \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R}{2\alpha} \right) \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{\alpha t}{\rho c R}} \right), \quad (\text{A2.3.2.9-8.2})$$

die von der r -Koordinate unabhängig ist. Diese Tatsache und die Übereinstimmung mit der Näherung für die mittlere Drahttemperatur (A2.3.2.9-5.3) bringen zum Ausdruck, daß der Draht

²⁸ Für technische Belange ist i.allg. die Bedingung $\mathcal{B}\mathcal{U} := hR \leq 0,25$ ausreichend genau [STE 87, *Kap. 4.3.4.3*].

für *BIOT*-Zahlen $0 \leq hR \ll 1$ als „wärmetechnisch dünnwandig“ angesehen werden darf, weil Temperaturunterschiede in radialer Richtung praktisch verschwinden.

Eine Näherungsformel für den maximalen Temperaturunterschied über den Drahtquerschnitt $\Delta \hat{\vartheta} := \vartheta(t, R) - \vartheta(t, 0)$ ergibt sich aus (A2.3.2.9-8.1) unmittelbar zu

$$\Delta \hat{\vartheta} \approx \left(\Delta \vartheta_U + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R}{2\alpha\eta} \right) \cdot (1+k)(1-\eta) \cdot e^{-2hR \cdot \eta \cdot \frac{at}{R^2}} - \frac{q_V \cdot R^2}{4\lambda}. \quad (\text{A2.3.2.9-9.1})$$

Unter Einbeziehung der mittleren Drahttemperatur $\bar{\vartheta}$ gemäß (A2.3.2.9-5.1) läßt sich auch

$$\Delta \hat{\vartheta} \approx \left(\vartheta_U - \bar{\vartheta} + \frac{q_R}{\alpha} + \frac{q_V \cdot R^2}{2\lambda} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) \right) \cdot (1+k)(1-\eta) - \frac{q_V \cdot R^2}{4\lambda} \quad (\text{A2.3.2.9-9.2})$$

angeben.

Wird der Korrekturfaktor $k = 1$ gesetzt, so bestätigen (A2.3.2.9-8.1) für $r = R$ und (A2.3.2.9-9) - jeweils speziell für $q_R = q_V = 0$ - die aus [HEI 51] bzw. [MAL 65] bekannten Näherungsformeln. Darüberhinaus berücksichtigen die hier angegebenen Formeln zusätzlich Rand- und Volumenwärmequellen. Mit (A2.3.2.9-8.1) schließlich wird eine geschlossene Näherungsformel für die radiale Temperaturverteilung angegeben. Eine Verbesserung der numerischen Genauigkeit von (A2.3.2.9-8.1) kann erreicht werden, wenn der Korrekturfaktor als Funktion der Radiuskoordinate gemäß $k := \frac{1}{2} \left(1 + (r/R)^2 \right)$ eingeführt wird. In den Formeln für den größten Temperaturunterschied (A2.3.2.9-9) ist der Korrekturfaktor mit dem Wert $k := 1/2$ einzusetzen.

Hinzuweisen ist noch auf den bemerkenswerten Umstand, daß sich eine weitere Erhöhung der Genauigkeit erreichen läßt durch geeignete Überlagerung des asymptotischen Kurz- und Langzeitverhaltens von äußerem und fiktivem inneren Wärmeübergang [VDI 94, Ec 9]. So vermindert z.B. die Substitution des Ausdrucks $hR \cdot \eta$ durch $(1/\mathcal{B}\dot{\nu} + 1/\text{Nu}(\mathcal{F}\sigma))$ im Exponenten der mittleren Temperatur (A2.3.2.9-5) die Abweichungen gegenüber der exakten Lösung (A2.3.2.6-6) auf weniger als $\pm 2\%$; $\text{Nu} := \sqrt{\text{Nu}_\infty^2 - b^2 + (\text{Nu}_0 + b)^2}$, $b = 0,2$, $\text{Nu}_\infty = (4 + \mathcal{B}\dot{\nu}) / (1 + 2\mathcal{B}\dot{\nu} / \mu_{1,\infty}^2)$, $\text{Nu}_0 = (\sqrt{\pi} + 10\mathcal{B}\dot{\nu} \sqrt{\mathcal{F}\sigma}) / (\sqrt{\mathcal{F}\sigma} + 5\sqrt{\pi} \mathcal{B}\dot{\nu} \cdot \mathcal{F}\sigma)$.

A2.3.2.10 Nichtlineare Randbedingungen

Die bisher angegebenen Lösungen und Näherungslösungen wurden für lineare Randbedingungen (A2.3.1-2) und (A2.3.1-5) hergeleitet, wodurch deren Anwendbarkeit strenggenommen auf konvektive Wärmeübertragungsverhältnisse beschränkt ist²⁹.

Kann der Wärmestrahlungsanteil infolge der bei Wärmebehandlungsprozessen auftretenden höheren Temperaturen jedoch nicht mehr vernachlässigt werden, so sind anstelle linearer Randbedingungen nichtlineare heranzuziehen. So tritt am Zylindermantel bei $r = R$ z.B. an Stelle der linearen Randbedingung (A2.3.1-5) unter Berücksichtigung des Gesetzes von STEFAN-BOLTZMANN [VDI 94, Kap. A-2.3] die nichtlineare Randbedingung:

²⁹ Leider lassen sich analytisch geschlossene Lösungen bei Vorliegen nichtlinearer Randbedingungen auf Grund unüberwindlicher mathematischer Schwierigkeiten i.allg. nur in Spezialfällen herstellen, wie z.B. von [TAO 81] für den halbbunendlichen Körper gezeigt wurde. Eine asymptotische Lösung wird von [NES 89] angegeben, weitere spezielle Beispiele wurden in [MIT 75] untersucht.

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R) = -h \cdot \mathcal{G}(t, z, R) + \mathbf{r}(t, z) + \frac{C}{\lambda} \left(\Theta_U^4(t, z) - \Theta^4(t, z, R) \right) \quad (\text{A2.3.2.10-1})$$

mit der vorzugebenden Randfunktion $\mathbf{r}(t, z) := h \cdot \mathcal{G}_U(t, z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(t, z)$;

im Gegensatz zum bisherigen Gebrauch, wo mit dem Symbol Θ jeweils die in den *LAPLACE*-Bildbereich transformierten Temperaturen bezeichnet worden waren, werden im weiteren - sofern nicht anders vermerkt - die thermodynamischen bzw. absoluten Temperaturen mit Θ bezeichnet.

Der Strahlungsaustauschkoeffizient C hängt nicht nur vom Emissionsvermögen des Vollzylinders selbst ab, sondern auch davon, welche geometrische Anordnung er im umgebenden Raum einnimmt sowie von den Emissionsbedingungen [VDI 94, Kap. Ka]. Damit wird insbesondere deutlich, daß der Strahlungsaustauschkoeffizient - wie der Wärmeübergangskoeffizient - sowohl zeit- als auch ortsabhängig sein kann, genau dann, wenn sich etwas an der gegenseitigen Anordnung von Vollzylinder (bzw. Draht) zu umgebendem Raum zeitlich oder örtlich ändert. Für den Wärmeaustausch eines Drahtes mit seiner Umgebung sind insbesondere zwei Situationen interessant:

- Der Draht mit dem Radius $R = d/2$ befindet sich konzentrisch in einem zylindrischen Hohlraum (Rohr) mit dem Radius R_I
- Der Draht befindet sich in einem - verglichen mit seinem Durchmesser - sehr großen Raum

Unter der Voraussetzung, daß technische Oberflächen als graue Strahler betrachtet werden dürfen³⁰, wird in [VDI 94, Kap. Ka-2.1] für die erste Situation (Draht im Rohr) die Beziehung

$$C = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{A}{A_I} \left(\frac{1}{\varepsilon_I} - 1 \right)}, \quad A = 2\pi R \cdot L, \quad A_I = 2\pi R_I \cdot L \quad (\text{A2.3.2.10-2.1})$$

angegeben, woraus mit über alle Grenzen wachsendem Hohlzylinderhalbmesser $R_I \rightarrow \infty$ und damit infolge $A_I \rightarrow \infty$ der Strahlungsaustauschkoeffizient für die zweite Situation (Draht im großen - unbegrenzten - Raum) erhalten wird:

$$C = \varepsilon \cdot \sigma ; \quad (\text{A2.3.2.10-2.2})$$

der Koeffizient $\sigma \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ bezeichnet die *STEFAN-BOLTZMANN*-Konstante, während ε und ε_I die Emissionsgrade von Draht und Raum bzw. Rohr bezeichnen.

Damit die für lineare Randbedingung (A2.3.1-5) hergeleiteten Lösungen auch bei Berücksichtigung von Wärmestrahlung näherungsweise genutzt werden können, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wird die Randbedingung (A2.3.2.10-1) linearisiert, also auf eine Form (A2.3.1-5) zurückgeführt, oder aber der Wärmeübergangskoeffizient, der bislang ausschließlich dem konvektiven Anteil am Gesamtwärmeübergang vorbehalten war, wird dahingehend modifiziert, daß der nichtlinearen Randbedingung (A2.3.2.10-1) „bestmöglich“ entsprochen wird.

Eine Linearisierung von (A2.3.2.10-1) läßt sich umso leichter rechtfertigen, je kleiner der Unterschied zwischen der Randtemperatur $\mathcal{G}(t, z, R)$ und einer im interessierenden t, z -Intervall geeignet zu wählenden Temperatur \mathcal{G}_{Rm} gemacht werden kann, d.h., je kleiner die Differenz $\Delta \mathcal{G}_R(t, z) = \mathcal{G}(t, z, R) - \mathcal{G}_{Rm}$ wird. Denn dann läßt sich umgekehrt die Randtemperatur in Abhän-

³⁰ Graue Strahler absorbieren und emittieren definitionsgemäß bei allen Wellenlängen den jeweils selben Bruchteil, was auf technische Oberflächen näherungsweise zutrifft.

gigkeit der Temperaturänderung $\Delta \vartheta_R(t,z)$, also als $\vartheta(t,z,R) = \vartheta_{Rm} + \Delta \vartheta_R(t,z)$ darstellen und die 4. Potenz der Randtemperatur aus (A2.3.2.10-1) kann in eine Potenzreihe

$$\begin{aligned} \Theta^4(t,z,R) &= (\vartheta(t,z,R) + \Theta_C)^4 = (\vartheta_{Rm} + \Theta_C + \Delta \vartheta_R(t,z))^4 = (\Theta_{Rm} + \Delta \vartheta_R(t,z))^4 \\ &= \Theta_{Rm}^4 + 4 \cdot \Theta_{Rm}^3 \cdot \Delta \vartheta_R + 6 \cdot \Theta_{Rm}^2 \cdot \Delta \vartheta_R^2 + 4 \cdot \Theta_{Rm} \cdot \Delta \vartheta_R^3 + \Delta \vartheta_R^4 \end{aligned}$$

entwickelt werden³¹. Der gesuchte Näherungsausdruck liegt vor, wenn nach dem linearen $\Delta \vartheta$ -Glied abgebrochen wird:

$$\begin{aligned} \Theta^4(t,z,R) &\approx \Theta_{Rm}^4 + 4 \Theta_{Rm}^3 \cdot \Delta \vartheta_R(t,z) \\ &\approx (\Theta_{Rm} - 4 \vartheta_{Rm}) \cdot \Theta_{Rm}^3 + 4 \Theta_{Rm}^3 \cdot \vartheta(t,z,R). \end{aligned} \quad (\text{A2.3.2.10-3})$$

Nach Einsetzen der Näherung (A2.3.2.10-3) in (A2.3.2.10-1) führt das wieder auf eine Randbedingung der Form (A2.3.1-5), bei der lediglich Randfunktion ϑ und Koeffizient h modifiziert auftreten:

$$\boxed{\vartheta(t,z) := \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_U(t,z) + \frac{1}{\lambda} q_R(t,z) + \frac{C}{\lambda} \cdot \left\{ \Theta_U^4(t,z) + 3 \left(\Theta_{Rm} - \frac{4}{3} \Theta_C \right) \cdot \Theta_{Rm}^3 \right\}} \quad (\text{A2.3.2.10-4.1})$$

$$\boxed{h := \frac{\alpha}{\lambda} + 4 \frac{C}{\lambda} \cdot \Theta_{Rm}^3} \quad (\text{A2.3.2.10-4.2})$$

Sind sowohl der Wärmeübergangskoeffizient α als auch der Strahlungsaustauschkoeffizient C zeit- und ortsunabhängig, womit unmittelbar $h = konst.$ vorliegt, so lassen sich alle für eine lineare Randbedingung (A2.3.1-5) angegebenen Lösungen mit (A2.3.2.10-4) näherungsweise auch für die nichtlineare Randbedingung (A2.3.2.10-1) direkt weiterverwenden. Wenn dagegen eine Abhängigkeit $h = h(t,z) \neq konst.$ besteht, die wesentlich ist und deshalb nicht vernachlässigt werden kann, so muß ein iteratives Berechnungsverfahren herangezogen werden, wie es am Beispiel zeit- und ortsabhängiger Wärmeübergangskoeffizienten für den Hohlzylinder im Kapitel A2.4.3.2 beschrieben wird.

Für die Qualität der Näherung letztlich entscheidend ist das Einhalten der Bedingung

$$\left| \Delta \vartheta_R(t,z) / \Theta_{Rm} \right| \ll 1. \quad (\text{A2.3.2.10-5})$$

Die Minimierung von $\Delta \vartheta_R(t,z) = \vartheta(t,z,R) - \vartheta_{Rm}$ im quadratischen Mittel würde offensichtlich

erreicht, wenn für ϑ_{Rm} der integrale Mittelwert $\vartheta_{Rm} = \frac{1}{\Delta t \cdot \Delta z} \cdot \int_{(\Delta t)} \int_{(\Delta z)} \vartheta(\tau, \zeta, R) \cdot d\zeta d\tau$

Verwendung fände, was jedoch an der mangelnden Kenntnis des Randtemperaturverlaufs, für dessen Berechnung dieser Mittelwert ja ebenfalls vorauszusetzen wäre, zunächst scheitert. Mittels sukzessiver Approximation ließe sich ϑ_{Rm} zwar ermitteln, jedoch kann der rechentechnische Aufwand vermieden werden, wenn ersatzweise die Mittelwerte der Anfangs- oder auch Starttemperaturen des Randes angenommen werden, so daß - je nach Sachlage -

³¹ Es werde hier vereinbart, daß alle mit ϑ bezeichneten Temperaturen *CELSIUS*-Temperaturen sind, womit $\Theta = \Theta_C + \vartheta$ mit $\Theta_C = 273,15 \text{ K}$ festliegt.

entweder

$$\mathcal{G}_{Rm} := \mathcal{G}_{Rm}^{(A)} = \frac{1}{\Delta z} \int_{(\Delta z)} \mathcal{G}_A(\zeta, R) d\zeta \quad \text{oder} \quad \mathcal{G}_{Rm} := \mathcal{G}_{Rm}^{(0)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(\Delta t)} \mathcal{G}(\tau, R) d\tau$$

oder auch

$$\mathcal{G}_{Rm} := \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{Rm}^{(A)} + \mathcal{G}_{Rm}^{(0)} \right)$$

Verwendung finden - vgl. auch [HEN 80].

Entfernt sich die Randtemperatur mit wachsenden Zeiten oder mit axial zunehmender Entfernung zu stark von den Anfangs- oder Starttemperaturen und damit zu stark von \mathcal{G}_{Rm} , so daß die Bedingung (A2.3.2.10-5) immer schlechter erfüllt wird, so sollte die Berechnung in hinreichend kleinen Zeitschritten vorgenommen oder - wie im Falle vernachlässigbarer Wärmeleitung im in Achsrichtung bewegten Vollzylinder - in entsprechend kleine Achsabschnitte unterteilt werden.

Ist eine Linearisierung der Randbedingung (A2.3.2.10-1) nicht möglich, so kann ein aus Konvektions- und Strahlungsanteil zusammengesetzter Wärmeübergangskoeffizient gebildet werden, wie für wärmetechnisch dünnwandiges Wärmgut in Kapitel A2.3.3.2.3.2 gezeigt wird.

A2.3.3 Wärmetechnisch dünnwandiges Wärmgut

Vom numerischen Standpunkt aus sind die bisher abgeleiteten Temperaturfunktionen auch im Falle wärmetechnisch dünnwandigen Wärmgutes, also bei vernachlässigbar kleinem Temperaturgradient entlang wenigstens einer Körperabmessung, prinzipiell anwendbar. Es lassen sich jedoch auch analytisch geschlossene Näherungslösungen gewinnen, wobei sogar nichtlineare Randbedingungen und damit Strahlungsaustausch explizit berücksichtigt werden können. Diese Näherungslösungen sind für Wärmgut, das als wärmetechnisch dünnwandig betrachtet werden kann, weit vorteilhafter anzuwenden als die exakten, dafür aber deutlich aufwendigeren Lösungsausdrücke, weshalb diesen spezifischen Lösungen hier ein separates Kapitel vorbehalten ist.

A2.3.3.1 Temperaturmodell

Es wird vereinfachend zunächst davon ausgegangen, daß die Randbedingungen so sind, daß Wärmeleitung in Achsrichtung des strangförmigen Wärmgutes vernachlässigt werden darf³². Weiterhin sollen wiederum nur solche Bedingungen betrachtet werden, bei denen Wärmeleitung weder in Umfangsrichtung von Hohl- oder Vollzylinder (Rohr oder Draht) noch in Breitenrichtung (bei breitem) Band nennenswert stattfindet, weshalb sie bei der mathematischen Betrachtung unberücksichtigt bleiben kann.

Setzt man in Anlehnung an die Feststellung im Anschluß an Gleichung (A2.3.2.9-8.2) voraus, daß es sich hinsichtlich der verbleibenden Körperrichtung (Radius- oder Dickenkoordinate) um wärmetechnisch dünnwandige Verhältnisse, d.h., um BIOT-Zahlen $Biot < 0,25$ handelt, so verschwinden lokale Temperaturunterschiede in dieser Körperdimension, womit lokale und mittlere Temperaturen in dieser Richtung praktisch zusammenfallen. Werden also solche Bedingungen von vornherein vorausgesetzt, so lassen sich die Temperaturverhältnisse bereits aus den Wärmebilanzen an den Körperoberflächen berechnen oder aber herleiten ausgehend von der über diese Körperdimension(en) gemittelten Wärmeleitungsgleichung - ein Weg der nachfolgend bevorzugt wird. Das hat auch den Vorteil, die Konsistenz und Geschlossenheit des thermischen Modells insgesamt - im Sinne der in der Zielstellung (Kapitel 2.1) vorgegebenen Aufgabenstellung - deutlicher hervortreten zu lassen.

A2.3.3.1.1 Mittelung

Es sollen hier neben den zylindersymmetrischen Querschnitten von Draht und Rohr gleichsam jene von „breitem“ Band (*Einfluß nur von Bandober- und -unterseite, nicht von Bandrändern*) und von „schmalem“ Band (bzw. Rechkantdraht) gemittelte Temperaturen interessieren. Diese Geometrien lassen sich ohne nennenswerten Mehraufwand recht übersichtlich parallel behandeln.

Eine Ortsabhängigkeit berücksichtigende partielle Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung ist - in Abhängigkeit von der Form des LAPLACE-Operators - hierfür geeignet

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \Delta \vartheta + \frac{q_V}{\rho \cdot c}, \quad \Delta \vartheta := \begin{cases} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \equiv \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \end{cases} \quad (\text{A2.3.3.1})$$

Sie geht durch lokale Mittelwertbildung - je nach Form des die Körpergeometrie berücksichtigenden LAPLACESchen Operators durch Integration über den Querschnitt (bzw. charakteristische Abmessung(en)) - in eine nur noch gewöhnliche, allein zeitabhängige Differentialgleichung über.

³² Bei axial fortbewegtem Wärmgut z.B. ist das gegeben, wenn etwa die Bedingung $\frac{v \cdot d}{a} \gg 1$ eingehalten wird, wobei mit v die Durchlaufgeschwindigkeit des Wärmgutes durch die Wärmebehandlungsanlage, mit d die Dickenabmessung und mit a die Temperaturleitfähigkeit des Wärmgutes bezeichnet sind.

Diese Differentialgleichungen zur Berechnung der über den Strang- (Rohr-, Draht-, Band-, Rechkant-) querschnitt gemittelten, zeitabhängigen Temperaturen $\bar{\vartheta}(t)$ lauten

- im **ebenen** Fall für $(-\frac{d}{2} = -X \leq x \leq X = \frac{d}{2})$, wenn d die Dicke eines (hinreichend langen und breiten) Bandes bzw. Bleches ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\vartheta}(t) &= \frac{a}{2X} \cdot \int_{-X}^X \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho \cdot c} \\ &= \frac{a}{2X} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta(X, t)}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta(-X, t)}{\partial x} \right) + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho c} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-1.1})$$

bzw. speziell bei symmetrischen Randbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\vartheta}(t) = \frac{a}{X} \cdot \frac{\partial \vartheta(X, t)}{\partial x} + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho c} \quad (\text{A2.3.3.1-1.2})$$

- im **zylindersymmetrischen** Fall für $(\frac{d_1}{2} = R_1 \leq r \leq R_2 = \frac{d_2}{2})$, wenn d_1 und d_2 Innen- und Außendurchmesser eines Rohres (bzw. langen Hohlzylinders) sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\vartheta}(t) &= \frac{2\pi}{\Delta A} \cdot a \int_{R_1}^{R_2} r \cdot \vartheta(t, r) \cdot dr + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho c}; \quad \Delta A = \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \\ &= 2 \frac{a}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left(R_2 \frac{\partial \vartheta(R_2, t)}{\partial r} - R_1 \frac{\partial \vartheta(R_1, t)}{\partial r} \right) + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho c} \quad ; \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-2.1})$$

speziell für $d_1 = R_1 = 0$ folgt mit $(0 \leq r \leq R = \frac{d}{2})$, wobei d der Durchmesser eines Drahtes (bzw. entsprechend langen Vollzylinders) ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\vartheta}(t) = 2 \frac{a}{R} \cdot \frac{\partial \vartheta(R, t)}{\partial r} + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho c} \quad (\text{A2.3.3.1-2.2})$$

- im **prismatisch-rechtkantigen** Fall für $(-\frac{d_x}{2} = -X \leq x \leq X = \frac{d_x}{2})$,

$(-\frac{d_y}{2} = -Y \leq y \leq Y = \frac{d_y}{2})$, wenn d_x und d_y die Seitenlängen des Rechteckquerschnitts eines „hinreichend langen“ Profildrahtes sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\vartheta}(t) &= \frac{a}{2X \cdot 2Y} \cdot \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) dx dy + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho \cdot c} \\ &= \frac{a}{2X} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta(X, t)}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta(-X, t)}{\partial x} \right) + \frac{a}{2Y} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta(Y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta(-Y, t)}{\partial y} \right) + \frac{\bar{q}_V(t)}{\rho \cdot c} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-3})$$

Im Stranginneren ggf. auftretende Wärmequellen sind als Mittelwerte über den Querschnitt zu berücksichtigen:

- für das ebene Problem

$$\bar{q}_V(t) = \frac{1}{2X} \cdot \int_{-X}^X q_V(x, t) \cdot dx, \quad (\text{A2.3.3.1-4.1})$$

- für das zylindersymmetrische Problem
im Falle des Rohres bzw. Hohlzylinders

$$\bar{q}_V(t) = \frac{2\pi}{\Delta A} \cdot \int_{R_I}^{R_2} r \cdot \mathbf{q}_V(r,t) \cdot dr, \quad \Delta A = \pi \cdot (R_2^2 - R_I^2) \quad (\text{A2.3.3.1-4.2.1})$$

im Falle des Drahtes bzw. Vollzylinders

$$\bar{q}_V(t) = \frac{2\pi}{A_R} \cdot \int_0^R r \cdot \mathbf{q}_V(r,t) \cdot dr, \quad A_R = \pi \cdot R^2. \quad (\text{A2.3.3.1-4.2.2})$$

- und im Falle des Rechteckdrahtes

$$\bar{q}_V(t) = \frac{1}{A} \cdot \int_{-x}^x \int_{-y}^y \bar{q}_V(x,y,t) \cdot dx dy, \quad A = 4XY \equiv d_x \cdot d_y. \quad (\text{A2.3.3.1-4.3})$$

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung (A2.3.3.1-1), (A2.3.3.1-2) und (A2.3.3.1-3) lassen sich ohne nähere Spezifizierung der Randbedingungen noch nicht explizit integrieren.

A2.3.3.1.2 Randbedingungen

Konvektion und Wärmestrahlung gleichermaßen berücksichtigende Randbedingungen - vgl. (A2.3.2.10-1) - haben für das ebene Problem (A2.3.3.1-1.1) an den beiden Rändern ($j = 1, 2$)

bei $x = x_j = (-1)^j \cdot X$ die folgende Gestalt³³:

$$\begin{aligned} (-1)^j \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \vartheta((-1)^j \cdot X, t)}{\partial x} &= \alpha_j(t) \cdot \left(\vartheta_{UK_j}(t) - \vartheta((-1)^j \cdot X, t) \right) + \dots \\ &\dots + C_j(t) \cdot \left[\left(\vartheta_{US_j}(t) \right)^4 - \left(\vartheta((-1)^j \cdot X, t) \right)^4 \right], \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-5.1})$$

wenn α_j die Wärmeübergangskoeffizienten (Konvektion), C_j die Strahlungsaustauschkoeffizienten sowie ϑ_{UK_j} und ϑ_{US_j} die Umgebungstemperaturen (bezogen auf *CELSIUS*- bzw. *KELVIN*-Skala) darstellen. Der erste Summand der Gleichung (A2.3.3.1-5.1) vertritt den Konvektions-, der zweite den Strahlungsanteil, wobei sich die Umgebungstemperaturen durchaus voneinander unterscheiden dürfen³⁴.

Für das zylindersymmetrische Problem (A2.3.3.1-2) lauten die entsprechenden Randbedingungen auf innerer und äußerer Mantelfläche, d.h., bei $r = R_j$ mit $j = 1$ oder 2 :

$$(-1)^j \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \vartheta(R_j, t)}{\partial r} = \alpha_j(t) \cdot \left(\vartheta_{UK_j}(t) - \vartheta(R_j, t) \right) + C_j(t) \cdot \left[\left(\vartheta_{US_j}(t) \right)^4 - \left(\vartheta(R_j, t) \right)^4 \right], \quad (\text{A2.3.3.1-5.2.1})$$

³³ Da Randquellen q_R im Zusammenhang mit Anwendungen zu wärmetechnisch dünnwandigem Wärmgut kaum von Interesse sein dürften, seien sie hier von vornherein außer Betracht gelassen.

³⁴ Strahlungshintergrund und "Konvektionsmedium" können unterschiedliche Temperaturen aufweisen.

bzw. speziell beim Vollzylinder auf dem Außenmantel bei $r = R$:

$$\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(R, t)}{\partial r} = \alpha(t) \cdot (\mathcal{G}_{UK}(t) - \mathcal{G}(R, t)) + C(t) \cdot \left((\Theta_{US}(t))^4 - (\Theta(R, t))^4 \right). \quad (\text{A2.3.3.1-5.2.2})$$

Bei einem Draht/Stab mit Rechteckprofil (A2.3.3.1-3) lauten die Randbedingungen, wiederum als Überlagerung von Konvektion und Wärmestrahlung formuliert, jeweils mit $j = 1$ und 2:

- bei $x = x_j = (-1)^j \cdot X$:

$$\begin{aligned} (-1)^j \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{G}((-1)^j \cdot X, t)}{\partial x} &= \alpha_{Xj}(t) \cdot \left(\mathcal{G}_{UKXj}(t) - \mathcal{G}((-1)^j \cdot X, t) \right) + \dots \\ &\dots + C_{Xj}(t) \cdot \left[(\Theta_{USXj}(t))^4 - (\Theta((-1)^j \cdot X, t))^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-5.3.1})$$

- bei $y = y_j = (-1)^j \cdot Y$:

$$\begin{aligned} (-1)^j \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{G}((-1)^j \cdot Y, t)}{\partial y} &= \alpha_{Yj}(t) \cdot \left(\mathcal{G}_{UKYj}(t) - \mathcal{G}((-1)^j \cdot Y, t) \right) + \dots \\ &\dots + C_{Yj}(t) \cdot \left[(\Theta_{USYj}(t))^4 - (\Theta((-1)^j \cdot Y, t))^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-5.3.2})$$

Infolge der Voraussetzung, daß sich die Betrachtungen hier ausschließlich auf wärmetechnisch dünnwandiges Wärmgut beschränken, darf jetzt vereinfachend angenommen werden, daß in den rechten Seiten der Randbedingungen (A2.3.3.1-5) die Randtemperaturen näherungsweise durch die jeweils mittleren Temperaturen ersetzt werden können, d.h. es wird $\mathcal{G}((-1)^j \cdot X, t) \cong \bar{\mathcal{G}}(t)$, $\mathcal{G}((-1)^j \cdot Y, t) \cong \bar{\mathcal{G}}(t)$ und $\mathcal{G}(R_j, t) \cong \bar{\mathcal{G}}(t)$ bzw. $\mathcal{G}(R, t) \cong \bar{\mathcal{G}}(t)$ angesetzt³⁵.

A2.3.3.1.3 Näherungsdifferentialgleichung

Mit o.g. Näherungen und Vereinfachungen wird entsprechend (A2.3.3.1-1) bis (A2.3.3.1-3) und den entsprechenden Randbedingungen (A2.3.3.1-5) für die über den Strangquerschnitt gemittelte Temperatur $\bar{\mathcal{G}}(t)$ bzw. $\bar{\Theta}(t)$ eine gewöhnliche, nichtlineare und inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten erhalten:

$$\boxed{\bar{\Theta}' + \frac{C(t)}{\varpi} \cdot \bar{\Theta}^4 + \frac{\alpha(t)}{\varpi} \cdot \bar{\Theta} = f(t)}. \quad (\text{A2.3.3.1-6})$$

Die auf die Wärmeübertragungsfläche bezogene Wärmekapazität ϖ und die "Störfunktion" $f(t)$ sind körper- bzw. querschnittsabhängig gegeben als:

- **ebener Fall**

$$\begin{aligned} \varpi &:= \rho \cdot c \cdot X \equiv \rho \cdot c \cdot \frac{d}{2}, & f(t) &:= \frac{1}{\varpi} \cdot \varphi^4(t); \\ \text{mit } \varphi^4(t) &:= \frac{d}{2} \cdot \bar{q}_V(t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^2 (\alpha_j(t) \cdot \Theta_{UKj}(t) + C_j(t) \cdot \Theta_{USj}(t)), \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-7})$$

³⁵ Diese Annahme ist bei $BIOT$ -Zahlen im Bereich $0 \leq \mathcal{B}i \ll 1$ gerechtfertigt. Praktisch liegen wärmetechnisch dünnwandige Verhältnisse bereits vor, wenn das Kriterium $\mathcal{B}i < 0,25$ eingehalten ist [STE 87, Kap. 4.3.4.3].

wobei in (A2.3.3.1-6) die Mittelwerte der Wärmeübergangs- bzw. Strahlungsaustauschkoeffizienten aus beiden Bandoberflächen, d.h. $\alpha(t) := \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1(t) + \alpha_2(t))$ und $C(t) := \frac{1}{2} \cdot (C_1(t) + C_2(t))$, sowie in (A2.3.3.1-7) die Wärmequellen \bar{q}_V nach (A2.3.3.1-4.1) einzusetzen sind.

- *zylindersymmetrischer Fall*

beim Hohlzylinder bzw. Rohr:

$$\begin{aligned} \varpi &:= \frac{\rho \cdot c}{2} (R_2 - R_1), & f(t) &:= \frac{1}{\varpi} \cdot \varphi^4(t); \\ \varphi^4(t) &:= \frac{R_2 - R_1}{2} \cdot \bar{q}_V(t) + \sum_{j=1}^2 \frac{R_j}{R_1 + R_2} \cdot (\alpha_j(t) \cdot \Theta_{UK_j}(t) + C_j(t) \cdot \Theta_{US_j}^4(t)) \\ \alpha(t) &:= \frac{R_1 \alpha_1(t) + R_2 \alpha_2(t)}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad C(t) := \frac{R_1 C_1(t) + R_2 C_2(t)}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-8.1})$$

und \bar{q}_V nach (A2.3.3.1-4.2.1)

sowie speziell beim Vollzylinder bzw. Draht mit $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow R$:

$$\begin{aligned} \varpi &:= \frac{\rho \cdot c \cdot R}{2}, & f(t) &:= \frac{1}{\varpi} \cdot \varphi^4(t); \\ \text{mit} \quad \varphi^4(t) &:= \frac{R}{2} \cdot \bar{q}_V(t) + \alpha(t) \cdot \Theta_{UK}(t) + C(t) \cdot \Theta_{US}^4(t) \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-8.2})$$

und \bar{q}_V nach (A2.3.3.1-4.2.2)

- *prismatisch-rechteckiger Fall*

$$\begin{aligned} \varpi &:= \rho c \sqrt{XY} \equiv \frac{\rho c}{2} \sqrt{d_X d_Y}, & f(t) &:= \frac{1}{\varpi} \cdot \varphi^4(t) \quad \text{mit} \\ \varphi^4(t) &:= \frac{1}{2\sqrt{d_X d_Y}} \cdot \left\{ d_X d_Y \cdot \bar{q}_V(t) + \left(\alpha_{X_1}(t) \cdot \Theta_{UK_{X_1}}(t) + \alpha_{X_2}(t) \cdot \Theta_{UK_{X_2}}(t) \right) \cdot d_Y + \dots \right. \\ & \quad \dots + \left(\alpha_{Y_1}(t) \cdot \Theta_{UK_{Y_1}}(t) + \alpha_{Y_2}(t) \cdot \Theta_{UK_{Y_2}}(t) \right) \cdot d_X + \dots \\ & \quad \dots + \left(C_{X_1}(t) \cdot \Theta_{US_{X_1}}^4(t) + C_{X_2}(t) \cdot \Theta_{US_{X_2}}^4(t) \right) \cdot d_Y + \dots \\ & \quad \left. \dots + \left(C_{Y_1}(t) \cdot \Theta_{US_{Y_1}}^4(t) + C_{Y_2}(t) \cdot \Theta_{US_{Y_2}}^4(t) \right) \cdot d_X \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.1-9})$$

mit den effektiven Wärme- und Strahlungsübergängen

$$\begin{aligned} \alpha(t) &:= \frac{(\alpha_{X_1}(t) + \alpha_{X_2}(t)) \cdot d_Y + (\alpha_{Y_1}(t) + \alpha_{Y_2}(t)) \cdot d_X}{2\sqrt{d_X d_Y}} \\ C(t) &:= \frac{(C_{X_1}(t) + C_{X_2}(t)) \cdot d_Y + (C_{Y_1}(t) + C_{Y_2}(t)) \cdot d_X}{2\sqrt{d_X d_Y}} \end{aligned}$$

und den Quellen \bar{q}_V nach (A2.3.3.1-4.3).

Hiermit und mit der Dgl. (A2.3.3.1-6) liegt das in Aussicht gestellte, entsprechend vereinfachte Temperaturmodell für die verschiedenen Stab- bzw. Drahtprofile vollständig vor. Diese nichtlineare Differentialgleichung lässt sich mit entsprechender Software rein numerisch lösen. Unter gewissen Einschränkungen sind aber auch analytisch-geschlossene Lösungen zu gewinnen.

A2.3.3.2 Analytische Lösungen

Auf der Grundlage der Näherungsdifferentialgleichung (A2.3.3.1-6) können jetzt analytische Lösungsausdrücke für über den Band- bzw. Strangquerschnitt gemittelte Temperaturen hergeleitet werden. Bevor hierzu jedoch eine allgemeingültige Lösung aufgesucht wird, sollen vorab die Lösungen zweier Grenzfälle - Wärmeübertragung ausschließlich durch Konvektion oder ausschließlich durch Wärmestrahlung - betrachtet werden.

A2.3.3.2.1 Konvektive Wärmeübertragung

Bei rein konvektiver Wärmeübertragung vereinfacht sich Gleichung (A2.3.3.1-6) infolge $C \rightarrow 0$ zu einer linearen Dgl., deren Lösung bekanntlich unter Verwendung der Methode der Variation der Konstanten (z.B. [ZEI 96, Kap. 1.12.4.5]) allgemein erhalten wird zu

$$\bar{\vartheta}(t) = \left(\bar{\vartheta}(t_A) + \int_{t_A}^t f(\tau) \cdot e^{\frac{1}{\bar{w}} \int_{t_A}^{\tau} \alpha(\xi) \cdot d\xi} d\tau \right) \cdot e^{-\frac{1}{\bar{w}} \int_{t_A}^t \alpha(\tau) \cdot d\tau} \quad \text{mit } f(t)|_{C=0}. \quad (\text{A2.3.3.2-1})$$

Die vorkommenden Integrale sind analytisch nur lösbar, wenn die Zeitfunktionen $\alpha(t)$ und $f(t)|_{C=0}$ von hinreichend einfacher Bauart sind. Andernfalls sind mittels numerischer Integration immerhin quantitative Ergebnisse zu erhalten.

Im einfachsten Falle zeitunabhängiger Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha(t) = \alpha = konst.$ und "Störfunktionen" $f(t) = f = konst.$ sowie mit der Anfangstemperatur $\bar{\vartheta}(t_A) := \bar{\vartheta}_A$ ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$\bar{\vartheta}(t) = \bar{\vartheta}_A \cdot e^{-\frac{\alpha}{\bar{w}} \cdot (t-t_A)} + f \cdot \frac{\bar{w}}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\frac{\alpha}{\bar{w}} \cdot (t-t_A)}); \quad f := f_{(C=0)}. \quad (\text{A2.3.3.2-2})$$

Der Beharrungszustand wird nach hinreichend langer Zeit mit

$$\bar{\vartheta}(t \rightarrow \infty) \equiv \bar{\vartheta}_\infty = f \frac{\bar{w}}{\alpha} = \frac{\varphi^4}{\alpha}; \quad \varphi := \varphi_{(C=0)} \quad (\text{A2.3.3.2-3.1})$$

erreicht. Damit läßt sich Gl.(A2.3.3.2-2) als explizite Lösungsformel

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(t) &= \bar{\vartheta}_A + (\bar{\vartheta}_\infty - \bar{\vartheta}_A) \cdot (1 - e^{-\frac{\alpha}{\bar{w}} \cdot (t-t_A)}) \\ &\equiv \bar{\vartheta}_\infty + (\bar{\vartheta}_A - \bar{\vartheta}_\infty) \cdot e^{-\frac{\alpha}{\bar{w}} \cdot (t-t_A)} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.2-3.2})$$

oder, unter Verwendung einer Zeitkonstante $T_K := \frac{\bar{w}}{\alpha}$, in impliziter und dimensionsloser Form

$$\ln \frac{1 - (\bar{\vartheta}_A / \bar{\vartheta}_\infty)}{1 - (\bar{\vartheta}(t) / \bar{\vartheta}_\infty)} = \frac{t-t_A}{T_K} \quad (\text{A2.3.3.2-3.3})$$

im Temperaturintervall $\bar{\vartheta}(t) \in (\bar{\vartheta}_A, \bar{\vartheta}_\infty)$ angeben.

Infolge der Identität $\frac{1 - (\bar{\vartheta}_A / \bar{\vartheta}_\infty)}{1 - (\bar{\vartheta}(t) / \bar{\vartheta}_\infty)} \equiv \frac{1 - (\bar{\vartheta}_\infty / \bar{\vartheta}_A)}{1 - (\bar{\vartheta}_\infty / \bar{\vartheta}(t))}$ verhält sich eine für lineare, konvektive Randbedingung(en) abgeleitete Lösung (A2.3.3.2-3.2) bzw. (A2.3.3.2-3.3) gegenüber Erwärmung $\bar{\vartheta}_A \leq \bar{\vartheta}(t) \leq \bar{\vartheta}_\infty$ und Abkühlung $\bar{\vartheta}_A \geq \bar{\vartheta}(t) \geq \bar{\vartheta}_\infty$ "symmetrisch". Bild A2.3-3 zeigt die dimensionslosen Temperaturverhältnisse in Abhängigkeit der dimensionslosen Zeit $(t - t_A) / T_K$ deshalb gleichermaßen für Erwärmung $0 \leq (\bar{\vartheta}_A / \bar{\vartheta}_\infty) \leq (\bar{\vartheta}(t) / \bar{\vartheta}_\infty) \leq 1$ wie für Abkühlung $0 \leq (\bar{\vartheta}_\infty / \bar{\vartheta}(t)) \leq (\bar{\vartheta}_\infty / \bar{\vartheta}_A) \leq 1$.

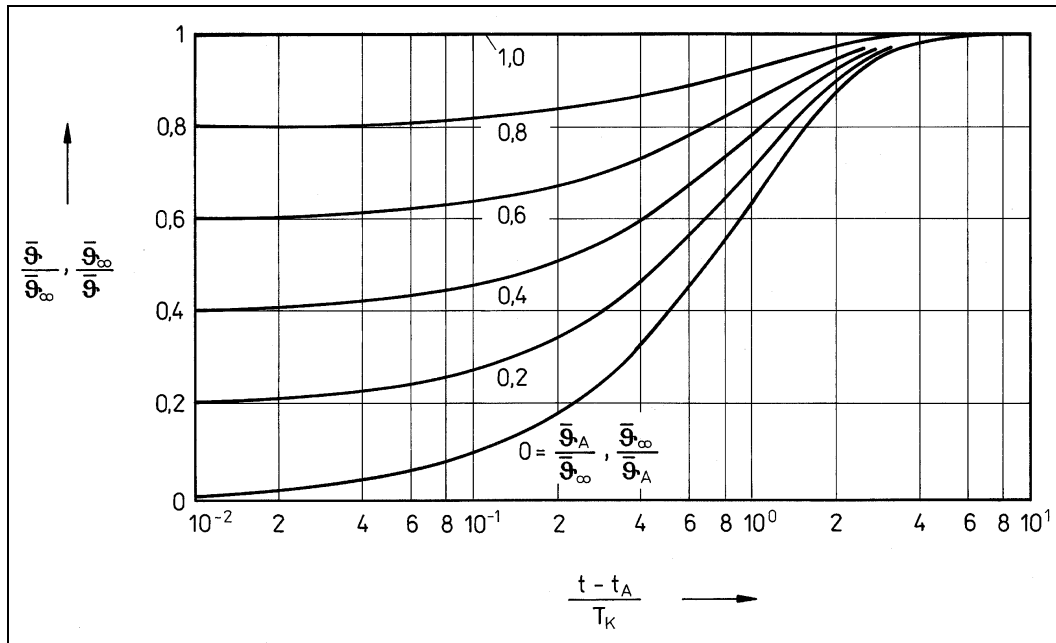


Bild A2.3-3: Temperaturverhältnisse bei Wärmeübertragung durch Konvektion

Nach Konkretisierung auf das ebene, das zylindersymmetrische oder das Rechteckprofil durch Einsetzen von (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8) oder (A2.3.3.1-9) in Gl. (A2.3.3.2-3.1) sowie mit einem Anfangszeitpunkt $t_A = 0$, werden mit Gl. (A2.3.3.2-3.2) im wesentlichen - abgesehen von q_V - bereits bekannte Näherungslösungen für die querschnittsbezogene mittlere Temperatur erhalten³⁶:

- **ebener Fall**; mit $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ und sofern $\mathcal{B}\dot{\nu} = \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \cdot d \ll 1$ zutrifft:

$$\bar{\vartheta}(t) \approx \vartheta_A + \left(\frac{1}{2 \cdot \bar{\alpha}} \cdot \sum_{j=1}^2 \alpha_j \cdot \vartheta_{UKj} - \vartheta_A + \frac{d}{2 \bar{\alpha}} \cdot q_V \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2 \bar{\alpha}}{\rho c d} \cdot t} \right) \quad (\text{A2.3.3.2-3.4})$$

- **zylindersymmetrischer Fall**

für Hohlzylinder bzw. Rohr mit $\bar{\alpha} = \frac{R_1 \alpha_1 + R_2 \alpha_2}{R_1 + R_2}$ und sofern $\mathcal{B}\dot{\nu} = \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \cdot (R_2 - R_1) \ll 1$ ist:

³⁶ Vgl. z.B [HEI 51, Kap. VIII, 1.a)], [VDI 94, Ec 9] oder [STE 87, (6.3-5)].

$$\bar{\vartheta}(t) \approx \vartheta_A + \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \sum_{j=1}^2 \frac{R_j \cdot \alpha_j}{R_1 + R_2} \cdot \vartheta_{UKj} - \vartheta_A + \frac{R_2 - R_1}{2\bar{\alpha}} \cdot q_V \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{\rho c \cdot (R_2 - R_1)} \cdot t} \right) \quad (\text{A2.3.3.2-3.5})$$

sowie speziell - mit $R_1 \rightarrow 0$ - für Vollzylinder bzw. Draht und sofern $\mathcal{B}\mathcal{V} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot R \ll 1$ gilt:

$$\bar{\vartheta}(t) \approx \vartheta_A + \left(\vartheta_{UK} - \vartheta_A + \frac{R}{2\alpha} \cdot q_V \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{\rho c R} \cdot t} \right), \quad (\text{A2.3.3.2-3.6})$$

was mit der auf anderem Wege gefundenen Näherungsformel (A2.3.2.9-5.3) bzw. (A2.3.2.9-8.2) erwartungsgemäß übereinstimmt. Außerdem wird aus der Hohlzylinderlösung (A2.3.3.2-3.5) nicht nur für $R_1 \rightarrow 0$ die des Vollzylinders (A2.3.3.2-3.6), sondern für $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R_1 + d$ auch die des ebenen Falls (ausgedehnte Platte bzw. breites Band) (A2.3.3.2-3.4) folgerichtig erhalten.

Auf der selben Grundlage lassen sich Lösungen für weitere Querschnitte bzw. Profile herleiten. Hier noch eine entsprechende Lösung für den

- **prismatisch-recht kantigen Fall**

$$\bar{\vartheta}(t) \approx \vartheta_A + \left(\frac{\sum_{j=1}^2 \left(\alpha_{Xj} \cdot \vartheta_{UKXj} \cdot d_Y + \alpha_{Yj} \cdot \vartheta_{UKYj} \cdot d_X \right)}{2\bar{\alpha} \cdot \sqrt{d_X d_Y}} - \vartheta_A + \frac{\sqrt{d_X d_Y}}{2\bar{\alpha}} \cdot q_V \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{\rho c \sqrt{d_X d_Y}} \cdot t} \right); \quad (\text{A2.3.3.2-3.7})$$

mit dem aus den an den vier Seiten vorliegenden Wärmeübergängen gebildeten effektiven Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{X1} + \alpha_{X2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{d_Y}{d_X}} + \frac{\alpha_{Y1} + \alpha_{Y2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{d_X}{d_Y}}$, mit den Seitenlängen des Rechteckprofils d_X , d_Y sowie mit den entsprechenden vier Umgebungstemperaturen.

Im einfachsten Falle des Stabes mit quadratischem Querschnitt ($d_X = d_Y = d$) sowie mit vollsymmetrischen Randbedingungen ($\vartheta_{UKX1} = \vartheta_{UKX2} = \vartheta_{UKY1} = \vartheta_{UKY2} = \vartheta_{UK}$ und $\alpha_{X1} = \alpha_{X2} = \alpha_{Y1} = \alpha_{Y2} = \alpha$) gewinnt man aus (A2.3.3.2-3.7) den Spezialfall:

$$\bar{\vartheta}(t) = \vartheta_A + \left(\vartheta_{UK} - \vartheta_A + \frac{d}{4\alpha} \cdot q_V \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{4\alpha}{\rho c d} \cdot t} \right). \quad (\text{A2.3.3.2-3.8})$$

Diese Lösung ist mit der betreffenden Lösung des Rundstabes bzw. Drahtes (A2.3.3.2-3.6) identisch, wenn unter d statt der Seitenlänge des Quadrats der Durchmesser verstanden wird ($d = 2R$). Damit verhält sich ein Vierkantdraht quadratischen Querschnitts unter wärmetechnisch dünnwandigen Verhältnissen und bei voll symmetrischen Randbedingungen thermisch genauso wie ein entsprechender Runddraht. Das jedoch ist folgerichtig, da das Verhältnis von Querschnittsfläche zu Umfang (bzw. Volumen zu Oberfläche eines Drahtabschnitts) für beide Geometrien mit $\sim d/4$ exakt den selben Wert besitzt und damit das Verhältnis zwischen dem Wärme austauschenden Volumen und seiner Wärme übertragenden Oberfläche unverändert bleibt. Entsprechend gilt, daß auch Drähte/Stäbe mit anderweitig profilierten Querschnitten das

selbe zeitliche Temperaturverhalten aufweisen, wenn das Verhältnis aus Volumen zu Oberfläche bzw. Querschnitt zu Umfang gleich bleibt.

In diesem Sinne lässt sich die Gleichung (A2.3.3.2-3.8) noch verallgemeinern, indem das Verhältnis von Umfang zu Querschnittsfläche U/A bzw. von Mantelfläche des profilierten Stranges zum davon umschlossenen Volumen A_M/V eingeführt wird:

Mit der Zeitkonstante $T = \frac{\rho c}{\alpha} \cdot \frac{A}{U} = \frac{\rho c}{\alpha} \cdot \frac{V}{A_M}$ erhält man die Lösung in der Form

$$\bar{\vartheta}(t) = \vartheta_A + \left(\vartheta_{UK} - \vartheta_A + T \cdot \frac{q_V}{\rho \cdot c} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (\text{A2.3.3.1-9})$$

Damit lassen sich Aufwärm- und Abkühlvorgänge von Profilen mit beliebigen Quotienten aus Oberfläche zu Volumen berechnen, solange es das Kriterium wärmetechnisch dünnwandiger Verhältnisse erlaubt. Es handelt sich bei der Lösung (A2.3.3.1-9) um eine gegenüber [BAE 94, S. 183] erweiterte Lösung, insofern sie auch innere Quellen/Senken q_V zu berücksichtigen gestattet.

Treten an der Körper- bzw. Mantelfläche unterschiedliche Wärmeübergangsbedingungen auf, so ist der Wärmeübergangskoeffizient α durch das gewichtete Mittel der einzelnen k Oberflächen- und Wärmeübergangsanteile zu ersetzen: $\bar{\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot A_{Mj}}{A_M}$ mit $A_M = \sum_{j=1}^k A_{Mj}$.

Wie sich übrigens an Hand von (A2.3.3.1-6) mit (A2.3.3.1-8.2) und (A2.3.3.1-9) leicht zeigen läßt, trifft die Aussage, daß sich runde und quadratische Querschnitte unter wärmetechnisch dünnwandigen Verhältnissen, wenn deren Durchmesser und Kantenlängen übereinstimmen, völlig gleichwertig verhalten, nicht nur für konvektive Wärmeübergänge zu, sondern genauso für Wärmeübergänge infolge Strahlungsaustausch, d.h. diese beiden Geometrien erweisen sich für $d_{\square} = d_{\circ}$ auch invariant gegenüber der Art der Wärmübergtragung. Durch Induktion folgt schließlich, daß diese Aussage verallgemeinert für alle Stäbe mit Querschnitten zutrifft, solange deren Verhältnis aus Volumen zu Oberfläche bzw. Querschnitt zu Umfang unverändert bleibt. Diese allgemeine Aussage ist auch aus einer entsprechenden Betrachtung zum Energieaustausch bzw. der Energiebilanzen herzuleiten.

A2.3.3.2.2 Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung

Wenn der konvektive Wärmeübertragungsanteil gegenüber dem der Strahlung vernachlässigt werden kann ($\alpha \rightarrow 0$), ist Gleichung (A2.3.3.1-6) wieder nichtlinear und muß auf anderem Wege gelöst werden. Eine Lösung ist noch relativ einfach dann herzustellen, wenn der Strahlungsaustauschkoeffizient und die "Störfunktion" als von der Zeit unabhängig betrachtet werden können, d.h., wenn $C(t) = C = konst.$ und $f(t) = f = konst.$ bzw. wenn $\varphi(t) = \varphi = konst.$ gilt. Ausgehend von Dgl. (A2.3.3.1-6) gelangt man durch Trennung der Variablen unmittelbar zu

$$\varpi \cdot \int_{\bar{\vartheta}_A}^{\bar{\vartheta}(t)} \frac{d\vartheta}{\varphi^4 - C \cdot \vartheta^4} = \int_{t_A}^t dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{\bar{\vartheta}_A}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\frac{\varphi^4}{C} - \vartheta^4} = \frac{C}{\varpi} \cdot (t - t_A). \quad (\text{A2.3.3.2-4})$$

Das links stehende Integral kann einer Integral-Formelsammlung entnommen werden, z.B. [ZEI 96, Kap. 0.9.5; Nr. 91], was auf die Gleichung

$$\ln \frac{\varphi + \sqrt[4]{C} \cdot \Theta}{\varphi - \sqrt[4]{C} \cdot \Theta} + 2 \cdot \arctan \frac{\sqrt[4]{C} \cdot \Theta}{\varphi} \bigg|_{\Theta = \bar{\Theta}_A}^{\Theta = \bar{\Theta}(t)} = 4 \cdot \frac{\varphi^3 \cdot \sqrt[4]{C}}{\varpi} \cdot (t - t_A) \quad (\text{A2.3.3.2-5.1})$$

bzw. unter Benutzung der Beharrungs- bzw. Ausgleichstemperatur

$$\bar{\Theta}_\infty \equiv \bar{\Theta}(t \rightarrow \infty) = \frac{\varphi}{\sqrt[4]{C}} \quad \text{mit } \varphi = \varphi_{(\alpha=0)} \quad (\text{A2.3.3.2-5.2})$$

sowie durch Ansetzen einer Zeitkonstante

$$T_S = \frac{\varpi}{4 \cdot C \cdot \bar{\Theta}_\infty^3} \quad (\text{A2.3.3.2-5.3})$$

auf die Gleichung

$$\ln \frac{\left(1 - \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty}\right) \cdot \left(1 + \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty}\right)}{\left(1 - \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty}\right) \cdot \left(1 + \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty}\right)} + 2 \cdot \arctan \frac{\frac{\bar{\Theta}(t) - \bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty}}{1 + \frac{\bar{\Theta}_A \cdot \bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty^2}} = \frac{t - t_A}{T_S} \quad (\text{A2.3.3.2-5.4})$$

führt³⁷.

Die Spezialisierung auf das ebene, das zylindersymmetrische oder das Rechteckprofil kann mit (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8) oder (A2.3.3.1-9) vorgenommen werden. In Gegensatz zu gewohnten Darstellungen, in denen die Temperatur explizit vorkommt, z.B. (A2.3.3.2-1), (A2.3.3.2-2), weist Lösung (A2.3.3.2-5.4) eine bezüglich $\bar{\Theta}(t)$ implizite Form auf. Mit effizienten numerischen Algorithmen (Solver), über die bereits komfortablere Taschenrechner verfügen (z.B. *HP48*), lassen sich jedoch mit dieser Formel mühelos Temperaturen $\bar{\Theta}$ in Abhängigkeit von der Zeit t berechnen. Als besonders anwenderfreundlich erweist sich die Lösung naturgemäß dann, wenn umgekehrt gefragt wird, nach welcher Zeit t eine bestimmte Temperatur $\bar{\Theta} \in (\bar{\Theta}_A, \bar{\Theta}_\infty)$ erreicht ist.

Es ist zu erkennen, daß Gleichung (A2.3.3.2-5.4) - analog Gl. (A2.3.3.2-3.3) - lediglich von den drei dimensionslosen Parametern $\bar{\Theta}_A / \bar{\Theta}_\infty$, $\bar{\Theta}(t) / \bar{\Theta}_\infty$ und $(t - t_A) / T_S$ abhängt. Dieser Umstand ermöglicht wiederum eine bequeme graphische Darstellung: Bild A2.3-4a für Erwärmung $0 \leq (\bar{\Theta}_A / \bar{\Theta}_\infty) \leq (\bar{\Theta}(t) / \bar{\Theta}_\infty) \leq 1$ und Bild A2.3-4b für Abkühlung $0 \leq (\bar{\Theta}_\infty / \bar{\Theta}_A) \leq (\bar{\Theta}_\infty / \bar{\Theta}(t)) \leq 1$.

³⁷ Eine entsprechende, allerdings nur für $q_V = 0$ und $\Theta_A = 0$ und auf anderem Wege hergeleitete Lösung findet sich in [BAN 66] oder ähnlich auch in [STE 87, (6.3-7)].

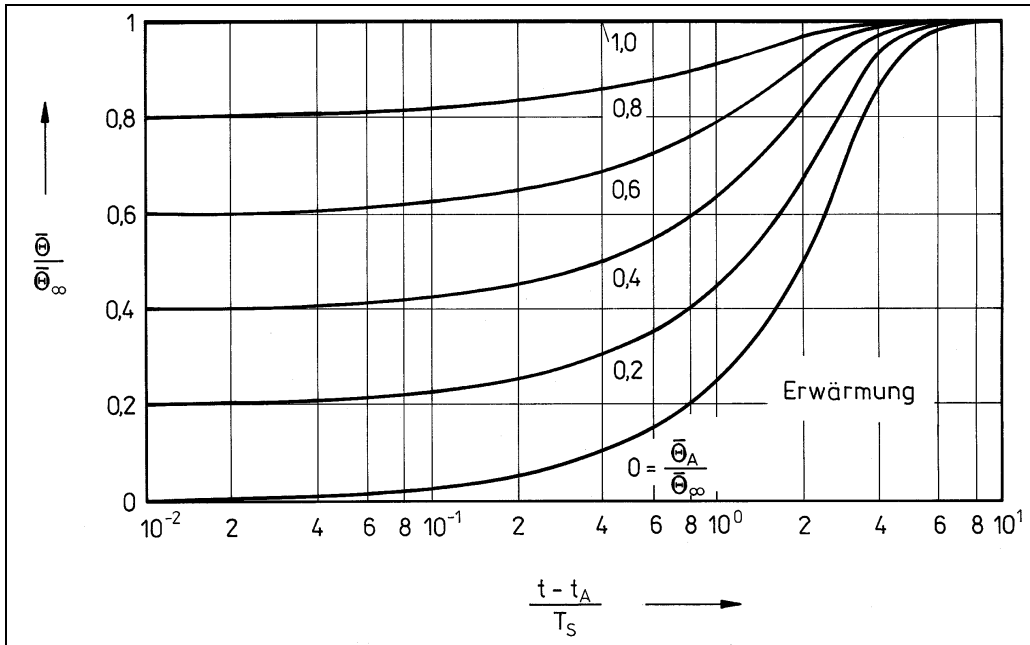


Bild A2.3-4a: Erwärmung bei Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung

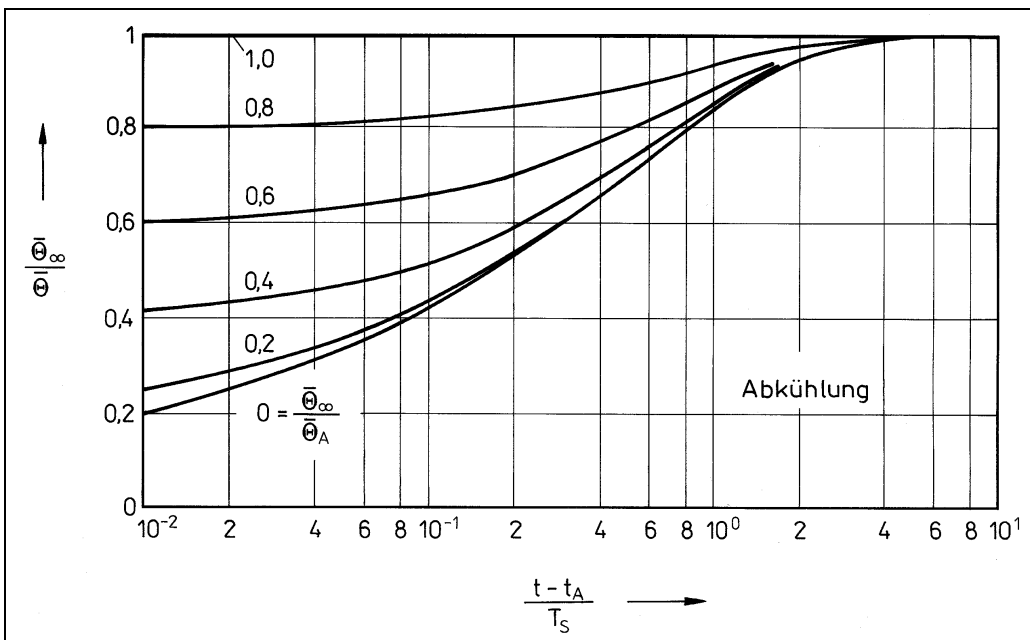


Bild A2.3-4b: Abkühlung bei Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung

Die mit fortschreitender Zeit $t_A \rightarrow t \rightarrow \infty$ erfolgende Temperaturänderung $\bar{\theta}_A \rightarrow \bar{\theta}(t) \rightarrow \bar{\theta}_\infty$ weist bezüglich Erwärmung und Abkühlung "Asymmetrie" auf. Insbesondere geht Erwärmung wesentlich rascher vonstatten als Abkühlung³⁸. Diese Erscheinung wird durch die Nichtlinearität der Randbedingung(en) berücksichtigt und ist umgekehrt durch diese bedingt - vgl. Anhang B.

³⁸ Beachte: $T_S = T_S(\bar{\theta}_\infty)$

A2.3.3.2.3 Wärmeübertragung durch Konvektion und Wärmestrahlung

Eine geschlossene Lösungsgleichung, die Konvektion und Wärmestrahlung gleichzeitig berücksichtigt, scheint im Fachschrifttum noch nicht zu existieren. Eine Herleitung läßt sich jedoch auch hierfür durchaus angeben, wie sogleich zu zeigen ist. Außerdem kann für die Temperaturberechnung noch eine numerisch-iterativ anzuwendende Formel gefunden werden, was im Anschluß daran dargestellt wird.

A2.3.3.2.3.1 Geschlossene Lösungsgleichung

Sind sowohl Konvektion als auch Wärmestrahlung an der Wärmeübertragung wesentlich beteiligt, so sind prinzipielle Vereinfachungen an Gleichung (A2.3.3.1-6), wie sie in den beiden vorangegangenen Abschnitten vorgenommen wurden, nicht mehr zulässig und es muß versucht werden, eine Lösung des allgemeineren Problems zu finden. Allerdings werde vereinfachend wieder davon ausgegangen, daß die Koeffizienten und auch die "Störfunktion" als zeitunabhängig angenommen werden können, d.h., es soll $\alpha(t) = \alpha = konst.$, $C(t) = C = konst.$ und $f(t) = f = konst.$ bzw. $\varphi(t) = \varphi = konst.$ gelten³⁹. Damit läßt sich Gleichung (A2.3.3.1-6) durch

$$\text{Trennung der Variablen direkt in } \int_{\bar{\Theta}_A}^{\bar{\Theta}(t)} \frac{d\Theta}{\varphi^4 - C \cdot \Theta^4 - \alpha \cdot \Theta} = \frac{1}{\varpi} \cdot \int_{t_A}^t dt$$

$$\text{bzw. } \int_{\bar{\Theta}_A}^{\bar{\Theta}(t)} \frac{d\Theta}{\frac{\varphi^4}{C} - \Theta^4 - \frac{\alpha}{C} \cdot \Theta} = \frac{C}{\varpi} \cdot (t - t_A) \quad (\text{A2.3.3.2-6})$$

überführen. Nach Partialbruchzerlegung des Integranden gemäß

$$\frac{-1}{x^4 + \frac{\alpha}{C} \cdot x - \frac{\varphi^4}{C}} = \sum_{j=1}^4 \frac{B_j}{x - x_j} \quad (\text{A2.3.3.2-6.1})$$

ergibt die Integration

$$\sum_{j=1}^4 B_j \cdot \ln \frac{\bar{\Theta} - x_j}{\bar{\Theta}_A - x_j} = \frac{C}{\varpi} \cdot (t - t_A) \quad (\text{A2.3.3.2-6.2})$$

Hier sind die Koeffizienten B_j durch

$$\begin{aligned} B_1 &= [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)]^{-1} \\ B_2 &= [(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)]^{-1} \\ B_3 &= [(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_4 - x_3)]^{-1} \\ B_4 &= [(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.2-6.3})$$

festgelegt, wobei die Wurzeln x_1 bis x_4 als Nullstellen des Nenners des Integranden aus der Gleichung 4. Grades

$$x^4 + \frac{\alpha}{C} \cdot x - \frac{\varphi^4}{C} = 0 \quad (\text{A2.3.3.2-6.4})$$

³⁹ Lösungsweg für variable Koeffizienten und "Störfunktion" wird in [KAM 61, C 1.55] skizziert.

zu bestimmen sind. Die linke Gleichungsseite läßt sich als Produkt zweier quadratischer Gleichungen darstellen

$$\left[x^2 + \sqrt{y_I} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(y_I - \frac{\alpha}{C \cdot \sqrt{y_I}} \right) \right] \cdot \left[x^2 - \sqrt{y_I} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(y_I + \frac{\alpha}{C \cdot \sqrt{y_I}} \right) \right] = 0, \quad (\text{A2.3.3.2-6.5})$$

wobei y_I als einzige reelle Wurzel der kubischen Resolvente

$$y^3 + 4 \cdot \frac{\varphi^4}{C} \cdot y - \left(\frac{\alpha}{C} \right)^2 = 0 \quad (\text{A2.3.3.2-6.6})$$

zu

$$y_I = \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{C} \right)^2} - \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{C} \right)^2} \geq 0; \quad D := \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\varphi^4}{C} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{C} \right)^4 \quad (\text{A2.3.3.2-6.7})$$

erhalten wird. Die Wurzeln x_1 bis x_4 ergeben sich als Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen (A2.3.3.2-6.5) zu

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{y_I} \pm \sqrt{\frac{\alpha}{C} \cdot \frac{2}{\sqrt{y_I}} - y_I} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{y_I} \pm \sqrt{2 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{\varphi^4}{C} + y_I^2} - y_I} \right); \quad (\text{A2.3.3.2-6.8})$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{y_I} \pm i \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{C} \cdot \frac{2}{\sqrt{y_I}} + y_I} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{y_I} \pm i \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{\varphi^4}{C} + y_I^2} + y_I} \right)$$

die jeweils zweite Form der Lösung wurde durch Umformung mit der Gleichung (A2.3.3.2-6.6) erhalten und ist numerisch unmittelbar anwendbar auch im Falle vernachlässigbarer Konvektion, das heißt, bei $\alpha \rightarrow 0$. Einsetzen der Wurzeln (A2.3.3.2-6.8) in die Lösungsgleichung (A2.3.3.2-6.2) führt infolge der konjugiert komplexen Wurzeln $x_{3,4}$ zunächst auf komplexwertige Terme, die

durch geeignete Umformungen jedoch beseitigt werden können. Mit der Abkürzung $\tilde{\varphi} = 4 \cdot \frac{\varphi^4}{C}$

lautet die reelle, bezüglich $\bar{\Theta} \equiv \bar{\Theta}(t)$ wiederum implizite Lösungsgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{y_I + \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}}{\sqrt{(-y_I) + 2\sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}}} \cdot \ln \frac{(\bar{\Theta}_A - x_1)(\bar{\Theta} - x_2)}{(\bar{\Theta} - x_1)(\bar{\Theta}_A - x_2)} + \dots \\ & \dots + \sqrt{y_I} \cdot \ln \frac{(\bar{\Theta}_A - x_1)(\bar{\Theta}_A - x_2) \left((2\bar{\Theta} - \sqrt{y_I})^2 + y_I + 2 \cdot \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2} \right)}{(\bar{\Theta} - x_1)(\bar{\Theta} - x_2) \left((2\bar{\Theta}_A - \sqrt{y_I})^2 + y_I + 2 \cdot \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2} \right)} - \dots \\ & \dots - 2 \cdot \frac{y_I - \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}}{\sqrt{y_I + 2\sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}}} \cdot \arctan \frac{2(\bar{\Theta} - \bar{\Theta}_A) \cdot \sqrt{y_I + 2 \cdot \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}}}{(2\bar{\Theta} - \sqrt{y_I})(2\bar{\Theta}_A - \sqrt{y_I}) + y_I + 2 \cdot \sqrt{\tilde{\varphi} + y_I^2}} \\ & = (\tilde{\varphi} + 3 \cdot y_I^2) \cdot \frac{C}{\varpi} \cdot (t - t_A) \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.2-7})$$

Durch Vergleich der Dgl. (A2.3.3.1-6) mit Gl. (A2.3.3.2-6.4) ist zu erkennen, daß speziell die Temperatur des Beharrungszustandes $\bar{\Theta}_\infty$ wegen $\bar{\Theta}'(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ unmittelbar aus der Gleichung (A2.3.3.2-6.4) als eine der vier Wurzeln x_1 bis x_4 gemäß (A2.3.3.2-6.8) zu erhalten ist. Während

die komplexen Wurzeln $x_{3,4}$ von vornherein als Lösungen ausscheiden, ergibt eine Überprüfung von $x_{1,2}$ anhand Gl. (A2.3.3.2-7), daß die Temperatur des Beharrungszustandes durch x_1 entsprechend $\bar{\Theta}(t \rightarrow \infty) = \bar{\Theta}_\infty \equiv x_1$ gegeben ist. Mit der Abkürzung

$$\Phi = \sqrt{1 + \frac{\tilde{\varphi}}{y_1^2}} \equiv \sqrt{1 + 4 \frac{\varphi^4}{C \cdot y_1^2}} \quad (\text{A2.3.3.2-7.1})$$

läßt sich die Temperatur des Beharrungszustandes auch durch

$$\bar{\Theta}_\infty = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot \Phi - 1} - 1) \cdot \sqrt{y_1} \quad (\text{A2.3.3.2-7.2})$$

ausdrücken. Speziell bei vernachlässigbarem Konvektionsanteil, d.h., für $\alpha \rightarrow 0$ und damit infolge (A2.3.3.2-6.7) für $y_1 = 0$, geht Lösung (A2.3.3.2-7) in die entsprechende weiter vorn angegebene Lösung (A2.3.3.2-5.4) über.

Ähnlich wie bei Ergebnisgleichung (A2.3.3.2-5.4) läßt sich auch für Lösung (A2.3.3.2-7) eine dimensionslose Form herstellen. Zunächst kann unter Verwendung der Abkürzung (A2.3.3.2-7.1) die Wurzel x_2 als ein gebrochenes Vielfaches der Wurzel x_1 bzw. - wegen (A2.3.3.2-7.2) - der Beharrungstemperatur als

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{2\Phi - 1}}{1 - \sqrt{2\Phi - 1}} \cdot x_1 = \frac{1 + \sqrt{2\Phi - 1}}{1 - \sqrt{2\Phi - 1}} \cdot \bar{\Theta}_\infty \quad (\text{A2.3.3.2-7.3})$$

geschrieben werden. Mit Einführung einer Zeitkonstante

$$T = \frac{(1 + \Phi) \cdot (\sqrt{2\Phi - 1} - 1)^3}{2 \cdot (2 + \Phi^2) \cdot \sqrt{2\Phi - 1}} \cdot \frac{\varpi}{4 \cdot C \cdot \bar{\Theta}_\infty^3} \quad (\text{A2.3.3.2-7.4})$$

wird eine zweite, die dimensionslose Form der Lösung erhalten⁴⁰:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\sqrt{2\Phi - 1}}{\Phi + 1} \right) \cdot \ln \frac{\left(1 - \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{2\Phi - 1}}{1 - \sqrt{2\Phi - 1}} - \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty} \right)}{\left(1 - \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{2\Phi - 1}}{1 - \sqrt{2\Phi - 1}} - \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty} \right)} + \frac{\sqrt{2\Phi - 1}}{\Phi + 1} \cdot \ln \frac{\left(1 + \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty} (1 - \sqrt{2\Phi - 1}) \right)^2 + 1 + 2\Phi}{\left(1 + \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty} (1 - \sqrt{2\Phi - 1}) \right)^2 + 1 + 2\Phi} + \dots \\ & \dots + 2 \frac{(\Phi - 1)\sqrt{2\Phi - 1}}{(\Phi + 1)\sqrt{2\Phi + 1}} \cdot \arctan \frac{\frac{\bar{\Theta}(t) - \bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty} \cdot (\sqrt{2\Phi - 1} - 1) \cdot \sqrt{1 + 2\Phi}}{1 + 2\Phi + \left(1 + \frac{\bar{\Theta}(t)}{\bar{\Theta}_\infty} \cdot (1 - \sqrt{2\Phi - 1}) \right) \left(1 + \frac{\bar{\Theta}_A}{\bar{\Theta}_\infty} \cdot (1 - \sqrt{2\Phi - 1}) \right)} \\ & = \frac{t - t_A}{T} \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3.2-7.5})$$

Die Spezialisierung auf das ebene, das zylindersymmetrische oder das Rechteckprofil kann mit (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8) oder (A2.3.3.1-9), natürlich nur für zeitunabhängige Verhältnisse bzw. Zeitmittelwerte der Variablen, vorgenommen werden. Diese Lösungsgleichung besitzt neben den drei Parametern, die bereits Lösung (A2.3.3.2-5.4) aufweist, mit Φ einen weiteren, einen vierten Parameter. Deshalb ist eine bildliche Darstellung aufwendiger und hier wenig sinnvoll. Wie jedoch

⁴⁰ Achtung: In der ursprünglichen Fassung des Forschungsheftes hatten sich bei der Umformung in der entsprechenden Formel (A2.3.3.2-7.5) Vorzeichenfehler eingeschlichen.

bereits für Lösung (A2.3.3.2-5.4) ausgeführt, bereitet auch die Temperaturberechnung mit den Lösungen (A2.3.3.2-7) bzw. (A2.3.3.2-7.5) prinzipiell dann keine Probleme, wenn der Rechner über einen „Solver“-Algorithmus verfügt⁴¹. Umgekehrt eignet sich Lösung (A2.3.3.2-7) bzw. (A2.3.3.2-7.5) besonders gut zur Beantwortung der Frage, nach welcher Zeitspanne unter vorliegenden Wärmeübertragungsverhältnissen eine vorgegebene Temperatur tatsächlich erreicht wird.

Neben Wärmeübertragung durch Konvektion und Strahlung lassen sich mit den Gleichungen (A2.3.3.2-7) auch Wärmequellen q_V , solange sie als homogen und - in Zeitintervallen - als unveränderlich anzusehen sind, entsprechend (A2.3.3.1-4) in Abhängigkeit vom Stab-, Band- bzw. Drahtquerschnitt gemäß (A2.3.3.1-7), (A2.3.3.1-8) oder (A2.3.3.1-9) zusätzlich berücksichtigen.

A2.3.3.2.3.2 Lösungsverfahren für iterative Berechnung

Zur Herleitung eines Lösungsverfahrens unter Verwendung eines Formelausdrucks von der Bauart (A2.3.3.2-3.2), bei dem neben Wärmeübertragung durch Konvektion ($\alpha > 0$) nunmehr auch Wärmestrahlung ($C > 0$) gemäß einer Randbedingungen (A2.3.3.1-5) zu berücksichtigen ist, wird davon ausgegangen, daß Wärmeübertragungen durch Konvektion und Strahlung voneinander unabhängig sind, sich gegenseitig nicht beeinflussen [VDI 94, Kap. A-2.3.5]. Das erlaubt es, ersatzweise einen wirksamen bzw. effektiven Wärmeübergangskoeffizienten α einzuführen durch additive Überlagerung eines Konvektionsanteils α_K und eines Strahlungsanteils α_S :

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_S \quad (\text{A2.3.3.2-8})$$

Der explizit nicht vorgebbare Strahlungsanteil α_S kann z.B. im Falle von Band und Draht formal erhalten werden durch Vergleich einer entsprechenden vollständigen Randbedingung (A2.3.3.1-5.1) bzw. (A2.3.3.1-5.2.2) mit der exakt selben Randbedingung für speziell $C = 0$ und α entsprechend Gl. (A2.3.3.2-8), also durch Gleichsetzung mit einer linearen Randbedingung, wie sie Lösungen der Art (A2.3.3.2-3.2) zugrunde liegt. Da sich die beiden (links und rechts vom Gleichheitszeichen stehenden) rein konvektiven Terme $\alpha_K \cdot (\mathcal{G}_{UK} - \mathcal{G}_{Rand}(t))$ aufheben, verbleiben zur Ermittlung von α_S die Gleichungen:

- ebener Fall („breites“ Band)

$$\alpha_{Sj} \cdot (\mathcal{G}_{UKj} - \mathcal{G}_{(-1)^j \cdot X, t}) = C_j \cdot (\Theta_{USj}^4 - \Theta^4_{(-1)^j \cdot X, t}) \quad (\text{A2.3.3.2-9.1})$$

- zylindersymmetrischer Fall (Runddraht):

$$\alpha_S \cdot (\mathcal{G}_{UK} - \mathcal{G}(R, t)) = C \cdot (\Theta_{US}^4 - \Theta^4(R, t)) \quad (\text{A2.3.3.2-9.2})$$

Damit wird bei „geeigneter Wahl“ von α_S die allgemeingültigere, nichtlineare „Strahlungsrandbedingung“ auf eine lineare „Konvektionsrandbedingung“ zurückgeführt. Allerdings zeigt sich, daß linke und rechte Seiten der Gleichungen (A2.3.3.2-9.1) bzw. (A2.3.3.2-9.2) infolge der Möglichkeit, unterschiedliche Umgebungstemperaturen zugelassen zu haben, zu verschiedenen Zeitpunkten Nullstellen besitzen. Daraus resultiert für α_S ein Pol erster Ordnung bei $\mathcal{G}_{Rand}(t^*) = \mathcal{G}_{UK}$. Dieses Problem läßt sich nur vermeiden, wenn man die weiteren Betrachtungen

⁴¹ Auf den Pocket-PC HP28 und HP48 beansprucht eine Berechnung oft nur einige bis wenige zehn Sekunden. -Die numerische Auswertung der Gleichungen (A2.3.3.2-6.7), (A2.3.3.2-6.8) zur Berechnung von y_1 , x_1 und x_2 kann in bestimmten Parameterbereichen durch Stellenauslöschung zu ungenauen Ergebnissen führen. Es kann deshalb vorteilhaft sein, diese Ergebnisse auf der Grundlage der Ausgangsgleichungen (A2.3.3.2-6.6) und (A2.3.3.2-6.4) iterativ (bzw. mit Solver) nachzubessern.

dahingehend einschränkt, daß die bisher beibehaltene Unterscheidung zwischen Umgebungstemperatur bezüglich Konvektion und Umgebungstemperatur bezüglich Strahlung fallengelassen und stattdessen vereinfachend $\mathcal{G}_{UK} = \mathcal{G}_{US} = \mathcal{G}_U$ vereinbart wird.

Werden die Körperwandtemperaturen im Hinblick auf den Näherungscharakter und die Einfachheit der angestrebten Lösung durch eine nicht nur über den Strangquerschnitt, sondern zusätzlich über einen gewissen Zeitbereich gemittelte Temperatur

$$\tilde{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{(\Delta t)} \bar{\mathcal{G}}(\tau) \cdot d\tau \quad (\text{A2.3.3.2-10})$$

ersetzt, so folgt mit (A2.3.3.2-8) aus (A2.3.3.2-9.1, A2.3.3.2-9.2) für den Strahlungsanteil an der Wärmeübertragung:

- im **ebenen** Fall an beiden Oberflächen (*breites Band*)

$$\alpha_{Sj} = C_j \cdot \frac{\Theta_{Uj}^4 - \tilde{\Theta}^4}{\mathcal{G}_{Uj} - \tilde{\mathcal{G}}} \equiv C_j \cdot \Theta_{Uj}^3 \cdot \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\tilde{\Theta}}{\Theta_{Uj}} \right)^k \quad (\text{A2.3.3.2-11.1})$$

- im **zylindersymmetrischen** Fall (*Draht*)

$$\alpha_S = C \cdot \frac{\Theta_U^4 - \tilde{\Theta}^4}{\mathcal{G}_U - \tilde{\mathcal{G}}} \equiv C \cdot \Theta_U^3 \cdot \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\tilde{\Theta}}{\Theta_U} \right)^k ; \quad (\text{A2.3.3.2-11.2})$$

Strahlungsaustauschkoeffizienten und Umgebungstemperaturen werden als zeitunabhängig betrachtet.

Die kalorische Temperatur gemäß (A2.3.3.2-10) läßt sich mit (A2.3.3.2-3.2) für ein gegebenes Zeitintervall $\Delta t := t - t_A$ integrieren und durch

$$\tilde{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_\infty - \frac{\varpi}{\alpha} \cdot \frac{\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_A}{t - t_A} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{G}} \equiv \bar{\mathcal{G}}(t) \quad (\text{A2.3.3.2-12})$$

explizit angeben⁴². Andererseits läßt sich durch Umstellen und Logarithmieren von Gleichung (A2.3.3.2-3.2) wie folgt substituieren:

$$\frac{\alpha}{\varpi} \cdot (t - t_A) = \ln \frac{\bar{\mathcal{G}}_\infty - \bar{\mathcal{G}}_A}{\bar{\mathcal{G}}_\infty - \bar{\mathcal{G}}}, \quad (\text{A2.3.3.2-13})$$

so daß statt (A2.3.3.2-12) auch

$$\tilde{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_\infty - (\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}_A) \cdot \ln^{-1} \frac{\bar{\mathcal{G}}_\infty - \bar{\mathcal{G}}_A}{\bar{\mathcal{G}}_\infty - \bar{\mathcal{G}}} \quad (\text{A2.3.3.2-14})$$

geschrieben werden kann⁴³. Diese Gleichung enthält wegen (A2.3.3.2-3.1) mit (A2.3.3.2-8) indirekt weiterhin den unbekanntem Strahlungsanteil α_S und umgekehrt enthält (A2.3.3.2-11) die erst noch zu berechnende kalorische Mitteltemperatur $\tilde{\mathcal{G}}$, so daß eine explizite Lösungsformel nicht angegeben werden kann.

⁴² Für die Berechnung von $\bar{\mathcal{G}}_\infty$ ist in Gln. (A2.3.3.1-7) bzw. (A2.3.3.1-8) der Strahlungsaustauschkoeffizient C jeweils Null zu setzen; er wird allein über Gl. (A2.3.3.2-8) mit (A2.3.3.2-11) eingeführt.

⁴³ Es gilt speziell $\tilde{\mathcal{G}}(t=t_A) = \lim_{\bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_A} \tilde{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_A$.

Dagegen gelingt die Berechnung auf numerisch-iterativem Wege. Beginnend mit einem Näherungs-Startwert für den Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha^{(0)} := \alpha_K + \alpha_S^{(0)}$, wobei für den Strahlungsanteil als Anfangsnäherung z.B. $\alpha_S^{(0)} := 4 \cdot C \cdot \Theta_U^3$ oder häufig noch besser $\alpha_S^{(0)}$ entsprechend (A2.3.3.2-11.1) bzw. (A2.3.3.2-11.2) mit (A2.3.3.2-14) für $\bar{\vartheta}^{(0)} \approx \frac{1}{2} \cdot (\vartheta_A + \vartheta_U)$, $\bar{\vartheta}_\infty^{(0)} \approx \vartheta_U$ verwendet werden kann, werden zyklisch die Temperaturen (A2.3.3.2-3.1), (A2.3.3.2-3.2) und (A2.3.3.2-14) berechnet, um damit gemäß (A2.3.3.2-11.1) bzw. (A2.3.3.2-11.2) jeweils verbesserte Ausgangswerte $\alpha_S^{(v)}$ für den Strahlungsanteil zu erhalten.

Das Iterationsverfahren kann beendet werden, wenn eine gewünschte Rechengenauigkeit - je nach Interessenlage - für den Wärmeübergangskoeffizienten α bzw. α_S , die kalorische Temperatur $\tilde{\vartheta}$ oder aber die wohl vorwiegend interessierende mittlere Temperatur $\bar{\vartheta}$ erreicht ist. Auf einen theoretisch geführten Konvergenznachweis kann hier verzichtet werden, da das Verfahren numerisch sehr gut konvergiert und Ergebnisse liefert, die denen geschlossener Formeln (A2.3.3.2-7) bzw. (A2.3.3.2-7.5) kaum an Genauigkeit noch an Geschwindigkeit der Berechnung nachstehen.

A2.3.3.2.4 Temperatur- oder zeitabhängige Einflußgrößen

Die Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte kann näherungsweise auf numerisch-iterativem Wege erfolgen. Je nach Anforderungen an Genauigkeit und Rechenzeit wird die Temperaturberechnung in mehr oder weniger großen Zeitabschnitten vorgenommen, wobei die Endtemperatur eines gerade berechneten i -ten Zeitabschnittes unmittelbar als Ausgangstemperatur des Folgeabschnittes ($i+1$) übernommen wird. Als Argument für die Temperaturabhängigkeit, z.B. der spezifischen Wärmekapazität, kann die für den betreffenden i -ten Zeitabschnitt geltende Mittel-Temperatur $\tilde{\vartheta}_{(i)}$ gemäß (A2.3.3.2-14) oder näherungsweise auch die linear gemittelte Temperatur $\frac{1}{2} \cdot (\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{(i)})$ verwendet werden.

Diese Vorgehensweise zur Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte läßt sich in das im vorangegangenen Abschnitt A2.3.3.2.3.2 angegebene Iterationsverfahren unmittelbar einbinden. Analog kann aber auch im Falle der Temperaturberechnung mit den Formeln (A2.3.3.2-5.4) oder (A2.3.3.2-7) bzw. (A2.3.3.2-7.5) verfahren werden.

Auf die gleiche Weise lassen sich dann auch Zeit- oder Temperaturabhängigkeiten weiterer Einflußgrößen, wie sie durch Quellterm q_V , Wärmeübergangs- und Strahlungsaustauschkoeffizient α bzw. C sowie Umgebungstemperaturen ϑ_{UK} , ϑ_{US} gegeben sein können, in guter Näherung berücksichtigen.

A2.4 Temperaturfeld im endlich langen Hohlzylinder

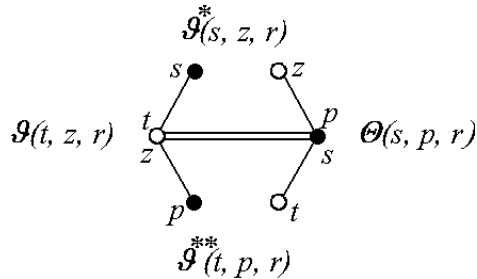
A2.4.1 Allgemeiner Fall

Die Differentialgleichung eines homogenen, isotropen, rotationssymmetrischen Temperaturfeldes $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, z, r)$ in einem endlich langen Hohlzylinder lautet unter Berücksichtigung von Wärmequellen $q_V = q_V(t, z, r)$:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho c} q_V; \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq z \leq L, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (\text{A2.4.1-1})$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \textit{konst.}, \quad \rho = \textit{konst.}, \quad c = \textit{konst.}$$

Zur Lösung dieser linearen partiellen Differentialgleichung unter noch näher festzulegenden Anfangs- und Randbedingungen werde wiederum die Methode der zweidimensionalen LAPLACE-Transformation [VOE 50] bezüglich der beiden Variablen t und z - für z jetzt allerdings im endlichen Gebiet ($0 \leq z \leq L$) - angewendet, wobei das bereits bekannte Korrespondenzschema



verwendet wird.

Die Originalfunktion $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t, z, r)$ wird durch die zweidimensionale Integraltransformation

$$\int_0^{\infty} \int_0^L e^{-st - pz} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dz dt = \Theta(s, p, r) \text{ oder durch zwei nacheinander ausgeführte eindimensionale}$$

$$\text{Transformationen } \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dt = \mathcal{G}^*(s, z, r) \text{ und } \int_0^L e^{-pz} \cdot \mathcal{G}(t, z, r) \cdot dz = \mathcal{G}^{**}(t, p, r) \text{ in die}$$

komplexwertige Bildfunktion $\Theta(s, p, r) \equiv \mathcal{L}^2 \{ \mathcal{G}(t, z, r) \}$ überführt; während die Radiusvariable r von der Transformation nicht berührt wird, treten die reellen Variablen t, z des Originalbereichs als komplexwertige Variablen s, p in den Bildbereich ein.

Die Transformation der Differentialquotienten ergibt entsprechend der einschlägigen Regeln (vgl. z.B. [BER 74], [DEB 76]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t, z, r) \quad \begin{array}{c} t \text{---} s \\ \text{---} \text{---} \\ z \text{---} p \end{array} s \cdot \Theta(s, p, r) - \mathcal{G}^{**}(0, p, r);$$

$\mathcal{G}^{**}(0, p, r)$ resultiert aus der bezüglich z transformierten Anfangsbedingung

$$\mathcal{G}(0, z, r) = \mathcal{G}_A(z, r) \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \\ z \text{---} p \end{array} \mathcal{G}^{**}(0, p, r) = \mathcal{G}_A^{**}(p, r),$$

wobei $\mathcal{G}_A(z, r) \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \\ z \text{---} p \end{array} \mathcal{G}_A^{**}(p, r)$ die vorgegebene Anfangstemperaturverteilung im Original- bzw. im Bildbereich darstellt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t,z,r) & \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \frac{p}{p} p \cdot \Theta(s,p,r) - \mathcal{G}^*(s,0,r) + e^{-pL} \cdot \mathcal{G}^*(s,L,r) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{G}(t,z,r) & \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \frac{p^2}{p} p^2 \cdot \Theta(s,p,r) - p \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r) \dots \\ & \dots + e^{-pL} \cdot \left[p \cdot \mathcal{G}^*(s,L,r) + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,L,r) \right] \end{aligned}$$

Durch die zweifache Integraltransformation wird damit aus der partiellen Differentialgleichung für $\mathcal{G}(t,z,r)$ bezüglich t, z und r im Originalbereich eine nur noch gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\Theta(s,p,r)$ bezüglich r im Bildbereich erhalten:

$$\frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Theta}{dr} + \kappa^2 \cdot \Theta = F, \quad \Theta = \Theta(s, p, r) \quad (\text{A2.4.1-2})$$

mit

$$\kappa^2 = p^2 - \frac{1}{a} s \quad (\text{A2.4.1-2.1})$$

und

$$\begin{aligned} F = \mathbf{F}(s,p,r) & = p \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r) - e^{-pL} \cdot \left[p \cdot \mathcal{G}^*(s,L,r) + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,L,r) \right] - \dots \\ & \dots - \frac{1}{a} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p,r) - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{Q}_V(s,p,r) \end{aligned} \quad (\text{A2.4.1-2.2})$$

Unter Verwendung von erweiterten Randbedingungen 3. Art bei $z=0$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t,0,r) = h_0 \cdot \mathcal{G}(t,0,r) - \mathbf{r}_0(t,r) \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,0,r) = h_0 \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) - \mathbf{r}_0^*(s,r); \quad (\text{A2.4.1-3.1})$$

mit $h_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda} = \text{konst.}$ und der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}_0(t,r) = h_0 \cdot \mathcal{G}_{U0}(t,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0(t,r) \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \mathbf{r}_0^*(s,p) = h_0 \cdot \mathcal{G}_{U0}^*(s,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0^*(s,r), \quad (\text{A2.4.1-3.2})$$

sowie bei $z=L$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t,L,r) = -h_L \cdot \mathcal{G}(t,L,r) + \mathbf{r}_L(t,r) \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}^*(s,L,r) = -h_L \cdot \mathcal{G}^*(s,L,r) + \mathbf{r}_L^*(s,r); \quad (\text{A2.4.1-4.1})$$

mit $h_L = \frac{\alpha_L}{\lambda} = \text{konst.}$ und der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}_L(t,r) = h_L \cdot \mathcal{G}_{UL}(t,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_L(t,r) \overset{t}{\circ} \overset{s}{\bullet} \mathbf{r}_L^*(s,p) = h_L \cdot \mathcal{G}_{UL}^*(s,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_L^*(s,r), \quad (\text{A2.4.1-4.2})$$

lassen sich in F der Form (A2.4.1-2.2) die beiden Ableitungen nach z eliminieren:

$$F = \mathbf{F}(s,p,r) = (h_0 + p) \cdot \mathcal{G}^*(s,0,r) + e^{-pL} \cdot (h_L - p) \cdot \mathcal{G}^*(s,L,r) - \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{G}_A^{**}(p,r) - \mathbf{r}_0^*(s,r) - e^{-pL} \cdot \mathbf{r}_L^*(s,r) - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_V(s,p,r) \quad (\text{A2.4.1-2.3})$$

Die Lösung der inhomogenen *BESSELS*chen Differentialgleichung (A2.4.1-2) wird aus der Lösung der betreffenden homogenen Gleichung z.B. unter Verwendung der Variation der Konstanten gewonnen:

$$\Theta(s,p,r) = \mathbf{A}(s,p) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa r) + \mathbf{B}(s,p) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa r) + \dots$$

$$\dots + \frac{\pi}{2} \cdot \int_{R_1}^r \rho \cdot [\mathbf{N}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa \rho) - \mathbf{J}_0(\kappa r) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa \rho)] \cdot \mathbf{F}(s,p,\rho) d\rho \quad ; \quad (\text{A2.4.1-5})$$

unter \mathbf{J}_ν und \mathbf{N}_ν sind die *BESSELS*chen und *NEUMANN*schen Funktionen ν -ter Ordnung zu verstehen.

Zur Berechnung der unbestimmten Koeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} sind die beiden Randbedingungen (erweiterte 3. Art) am Hohlzylinderinnen- und -außenmantel heranzuziehen:

- für $r = R_1$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t,z,R_1) = h_1 \cdot \mathcal{G}(t,z,R_1) - \mathbf{r}_1(t,z) \stackrel{t \longleftarrow s}{z \longleftarrow p} \frac{\partial}{\partial r} \Theta(s,p,R_1) = h_1 \cdot \Theta(s,p,R_1) - \mathfrak{H}_1(s,p); \quad (\text{A2.4.1-6.1})$$

mit $h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} = konst.$ und der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}_1(t,z) = h_1 \cdot \mathcal{G}_{U1}(t,z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_1(t,z) \stackrel{t \longleftarrow s}{z \longleftarrow p} \mathfrak{H}_1(s,p) = h_1 \cdot \Theta_{U1}(s,p) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_1(s,p), \quad (\text{A2.4.1-6.2})$$

- für $r = R_2$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t,z,R_2) = -h_2 \cdot \mathcal{G}(t,z,R_2) + \mathbf{r}_2(t,z) \stackrel{t \longleftarrow s}{z \longleftarrow p} \frac{\partial}{\partial r} \Theta(s,p,R_2) = -h_2 \cdot \Theta(s,p,R_2) + \mathfrak{H}_2(s,p); \quad (\text{A2.4.1-7.1})$$

mit $h_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda} = konst.$ und der vorzugebenden Randfunktion

$$\mathbf{r}_2(t,z) = h_2 \cdot \mathcal{G}_{U2}(t,z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_2(t,z) \stackrel{t \longleftarrow s}{z \longleftarrow p} \mathfrak{H}_2(s,p) = h_2 \cdot \Theta_{U2}(s,p) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{Q}_2(s,p). \quad (\text{A2.4.1-7.2})$$

Differentiation von Gl. (A2.4.1-5) nach dem Radius

$$\frac{\partial}{\partial r} \Theta(s,p,r) = -\kappa \cdot \left\{ \mathbf{A}(s,p) \cdot \mathbf{J}_1(\kappa r) + \mathbf{B}(s,p) \cdot \mathbf{N}_1(\kappa r) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\pi}{2} \cdot \int_{R_1}^r \rho \cdot [\mathbf{N}_1(\kappa r) \cdot \mathbf{J}_0(\kappa \rho) - \mathbf{J}_1(\kappa r) \cdot \mathbf{N}_0(\kappa \rho)] \cdot \mathbf{F}(s,p,\rho) d\rho \right\}, \quad (\text{A2.4.1-8})$$

Lokalisieren der Gleichungen (A2.4.1-5) und (A2.4.1-8) auf $r = R_1$ und $r = R_2$ sowie Einsetzen in die Randbedingungen (A2.4.1-6.1) und (A2.4.1-6.2) ergibt ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} , woraus dann

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\left(h_2 D \cdot N_{02}^\bullet - \kappa D \cdot N_{12}^\bullet\right) \cdot \mathfrak{H}_1 - \left(h_1 D \cdot N_{01}^\bullet + \kappa D \cdot N_{11}^\bullet\right) \cdot \left[\mathfrak{H}_2 - \frac{\pi}{2D} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_{0\rho}^\bullet \cdot \mathbf{F} \cdot d\rho\right]}{h_1 \cdot \mathbf{Z}_{01}^\bullet + \kappa \cdot \mathbf{Z}_{11}^\bullet} \\
 \mathbf{B} &= \frac{\left(h_1 D \cdot \mathbf{J}_{01}^\bullet + \kappa D \cdot \mathbf{J}_{11}^\bullet\right) \cdot \left[\mathfrak{H}_2 - \frac{\pi}{2D} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_{0\rho}^\bullet \cdot \mathbf{F} \cdot d\rho\right] - \left(h_2 D \cdot \mathbf{J}_{02}^\bullet - \kappa D \cdot \mathbf{J}_{12}^\bullet\right) \cdot \mathfrak{H}_1}{h_1 \cdot \mathbf{Z}_{01}^\bullet + \kappa \cdot \mathbf{Z}_{11}^\bullet}
 \end{aligned}$$

erhalten werden; dabei - und z.T. im Vorgriff auf die weitere Rechnung - wurden folgende Bezeichnungen bzw. Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_{\eta r}^\bullet &:= \left(h_2 D \cdot N_{02}^\bullet - \kappa D \cdot N_{12}^\bullet\right) \cdot \mathbf{J}_{\eta r}^\bullet - \left(h_2 D \cdot \mathbf{J}_{02}^\bullet - \kappa D \cdot \mathbf{J}_{12}^\bullet\right) \cdot N_{\eta r}^\bullet \\
 \bar{\mathbf{Z}}_{\eta r}^\bullet &:= \left(h_1 D \cdot N_{01}^\bullet + \kappa D \cdot N_{11}^\bullet\right) \cdot \mathbf{J}_{\eta r}^\bullet - \left(h_1 D \cdot \mathbf{J}_{01}^\bullet + \kappa D \cdot \mathbf{J}_{11}^\bullet\right) \cdot N_{\eta r}^\bullet
 \end{aligned}$$

mit $D := R_2 - R_1$

$$\mathbf{J}_{\eta r}^\bullet := \mathbf{J}_\eta(\kappa r), \quad \mathbf{J}_{\eta 1}^\bullet := \mathbf{J}_\eta(\kappa R_1), \quad \mathbf{J}_{\eta 2}^\bullet := \mathbf{J}_\eta(\kappa R_2)$$

$$N_{\eta r}^\bullet := N_\eta(\kappa r), \quad N_{\eta 1}^\bullet := N_\eta(\kappa R_1), \quad N_{\eta 2}^\bullet := N_\eta(\kappa R_2) \quad \text{für } \eta = 0 \text{ oder } 1,$$

wobei sich diese Ausdrücke speziell auf dem Hohlzylinderaußen- bzw. -innenmantel bei $r = R_2$ bzw. $r = R_1$ bedeutend vereinfachen:

$$\mathbf{Z}_{02}^\bullet \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \frac{D}{R_2}, \quad \mathbf{Z}_{12}^\bullet \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_2 D}{\kappa R_2}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{01}^\bullet \equiv -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{D}{R_1}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_{11}^\bullet \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_1 D}{\kappa R_1}.$$

Einsetzen der beiden Koeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} in (A2.4.1-5) führt - nach umformender Rechnung - auf die Bildfunktion

$$\Theta(s, p, r) = \mathbf{G}^\bullet(s, p; r, R_1) \cdot \mathfrak{H}_1(s, p) + \mathbf{G}^\bullet(s, p; r, R_2) \cdot \mathfrak{H}_2(s, p) - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}^\bullet(s, p; r, \rho) \cdot \mathbf{F}(s, p, \rho) \cdot d\rho \tag{A2.4.1-9.1}$$

mit noch nicht entwickelter GREENScher Bildfunktion

$$\mathbf{G}^\bullet(s, p; r, \rho) = -\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho}{D}}{h_1 \cdot \mathbf{Z}_{01}^\bullet + \kappa \cdot \mathbf{Z}_{11}^\bullet} \cdot \begin{cases} \mathbf{Z}_{0r}^\bullet \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{0\rho}^\bullet & \text{für } R_1 \leq \rho \leq r \leq R_2 \\ \bar{\mathbf{Z}}_{0r}^\bullet \cdot \mathbf{Z}_{0\rho}^\bullet & \text{für } R_1 \leq r \leq \rho \leq R_2. \end{cases} \tag{A2.4.1-9.2}$$

Die einfachen Nullstellen $\kappa = \kappa_n = \frac{\mu_n}{D}$ des Nenners $h_1 \cdot \mathbf{Z}_{01}^\bullet + \kappa \cdot \mathbf{Z}_{11}^\bullet$ mit positiven, nach steigender Größe geordneten Eigenwerten μ_n aus der Eigenwertgleichung

$$\boxed{h_1 D \cdot \mathbf{Z}_{01} + \mu_n \cdot \mathbf{Z}_{11} = 0} \tag{A2.4.1-10}$$

verursachen Singularitäten an den Stellen $p = p_n^\pm(s) = \pm \sqrt{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2}$, die für s -Werte, die einer rechten Halbebene angehören, die gesamte reelle Achse überstreichen. Da $\Theta(s, p, r)$ als endliche

\mathcal{L} -Transformierte bezüglich z eine ganze Funktion in p sein muß, ist das Verschwinden des Zählers von Θ für alle p_n^\pm zu fordern - vgl. [BER 74, Satz 29.2 und § 36]. Aus dieser Forderung resultieren die beiden Bedingungsgleichungen, die zur Bestimmung der noch unbekanntem Stirnflächentemperaturen $\mathcal{G}^*(s,0,r)$ und $\mathcal{G}^*(s,L,r)$ benötigt werden.

Mit $p = p_n^+ := +\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2}$ und $p = p_n^- := -\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2}$ lauten diese Bedingungsgleichungen:

$$R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathfrak{H}_1(s, p_n^+) + \frac{2D}{\pi} \cdot \mathfrak{H}_2(s, p_n^+) - \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathbf{F}(s, p_n^+, \rho) \cdot d\rho = 0 \quad (\text{A2.4.1-11.1})$$

$$R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathfrak{H}_1(s, p_n^-) + \frac{2D}{\pi} \cdot \mathfrak{H}_2(s, p_n^-) - \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathbf{F}(s, p_n^-, \rho) \cdot d\rho = 0 \quad (\text{A2.4.1-11.2})$$

wobei von der Beziehung $\bar{\mathbf{Z}}_{0r} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{D \cdot \mathbf{Z}_{0r}}{R_1 \cdot \mathbf{Z}_{01}}$ unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\eta r} &:= c_1 \cdot \mathbf{J}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) + c_2 \cdot \mathbf{N}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \\ c_1 &:= h_2 D \cdot \mathbf{N}_0\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right) - \mu_n \cdot \mathbf{N}_1\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right), \\ c_2 &:= -\left(h_2 D \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right) - \mu_n \cdot \mathbf{J}_1\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{\eta r} &:= \bar{c}_1 \cdot \mathbf{J}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) + \bar{c}_2 \cdot \mathbf{N}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \\ \bar{c}_1 &:= h_1 D \cdot \mathbf{N}_0\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right) + \mu_n \cdot \mathbf{N}_1\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right), \\ \bar{c}_2 &:= -\left(h_1 D \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right) + \mu_n \cdot \mathbf{J}_1\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\eta r} &:= \mathbf{J}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right), & \mathbf{J}_{\eta 1} &:= \mathbf{J}_\eta\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right), & \mathbf{J}_{\eta 2} &:= \mathbf{J}_\eta\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right) \\ \mathbf{N}_{\eta r} &:= \mathbf{N}_\eta\left(\mu_n \frac{r}{D}\right), & \mathbf{N}_{\eta 1} &:= \mathbf{N}_\eta\left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right), & \mathbf{N}_{\eta 2} &:= \mathbf{N}_\eta\left(\mu_n \frac{R_2}{D}\right) \end{aligned}$$

für $\eta = 0$ oder 1

Gebrauch gemacht wurde; speziell vereinfachen sich

$$\mathbf{Z}_{02} \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \frac{D}{R_2}, \quad \mathbf{Z}_{12} \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_2 D^2}{\mu_n R_2} \quad \text{und wegen (A2.4.1-10)} \quad \mathbf{Z}_{11} = -\frac{h_1 D}{\mu_n} \cdot \mathbf{Z}_{01}.$$

Mit der Bezeichnung

$$\begin{aligned} \Phi_n(s, p) &:= R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathfrak{H}_1(s, p) + \frac{2D}{\pi} \cdot \mathfrak{H}_2(s, p) + \dots \\ &\dots + \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \left(\frac{1}{a} \mathcal{G}_A^{**}(p, r) + \mathbf{r}_0^*(s, r) + e^{-pL} \cdot \mathbf{r}_L^*(s, r) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{Q}(s, p, r) \right) \cdot d\rho \end{aligned}$$

wird das Gleichungssystem (A2.4.1-11) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{h_0 + p_n^+}{D} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho + \frac{h_L - p_n^+}{D} \cdot e^{-p_n^+ \cdot L} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, L, \rho) \cdot d\rho &= \Phi_n(s, p_n^+) \\ \frac{h_0 + p_n^-}{D} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho + \frac{h_L - p_n^-}{D} \cdot e^{-p_n^- \cdot L} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, L, \rho) \cdot d\rho &= \Phi_n(s, p_n^-) \end{aligned} \quad (\text{A2.4.1-12})$$

erhalten. Auflösung nach den beiden unbekanntem Integralen ergibt

$$\int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, 0, \rho) \cdot d\rho = D \cdot \frac{(h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} \cdot \Phi_n(s, p_n^+) - (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L} \cdot \Phi_n(s, p_n^-)}{(h_0 + p_n^+) \cdot (h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} - (h_0 + p_n^-) \cdot (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L}} \quad (\text{A2.4.1-13.1})$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_{0\rho} \cdot \mathcal{G}^*(s, L, \rho) \cdot d\rho = D \cdot \frac{(h_0 + p_n^+) \cdot \Phi_n(s, p_n^-) - (h_0 + p_n^-) \cdot \Phi_n(s, p_n^+)}{(h_0 + p_n^+) \cdot (h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} - (h_0 + p_n^-) \cdot (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L}} \quad (\text{A2.4.1-13.2})$$

Die Gleichungen (A2.4.1-13) stellen die Zähler von Koeffizienten einer Reihe eines Systems orthogonaler Zylinderfunktionen dar, die durch die Vorschrift - vgl. [KRA 63, Kap. 7.16.1]

$$\begin{aligned} f(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right), & f_n &:= \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \\ f_n^{(Z)} &:= \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{\rho}{D} \right) \cdot f(\rho) \cdot d\rho \\ f_n^{(N)} &:= \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_0^2 \left(\mu_n \frac{\rho}{D} \right) \cdot d\rho \\ &= \frac{1}{2\mu_n^2} \cdot \left[\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.4.1-R1})$$

gebildet wird, womit die Lösungen der beiden gesuchten Stirnflächentemperaturen durch

$$\mathcal{G}^*(s, 0, r) = 2D \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right)}{\left[\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right]} \cdot \dots \cdot \frac{(h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} \cdot \Phi_n(s, p_n^+) - (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L} \cdot \Phi_n(s, p_n^-)}{(h_0 + p_n^+) \cdot (h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} - (h_0 + p_n^-) \cdot (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L}} \quad (\text{A2.4.1-14.1})$$

$$\mathcal{G}^*(s, L, r) = 2D \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right)}{\left[\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right]} \cdot \dots \cdot \frac{(h_0 + p_n^+) \cdot \Phi_n(s, p_n^-) - (h_0 + p_n^-) \cdot \Phi_n(s, p_n^+)}{(h_0 + p_n^+) \cdot (h_L - p_n^-) e^{-p_n^- \cdot L} - (h_0 + p_n^-) \cdot (h_L - p_n^+) e^{-p_n^+ \cdot L}} \quad (\text{A2.4.1-14.2})$$

leicht angegeben werden können, auch wenn sie für die weitere Rechnung nicht in dieser expliziten Form, sondern nur in der impliziten Form (A2.4.1-13) benötigt werden.

In Vorbereitung der Rücktransformation der Bildfunktion (A2.4.1-9) soll der bereits beim Vollzylinder erfolgreich beschrittene Weg eingeschlagen werden, d.h., es soll eine die Polstellen widerspiegelnde Partialbruchentwicklung angestrebt werden. Dieses Ziel kann - wie sich zeigen wird - wiederum dadurch erreicht werden, daß die GREENSche Funktion (A2.4.1-9.2) in eine Reihe nach Zylinderfunktionen der soeben verwendeten Art, jetzt aber für zweifaches Argument, entwickelt wird:

$$\begin{aligned}
 f(r, \rho) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right), & f_n &:= \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \\
 f_n^{(Z)} &:= \int_{R_1}^{R_2} r \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \int_{R_1}^r \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right) \cdot f(r, \rho) \cdot d\rho \, dr \\
 f_n^{(N)} &:= \int_{R_1}^{R_2} r \mathbf{Z}_0^2\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \int_{R_1}^r \rho \mathbf{Z}_0^2\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right) \cdot d\rho \, dr \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu_n^2} \cdot \left[\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right] \right\}^2
 \end{aligned}$$

(A2.4.1-R2)

Damit kann nach einiger Rechnung, unter Beachtung von $p_n^+ = -p_n^- = p_n := +\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2}$ und $\kappa^2 - \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2 \equiv p^2 - p_n^2$, für (A2.4.1-9.2) die folgende Darstellung erhalten werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^\bullet(s, p; r, \rho) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s, p; \rho) \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \\
 \text{mit } G_n(s, p; \rho) &:= \frac{-2\mu_n^2 \cdot \rho \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right)}{\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2} \cdot \frac{1}{p^2 - p_n^2},
 \end{aligned} \tag{A2.4.1-9.3}$$

womit sich letztlich die in Aussicht gestellte Partialbruchreihe bezüglich der Polstellen $p = p_n$ von selbst ergeben hat.

Die aus (A2.4.1-9.1) und (A2.4.1-9.3) bestehende Bildfunktion läßt sich weiter vereinfachen und umformen, wobei u.a. Gebrauch von der Tatsache gemacht wird, daß alle Summanden, die mit dem Faktor e^{-pL} behaftet sind - entsprechend dem Verschiebungssatz der LAPLACE-Transformation - keinen Einfluß auf das Ergebnis der Originalfunktion im Bereich $z < L$ haben und nachfolgend nicht weiter berücksichtigt werden brauchen. Weiterhin lassen sich die Integrale über die Stirnflächentemperaturen durch die rechten Seiten (A2.4.1-13) substituieren.

Damit wird die folgende Darstellung für die Bildfunktion gefunden:

$$\Theta(s,p,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(s,p;r)}{r} \cdot \left\{ \widehat{\mathbf{F}}_n(s,p) - \frac{h_0+p}{(h_0+p_n) \cdot (h_L+p_n) \cdot e^{p_n L} - (h_0-p_n) \cdot (h_L-p_n) \cdot e^{-p_n L}} \cdot \left[(h_L+p_n) \cdot e^{p_n L} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_n(s,p_n) - (h_L-p_n) \cdot e^{-p_n L} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_n(s,-p_n) - \dots \right] \right. \\ \left. \dots - \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_0 \rho \cdot \left(\frac{(p_n-p)(h_L+p_n) \cdot e^{p_n L} + (p_n+p)(h_L-p_n) \cdot e^{-p_n L}}{h_0+p} \cdot \mathbf{r}_0^*(s,\rho) - 2p_n \cdot \mathbf{r}_L^*(s,\rho) \right) \cdot d\rho \right\} \quad (\text{A2.4.1-15})$$

$$\text{mit } \widehat{\mathbf{F}}_n(s,p) := R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathfrak{H}_1(s,p) + \frac{2D}{\pi} \cdot \mathfrak{H}_2(s,p) + \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_0 \rho \cdot \left[\frac{1}{a} \mathfrak{G}_A^{**}(p,\rho) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{Q}_V(s,p,\rho) \right] \cdot d\rho .$$

Diese Darstellung läßt sich mit Vorteil verwenden, wenn für die Rand- und Quellenfunktionen bereits im Bildbereich konkrete Ansätze eingeführt werden sollen, um ggf. gewisse Eigenschaften der \mathfrak{L} -Transformation vor der Rücktransformation entsprechend nutzen zu können. Diese Möglichkeit bietet sich z.B. im Zusammenhang mit der asymptotischen Entwicklung für große oder kleine Werte einer transformierten Variablen an. Eine andere Form der Lösung im Bildbereich wird dagegen erhalten, wenn von der Symbolschreibweise der transformierten Rand- und Quellfunktionen zu deren ursprünglicher \mathfrak{L} -Integraldarstellung übergegangen wird:

$$\Theta(s,p,r) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(s,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathfrak{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\ \dots + \int_0^{\infty} \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(s,\tau;p,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \int_0^{\infty} \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(s,\tau;p,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\ \dots + \int_0^{\infty} \int_0^L \mathbf{G}(s,\tau;p,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^L \mathbf{G}(s,\tau;p,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\ \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau \quad (\text{A2.4.1-16.1})$$

mit

$$\mathbf{G}(s,\tau;p,\zeta;r,\rho) := \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s,p;\rho) \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \dots \\ \dots \cdot \left[e^{-p\zeta} - (h_0+p) \cdot \frac{(h_L+p_n) \cdot e^{p_n(L-\zeta)} - (h_L-p_n) \cdot e^{-p_n(L-\zeta)}}{(h_0+p_n) \cdot (h_L+p_n) \cdot e^{p_n L} - (h_0-p_n) \cdot (h_L-p_n) \cdot e^{-p_n L}} \right] \cdot e^{-s\tau} \\ \text{sowie mit } p_n = +\sqrt{\frac{s}{a} + \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2} . \quad (\text{A2.4.1-16.2})$$

Die nicht ganz leicht erscheinende Aufgabe, das Ergebnis des Bildbereichs in den Originalbereich zurückzutransformieren, soll - wie im Falle des Vollzylinders - schrittweise vorgenommen werden. Mit Korrespondenzen der Hyperbelfunktionen sowie dem Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-s\tau}}{p^2 - p_n^2} \cdot \left[e^{-p\zeta} - (h_0 + p) \cdot \frac{(h_L + p_n) \cdot e^{p_n(L-\zeta)} - (h_L - p_n) \cdot e^{-p_n(L-\zeta)}}{(h_0 + p_n) \cdot (h_L + p_n) \cdot e^{p_n L} - (h_0 - p_n) \cdot (h_L - p_n) \cdot e^{-p_n L}} \right] \\
 & \bullet \xrightarrow{p \quad z} \\
 & e^{-s\tau} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p_n} \sinh(p_n \cdot (z - \zeta)) \quad \text{für } z \geq \zeta \quad \dots \\ \dots - \frac{(h_L + p_n) \cdot e^{p_n(L-\zeta)} - (h_L - p_n) \cdot e^{-p_n(L-\zeta)}}{(h_0 + p_n) \cdot (h_L + p_n) \cdot e^{p_n L} - (h_0 - p_n) \cdot (h_L - p_n) \cdot e^{-p_n L}} \cdot \left[\frac{h_0}{p_n} \sinh(p_n z) + \cosh(p_n z) \right] \end{array} \right\} \\
 & = \frac{-e^{-s\tau}}{p_n \cdot \left[(p_n^2 + h_0 h_L) \cdot \sinh(p_n L) + (h_0 + h_L) p_n \cdot \cosh(p_n L) \right]} \cdot \dots \\
 & \dots \left\{ \begin{array}{l} [h_L \sinh(p_n(L-z)) + p_n \cosh(p_n(L-z))] \cdot [h_0 \sinh(p_n \zeta) + p_n \cosh(p_n \zeta)] \quad \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \leq L \\ [h_0 \sinh(p_n z) + p_n \cosh(p_n z)] \cdot [h_L \sinh(p_n(L-\zeta)) + p_n \cosh(p_n(L-\zeta))] \quad \text{für } 0 \leq z \leq \zeta \leq L \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Diese Funktion besitzt Einfachpole bei $p_n = p_n(s_k) = i \frac{v_k}{L}$, d.h., bei

$$s = s_k = -a \cdot \left[\left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right] \quad \text{mit positiven, aufsteigend geordneten } v_k \text{ aus einer zweiten}$$

$$\text{Eigenwertgleichung } \boxed{(v_k^2 - h_0 h_L L^2) \cdot \sin v_k - (h_0 + h_L) L \cdot v_k \cos v_k = 0}. \quad (\text{A2.4.1-17})$$

Es gibt wieder zwei Wege der Rücktransformation: Entweder wird sie direkt auf der Grundlage des komplexen Umkehrintegrals unter Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel, wie dem CAUCHYschen Residuenkalkül, vorgenommen, oder aber, die Bildfunktion wird zunächst in eine FOURIER-Reihe hinsichtlich (z, ζ) entwickelt, die bezüglich s dann zufällig wieder die Gestalt einer Partialbruchreihe aufweist und sehr leicht gliedweise zurücktransformiert werden kann. Da allerdings a priori weder gesichert ist, daß die Entwicklung in eine FOURIER-Reihe erlaubt ist, noch daß die Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation zulässig ist, muß die Richtigkeit des Ergebnisses vorerst offen bleiben. U.a. unter Verwendung von Dämpfungs- und Verschiebungssatz ergibt sich nunmehr die Originalfunktion zu:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \xrightarrow{s \quad t} \\
 & -2aL \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-a \left[\left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right] (t-\tau)}}{(2 + h_0 L + h_L L) \cdot v_k \sin v_k + (v_k^2 - (h_0 + h_L) L - h_0 h_L L^2) \cos v_k} \cdot \dots \\
 & \dots \left\{ \begin{array}{l} \left[h_L \sin\left(v_k \frac{L-z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{L-z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) \right] \quad \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \leq L \\ \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_L \sin\left(v_k \frac{L-\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{L-\zeta}{L}\right) \right] \quad \text{für } 0 \leq z \leq \zeta \leq L \end{array} \right\} \\
 & = -2aL \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[h_0 \sin\left(v_k \frac{z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) \right] \cdot e^{-a \left[\left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right] (t-\tau)}}{v_k^2 + (1 + h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_L L)^2} h_L L}
 \end{aligned}$$

für $\tau < t$, $0 \leq z, \zeta \leq L$.

Damit läßt sich die zur Bildfunktion (A2.4.1-16) gehörende Originalfunktion angeben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t, z, r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t, 0; z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t, \tau; z, 0; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_0(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t, \tau; z, L; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_L(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t, \tau; z, \zeta; r, R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\tau, \zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 & \dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t, \tau; z, \zeta; r, R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\tau, \zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau, \zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{A2.4.1-18.1}$$

$\mathbf{g}(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) :=$

$$\begin{aligned}
 & 4aL \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right)}{\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2\right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2\right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2} \cdot e^{-a \cdot \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2 \cdot (t-\tau)} \dots \\
 & \dots \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[h_0 \sin\left(v_k \frac{z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) \right]}{v_k^2 + (1+h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_L L)^2} h_L L} \cdot e^{-a \cdot \left(\frac{v_k}{L}\right)^2 \cdot (t-\tau)}
 \end{aligned} \tag{A2.4.1-18.2}$$

für $0 \leq z, \zeta \leq L$, $R_1 \leq r, \rho \leq R_2$ sowie μ_n aus (A2.4.1-10) und v_k aus (A2.4.1-17).

Insbesondere im Zusammenhang mit der Rücktransformation zur Erlangung dieses Ergebnisses waren einige Annahmen getroffen worden, deren Richtigkeit noch nicht bestätigt ist. Aus diesem Grunde, aber auch zur Ausschließung ggf. weiterer Fehlerquellen, ist es angebracht, zu prüfen, ob das Ergebnis (A2.4.1-18) das Anfangs-Randwertproblem (A2.4.1-1), (A2.4.1-3), (A2.4.1-4), (A2.4.1-6), (A2.4.1-7) tatsächlich löst. Dieser Nachweis ist so zu führen, daß von (A2.4.1-18) zunächst einmal die betreffenden partiellen Ableitungen gebildet werden, die dann in die Differentialgleichung (A2.4.1-1) sowie - für spezifizierte Variable - in die Randbedingungen (A2.4.1-3, A2.4.1-4, A2.4.1-6, A2.4.1-7) einzusetzen sind. Werden dabei alle diese Gleichungen und darüberhinaus die Anfangsbedingung $\mathcal{G}(0, z, r) = \mathcal{G}_A(z, r)$ erfüllt, so kann das Ergebnis (A2.4.1-18) als gesichert angesehen werden. Dieser Nachweis ist mit einiger Rechnung verbunden, weshalb hier darauf verzichtet wird.

A2.4.2 Spezielle Lösungen

Auf der Grundlage der Lösungen (A2.4.1-18) bzw. (A2.4.1-16) oder (A2.4.1-15) lassen sich weitere Lösungen für spezielle Randfunktionen und Quellen oder für stationäre Verhältnisse ableiten.

A2.4.2.1 Zeitlich konstante Randfunktionen und Quellen

Für zeitunabhängige Randfunktionen und Quellen kann in (A2.4.1-18) - unter Voraussetzung, daß Summation und Integration vertauschbar sind - über die Zeitvariable t integriert werden, wodurch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) = & \frac{1}{a} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 & \dots + \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\
 & \dots + \int_0^L \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta
 \end{aligned} \tag{A2.4.2.1-1.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,\rho) & := \int_0^t \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) \cdot d\tau = \int_0^t \mathbf{g}(\tau,0;z,\zeta;r,\rho) \cdot d\tau = \\
 & = 4L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{r}{D}) \cdot \rho \mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{\rho}{D})}{\left(\left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right) \cdot \left\{ \left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right\}} \dots \\
 & \dots \cdot \frac{\left[h_0 \sin(v_k \frac{z}{L}) + \frac{v_k}{L} \cos(v_k \frac{z}{L}) \right] \cdot \left[h_0 \sin(v_k \frac{\zeta}{L}) + \frac{v_k}{L} \cos(v_k \frac{\zeta}{L}) \right]}{v_k^2 + (1+h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_1 L)^2} h_1 L} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right\} \cdot t} \right)
 \end{aligned} \tag{A2.4.2.1-1.2}$$

für $0 \leq z, \zeta \leq L$, $R_1 \leq r, \rho \leq R_2$ sowie μ_n aus (A2.4.1-10) und v_k aus (A2.4.1-17) erhalten wird.

A2.4.2.2 Stationäre Verhältnisse

Wenn Randfunktionen und Quellen zeitunabhängig sind oder wenn sie wenigstens einen Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ besitzen, d.h., $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}_0(t,r) = \mathbf{r}_0(r)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}_L(t,r) = \mathbf{r}_L(r)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}_1(t,r) = \mathbf{r}_1(r)$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}_2(t,r) = \mathbf{r}_2(r)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_V(t,z,r) = \mathbf{q}_V(z,r)$ so daß auch $\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)_{t \rightarrow \infty} = 0$ existiert, kann eine

Lösung für stationäre Bedingungen aus (A2.4.2.1-1) durch Grenzübergang $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}(t,z,r) = \mathcal{G}(z,r)$

unter Beachtung von $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,\rho) = 0$ unmittelbar gefunden werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(z,r) &= \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\
 &\dots + \int_0^L \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \quad (\text{A2.4.2.2-1.1}) \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_{\infty}(z,\zeta;r,\rho) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{g}}(t;z,\zeta;r,\rho) = \\
 &= 4L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{r}{D}) \cdot \rho \mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{\rho}{D})}{\left(\left(\frac{\mu_n}{D} \right)^2 + \left(\frac{v_k}{L} \right)^2 \right) \cdot \left\{ \left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right\}} \cdot \dots \\
 &\dots \cdot \frac{\left[h_0 \sin(v_k \frac{z}{L}) + \frac{v_k}{L} \cos(v_k \frac{z}{L}) \right] \cdot \left[h_0 \sin(v_k \frac{\zeta}{L}) + \frac{v_k}{L} \cos(v_k \frac{\zeta}{L}) \right]}{v_k^2 + (1 + h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_L L)^2} h_L L} \quad (\text{A2.4.2.2-1.2})
 \end{aligned}$$

für $0 \leq z, \zeta \leq L$, $R_1 \leq r, \rho \leq R_2$ sowie μ_n aus (A2.4.1-10) und v_k aus (A2.4.1-17).

Eine andere Form der Lösung wird erhalten, wenn der entsprechende Grenzwertsatz der \mathcal{G} -Transformation auf Bildfunktion (A2.4.1-16) - jetzt für zeitunabhängige Randbedingungen und Quellen - angewandt wird:

$$\begin{aligned}
 \Theta(p,r) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s,p,r) \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(0,0;p,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(0,0;p,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \quad (\text{A2.4.2.2-2}) \\
 &\dots + \int_0^L \mathbf{G}(0,0;p,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \mathbf{G}(0,0;p,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{G}(0,0;p,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta
 \end{aligned}$$

mit $\mathbf{G}(0,0;p,\zeta;r,\rho)$ aus (A2.4.1-16.2). Rücktransformation ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(z,r) &= \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\
 &\dots + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{r}_1(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta
 \end{aligned} \tag{A2.4.2.2-3.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,\rho) &:= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right)}{\left\{ \left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right\}} \dots \\
 &\dots \frac{1}{p_n \cdot \left[(p_n^2 + h_0 h_L) \cdot \sinh(p_n L) + (h_0 + h_L) p_n \cdot \cosh(p_n L) \right]} \dots \\
 &\dots \begin{cases} \left[h_L \sinh(p_n(L-z)) + p_n \cosh(p_n(L-z)) \right] \cdot \left[h_0 \sinh(p_n \zeta) + p_n \cosh(p_n \zeta) \right] & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \leq L \\ \left[h_0 \sinh(p_n z) + p_n \cosh(p_n z) \right] \cdot \left[h_L \sinh(p_n(L-\zeta)) + p_n \cosh(p_n(L-\zeta)) \right] & \text{für } 0 \leq z \leq \zeta \leq L \end{cases} \\
 &\dots \tag{A2.4.2.2-3.2}
 \end{aligned}$$

und mit $p_n = p_n(0) \equiv \frac{\mu_n}{D}$ sowie μ_n aus (A2.4.1-10).

Die auf etwas verschiedenen Wegen ermittelten Lösungen (A2.4.2.2-1) und (A2.4.2.2-3) sollten zum selben Ergebnis führen, d.h., es kann sich nur um verschiedene Formen der gleichen Lösung handeln. Mit dieser Überlegung führt der Vergleich von $\mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,\rho)$ und $\tilde{\mathbf{g}}_\infty(z,\zeta;r,\rho)$ gemäß (A2.4.2.2-3.2) und (A2.4.2.2-1.2) zur Zuordnung der Reihe über k zu folgender Summe:

$$\begin{aligned}
 &2L \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[h_0 \sin\left(v_k \frac{z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) \right]}{\left(p_n^2 + \left(\frac{v_k}{L}\right)^2 \right) \cdot \left(v_k^2 + (1 + h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_L L)^2} h_L L \right)} = \\
 &= \frac{1}{p_n \cdot \left[(p_n^2 + h_0 h_L) \cdot \sinh(p_n L) + (h_0 + h_L) p_n \cdot \cosh(p_n L) \right]} \dots \\
 &\dots \begin{cases} \left[h_L \sinh(p_n(L-z)) + p_n \cosh(p_n(L-z)) \right] \cdot \left[h_0 \sinh(p_n \zeta) + p_n \cosh(p_n \zeta) \right] & \text{für } 0 \leq \zeta \leq z \leq L \\ \left[h_0 \sinh(p_n z) + p_n \cosh(p_n z) \right] \cdot \left[h_L \sinh(p_n(L-\zeta)) + p_n \cosh(p_n(L-\zeta)) \right] & \text{für } 0 \leq z \leq \zeta \leq L \end{cases} \\
 &\tag{A2.4.2.2-S1}
 \end{aligned}$$

Weiterhin läßt sich in (A2.4.2.2-1.2) für die Reihe über n fragen, ob sie evtl. ebenfalls einen geschlossenen Ausdruck für die Summe besitzt. Tatsächlich, eine Reihe dieser Art wurde bereits

bei der Entwicklung von (A2.4.1-9.2) in der Gestalt (A2.4.1-9.3) erhalten, so daß jetzt umgekehrt folgende Summation möglich ist:

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \cdot \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right) \cdot \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right)}{\left(\left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2 - \kappa_k^2\right) \cdot \left\{ \left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2 \right\}} = \\
 & = - \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho}{D}}{h_1 \cdot \mathbf{Z}_0\left(\kappa_k R_1\right) + \kappa_k \cdot \mathbf{Z}_1\left(\kappa_k R_1\right)} \cdot \begin{cases} \mathbf{Z}_0\left(\kappa_k r\right) \cdot \bar{\mathbf{Z}}_0\left(\kappa_k \rho\right) & \text{für } R_1 \leq \rho \leq r \leq R_2 \\ \bar{\mathbf{Z}}_0\left(\kappa_k r\right) \cdot \mathbf{Z}_0\left(\kappa_k \rho\right) & \text{für } R_1 \leq r \leq \rho \leq R_2 \end{cases} \quad (\text{A2.4.2.2-S2}) \\
 & = \frac{\frac{\rho}{D}}{h_1 \cdot \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{R_1}{L}\right) - \frac{v_k}{L} \cdot \mathfrak{Z}_1\left(v_k \frac{R_1}{L}\right)} \cdot \begin{cases} \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{r}{L}\right) \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_0\left(v_k \frac{\rho}{L}\right) & \text{für } R_1 \leq \rho \leq r \leq R_2 \\ \bar{\mathfrak{Z}}_0\left(v_k \frac{r}{L}\right) \cdot \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{\rho}{L}\right) & \text{für } R_1 \leq r \leq \rho \leq R_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

mit $\kappa_k = i \frac{v_k}{L}$ und den modifizierten Zylinderfunktionen für $\eta = 0$ oder 1 :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) & \equiv -\frac{\pi}{2} \cdot (-i)^\eta \cdot \mathbf{Z}_\eta\left(i \cdot v_k \frac{r}{L}\right) := \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{K}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) \\
 \mathbf{e}_1 & := h_2 D \cdot \mathbf{K}_0\left(v_k \frac{R_2}{L}\right) - v_k \frac{D}{L} \cdot \mathbf{K}_1\left(v_k \frac{R_2}{L}\right), \\
 \mathbf{e}_2 & := (-1)^{\eta+1} \cdot \left(h_2 D \cdot \mathbf{I}_0\left(v_k \frac{R_2}{L}\right) + v_k \frac{D}{L} \cdot \mathbf{I}_1\left(v_k \frac{R_2}{L}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathfrak{Z}}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) & \equiv -\frac{\pi}{2} \cdot (-i)^\eta \cdot \bar{\mathbf{Z}}_\eta\left(i \cdot v_k \frac{r}{L}\right) := \bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{I}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) + \bar{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{I}_\eta\left(v_k \frac{r}{L}\right) \\
 \bar{\mathbf{e}}_1 & := h_1 D \cdot \mathbf{K}_0\left(v_k \frac{R_1}{L}\right) + v_k \frac{D}{L} \cdot \mathbf{K}_1\left(v_k \frac{R_1}{L}\right), \\
 \bar{\mathbf{e}}_2 & := (-1)^{\eta+1} \cdot \left(h_1 D \cdot \mathbf{I}_0\left(v_k \frac{R_1}{L}\right) - v_k \frac{D}{L} \cdot \mathbf{I}_1\left(v_k \frac{R_1}{L}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Damit ist neben (A2.4.2.2-3.2) eine weitere Darstellung der GREENSchen Funktion (A2.4.2.2-1.2) gewonnen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_\infty(z, \zeta; r, \rho) & = \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, \rho) \\
 & = 2L \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[h_0 \sin\left(v_k \frac{z}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{z}{L}\right) \right] \cdot \left[h_0 \sin\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) + \frac{v_k}{L} \cos\left(v_k \frac{\zeta}{L}\right) \right]}{v_k^2 + (1 + h_0 L) h_0 L + \frac{v_k^2 + (h_0 L)^2}{v_k^2 + (h_L L)^2} h_L L} \cdot \dots \\
 & \dots \cdot \frac{\frac{\rho}{D}}{h_1 \cdot \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{R_1}{L}\right) - \frac{v_k}{L} \cdot \mathfrak{Z}_1\left(v_k \frac{R_1}{L}\right)} \cdot \begin{cases} \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{r}{L}\right) \cdot \bar{\mathfrak{Z}}_0\left(v_k \frac{\rho}{L}\right) & \text{für } R_1 \leq \rho \leq r \leq R_2 \\ \bar{\mathfrak{Z}}_0\left(v_k \frac{r}{L}\right) \cdot \mathfrak{Z}_0\left(v_k \frac{\rho}{L}\right) & \text{für } R_1 \leq r \leq \rho \leq R_2 \end{cases} \quad (\text{A2.4.2.2-4})
 \end{aligned}$$

für $0 \leq z, \zeta \leq L$ sowie v_k aus (A2.4.1-17).

Vorteilhafterweise läßt sich auch in (A2.4.2.1-1.2) der nicht mit der \mathbf{e} -Funktion versehene Doppelsumenterm konvergenzverbessernd mit den Reihensummen (A2.4.2.2-S1) oder (A2.4.2.2-S2) in eine Einfachsumme umformen.

A2.4.2.3 Spezielle Rand- und Gebietsfunktionen

Die konkrete analytische oder numerische Auswertung verlangt, die mittels GREENScher Funktion angegebenen Lösungsdarstellungen ganz konkreten Rand- und Quellfunktionen anzupassen. Mit der gleichen, bereits für den Vollzylinder in Kapitel A2.3.2.5 gegebenen Begründung bieten sich für die z - und t -Abhängigkeiten *Spline*-Funktionsansätze an:

$$\mathbf{r}(z) := \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} (z - L_k)^\beta \quad (\text{A2.4.2.3-1})$$

bzw.

$$\mathbf{r}(t, z) := \sum_{j=0}^{j_E} \boldsymbol{\theta}(t - T_j) \sum_{\eta=0}^{\eta_E} \mathbf{r}_{j\eta} (t - T_j)^\eta \cdot \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} (z - L_k)^\beta, \quad (\text{A2.4.2.3-2})$$

wobei $\boldsymbol{\theta}(x)$ die Einheitssprungfunktion - vgl. (A2.3.2.5-D3) - und T_j und L_k die sogen. Knoten, die nicht äquidistant zu sein brauchen, bezeichnet. Häufig werden kubische Splines ($\eta_E = 3, \beta_E = 3$) verwendet. Die Spline-Parameter $\mathbf{r}_{j\eta}$ bzw. $\mathbf{r}_{k\beta}$ lassen sich zu vorgegebenen (Meß-)Werten so berechnen, daß die zu approximierenden Vorgaben - je nach Zweckmäßigkeit - entweder interpoliert oder aber - was insbesondere bei Meßwerten sinnvoller ist - ausgeglichen werden.

Für die r -Abhängigkeit läßt sich z.B. wieder, wie bereits beim Vollzylinder, ein Ansatz der Form

$$\mathbf{r}(r) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma_E} \left(\mathbf{r}_{a_\gamma} + \mathbf{r}_{b_\gamma} \cdot \ln r \right) \cdot r^{2\gamma} \quad (\text{A2.4.2.3-3})$$

verwenden - sofern Stetigkeit vorliegt, wobei die Parameter \mathbf{r}_{a_γ} und \mathbf{r}_{b_γ} z.B. durch Ausgleichsrechnung aus einem vorgegebenen Werteverlauf zu berechnen sind.

Obige Ansätze besitzen den Vorteil einer gewissen Anschaulichkeit, jedoch kann eine insgesamt weit flexiblere Möglichkeit zur Anpassung von Randwerten und Quellen auch darin gefunden werden, diese in die jeweils passenden Orthogonalreihen zu entwickeln, also in *FOURIER*-Reihen hinsichtlich der z -Abhängigkeiten - wovon hier kein Gebrauch gemacht werde - und in Reihen nach Zylinderfunktionen bezüglich r -Richtung entsprechend (A2.4.1-R1).

Beim Drahtziehen sind häufig die thermisch stationären Verhältnisse von Draht, Ziehwerkzeug und Ziehtrommel von Interesse, weshalb eine spezielle Lösung für die betreffenden Bild- und Originalfunktionen anzugeben ist. Es werde also vorausgesetzt, daß der Grenzwert $\mathcal{G}(z, r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}(t, z, r)$ existiert, was mit Sicherheit für zeitunabhängige Randbedingungen und

Quellen der Fall ist, deren Bildfunktionen sich dann hinsichtlich s auf den Faktor $\frac{1}{s}$ reduzieren.

Mit (A2.4.1-15) spezialisiert man unter Anwendung des Grenzwertsatzes $\Theta(p, r) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s, p, r)$ die Bildfunktion für stationäre Verhältnisse in eine gegenüber (A2.4.2.2-2) günstigere Form:

$$\Theta(p,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(0,p;r)}{r} \cdot \left\{ \widehat{\mathbf{F}}_n(p) - \frac{h_0 + p}{\left(h_0 + \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot \left(h_L + \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{\frac{\mu_n}{D}L} - \left(h_0 - \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot \left(h_L - \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{-\frac{\mu_n}{D}L}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\left(h_L + \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{\frac{\mu_n}{D}L} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_n\left(\frac{\mu_n}{D}\right) - \left(h_L - \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{-\frac{\mu_n}{D}L} \cdot \widehat{\mathbf{F}}_n\left(-\frac{\mu_n}{D}\right) - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots - \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \mathbf{Z}_0 \rho \cdot \left(\frac{\left(\frac{\mu_n}{D} - p\right) \left(h_L + \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{\frac{\mu_n}{D}L} + \left(\frac{\mu_n}{D} + p\right) \left(h_L - \frac{\mu_n}{D}\right) \cdot e^{-\frac{\mu_n}{D}L}}{h_0 + p} \cdot \mathbf{r}_0(\rho) - 2 \frac{\mu_n}{D} \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \right) \cdot d\rho \right] \right\}$$

$$\text{mit } \widehat{\mathbf{F}}_n(p) := R_1 \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{R_1}{D}\right) \cdot \mathfrak{H}_1(p) + \frac{2D}{\pi} \cdot \mathfrak{H}_2(p) + \frac{1}{\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right) \cdot \mathbf{Q}_V(p,\rho) \cdot d\rho. \quad (\text{A2.4.2.3-4})$$

Für die Randfunktionen bei $r = R_i$ ($i = 1, 2$) werde ein Ansatz (A2.4.2.3-1) in $z \in \langle 0, L \rangle$ verwendet:

$$\mathbf{r}_i(z) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta}^{(i)} \cdot (z - L_k)^\beta \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \\ z \quad p \end{array} \\ \mathfrak{H}_i(p) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(L - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta}^{(i)} \cdot \beta! \cdot \left[\frac{e^{-L_k p}}{p^{\beta+1}} - e^{-Lp} \cdot \sum_{l=0}^{\beta} \frac{(L - L_k)^l}{l! \cdot p^{\beta-l+1}} \right]; \quad (\text{A2.4.2.3-5})$$

wie beim Vollzylinder stehen die *Spline*-Koeffizienten $\mathbf{r}_{k\beta}^{(i)}$ für $\mathbf{r}_{k\beta}^{(i)} := h \cdot \mathfrak{g}_{k\beta}^{(i)} + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_{k\beta}^{(i)}$, wobei $\mathfrak{g}_{k\beta}^{(i)}$ und $\mathbf{q}_{k\beta}^{(i)}$ die *Spline*-Koeffizienten der entsprechend approximierten Umgebungstemperaturen $\mathfrak{G}_i(z)$ und Randquellen $\mathbf{q}_i(z)$ bezeichnen.

Für die Randfunktionen bei $z = 0$ und $z = L$ werde ein Reihenansatz entsprechend (A2.4.1-R1) herangezogen:

$$\mathbf{r}_x(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{r}_m^{(x)} \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_m \frac{r}{D}\right); \quad x = 0, L \quad \text{und } r \in \langle R_1, R_2 \rangle \quad (\text{A2.4.2.3-6})$$

und analog für die Quellen in $z \in \langle 0, L \rangle$:

$$\mathbf{q}_V(z,r) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{q}_{k\beta}^{(V)}(r) \cdot (z - L_k)^\beta \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \\ z \quad p \end{array} \\ \mathbf{Q}_V(p,r) := \sum_{k=0}^{k_E} \theta(L - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{q}_{k\beta}^{(V)}(r) \cdot \beta! \cdot \left[\frac{e^{-L_k p}}{p^{\beta+1}} - e^{-Lp} \cdot \sum_{l=0}^{\beta} \frac{(L - L_k)^l}{l! \cdot p^{\beta-l+1}} \right] \quad (\text{A2.4.2.3-7})$$

$$\text{mit } \mathbf{q}_{k\beta}^{(V)}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{q}_{k\beta m}^{(V)} \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_m \frac{r}{D}\right); \quad r \in \langle R_1, R_2 \rangle.$$

Durch Rücktransformation der mit (A2.4.2.3-5...7) spezifizierten Bildfunktion (A2.4.2.3-4) unter Verwendung folgender Korrespondenzen

$$\frac{\beta!}{p^2 - \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2} \cdot \left[\frac{e^{-L_k p}}{p^{\beta+1}} - e^{-Lp} \cdot \sum_{l=0}^{\beta} \frac{(L-L_k)^l}{l! \cdot p^{\beta-l+1}} \right] \begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \\ p \quad z \end{array}$$

$$\theta(z-L_k) \cdot \frac{\beta!}{2 \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^{\beta+2}} \cdot \left\{ e^{\frac{\mu_n}{D}(z-L_k)} + (-1)^\beta \cdot e^{-\frac{\mu_n}{D}(z-L_k)} - \sum_{j=0}^{\beta} \frac{1+(-1)^{\beta-j}}{j!} \cdot \left[\frac{\mu_n}{D}(z-L_k)^j \right] \right\} - \dots$$

$$\dots - \theta(z-L) \cdot \frac{\beta!}{2} \cdot \sum_{l=0}^{\beta} \frac{(L-L_k)^l}{l! \cdot \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^{\beta-l+2}} \cdot \left\{ e^{\frac{\mu_n}{D}(z-L)} + (-1)^{\beta-l} \cdot e^{-\frac{\mu_n}{D}(z-L)} - \sum_{j=0}^{\beta-l} \frac{1+(-1)^{\beta-l-j}}{j!} \cdot \left[\frac{\mu_n}{D}(z-L)^j \right] \right\}$$

und $\frac{h_0+p}{p^2 - \left(\frac{\mu_n}{D}\right)^2} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \circ \\ p \quad z \end{array} \frac{h_0 D}{\mu_n} \sinh\left(\frac{\mu_n}{D} z\right) + \cosh\left(\frac{\mu_n}{D} z\right)$

$$\equiv \frac{1}{2 \frac{\mu_n}{D}} \left[\left(\frac{\mu_n}{D} + h_0\right) e^{\frac{\mu_n}{D} z} + \left(\frac{\mu_n}{D} - h_0\right) e^{-\frac{\mu_n}{D} z} \right]$$

sowie unter Weglassung des Terms mit dem Faktor $\theta(z-L)$, der nur für $z > L$ interessant ist, bekommt die Originalfunktion zunächst die Gestalt (A2.4.2.3-8.1)

$$\mathcal{G}(z, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{r}{D}\right)}{\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2\right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2\right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2} \cdot \frac{D^2}{(\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{\mu_n \frac{L}{D}} - (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{L}{D}}} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{k_E} \theta(L-L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \left(R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathbf{r}_{k\beta}^{(1)} + R_2 \mathbf{Z}_{02} \cdot \mathbf{r}_{k\beta}^{(2)} + \frac{1}{\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right) \cdot q_{k\beta}^{(V)}(\rho) \cdot d\rho \right) \cdot \beta! \cdot \left(\frac{D}{\mu_n}\right)^\beta \cdot \left[\theta(z) \cdot \left((\mu_n + h_0 D) e^{\mu_n \frac{z}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{z}{D}} \right) \right] \right\} \cdot \left[\left((\mu_n + h_L D) \left(e^{\mu_n \frac{L-L_k}{D}} - e_\beta^{\mu_n \frac{L-L_k}{D}} \right) - (-1)^\beta \cdot (\mu_n - h_L D) \left(e^{-\mu_n \frac{L-L_k}{D}} - e_\beta^{-\mu_n \frac{L-L_k}{D}} \right) \right) - \theta(z-L_k) \cdot \left((\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{\mu_n \frac{L}{D}} - (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{L}{D}} \right) \cdot \left(e^{\mu_n \frac{z-L_k}{D}} - e_\beta^{\mu_n \frac{z-L_k}{D}} + (-1)^\beta \cdot \left(e^{-\mu_n \frac{z-L_k}{D}} - e_\beta^{-\mu_n \frac{z-L_k}{D}} \right) \right) \right] + \theta(z) \cdot \frac{2\mu_n^2}{D} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \mathbf{Z}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{D}\right) \cdot \left[\left((\mu_n + h_L D) e^{\mu_n \frac{L-z}{D}} + (\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{L-z}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) + \dots \right] \cdot d\rho \left. \right\} \dots + \left[\left((\mu_n + h_0 D) e^{\mu_n \frac{z}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{z}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \right] \cdot d\rho \left. \right\}$$

Nach geeigneter Umformung läßt sich eine für numerische Berechnungen besser geeignete Form herstellen. Konvergenzverbesserung wird durch Reihensummutation der \mathbf{e} -funktionsfreien Terme erreicht, wobei Gebrauch gemacht wird von⁴⁴:

$$\boxed{\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i) \cdot h_1 R_1 \cdot \mathbf{Z}_{01} + (i-1) \cdot h_2 R_2 \cdot \mathbf{Z}_{02}}{\mu_n^{2\beta} \cdot \left[\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot \frac{R_2}{R_1} \mathbf{Z}_{02}^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot \frac{R_1}{R_2} \mathbf{Z}_{01}^2 \right]} \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right) = \\ & = \frac{(-1)^i}{2(-4)^\beta \cdot (\beta!)^2} \cdot \frac{h_1 R_1 h_2 R_2}{H} \cdot \frac{R_1 R_2}{D^2} \cdot \sum_{j=0}^{\beta} \left(A_{\beta j}^{(i)} + B_{\beta j}^{(i)} \cdot \ln \frac{r}{D} \right) \cdot \left(\frac{r}{D} \right)^{2j}; \quad i = 1, 2 \end{aligned}} \quad (\text{A2.4.2.3-S3})$$

mit

$$H := h_1 R_1 + h_2 R_2 + h_1 R_1 h_2 R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$A_{\beta \beta}^{(i)} = \frac{i-1}{h_1 R_1 h_2 R_2} H - \left(\frac{1}{h_2 R_2} + \ln \frac{R_2}{D} + \sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{j} \right)$$

$$A_{\beta j}^{(i)} = \frac{1}{H} \cdot \sum_{k=1}^{\beta-j} \left(a_{jk}^{(A)} \cdot A_{\beta(j+k)}^{(i)} + b_{jk}^{(A)} \cdot B_{\beta(j+k)}^{(i)} \right)$$

$$B_{\beta \beta}^{(i)} = 1, \quad B_{\beta j}^{(i)} = \frac{1}{H} \cdot \sum_{k=1}^{\beta-j} \left(a_{jk}^{(B)} \cdot A_{\beta(j+k)}^{(i)} + b_{jk}^{(B)} \cdot B_{\beta(j+k)}^{(i)} \right)$$

$$a_{jk}^{(A)} := \binom{j+k}{j}^2 \cdot \left[\left(\frac{R_1}{D} \right)^{2k} \cdot (2k - h_1 R_1) \cdot c_{2j} - \left(\frac{R_2}{D} \right)^{2k} \cdot (2k + h_2 R_2) \cdot c_{1j} \right]$$

$$a_{jk}^{(B)} := - \binom{j+k}{j}^2 \cdot \left[\left(\frac{R_1}{D} \right)^{2k} \cdot (2k - h_1 R_1) \cdot h_2 R_2 + \left(\frac{R_2}{D} \right)^{2k} \cdot (2k + h_2 R_2) \cdot h_1 R_1 \right]$$

$$b_{jk}^{(A)} := \binom{j+k}{j}^2 \cdot [d_{1jk} \cdot c_{2j} - d_{2jk} \cdot c_{1j}], \quad b_{jk}^{(B)} := - \binom{j+k}{j}^2 \cdot [d_{1jk} \cdot h_2 R_2 + d_{2jk} \cdot h_1 R_1]$$

$$c_{ij} := 1 + (-1)^i \cdot h_i R_i \cdot \left(\ln R_i + \sum_{m=1}^j \frac{1}{m} \right); \quad i = 1, 2$$

$$d_{ijk} := \left(\frac{R_i}{D} \right)^{2k} \cdot \left[1 + \left(2j + (-1)^i \cdot h_i R_i \right) \left(\ln \frac{R_i}{D} + \sum_{m=1}^j \frac{1}{k+m} \right) \right]$$

Damit wird eine gegenüber (A2.4.2.3-8.1) besser konvergente Lösungsdarstellung gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z, r) = & \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} \theta(z-L_k) \cdot (z-L_k)^{\beta-2l} \cdot D^{2l} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-2l)!} \cdot \left[\frac{R_1 R_2}{(-4)^l \cdot (l!)^2 \cdot H} \cdot \sum_{i=1}^2 (-1)^i \cdot h_{3-i} \cdot \mathbf{r}_{k\beta}^{(i)} \cdot \right. \\ & \left. \sum_{j=0}^l \left(A_{\beta j}^{(i)} + B_{\beta j}^{(i)} \cdot \ln \frac{r}{D} \right) \cdot \left(\frac{r}{D} \right)^{2j} + \frac{D^2}{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{k\beta n}^{(V)}}{\mu_n^{2(l+1)}} \cdot \mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right) \right] + \\ & + D^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}_0 \left(\mu_n \frac{r}{D} \right)}{(\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) - (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D)} e^{-2\mu_n \frac{L}{D}} \cdot \dots \end{aligned}$$

⁴⁴ Diese Summe ist am ehesten über (A2.4.1-R1) zu bestätigen.

$$\begin{aligned}
 & \dots \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(L-L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \left(\frac{R_1 \mathbf{Z}_{01} \cdot \mathbf{r}_{k\beta}^{(1)} + R_2 \mathbf{Z}_{02} \cdot \mathbf{r}_{k\beta}^{(2)}}{\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{q_{k\beta n}^{(V)}}{\mu_n^2} \right) \cdot \beta! \cdot \left(\frac{D}{\mu_n} \right)^\beta \cdot \right. \\
 & \cdot \left(\boldsymbol{\theta}(z) - \boldsymbol{\theta}(z-L_k) \right) \cdot \left((\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{L_k - z}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - L_k + z}{D}} \right) + \\
 & + \boldsymbol{\theta}(z-L_k) \cdot \left((\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - z + L_k}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z - L_k}{D}} \right) + \\
 & + \boldsymbol{\theta}(z) \cdot \left((\mu_n - h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z + L_k}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n + h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - z - L_k}{D}} \right) - \\
 & - \boldsymbol{\theta}(z) \cdot \left((\mu_n + h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L - z}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L + z}{D}} \right) \cdot \left((\mu_n + h_L D) e_{\beta}^{\mu_n \frac{L - L_k}{D}} - (-1)^\beta (\mu_n - h_L D) e_{\beta}^{-\mu_n \frac{L - L_k}{D}} \right) \Bigg\} + \\
 & + \boldsymbol{\theta}(z) \cdot \left((\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z}{D}} + (\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - z}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_n^{(0)} + \dots \\
 & \dots + \boldsymbol{\theta}(z) \cdot \left((\mu_n + h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L - z}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L + z}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_n^{(L)} \Bigg\},
 \end{aligned}$$

wobei $\left\lceil \frac{\beta}{2} \right\rceil$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{\beta}{2}$ bezeichnet; e_{β} vgl. (A2.3.2.5-F1). (A2.4.2.3-8.2)

Auf der Grundlage dieser Lösung für das Hohlzylindertemperaturfeld werden sich später numerische Berechnungen durchführen lassen, mit denen z.B. die Temperaturverhältnisse im Ziehwerkzeug oder ggf. auch in der Ziehtrommel näherungsweise simuliert werden können.

A2.4.2.4 Eigenwerte für Hohlzylinder

Die Berechnung der Hohlzylindertemperaturen schließt die Berechnung der Eigenwerte, die sich als Nullstellen der Eigenwertgleichungen (A2.4.1-10) und (A2.4.1-17) ergeben, ein. Wie bereits beim Vollzylinder, lassen sich auch beim Hohlzylinder die Eigenwerte - ausgehend von Näherungswerten - nur iterativ bestimmen. Da sowohl die Nullstellen von (A2.4.1-10) als auch von (A2.4.1-17) einfach sind, läßt sich wiederum jeweils das *NEWTON*-Verfahren anwenden. Zunächst werden die Eigenwerte μ_n aus der Eigenwertgleichung (A2.4.1-10) bestimmt:

$$\mu^{(v+1)} = \mu^{(v)} - \frac{f(\mu^{(v)})}{f'(\mu^{(v)})} \tag{A2.4.2.4-1}$$

mit

$$f(\mu) := H_1 \cdot \mathbf{Z}_{01} + \mu \cdot \mathbf{Z}_{11}; \quad H_1 := h_1 D, \quad H_2 := h_2 D$$

$$f'(\mu) := H_1 \cdot \mathbf{Z}'_{01} + \mathbf{Z}_{11} + \mu \cdot \mathbf{Z}'_{11} \neq 0$$

$$\mathbf{Z}_{01} = c_1 \cdot \mathbf{J}_{01} + c_2 \cdot \mathbf{N}_{01}, \quad \mathbf{Z}_{11} = c_1 \cdot \mathbf{J}_{11} + c_2 \cdot \mathbf{N}_{11}$$

$$\mathbf{Z}'_{01} = c'_1 \cdot \mathbf{J}_{01} - c_1 \cdot \frac{R_1}{D} \cdot \mathbf{J}_{11} + c'_2 \cdot \mathbf{N}_{01} - c_2 \cdot \frac{R_1}{D} \cdot \mathbf{N}_{11}$$

$$\mathbf{Z}'_{11} = c'_1 \cdot \mathbf{J}_{11} + c_1 \cdot \frac{R_1}{D} \cdot \left(\mathbf{J}_{01} - \frac{D}{\mu R_1} \cdot \mathbf{J}_{11} \right) + c'_2 \cdot \mathbf{N}_{11} + c_2 \cdot \frac{R_1}{D} \cdot \left(\mathbf{N}_{01} - \frac{D}{\mu R_1} \cdot \mathbf{N}_{11} \right)$$

$$\begin{aligned} c_1 &:= H_2 \cdot N_{02} - \mu \cdot N_{12}, & c_2 &:= -(H_2 \cdot J_{02} - \mu \cdot J_{12}) \\ c'_1 &:= -\frac{R_2}{D}(\mu \cdot N_{02} + H_2 \cdot N_{12}), & c'_2 &:= \frac{R_2}{D}(\mu \cdot J_{02} + H_2 \cdot J_{12}) \end{aligned}$$

Damit mit dem *NEWTON*-Verfahren (A2.4.2.4-1) alle Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge lückenlos erfaßt werden, sind geeignete Iterationsstartwerte vorzugeben. Hierfür lassen sich durch geeignete Entwicklung von (A2.4.1-10) in Potenzreihen Näherungsformeln gewinnen, die ohne Herleitung lediglich mitgeteilt werden:

$$\begin{aligned} - |h_1| \text{ und } |h_2| \text{ klein, insbesondere } \left| \frac{T_1}{\mu_n} \right| \ll 1: & \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2}(n-1) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4}(n-1)^2 + T_1} \\ \text{mit } T_1 &= \frac{3}{8} \frac{D^2}{R_1 R_2} + (h_1 + h_2) D \end{aligned} \tag{A2.4.2.4-2.1}$$

$$\begin{aligned} - |h_1| \text{ klein, } |h_2| \text{ groß, insbesondere } \left| \frac{T_2}{\mu_n} \right| \ll 1: & \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + T_2} \\ \text{mit } T_2 &= \frac{1}{8} \left[\frac{D}{R_1} \left(4 - \frac{D}{R_2} \right) + 8h_1 D - \frac{3}{16h_2 D} \left(\frac{11}{R_1^2} + \frac{2}{R_1 R_2} + \frac{3}{R_2^2} \right) \cdot D^2 \right] \end{aligned} \tag{A2.4.2.4-2.2}$$

$$\begin{aligned} - |h_1| \text{ groß, } |h_2| \text{ klein, insbesondere } \left| \frac{T_3}{\mu_n} \right| \ll 1: & \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - T_3} \\ \text{mit } T_3 &= \frac{1}{8} \left[\frac{D}{R_2} \left(4 + \frac{D}{R_1} \right) - 8h_2 D + \frac{3}{16h_1 D} \left(\frac{11}{R_2^2} + \frac{2}{R_1 R_2} + \frac{3}{R_1^2} \right) \cdot D^2 \right] \end{aligned} \tag{A2.4.2.4-2.3}$$

$$\begin{aligned} - |h_1| \text{ groß, } |h_2| \text{ groß, insbesondere } \left| \frac{T_4}{\mu_n} \right| \ll 1: & \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2} n + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} n^2 - T_4} \\ \text{mit } T_4 &= \frac{D^2}{8} \cdot \left[\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{16h_1 D} \left(\frac{9}{R_1^2} - \frac{2}{R_1 R_2} - \frac{7}{R_2^2} \right) + \frac{1}{16h_2 D} \left(\frac{9}{R_2^2} - \frac{2}{R_1 R_2} - \frac{7}{R_1^2} \right) \right] \end{aligned} \tag{A2.4.2.4-2.4}$$

Speziell für den ersten Eigenwert $n=1$ lassen sich noch bessere Anfangsnäherungen angeben:

- für kleinere Werte h_1 und h_2 ; speziell auch für $h_1 \rightarrow 0$ oder /und $h_2 \rightarrow 0$:

$$\mu_1 \approx 2D \cdot \sqrt{\frac{h_1 R_1 + h_2 R_2 + h_1 R_1 h_2 R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}{(2 - h_1 R_1 + h_2 R_2 - h_1 R_1 h_2 R_2)(R_2^2 - R_1^2) + R_1 R_2 \cdot [h_1 h_2 (R_1^2 + R_2^2) + 2(h_1 R_2 - h_2 R_1)] \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}} \tag{A2.4.2.4-3.1}$$

- für kleinere Werte h_1 und größere h_2 ; speziell auch für $h_1 \rightarrow 0$ oder /und $h_2 \rightarrow \infty$:

$$\mu_1 \approx 2D \cdot \frac{1 + h_1 R_1 \left(\frac{1}{h_2 R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}{\sqrt{\left(1 - h_1 R_1 + \frac{2 - h_1 R_1}{h_2 R_2} \right) (R_2^2 - R_1^2) + R_1 \cdot \left[h_1 (R_1^2 + R_2^2) + 2 \left(\frac{h_1}{h_2} R_2 - R_1 \right) \right]} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{A2.4.2.4-3.2})$$

- für größere Werte h_1 und kleinere h_2 ; speziell auch für $h_1 \rightarrow \infty$ oder /und $h_2 \rightarrow 0$:

$$\mu_1 \approx 2D \cdot \frac{1 + h_2 R_2 \left(\frac{1}{h_1 R_1} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}{\sqrt{\left(\frac{2 + h_2 R_2}{h_1 R_1} - 1 - h_2 R_2 \right) (R_2^2 - R_1^2) + R_2 \cdot \left[h_2 (R_1^2 + R_2^2) + 2 \left(R_2 - \frac{h_2}{h_1} R_1 \right) \right]} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{A2.4.2.4-3.3})$$

- für größere Werte h_1 und h_2 ; speziell auch für $h_1 \rightarrow \infty$ oder /und $h_2 \rightarrow \infty$:

$$\mu_1 \approx 2D \cdot \frac{\frac{1}{h_1 R_1} + \frac{1}{h_2 R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{\left(\frac{2}{h_1 R_1 h_2 R_2} + \frac{1}{h_1 R_1} - \frac{1}{h_2 R_2} - 1 \right) (R_2^2 - R_1^2) + \left[R_1^2 + R_2^2 + 2 \left(\frac{R_2}{h_2} - \frac{R_1}{h_1} \right) \right]} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{A2.4.2.4-3.4})$$

Da jeder Eigenwert von vier Parametern - h_1, h_2, R_1, R_2 - abhängt, ist eine graphische Darstellung i.allg. nicht sinnvoll.

Jetzt sind noch die Eigenwerte v_k aus der Eigenwertgleichung (A2.4.1-17) zu berechnen, wobei ganz analog vorgegangen wird:

$$v^{(\gamma+1)} = v^{(\gamma)} - \frac{f(v^{(\gamma)})}{f'(v^{(\gamma)})} \quad (\text{A2.4.2.4-4})$$

mit

$$f(v) := (v^2 - H_0 H_L) \cdot \sin v - (H_0 + H_L) \cdot v \cdot \cos v; \quad H_0 := h_0 L, \quad H_L := h_L L$$

$$f'(v) := (2 + H_0 + H_L) \cdot v \cdot \sin v - (H_0 + H_L + H_0 H_L - v^2) \cdot \cos v \neq 0$$

Damit das *NEWTON*-Verfahren (A2.4.2.4-4) alle Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge lückenlos erfaßt, sind wiederum geeignete Iterationsstartwerte vorzugeben. Durch Potenzreihenentwicklung von (A2.4.1-17) lassen sich die folgenden Näherungsformeln gewinnen:

- für $\frac{H_0}{v_k} < 1$ und $\frac{H_L}{v_k} < 1$:

$$v_k \approx \frac{\pi}{2} (k-1) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} (k-1)^2 + H_0 + H_L} \quad (\text{A2.4.2.4-5.1})$$

- für $\frac{H_0}{v_k} < 1$ und $\frac{H_L}{v_k} \geq 1$:

$$v_k \approx \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 + H_0} \quad (\text{A2.4.2.4-5.2})$$

- für $\frac{H_0}{v_k} \geq 1$ und $\frac{H_L}{v_k} < 1$:

$$v_k \approx \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + H_L} \quad (\text{A2.4.2.4-5.3})$$

- für $\frac{H_0}{v_k} \geq 1$ und $\frac{H_L}{v_k} \geq 1$:

$$v_k \approx \frac{k\pi}{1 + \frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_L}} \quad (\text{A2.4.2.4-5.4})$$

- speziell für den ersten Eigenwert ($k = 1$) und ($H_0 < 1$ oder $H_L < 1$) noch genauer:

$$v_1 \approx \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}} \quad \text{mit} \quad a := 10 \frac{6 + 3(H_0 + H_L) + H_0 H_L}{20 + 5(H_0 + H_L) + H_0 H_L}$$

$$b := 120 \frac{H_0 + H_L + H_0 H_L}{20 + 5(H_0 + H_L) + H_0 H_L} \quad (\text{A2.4.2.4-5.5})$$

Die Abhängigkeit des ersten Eigenwertes von den beiden Parametern $h_0 L$ und $h_L L$ zeigt - bei geänderten Bezeichnungen - [TAU 71, Abb. 6.2].

A2.4.3 Zeit- und ortsveränderliche Wärmeübergangskoeffizienten

Während der Wärmeaustausch des Hohlzylinders an dessen Stirn- und Mantelflächen bisher in Form von Randbedingungen 3. Art mit - gegenüber der Realität stark vereinfachend - orts- und zeitunabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_0, \alpha_L, \alpha_1, \alpha_2 = konst.$ berücksichtigt wurde, werden de facto immer mehr oder weniger große lokale Abhängigkeiten oder auch zeitliche Änderungen der Wärmeübergangsbedingungen vorhanden sein, die entsprechend zu berücksichtigen sind. Leider kompliziert sich durch Einführung variabler Wärmeübergangskoeffizienten die Ermittlung einer analytisch „geschlossenen“ Lösung wesentlich. Wo irgend möglich, werden deshalb die Lösungen für konstante Koeffizienten, wofür dann z.B. geeignete Mittelwerte einzusetzen sind, weiterverwendet. Andernfalls kann heute - angesichts enorm gewachsener Rechenleistung von Computern - von vornherein auf mathematische Verfahren mit vorzugsweise numerischer Orientierung ausgewichen werden (FEM, BEM, FDM), wobei vorteilhafterweise dann auch die engen geometrischen Restriktionen, denen durchgängig analytische Lösungsverfahren unterworfen sind, außer acht bleiben können.

Ungeachtet der größeren mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Herleitung einer geschlossenen Lösung zu überwinden sind, lassen sich sowohl analytische Lösungsdarstellungen als auch numerisch-iterative Lösungsverfahren, die auf den Lösungen für konstante Koeffizienten aufbauen, angeben.

Bei einer vergleichsweise einfachen Anwendung, der Walzenkühlung - approximiert mittels endlich langem Vollzylinder, wird in [UNG 79] gezeigt, wie im Falle eines örtlich variablen Wärmeübergangskoeffizienten eine analytische Lösung hergestellt werden kann. Diese Aufgabe wird dabei auf die Lösung eines unendlichen linearen algebraischen Gleichungssystems zur Bestimmung gewisser *FOURIER*-Koeffizienten der betreffenden Randbedingung zurückgeführt.

Im vorliegenden Zusammenhang ist die Berücksichtigung ortsabhängiger Wärmeübergänge insbesondere sowohl auf dem Hohlzylinder-Innenmantel - der Wärmeübergang zwischen den

Berührungs- bzw. Kontaktflächen von Ziehöse und Draht unterscheidet sich immerhin um mehrere Größenordnungen von den übrigen Wärmeübergängen - als auch auf dem Hohlzylinder-Außenmantel - der Wärmeübergang in der effektiven Berührungsfläche von Ziehtrommel und anliegenden Drahtwindungen (Linienberührung) unterscheidet sich i. allg. ebenfalls um mehrere Größenordnungen von der Umgebung - unbedingt erforderlich. Hierfür soll zunächst ein Lösungsweg gegangen werden, bei dem als Zwischenschritt eine Integralgleichung zu lösen ist.

A2.4.3.1 Ortsabhängiger Wärmeübergang

Die Berechnung des Temperaturfeldes, beispielshalber in einem thermisch stationären Hohlzylinder, werde jetzt unter der Bedingung vorgenommen, daß am Hohlzylinderinnenmantel bei $r=R_1$ kein konstanter, sondern ein ortsabhängiger Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1(z)$ vorliegt. Damit tritt an die Stelle der ursprünglichen Randbedingung (A2.4.1-6.1) die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(z, R_1) = \tilde{h}_1(z) \cdot \mathcal{G}(z, R_1) - \tilde{r}_1(z) . \quad (\text{A2.4.3.1-1.1})$$

$$\text{mit} \quad \tilde{r}_1(z) := \tilde{h}_1(z) \cdot \mathcal{G}_{U1}(z) + \frac{1}{\lambda} q_1(z) . \quad (\text{A2.4.3.1-1.2})$$

Während eine Lösung für diese Randbedingung auf „direktem Wege“ nicht möglich ist, lassen sich Ersatzaufgaben formulieren, z.B. durch

a) Randbedingungssubstitution

Die rechte Gleichungsseite (A2.4.3.1-1.1) werde gemäß

$$\tilde{h}_1(z) \cdot \mathcal{G}(z, R_1) - \tilde{r}_1(z) := -f_1(z) \quad (\text{A2.4.3.1-1.3})$$

substituiert, d.h., die Randbedingung (A2.4.3.1-1.1) wird durch die einfachere Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(z, R_1) = -f_1(z) , \quad (\text{A2.4.3.1-1.4})$$

die formal eine Randbedingung 2. Art darstellt, ersetzt. Hierfür liegen die entsprechenden Lösungen im Prinzip schon vor, denn aus den Ergebnissen (A2.4.2.2-1) oder (A2.4.2.2-3), ggf. in Verbindung mit (A2.4.2.2-4), geht durch Grenzübergang $h_1 \rightarrow 0$ sowie Identifikation von $r_1(z)$ mit $f_1(z)$ die Temperaturfunktion, die das Randwertproblem (A2.4.3.1-1.4) löst, unmittelbar hervor. Diese Temperaturfunktion läßt sich schreiben als

$$\mathcal{G}(z, r) = \psi_1(z, r)_{h_1 \rightarrow 0} + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, R_1)_{h_1 \rightarrow 0} \cdot \mathbf{f}_1(\zeta) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-2.1})$$

mit abkürzend

$$\begin{aligned} \psi_1(z, r) := & \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z, 0; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z, L; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\ & \dots + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta . \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.1-2.2})$$

Wird der ursprüngliche Ausdruck (A2.4.3.1-1.3) für $f_I(z)$ in (A2.4.3.1-2.1) rücksubstituiert, so erhält man

$$\mathcal{G}(z, r) = \Psi_{Ia}(z, r) - \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, R_I)_{h_I \rightarrow 0} \cdot \tilde{h}_I(\zeta) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-3.1})$$

$$\text{mit} \quad \Psi_{Ia}(z, r) := \psi_I(z, r)_{h_I \rightarrow 0} + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; r, R_I)_{h_I \rightarrow 0} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_I(\zeta) \cdot d\zeta. \quad (\text{A2.4.3.1-3.2})$$

In (A2.4.3.1-3.1) tritt die noch unbekannte Randtemperatur $\mathcal{G}(z, R_I)$ auf. Wird (A2.4.3.1-3.1) speziell auf dem Innenmantel $r = R_I$ betrachtet, so entsteht eine lineare inhomogene FREDHOLMsche Integralgleichung 2. Art bezüglich der gesuchten Randtemperatur $\mathcal{G}(z, R_I)$:

$$\mathcal{G}(z, R_I) = \Psi_{Ia}(z, R_I) - \int_0^L \mathbf{K}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-4.1})$$

mit quadratisch integrelem Kern

$$\mathbf{K}(z, \zeta) := \tilde{h}_I(\zeta) \cdot \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; R_I, R_I)_{h_I \rightarrow 0}, \quad (\text{A2.4.3.1-4.2})$$

der durch die Multiplikation der GREENSchen Funktionen (A2.4.2.2-1.2), (A2.4.2.2-3.2) oder (A2.4.2.2-4) - die bezüglich (z, ζ) symmetrisch sind - mit $\tilde{h}_I(\zeta)$ ein unsymmetrischer Produktkern ist⁴⁵.

Zur Lösung der Integralgleichung (A2.4.3.1-4) können verschiedene Methoden herangezogen werden, z.B. die Methode der schrittweisen Näherung oder - unter Ausnutzung der Produktkern-eigenschaft - das Zurückführen auf ein unendliches Gleichungssystem bezüglich gewisser Reihenkoeffizienten; hierfür sei auf die Spezialliteratur, z.B. [ZEI 96, Kap. 10.3.6...8], [SCH 50] verwiesen.

Die Herstellung einer Lösung der Integralgleichung (A2.4.3.1-4) soll hier skizziert werden durch schrittweise Näherung mit der NEUMANNschen Reihe

$$\mathfrak{R}_J(z, \zeta) := \sum_{j=1}^J \mathbf{K}_j(z, \zeta) \quad (\text{A2.4.3.1-5.1})$$

unter Verwendung sogen. iterierter Kerne

$$\mathbf{K}_j(z, \zeta) = \int_0^L \mathbf{K}(z, \xi) \cdot \mathbf{K}_{j-1}(\xi, \zeta) \cdot d\xi; \quad \mathbf{K}_1(z, \zeta) = \mathbf{K}(z, \zeta), \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{A2.4.3.1-5.2})$$

⁴⁵ Durch die Substitution $\mathcal{G}(z, R_I) = \sqrt{\frac{1}{\tilde{h}_I(z)}} \cdot \mathcal{G}^*(z)$ kann die Integralgleichung (A2.4.3.1-4) in eine ebensolche Gleichung mit symmetrischem Produktkern $\mathbf{K}^*(z, \zeta) = \sqrt{\frac{\tilde{h}_I(z)}{\tilde{h}_I(\zeta)}} \cdot \mathbf{K}(z, \zeta) = \sqrt{\tilde{h}_I(z) \cdot \tilde{h}_I(\zeta)} \cdot \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; R_I, R_I)_{h_I \rightarrow 0}$

umgeformt werden: $\mathcal{G}^*(z) = \Psi^*(z) - \int_0^L \mathbf{K}^*(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}^*(\zeta) \cdot d\zeta$; mit $\Psi^*(z) := \sqrt{\tilde{h}_I(z)} \cdot \Psi_{Ia}(z, R_I)$, $\tilde{h}_I(z) > 0$.

Der Grenzwert $\lim_{J \rightarrow \infty} \mathfrak{R}_J(z, \zeta)$ der NEUMANNschen Reihe wird auch als lösender Kern bzw. als Resolvente

$$\mathfrak{R}(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{K}_j(z, \zeta) \quad (\text{A2.4.3.1-5.3})$$

bezeichnet, womit das - vorerst formale - Resultat

$$\mathcal{G}(z, R_I) = \Psi_{Ia}(z, R_I) - \int_0^L \mathfrak{R}(z, \zeta) \cdot \Psi_{Ia}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-5.4})$$

vorliegt. Dieses Ergebnis ist tatsächlich Lösung von (A2.4.3.1-4), sofern die NEUMANNsche Reihe gleichmäßig konvergiert, wofür die Bedingung an den Kern $\int_0^L \int_0^L |\mathbf{K}(z, \zeta)|^2 \cdot d\zeta dz < 1$ hinreichend ist. Einsetzen des Ergebnisses (A2.4.3.1-5.4) in (A2.4.3.1-3.1) ergibt schließlich die Lösung des eingangs gestellten Problems, eine Temperaturfunktion bei ortsabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_I = \tilde{\alpha}_I(z)$ aufzufinden.

b) Randfunktionsmodifikation

Durch Vergleich einer Randbedingung (A2.4.1-6.1) mit der realitätsnäheren Bedingung (A2.4.3.1-1.1) läßt sich die Randfunktion aus (A2.4.1-6.1) dahingehend modifizieren, daß der ortsabhängige Wärmeübergangskoeffizient entsprechend berücksichtigt wird. Damit wird aus der zu fordernden Äquivalenz

$$h_I \cdot \mathcal{G}(z, R_I) - \mathbf{r}_I(z) \stackrel{!}{=} \tilde{h}_I(z) \cdot \mathcal{G}(z, R_I) - \tilde{\mathbf{r}}_I(z) \quad (\text{A2.4.3.1-6.1})$$

statt (A2.4.1-6.2; stationär) die neue, fiktive Randfunktion

$$\mathbf{r}_I(z) := \tilde{\mathbf{r}}_I(z) + (h_I - \tilde{h}_I(z)) \cdot \mathcal{G}(z, R_I) \quad (\text{A2.4.3.1-6.2})$$

gefolgert.

Einsetzen der modifizierten Randfunktion (A2.4.3.1-6.2) in eine der Lösungen (A2.4.2.2-1) oder (A2.4.2.2-3), ggf. in Verbindung mit (A2.4.2.2-4), ergibt die Temperaturfunktion

$$\mathcal{G}(z, r) = \Psi_{Ib}(z, r) + \int_0^L \mathbf{g}_{\infty}(z, \zeta; r, R_I) \cdot (h_I - \tilde{h}_I(\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-7.1})$$

mit abkürzend

$$\begin{aligned} \Psi_{Ib}(z, r) &:= \int_{R_I}^{R_2} \mathbf{g}_{\infty}(z, 0; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_I}^{R_2} \mathbf{g}_{\infty}(z, L; r, \rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\ &\dots + \int_0^L \mathbf{g}_{\infty}(z, \zeta; r, R_I) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_I(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \mathbf{g}_{\infty}(z, \zeta; r, R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_I}^{R_2} \mathbf{g}_{\infty}(z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.1-7.2})$$

Wie unmittelbar zu erkennen ist, geht diese Funktion für $\tilde{h}_I \rightarrow h_I$ und damit $\tilde{\mathbf{r}}_I \rightarrow \mathbf{r}_I$ erwartungsgemäß wieder in die ursprüngliche Lösung (A2.4.2.2-1) bzw. (A2.4.2.2-3) über. Um die noch unbekannte Randtemperatur zu bestimmen, ist wiederum eine Integralgleichung für $\mathcal{G}(z, R_I)$ zu lösen, die aus (A2.4.3.1-7.1) für $r = R_I$ hervorgeht:

$$\mathcal{G}(z, R_I) = \Psi_{Ib}(z, R_I) + \int_0^L \mathbf{K}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-8.1})$$

mit dem Kern

$$\mathbf{K}(z, \zeta) := \left(h_I - \tilde{h}_I(\zeta) \right) \cdot \mathbf{g}_\infty(z, \zeta; R_I, R_I) . \quad (\text{A2.4.3.1-8.2})$$

Eine Lösung läßt sich dann z.B. wieder auf Basis der NEUMANNschen Reihe angeben:

$$\mathcal{G}(z, R_I) = \Psi_{Ib}(z, R_I) + \int_0^L \mathfrak{K}(z, \zeta) \cdot \Psi_{Ib}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.4.3.1-9})$$

mit $\mathfrak{K}(z, \zeta)$ analog (A2.4.3.1-5.2) und (A2.4.3.1-5.3).

Einsetzen von (A2.4.3.1-9) in (A2.4.3.1-7.1) liefert formal die unter *b*) gesuchte Lösung.

Da der fiktive relative Wärmeübergangskoeffizient $h_I \geq 0$ frei wählbar ist, läßt sich im Vergleich von (A2.4.3.1-9) mit der Lösung (A2.4.3.1-5.4) feststellen, daß einerseits für $h_I = 0$ die Ergebnisse (A2.4.3.1-7) und (A2.4.3.1-8) erwartungsgemäß wieder die Gleichungen (A2.4.3.1-3) und (A2.4.3.1-4) enthalten bzw. daß (A2.4.3.1-9) in (A2.4.3.1-5.4) übergeht. Andererseits kann durch geschickte Wahl von $h_I > 0$ die Differenz $\left(h_I - \tilde{h}_I(z) \right)$, genauer: der Abstand zwischen der

Konstante h_I und der Funktion $\tilde{h}_I(z)$, also $\left\| h_I - \tilde{h}_I(z) \right\| = \sqrt{\int_0^L \left(h_I - \tilde{h}_I(z) \right)^2 \cdot dz}$ und damit der Einfluß der noch unbekanntenen Randtemperatur minimiert werden⁴⁶, was offenbar auch auf das Konvergenzverhalten der NEUMANNschen Reihe Einfluß nimmt. Diese Feststellung ist insbesondere im Hinblick auf eine dritte Lösungsvariante interessant, bei der die Bestimmung der fiktiven Randfunktion (A2.4.3.1-6.2) nicht mehr durch Aufstellen und Lösen einer Integralgleichung bezüglich $\mathcal{G}(z, R_I)$ geschlossen analytisch, sondern wesentlich auf numerisch-iterativem Wege erfolgt.

c) Randfunktionsiteration

Während bei den Lösungsvarianten *a*) und *b*) die Randbedingung mit ortsabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten durch Substitution oder Modifikation jeweils auf eine Form zurückgeführt wurde, für die zwar Lösungen existieren, jedoch zusätzlich eine Integralgleichung für die Randtemperatur zu lösen war, wird jetzt ein unmittelbar an die modifizierte Randfunktion (A2.4.3.1-6.2) anknüpfendes Iterationsverfahren betrachtet. Dabei soll die Randtemperatur $\mathcal{G}(z, R_I)$ jetzt nicht als Lösung einer Integralgleichung, sondern implizit durch numerisch schrittweise Näherung bestimmt werden.

⁴⁶ wobei sich der Abstand $\left\| h_I - \tilde{h}_I(z) \right\|$ auch als Gewicht von $\mathcal{G}(z, R_I)$ interpretieren läßt.

Nach den vorangegangenen Betrachtungen ist es naheliegend, die Randfunktion (A2.4.3.1-6.2) in die iterationsfähige Form

$$\boldsymbol{r}_I^{(v)}(z) := \left(h_I - \tilde{h}_I(z) \right) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I) + \tilde{\boldsymbol{r}}_I(z) \quad (\text{A2.4.3.1-10})$$

zu bringen, wobei für die Berechnung der Randfunktion $\boldsymbol{r}_I^{(v)}(z)$ im v -ten Schritt die Randtemperatur $\mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I)$ des vorangegangenen $(v-1)$ -ten Schrittes verwendet wird - berechnet jeweils für $h_I = \text{konst.}$, um dann mit dieser Randfunktion $\boldsymbol{r}_I^{(v)}(z)$ wiederum die Randtemperatur zu aktualisieren usw. Als Randfunktion für den Iterationsstart kann $\boldsymbol{r}_I^{(0)}(z) := \tilde{\boldsymbol{r}}_I(z)$ verwendet werden, was offenbar umso besser gerechtfertigt ist, je geringer der Abstand $\|h_I - \tilde{h}_I(z)\|$ zu gegebenem $\tilde{h}_I(z)$ gewählt wird. Aber auch zur Minimierung des Einflusses der fehlerhaften Randtemperatur $\mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I)$ auf die fiktive Randfunktion $\boldsymbol{r}_I^{(v)}(z)$ ist es offenbar zweckmäßig, h_I so zu wählen, daß der Abstand minimiert wird nach der Bedingung $\int_0^L (h_I - \tilde{h}_I(z))^2 \cdot dz \rightarrow \mathbf{MIN}$, was bekanntlich gleichbedeutend damit ist, für h_I den integralen Mittelwert zu verwenden:

$$h_I = \bar{h}_I = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \tilde{h}_I(z) \cdot dz. \quad (\text{A2.4.3.1-11})$$

Durch Einsetzen der fiktiven Randfunktion (A2.4.3.1-10) in die Randbedingung für konstanten Wärmeübergangskoeffizienten (A2.4.1-6.1; *stationär*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(z, R_I) &= h_I \cdot \mathcal{G}(z, R_I) - \boldsymbol{r}_I^{(v)}(z) \\ &= h_I \cdot \mathcal{G}(z, R_I) - \left[\left(h_I - \tilde{h}_I(z) \right) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I) + \tilde{\boldsymbol{r}}_I(z) \right] \\ &\equiv \tilde{h}_I(z) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I) - \tilde{\boldsymbol{r}}_I(z) + h_I \cdot \left[\mathcal{G}(z, R_I) - \mathcal{G}^{(v-1)}(z, R_I) \right] \end{aligned}$$

ist leicht zu erkennen, daß das Verfahren gegen die exakte Lösung strebt, sofern die iterierten Randtemperaturen gegen die wahre Randtemperatur konvergieren. Für $\mathcal{G}^{(v)}(z, R_I) \rightarrow \mathcal{G}(z, R_I)$ wird dann tatsächlich (A2.4.3.1-1.1), also die ursprüngliche, zu approximierende Randbedingung für ortsabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten realisiert.

Ist die Randfunktion $\boldsymbol{r}_I(z)$ entsprechend (A2.4.3.1-10) iterativ, d.h., im Wechsel mit der Randtemperatur approximiert worden, so können mit diesem $\boldsymbol{r}_I(z)$, mit h_I gemäß (A2.4.3.1-11) sowie mit den Lösungen (A2.4.2.2-1) oder (A2.4.2.2-3) die eigentlichen Temperaturberechnungen vorgenommen werden.

Die unter *a)*, *b)* und *c)* angestellten Betrachtungen zur Ortsabhängigkeit des Wärmeübergangs auf dem Hohlzylinderinnenmantel können sinngemäß auf eine entsprechende Situation am Hohlzylinderaußenmantel oder an den Hohlzylinderstirnflächen übertragen werden.

A2.4.3.2 Näherungsverfahren für zeit- und ortsabhängige Wärmeübergangskoeffizienten

Es hat sich gezeigt, daß die Berücksichtigung ortsabhängiger Wärmeübergangskoeffizienten bereits recht aufwendig ist, ganz besonders natürlich dann, wenn an mehreren Rändern Orts- und ggf. auch Zeitabhängigkeiten zu berücksichtigen sind. Denn dann liegt nicht mehr nur eine einzelne

Integralgleichung vor, sondern es ist ein Integralgleichungssystem vom gemischt *FREDHOLM-VOLTERRA*schen Typ zu lösen (siehe Anhang B).

Will oder kann man das Integralgleichungssystem nicht analytisch geschlossen lösen, so läßt sich immerhin ein Näherungsverfahren formulieren, das die bekannten Lösungen für konstante Wärmeübergangskoeffizienten verwendet und dabei die Orts- und Zeitabhängigkeiten der Randfunktionen \mathbf{r} sukzessiv gerade so auskorrigiert, daß in ihrer Wirkung die gewünschten orts- oder/und zeitabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten vorgetauscht werden. Auf diese Weise entstehen aus den vorgegebenen, tatsächlichen Randfunktionen $\tilde{\mathbf{r}}$ im Verlaufe eines Iterationsverfahrens zunehmend „verfälschte“, sogen. fiktive Randfunktionen, die den beabsichtigten Effekt bewirken.

Bei diesem Verfahren der Randfunktionsiteration werden die tatsächlich wirksamen Randbedingungen, die die Orts- und Zeitabhängigkeit der Wärmeübergangskoeffizienten berücksichtigen, den bisher vereinfachend verwendeten Randbedingungen mit konstanten Wärmeübergangskoeffizienten gegenübergestellt bzw. durch sie ersetzt. Es soll also gelten:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, 0, r) = \tilde{h}_0(t, r) \cdot \mathcal{G}(t, 0, r) - \tilde{\mathbf{r}}_0(t, r) \stackrel{!}{=} h_0 \cdot \mathcal{G}(t, 0, r) - \mathbf{r}_0(t, r) \quad (\text{A2.4.3.2-1.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(t, L, r) = -\tilde{h}_L(t, r) \cdot \mathcal{G}(t, L, r) + \tilde{\mathbf{r}}_L(t, r) \stackrel{!}{=} -h_L \cdot \mathcal{G}(t, L, r) + \mathbf{r}_L(t, r) \quad (\text{A2.4.3.2-1.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R_1) = \tilde{h}_1(t, z) \cdot \mathcal{G}(t, z, R_1) - \tilde{\mathbf{r}}_1(t, z) \stackrel{!}{=} h_1 \cdot \mathcal{G}(t, z, R_1) - \mathbf{r}_1(t, z) \quad (\text{A2.4.3.2-1.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R_2) = -\tilde{h}_2(t, z) \cdot \mathcal{G}(t, z, R_2) + \tilde{\mathbf{r}}_2(t, z) \stackrel{!}{=} -h_2 \cdot \mathcal{G}(t, z, R_2) + \mathbf{r}_2(t, z), \quad (\text{A2.4.3.2-1.4})$$

wobei für die fiktiven relativen Wärmeübergangskoeffizienten $h = konst.$ geeignete Werte, z.B. die zeitlich und räumlich gemittelten $\tilde{h}(t, r)$ bzw. $\tilde{h}(t, z)$ zu verwenden sind, wie bereits für (A2.4.3.1-11) kurz begründet wurde. Aus (A2.4.3.2-1) lassen sich dann die folgenden iterationsfähigen Formen für die gesuchten fiktiven Randfunktionen \mathbf{r} zum v -ten Iterationsschritt - analog (A2.4.3.1-10) - gewinnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^{(v)}(t, r) &= (h_0 - \tilde{h}_0(t, r)) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, 0, r) + \tilde{\mathbf{r}}_0(t, r); \\ \tilde{\mathbf{r}}_0(t, r) &:= \tilde{h}_0(t, r) \cdot \mathcal{G}_{U_0}(t, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0(t, r) \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.2-2.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_L^{(v)}(t, r) &= (h_L - \tilde{h}_L(t, r)) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, L, r) + \tilde{\mathbf{r}}_L(t, r); \\ \tilde{\mathbf{r}}_L(t, r) &:= \tilde{h}_L(t, r) \cdot \mathcal{G}_{U_L}(t, r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_L(t, r) \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.2-2.2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^{(v)}(t, z) &= (h_1 - \tilde{h}_1(t, z)) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_1) + \tilde{\mathbf{r}}_1(t, z); \\ \tilde{\mathbf{r}}_1(t, z) &:= \tilde{h}_1(t, z) \cdot \mathcal{G}_{U_1}(t, z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_1(t, z) \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.2-2.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2^{(v)}(t, z) &= (h_2 - \tilde{h}_2(t, z)) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_2) + \tilde{\mathbf{r}}_2(t, z); \\ \tilde{\mathbf{r}}_2(t, z) &:= \tilde{h}_2(t, z) \cdot \mathcal{G}_{U_2}(t, z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_2(t, z). \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.2-2.4})$$

Durch Einsetzen der fiktiven Randfunktionen (A2.4.3.2-2) in die rechte Gleichungsseite von (A2.4.3.2-1) ist leicht zu erkennen, daß das Verfahren gegen die exakte Lösung strebt, sofern die

iterierten Randtemperaturen gegen die wahren Randtemperaturen konvergieren. Denn z.B. für den Rand $r = R_I$ wird durch Einsetzen von $\mathbf{r}_I^{(v)}$ aus (A2.4.3.2-2.3) in die rechte Gleichungsseite von (A2.4.3.2-1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(t, z, R_I) &= h_I \cdot \mathcal{G}(t, z, R_I) - \mathbf{r}_I^{(v)}(t, z) \\ &= h_I \cdot \mathcal{G}(t, z, R_I) - \left[(h_I - \tilde{h}_I(t, z)) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_I) + \tilde{\mathbf{r}}_I(t, z) \right] \\ &= \tilde{h}_I(t, z) \cdot \mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_I) - \tilde{\mathbf{r}}_I(t, z) + h_I \cdot \left[\mathcal{G}(t, z, R_I) - \mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_I) \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.4.3.2-3})$$

erhalten, d.h., für $\mathcal{G}^{(v-1)}(t, z, R_I) \rightarrow \mathcal{G}(t, z, R_I)$ wird tatsächlich die linke Gleichungsseite von (A2.4.3.2-1.3), also die ursprüngliche, zu approximierende Randbedingung für orts- und zeitabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten realisiert. Als Iterationsstartwerte $\mathbf{r}^{(0)}$ können unmittelbar die Randfunktionen $\tilde{\mathbf{r}}$ verwendet werden. Wie zu sehen ist, sind bei jedem Iterationsschritt jeweils nur die betreffenden Randtemperaturen neu zu berechnen, um damit die fiktiven Randfunktionen $\mathbf{r}^{(v)}$ aktualisieren zu können. Da die Berechnung der Randtemperaturen aus bereits genanntem Grunde mit konstanten, vom Iterationsschritt unabhängigen Mittelwerten der Wärmeübergangskoeffizienten

$$h_{1,2} = \bar{\bar{h}}_{1,2} := \frac{1}{\Delta t \cdot \Delta z} \cdot \iint_{(t)(z)} h_{1,2}(\tau, \zeta) \cdot d\zeta d\tau \quad (\text{A2.4.3.2-4.1})$$

und

$$h_{0,L} = \bar{\bar{h}}_{0,L} := \frac{1}{\Delta t \cdot A} \cdot \iint_{(t)(r)} \rho \cdot h_{0,L}(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau; \quad A = \pi(R_2^2 - R_I^2), \quad (\text{A2.4.3.2-4.2})$$

erfolgen soll, braucht vorteilhafterweise die Berechnung der Eigenwerte nur einmal vorgenommen und allenfalls, in Abhängigkeit vom Reihenabbruchkriterium, um zusätzliche Eigenwerte ergänzt werden, was von erheblichem rechentechnischen Vorteil ist.

Einschränkend ist anzumerken, daß dieses Iterationsverfahren solange als ein lediglich heuristisches anzusehen ist, solange der Nachweis offen bleibt, unter welchen Bedingungen die Konvergenz der Iterationsfolgen $\mathcal{G}_{Rand}^{(v)}(t, z)$ gegen die wahren Randtemperaturen $\mathcal{G}_{Rand}(t, z)$ als gesichert anzusehen ist.

A2.5 Thermische Kopplung von Hohlzylinder und hindurchbewegtem Vollzylinder

Betrachtet wird das System „Unendlich langer Vollzylinder bewegt sich, unter stellenweise gegenseitiger thermischer Ankopplung, durch einen endlich langen Hohlzylinder“ als modellhafter Ersatz für das reale System „Draht-Ziehwerkzeug“ beim Gleitziehen von Runddraht; die geometrischen Details des mehr oder weniger konischen Ziehholprofils müssen vernachlässigt werden. Außerdem soll im vorliegenden Zusammenhang nur der stationäre Zustand interessieren. Da für den Vollzylinder eine entsprechende Temperaturfunktion mit ortsabhängigem Wärmeübergangskoeffizienten noch nicht angegeben wurde, sei dies hier vorab nachgeholt.

Nach der Methode der Randfunktionsmodifikation - vgl. Kapitel A2.4.3.1b) - werde in der Randbedingung (A2.3.1-5) die Randfunktion $\mathbf{r}(z)$ ersetzt durch die fiktive Randfunktion

$$\mathbf{r}(z) := \tilde{\mathbf{r}}(z) + (h - \tilde{h}(z)) \cdot \mathcal{G}(z, R) \quad (\text{A2.5-1.1})$$

mit realer, vorgegebener Randfunktion

$$\tilde{\mathbf{r}}(z) = \tilde{h}(z) \cdot \mathcal{G}_U(z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(z). \quad (\text{A2.5-1.2})$$

Unter Verwendung des Ergebnisses (A2.3.2.3-3) entsteht⁵²:

$$\mathcal{G}(z, r) = \Psi(z, r) + \int_0^z \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, R) \cdot (h - \tilde{h}(\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5-2.1})$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi(z, r) = & \frac{V}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_a(z, 0; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_0^z \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, R) \cdot \tilde{\mathbf{r}}(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^z \int_0^R \mathbf{g}_a(z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta, \rho) \cdot d\rho \cdot d\zeta \quad . \end{aligned} \quad (\text{A2.5-2.2})$$

Für $r = R$ ist eine *VOLTERRA*sche Integralgleichung 2. Art bezüglich der zunächst noch unbekanntem Randtemperatur $\mathcal{G}(z, R)$ zu lösen:

$$\mathcal{G}(z, R) = \Psi(z, R) + \int_0^z \mathcal{N}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}(\zeta, R) \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5-3.1})$$

$$\text{mit dem Kern } \mathcal{N}(z, \zeta) := (h - \tilde{h}(\zeta)) \cdot \mathbf{g}_a(z, \zeta; R, R) . \quad (\text{A2.5-3.2})$$

Unter Verwendung der *NEUMANN*schen Reihe läßt sich eine Lösung formal durch

$$\mathcal{G}(z, R) = \Psi(z, R) + \int_0^z \mathfrak{R}(z, \zeta) \cdot \Psi(\zeta, R) \cdot d\zeta , \quad (\text{A2.5-4.1})$$

angeben, wobei die Resolvente als

$$\mathfrak{R}(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}_j(z, \zeta) \quad (\text{A2.5-4.2})$$

mit den iterierten Kernen

$$\mathcal{N}_j(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z \mathcal{N}(z, \xi) \cdot \mathcal{N}_{j-1}(\xi, \zeta) \cdot d\xi; \quad \mathcal{N}_1(z, \zeta) = \mathcal{N}(z, \zeta), \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{A2.5-4.3})$$

⁵² Bei Verwendung von Lösung (A2.3.2.1-2) ist analog zu verfahren.

gegeben ist. Mit dem Ergebnis (A2.5-4) liefert (A2.5-2.1) schließlich das für ortsabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten gesuchte Vollzylindertemperaturfeld⁵³.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Temperaturen von Voll- und Hohlzylinder geeignet zu indizieren. Die Vollzylindertemperatur (A2.5-2) läßt sich in der Gestalt

$$\vartheta_V(z,r) = \Psi_V(z,r) + \int_0^z \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) \cdot \left[\vartheta_U(\zeta) + \left(\frac{h}{\tilde{h}(\zeta)} - 1 \right) \cdot \vartheta_V(\zeta,R) \right] \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5-5.1})$$

$$\text{mit } \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) = \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,R) \cdot \tilde{h}(\zeta), \quad (\text{A2.5-5.2})$$

$$\begin{aligned} \Psi_V(z,r) := & \frac{V}{a} \cdot \int_0^R \mathbf{g}_a(z,0;r,\rho) \cdot \vartheta_0(\rho) \cdot d\rho + \frac{I}{\lambda} \cdot \int_0^z \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,R) \cdot \mathbf{q}_R(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{I}{\lambda} \cdot \int_0^z \int_0^R \mathbf{g}_a(z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\zeta,\rho) \cdot d\rho \, d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.5-5.3})$$

angeben; \mathbf{g}_a aus (A2.3.2.3-3.2).

Für die Temperaturfunktion des Hohlzylinders (A2.4.3.1-7) ist entsprechend

$$\vartheta_H(z,r) = \Psi_H(z,r) + \int_0^L \mathbf{g}_H(z,\zeta;r,R_1) \cdot \left[\vartheta_{U1}(\zeta) + \left(\frac{h_1}{\tilde{h}_1(\zeta)} - 1 \right) \cdot \vartheta_H(\zeta,R_1) \right] \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5-6.1})$$

$$\text{mit } \mathbf{g}_H(z,\zeta;r,R_1) = \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,R_1) \cdot \tilde{h}_1(\zeta) \quad (\text{A2.5-6.2})$$

$$\begin{aligned} \Psi_H(z,r) := & \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,0;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_0(\rho) \cdot d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,L;r,\rho) \cdot \mathbf{r}_L(\rho) \cdot d\rho + \dots \\ & \dots + \frac{I}{\lambda} \cdot \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,R_1) \cdot \mathbf{q}_1(\zeta) \cdot d\zeta + \int_0^L \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,R_2) \cdot \mathbf{r}_2(\zeta) \cdot d\zeta + \dots \\ & \dots + \frac{I}{\lambda} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_{VH}(\zeta,\rho) \cdot d\rho \, d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.5-6.3})$$

zu schreiben; \mathbf{g}_∞ aus (A2.4.2.2-1.2), aus (A2.4.2.2-3.2) oder aus (A2.4.2.2-4).

Die thermische Kopplung der beiden Körper erfolgt über deren Umgebungstemperaturen bei $r = R$ und $r = R_1$. Dabei werden in z -Richtung drei Abschnitte A, B und C unterschieden. Während im ersten Abschnitt (Ziehholeinlauftrichter: $0 \leq z < z_A$) und im dritten Abschnitt (Ziehholauslauftrichter: $z_B \leq z < z_C = L$) keine Berührung zwischen Voll- und Hohlzylinder

⁵³ Als Wärmeübergangskoeffizient h werde im Intervall $z \in \langle z_1, z_2 \rangle$ entsprechend der Argumentation aus Kapitel

A2.4.3.1 der Mittelwert $h = \bar{h} = \frac{I}{z_2 - z_1} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \tilde{h}(z) \cdot dz$ verwendet.

erfolgt, so daß hier die als bekannt vorauszusetzenden Umgebungstemperaturen $\mathcal{G}_{U_A}(z)$ und $\mathcal{G}_{U_C}(z)$ für den Vollzylinder bzw. $\mathcal{G}_{U_{I_A}}(z)$ und $\mathcal{G}_{U_{I_C}}(z)$ für den Hohlzylinder anzusetzen sind, sollen im mittleren Abschnitt (Berührungsbereich: $z_A \leq z < z_B$) als Umgebungstemperaturen die jeweiligen Randtemperaturen, also für den Vollzylinder $\mathcal{G}_{U_B}(z) = \mathcal{G}_H(z, R_I)$ und für den Hohlzylinder $\mathcal{G}_{U_{IB}}(z) = \mathcal{G}_V(z, R)$, vorliegen. Damit setzen sich die Umgebungstemperaturen im auf Hohlzylinderlänge eingeschränkten Bereich $0 \leq z \leq z_C = L$, unter abkürzender Verwendung von

$$\Delta\theta_{AB}(z) := \theta(z-z_A) - \theta(z-z_B) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_A < z < z_B \\ 0 & \text{für } z < z_A \text{ und } z > z_B, \end{cases} \quad (\text{A2.5-D4})$$

wie folgt zusammen:

- für den Vollzylinder bei $r = R$

$$\mathcal{G}_U(z) = \mathcal{G}_{U_A}(z) + \Delta\theta_{AB}(z) \cdot \mathcal{G}_H(z, R_I) + \mathcal{G}_{U_C}(z) \quad (\text{A2.5-7.1})$$

$$\text{mit } \mathcal{G}_{U_A}(z) := \begin{cases} \mathcal{G}_U(z) & \text{für } 0 \leq z < z_A \\ 0 & \text{für } z \geq z_A \end{cases}, \quad \mathcal{G}_{U_C}(z) := \begin{cases} \mathcal{G}_U(z) & \text{für } z_B \leq z < z_C \\ 0 & \text{für } z < z_B \text{ und } z \geq z_C \end{cases}$$

- für den Hohlzylinder bei $r = R_I$:

$$\mathcal{G}_{U_I}(z) = \mathcal{G}_{U_{I_A}}(z) + \Delta\theta_{AB}(z) \cdot \mathcal{G}_V(z, R) + \mathcal{G}_{U_{I_C}}(z) \quad (\text{A2.5-7.2})$$

$$\text{mit } \mathcal{G}_{U_{I_A}}(z) := \begin{cases} \mathcal{G}_{U_I}(z) & \text{für } 0 \leq z < z_A \\ 0 & \text{für } z \geq z_A \end{cases}, \quad \mathcal{G}_{U_{I_C}}(z) := \begin{cases} \mathcal{G}_{U_I}(z) & \text{für } z_B \leq z < z_C \\ 0 & \text{für } z < z_B \text{ und } z \geq z_C \end{cases}.$$

A2.5.1 Lösungsverfahren

Die thermische Kopplung von Voll- und Hohlzylinder als vereinfachtes Draht-Ziehöse Modell kann nun auf mehreren Wegen erfolgen. Zunächst einmal kann direkt von den Lösungsdarstellungen der Randtemperaturen für ortsabhängige Wärmeübergangskoeffizienten, d.h., von den Ergebnissen (A2.5-4) und (A2.4.3.1-9) ausgegangen werden (*direktes Verfahren*), was unmittelbar auf zwei einzelne Integralgleichungen führt. Andererseits läßt sich auch an die Temperaturfunktionen (A2.5-2) und A2.4.3.1-7) anknüpfen (*indirektes Verfahren*), wobei für die beiden Randtemperaturen ein Integralgleichungssystem erhalten wird. Schließlich existiert - solange lediglich numerische Ergebnisse im Vordergrund stehen - ein vorteilhafter dritter Weg, der auf einem iterativ arbeitenden Algorithmus beruht (*iteratives Verfahren*). Es soll deshalb genügen, wenn die beiden erstgenannten Lösungswege hier nur andeutungsweise kurz skizziert werden.

a) Direktes Verfahren

Für den Vollzylinder wird aus (A2.5-4.1) unter Benutzung von (A2.5-2.2), (A2.5-1.2) und (A2.5-5.3)

$$\mathcal{G}_V(z, R) = \Psi_V^*(z) + \int_{z_A}^z \int_{z_A}^{\zeta \leq z_B} \mathbf{K}_V(z, \zeta, \xi) \cdot \mathcal{G}_H(\xi, R_I) \cdot d\xi d\zeta \quad (\text{A2.5.1-1.1})$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_V(z, \zeta, \xi) := \tilde{h}(\xi) \cdot \mathbf{g}_a(\zeta, \xi; R, R) \cdot \mathcal{H}(z, \zeta), \quad (\text{A2.5.1-1.2})$$

und mit

$$\begin{aligned} \Psi_V^*(z) &:= \Psi_V(z, R) + \int_0^z \mathfrak{H}(z, \zeta) \cdot \Psi_V(\zeta, R) \cdot d\zeta + \dots \\ &\dots + \int_0^z \int_0^{\zeta \leq z_A} \mathbf{K}_V(z, \zeta, \xi) \cdot \mathfrak{G}_U(\xi) \cdot d\xi d\zeta + \int_{z_B}^z \int_{z_B}^{\zeta \leq z_C} \mathbf{K}_V(z, \zeta, \xi) \cdot \mathfrak{G}_U(\xi) \cdot d\xi d\zeta \end{aligned}$$

erhalten. Umgekehrt ergibt sich für den Hohlzylinder aus (A2.4.3.1-9) mit (A2.4.3.1-7.2), (A2.4.3.1-6.2) und (A2.5-6.3) ganz analog

$$\mathfrak{G}_H(z, R_I) = \Psi_H^*(z) + \int_0^L \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_H(z, \zeta, \xi) \cdot \mathfrak{G}_V(\xi, R) \cdot d\xi d\zeta \quad (\text{A2.5.1-2.1})$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_H(z, \zeta, \xi) := \tilde{h}_I(\xi) \cdot \mathbf{g}_\infty(\zeta, \xi; R_I, R_I) \cdot \mathfrak{H}(z, \zeta) \quad (\text{A2.5.1-2.2})$$

$$\begin{aligned} \Psi_H^*(z) &:= \Psi_H(z, R_I) + \int_0^L \mathfrak{H}(z, \zeta) \cdot \Psi_V(\zeta, R_I) \cdot d\zeta + \dots \\ &\dots + \int_0^L \int_0^{z_A} \mathbf{K}_H(z, \zeta, \xi) \cdot \mathfrak{G}_{U_I}(\xi) \cdot d\xi d\zeta + \int_0^L \int_{z_B}^{z_C} \mathbf{K}_H(z, \zeta, \xi) \cdot \mathfrak{G}_{U_I}(\xi) \cdot d\xi d\zeta . \end{aligned}$$

Einsetzen von (A2.5.1-2.1) in (A2.5.1-1.1) ergibt, sofern die Vertauschung der Integrationsreihenfolge statthaft ist, für die Vollzylinder-Randtemperatur $\mathfrak{G}_V(z, R)$ die Integralgleichung

$$\mathfrak{G}_V(z, R) - \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{VH}(z, \xi^*) \cdot \mathfrak{G}_V(\xi^*, R) \cdot d\xi^* = \Psi_{VH}(z), \quad (\text{A2.5.1-3.1})$$

mit dem Kern

$$\mathbf{K}_{VH}(z, \xi^*) = \int_{z_A}^z \int_{z_A}^{\zeta \leq z_B} \int_0^L \mathbf{K}_V(z, \zeta, \zeta^*) \cdot \mathbf{K}_H(\zeta^*, \xi, \xi^*) \cdot d\xi d\zeta^* d\zeta \quad (\text{A2.5.1-3.2})$$

und der rechten Seite

$$\Psi_{VH}(z) := \Psi_V^*(z) + \int_{z_A}^z \int_{z_A}^{\zeta \leq z_B} \mathbf{K}_V(z, \zeta, \zeta^*) \cdot \Psi_H^*(\zeta^*) \cdot d\zeta^* d\zeta . \quad (\text{A2.5.1-3.3})$$

Umgekehrt läßt sich durch Einsetzen von (A2.5.1-1.1) in (A2.5.1-2.1) ebenfalls eine Integralgleichung für die Hohlzylinder-Randtemperatur $\mathfrak{G}_H(z, R_I)$ herstellen. Auf deren Lösung kann allerdings verzichtet werden, wenn bereits ein Ergebnis für $\mathfrak{G}_V(z, R)$, z.B. als Lösung von (A2.5.1-3), bekannt ist, das dann direkt in (A2.5.1-2.1) verwendet wird.

b) Indirektes Verfahren

Einsetzen von (A2.5-7.1) in (A2.5-5.1) ergibt für den Vollzylinder

$$\mathcal{G}_V(z,r) = \widehat{\Psi}_V(z,r) + \int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) \cdot \left[\mathcal{G}_H(\zeta,R_I) + \left(\frac{h}{\tilde{h}(\zeta)} - 1 \right) \cdot \mathcal{G}_V(\zeta,R) \right] \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5.1-4.1})$$

mit

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_V(z,r) &:= \Psi_V(z,r) + \int_0^z \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) \cdot \left[\mathcal{G}_{U_A}(\zeta) + \mathcal{G}_{U_C}(\zeta) \right] \cdot d\zeta \\ &= \Psi_V(z,r) + \int_0^{\bar{z}_A} \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) \cdot \mathcal{G}_U(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{z_B}^{z_C} \mathbf{g}_V(z,\zeta;r,R) \cdot \mathcal{G}_U(\zeta) \cdot d\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2.5.1-4.2})$$

und ganz analog durch Einsetzen von (A2.5-7.2) in (A2.5-6.1) für den Hohlzylinder

$$\mathcal{G}_H(z,r) = \widehat{\Psi}_H(z,r) + \int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{g}_H(z,\zeta;r,R_I) \cdot \left[\mathcal{G}_V(\zeta,R) + \left(\frac{h_I}{\tilde{h}_I(\zeta)} - 1 \right) \cdot \mathcal{G}_H(\zeta,R_I) \right] \cdot d\zeta \quad (\text{A2.5.1-5.1})$$

$$\text{mit} \quad \widehat{\Psi}_H(z,r) := \Psi_H(z,r) + \int_0^{\bar{z}_A} \mathbf{g}_H(z,\zeta;r,R_I) \cdot \mathcal{G}_{U_I}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{z_B}^{z_C} \mathbf{g}_H(z,\zeta;r,R_I) \cdot \mathcal{G}_{U_I}(\zeta) \cdot d\zeta. \quad (\text{A2.5.1-5.2})$$

Damit sind die Temperaturfelder von Voll- und Hohlzylinder nicht nur von der jeweils eigenen (unbekannten) Randtemperatur abhängig, sondern auch von der des thermischen Partners. Für diese beiden Randtemperaturen läßt sich aus (A2.5.1-4.1) für $r = R$ und (A2.5.1-5.1) für $r = R_I$ ein System aus zwei FREDHOLMschen Integralgleichungen aufstellen:

$$\mathcal{G}_V(z,R) - \left[\int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{K}_{11}(z,\zeta) \cdot \mathcal{G}_V(\zeta,R) \cdot d\zeta + \int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{K}_{12}(z,\zeta) \cdot \mathcal{G}_H(\zeta,R_I) \cdot d\zeta \right] = \widehat{\Psi}_V(z,R), \quad (\text{A2.5.1-6.1})$$

$$\mathcal{G}_H(z,R_I) - \left[\int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{K}_{21}(z,\zeta) \cdot \mathcal{G}_V(\zeta,R) \cdot d\zeta + \int_{\bar{z}_A}^{z_B} \mathbf{K}_{22}(z,\zeta) \cdot \mathcal{G}_H(\zeta,R_I) \cdot d\zeta \right] = \widehat{\Psi}_H(z,R_I), \quad (\text{A2.5.1-6.2})$$

mit den Kernen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}(z,\zeta) &= (h - \tilde{h}(\zeta)) \cdot \mathbf{g}_a(z,\zeta;R,R), & \mathbf{K}_{12}(z,\zeta) &= \tilde{h}(\zeta) \cdot \mathbf{g}_a(z,\zeta;R,R), \\ \mathbf{K}_{21}(z,\zeta) &= \tilde{h}_I(\zeta) \cdot \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;R_I,R_I), & \mathbf{K}_{22}(z,\zeta) &= (h_I - \tilde{h}_I(\zeta)) \cdot \mathbf{g}_\infty(z,\zeta;R_I,R_I); \end{aligned} \quad (\text{A2.5.1-6.3})$$

\mathbf{g}_a aus (A2.3.2.3-3.2) und \mathbf{g}_∞ aus (A2.4.2.2-1.2), aus (A2.4.2.2-3.2) oder aus (A2.4.2.2-4).

Dieses zweizeilige Integralgleichungssystem läßt sich durch Intervallverdopplung bezüglich (z, ζ) auf eine einzige Integralgleichung zurückführen, die dann mit den üblichen Methoden zu lösen ist⁵⁴. Das soll hier jedoch nicht näher ausgeführt werden, da stattdessen ein aus Anwendersicht evtl. einfacher zu realisierendes Näherungsverfahren angegeben wird.

⁵⁴ Vgl. z.B. [KOW 30, Kap. 2, §1] und [SCH 50, Kap. III, §18b-2.]

c) Iteratives Verfahren

Wenn also das Integralgleichungssystem (A2.5.1-6) nicht mit durchgängig analytischen Mitteln gelöst werden soll oder wenn sich die Auflösung als zu aufwendig erweist, kann ein eher pragmatischer Lösungsweg auch darin gesucht werden, die noch unbekannt Randtemperaturen $\mathcal{G}_V(z, R)$ und $\mathcal{G}_H(\zeta, R_I)$ in $z \in \langle z_A, z_B \rangle$ durch sukzessive Approximation numerisch-iterativ anzunähern. Dafür werden die Gleichungen (A2.5.1-6) zunächst in eine iterationsfähige Form gebracht:

$$\mathcal{G}_V^{(v+1)}(z, R) := \widehat{\Psi}_V(z, R) + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{11}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}_V^{(v)}(\zeta, R) \cdot d\zeta + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{12}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}_H^{(v)}(\zeta, R_I) \cdot d\zeta, \quad (\text{A2.5.1-7.1})$$

$$\mathcal{G}_H^{(v+1)}(\zeta, R_I) := \widehat{\Psi}_H(\zeta, R_I) + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{21}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}_V^{(v)}(z, R) \cdot dz + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{22}(z, \zeta) \cdot \mathcal{G}_H^{(v)}(z, R_I) \cdot dz. \quad (\text{A2.5.1-7.2})$$

Dem auf (A2.5.1-7) anzuwendenden Iterationsverfahren, das mit der in Kapitel A2.4.3.1c) beschriebenen *Randfunktionsiteration* korrespondiert, liegt folgendes Schema zugrunde:

Als Temperaturnäherung für den Iterationsstart $v=0$ kann zunächst $\mathcal{G}_V^{(0)}(z, R) := \widehat{\Psi}_V(z, R)$ angenommen werden; das erscheint sinnvoll, weil erwartungsgemäß die Randtemperatur des bewegten Vollzylinders, zumindest für nicht zu kleine Geschwindigkeiten, weit weniger stark von der des Hohlzylinders beeinflusst wird als umgekehrt. Damit und mit $\mathcal{G}_H^{(0)}(\zeta, R_I) = 0$ wird dann aus (A2.5.1-7.2) eine erste Randtemperaturnäherung für den Hohlzylinder bei $r = R_I$ mit

$$\mathcal{G}_H^{(1)}(\zeta, R_I) := \widehat{\Psi}_H(\zeta, R_I) + \int_{z_A}^{z_B} \mathbf{K}_{21}(z, \zeta) \cdot \widehat{\Psi}_V(z, R) \cdot dz$$

erhalten. Mit dieser Temperatur sowie der

Startnäherung für den Vollzylinder wird eine nächste Näherung für den Vollzylinderrand aus (A2.5.1-7.1) berechnet, die wiederum mit der zuletzt ermittelten Hohlzylinderrandtemperatur in (A2.5.1-7.2) eingesetzt wird und so weiter - ein Wechselspiel, das zwischen den beiden Gleichungen solange fortzusetzen ist, bis die Temperaturänderungen je Iterationsschritt an beiden Rändern hinreichend klein geworden sind, d.h., bis diese Änderungen eine geeignet vorzugebende Schranke unterschreiten. Der wichtigen, jedoch nur schwer zu beantwortenden Frage der Konvergenz des Verfahrens kann hier nicht weiter nachgegangen werden.

A2.5.2 Numerisch-iterative Realisation

Das soeben angegebene iterative Verfahren erfordert u.a. die Berechnung der betreffenden Integrale. Als numerische Integration gestaltet sich das Verfahren infolge der umfangreichen Integranden recht aufwendig und scheint deshalb weniger geeignet. Werden dagegen die Randtemperaturen und Wärmeübergangskoeffizienten durch geeignete Funktionsansätze, z.B. als *Spline*-Ansätze, approximiert, so lassen sich die Integrationen analytisch geschlossen vorab erledigen und es werden zwei integralfreie, numerisch besser geeignete Iterationsgleichungen der Art (A2.5.1-7) erhalten.

Es ist jedoch auch ein Iterationsverfahren möglich, bei dem unmittelbar auf die für spezielle Rand- und Gebietsfunktionen bereits konkretisierten, expliziten Lösungsdarstellungen (A2.3.2.5-6) des Vollzylinders und (A2.4.2.3-8) des Hohlzylinders zurückgegriffen wird. Für ein solches Iterationsverfahren werden lediglich die Randtemperaturen von Vollzylinder ($r = R$) und Hohlzylinder ($r = R_I$) benötigt, wofür im Hinblick auf eine zeitminimierende Berechnung die folgende Zerlegung zweckmäßig ist:

- *Vollzylinder-Außenrand:*

$$\mathcal{G}_{V_j}^{(v)} := \mathcal{G}_V^{(v)}(z_j, R) = \mathcal{V}_j + \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta}^{(v)} \cdot \mathcal{R}_{k\beta j}; \quad \mathbf{r}_{k\beta}^{(v)} := h \cdot \mathcal{G}_{k\beta}^{(v)} + \frac{q_{k\beta}}{\lambda} \quad (\text{A2.5.2-1})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j := & \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} z_j} + \dots \\ & \dots + \frac{a}{\lambda v} \sum_{k=0}^{k_E} \boldsymbol{\theta}(z_j - L_k) \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \frac{(-1)^\beta \cdot \beta!}{\left(\frac{a}{vR^2}\right)^{\beta+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q_{k\beta n} \cdot \frac{\mathbf{J}_0(\mu_n)}{\mu_n^{2(\beta+1)}} \cdot \left\{ e^{\beta} \begin{matrix} -\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z_j - L_k) \\ -e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z_j - L_k)} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.5.2-1.1})$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k\beta j} := & R \cdot \boldsymbol{\theta}(z_j - L_k) \cdot \beta! \cdot \left\{ \frac{1}{hR} \cdot \sum_{v=0}^{\beta} \frac{(z_j - L_k)^{\beta-v}}{(\beta-v)! \cdot (v!)^2 \cdot \left(4 \frac{a}{vR^2}\right)^v} \cdot \sum_{\xi=0}^v C_{v\xi} - \dots \right. \\ & \left. \dots - 2 \left(-\frac{vR^2}{a}\right)^\beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 \frac{a}{vR^2} (z_j - L_k)}}{\mu_n^{2\beta} \cdot (\mu_n^2 + (hR)^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.5.2-1.2})$$

Wenn $z = z_j$ mit einem Knoten M zusammenfällt, d.h., es gilt $z_j = L_M$, so ist die Summationsgrenze für den Index k auf $k_E = M-1$ zu verringern. Die Koeffizienten $\mathcal{G}_{k\beta}^{(v)}$ sind die *Spline*-Koeffizienten der Umgebungstemperatur $\mathcal{G}_V^{(v)}(z)$ des Vollzylinders - vgl. (A2.5-7.1), die wegen der von Iterationsschritt zu Iterationsschritt zu aktualisierenden Hohlzylinderrandtemperatur $\mathcal{G}_H^{(v)}(z, R_I)$ jeweils wieder neu zu berechnen sind. Die Koeffizienten $q_{k\beta}$ und $q_{k\beta n}$ sind die *Spline*-Koeffizienten der Rand- und Volumenquellen -vgl. (A2.3.2.5-1) und (A2.3.2.5-5), die nur einmal vor Beginn des Iterationsverfahrens zu entsprechenden Vorgaben von $\mathbf{q}_R(z)$ und $\mathbf{q}_V(z, r)$ berechnet werden brauchen. Die Starttemperatur $\mathcal{G}(r)$ wird über die *DINI*-Koeffizienten \mathcal{G}_n gemäß (A2.3.2.5-4) berücksichtigt.

- *Hohlzylinder-Innenrand:*

$$\mathcal{G}_{H_j}^{(v)} := \mathcal{G}_H^{(v)}(z_j, R_I) = \mathcal{H}_j + \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta}^{(I)(v)} \cdot \mathcal{R}_{k\beta j}; \quad \mathbf{r}_{k\beta}^{(i)(v)} := h_i \cdot \mathcal{G}_{k\beta}^{(i)(v)} + \frac{q_{k\beta}^{(i)}}{\lambda_H} \quad (\text{A2.5.2-2})$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_j &:= \sum_{k=0}^{k_E} \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta}^{(2)(v)} \cdot \mathcal{R}_{k\beta j}^{(2)} + \dots \\
 &\dots + D^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{R_l}{D})}{(\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) - (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-2\mu_n \frac{L}{D}}} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \left((\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z_j}{D}} + (\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L-z_j}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_n^{(0)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left((\mu_n + h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L-z_j}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L+z_j}{D}} \right) \cdot \mathbf{r}_n^{(L)} \right\}
 \end{aligned} \tag{A2.5.2-2.1}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{k\beta j}^{(i)} &:= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor} \boldsymbol{\theta}_{l\beta}(z_j - L_k) \cdot (z_j - L_k)^{\beta-2l} \cdot D^{2l} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-2l)!} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\frac{(-1)^i \cdot h_{3-i} \cdot R_1 R_2}{(-4)^l \cdot (l!)^2 \cdot H} \cdot \sum_{i=0}^l \left(A_{li}^{(i)} + B_{li}^{(i)} \cdot \ln \frac{R_l}{D} \right) \cdot \left(\frac{R_l}{D} \right)^{2i} \right] + \dots \\
 &\dots + D^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}_0(\mu_n \frac{R_l}{D})}{(\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) - (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-2\mu_n \frac{L}{D}}} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(2-i) \cdot R_1 \mathbf{Z}_{01} + (i-1) \cdot R_2 \mathbf{Z}_{02}}{\left((h_2 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_2 \mathbf{Z}_{02})^2 - \left((h_1 D)^2 + \mu_n^2 \right) \cdot (R_1 \mathbf{Z}_{01})^2} \beta! \left(\frac{D}{\mu_n} \right)^\beta \cdot \\
 &\quad \cdot \left[(1 - \boldsymbol{\theta}(z_j - L_k)) \cdot \left((\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{L_k - z_j}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - L_k + z_j}{D}} \right) + \right. \\
 &\quad + \boldsymbol{\theta}_{2\beta}(z_j - L_k) \cdot \left((\mu_n - h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - z_j + L_k}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n + h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z_j - L_k}{D}} \right) + \\
 &\quad + \left((\mu_n - h_0 D)(\mu_n + h_L D) e^{-\mu_n \frac{z_j + L_k}{D}} - (-1)^\beta \cdot (\mu_n + h_0 D)(\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{2L - z_j - L_k}{D}} \right) - \\
 &\quad \left. - \left((\mu_n + h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L - z_j}{D}} + (\mu_n - h_0 D) e^{-\mu_n \frac{L + z_j}{D}} \right) \cdot \left((\mu_n + h_L D) e^{\mu_n \frac{L - L_k}{D}} - (-1)^\beta (\mu_n - h_L D) e^{-\mu_n \frac{L - L_k}{D}} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{A2.5.2-2.2}$$

wobei die Volumenquellen, da für die Ziehdüse ohne Interesse, hier von vornherein unberücksichtigt geblieben sind. Außerdem wurden die Bezeichnungen

$$\theta_{1\beta}(zL_k) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } z = L_\ell > 0 \text{ und } \beta = 0, 2, \dots \text{ geradzahlig} \\ \theta(zL_k) & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A2.5.2-D1})$$

$$\theta_{2\beta}(zL_k) := \begin{cases} 0 & \text{für } z = L_\ell > 0 \text{ und } \beta = 0, 2, \dots \text{ geradzahlig} \\ \theta(zL_k) & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet. Die Koeffizienten $\mathcal{G}_{k\beta}^{(1)(v)}$ sind die *Spline*-Koeffizienten der Umgebungstemperatur $\mathcal{G}_{U1}^{(v)}(z)$ des Hohlzylinders - vgl. (A2.5-7.2), die jeweils nach Aktualisierung der Vollzylinder-
randtemperatur $\mathcal{G}_V^{(v)}(z, R)$ vor jedem Iterationsschritt wieder neu zu bestimmen sind. Die
Koeffizienten $\mathcal{G}_{k\beta}^{(2)}$, $q_{k\beta}^{(1)}$ und $q_{k\beta}^{(2)}$ sind die *Spline*-Koeffizienten der Umgebungstemperatur
sowie der Randquellen auf dem Innen- und Außenmantel, die nur einmal vor Beginn des
Iterationsverfahrens zu entsprechenden Vorgaben von $\mathcal{G}_{U2}(z)$, $q_1(z)$ und $q_2(z)$ berechnet
werden müssen. Die Koeffizienten $r_n^{(0)}$ und $r_n^{(L)}$ resultieren - zu gegebenen (zeitunabhängigen)
Randfunktionen (A2.4.1-3.2) und (A2.4.1-4.2) - aus (A2.4.1-R1) und approximieren damit
entsprechend (A2.4.2.3-6) die an den Hohlzylinderstirnflächen vorliegenden Randfunktionen
 $r_0(r)$ bzw. $r_L(r)$.

Wenn lediglich ortsunabhängige Wärmeübergangskoeffizienten an den Rändern von Voll- und
Hohlzylinder vorliegen würden, so ließe sich bereits unter Verwendung der Lösungen (A2.5.2-1)
und (A2.5.2-2) ein iteratives Verfahren - formal dem Schema des vorangegangenen Kapitels 2.3.1c)
ähnlich - realisieren⁵⁵. Tatsächlich jedoch liegen insbesondere an den sich gegenüberliegenden
Rändern von Voll- und Hohlzylinder wesentliche, keineswegs zu vernachlässigende
Ortsabhängigkeiten der Wärmeübergangskoeffizienten vor. Im unmittelbaren Berührungsbereich
von Draht und Hohlzylinder, wo die Umformung stattfindet, also im Bereich $z_A \leq z < z_B$, muß
wegen hoher Flächenpressung und - daraus folgend - sehr intensiven Kontakts beider Körper mit
einem um mehrere Größenordnungen höheren Wärmeübergangskoeffizienten gerechnet werden⁵⁶.
Die thermische Kopplung von bewegtem Draht und Hohlzylinder läßt sich jedoch auch in diesem
Fall durch Anwendung des bereits in Kapitel A2.4.3.2 angegebenen Iterationsverfahrens und unter
Verwendung der Randtemperaturen (A2.5.2-1) und (A2.5.2-2) bewerkstelligen.

Für die Ränder bei $r=R$ und $r=R_I$ gelten wiederum die fiktiven Randfunktionen (A2.5-1.1) mit
(A2.5-1.2) sowie (A2.4.3.1-6.2) mit (A2.4.3.1-1.2), wobei jetzt allerdings als Umgebungs-
temperaturen speziell (A2.5-7.1) und (A2.5-7.2) einzuführen sind. Damit sind die fiktiven Rand-
funktionen nicht mehr nur von der Randtemperatur des eigenen Körpers, sondern - wie z.B. beim
Integralgleichungssystem (A2.5.1-6) oder bei den Iterationsgleichungen (A2.5.1-7) - jeweils
zusätzlich von der Randtemperatur des thermischen Partners abhängig geworden:

⁵⁵ bei dem allerdings eine Ortsabhängigkeit der Wärmeübergangskoeffizienten implizit - durch Heranziehen der
entsprechenden Integralgleichungen - berücksichtigt wird.

⁵⁶ Eine Abschätzung wird in Kapitel 3.1.1.1 vorgenommen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}^{(v)}(z) &:= (h - \tilde{h}(z)) \cdot \mathcal{G}_V^{(v-1)}(z, \mathbf{R}) + \tilde{\mathbf{r}}^{(v-1)}(z) \\
 &= (h - \tilde{h}(z)) \cdot \mathcal{G}_V^{(v-1)}(z, \mathbf{R}) + \tilde{h}(z) \cdot \mathcal{G}_U^{(v-1)}(z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(z) \\
 &= (h - \tilde{h}(z)) \cdot \mathcal{G}_V^{(v-1)}(z, \mathbf{R}) + \tilde{h}(z) \cdot \mathcal{G}_H^{(v-1)}(z, \mathbf{R}_I) \cdot \Delta\theta_{AB}(z) + \dots \\
 &\quad \dots + \tilde{h}(z) \cdot \left[\mathcal{G}_{U_A}(z) + \mathcal{G}_{U_C}(z) \right] + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(z)
 \end{aligned} \tag{A2.5.2-3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_I^{(v)}(z) &:= (h_I - \tilde{h}_I(z)) \cdot \mathcal{G}_H^{(v-1)}(z, \mathbf{R}_I) + \tilde{\mathbf{r}}_I^{(v-1)}(z) \\
 &= (h_I - \tilde{h}_I(z)) \cdot \mathcal{G}_H^{(v-1)}(z, \mathbf{R}_I) + \tilde{h}_I(z) \cdot \mathcal{G}_{UI}^{(v-1)}(z) + \frac{1}{\lambda_H} \cdot \mathbf{q}_I(z) \\
 &= (h_I - \tilde{h}_I(z)) \cdot \mathcal{G}_H^{(v-1)}(z, \mathbf{R}_I) + \tilde{h}_I(z) \cdot \mathcal{G}_V^{(v-1)}(z, \mathbf{R}) \cdot \Delta\theta_{AB}(z) + \dots \\
 &\quad \dots + \tilde{h}_I(z) \cdot \left[\mathcal{G}_{UI_A}(z) + \mathcal{G}_{UI_C}(z) \right] + \frac{1}{\lambda_H} \cdot \mathbf{q}_I(z) .
 \end{aligned} \tag{A2.5.2-3.2}$$

Damit wird das folgende Iterationsschema nahegelegt:

Vor jedem Iterationsschritt wird für die rechten Seiten von (A2.5.2-3), wofür im vorausgegangenen Iterationsschritt eine hinreichende Anzahl von Regressionsstützwerten zu berechnen ist, eine Berechnung der *Spline*-Koeffizienten gemäß der Ansätze (A2.3.2.5-1) bzw. (A2.4.2.3-5) vorgenommen, mit denen dann die Randtemperaturen von Voll- und Hohlzylinder unter Nutzung der Formeln (A2.5.2-1) und (A2.5.2-2) aktualisiert werden. Damit stehen neue rechte Seiten von (A2.5.2-3) für einen weiteren Iterationsschritt zur Verfügung. Daß dabei die fiktiven Randfunktionen (A2.5.2-3.1) und (A2.5.2-3.2) abwechselnd zu aktualisieren sind, ist naheliegend.

Für den Iterationsstart ($v=0$) gilt das bereits in Kapitel A2.5.1c) angeführte Argument, weshalb auch hier mit der Berechnung der Vollzylinderrandtemperatur zu beginnen ist. Zunächst ist das System - in Ermangelung von Randtemperaturen, sofern diese sich nicht anderweitig wenigstens grob abschätzen lassen - noch als entkoppelt zu betrachten, so daß vorerst aus der stark reduzierten Randfunktion (A2.5.2-3.1)

$$\mathbf{r}^{(0)}(z) := h(z) \cdot \left[\mathcal{G}_{U_A}(z) + \mathcal{G}_{U_C}(z) \right] + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_R(z) \tag{A2.5.2-4.1}$$

die *Spline*-Koeffizienten $\mathbf{r}_{k\beta}^{(0)}$ des Ansatzes (A2.3.2.5-1) zu bestimmen sind. Damit läßt sich eine nullte Näherung für den Randtemperaturverlauf des Vollzylinders $\mathcal{G}_V^{(0)}(z, \mathbf{R})$ gemäß (A2.5.2-1) berechnen. Diese Temperatur wird in die gleichfalls reduzierte Randfunktion (A2.5.2-3.2)

$$\mathbf{r}_I^{(0)}(z) := \tilde{h}_I(z) \cdot \mathcal{G}_V^{(0)}(z, \mathbf{R}) \cdot \Delta\theta_{AB}(z) + \tilde{h}_I(z) \cdot \left[\mathcal{G}_{UI_A}(z) + \mathcal{G}_{UI_C}(z) \right] + \frac{1}{\lambda_H} \cdot \mathbf{q}_I(z) \tag{A2.5.2-4.2}$$

eingeführt, woraus die Koeffizienten $\mathbf{r}_{k\beta}^{(I)0}$ des Ansatzes (A2.4.2.3-5) zu bestimmen sind, um anschließend entsprechend (A2.5.2-2) eine nullte Näherung der Hohlzylinderrandtemperatur $\mathcal{G}_H^{(0)}(z, \mathbf{R}_I)$ zu berechnen. Nunmehr kann das Verfahren mit den vollständigen Randfunktionen (A2.5.2-3.1) und (A2.5.2-3.2) im Wechsel solange fortgeführt werden, bis ein zu formulierendes Abbruchkriterium erfüllt ist. Hierfür läßt sich z.B. eine Toleranz ε vorgeben, welche von den

Randtemperaturen an allen berechneten z_j -Stellen ($0 \leq z_j \leq L$) unterschritten werden muß, um die Iteration beenden zu können:

$$\max_{(j)} \left| \mathcal{G}_{V_j}^{(v)} - \mathcal{G}_{V_j}^{(v-1)} \right| < \varepsilon_V \quad \text{und} \quad \max_{(j)} \left| \mathcal{G}_{H_j}^{(v)} - \mathcal{G}_{H_j}^{(v-1)} \right| < \varepsilon_H. \quad (\text{A2.5.2-5})$$

Voraussetzung für das Funktionieren des Verfahrens ist natürlich, daß die Approximationen der Randfunktionen durch die *Spline*-Ansätze sorgfältig vorgenommen werden, was insbesondere eine geeignete Festlegung von Anzahl und Lage der Knoten $z=L_k$ sowie der Stützstellen $z=z_j$ verlangt.

Eine Frage von grundsätzlicherer Bedeutung berührt die Konvergenz des Iterationsverfahrens, denn es ist a priori keineswegs sicher, ob überhaupt bzw. unter welchen einschränkenden Voraussetzungen ein sinnvolles und dann möglicherweise auch richtiges Resultat zu erhalten ist. Darauf kann hier zwar keine umfassende Antwort gegeben werden, da sich die in numerischen Beispielen gesammelten Erfahrungen naturgemäß stets nur auf ganz konkrete Situationen beziehen, jedoch haben die bisher durchgeführten numerischen Berechnungen gezeigt, daß das Verfahren tatsächlich konvergiert und plausible Ergebnisse zeitigt, wenn es gedämpft durchgeführt wird. Das wird erreicht, indem die berechneten Randtemperaturen nicht direkt, sondern gewichtet in die Randfunktionen (A2.5.2-3) übernommen werden. Unter Verwendung eines Wichtungsparmeters $\gamma \geq 0$ wird dann statt der Randtemperatur des letzten Schrittes der gewichtete Mittelwert aus den Randtemperaturen des letzten und des vorletzten Schrittes (oder des betreffenden Mittelwertes) herangezogen:

$$\mathcal{G}_V^{(v)}(z, R) \leftarrow \bar{\mathcal{G}}_V^{(v)}(z, R) := \frac{\mathcal{G}_V^{(v)}(z, R) + \gamma \cdot \bar{\mathcal{G}}_V^{(v-1)}(z, R)}{1 + \gamma} \quad (\text{A2.5.2-6.1})$$

$$\mathcal{G}_H^{(v)}(z, R_I) \leftarrow \bar{\mathcal{G}}_H^{(v)}(z, R_I) := \frac{\mathcal{G}_H^{(v)}(z, R_I) + \gamma \cdot \bar{\mathcal{G}}_H^{(v-1)}(z, R_I)}{1 + \gamma}; \quad (\text{A2.5.2-6.2})$$

für den Wichtungsparmeter γ wird anfangs durchaus die Vorgabe größerer Werte erforderlich sein, ehe er mit wachsendem Iterationsfortschritt - unter Berücksichtigung des Konvergenzverhaltens - entsprechend zu verringern ist ($\gamma \rightarrow 0$).

Sehr vorteilhaft macht sich die Zerlegung der Voll- und Hohlzylindertemperatur entsprechend (A2.5.2-1) und (A2.5.2-2) bemerkbar, da immer nur die Koeffizienten der Randfunktionen $\mathbf{r}_{k\beta}^{(v)}$ und $\mathbf{r}_{k\beta}^{(I)(v)}$ zu aktualisieren sind, während die Koeffizienten $V_j, \mathcal{R}_{k\beta j}$ und $\mathcal{H}_j, \mathcal{R}_{k\beta j}^{(I)}$ nur einmal zu Beginn des Verfahrens berechnet und in entsprechenden Feldern abgespeichert werden brauchen.

Wiederum sei angemerkt, daß für die relativen Wärmeübergangskoeffizienten $h = konst.$ und $h_I = konst.$ zweckmäßiger-, jedoch nicht notwendigerweise, aus dem in Kapitel A2.4.3.1c) genannten Grunde die betreffenden Mittelwerte

$$h = \bar{h} := \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \tilde{h}(z) \cdot dz, \quad h_I = \bar{h}_I := \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \tilde{h}_I(z) \cdot dz \quad (\text{A2.5.2-7})$$

heranzuziehen sind.

A2.6 Thermoelastische Spannungen und Formänderungen

Draht und Ziehwerkzeug sind nicht nur Eigenspannungen ausgesetzt, die aus vorangegangenen Prozessen und Bearbeitungsstufen herrühren, sondern sie erfahren darüberhinaus während des Ziehens - abgesehen von der gewünschten Formänderung des Drahtes in der Umformzone - erhebliche mechanische Spannungen und elastische Deformationen. Verantwortlich hierfür sind in erster Linie die an Draht und Ziehring angreifenden Kräfte, die zum Aufrechterhalten des Umformvorganges notwendig sind. Diesen rein mechanischen Spannungen und Formänderungen überlagern sich Anteile, die allein auf thermische Beeinflussung zurückzuführen sind und deshalb als Wärmespannungen und Wärmedehnungen bezeichnet werden [MEL 53]. Übersteigen die insgesamt auftretenden Zugspannungen zulässige Werte, so wird das im Extremfall zum Reißen des Drahtes bzw. zum Bruch des Ziehwerkzeugs führen. Während eine Änderung mechanischer Spannungen stets entsprechende (elastische) Formänderungen nach sich zieht, werden bei Temperaturänderungen, infolge der Anharmonizität der Gitterschwingungen, adäquate Gitterverzerrungen und Abmessungsänderungen hervorgerufen, womit wiederum Spannungsänderungen einhergehen.

Für die Qualität des Drahtes ist, neben den Festigkeitseigenschaften und der Güte der Drahtoberfläche, vor allem die Einhaltung der Durchmesser toleranzen erforderlich. Der Drahtdurchmesser wiederum hängt direkt von der Maßhaltigkeit des Ziehholdurchmessers ab sowie - allerdings in vergleichsweise geringerem Maße - auch davon, mit welcher mechanischen Vorspannung der Ziehdiisenkern, bestehend aus Hartmetall oder Diamant, bei der Herstellung des Ziehwerkzeugs in die Fassung eingebettet - armiert - worden ist. Außerdem läßt sich auch eine geringe Abhängigkeit des Drahtdurchmessers von der Ziehgeschwindigkeit, dem Ziehschmiermittel und den Temperaturverhältnissen feststellen. Nachfolgend sollen vorrangig die Einflüsse von Temperatur und Vorspannung (Armierung) auf Ziehring- und Drahtdurchmesser näher betrachtet werden.

Die thermoelastische Modellierung des Ziehtrings soll zunächst als einfacher, nachfolgend als doppelwandiger bzw. armierter Hohlzylinder erfolgen. Die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen und Deformationsgleichungen für den rotationssymmetrischen Spannungs- und Verzerrungszustand sowie die daraus abgeleiteten allgemeinen Lösungen für die Verschiebungen und Spannungen können [SZA 85, Kap.II-§11-3] entnommen werden. Im vorliegenden Zusammenhang soll jedoch von der vereinfachenden Annahme ausgegangen werden, daß die interessierenden Spannungen und Verschiebungen näherungsweise jenen entsprechen, die sich im Falle ebener Spannungs- bzw. ebener Verzerrungszustände einstellen⁵⁷. Dann reduziert sich das Problem auf eindimensionale Verhältnisse einer Keis- bzw. Kreisringscheibe. Die entsprechenden Lösungsansätze sind wiederum [SZA 85, Kap.II-§11-2] oder [GÖL 81, Kap. 1.1.1,2] zu entnehmen:

- Radialverschiebung

$$u(r) = c \cdot r + \frac{k}{r} + (1+\nu') \frac{\beta'}{r} \cdot \int_{R_1}^r \rho \cdot \Delta \vartheta(\rho) \cdot d\rho \quad (\text{A2.6-1})$$

- Radialspannung

$$\sigma_r(r) = \frac{E'}{1-\nu'^2} \left((1+\nu') \cdot c - (1-\nu') \frac{k}{r^2} \right) - \frac{E' \beta'}{r^2} \cdot \int_{R_1}^r \rho \cdot \Delta \vartheta(\rho) \cdot d\rho \quad (\text{A2.6-2})$$

⁵⁷ Das ist etwa im Mittelteil eines langen Zylinders gegeben, dessen Mantelflächen von Schubbelastung frei sind und dessen Temperaturfeld axial unveränderlich ist.

- Tangentialspannung

$$\sigma_t(r) = \frac{E'}{1-\nu'^2} \left((1+\nu') \cdot c + (1-\nu') \frac{k}{r^2} \right) - E' \beta' \cdot \left(\Delta \vartheta(r) - \frac{1}{r^2} \int_{R_I}^r \rho \cdot \Delta \vartheta(\rho) \cdot d\rho \right); \quad (\text{A2.6-3})$$

Diese Gleichungen gelten für einen axialspannungsfreien, **ebenen Spannungszustand** (*Scheibenproblem*; $\sigma_z = 0$, $\tau_{rz} = 0$) unmittelbar, wenn E' mit dem Elastizitätsmodul E , ν' mit der Querkontraktionszahl⁵⁸ ν und β' mit dem linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten β identifiziert werden. Für die Radialverschiebung und die Spannungen ist, abgesehen von äußeren Einwirkungen über die Ränder, die Temperaturänderung $\Delta \vartheta = \Delta \vartheta(r)$ verantwortlich. Der ebene Spannungszustand ist als Modell jedoch weder für den Draht noch für die Ziehöse sonderlich geeignet, da die auftretenden Axialspannungen nicht berücksichtigt werden. Dieser Situation wird der **ebene Verzerrungszustand** ($\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z \neq 0$) offensichtlich eher gerecht.

Für den ebenen Verzerrungszustand gelten die obigen Formeln ebenfalls, wenn dort

$$E' := \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' := \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \beta' := (1+\nu)\beta \quad (\text{A2.6-*1})$$

gesetzt werden. Als Axialspannung tritt

$$\sigma_z(r) = \nu \cdot (\sigma_r(r) + \sigma_t(r)) - E\beta \cdot \Delta \vartheta(r) + q \quad (\text{A2.6-4})$$

hinzu.

Die beiden Integrationskonstanten c und k sind aus zwei Randbedingungen für die Radialspannung zu bestimmen, die für einen Vollzylinder z.B. in Zylindermitte ($r=0$) und am Mantel ($r=R$) oder für einen Hohlzylinder am Zylinderinnen- und -außenmantel ($r=R_I$, $r=R_2$) vorgegeben werden können. Die Konstante q ist im vorliegenden Zusammenhang aus dem Gleichgewicht der Axialkräfte zu erhalten:

$$F_z = \int_{(A)} \sigma_z \cdot dA \equiv 2\pi \cdot \int_{R_I}^{R_2} \rho \cdot \sigma_z(\rho) \cdot d\rho; \quad A = A(r) := \pi(r^2 - R_I^2). \quad (\text{A2.6-5})$$

Dabei ist die Axialkraft in einem mit der Längsspannung σ_D belasteten Draht⁵⁹ durch

$$F_z = A \cdot \sigma_D = \text{konst.} \quad (\text{A2.6-6.1})$$

gegeben, während die Axialkraft im Ziehring von der einlauf- bis zur auflagerseitigen Stirnfläche, also in Ziehrichtung, von Null auf einen durch die Ziehkraft F_Z bedingten Wert ansteigt. Wird hierfür näherungsweise ein linearer Zusammenhang angenommen, so läßt sich die Axialkraft F_z durch die Ziehkraft $F_Z = \text{konst.}$ in Abhängigkeit von z ausdrücken:

$$F_z = F_z(z) := \frac{z}{L} \cdot F_Z, \quad 0 \leq z \leq L; \quad (\text{A2.6-6.2})$$

L bezeichnet die Ziehringlänge.

⁵⁸ Die Querkontraktions- bzw. Querdehnzahl ν hängt mit Elastizitäts- (E) und Schubmodul (G) über die Beziehung $\nu = E/(2G) - 1$ zusammen; für Metalle gilt $\nu \approx 0,3$; vgl. auch [ILS 90, S.103].

⁵⁹ außerhalb des Ziehwerkzeugs

Um beide Fälle mit einer Formel zu erfassen, genügt die Vorgabe der Axialkraft als lineare Gleichung in z :

$$F_z = F_z(z) := F_0 + F_1 \cdot z \quad (\text{A2.6-6.3})$$

$$\text{mit } F_0 := \begin{cases} A \cdot \sigma_D & \text{für Draht} \\ 0 & \text{für Ziehring,} \end{cases} \quad F_1 := \begin{cases} 0 & \text{für Draht} \\ \frac{z}{L} \cdot F_Z & \text{für Ziehring } (0 \leq z \leq L) \end{cases}$$

Die Konstante q folgt mit (A2.6-4) direkt aus (A2.6-5) zu

$$q = \frac{1}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left\{ F_z - 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot [v \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E\beta \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho)] \cdot d\rho \right\} \quad (\text{A2.6-7})$$

Die Bestimmung der Konstanten c und k hat für Voll- und Hohlzylinder getrennt zu erfolgen. Da jedoch die Ergebnisse des Hohlzylinders im Grenzfall $R_1 \rightarrow 0$ die Resultate des Vollzylinders mit enthalten, werde die Betrachtung des Hohlzylinders vorgezogen.

A2.6.1 Hohlzylinder

Als Spannungs-Randbedingungen für einen einfachen Hohlzylinder sollen bei $r = R_1$

$$\sigma_r(r = R_1) = \sigma_1 \quad (\text{A2.6.1-1.1})$$

und bei $r = R_2$

$$\sigma_r(r = R_2) = \sigma_2 \quad (\text{A2.6.1-1.2})$$

mit den als bekannt angenommenen Spannungen σ_1 und σ_2 vorliegen.

In Verbindung mit (A2.6-2) wird das Gleichungssystem

$$I: (1+v') \cdot c - \frac{1-v'}{R_1^2} \cdot k = \frac{1-v'^2}{E'} \cdot \sigma_1 \quad (\text{A2.6.1-2.1})$$

$$II: (1+v') \cdot c - \frac{1-v'}{R_2^2} \cdot k = \frac{1-v'^2}{E'} \cdot \sigma_2 + \frac{1-v'^2}{R_2^2} \beta' \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho, \quad (\text{A2.6.1-2.2})$$

erhalten, woraus die beiden Integrationskonstanten

$$c = \frac{1-v'}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left(\beta' \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho - R_1^2 \cdot \frac{\sigma_1}{E'} + R_2^2 \cdot \frac{\sigma_2}{E'} \right) \quad (\text{A2.6.1-3.1})$$

$$k = (1+v') \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left(\beta' \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho + R_2^2 \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E'} \right) \quad (\text{A2.6.1-3.2})$$

resultieren⁶⁰.

⁶⁰ Bei Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte siehe [TRO 58].

Damit und unter Substitution der „gestrichenen“ Größen ν' , E' , β' entsprechend (A2.6-*1) wird schließlich die **Radialverschiebung** gemäß (A2.6-1) erhalten:

$$u(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \left[\left((1-2\nu)r + \frac{R_1^2}{r} \right) \frac{1-\nu}{1-(R_1/R_2)^2} \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \left((1-2\nu)r + \frac{R_2^2}{r} \right) \frac{1-\nu}{(R_2/R_1)^2 - 1} \cdot \frac{\sigma_1}{E} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\beta}{r} \cdot \int_{R_1}^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho + \frac{\beta}{R_2^2 - R_1^2} \left((1-2\nu) \cdot r + \frac{R_1^2}{r} \right) \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right] \quad (\text{A2.6.1-4})$$

Die **Radialspannung** wird gemäß (A2.6-2) zu

$$\sigma_r(r) = \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) \frac{\sigma_2}{1 - (R_1/R_2)^2} + \left(\left(\frac{R_2}{r} \right)^2 - 1 \right) \frac{\sigma_1}{(R_2/R_1)^2 - 1} + \dots \\ \dots + \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho - \int_{R_1}^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right] \quad (\text{A2.6.1-5})$$

und die **Tangentialspannung** entsprechend (A2.6-3) zu

$$\sigma_t(r) = \left(1 + \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right) \frac{\sigma_2}{1 - (R_1/R_2)^2} - \left(1 + \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 \right) \frac{\sigma_1}{(R_2/R_1)^2 - 1} + \dots \\ \dots + \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left[\int_{R_1}^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho + \frac{r^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right] - \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \Delta\vartheta(r) \quad (\text{A2.6.1-6})$$

gefunden.

Der Gleichung (A2.6.1-4) läßt sich unmittelbar entnehmen, daß sich die Radialverschiebungen mit einer einsinnigen Temperaturänderung $\Delta\vartheta > 0$ ebenfalls vergrößern. Nach diesem einfachen Modell wird der Hohlzylinder-Innendurchmesser auch dann größer, wenn z.B. nur ein schmaler Ringbereich in der Nähe des inneren Radius $R_1 \leq r \leq R_2 \ll R_2$ eine Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta > 0$ erfährt. Diese Eigenschaft wird jedoch beim doppelwandigen Hohlzylinder so ausschließlich nicht auftreten.

Die **Axialspannung** berechnet sich entsprechend Gleichung (A2.6-4) mit (A2.6-7), (A2.6.1-5) und (A2.6.1-6) explizit zu

$$\sigma_z(z, r) \approx \frac{F_z(z)}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)} - \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \left(\Delta\vartheta(r) - \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right), \quad (\text{A2.6.1-7})$$

wobei als Axialkraft-Randbedingung die Näherung (A2.6-6.3) Verwendung finden kann. Die Axialspannung ist - modellbedingt - von den vorgegebenen Radialspannungen σ_1 und σ_2 unabhängig, so wie umgekehrt Radial- und Tangentialspannung von der Axialspannungsrandbedingung unbeeinflusst bleiben.

A2.6.2 Vollzylinder

Durch Grenzübergang $R_I \rightarrow 0$ gehen aus den entsprechenden Gleichungen des Hohlzylinders unmittelbar diejenigen des Vollzylinders hervor:

- Radialverschiebung

$$u(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \left[(1-\nu)(1-2\nu) \frac{\sigma_2}{E} \cdot r + \frac{\beta}{r} \cdot \int_0^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho + (1-2\nu) \frac{\beta \cdot r}{R_2^2} \cdot \int_0^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right] \quad (\text{A2.6.2-1})$$

- Radialspannung

$$\sigma_r(r) = \sigma_2 + \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \left[\frac{r^2}{R_2^2} \cdot \int_0^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho - \frac{1}{r^2} \cdot \int_0^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right] \quad (\text{A2.6.2-2})$$

- Tangentialspannung

$$\sigma_t(r) = \sigma_2 + \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \int_0^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho + \frac{1}{R_2^2} \cdot \int_0^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho - \Delta\vartheta(r) \right] \quad (\text{A2.6.2-3})$$

- Axialspannung

$$\sigma_z(z,r) \approx \frac{F_z(z)}{\pi \cdot R_2^2} - \frac{\beta E}{1-\nu} \cdot \left(\Delta\vartheta(r) - \frac{2}{R_2^2} \cdot \int_0^{R_2} \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right). \quad (\text{A2.6.2-4})$$

Eine der Gleichung (A2.6.2-1) weitgehend entsprechende Formel wird in [UNG 84, (12)] unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes zur Berechnung der thermischen Balligkeit von Kaltwalzen herangezogen⁶¹. Dabei wird davon ausgegangen, daß die eindimensionalen, zunächst nur r -Abhängigkeit berücksichtigenden Formeln als Näherungsformeln auch dann weiterverwendet werden können, wenn anstelle des Temperaturverlauf $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta(r)$ ein zusätzlich z -Abhängigkeit berücksichtigendes Temperaturfeld $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta(z,r)$ vorliegt. Tatsächlich zeigen FEM-Vergleichsrechnungen im numerisch untersuchten Bereich, daß die z -Abhängigkeit der Radialverschiebung (Walzenballigkeit) durch eine vergleichsweise sehr einfache Beziehung der Art (A2.6.2-1) in Verbindung mit einer Vorgabe $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta(z,r)$ für praktische Belange hinreichend genau widerspiegelt wird. Dieses Resultat ermutigt, bei Bedarf auch im vorliegenden Zusammenhang z -abhängige Temperaturen (und Randspannungen) näherungsweise berücksichtigen zu können.

A2.6.3 Einfach armierter Ring

Das Ziehwerkzeug besteht aus einem konzentrischen Ziehdüsenkern, der in einer Fassung unter radialer Druck-Vorspannung gehalten wird. Das Vorspannen, d.h., das Erzeugen von radialen Druckspannungen im unbelasteten Ziehdüsenkern, vermindert die sonst während des Ziehens im Kern auftretenden tangentialen Zugspannungen oder kehrt diese ggf. sogar in Druckspannungen um und setzt dadurch die Anfälligkeit des Kerns gegenüber Bruch herab. Das Vorspannen des Kerns wird bei der Werkzeugherstellung durch Zugabe eines radialen Übermaßes $u_R > 0$ zwischen Kern und Fassung mit nachfolgendem Einpressen oder Einschrumpfen des Kerns in die

⁶¹ Dort speziell für die Randbedingung $\sigma_2 = 0$.

Fassung erreicht. Auch für das gekoppelte System „Innenring-Außenring“ als vereinfachtem Modell einer einfach armierten Ziehöse lassen sich unter Verwendung der Lösungsansätze (A2.6-1) bis (A2.6-4) wiederum Radialverschiebungen sowie Radial-, Tangential- und Axialspannungen berechnen.

Innenring ($R_I \leq r \leq R$); *Material I*:

$$u(r) = c_I \cdot r + \frac{k_I}{r} + (1 + \nu'_I) \frac{\beta'_I}{r} \cdot \int_{R_I}^r \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \quad \text{für } R_I \leq r \leq R \quad (\text{A2.6.3-1})$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E'_I}{1 - \nu'^2_I} \left((1 + \nu'_I) \cdot c_I - (1 - \nu'_I) \frac{k_I}{r^2} \right) - \frac{E'_I \beta'_I}{r^2} \cdot \int_{R_I}^r \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \quad \text{für } R_I \leq r \leq R \quad (\text{A2.6.3-2})$$

Außenring ($R \leq r \leq R_2$); *Material II*:

$$u(r) = c_{II} \cdot r + \frac{k_{II}}{r} + (1 + \nu'_{II}) \frac{\beta'_{II}}{r} \cdot \int_R^r \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \quad \text{für } R \leq r \leq R_2 \quad (\text{A2.6.3-3})$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E'_{II}}{1 - \nu'^2_{II}} \left((1 + \nu'_{II}) \cdot c_{II} - (1 - \nu'_{II}) \frac{k_{II}}{r^2} \right) - \frac{E'_{II} \beta'_{II}}{r^2} \cdot \int_R^r \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \quad \text{für } R \leq r \leq R_2 \quad (\text{A2.6.3-4})$$

Randbedingungen:

- bei $r = R_I$: $\sigma_r(r = R_I) = \sigma_1$ (A2.6.3-5.1)

- bei $r = R_2$: $\sigma_r(r = R_2) = \sigma_2$ (A2.6.3-5.2)

- bei $r = R$; $R_I < R < R_2$:

$$u(r = R - 0) = u_{R_I} < 0 \quad (\Rightarrow \text{Radiusverringerng des Innenring-Außendurchmessers})$$

$$u(r = R + 0) = u_{R_{II}} > 0 \quad (\Rightarrow \text{Radiusvergrößerung des Außenring-Innendurchmessers})$$

mit vorgegebenem Übermaß $u_R \geq 0$, wobei $u_R = u_{R_{II}} - u_{R_I} \equiv |u_{R_I}| + |u_{R_{II}}|$ gilt, d.h.,

$$u_R = u(r = R + 0) - u(r = R - 0) \quad (\text{A2.6.3-5.3})$$

(Kontinuität der Verschiebungen)

$$\sigma_r(r = R - 0) = \sigma_r(r = R + 0) \quad (\text{A2.6.3-5.4})$$

(Kontinuität der Radialspannungen)

Damit ergeben sich zur Bestimmung der vier Konstanten c_I , c_{II} , k_I , k_{II} folgende Gleichungen:

$$\sigma_1 = \frac{E'_I}{1 - \nu'^2_I} \left((1 + \nu'_I) \cdot c_I - (1 - \nu'_I) \frac{k_I}{R_I^2} \right) \quad (\text{A2.6.3-6.1})$$

$$\sigma_2 = \frac{E'_{II}}{1 - \nu'^2_{II}} \left((1 + \nu'_{II}) \cdot c_{II} - (1 - \nu'_{II}) \frac{k_{II}}{R_2^2} \right) - \frac{E'_{II} \beta'_{II}}{R_2^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \quad (\text{A2.6.3-6.2})$$

$$c_I \cdot R + \frac{k_I}{R} + (1+v'_I) \frac{\beta'_I}{R} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho = c_{II} \cdot R + \frac{k_{II}}{R} - u_R \quad (\text{A2.6.3-6.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{E'_I}{1-v'^2_I} \left((1+v'_I) \cdot c_I - (1-v'_I) \frac{k_I}{R^2} \right) - \frac{E'_I \beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \\ = \frac{E'_{II}}{1-v'^2_{II}} \left((1+v'_{II}) \cdot c_{II} - (1-v'_{II}) \frac{k_{II}}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-6.4})$$

Aus (A2.6.3-6.1, 6.2) folgt für c_I und c_{II} :

$$c_I = (1-v'_I) \left(\frac{\sigma_I}{E'_I} + \frac{1}{1+v'_I} \cdot \frac{k_I}{R^2} \right) \quad (\text{A2.6.3-7.1})$$

$$c_{II} = (1-v'_{II}) \left(\frac{\sigma_2}{E'_{II}} + \frac{1}{1+v'_{II}} \frac{k_{II}}{R^2} + \frac{\beta'_{II}}{R^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \right) \quad (\text{A2.6.3-7.2})$$

Einsetzen von $c_I = c_I(k_I)$ und $c_{II} = c_{II}(k_{II})$ in die Verschiebungsbedingung (A2.6.3-6.3) liefert die Gleichung:

$$a_{11} \cdot k_I + a_{12} \cdot k_{II} = b_1 \quad (\text{A2.6.3-8.1})$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} &:= -\frac{1-v'_I}{1+v'_I} \cdot \frac{R}{R^2} - \frac{1}{R}, & a_{12} &:= \frac{1-v'_{II}}{1+v'_{II}} \frac{R}{R^2} + \frac{1}{R} \\ b_1 &:= u_R + (1-v'_I) \cdot R \cdot \frac{\sigma_I}{E'_I} - (1-v'_{II}) \cdot R \cdot \frac{\sigma_2}{E'_{II}} + \dots \\ &\dots + (1+v'_I) \frac{\beta'_I}{R} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho - (1-v'_{II}) \cdot \beta'_{II} \frac{R}{R^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \end{aligned}$$

Einsetzen von $c_I = c_I(k_I)$ und $c_{II} = c_{II}(k_{II})$ in Spannungsbedingung (A2.6.3-6.4) liefert die Gleichung:

$$a_{21} \cdot k_I + a_{22} \cdot k_{II} = b_2 \quad (\text{A2.6.3-8.2})$$

mit

$$\begin{aligned} a_{21} &:= -\frac{E'_I}{1+v'_I} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \right), & a_{22} &:= \frac{E'_{II}}{1+v'_{II}} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \right) \\ b_2 &:= \sigma_I - \sigma_2 - \frac{E'_I \beta'_I}{R^2} \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho - \frac{E'_{II} \beta'_{II}}{R^2} \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho. \end{aligned}$$

Die Lösung der beiden Konstanten k_I, k_{II} lautet:

$$\begin{aligned}
 k_I &= \frac{a_{12} \cdot b_2 - a_{22} \cdot b_1}{a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}} \\
 &= \frac{R_I^2}{\left(\frac{1-v'_{II}}{1+v'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{1-v'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{E'_{II}}{1+v'_{II}}} \\
 &\quad \cdot \left\{ (-I) \cdot \left[\frac{1-v'_{II}}{1+v'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 + \frac{1-v'_I}{1+v'_{II}} \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{E'_{II}}{E'_I} \right] \cdot \sigma_1 + \frac{2}{1+v'_{II}} \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \cdot \sigma_2 - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{E'_{II}}{1+v'_{II}} \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{u_R}{R} + \frac{2}{1+v'_{II}} \frac{E'_{II} \beta'_{II}}{R^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left[\left(\frac{1-v'_{II}}{1+v'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_I - \frac{1+v'_I}{1+v'_{II}} \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot E'_{II} \right] \frac{\beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \right\}
 \end{aligned} \tag{A2.6.3-9.1}$$

und

$$\begin{aligned}
 k_{II} &= \frac{a_{21} \cdot b_1 - a_{11} \cdot b_2}{a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}} \\
 &= \frac{R_2^2}{\left(\frac{1-v'_{II}}{1+v'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{1-v'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{E'_{II}}{1+v'_{II}}} \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{-2}{1+v'_I} \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \cdot \sigma_1 + \left[\frac{1-v'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 - \frac{1-v'_{II}}{1+v'_I} \left(1 - \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{E'_{II}} \right] \cdot \sigma_2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{E'_I}{1+v'_I} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{u_R}{R} + \frac{2}{1+v'_I} \frac{E'_I \beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_I}^R \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \left[\frac{1-v'_{II}}{1+v'_I} \left(1 - \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_I - \left(\frac{1-v'_I}{1+v'_I} + \left(\frac{R_I}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_{II} \right] \frac{\beta'_{II}}{R_2^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta \mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \right\}
 \end{aligned} \tag{A2.6.3-9.2}$$

Die beiden anderen Konstanten werden direkt aus (A2.6.3-7.1) und (A2.6.3-7.2) erhalten:

$$\begin{aligned}
 c_I &= (1-\nu'_I) \cdot \left(\frac{\sigma_I}{E'_I} + \frac{k_I}{(1+\nu'_I)R_1^2} \right) \\
 &= \frac{\frac{1-\nu'_I}{1+\nu'_I}}{\left(\frac{1-\nu'_{II}}{1+\nu'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{1-\nu'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{E'_{II}}{1+\nu'_{II}}} \\
 &\quad \cdot \left\{ \left[\frac{1+\nu'_I}{1+\nu'_{II}} \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{E'_{II}}{E'_I} - \frac{1-\nu'_{II}}{1+\nu'_{II}} - \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \cdot \sigma_I + \frac{2}{1+\nu'_{II}} \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \cdot \sigma_2 - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{E'_{II}}{1+\nu'_{II}} \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{u_R}{R} + \frac{2}{1+\nu'_{II}} \cdot \frac{E'_{II}\beta'_{II}}{R^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left[\left(\frac{1-\nu'_{II}}{1+\nu'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_I - \frac{1+\nu'_I}{1+\nu'_{II}} \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \cdot E'_{II} \right] \frac{\beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_1}^R \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \right\} \\
 & \hspace{15em} \text{(A2.6.3-9.3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{II} &= (1-\nu'_{II}) \cdot \left(\frac{\sigma_2}{E'_{II}} + \frac{\beta'_{II}}{R_2^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho + \frac{k_{II}}{(1+\nu'_{II})R_2^2} \right) \\
 &= \frac{\frac{1-\nu'_{II}}{1+\nu'_{II}}}{\left(\frac{1-\nu'_{II}}{1+\nu'_{II}} + \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{1-\nu'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(\left(\frac{R_2}{R} \right)^2 - 1 \right) \frac{E'_{II}}{1+\nu'_{II}}} \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{-2}{1+\nu'_I} \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \cdot \sigma_I + \left[\frac{1+\nu'_{II}}{1+\nu'_I} \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \frac{E'_I}{E'_{II}} + \left(\frac{1-\nu'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right] \cdot \sigma_2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{E'_I}{1+\nu'_I} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{u_R}{R} + \frac{2}{1+\nu'_I} \cdot \frac{E'_I\beta'_I}{R^2} \cdot \int_{R_1}^R \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left[\frac{1+\nu'_{II}}{1+\nu'_I} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_I + \left(\frac{1-\nu'_I}{1+\nu'_I} + \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 \right) \cdot E'_{II} \right] \cdot \frac{\beta'_{II}}{R^2} \cdot \int_R^{R_2} \rho \cdot \Delta\mathcal{G}(\rho) \cdot d\rho \right\} \\
 & \hspace{15em} \text{(A2.6.3-9.4)}
 \end{aligned}$$

Mit den Konstanten c_I , c_{II} , k_I , k_{II} lassen sich nunmehr die Verschiebungen gemäß (A2.6.3-1), (A2.6.3-3) und die Radialspannungen entsprechend (A2.6.3-2), (A2.6.3-4) berechnen.

Die Tangentialspannungen ergeben sich wegen (A2.6-3) zu:

- Innenring

$$\begin{aligned} \sigma_t(r) = & \frac{E'_I}{1-\nu'^2_I} \left((1+\nu'_I) \cdot c_I + (1-\nu'_I) \frac{k_I}{r^2} \right) - \dots \\ & \dots - E'_I \beta'_I \cdot \left(\Delta\vartheta(r) - \frac{1}{r^2} \int_{R_I}^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right) \quad \text{für } R_I \leq r \leq R \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-10})$$

- Außenring

$$\begin{aligned} \sigma_t(r) = & \frac{E'_{II}}{1-\nu'^2_{II}} \left((1+\nu'_{II}) \cdot c_{II} + (1-\nu'_{II}) \frac{k_{II}}{r^2} \right) - \dots \\ & \dots - E'_{II} \beta'_{II} \cdot \left(\Delta\vartheta(r) - \frac{1}{r^2} \int_R^r \rho \cdot \Delta\vartheta(\rho) \cdot d\rho \right) \quad \text{für } R \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-11})$$

Um die Verschiebungen und Spannungen für das Modell „Ebener Verzerrungszustand“ zu erhalten, sind wiederum die „gestrichenen“ Größen ν' , E' , β' entsprechend (A2.6-*1) zu substituieren, was hier jedoch explizit nicht ausgeführt werden muß.

Im Gegensatz zum einfachen Hohlzylinder, kann es im doppelwandigen Hohlzylinder mit wachsender Erwärmung zur Verringerung des Innendurchmessers kommen, allerdings nur dann, wenn neben einem hinreichend starken Temperaturgefälle vom Innen- zum Außenmantel ($R_I \rightarrow r \rightarrow R_2$) der Elastizitätsmodul der Armierung größer als der des Kernmaterials ist. In der ziehtechnischen Praxis wird der Kern des Ziehwerkzeugs aus Gründen der Verschleißfestigkeit stets aus Hartmetall oder sogar Diamant ausgeführt, während die Fassung aus Stahl oder Messing besteht. Damit jedoch ist der Elastizitätsmodul der Armierung⁶² noch nicht einmal halb so groß wie der des Kerns und es kann eingeschätzt werden, daß ein thermisches „Zugehen“ der Ziehöse im Erwärmungsfall $\Delta\vartheta > 0$ unter ziehpraktischen Bedingungen auszuschließen ist. Im Gegenteil, auch bei einer inhomogenen, nur im Bereich des Innenringes erfolgenden Erwärmung wird der Ziehring seine Abmessungen stets vergrößern.

Für ebenen Verzerrungszustand läßt sich wiederum die Axialspannung angeben. Anstelle (A2.6-4) ist

$$\sigma_z(r) = \begin{cases} \nu_I \cdot (\sigma_r(r) + \sigma_t(r)) - E_I \beta_I \cdot \Delta\vartheta(r) + q_I & \text{für } R_I \leq r \leq R \\ \nu_{II} \cdot (\sigma_r(r) + \sigma_t(r)) - E_{II} \beta_{II} \cdot \Delta\vartheta(r) + q_{II} & \text{für } R \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (\text{A2.6.3-12})$$

anzusetzen.

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Konstanten q_I und q_{II} wird aus der Grenzbedingung

$$\sigma_z(r = R-0) = \sigma_z(r = R+0), \quad (\text{A2.6.3-13.1})$$

⁶² E-Moduli [kN/mm^2]: $E_{\text{Stahl}} \approx 210$, $E_{\text{Hartmetall}} \approx 400 - 680$, $E_{\text{polykrist.Diamant}} \approx 850$; vgl. [SCH 88, Tab.6].

d.h., aus der Gleichung

$$q_I - q_{II} = (v_{II} - v_I) \cdot (\sigma_r(R) + \sigma_t(R)) + (E_I \beta_I - E_{II} \beta_{II}) \cdot \Delta \vartheta(R) \quad (\text{A2.6.3-13.2})$$

und - wegen (A2.6-5) - aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \pi(R^2 - R_I^2) \cdot q_I + \pi(R_2^2 - R^2) \cdot q_{II} = \\ = F_z - 2\pi \int_{R_I}^R \rho \cdot [v_I \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_I \beta_I \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho - \dots \\ \dots - 2\pi \int_R^{R_2} \rho \cdot [v_{II} \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_{II} \beta_{II} \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-14})$$

erhalten, woraus die gesuchten Konstanten zu

$$\begin{aligned} q_I = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_I^2)} \cdot \left\{ F_z - 2\pi \int_{R_I}^R \rho \cdot [v_I \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_I \beta_I \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho - \dots \right. \\ \dots - 2\pi \int_R^{R_2} \rho \cdot [v_{II} \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_{II} \beta_{II} \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho \dots \\ \left. \dots - \pi(R_2^2 - R^2) \cdot [(v_I - v_{II}) \cdot (\sigma_r(R) + \sigma_t(R)) - (E_I \beta_I - E_{II} \beta_{II}) \cdot \Delta \vartheta(R)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-15.1})$$

und

$$\begin{aligned} q_{II} = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_I^2)} \cdot \left\{ \pi(R^2 - R_I^2) \cdot [(v_I - v_{II}) \cdot (\sigma_r(R) + \sigma_t(R)) - (E_I \beta_I - E_{II} \beta_{II}) \cdot \Delta \vartheta(R)] + \dots \right. \\ \dots + F_z - 2\pi \int_{R_I}^R \rho \cdot [v_I \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_I \beta_I \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho - \dots \\ \left. \dots - 2\pi \int_R^{R_2} \rho \cdot [v_{II} \cdot (\sigma_r(\rho) + \sigma_t(\rho)) - E_{II} \beta_{II} \cdot \Delta \vartheta(\rho)] \cdot d\rho \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.6.3-15.2})$$

folgen. Damit liegt auch die Axialspannung entsprechend (A2.6.3-12), ggf. in Verbindung mit der Axialkraftnäherung (A2.6-6.3), vor.

Es sei erwähnt, daß in den bisher gewonnenen thermoelastischen Beziehungen - wie bereits in Kapitel A2.6.2 vermerkt - näherungsweise mit einer zusätzlich z -abhängigen Temperaturänderung gerechnet werden kann. Ebenso läßt sich dann die Berücksichtigung einer z -Abhängigkeit auch auf die Spannungsvorgaben am Innen- und Außenmantel $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1(z)$, $\sigma_2 \rightarrow \sigma_2(z)$ und ggf. sogar auf die Radien $R_I \rightarrow R_I(z)$, $R \rightarrow R(z)$, $R_2 \rightarrow R_2(z)$ näherungsweise ausdehnen. Dabei ist jedoch klar, daß die zur Vereinfachung eingangs vorgenommene Beschränkung auf ebene Spannungs- bzw. Verzerrungszustände um so weniger gerechtfertigt ist, je inhomogener die äußeren Einflüsse verteilt sind.

Ein spezielles Beispiel soll die Situation der Radialverschiebung sowie der Radial- und Tangentialspannung im einfach armierten Ring unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustands veranschaulichen. Dafür werde angenommen, daß das Armierungsübermaß zwischen dem Außendurchmesser des Innenrings und dem Innendurchmesser des Außenrings $u_R = 0,032 \text{ mm}$ beträgt, daß ein Innendruck von $\sigma_1 = -400 \text{ N/mm}^2$ herrscht und die Radialspannung am Außenrand verschwindet $\sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2$. Als Temperaturänderung werde das stationäre Temperaturprofil eines doppelwandigen Rohres angenommen, dessen Temperaturen an der Innenwand $\vartheta_1 = 250 \text{ }^\circ\text{C}$ und an der Außenwand $\vartheta_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ aufweisen:

$$\Delta\vartheta(r) := \begin{cases} \vartheta_1 - 2\pi \cdot (q_L/\lambda_I) \cdot \ln(r/R_I) & \text{für } R_I \leq r \leq R \\ \vartheta_1 - 2\pi \cdot (q_L/\lambda_I) \cdot \ln(R/R_I) - 2\pi \cdot (q_L/\lambda_{II}) \cdot \ln(r/R) & \text{für } R \leq r \leq R_2; \end{cases}$$

mit der linearen Wärmequellendichte $q_L = 2\pi \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda_I} \cdot \ln\left(\frac{R}{R_I}\right) + \frac{1}{\lambda_{II}} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R}\right)}$.

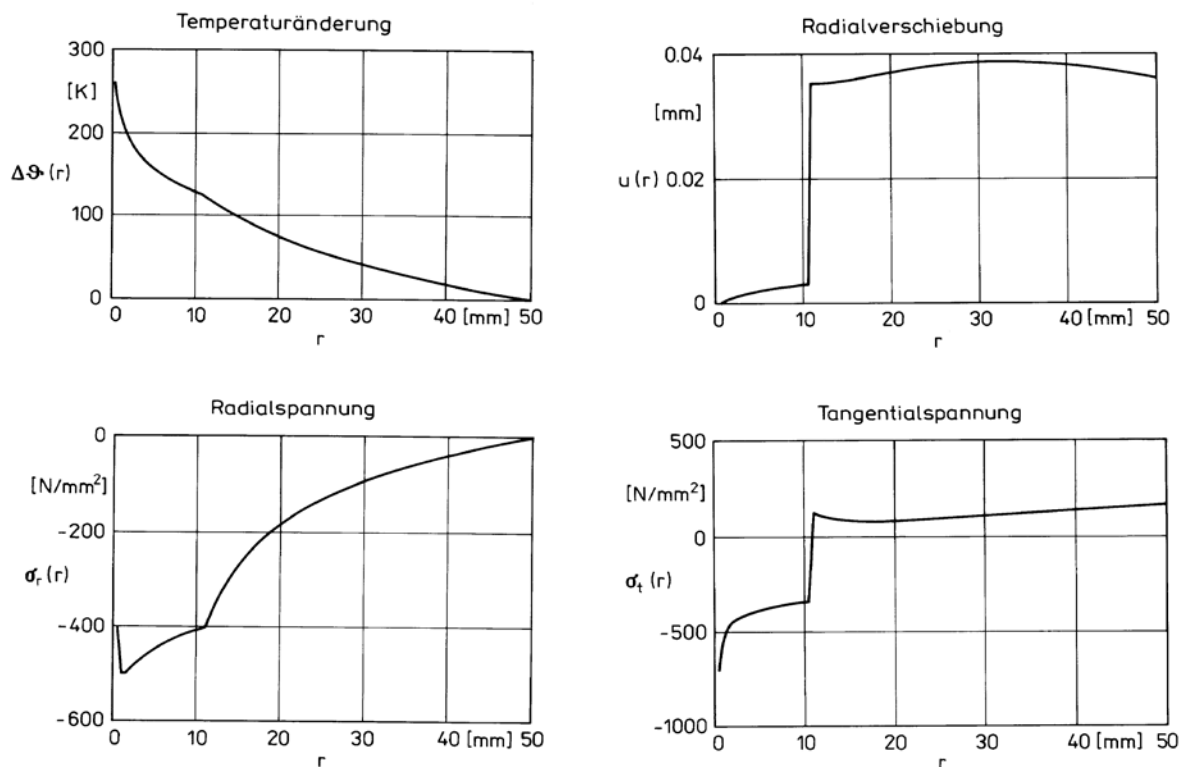


Bild A2.6-1: Radialverschiebung und Spannungsverhältnisse im armierten Ring (Beispiel)

Eine nähere Betrachtung der thermischen Verhältnisse des Beispiels zeigt, daß sich mit steigender Innenrandtemperatur ϑ_1 - bei sonst unveränderten Parametern - die Ringabmessungen und auch die radialen Druckspannungen vergrößern, während für die Tangentialspannungen zwischen Innen- und Außenring zu unterscheiden ist: Im Innenring liegen tangentiale Druckspannungen vor, die mit wachsendem ϑ_1 gleichfalls anwachsen, wohingegen im Außenring tangentiale Zugspannungen wirken, die mit wachsendem ϑ_1 im Innenbereich abnehmen, während sie im Außenbereich anwachsen.

Folgende weitere Angaben wurden im Rechenbeispiel verwendet:

Innenradius $R_1 = 0,5 \text{ mm}$, Außenradius $R_2 = 50 \text{ mm}$, Übergangsradius zwischen Innen- und Außenring bzw. zwischen Ziehdüsenkern und Fassung $R = 11 \text{ mm}$. Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, linearer Wärmeausdehnungskoeffizient und Wärmeleitfähigkeit für

- Innenring aus Hartmetall:

$$E_I = 450 \text{ kN/mm}^2, \nu_I = 0,23, \beta_I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \lambda_I = 90 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$$

- Außenring aus Stahl:

$$E_{II} = 210 \text{ kN/mm}^2, \nu_{II} = 0,3, \beta_{II} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \lambda_{II} = 45 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}.$$

Durch Variation des Armierungsübermaßes, des Innendrucks und der Temperatur am Innenrand läßt sich ein noch detaillierterer Überblick über die Reaktion des armierten Rings - stellvertretend für das Ziehwerkzeug - gewinnen.

Vorteilhafterweise kann für die Berechnungen Mathematik-Standardsoftware herangezogen werden. Bei Verwendung des bedienerfreundlichen *MathCad* von *MathSoft* lassen sich die angegebenen Formeln - sogar ohne aufwendiges Programmieren - relativ mühelos direkt eingeben. Die numerischen Ergebnisse können dann in Tabellenform ausgegeben oder als Diagramm dargestellt werden. Aber selbst mit einem programmierbaren Pocket-PC, z.B. *HP48*, sind numerische Berechnungen unmittelbar und ohne größeren Aufwand möglich. So erweist sich neben dem Vorteil, die vorliegenden geschlossenen Lösungsausdrücke entsprechend analysieren und qualitativ beurteilen zu können, die einfache rechentechnische Umsetzung als weiterer Vorzug. Sollen die geometrischen Verhältnisse eines Ziehwerkzeugs sowie die mechanischen und thermischen Randbedingungen noch detaillierter und realitätsbezogener untersucht werden, als das unter einer vereinfachenden Beschränkung auf ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand möglich ist, so muß dann allerdings zu diskret-numerischen Methoden, wie z.B. FEM, übergegangen werden.

Welche Auswirkungen die thermisch bedingten Formänderungen des Ziehholts auf den Durchmesser des gezogenen Drahtes haben und wie aus einer experimentell ermittelten, ziehgeschwindigkeitsabhängigen Drahtverlängerung auf die dynamische Schmierfilmdicke geschlossen werden kann, wird in Kapitel 3.1.3 gezeigt.

A3.1.1.3 Näherungslösungen nach dem Vorgehen von SIEBEL/KOBITZSCH

Bekanntlich betrachten SIEBEL/KOBITZSCH [SIE 43] den stationären Zustand und gehen unter Vernachlässigung der Oberflächenkrümmung des Drahtes ($R \rightarrow \infty$) vom Modell eines halb-unendlichen Körpers sowie - ohne eine Wärmeleitungsgleichung, z.B. (A2.3.2.2-1) oder (A2.3.2.4-1), zu berücksichtigen oder gar zu erfüllen - von der Annahme eines parabelförmigen Temperaturverlaufs (senkrecht zur Oberfläche) der Form

$$\vartheta(x,z) = \begin{cases} \vartheta_R(z) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_0(z)}\right)^2 & \text{für } 0 \leq x \leq x_0(z) \\ 0 & \text{für } x > x_0(z) \end{cases} \quad (\text{A3.1.1.3-1})$$

aus; Starttemperatur vereinfacht als $\vartheta_0 = 0$, ebenfalls $q_V = 0$.

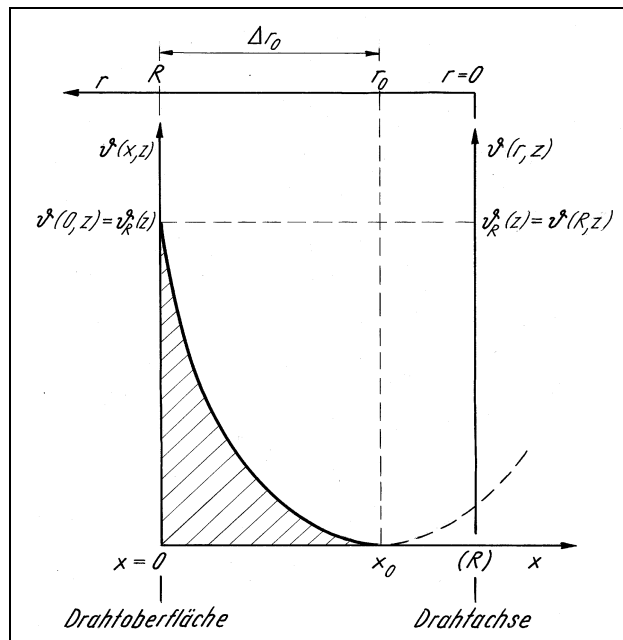


Bild A3.1.1-1: ϑ - x - bzw. ϑ - r -Koordinaten für das Parabel-Modell von SIEBEL/KOBITZSCH

Entsprechend einer Randbedingung 2. Art (Minuszeichen infolge in den Körper weisender x -Koordinate)

$$-\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \vartheta(0,z) = q_R \quad (\text{A3.1.1.3-2})$$

erhalten sie infolge des Ansatzes (A3.1.1.3-1) zunächst für die Oberflächen- bzw. Randtemperatur

$$\vartheta(0,z) = \vartheta_R(z) = q_R \cdot \frac{x_0(z)}{2\lambda}, \quad (\text{A3.1.1.3-3})$$

während sie die Tiefe bzw. Dicke der wärmebeeinflussten Randschicht x_0 durch Vergleich der Wärmebilanzen in z - und x -Richtung ermitteln:

$$\tilde{Q}_z = \int_0^t q_R \cdot dt = \frac{1}{v} \cdot \int_0^z q_R \cdot dz = q_R \cdot \frac{z}{v}; \quad q_R = \text{konst.} \quad (\text{A3.1.1.3-4.1})$$

$$\tilde{Q}_x = \rho c \cdot \int_0^{x_0} \vartheta(x,z) \cdot dx = \rho c \cdot \vartheta_R(z) \cdot \frac{x_0(z)}{3} = q_R \cdot \frac{x_0^2(z)}{6a}, \quad (\text{A3.1.1.3-4.2})$$

so daß infolge der Bedingung $\tilde{Q}_x = \tilde{Q}_z$ die Wärmeeindringtiefe zu

$$x_0(z) = \sqrt{6 \cdot \frac{a}{v}} z \quad (\text{A3.1.1.3-5})$$

folgt und schließlich aus (A3.1.1.3-3) explizit die Randtemperatur

$$\mathcal{G}_R(z) = \frac{q_R}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{a}{v}} z = q_R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{z}{\lambda \rho c \cdot v}} \quad (\text{A3.1.1.3-6})$$

erhalten wird; q_R gemäß (3.1.1-2), $\mathcal{G}_0 = 0$. Mit (A3.1.1.3-5) und (A3.1.1.3-6) liegt das gesamte Temperaturfeld entsprechend (A3.1.1.3-1) nunmehr fest.

Der Vergleich mit dem asymptotischen Näherungsergebnis (A2.3.2.8-5.4) zeigt, daß das auf völlig anderem Wege erhaltene Ergebnis von *SIEBEL/KOBITZSCH* bis auf den Zahlenfaktor $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,2247$ anstelle $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1,1284$ mit (A2.3.2.8-5.4) übereinstimmt und damit eine Abweichung von 8,5% aufweist. Den infolge verschwindenden Wärmeübergangs $\alpha \rightarrow 0$ (bzw. Randbedingung 2. Art) fehlenden Wärmeaustausch des Drahtes mit der Ziehöse versuchen *SIEBEL* und *KOBITZSCH* durch einen - streng genommen sich mit der z -Koordinate ändernden - Wärmeeindringtiefebeiwert $m = konst.$ zu korrigieren⁶³.

Wird Ortsabhängigkeit für $q_R = q_R(z)$ zugelassen, so wird anstelle (A3.1.1.3-5) und (A3.1.1.3-6)

mit $\tilde{q}_R(z) = \frac{1}{z} \cdot \int_0^z q_R(\zeta) \cdot d\zeta$ allgemeiner erhalten:

$$x_0(z) = \sqrt{6 \cdot \frac{a}{v}} z \cdot \sqrt{\frac{\tilde{q}_R(z)}{q_R(z)}} \quad (\text{A3.1.1.3-7})$$

$$\mathcal{G}_R(z) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{z}{\lambda \rho c \cdot v}} \cdot \sqrt{q_R(z) \cdot \tilde{q}_R(z)} \quad (\text{A3.1.1.3-8})$$

Auch *KOPP* [KOP 68] stützt sich zur Temperaturberechnung wesentlich auf die Grundgedanken von *SIEBEL* und *KOBITZSCH*. Er berücksichtigt allerdings ortsabhängige Schubspannungen längs der Wirkfuge und gelangt zu mit (A3.1.1.3-7) prinzipiell vergleichbaren Ergebnissen [KOP 68, Gl. (80)]. Dabei ist allerdings $q_R(z)$ einschränkenden Bedingungen zu unterwerfen, indem mindestens $\frac{d}{dz} x_0(z) > 0$ und $q_R(z) > 0$ nebst Stetigkeit für $z > 0$ zu fordern sind, da andernfalls sofort leicht erkennbare Widersprüche zu elementaren Tatsachen der Wärmeleitung entstehen würden. Trotzdem bleibt noch zweifelhaft, ob allein mit der Einfachheit der Formeln (A3.1.1.3-7), (A3.1.1.3-8), ggf. in Verbindung mit (A3.1.1.3-1), die verbleibende Unsicherheit hinsichtlich Anwendungsbereich und Genauigkeit zu rechtfertigen ist, eine Frage, die allenfalls im Vergleich zur exakten Lösung (Herleitung vgl. Anhang B)

$$\mathcal{G}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda \rho c \cdot v}} \cdot \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z-\zeta}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4 \frac{a}{v} \cdot (z-\zeta)}\right) \cdot q_R(\zeta) \cdot d\zeta \quad (\text{A3.1.1.3-9.1})$$

bzw.

⁶³ Abschätzung für m siehe Kapitel 3.1.1.4.1.

$$\mathcal{G}_R(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda \rho c \cdot v}} \cdot \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z-\zeta}} \cdot \mathbf{q}_R(\zeta) \cdot d\zeta \quad (\text{A3.1.1.3-9.2})$$

im Einzelfall beantwortet werden kann.

Im denkbar einfachsten Fall einer unstetigen Randquelle $\mathbf{q}_R(z)$, gegeben durch eine von $z=0$ bis $z=z_L$ konstant wirkende Wärmequellendichte $q_R = \text{konst.}$, die jedoch ab $z=z_L$ verschwindet, wofür unter Verwendung der *HEAVISIDE*schen Einheitssprungfunktion (A2.3.2.5-D3) kürzer

$$\mathbf{q}_R(z) = (\theta(z) - \theta(z-z_L)) \cdot q_R \quad (\text{A3.1.1.3-10})$$

geschrieben wird, erhält man aus (A3.1.1.3-9.2) die Randtemperatur - vgl. auch [KOR 48]

$$\mathcal{G}_R(z) = 2 \frac{q_R}{\sqrt{\pi \lambda \rho c \cdot v}} \cdot (\theta(z) \cdot \sqrt{z} - \theta(z-z_L) \cdot \sqrt{z-z_L}). \quad (\text{A3.1.1.3-11})$$

Diese Funktion ist, in Übereinstimmung mit physikalischer Erfahrung, auch an der Unstetigkeitsstelle von $\mathbf{q}_R(z)$ bei $z=z_L$ stetig, während die mit (A3.1.1.3-10) aus (A3.1.1.3-8) hervorgehende Funktion dort einen Sprung aufweist.

Denkt man sich allgemeiner eine die Randquellen repräsentierende Funktion aus einer Anzahl wenigstens für $z > z_k$ stetiger Funktionen $\mathbf{q}_{R_k}(z)$ gemäß

$$\mathbf{q}_R(z) = \sum_{(k)} \theta(z-z_k) \cdot \mathbf{q}_{R_k}(z) \quad (\text{A3.1.1.3-12})$$

zusammengesetzt, so daß $\mathbf{q}_R(z)$ bei $z=z_k$ Unstetigkeitsstellen aufweisen kann (sofern $\mathbf{q}_{R_k}(z_k+0) \neq 0$ ist), so ist aus der mit (A3.1.1.3-9.2) erhaltenen Lösung

$$\mathcal{G}_R(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda \rho c \cdot v}} \cdot \sum_{(k)} \theta(z-z_k) \cdot \int_{z_k}^z \frac{1}{\sqrt{z-\zeta}} \cdot \mathbf{q}_R(\zeta) \cdot d\zeta \quad (\text{A3.1.1.3-13})$$

ohne weiteres zu erkennen, wie eine Verallgemeinerung von (A3.1.1.3-8) durch Superposition entsprechender (mit den rechtsseitig von $z=z_k$ stetigen $\mathbf{q}_{R_k}(z)$ bei modifizierten \tilde{q}_R) Teilösungen von (A3.1.1.3-8) zu erreichen ist. Da jedoch alle anderen Unsicherheiten bestehen bleiben und da in Anbetracht der Einfachheit von (A3.1.1.3-9.2) bzw. (A3.1.1.3-13) eine solche Verallgemeinerung von (A3.1.1.3-8) keinen ersichtlichen Vorteil mehr bringt, kann hierauf schließlich auch ganz verzichtet werden.

Während mit der für $\mathbf{q}_R(z) = q_R = \text{konst.}$ erhaltenen Näherungslösung nach *SIEBEL/KOBITZSCH* gegenüber der exakten Lösung des halbumendlichen Körpers etwa 8,5% zu hohe Randtemperaturen erhalten werden, ergibt ein Vergleich der mit den jeweils körpereigenen Randtemperaturen dimensionslos gemachten Temperaturen $\mathcal{G}(x,z)$:

- für den Ansatz von *SIEBEL/KOBITZSCH* mit (A3.1.1.3-1), (A3.1.1.3-6):

$$\frac{\vartheta(x,z)}{\vartheta_R(z)} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{\frac{a}{v}z}} \right)^2 \quad (\text{A3.1.1.3-14.1})$$

- für die exakte Lösung nach [TAU 71, Kap. 7.1.3]:

$$\frac{\vartheta(x,z)}{\vartheta_R(z)} = \sqrt{\pi} \cdot \mathit{interfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{a}{v}z}} \right) \quad (\text{A3.1.1.3-14.2})$$

die aus Bild A3.1.1-2 ablesbaren (relativen) Unterschiede.

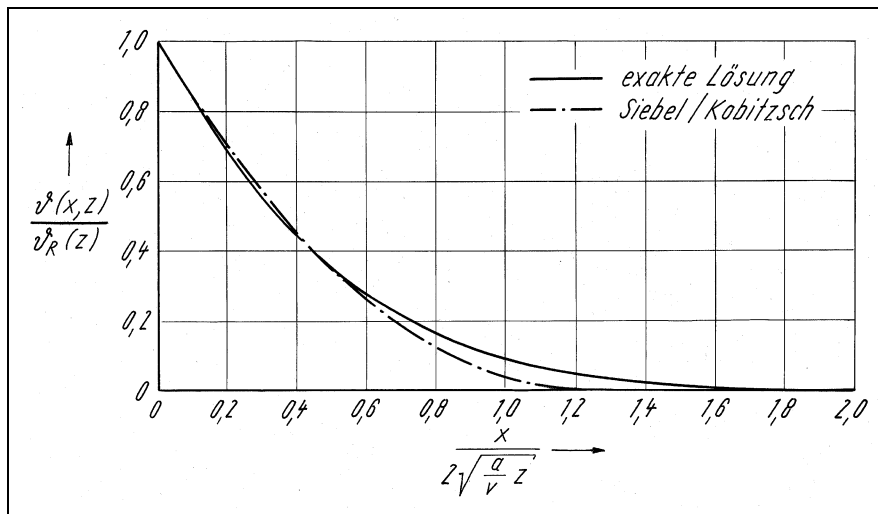


Bild A3.1.1-2: Vergleich des Modells *SIEBEL/KOBITZSCH* mit dem des halbumendlichen Körpers

Die Normierung bedingt, daß beide Funktionen an der Oberfläche bei $x=0$ übereinstimmen, während die relativen Unterschiede mit wachsender Tiefe in das Körperinnere sichtbar werden. Generell gilt, daß bei Anwendung einer Lösung des halbumendlichen Körpers auf Runddraht, ob exakt oder in der Näherung von *SIEBEL* und *KOBITZSCH*, nur mit z -Werten gerechnet werden darf, für die in etwa die Bedingung $0 < x_0 \leq R$ eingehalten wird.

Abschließend hierzu soll noch auf den immerhin bemerkenswerten Umstand eingegangen werden, daß sich das Parabelmodell von *SIEBEL/KOBITZSCH* auch auf den rotationssymmetrischen Fall und sogar auf eine Wärmeübergang berücksichtigende Randbedingung (A2.3.1-5) erfolgreich übertragen läßt. Mit Einführung von Zylinderkoordinaten durch $x=R-r$ geht man anstelle (A3.1.1.3-1) - vereinfachend wiederum mit $\vartheta_0 = 0$ - vom Ansatz

$$\vartheta(r,z) = \begin{cases} \vartheta_R(z) \cdot \left(\frac{r-r_0(z)}{R-r_0(z)} \right)^2 & \text{für } 0 \leq r_0(z) \leq r \leq R \\ 0 & \text{für } 0 \leq r \leq r_0(z) < R \end{cases} \quad (\text{A3.1.1.3-15.1})$$

aus (vgl. Bild A3.1.1-1). Mit der Randbedingung (A2.3.1-5) ergibt sich für die Drahttrandtemperatur vorläufig

$$\vartheta(R,z) = \vartheta_R(z) = r \cdot \frac{\Delta r_0}{2} \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \Delta r_0 \right)^{-1} ; \quad (\text{A3.1.1.3-15.2})$$

$$\Delta r_0 = \Delta r_0(z) := R - r_0(z), \quad (\text{A3.1.1.3-15.3})$$

während der Vergleich der Wärmebilanzen in z - und r -Richtung auf eine Bedingung zur Bestimmung der Wärmeeindringtiefe Δr_0 , zunächst in der Form (für $\mathbf{r} = \text{konst.}$)

$$\left(1 - \frac{\Delta r_0}{4R}\right) \frac{\Delta r_0^2}{1 + \frac{h}{2} \Delta r_0} = 6 \frac{a}{v} \cdot \int_0^z \frac{d\xi}{1 + \frac{h}{2} \Delta r_0(\xi)}, \quad (\text{A3.1.1.3-16.1})$$

führt. Differentiation beider Seiten nach z , Trennung der Variablen und erneute Integration über die jeweiligen Intervalle der Variablen liefert

$$\int_0^{\Delta r_0} \frac{(2 + \frac{h}{2} \xi) \xi - \frac{1}{2R} (\frac{3}{2} + \frac{h}{2} \xi) \xi^2}{1 + \frac{h}{2} \xi} d\xi = 6 \frac{a}{v} \cdot \int_0^z d\xi, \quad (\text{A3.1.1.3-16.2})$$

woraus nach Ausführung der Integrationen die Bestimmungsgleichung für Δr_0 erhalten wird:

$$\left(\frac{h}{2} \Delta r_0\right)^3 + \frac{3}{4} (1 - 2hR) \left(\frac{h}{2} \Delta r_0\right)^2 + \frac{3}{2} (1 + 2hR) \left(\ln\left(1 + \frac{h}{2} \Delta r_0\right) - \frac{h}{2} \Delta r_0\right) + \frac{9}{2} h^2 \cdot \frac{az}{v} hR = 0. \quad (\text{A3.1.1.3-16.3})$$

Für kleine $BIOT$ -Zahlen $\mathcal{B}\dot{\nu} \equiv hR$ und damit erst recht für kleine Werte $\frac{h}{2} \Delta r_0$, insbesondere für $0 \leq \frac{h}{2} \Delta r_0 \ll 1$ findet man mit den ersten vier Gliedern der Potenzreihe von $\ln\left(1 + \frac{h}{2} \Delta r_0\right)$ die Näherungsgleichung

$$\Delta r_0^2 - 6 \frac{az}{v} \cdot \left\{1 - \frac{\Delta r_0}{4R} \left(1 + \frac{2}{3} hR - (1 + 2hR) \frac{h}{8} \Delta r_0\right)\right\}^{-1} = 0, \quad (\text{A3.1.1.3-16.4})$$

woraus wiederum eine Näherungslösung für die Wärmeeindringtiefe erhalten wird:

$$\Delta r_0(z) \approx R \cdot \sqrt{6 \cdot \mathcal{F}\mathcal{O}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{3} \mathcal{B}\dot{\nu}\right) \sqrt{\frac{3}{2} \mathcal{F}\mathcal{O}} + \frac{1}{8} \left(\frac{15}{8} + \frac{7}{4} \mathcal{B}\dot{\nu} - \frac{2}{3} \mathcal{B}\dot{\nu}^2\right) \mathcal{F}\mathcal{O} + \dots\right\}; \quad (\text{A3.1.1.3-17})$$

zu beachten ist, daß die $BIOT$ - und $FOURIER$ -Zahlen ($\mathcal{F}\mathcal{O} := \frac{az}{vR^2}$) nur so groß sein dürfen, daß $0 \leq \Delta r_0 \leq R$ gewährleistet bleibt⁶⁴.

Wird eine Potenzreihennäherung auch für die Randtemperatur (A3.1.1.3-15.2) bei kleinen $BIOT$ -Zahlen durchgeführt und (A3.1.1.3-17) eingesetzt, so erhält man schließlich - sofern $\mathcal{G} = 0$:

$$\mathcal{G}_R(z) \approx \left(\mathcal{G} + \frac{q_R}{\alpha}\right) \mathcal{B}\dot{\nu} \cdot \left\{\sqrt{\frac{3}{2} \mathcal{F}\mathcal{O}} + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{4} \mathcal{B}\dot{\nu}\right) \mathcal{F}\mathcal{O} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{17}{20} \mathcal{B}\dot{\nu} + \frac{22}{15} \mathcal{B}\dot{\nu}^2\right) \mathcal{F}\mathcal{O} \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{O}} + \dots\right\}; \quad (\text{A3.1.1.3-18})$$

q_R jetzt gemäß (3.1.1-7),

wofür der Vergleich mit der entsprechenden, auf der Basis der Wärmeleitungsgleichung entstandenen asymptotischen Lösung (A2.3.2.8-5.2) - zumindest in qualitativer Hinsicht -

⁶⁴ Das Ergebnis (A3.1.1.3-17) wird ebenso erhalten, indem die Näherung $\frac{h}{2} \xi \ll 1$ bereits auf den Integranden von (A3.1.1.3-16.2) angewendet und die nach Ausführung der Integration entstehende iterationsfähige Gleichung zur sukzessiven Verbesserung von Δr_0 herangezogen wird.

erstaunlich zufriedenstellend ausfällt⁶⁵. Der Grund hierfür ist allein darin zu sehen, daß ein Parabelansatz (A3.1.1.3-1) bzw. (A3.1.1.3-15.1), wie ihn *SIEBEL* und *KOBITZSCH* intuitiv eingeführt hatten, dem asymptotischen Charakter der entsprechend korrekten Wärmeleitungsaufgabe qualitativ offenbar hinreichend nahekommt. Das stark vereinfachende Konzept von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* hat sich damit in gewisser Weise als wesentlich weiträger herausgestellt, als es den Urhebern selbst wohl bewußt gewesen ist.

Durch den Grenzübergang $\mathcal{B}\mathcal{U} \rightarrow 0$ entsteht zunächst ein mit (A2.3.2.8-5.3) zu vergleichendes Ergebnis, das mit einem entsprechenden für Randbedingung 2. Art abgeleiteten übereinstimmt. Daraus ergibt sich für hinreichend kleine $\mathcal{F}\mathcal{O}$ -Zahlen die mit (A3.1.1.3-6) identische Näherungsformel von *SIEBEL* und *KOBITZSCH*, die die bereits angegebene Abweichung von 8,5% zum asymptotischen Näherungsergebnis (A2.3.2.8-5.4) aufweist.

Auf diese Weise konnte insbesondere gezeigt werden:

- welche Stellung die einfachen Näherungsformeln von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* gegenüber einem auf der Wärmeleitungsgleichung fußenden Kontext einnehmen,
- inwieweit das Näherungsverfahren von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* in qualitativer und quantitativer Hinsicht mit den Ergebnissen der Wärmeleitungstheorie verträglich ist,
- daß die Vorgehensweise von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* auf rotationssymmetrische Verhältnisse sowie Wärmeübergang berücksichtigende Randbedingung 3. Art übertragbar ist und welche Abweichungen gegenüber entsprechenden Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auftreten.

Auch wenn angesichts der vorliegenden physikalisch korrekten Lösungen keine Notwendigkeit besteht, auf diese Näherungen zurückzugreifen, sind sie dessen ungeachtet - wenigstens in der einfachen Art für die Randtemperatur (A3.1.1.3-6), wie sie sinngemäß von *SIEBEL* und *KOBITZSCH* erstmalig angegeben wurde - offenbar weiterhin in Gebrauch. Nicht zuletzt auch aus diesem Grunde sollten die etwas breiteren Ausführungen hierzu, in Reminiszenz des originären Beitrages von *SIEBEL* und *KOBITZSCH*, zum tieferen Verständnis des spezifischen Näherungscharakters beitragen sowie Möglichkeiten, aber auch Grenzen solcher Näherungslösungen verdeutlichen.

⁶⁵ Für $h = 0$ bzw. $\mathcal{B}\mathcal{U} = 0$ und $R \rightarrow \infty$ werden aus (A3.1.1.3-17) und (A3.1.1.3-18) unmittelbar wieder die entsprechenden Ergebnisse (A3.1.1.3-5) und (A3.1.1.3-6) des halbbunendlichen Körpers für Randbedingung 2. Art erhalten.

A3.1.2.2.1 Mechanische Randbedingungen - Schollen des Drahtes

Für den Kraft- und Arbeitsbedarf sowie die thermischen Verhältnisse auf einer mehrzügigen Ziehmaschine sind nicht allein die Vorgänge im Ziehhol - Umformung und Reibung - maßgebend, sondern auch die Bedingungen zwischen Draht und Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel sind angemessen zu berücksichtigen. Als wesentliche Voraussetzung zur Abschätzung des Wärmeübergangs im unmittelbaren Berührungs- bzw. Kontaktbereich zwischen Draht und Ziehtrommel, ist die mittlere Kontaktbreite, wie sie sich infolge Drahtabplattung durch „Pressung“ des Drahtes gegen die Trommelwandung einstellt, zu bestimmen. Hierfür ist zunächst eine Analyse der an einer Ziehtrommel vorliegenden Kraftverhältnisse erforderlich. Dabei zeigt sich, daß sich das Lastdrehmoment aus einem Tangential- und einem Axial- bzw. Schollkraftanteil zusammensetzt. Um beide Anteile quantitativ einschätzen und vergleichen zu können, werden die erforderlichen Beziehungen zwischen Kräften und Drehmomenten hergeleitet. Damit sind dann auch, über die Betrachtungen zum Einzelzug hinausgehend, die Voraussetzungen zur thermisch durchgängigen Berechnung kraftschlüssig verbundener Mehrfachzüge vorhanden.

A3.1.2.2.1.1 Tangential-, Normal- und Axialkraft

An der Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel - Bild A3.1.2-1 - greifen die folgenden Kräfte an:

- in tangentialer Richtung die "Aufhaspel"-Kraft F_{Auf} , zusammengesetzt aus Gesamtzieh- bzw. Abzugskraft F_{ZG} des unmittelbar vorangehenden Zuges zuzüglich eines ggf. vernachlässigbaren Kraftanteils F_B , der durch das Einbiegen des Drahtes in den Trommelradius entsteht sowie eine entsprechend der *EULER*schen Seilreibungsformel entlang des Ziehtrommelumfangs auf den Wert der Gegenzugkraft F_{Ab} des Folgezuges abgebaute Kraftkomponente,
- in axialer Richtung eine Kraft F_G , die sog. Schollkraft, die zum Verschieben - zum Schollen - der Drahtlagen aufzubringen ist.

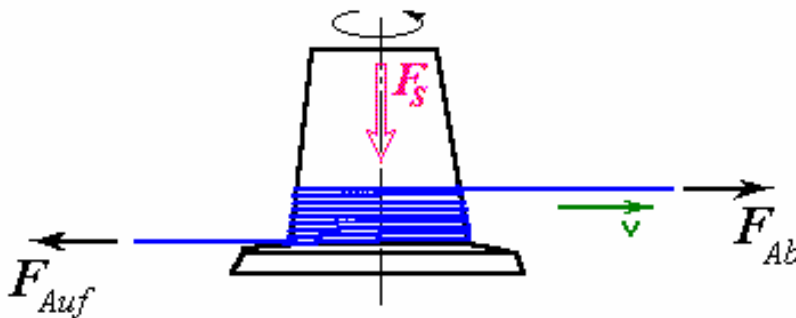


Bild A3.1.2-1: Kräfte an der Ziehtrommel

Schwer- und Trägheitskräfte sowie die leichte Konizität der Ziehtrommel seien zunächst als vernachlässigbar angenommen. Bei einem Umschlingungswinkel $\hat{\psi} = 2\pi \cdot w$ mit w Trommelumschlingungen und einem Reibwert μ_T zwischen Draht und Trommel in tangentialer Richtung gilt bekanntlich für die Kräfte von auf- und ablaufendem Draht - wenn auch nur für ein biegeschlaffes Seil exakt zutreffend - die folgende Beziehung⁶⁶ [SZA 84, Kap.IV-§22 Kap.-7]:

$$F_{Ab} \geq F_{Auf} \cdot e^{-\hat{\psi} \cdot \mu_T} = F_{Auf} \cdot e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}; \quad (\text{A3.1.2.2.1-1.1})$$

⁶⁶ Eine Modifikation zur Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften von Band (Draht) und Rolle nehmen [SON 75] und [KER 74] vor.

$$\text{mit } F_{Auf} = F_{ZG} + F_B \quad (\text{A3.1.2.2.1-1.2})$$

Sie gibt an, bis auf welchen kleinstmöglichen Betrag die Kraft F_{Auf} auf der Ziehtrommel überhaupt abgebaut werden kann. Die tatsächliche Größe von F_{Ab} bzw. das Verhältnis F_{Ab}/F_{Auf} wird sich - solange der Draht infolge Überlastung nicht vorzeitig bricht - im Bereich

$$e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T} \leq \frac{F_{Ab}}{F_{Auf}} \leq e^{+2\pi \cdot w \cdot \mu_T} \quad (\text{A3.1.2.2.1-2})$$

bewegen können; die untere (Schlupf-) Grenze gilt für den Fall, daß die Umfangsgeschwindigkeit der Ziehscheibe/Ziehtrommel größer als die Drahtgeschwindigkeit ist ($v_S > v_D$: positiver Schlupf), während die obere Grenze im Falle negativen Schlupfes ($v_S < v_D$) erreicht wird (obere Schlupfgrenze), was in der Ziehpraxis natürlich unbedingt zu vermeiden ist⁶⁷. Speziell für Haften zwischen Draht und Ziehscheibe ($v_S = v_D$; Schlupf Null, d.h., gleitloses Ziehen) können alle Werte zwischen diesen beiden Grenzfällen, je nach Abstimmung der Ziehscheibenantriebsmomente des betrachteten und des folgenden Zuges, auftreten. Für μ_T ist, je nach Sachlage, der Gleit- oder Haftreibwert anzusetzen.

Während nach Gleichung (A3.1.2.2.1-1.1) die Gegenkraft bei hinreichend großer Umschlingungszahl sogar den Wert Null annehmen kann, muß in der Praxis wegen des in Wirklichkeit biegesteifen Drahtes zur Aufrechterhaltung eines stabilen Ziehvorganges für die Einhaltung der Bedingung $F_{Ab} > F_B$ gesorgt werden.

Die auf den Ziehtrommelzylinder gerichtete summarische Normalkraft F_N kann aus dem Kräftegleichgewicht in tangentialer Richtung $F_T = \mu_T \cdot F_N = F_{Auf} - F_{Ab}$ unmittelbar erhalten werden:

$$F_N = \frac{F_{Auf} - F_{Ab}}{\mu_T} \leq F_{Auf} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}}{\mu_T} ; \quad (\text{A3.1.2.2.1-3})$$

im Grenzfall reibungsfreier Verhältnisse ergibt sich $F_N(\mu_T \rightarrow 0) \leq 2\pi \cdot w \cdot F_{Auf}$.

Eine Verschiebung der Drahtwindungen in axialer Richtung erfordert dann die kumulative Kraft

$$F_S = \mu_A \cdot F_N \leq \left(1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}\right) \cdot \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot F_{Auf} . \quad (\text{A3.1.2.2.1-4})$$

Interessieren dagegen auch die Anteile von Normal- und Schollkraft für jede einzelne Drahtwindung, so ist von einer Beziehung für die Änderung der Normalkraft in Abhängigkeit vom Umschlingungswinkel Ψ auszugehen:

$$\frac{dF_N}{d\Psi} \leq F_{Auf} \cdot e^{-\mu_T \cdot \Psi} . \quad (\text{A3.1.2.2.1-5.1})$$

⁶⁷ Bei den nachfolgenden Betrachtungen kann deshalb auf die explizite Mitführung des Grenzfalles "obere Schlupfgrenze" verzichtet werden; zur Schlupfberechnung siehe [MAL 63].

Der Anteil einer k -ten Windung von insgesamt w Windungen an der Schollkraft ergibt sich mit der Normalkraft einer einzelnen Windung

$$F_N^{(k)} \leq F_{Auf} \cdot \int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} e^{-\mu_T \cdot \psi} \cdot d\psi = \frac{e^{-2\pi(k-1)\mu_T} - e^{-2\pi k \cdot \mu_T}}{\mu_T} \cdot F_{Auf} \quad (\text{A3.1.2.2.1-5.2})$$

zu

$$F_S^{(k)} = \mu_A \cdot F_N^{(k)} \leq \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \left(1 - e^{-2\pi \mu_T}\right) \cdot e^{-2\pi(k-1)\mu_T} \cdot F_{Auf} \quad (\text{A3.1.2.2.1-6.1})$$

Wie leicht zu zeigen ist, führt Summation über alle w Windungen erwartungsgemäß wieder zum bereits vorn erhaltenen Ergebnis (A3.1.2.2.1-4):

$$F_S = \sum_{k=1}^w F_S^{(k)} \leq F_{Auf} \cdot \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \left(1 - e^{-2\pi \mu_T}\right) \cdot \sum_{k=1}^w \left(e^{-2\pi \mu_T}\right)^{k-1} \quad (\text{A3.1.2.2.1-6.2})$$

$$F_S \leq \left(1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}\right) \cdot \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot F_{Auf}$$

Wegen (A3.1.2.2.1-1.1) gilt ebenfalls

$$F_S \leq \left(e^{2\pi \cdot w \cdot \mu_T} - 1\right) \cdot \frac{\mu_A}{\mu_T} F_{Ab} \quad (\text{A3.1.2.2.1-6.3})$$

Wie aus (A3.1.2.2.1-4), (A3.1.2.2.1-6.2) oder auch (A3.1.2.2.1-6.3) zu entnehmen ist, ergibt sich eine minimale Schollkraft - in Übereinstimmung mit der Anschauung - bei der kleinstmöglichen Umschlingungszahl, also für $w = 1$, sofern sich dieser Zustand zientechnisch überhaupt realisieren läßt.

A3.1.2.2.1.2 Lastdrehmoment an der Ziehtrommel

Der Arbeitsbedarf an der Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel ergibt sich aus dem dort wirksamen Lastdrehmoment M_L , das sich aus Tangentialanteil M_T und Schollanteil M_S zusammensetzt.

- Tangentialanteil:

Für den aus den Tangentialkräften resultierenden Anteil gilt mit (A3.1.2.2.1-1.1) unmittelbar

$$M_T = \frac{D+d}{2} \cdot (F_{Auf} - F_{Ab}) \leq \frac{D+d}{2} \cdot \left(1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}\right) \cdot F_{Auf}, \quad (\text{A3.1.2.2.1-7})$$

wobei die Durchmesser von Ziehscheibe und Draht mit D und d bezeichnet sind. Ein Abbau der Gegenkraft des Folgezuges mit wachsender Zahl an Trommelumschlingungen (A3.1.2.2.1-1.1) ruft eine ganz entsprechende Vergrößerung des Ziehtrommel-Lastdrehmoments hervor, wie aus (A3.1.2.2.1-7) sofort hervorgeht. Von einer Berücksichtigung der infolge der Ziehscheibenkonizität geringfügig unterschiedlichen effektiven Ziehscheibendurchmesser wird hier abgesehen, jedoch läßt sich Gleichung (A3.1.2.2.1-7) bei Bedarf unschwer für diesen Fall entsprechend modifizieren.

- Schollanteil:

Bei der Berechnung des Schollkraftanteils werde zunächst sowohl die leichte Konizität der Ziehscheiben als auch eine differentielle Schrumpfung des Drahtes infolge Abkühlung auf der Ziehtrommel vernachlässigt. Für den Schollkraftanteil geht man zweckmäßigerweise von den Bilanzen für das Kräfte- und Momentengleichgewicht am Drahtelement aus.

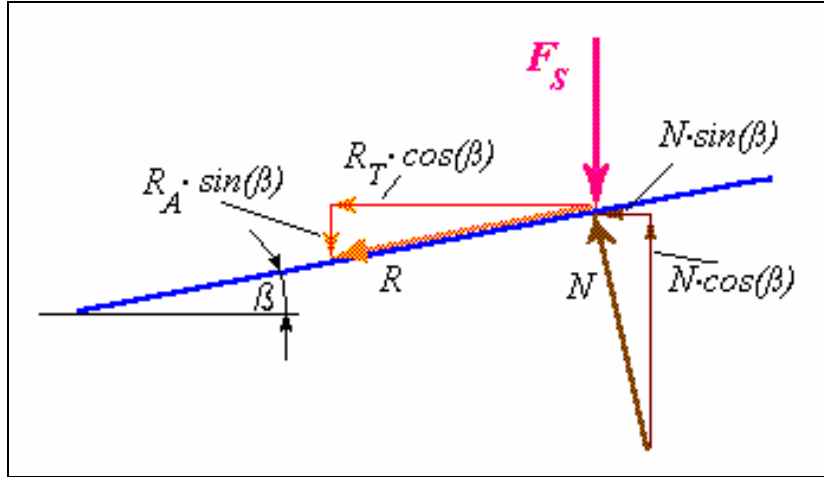


Bild A3.1.2-2: Kräfteplan am Drahtelement

Mit den durch Bild A3.1.2-2 eingeführten Bezeichnungen erhält man:

$$\begin{aligned} \sum F_i: \quad & F_S + R_A \sin \beta - N \cos \beta = 0; \quad R_A = \mu_A N \\ \sum M_i: \quad & M_S - (D+d)/2 \cdot (R_T \cos \beta + N \sin \beta) = 0; \quad R_T = \mu_T N \end{aligned}$$

Damit läßt sich die zwischen den Drahtwindungen wirkende Stützkraft N eliminieren und es kann nach dem gesuchten Anteil des Schollmoments umgestellt werden:

$$M_S = \frac{D+d}{2} \cdot \frac{\tan \beta + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \tan \beta} \cdot F_S. \quad (\text{A3.1.2.2.1-8})$$

Die Schollkraft F_S ist gemäß (A3.1.2.2.1-4) anzunehmen und der $\tan \beta$, also die Steigung der Drahtlagen auf der Ziehscheibe, läßt sich mit Draht- und Trommeldurchmesser durch

$$\tan \beta = \frac{d}{\pi(D+d)} \quad (\text{A3.1.2.2.1-8.1})$$

ersetzen. Damit und mit (A3.1.2.2.1-4) kann für (A3.1.2.2.1-8) auch unmittelbar

$$M_S \leq \frac{D+d}{2} \cdot \frac{\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \frac{d}{\pi(D+d)}} \cdot \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \left(1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T}\right) \cdot F_{\text{Auf}} \quad (\text{A3.1.2.2.1-8.2})$$

geschrieben werden.

Das heißt, daß sich Scholl- und Tangentialanteil zueinander wie

$$\frac{M_S}{M_T} = \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \frac{\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \frac{d}{\pi(D+d)}} \approx \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \left(\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T\right) \quad (\text{A3.1.2.2.1-8.3})$$

verhalten und daß damit dieses Verhältnis allein von Trommel- und Drahtdurchmesser sowie den Reibungsverhältnissen zwischen Draht und Ziehtrommel abhängt.

Wenn die Kräfte des auf- und ablaufenden Drahtes durch Messung bekannt sind, kann der Reibwert μ_T mit (A3.1.2.2.1-1.1) nach unten hin abgeschätzt werden:

$$\mu_T \geq \frac{1}{2\pi \cdot w} \cdot \ln \left(\frac{F_{Auf}}{F_{Ab}} \right). \quad (\text{A3.1.2.2.1-9})$$

Der Reibwert μ_A läßt sich dagegen prinzipiell nicht so leicht - z.B. aus (A3.1.2.2.1-4) - bestimmen, da weder die Schollkraft F_S noch die Normalkraft F_N meßtechnisch einfach genug zugänglich sind. Deshalb wird man zwischen den hier getrennt geführten Reibwerten für axiale und tangentielle Gleitrichtung des Drahtes quantitativ nicht ohne weiteres unterscheiden können und vereinfachend einen einheitlichen Wert $\mu_S = \mu_A = \mu_T$ ansetzen müssen.

Das Ziehscheibenlastdrehmoment M_L wird mit (A3.1.2.2.1-7) und (A3.1.2.2.1-8) schließlich in Abhängigkeit von Drahtauflauf- bzw. Gesamtziehungskraft und Biegekraft zu

$$\begin{aligned} M_L &= M_T + M_S = \frac{D+d}{2} \cdot \left(F_{Auf} - F_{Ab} + \frac{\tan \beta + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \tan \beta} \cdot F_S \right) \\ M_L &\leq \frac{D+d}{2} \cdot \left(1 + \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \frac{\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \frac{d}{\pi(D+d)}} \right) \cdot \left(1 - e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T} \right) \cdot F_{Auf} \end{aligned} \quad (\text{A3.1.2.2.1-10})$$

erhalten.

Erwartungsgemäß wird - im Grenzfall gerade noch nicht schlüpfenden Drahtes - das Drehmomentenminimum bei nur einer Umschlingung erreicht. Höchstwerte ergeben sich theoretisch für $w \rightarrow \infty$, praktisch dagegen - bei üblichen Reibwerten $\mu_T = 0,05 \dots 0,15$ - bereits für Umschlingungszahlen von $w = 1 \dots 15$.

An einem einfachen Beispiel eines einzelnen Trommelzuges soll gezeigt werden, in welchem Verhältnis Tangential- und Schollanteil, betrachtet an der unteren Schlupfgrenze, zueinander ungefähr stehen.

A3.1.2.2.1.3 Trommel-Einzelzug

Ein unlegierter Walzdraht mit einem Durchmesser von $d_0 = 5,5 \text{ mm}$, einer Fließspannung von $\sigma_{F0} = 580 \text{ N/mm}^2$ und einer Zugfestigkeit von $\sigma_{ZB} = 690 \text{ N/mm}^2$ wird in einem Zug an $d_1 = 4,8 \text{ mm}$ gezogen und besitzt dann die Fließspannung von $\sigma_{F1} = 910 \text{ N/mm}^2$. Da die Abzugskraft F_{ZG} nicht gemessen wurde, soll eine rechnerische Abschätzung erfolgen. Hierzu werde die bekannte Ziehkraftgleichung nach SACHS herangezogen, ergänzt um Terme von KÖRBER/EICHINGER, die Werkstoffschiebung am Ziehholein- und -auslauf sowie einen Gegenzug berücksichtigen⁶⁸:

⁶⁸ Vgl. auch Anhang B zu Kap. 3.1.1.4.1, wo insbesondere Drahtlängsspannungen unter zusätzlicher Berücksichtigung einer Ziehholkalibrierzone angegeben werden (B3.1.1.4.1-2.29).

$$F_{ZG} = A_I \cdot \sigma_{Fm} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\tan \tilde{\alpha}}{\mu} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{A_I}{A_0} \right)^{\frac{\mu}{\tan \tilde{\alpha}}} \right] + \frac{2}{3} \cdot \tan \tilde{\alpha} \right\} + F_G \cdot \left(\frac{A_I}{A_0} \right)^{1 + \frac{\mu}{\tan \tilde{\alpha}}} \quad (\text{A3.1.2.2.1-11})$$

Die A_i sind die Querschnittsflächen des Runddrahtes vor und nach dem 1. Zug. Vereinfachend werde als mittlere Fließspannung ein Wert von $\sigma_{Fm} \approx \frac{\sigma_{F0} + \sigma_{F1}}{2} = 745 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Das Ziehwerkzeug des ersten Zuges besitzt einen Ziehholöffnungswinkel von $2\tilde{\alpha} = 12^\circ$ und der Reibwert für die Verhältnisse im Ziehhol wird mit $\mu = 0,08$ angenommen. Bei leicht gebremstem Ablauf, d.h., bei einem Gegenzug von z.B. $F_G = 115 \text{ N}$, wird eine Gesamtziehkraft von $F_{ZG} = 7 \text{ kN}$ errechnet.

Für die Ermittlung von Biegekräften bei Drähten und Stäben mit Rundquerschnitt kann auf eine Beziehung zurückgegriffen werden, die von GELEJI angegeben worden ist [GEL 64]. Unter Verwendung der Fließspannung σ_F und des Elastizitätsmoduls E des Drahtes bzw. Stabes wird die Biegekraft näherungsweise berechnet zu

$$F_B \approx \sigma_F \cdot \frac{d^3}{D+d} \cdot (0,34 - 0,04 \cdot c - 0,095 \cdot c^2) \quad (\text{A3.1.2.2.1-12})$$

mit $c = \begin{cases} \frac{\sigma_F}{E} \cdot \frac{D+d}{d} & \text{solange } c < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Bei einem Ziehtrommeldurchmesser von $D = 600 \text{ mm}$ wird für die Biegekraft ein Wert von etwa $F_B = 50 \text{ N}$ erhalten. Werden als Reibwerte auf der Ziehtrommel in Tangential- und Axialrichtung jeweils Werte von z.B. $\mu_T = 0,08$ und $\mu_A = 0,15$ zugrunde gelegt, so ergibt sich für die Drehmomentenanteile gemäß (A3.1.2.2.1-7) und (A3.1.2.2.1-8) in Abhängigkeit von der Anzahl der Trommel- bzw. Ziehscheibenumschlingungen das folgende Bild A3.1.2-3; dabei wird der Grenzfall minimal einstellbarer Restkraft F_{Ab} - untere Schlupfgrenze - vorausgesetzt, d.h., in allen Beziehungen gilt das Gleichheitszeichen.

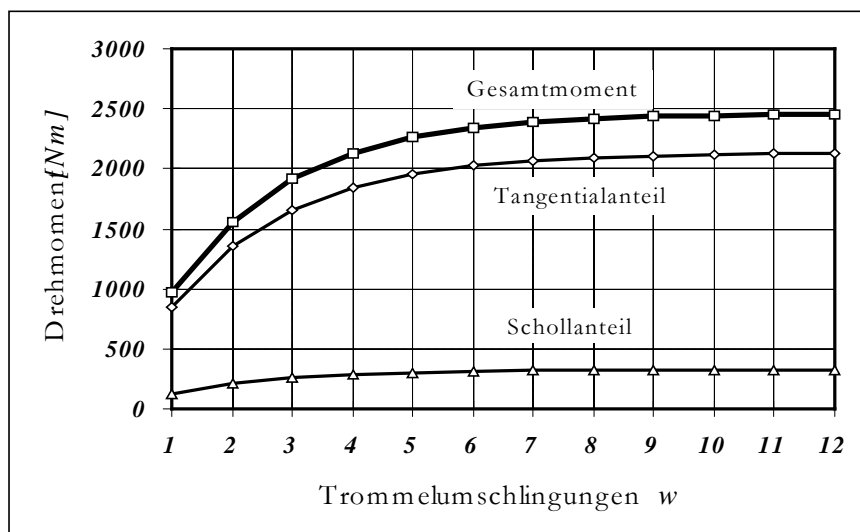


Bild A3.1.2-3: Anteile am Ziehtrommel-Lastdrehmoment

Der Hauptanteil am Lastdrehmoment in Höhe von ca. 85% entsteht erwartungsgemäß ganz unmittelbar durch die an der Ziehtrommel tangential angreifenden Kräfte, während der Schollanteil M_S im Beispiel immerhin fast 15% vom gesamten Ziehtrommel-Lastdrehmoment beträgt und nicht einfach vernachlässigt werden sollte.

Beim Ziehen an der unteren Schlupfgrenze ist zur Gewährleistung eines stabilen Ziehvorganges allerdings zu beachten, daß - bei gegebenen Reibungsverhältnissen - die Anzahl an Trommelumschlingungen höchstens so groß gewählt wird, daß der auf der Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel stattfindende Kraftabbau von F_{Auf} auf F_{Ab} nur soweit erfolgt (Bild A3.1.2-4), daß die Biege­kraft F_B , die für das Geradebiegen des von der Ziehtrommel kommenden Drahtes benötigt wird, nicht unterschritten wird. Sonst läuft der Draht so locker von der Ziehtrommel, daß mit der Gefahr des Verrutschens der Drahtlagen auf der Ziehtrommel und entsprechend unangenehmen Folgeerscheinungen gerechnet werden muß. Andererseits darf die Umschlingungszahl auch nicht zu gering sein, weil dann die zwischen Ziehtrommel und Folgezug verbleibende „Rest-“ bzw. Gegenkraft F_{Ab} so groß werden kann, daß der Anstrengungsgrad des Folgezuges gefährlich hoch wird oder daß ein Ziehen wegen Drahtriß infolge Überbeanspruchung sogar ganz unmöglich ist.

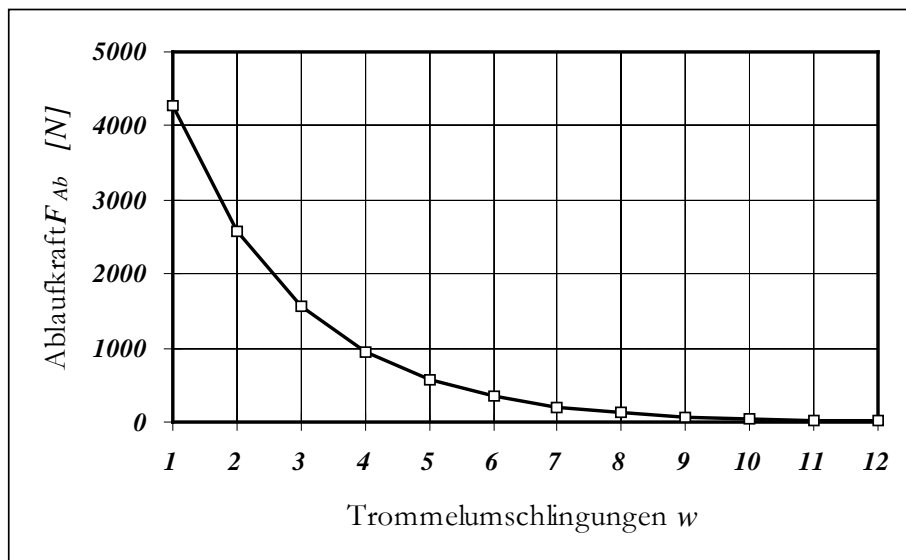


Bild A3.1.2-4: Kraftabbau auf der Ziehtrommel von $F_{Auf} = 7050 \text{ N}$ auf $F_{Ab} = F_{Ab}(w)$

Im Beispiel wird man deshalb vermutlich Umschlingungszahlen wählen, die einerseits nicht größer als $w=9$, andererseits aber auch kaum kleiner als $w=4$ sind. Die Bedingung $w \leq 9$ kann allerdings auch ignoriert werden⁶⁹, wenn durch entsprechende Maßnahmen, z.B. durch Vergrößerung des Antriebsdrehmoments des Folgezuges, die Kraft F_{Ab} über den durch (A3.1.2.2.1-1.1) gegebenen unteren Schlupfgrenzwert hinaus angehoben und in gleichem Verhältnis das Ziehtrommeldrehmoment des betrachteten Zuges gemäß (A3.1.2.2.1-10) entlastet wird. Dann sind Windungszahlen $w > 9$ ohne weiteres möglich, was unter dem Gesichtspunkt ausreichender Drahtkühlung ohnehin erforderlich sein kann und - in diesem Falle - geübte Praxis ist.

Auch die kraft- und momentenmäßig wechselseitige Verknüpfung, Beeinflussung und Abhängigkeit der einzelnen Züge eines kompletten Mehrfachzuges kann mit den angegebenen Beziehungen modelliert und numerisch simuliert werden.

⁶⁹ Wie z.B. bei ansammelnden Ziehmaschinen üblich.

Eine Betrachtung zum Einfluß der Ziehtrommelkonizität auf die Schollkraft war bisher vernachlässigt worden, was jetzt nachgereicht werde. Hierzu wird der halbe Konizitätswinkel γ eingeführt und der Kräfteplan entsprechend angesetzt (Bild A3.1.2-5). Aus der Schollkraft für eine rein zylindrische Trommel $F_S(\gamma=0)$ ergibt sich die Schollkraft $F_S(\gamma \geq 0)$ für eine konische Ziehtrommel bzw. Ziehscheibe.

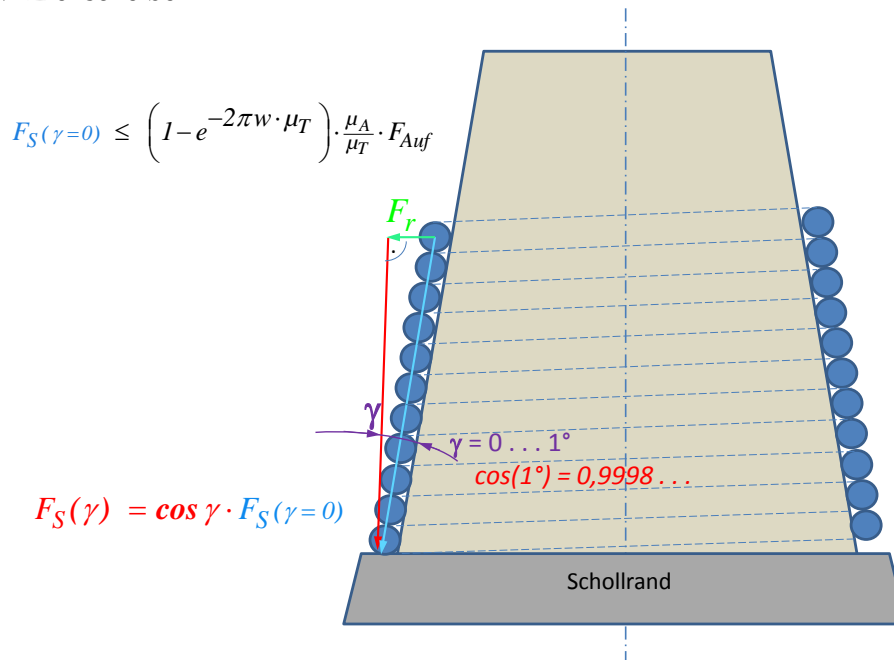


Bild A3.1.2-5: Kräfteplan unter Berücksichtigung der Ziehscheibenkonizität

Es zeigt sich, daß eine konische Trommel bzw. Ziehscheibe die Schollkraft gegenüber zylindrischen Scheiben scheinbar nur um einen Faktor $\cos \gamma \lesssim 1$ vermindert. Tatsächlich ist die Schollkraftverminderung jedoch größer. Verantwortlich hierfür ist die Verringerung des Ziehtrommelumfangs mit wachsender Entfernung vom Schollrand. Damit stellt jede auf den Schollrand auflaufende Drahtwindung je Umdrehung etwas mehr Draht zur Verfügung, als für vorangegangene Windungen (in Richtung des sich verjüngenden Trommeldurchmessers) je Umdrehung dem Trommelumfang nach benötigt werden. Da die Drahtgeschwindigkeit für alle Windungen gleich, d.h., konstant ist, ergibt sich mit steigender Windungsanzahl zum Drahtablauf hin eine wachsende Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Draht und rotierender Trommeloberfläche. D.h., die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel bleibt von Windung zu Windung zunehmend weiter hinter der Drahtgeschwindigkeit zurück. Mit diesem spezifischen Drahtüberschuß bzw. mit dieser virtuellen „Drahtverlängerung“ wird auch jenem Effekt gegengesteuert, der durch die Abkühlung von Drahtwindung zu Drahtwindung und der damit verbundenen thermisch bedingten Drahtverkürzung entsteht.

Da der Draht von der Trommel trotz differentiellem Zuwachs an „Drahtüberschuß“ nicht locker werden oder gar abheben soll, muß er auf der Trommeloberfläche von Drahtwindung zu Drahtwindung gleiten. Das wird durch eine hinreichend große Ablaufkraft $F_{Ab} \gg 0$ erreicht. Die Drahtwindungen gleiten demnach nicht nur in Richtung der Ziehtrommelachse - dem Vorgang des axialen Verschiebens der Drahtwindungen bzw. dem eigentlichen Schollen, sondern gleiten auch in Umfangsrichtung auf der Trommel. Dabei liegen die Windungen aneinander, wozu auch der Effekt beiträgt, daß der die Ziehscheibe umschlingende Draht stets das Bestreben hat, zum größeren Durchmesser in Richtung Schollrand auflaufen zu wollen, was im Sinne eines geordneten Drahtlaufs durchaus erwünscht ist. Ansonsten würden sich die Drahtwindungen auf der Trommel zunehmend voneinander entfernen, was dann zu entsprechenden Komplikationen führen könnte.

Damit erweisen sich die kinematischen Bedingungen des Drahtes auf der Ziehscheibe bzw. Ziehtrommel insgesamt als einigermaßen komplex. Der Haupteffekt konischer Ziehscheiben ist also weniger in einer Verringerung der Schollkraft zu sehen als eher in einer gewissen Erleichterung des Schollvorganges selbst, insofern, als es die Konizität von Trommel bzw. Scheibe den Drahtwindungen unter den besonders am Drahtauflaufpunkt i.allg. erheblichen Drahtspannungen erleichtert, geordnet ansammeln und schließlich wieder weitgehend definiert ablaufen zu können. Für einen schonenden Drahtlauf ist eine gewisse Konizität der Ziehtrommel daher unabdingbar. Deren Festlegung sowie die des Trommeldurchmessers erfolgt in Abhängigkeit von Werkstoff, Festigkeit und Drahtdurchmesser weitgehend nach empirischen Vorgaben und Erfahrungen.

A3.1.2.2.1.4 Trommel-Mehrfachzug

Die Bedingung (A3.1.2.2.1-2) für das Kraftverhältnis von ab- zu auflaufendem Draht soll im Zusammenhang mit der Darstellung des gleitlosen Mehrfach-Geradeauszuges etwas modifiziert werden, indem beachtet wird, daß im Draht durch Überlastung infolge übermäßigen Zuges die Fließgrenze nicht erreicht oder gar überschritten wird, weil dann Drahtbruch eintreten würde. Es ist also die natürliche Forderung

$$(F_{Auf}, F_{Ab}) < F_{MAX} = A \cdot \sigma_F, \quad (A3.1.2.2.1-13.1)$$

zu erheben, so daß sich gegenüber (A3.1.2.2.1-2) verschärfend

$$e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T} < \frac{F_{Ab}}{F_{Auf}} < \text{MIN} \left(e^{+2\pi \cdot w \cdot \mu_T}, \frac{F_{MAX}}{F_{Auf}} \right), \quad (A3.1.2.2.1-14.1)$$

ergibt, bzw. bei einem maximal zulässigen Anstrengungsgrad $\hat{a} = 0,7 \dots 0,9$ und mit

$$\sigma_{Auf} / \sigma_F \leq \hat{a} \text{ und } \sigma_{Ab} / \sigma_F \leq \hat{a} \quad (A3.1.2.2.1-13.2)$$

kann dann anstelle (A3.1.2.2.1-14.1) für das Verhältnis von Ab- zu Aufwickelspannung auch

$$e^{-2\pi \cdot w \cdot \mu_T} < \frac{\sigma_{Ab}}{\sigma_{Auf}} < \text{MIN} \left(e^{+2\pi \cdot w \cdot \mu_T}, \hat{a} \cdot \frac{\sigma_F}{\sigma_{Auf}} \right) \quad (A3.1.2.2.1-14.2)$$

herangezogen werden.

Da zwischen Lastmoment M_L und Antriebsmoment M_A im stationären Betrieb Gleichgewicht herrscht, d.h. $M_A = M_L$, wird mit (A3.1.2.2.1-10), (A3.1.2.2.1-3), (A3.1.2.2.1-4) und (A3.1.2.2.1-8.1) für das aufzubringende Trommelantriebsmoment

$$M_A = \frac{D+d}{2} \cdot \left(1 + \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \frac{\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \frac{d}{\pi(D+d)}} \right) \cdot (F_{Auf} - F_{Ab}) \quad (A3.1.2.2.1-15)$$

und bei gegebener Aufhaspelkraft und bekanntem Antriebsmoment als Abhaspel- bzw. Gegenzugkraft des Folgezuges

$$F_{Ab} = F_{Auf} - \frac{2}{D+d} \cdot \left(1 + \frac{\mu_A}{\mu_T} \cdot \frac{\frac{d}{\pi(D+d)} + \mu_T}{1 - \mu_A \cdot \frac{d}{\pi(D+d)}} \right)^{-1} \cdot M_A \quad (A3.1.2.2.1-16)$$

erhalten.

Damit lassen sich die Drahtaxialkräfte für eine ganze Zugfolge vorausbestimmen. Ausgehend von der bekannten Abhaspelkraft des Drahtes, wie er von der Vordrahtspule abläuft, die gleichsam Gegenkraft des ersten Zuges ist, $F_{G_1} = F_{Ab_0}$, kann in aufsteigender Reihenfolge fortschreitend der gesamte Mehrfachzug berechnet werden.

Dabei gilt für einen i -ten Zug folgender Ablauf:

- $F_{G_i} := F_{Ab_{i-1}}$,
- $F_{Auf_i} := F_{ZG_i}(F_{G_i}) + F_{B_i}$; F_{ZG} nach (A3.1.2.2.1-11) oder einer anderen Ziehkraftgleichung (vgl. Anhang B zu Kap. 3.1.1.4.1), F_B z.B. nach (A3.1.2.2.1-12),
- $F_{Ab_i} := F_{Ab_i}(F_{Auf_i}, M_{A_i}, d_i, D_i,)$ nach (A3.1.2.2.1-16),
- Prüfung auf Einhaltung der Bedingung (A3.1.2.2.1-14), ggf. Korrektur eines oder mehrerer Antriebsmomente und Wiederholung der Berechnung eines oder mehrerer Züge.

Die Aufgabe, eine Drahtkraft- bzw. Drahtspannungsberechnung für gleitlosen, einzeln angetriebenen Mehrfach-Geradeauszug durchzuführen, kann also im Prinzip als gelöst angesehen werden, so daß sich die mechanischen Belastungen, denen der Draht auf seiner Reise durch die Ziehmaschine unterworfen ist, entsprechend ermitteln lassen.

Eine für Technologen und Ziehmaschinenhersteller gleichermaßen interessante Frage besteht darin, wie ein Draht möglichst schonend und spannungsarm gezogen werden kann. Dabei ergibt sich u.a. die einsichtige Forderung, insbesondere die Gegenzugkräfte $F_{G_i} \equiv F_{Ab_{i-1}}$ bzw. Gegenzugspannungen $\sigma_{G_i} \equiv \sigma_{Ab_{i-1}}$ geeignet festlegen und einstellen zu können. Hierfür wurde auf der Grundlage der angegebenen Beziehungen ein Rechen- und Simulationsprogramm erstellt, womit sich sowohl Kräfte, Spannungen bzw. Anstrengungsgrade zu vorgegebenen Ziehscheiben- bzw. Ziehtrommel-Antriebsmomenten als auch umgekehrt die erforderlichen Antriebsmomente zu vorgegebenen Gegenzugkräften, Gegenzugspannungen bzw. gegenzugseitigen Anstrengungsgraden berechnen lassen. Eine weiterführende Anwendung des Modells kann darin bestehen, langsame Veränderungen der Drahtspannungen, wie sie sich z.B. durch Ziehsteinverschleiß - im Rahmen zulässiger Draht-Durchmessertoleranzen - im unregelmäßigen Mehrfachzug ergeben, durch Überwachung und aktive Beeinflussung der einzelnen Antriebsmomente im Hinblick auf möglichst ausgewogene Gegenzüge oder Anstrengungsgrade zu kompensieren.

Darüber hinaus ist mit diesem Modell eine weitere Voraussetzung zur Modellierung der Ziehtrommelkühlung geschaffen worden, indem sich unter Berücksichtigung der „Draht-Trommel“-Pressung die effektive Wärmeübertragungsfläche zwischen Draht und Ziehtrommelwandung bestimmen läßt.

Insgesamt hat sich gezeigt, daß das Problem des Drahtschollens und der damit verbundenen Facetten keineswegs trivial ist, auch wenn es sich zunächst scheinbar „nur“ um einen nachgeordneten Aspekt des Drahtziehens, einen Hilfsprozeß zu handeln schien. Dabei bestimmen die Wirkungen und Wechselwirkungen zwischen Draht und Ziehtrommel/Ziehscheibe sowohl die Stabilität des Ziehprozesses als auch die Qualität des Drahterzeugnisses in nicht unerheblichem Maße.

Anhang B

Zu Kapitel A2.3.1: Anmerkungen zur Vollzylindertemperatur (A2.3.1-19)

1) Anfangsbedingung:

Zur Bestätigung dafür, daß (A2.3.1-19a,c) die Anfangsbedingung erfüllt, würde es genügen - vorausgesetzt, die Reihenfolge von Integration und Grenzwertbildung ist vertauschbar -, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_{a,c}(t; z, \zeta; r, \rho) = a \cdot \delta(z - \zeta) \cdot \delta(r - \rho)$ gezeigt werden kann, denn dann gilt auf Grund der

Eigenschaft der DIRACSchen Distribution (A2.3.2.2-D2) bekanntlich

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{G}(t, z, r) &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \int_0^R \mathbf{g}_{a,c}(t, 0; z, \zeta; r, \rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^{\infty} \int_0^R a \cdot \delta(z - \zeta) \cdot \delta(r - \rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta, \rho) \cdot d\rho d\zeta \\ &= \mathcal{G}_A(z, r) . \end{aligned} \tag{B2.3.1-1.1}$$

Umformung der GREENSchen Funktionen (A2.3.1-19.2a) und (A2.3.1-19.2c) ergibt wegen

$$e^{-\frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)}} \cdot \begin{cases} \sinh \frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)} \\ \cosh \frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} \mp e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} \right)$$

zunächst das mit (A2.3.1-19.2a) identische Resultat:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) &= \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)}} \cdot \sinh \left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)} \right) \\ &\quad \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot J_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} \right) \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)} \\ &\quad \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot J_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} . \end{aligned} \tag{B2.3.1-1.2}$$

Hieraus wird tatsächlich für $t \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung der Ergebnisse [WLA 72, S.91 (32)] und (A2.3.2.8-2) direkt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) &= a \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)} \cdot \left(\delta(z - \zeta) - \delta(z + \zeta) \right) \cdot \delta(r - \rho) \\ &= a \cdot \delta(z - \zeta) \cdot \delta(r - \rho) \end{aligned} \tag{B2.3.1-1.3}$$

für $0 \leq z, \zeta < \infty$ erhalten.

Analog läßt sich (A2.3.1-19.2c) elementar umformen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_c(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) &= \\
 &= \left\{ \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \cosh\left(\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}\right) - a \cdot \left(h_0 - \frac{v}{2a}\right) \cdot e^{-\frac{z \cdot \zeta}{2a(t-\tau)}} \cdot e^{\omega_c^2} \cdot \operatorname{erfc}(\omega_c) \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta) - \frac{z^2 + \zeta^2}{4a(t-\tau)}} \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \cdot \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} + e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} \right) - a \cdot \left(h_0 - \frac{v}{2a}\right) \cdot e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a(t-\tau)}} \cdot e^{\omega_c^2} \cdot \operatorname{erfc}(\omega_c) \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)} \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \tag{B2.3.1-1.4}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega_c = \omega_c(t, \tau; z, \zeta) := \frac{z + \zeta}{2\sqrt{a \cdot (t-\tau)}} + \left(h_0 - \frac{v}{2a}\right) \cdot \sqrt{a \cdot (t-\tau)}.$$

Hieraus wird für $t \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung der Ergebnisse [WLA 72, S.91 (32)] und (A2.3.2.8-2) das gleiche Resultat wie im Falle (A2.3.1-19.2a) erhalten:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_c(t, \tau; z, \zeta; r, \rho) &= a \cdot e^{\frac{v}{2a}(z-\zeta)} \cdot \left(\delta(z-\zeta) + \delta(z+\zeta) \right) \cdot \delta(r-\rho) \\
 &= a \cdot \delta(z-\zeta) \cdot \delta(r-\rho) \tag{B2.3.1-1.5}
 \end{aligned}$$

für $0 \leq z, \zeta < \infty$, womit die Anfangsbedingung durch die Lösungen (A2.3.1-19a,c) tatsächlich gesichert ist.

2) Startbedingung:

Zur Überprüfung, ob (A2.3.1-19a) die Startbedingung erfüllt, sollte gelten

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) \cdot \mathfrak{G}_0(\tau, \rho) \cdot d\rho d\tau = \mathfrak{G}_0(t, r),$$

wobei die erste Ableitung der GREENSchen Funktion (A2.3.1-19.2a) nach ζ (bei $\zeta \rightarrow 0$) durch

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) &= \frac{z}{2\sqrt{a\pi} \cdot (t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4a(t-\tau)} + \frac{v}{2a}z} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{2\rho}{R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right)}{\left[1 + \left(hR/\mu_n\right)^2\right] \cdot \mathbf{J}_0^2(\mu_n)} \cdot e^{-a \cdot D_n \cdot (t-\tau)} \tag{B2.3.1-2.1}
 \end{aligned}$$

gegeben ist. Als Beweis dafür, daß die Lösung für $z \rightarrow 0$ die Startbedingung tatsächlich erfüllt, braucht hier nur auf z.B. [SMI 68, Bd.2, Teil II, S.557, (A29) für $x=0$] oder auch auf [PRE 85, S.203ff, Bsp.2] verwiesen werden, denn daraus und unter Beachtung von (A2.3.2.8-2) kann

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) = \delta(t - \tau) \cdot \delta(r - \rho) \quad (\text{B2.3.1-2.2})$$

geschlußfolgert werden, womit der Nachweis allgemein vorliegt.

Ist $\mathfrak{g}_0(t, r)$ als konkreter Funktionsansatz gegeben, so können die Integrationen noch vor Durchführung des Grenzübergangs, der dann übersichtlicher abläuft, durchgeführt werden, wie speziell für $\mathfrak{g}_0(t, r) = \mathfrak{g}_0 = \text{konst.}$ gezeigt wird:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) \cdot \mathfrak{g}_0 \cdot d\rho d\tau = \mathfrak{g}_0 \cdot \int_0^t \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) \cdot d\rho d\tau = \\ & = \mathfrak{g}_0 \cdot hR \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot J_0(\mu_n)} \cdot \dots \\ & \dots \cdot \left\{ e^{z\sqrt{D_n}} + e^{-z\sqrt{D_n}} - e^{z\sqrt{D_n}} \cdot \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} + \sqrt{aD_n t}\right) - e^{-z\sqrt{D_n}} \cdot \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}} - \sqrt{aD_n t}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B2.3.1-2.3})$$

und durch Grenzwertbildung $z \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t \int_0^R \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{g}_a(t, \tau; z, 0; r, \rho) \cdot \mathfrak{g}_0 \cdot d\rho d\tau = \\ & \mathfrak{g}_0 \cdot hR \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot J_0(\mu_n)} \cdot \left\{ 2 - \text{erf}\left(\sqrt{aD_n t}\right) - \text{erf}\left(-\sqrt{aD_n t}\right) \right\} \\ & \equiv \mathfrak{g}_0 \cdot 2hR \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\left(\mu_n^2 + (hR)^2\right) \cdot J_0(\mu_n)} \\ & = \mathfrak{g}_0 \end{aligned} \quad (\text{B2.3.1-2.4})$$

was also, wie erwartet, gerade wieder die speziell angenommene Starttemperatur $\mathfrak{g}_0(t, r) = \mathfrak{g}_0 = \text{konst.}$ ergibt; zur Reihensummierung vgl. (A2.3.2.5-S1) für $\nu = 0$.

Zu Kapitel A2.3.2.5: Rand- und Gebietsfunktionen

1) Die Elimination des Einflusses der Koeffizienten $\mathbf{r}_{k\beta}$ für $z \geq L_{k+1}$ erkennt man wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot (z - L_k)^\beta + \theta(z - L_{k+1}) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{(k+1)\beta} \cdot (z - L_{k+1})^\beta \\
 &= \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot (z - L_k)^\beta + \theta(z - L_{k+1}) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} (\mathbf{r}_{(k+1)\beta} - \mathbf{r}_{k\beta}^*) \cdot (z - L_{k+1})^\beta \\
 &= \theta(z - L_k) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot (z - L_k)^\beta + \theta(z - L_{k+1}) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \left(\mathbf{r}_{(k+1)\beta} - \sum_{j=\beta}^{\beta_E} \mathbf{r}_{kj} \cdot \binom{j}{\beta} \cdot (L_{k+1} - L_k)^{j-\beta} \right) \cdot (z - L_{k+1})^\beta \\
 &= \theta(z - L_{k+1}) \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{(k+1)\beta} \cdot (z - L_{k+1})^\beta \tag{B2.3.2.5-1.1}
 \end{aligned}$$

und infolge $\sum_{\beta=0}^{\beta_E} \sum_{j=\beta}^{\beta_E} C_{j\beta} \equiv \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \sum_{j=0}^{\beta} C_{\beta j}$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \left(\sum_{j=\beta}^{\beta_E} \mathbf{r}_{kj} \cdot \binom{j}{\beta} \cdot (L_{k+1} - L_k)^{j-\beta} \right) \cdot (z - L_{k+1})^\beta \\
 &= \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \sum_{j=0}^{\beta} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot \binom{\beta}{j} \cdot (L_{k+1} - L_k)^{\beta-j} \cdot (z - L_{k+1})^j \\
 &= \sum_{\beta=0}^{\beta_E} \mathbf{r}_{k\beta} \cdot (z - L_k)^\beta \tag{B2.3.2.5-1.2}
 \end{aligned}$$

womit die aufgestellte Behauptung, daß $\mathbf{r}_{k\beta}^*$ den Einfluß der Koeffizienten $\mathbf{r}_{k\beta}$ für $z \geq L_{k+1}$ vollständig eliminiert, bestätigt wird.

2) Für die Koeffizienten in (A2.3.2.5-S1) gelten auch die folgenden Beziehungen:

$$C_{v\xi} = C_{(v-\eta)(\xi-\eta)} \cdot \prod_{j=1}^{\eta} \left(\frac{v+1-j}{\xi+1-j} \right)^2 \tag{B2.3.2.5-2.1}$$

und $\sum_{\xi=0}^{v \geq 1} (2\xi + hR) \cdot C_{v\xi} = 0$ (B2.3.2.5-2.2)

3) Wird gefragt, welche Änderungen sich gegenüber Formel (A2.3.2.5-8) ergeben, wenn - wiederum speziell für konstante Randfunktion und Quellen - axiale Wärmeleitung berücksichtigt werden soll, so zeigt die entsprechende aus (A2.3.2.1-2) hervorgehende Lösung, daß ein Unterschied lediglich im Exponenten der e -Funktion auftritt:

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta &= \Delta \vartheta_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V R}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2}{hR} \right) \right) - \dots \\ &\dots - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta \vartheta_U + \frac{R}{\lambda} \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V R}{\mu_n^2} \right) \right) \cdot A_n \cdot J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \cdot e^{\left(\frac{v}{2a} - \sqrt{D_n} \right) \cdot z} \end{aligned} \quad (\text{B2.3.2.5-3.1})$$

Es läßt sich weiter fragen, wann etwa Wärmeleitung in Achsrichtung näherungsweise außer acht gelassen werden darf. Das wird ersichtlich, wenn der Exponent durch Potenzreihenentwicklung so umgeformt wird, daß für hinreichend große Geschwindigkeit v Reihenglieder höherer Ordnung vernachlässigbar werden:

$$\begin{aligned} \frac{v}{2a} - \sqrt{D_n} &\equiv \frac{v}{2a} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{vR} \mu_n \right)^2} \right) \\ &= \frac{v}{2a} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{vR} \mu_n \right)^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2a}{vR} \mu_n \right)^4 + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B2.3.2.5-3.2})$$

Offensichtlich darf Wärmeleitung in Achsrichtung um so gerechtfertigter vernachlässigt werden, je größer der dimensionslose Parameter $\frac{vR}{a}$, der auch als „*PECLET-Zahl*“ bezeichnet wird, ist.

Denn für hinreichend große *PECLET-Zahlen*, insbesondere für $Pe := \frac{vR}{a} \gg 1$ und unter Beachtung der schnellen Konvergenz der Reihe in (B2.3.2.5-3.1) bei nicht zu kleinen z -Werten, ergibt sich für den Exponenten $\left(\frac{v}{2a} - \sqrt{D_n} \right) \cdot z \cong -\mu_n^2 \frac{az}{vR^2}$, d.h., es wird tatsächlich in guter Näherung wieder der Exponent von Ergebnis (A2.3.2.5-8) erhalten.

Zu Kapitel A2.3.2.6: Mittlere Temperaturen

Für die über den Querschnitt gemittelte Temperatur (A2.3.2.6-6) wird unter zusätzlicher Berücksichtigung axialer Wärmeleitung - jedoch unter ansonsten ungeänderten Bedingungen - die lediglich im Exponenten veränderte Lösung

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\vartheta} &= \Delta \vartheta_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V R}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{hR} \right) \right) - \dots \\ &\dots - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta \vartheta_U + \frac{R}{\lambda} \cdot \left(\frac{q_R}{hR} + \frac{q_V R}{\mu_n^2} \right) \right) \cdot \bar{A}_n \cdot e^{\left(\frac{v}{2a} - \sqrt{D_n} \right) \cdot z} \end{aligned} \quad (\text{B2.3.2.6-1})$$

erhalten. Es gelten dieselben Überlegungen wie unter Anmerkung 3) des vorangegangenen Kapitels.

Zu Kapitel A2.3.3.2.2: Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung

Die Temperatur $\vartheta = \vartheta(t) = \vartheta_A + \Delta\vartheta(t)$ wird sich - nichtadiabatische Bedingungen vorausgesetzt - von einer Anfangstemperatur $\vartheta(t=0) = \vartheta_A$ ausgehend auf einen Beharrungszustand $\vartheta(\infty) = \vartheta_U$ (= konstante Umgebungstemperatur) hin bewegen, d.h., mit wachsender Zeit t wird naturbedingt $\vartheta_A \rightarrow \vartheta(t) \rightarrow \vartheta_U$ realisiert. Allerdings unterscheiden sich Erwärmungs- und Abkühlungsverhältnisse in Abhängigkeit der Art der Randbedingungen prinzipiell voneinander. Das läßt sich erkennen, wenn der Randbedingungsterm $\vartheta_U^k - \vartheta_R^k(t)$ näher betrachtet wird; für $k = 1$ liegen lineare, für $k > 1$ liegen nichtlineare Verhältnisse vor. Wird die Randtemperatur in der Form $\vartheta_R(t) = \vartheta_A + \Delta\vartheta(t)$ in den Term eingesetzt $\vartheta_U^k - \vartheta_R^k(t) \equiv \vartheta_U^k - (\vartheta_A + \Delta\vartheta(t))^k$, so läßt sich bezüglich Erwärmung und Abkühlung, also hinsichtlich der Vertauschung von ϑ_U mit ϑ_A , folgendes erkennen:

- linearer Fall ($k = 1$):

$$\begin{aligned} \vartheta_U - (\vartheta_A + \Delta\vartheta(t)) &\equiv (\vartheta_U - \vartheta_A) - \Delta\vartheta(t) \\ \vartheta_A - (\vartheta_U + \Delta\vartheta(t)) &\equiv -(\vartheta_U - \vartheta_A) - \Delta\vartheta(t) \end{aligned}$$

- nichtlinearer Fall ($k > 1$):

$$\begin{aligned} \vartheta_U^k - (\vartheta_A + \Delta\vartheta(t))^k &= (\vartheta_U^k - \vartheta_A^k) - \Delta\vartheta^k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \cdot \vartheta_A^{k-j} \cdot \Delta\vartheta^j(t) \\ \vartheta_A^k - (\vartheta_U + \Delta\vartheta(t))^k &= -(\vartheta_U^k - \vartheta_A^k) - \Delta\vartheta^k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \cdot \vartheta_U^{k-j} \cdot \Delta\vartheta^j(t) \end{aligned}$$

Während im linearen Fall sich lediglich das Vorzeichen der treibenden Temperaturdifferenz umkehrt, bleibt im nichtlinearen Fall ein unsymmetrischer Rest übrig. Dieser Umstand ist, formal gesehen, für die Asymmetrie von Erwärmungs- und Abkühlvorgängen im Falle nichtlinearer Randbedingungen, wie sie bei Wärmestrahlungsaustausch genaugenommen stets zu berücksichtigen sind, verantwortlich.

Zu Kapitel A2.4.3.2: Näherung für zeit- und ortsabhängige Wärmeübergangskoeffizienten

Die ursprünglichen Randfunktionen lassen sich durch den Randbedingungsvergleich (A2.4.3.2-1) spezifizieren als

$$\mathbf{r}_0(t,r) = (h_0 - \tilde{h}_0(t,r)) \cdot \vartheta(t,0,r) + \tilde{\mathbf{r}}_0(t,r); \quad \tilde{\mathbf{r}}_0(t,r) := \tilde{h}_0(t,r) \cdot \vartheta_{U0}(t,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_0(t,r), \quad (\text{B2.4.3.2-1.1})$$

$$\mathbf{r}_L(t,r) = (h_L - \tilde{h}_L(t,r)) \cdot \vartheta(t,L,r) + \tilde{\mathbf{r}}_L(t,r); \quad \tilde{\mathbf{r}}_L(t,r) := \tilde{h}_L(t,r) \cdot \vartheta_{UL}(t,r) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_L(t,r), \quad (\text{B2.4.3.2-1.2})$$

$$\mathbf{r}_1(t,z) = (h_1 - \tilde{h}_1(t,z)) \cdot \vartheta(t,z,R_1) + \tilde{\mathbf{r}}_1(t,z); \quad \tilde{\mathbf{r}}_1(t,z) := \tilde{h}_1(t,z) \cdot \vartheta_{U1}(t,z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_1(t,z), \quad (\text{B2.4.3.2-1.3})$$

$$\mathbf{r}_2(t,z) = (h_2 - \tilde{h}_2(t,z)) \cdot \vartheta(t,z,R_2) + \tilde{\mathbf{r}}_2(t,z); \quad \tilde{\mathbf{r}}_2(t,z) := \tilde{h}_2(t,z) \cdot \vartheta_{U2}(t,z) + \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{q}_2(t,z), \quad (\text{B2.4.3.2-1.4})$$

Damit nimmt Lösung (A2.4.1-18) die Form

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,r) &= \Psi(t,z,r) + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,0;r,\rho) \cdot (h_0 - \tilde{h}_0(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,0,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,L;r,\rho) \cdot (h_L - \tilde{h}_L(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,L,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,R_1) \cdot (h_1 - \tilde{h}_1(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_1) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,R_2) \cdot (h_2 - \tilde{h}_2(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_2) \cdot d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-2.1}$$

an; mit

$$\begin{aligned}
 \Psi(t,z,r) &= \frac{1}{a} \cdot \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,0;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathcal{G}_A(\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,0;r,\rho) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_0(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,L;r,\rho) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_L(\tau,\rho) \cdot d\rho d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,R_1) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_1(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\dots + \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,R_2) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2(\tau,\zeta) \cdot d\zeta d\tau + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;r,\rho) \cdot \mathbf{q}_V(\tau,\zeta,\rho) \cdot d\rho d\zeta d\tau
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-2.2}$$

Dieses Ergebnis hängt nunmehr zusätzlich von den vier unbekanntenen Randtemperaturen $\mathcal{G}(t,0,r)$, $\mathcal{G}(t,L,r)$, $\mathcal{G}(t,z,R_1)$ und $\mathcal{G}(t,z,R_2)$ ab, deren Berechnung das Lösen des folgenden vierzeiligen Integralgleichungssystems erfordert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,0,r) &= \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;0,0;r,\rho) \cdot (h_0 - \tilde{h}_0(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,0,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;0,L;r,\rho) \cdot (h_L - \tilde{h}_L(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,L,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;0,\zeta;r,R_1) \cdot (h_1 - \tilde{h}_1(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_1) \cdot d\zeta d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;0,\zeta;r,R_2) \cdot (h_2 - \tilde{h}_2(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_2) \cdot d\zeta d\tau = \Psi(t,0,r)
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,L,r) &= \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;L,0;r,\rho) \cdot (h_0 - \tilde{h}_0(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,0,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;L,L;r,\rho) \cdot (h_L - \tilde{h}_L(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,L,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;L,\zeta;r,R_1) \cdot (h_1 - \tilde{h}_1(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_1) \cdot d\zeta d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;L,\zeta;r,R_2) \cdot (h_2 - \tilde{h}_2(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_2) \cdot d\zeta d\tau = \Psi(t,L,r)
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,R_1) &= \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,0;R_1,\rho) \cdot (h_0 - \tilde{h}_0(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,0,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,L;R_1,\rho) \cdot (h_L - \tilde{h}_L(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,L,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;R_1,R_1) \cdot (h_1 - \tilde{h}_1(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_1) \cdot d\zeta d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;R_1,R_2) \cdot (h_2 - \tilde{h}_2(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_2) \cdot d\zeta d\tau = \Psi(t,z,R_1)
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(t,z,R_2) &= \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,0;R_2,\rho) \cdot (h_0 - \tilde{h}_0(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,0,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{g}(t,\tau;z,L;R_2,\rho) \cdot (h_L - \tilde{h}_L(\tau,\rho)) \cdot \mathcal{G}(\tau,L,\rho) \cdot d\rho d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;R_2,R_1) \cdot (h_1 - \tilde{h}_1(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_1) \cdot d\zeta d\tau - \dots \\
 &\dots - \int_0^t \int_0^L \mathbf{g}(t,\tau;z,\zeta;R_2,R_2) \cdot (h_2 - \tilde{h}_2(\tau,\zeta)) \cdot \mathcal{G}(\tau,\zeta,R_2) \cdot d\zeta d\tau = \Psi(t,z,R_2)
 \end{aligned} \tag{B2.4.3.2-3.4}$$

Es ist zu sehen, daß sich für $\tilde{h}_0(t,r) = h_0 = konst.$, $\tilde{h}_L(t,r) = h_L = konst.$, $\tilde{h}_1(t,z) = h_1 = konst.$ sowie $\tilde{h}_2(t,z) = h_2 = konst.$ folgerichtig wieder die Lösung (A2.4.1-18) ergibt. Eine weitergehende analytische Behandlung soll hier nicht erfolgen.

Zu Kapitel 3.1.1.1: Wärmeübergang im Festkörperkontakt

1) Anmerkung zu [KLA 69]:

Sowohl *KLAFS* [KLA 69] als auch *BRUNS* [BRU 74] bedienen sich bei ihren Untersuchungen zum Wärmeübergang zwischen Werkzeug und Werkstück beim Warmumformen vereinfachend des Modells von zwei in thermischem Kontakt stehenden halbbunendlichen Körpern. Die dadurch gegenüber den Realverhältnissen beim Schmieden und Walzen erreichten Vereinfachungen sind erheblich und ermöglichen vorteilhafterweise im Ergebnis der mathematischen Behandlung analytisch geschlossene Lösungsausdrücke. Die Bedeutung des Modells zweier thermisch gekoppelter halbbunendlicher Körper resultiert vor allem daraus, daß neben weit verringertem mathematischen Aufwand und kürzerem Lösungsweg Ergebnisse erhalten werden, die sich letztlich - im Rahmen der Modellgrenzen - leichter überschauen, interpretieren, anwenden und ggf. weiter spezialisieren und gezielten Fragestellungen anpassen lassen. Da jedoch in den Arbeiten [KLA 69] und [BRU 74] leider einige Ergebnisse fehlerhaft sind⁷⁰, so daß sie für eigene Untersuchungen nicht unmittelbar übernommen werden können, sollen nachfolgend – verallgemeinernd unter Verwendung einer erweiterten Randbedingung 3. Art als Kopplungsbedingung – die wichtigsten Lösungsschritte und Ergebnisse hierzu dargestellt werden.

Die Differentialgleichungen für die Temperaturen $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(t,x)$ und $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2(t,x)$ beider Körper:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial x^2} + \frac{q_{V1}}{\rho_1 c_1}; \quad x < 0 \quad (\text{B3.1.1.1-1.1.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_2}{\partial x^2} + \frac{q_{V2}}{\rho_2 c_2}; \quad x > 0, \quad (\text{B3.1.1.1-1.1.2})$$

jedoch sollen Volumenquellen nachfolgend nicht berücksichtigt werden: $q_{V1} = q_{V2} = 0$.

Auch die Anfangstemperaturen werden vereinfachend als ortsunabhängig angesehen, d.h.,

Anfangsbedingungen:

$$\mathcal{G}_1(0,x) = \mathcal{G}_{1A} = konst. \quad (\text{B3.1.1.1-1.2.1})$$

$$\mathcal{G}_2(0,x) = \mathcal{G}_{2A} = konst. \quad (\text{B3.1.1.1-1.2.2})$$

Randbedingungen:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(t, -0)}{\partial x} = h_1 \cdot [\mathcal{G}_2(t, +0) - \mathcal{G}_1(t, -0)] + \frac{q_{R1}(t)}{\lambda_1}; \quad h_1 := \frac{\alpha}{\lambda_1} \quad (\text{B3.1.1.1-1.3.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_2(t, +0)}{\partial x} = h_2 \cdot [\mathcal{G}_2(t, +0) - \mathcal{G}_1(t, -0)] - \frac{q_{R2}(t)}{\lambda_2}; \quad h_2 := \frac{\alpha}{\lambda_2} \quad (\text{B3.1.1.1-1.3.2})$$

⁷⁰ *KLAFS* rechnet anstelle mit $h := \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right) \frac{\alpha}{\sqrt{a_1}}$ leider mit $h := \frac{2\alpha}{b_1 \sqrt{a_1}}$ infolge eines Versehens bei der

Herleitung der Gleichung (13), was jedoch, solange sich der Wärmeeindringkoeffizient b_2 nicht zu stark von b_1 unterscheidet, auf die Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten α keine gravierenden Auswirkungen hat. In der Arbeit *BRUNS* sind die Lösungen (4.2.40) - (4.2.42), (4.2.44), (4.2.45), (4.2.62) - (4.2.65) und (4.2.75) - (4.2.78) infolge fehlerhaft berechneter Integrationskonstanten (4.2.29) - (4.2.35) gleichfalls fehlerhaft.

$$\mathcal{G}_1(t, -\infty) := \mathcal{G}_1(0, x) = \mathcal{G}_{1A} \quad (\text{B3.1.1.1-1.3.3})$$

$$\mathcal{G}_2(t, +\infty) := \mathcal{G}_2(0, x) = \mathcal{G}_{2A} \quad (\text{B3.1.1.1-1.3.4})$$

Durch LAPLACE-Transformation der Temperaturen bezüglich der Zeitvariablen entsprechend

$$\mathcal{G}(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow s} \Theta(s, x) = \int_0^{\infty} \mathcal{G}(t, x) \cdot e^{-st} dt \quad \text{werden die partiellen Dgln. (B3.1.1.1-1.1) in zwei}$$

gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \Theta_1(s, x)}{dx^2} - \frac{s}{a_1} \cdot \Theta_1(s, x) + \frac{1}{a_1} \mathcal{G}_{1A} = 0 \quad (\text{B3.1.1.1-1.4.1})$$

$$\frac{d^2 \Theta_2(s, x)}{dx^2} - \frac{s}{a_2} \cdot \Theta_2(s, x) + \frac{1}{a_2} \mathcal{G}_{2A} = 0 \quad (\text{B3.1.1.1-1.4.2})$$

überführt, deren allgemeine Lösungen gegeben sind durch

$$\Theta_1(s, x) = A_1(s) \cdot e^{x\sqrt{\frac{s}{a_1}}} + B_1(s) \cdot e^{-x\sqrt{\frac{s}{a_1}}} + \frac{\mathcal{G}_{1A}}{s} \quad (\text{B3.1.1.1-1.5.1})$$

$$\Theta_2(s, x) = A_2(s) \cdot e^{x\sqrt{\frac{s}{a_2}}} + B_2(s) \cdot e^{-x\sqrt{\frac{s}{a_2}}} + \frac{\mathcal{G}_{2A}}{s}. \quad (\text{B3.1.1.1-1.5.2})$$

Die Bestimmung der vier Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1, B_2 ist so vorzunehmen, daß die vier Randbedingungen (B3.1.1.1-1.3) erfüllt werden. Damit die Bedingungen (B3.1.1.1-1.3.3) und (B3.1.1.1-1.3.4) eingehalten werden können, sind sowohl $B_1 = 0$ als auch $A_2 = 0$ zu setzen. Aus den Bedingungen (B3.1.1.1-1.3.1), (B3.1.1.1-1.3.2) folgt ein Gleichungssystem, welches die beiden restlichen Koeffizienten festlegt:

$$A_1(s) = \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}\right) \cdot \mathcal{Q}_{R1}(s) + \frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \mathcal{Q}_{R2}(s) + \frac{\alpha}{s} \cdot \Delta \mathcal{G}_A}{\sqrt{s} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)} \quad (\text{B3.1.1.1-1.6.1})$$

$$B_2(s) = \frac{1}{b_2} \cdot \frac{\frac{\alpha}{b_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \mathcal{Q}_{R1}(s) + \left(\frac{\alpha}{b_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} + 1\right) \cdot \mathcal{Q}_{R2}(s) - \frac{\alpha}{s} \cdot \Delta \mathcal{G}_A}{\sqrt{s} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)}; \quad (\text{B3.1.1.1-1.6.2})$$

mit $b = \sqrt{\lambda \rho c}$ wurden die Wärmeeindringkoeffizienten und mit $\Delta \mathcal{G}_A = \mathcal{G}_{2A} - \mathcal{G}_{1A}$ die Anfangstemperaturdifferenz bezeichnet. Damit wird das Temperaturfeld im Bildbereich erhalten:

- für den ersten Halbraum $x \leq -0$:

$$\Theta_1(s, x) = \frac{\mathcal{G}_{1A}}{s} + \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}\right) \cdot \mathcal{Q}_{R1}(s) + \frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \mathcal{Q}_{R2}(s) + \frac{\alpha}{s} \cdot \Delta \mathcal{G}_A}{\sqrt{s} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)} \cdot e^{x\sqrt{\frac{s}{a_1}}} \quad (\text{B3.1.1.1-1.7.1})$$

- für den zweiten Halbraum $x \geq +0$:

$$\Theta_2(s, x) = \frac{\mathcal{G}_{2A}}{s} + \frac{1}{b_2} \cdot \frac{\frac{\alpha}{b_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \mathcal{Q}_{R1}(s) + \left(\frac{\alpha}{b_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} + 1\right) \cdot \mathcal{Q}_{R2}(s) - \frac{\alpha}{s} \cdot \Delta \mathcal{G}_A}{\sqrt{s} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{s}{a_2}}}. \quad (\text{B3.1.1.1-1.7.2})$$

Die LAPLACE-Rücktransformation erfolgt unter Verwendung des Satzes, daß dem Produkt im Bildbereich eine Faltung im Originalbereich entspricht, sowie unter Heranziehung einiger Korrespondenzen [TAU 71; Tab. C1-7.1, 7.2, 7.3]. Die gesuchten Lösungen im Originalbereich werden erhalten, zunächst für den ersten Halbraum $x \leq -0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(t,x) &= \mathcal{G}_{1A} + \frac{b_2}{b_1+b_2} \cdot \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1 t} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} + k_1 \sqrt{a_1 t}\right) \right] \cdot \Delta \mathcal{G}_A + \dots \\ &\dots + \frac{1}{b_1} \cdot \int_0^t \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\alpha}{b_1} e^{-k_1 x + k_1^2 a_1(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} + k_1 \sqrt{a_1(t-\tau)}\right) \right) \cdot \mathbf{q}_{R1}(\tau) d\tau + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha}{b_1 b_2} \cdot \int_0^t e^{-k_1 x + k_1^2 a_1(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} + k_1 \sqrt{a_1(t-\tau)}\right) \cdot \mathbf{q}_{R2}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.1-1.8.1})$$

Die Lösung für den zweiten Halbraum $x \geq +0$ geht aus dieser unmittelbar hervor, wenn unter Ausnutzung der Symmetrie des Problems das Vorzeichen der x -Koordinate umgekehrt und alle Indizes gegeneinander vertauscht werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(t,x) &= \mathcal{G}_{2A} - \frac{b_1}{b_1+b_2} \cdot \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - e^{k_2 x + k_2^2 a_2 t} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} + k_2 \sqrt{a_2 t}\right) \right] \cdot \Delta \mathcal{G}_A + \dots \\ &\dots + \frac{1}{b_2} \cdot \int_0^t \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{\alpha}{b_2} e^{k_2 x + k_2^2 a_2(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2(t-\tau)}} + k_2 \sqrt{a_2(t-\tau)}\right) \right) \cdot \mathbf{q}_{R2}(\tau) d\tau + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha}{b_1 b_2} \cdot \int_0^t e^{k_2 x + k_2^2 a_2(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2(t-\tau)}} + k_2 \sqrt{a_2(t-\tau)}\right) \cdot \mathbf{q}_{R1}(\tau) d\tau; \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.1-1.8.2})$$

abkürzend wurden die modifizierten relativen Wärmeübergangskoeffizienten

$$k_1 := h_1 \cdot \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{a_1}} \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right), \quad (\text{B3.1.1.1-1.9.1})$$

$$k_2 := h_2 \cdot \left(1 + \frac{b_2}{b_1} \right) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{a_2}} \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right) \quad (\text{B3.1.1.1-1.9.2})$$

eingeführt. In der Arbeit [KLA 69, S. 18f] wird infolge mangelhafter Herleitung ein falscher Koeffizient erhalten und weiterverwendet - vgl. Fußnote 65.

Eine andere Form der Lösung läßt sich herstellen, indem noch vor der Rücktransformation die Bildfunktionen der Randquellen partiell integriert werden:

$$\mathcal{Q}_R(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \mathbf{q}_R(t) \cdot dt = \frac{\mathbf{q}_R(0)}{s} + \frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_R(t)}{\partial t} \cdot dt.$$

Anstelle des Ergebnisses (B3.1.1.1-1.8.1) wird damit eine Lösungsdarstellung gewonnen, die das Verhalten der Lösung speziell im Falle zeitunabhängiger Randquellen $\mathbf{q}_R(t) = \mathbf{q}_R(0) = \text{konst.}$ unmittelbar erkennen läßt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_I(t,x) = & \mathcal{G}_{IA} + \frac{b_2}{b_1+b_2} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1 t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} + k_1 \sqrt{a_1 t} \right) \right] \cdot \Delta \mathcal{G}_A + \dots \\
 & \dots + \left\{ 2\sqrt{t} \operatorname{interfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) + \frac{b_2}{\lambda_1 k_1} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1 t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} + k_1 \sqrt{a_1 t} \right) \right] \right\} \cdot \frac{\mathbf{q}_{R1}(0)}{b_1+b_2} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{b_1+b_2} \cdot \int_0^t \left\{ 2\sqrt{(t-\tau)} \operatorname{interfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) + \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + \frac{b_2}{\lambda_1 k_1} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} + k_1 \sqrt{a_1(t-\tau)} \right) \right] \right\} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_{R1}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \\
 & \dots + \left\{ 2\sqrt{t} \operatorname{interfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - \frac{b_1}{\lambda_1 k_1} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1 t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} + k_1 \sqrt{a_1 t} \right) \right] \right\} \cdot \frac{\mathbf{q}_{R2}(0)}{b_1+b_2} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{b_1+b_2} \cdot \int_0^t \left\{ 2\sqrt{(t-\tau)} \operatorname{interfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) - \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + \frac{b_1}{\lambda_1 k_1} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} + k_1 \sqrt{a_1(t-\tau)} \right) \right] \right\} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_{R2}(\tau)}{\partial \tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

(B3.1.1.1-1.10)

Auf Grund der Symmetrie braucht die entsprechende Lösung für den anderen Halbraum nicht noch einmal angeschrieben werden. Eine weitere und kompaktere Lösungsdarstellung läßt sich unter Berücksichtigung von [DOE 67, Satz 26.1] gewinnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_I(t,x) = & \mathcal{G}_{IA} + \frac{b_2}{b_1+b_2} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1 t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}} + k_1 \sqrt{a_1 t} \right) \right] \cdot \Delta \mathcal{G}_A + \dots \\
 & \dots + \frac{2}{b_1+b_2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \sqrt{t-\tau} \cdot \operatorname{interfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) \cdot (\mathbf{q}_{R1}(\tau) + \mathbf{q}_{R2}(\tau)) \cdot d\tau + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\lambda_1 k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} \right) - e^{-k_1 x + k_1^2 a_1(t-\tau)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} + k_1 \sqrt{a_1(t-\tau)} \right) \right] \cdot \\
 & \quad \cdot (b_2 \mathbf{q}_{R1}(\tau) + b_1 \mathbf{q}_{R2}(\tau)) \cdot d\tau.
 \end{aligned}$$

(B3.1.1.1-1.11)

Durch Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ bzw. $k \rightarrow 0$, der sich recht einfach an den Bildfunktionen vollziehen läßt, werden die Lösungen des entkoppelten Systems erhalten; dabei gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - e^{kx+k^2 at} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + k\sqrt{at} \right) \right] \\
 = 2\sqrt{at} \cdot \operatorname{interfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}} - x \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}.
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu sind im Falle idealen Kontakts die entsprechenden Lösungen durch Grenzübergang $\alpha \rightarrow \infty$ bzw. $k \rightarrow \infty$ aus obigen Darstellungen ebenfalls leicht zu bestimmen.

Die Verläufe der Fehlerintegrale zeigt Bild A2.3-2 in Kapitel A2.3.2.8.

Weiterhin lassen sich asymptotische Entwicklungen für große oder kleine Zeiten gewinnen, am ehesten durch entsprechende Entwicklung der Bildfunktion für kleine oder große Beträge der Bildvariablen. Die asymptotische Entwicklung von (B3.1.1.1-1.8.1) für große Zeiten kann aus der Bildfunktion (B3.1.1.1-1.7.1) für kleine s -Werte erhalten werden:

$$\Theta_I(s,x) \sim \frac{\mathcal{G}_{IA}}{s} + \frac{b_2}{\alpha(b_1+b_2)} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{s}} \Delta \mathcal{G}_A + \left(\sqrt{s} + \frac{\alpha}{b_2} \right) \cdot \mathcal{Q}_{R1}(s) + \frac{\alpha}{b_2} \cdot \mathcal{Q}_{R2}(s) \right\} \cdot \sum_{n=0}^N C_n(x) \cdot s^{-\frac{n-1}{2}}$$

mit $C_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{a_I^n}} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-k_I \cdot x)^{-k}}{(n-k)!}$. (B3.1.1.1-1.12)

Für zeitunabhängige Randquellen $q_R(t) = q_R = konst.$ ergibt die Rücktransformation entsprechend [DOE 67, Satz 35.1] eine Entwicklung für $t \gg 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_I(t,x) &\sim \mathcal{G}_{IA} + \frac{q_{R1} + q_{R2}}{b_1 + b_2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{b_1 + b_2} \cdot \sum_{n=0}^N \left[(q_{R1} + q_{R2}) \cdot C_{n+1}(x) + \left(\Delta \mathcal{G}_A + \frac{q_{R1}}{\alpha} \right) \cdot b_2 \cdot C_n(x) \right] \cdot \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{n}{2}) \cdot \sqrt{t^n}} \end{aligned}$$

mit $x \leq 0$. (B3.1.1.1-1.13)

Nach hinreichend langer Zeit strebt die Temperaturdifferenz $\Delta \mathcal{G} = \mathcal{G}_2(t, x_2) - \mathcal{G}_1(t, x_1)$ zwischen zwei beliebigen Orten $x = x_1$ und $x = x_2$ der beiden Halbräume gegen einen konstanten Wert

$$\Delta \mathcal{G}(t \rightarrow \infty; x_1, x_2) \sim \left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \right) \cdot \frac{q_{R1} + q_{R2}}{b_1 + b_2} + \frac{b_1 \cdot q_{R2} - b_2 \cdot q_{R1}}{\alpha(b_1 + b_2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

(B3.1.1.1-1.14)

so daß umgekehrt im quasistationären Zustand aus einer gemessenen, konstant bleibenden Temperaturdifferenz $\Delta \mathcal{G}_\infty(x_1, x_2)$ der Wärmeübergangskoeffizient sehr einfach zu berechnen ist, allerdings unter der Voraussetzung, daß Reibungswärme an den Kontaktflächen erzeugt wird, d.h., $q_{R1} = q_{R2} > 0$ gilt und daß die Reibpartner unterschiedliche thermische Stoffwerte aufweisen $b_1 \neq b_2$:

$$\alpha = \frac{b_1 \cdot q_{R2} - b_2 \cdot q_{R1}}{(b_1 + b_2) \cdot \Delta \mathcal{G}_\infty(x_1, x_2) + (q_{R1} + q_{R2}) \left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \right)}.$$

(B3.1.1.1-1.15)

2) Anmerkung zur Abschätzung des Kontakt-Wärmeübergangs nach (3.1.1.1-1):

Der Schmierfilm, der einen äußerst schmalen Ringspalt der mittleren Dicke $s = R_I - R$ zwischen Draht- und Ziehholoberfläche ausfüllt, werde vereinfachend als ein sich mit etwa halber Drahtgeschwindigkeit $\tilde{v} = v/2$ durch das Ziehhol bewegendes, extrem dünnwandiges, starres

Rohr angesehen (Innenradius gleich Drahradius R , Außenradius gleich Ziehholinnenradius R_I), so daß man analog Dgl. (A2.3.2.2-1) - allerdings für $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$ und $q_V = 0$ (da die Reibungsquellen q_R bereits mit (A2.3.1-5) berücksichtigt werden) - und für Randbedingungen 1. Art mit den Oberflächentemperaturen $\vartheta_R = \text{konst.}$ bei $r = R$ und $\vartheta_{R_I} = \text{konst.}$ bei $r = R_I$ ausgehend von der Lösung [TAU 71, (6.121)] für den radialen Temperaturgradienten erhält (unter verkürzender Bezeichnung der Zylinderfunktionen durch Fortlassung ihrer Argumente in Anlehnung an [TAU 71, (6.107b)]):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\vartheta_{R_I} - \vartheta_R}{r \cdot \ln \frac{R_I}{R}} - \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_{R_I} \cdot J_{0R} - \vartheta_R \cdot J_{0I}}{J_{0I}^2 - J_{0R}^2} \cdot J_{0I} \cdot (N_{0R} \cdot J_{1r} - J_{0R} \cdot N_{1r}) \cdot \frac{\mu_n}{s} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{az}{\tilde{v} \cdot s^2}} \quad (\text{B3.1.1.1-2.1})$$

Hieraus kann man unter Beachtung, daß $R \approx R_I$ gilt, die in Radiusrichtung über $R \leq r \leq R_I$ mittlere Wärmequellichte bestimmen gemäß

$$\begin{aligned} \lambda_S \cdot \frac{\overline{\partial \vartheta}}{\partial r} &= \frac{\lambda_S}{s} \cdot \int_R^{R_I} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot dr = \frac{\lambda_S}{s} \cdot (\vartheta_{R_I} - \vartheta_R) - \dots \\ &\dots - \pi \cdot \frac{\lambda_S}{s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_{R_I} \cdot J_{0R} - \vartheta_R \cdot J_{0I}}{J_{0I}^2 - J_{0R}^2} \cdot J_{0I} \cdot (J_{0R} \cdot N_{0I} - N_{0R} \cdot J_{0I}) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{az}{\tilde{v} \cdot s^2}} \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.1-2.2})$$

die sich infolge der Eigenwertgleichung [TAU 71, (6.119)]

$$(J_{0R} \cdot N_{0I} - N_{0R} \cdot J_{0I}) = 0 \quad (\text{B3.1.1.1-2.3})$$

sogar weiter vereinfacht zu

$$\lambda_S \cdot \frac{\overline{\partial \vartheta}}{\partial r} = \frac{\lambda_S}{s} \cdot (\vartheta_{R_I} - \vartheta_R), \quad (\text{B3.1.1.1-2.4})$$

wodurch im Vergleich zu einer Randbedingung 3. Art - z.B. (A2.3.1-5) mit $q_R = 0$ - die Deutung des Faktors $\frac{\lambda_S}{s}$ als Wärmeübergangskoeffizient zwischen Draht- und Ziehholoberfläche unmittelbar nahegelegt wird.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn infolge $s/R \rightarrow 0$ bzw. $R/s \rightarrow \infty$, also unter Vernachlässigung der Krümmung des Schmierfilms, von vornherein von der entsprechenden Lösung für den in z -Richtung mit der Geschwindigkeit \tilde{v} bewegten Film (Platte) ausgegangen wird [TAU 71, (6.23)], denn dann ergibt sich sinngemäß zunächst für den Gradienten in $(0 \leq x \leq s)$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{s} (\vartheta_{R_I} - \vartheta_R) - \frac{2}{s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\vartheta_R - (-1)^n \cdot \vartheta_{R_I} \right) \cdot \cos\left(n\pi \frac{x}{s}\right) \cdot e^{-\frac{(n\pi)^2 \cdot az}{\tilde{v} \cdot s^2}}, \quad (\text{B3.1.1.1-2.5})$$

und weiter für die mittlere Wärmequellichte

$$\lambda_S \cdot \frac{\overline{\partial \vartheta}}{\partial x} = \frac{\lambda_S}{s} \cdot \int_0^s \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dx = \frac{\lambda_S}{s} \cdot (\vartheta_{R_I} - \vartheta_R), \quad (\text{B3.1.1.1-2.6})$$

in tatsächlich völliger Übereinstimmung zu obigem Resultat.

Weitergehende Abschätzungen hätten allerdings mindestens zu berücksichtigen, daß der Schmierfilm keine in sich starre Schicht ist, sondern ein Schergefälle und damit ein koordinatenabhängiges Geschwindigkeitsfeld aufweist; Feinheiten, von denen im Interesse der Einfachheit hier abgesehen wurde.

Zu Kapitel A3.1.1.3: Näherung SIEBEL/KOBITZSCH

1) Für eine Randbedingung 2. Art bei $x=0$ gemäß $-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = q_R(z)$  $-\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} = Q_R(p)$

wird unter Verwendung des Lösungsansatzes [TAU 71, (7.1)] unmittelbar die Lösung



$$\Theta(x,p) = \frac{Q_R(p)}{\lambda} \cdot \frac{e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}}{\sqrt{\frac{p}{a}}} \tag{B3.1.1.3-1}$$

des Bildbereiches erhalten, deren Rücktransformation mit dem Faltungssatz und einer bekannten Korrespondenz [TAU 71, Tab. C1, Nr. 5.5] sofort die Lösung (A3.1.1.3-9.1) ergibt.

2) Der Beitrag [SNI 77], der sich mit theoretischen Fragen zur Reibungserwärmung und Temperaturverteilung in Drähten und Bändern während des Ziehens beschäftigt, geht für den Bereich der Umformzone vom Modell des halbinendlichen Körpers aus.

Dabei wird wiederum vereinfachend eine Randbedingung 2. Art herangezogen, wobei allerdings zusätzlich die Änderung der Bahngeschwindigkeit entlang der Wirkfuge durch einen zeitabhängigen Ansatz der Form $v_R = v_R(t) = v_{R0} \cdot e^{k \cdot t}$ Berücksichtigung findet. Während das Ergebnis (40) in [SNI 77] relativ aufwendig hergeleitet wird, läßt es sich - gleichfalls durch LAPLACE-Transformation - für die Randbedingung

$$q_R(t) = q_{R0} \cdot e^{kt} \quad \begin{matrix} t & \longleftarrow & s \\ \circ & \text{---} & \bullet \end{matrix} \quad Q_R(s) = \frac{q_{R0}}{s - k}, \tag{B3.1.1.3-2}$$

um einiges übersichtlicher gewinnen indem man (B3.1.1.3-2) in (B3.1.1.3-1) einsetzt (*jetzt natürlich mit der Bildvariable*  *statt* ) und diese Bildfunktion mit Korrespondenz 12.3 aus [TAU 71, Tab. C.1] wieder in den Originalbereich zurückübersetzt, womit unmittelbar

$$\vartheta(x,t) = \frac{q_{R0}}{2\lambda} \cdot e^{kt} \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot \left\{ e^{-x\sqrt{\frac{k}{a}}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \sqrt{kt} \right) - e^{x\sqrt{\frac{k}{a}}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \sqrt{kt} \right) \right\} \tag{B3.1.1.3-3}$$

erhalten wird; Beispiele für Randbedingung 1. oder 3. Art siehe auch [TAU 71, Kap. 11.5]. In diesem Sinne viel weitreichendere Untersuchungen für zeit- und ortsabhängige Randfunktionen sind auf der Grundlage der entsprechenden Ergebnisse des Kapitels A2.3 möglich.

Zu Kapitel 3.1.1.4.1: Näherung Draht-Ziehöse

1) Zur Ziehöse mit Fassung:

Bei einem M -schichtigen Hohlzylinder (Innenradius R_I , Außenradius R_{M+1}) erhält man mit der Innenrandtemperatur

$$\tilde{\vartheta}_Z(R_I) = \left(\tilde{\vartheta}_{UI} + \frac{\tilde{q}_{RZ}}{\alpha_I} \right) - \frac{\alpha_{DZ}(M)}{\alpha_I} \left(\tilde{\vartheta}_{UI} + \frac{\tilde{q}_{RZ}}{\alpha_I} - \tilde{\vartheta}_{U(M+1)} \right) \tag{B3.1.1.4.1-1.1}$$

die für (3.1.1.4-5) erforderlichen Größen entsprechend zu

$$\alpha_{DZ} = \alpha_{DZ}^{(M)} := \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{k_m} + \frac{R_1}{R_{M+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{M+1}} \right)^{-1}, \quad (\text{B3.1.1.4.1-1.2})$$

$$k_m := \frac{\lambda_m}{R_1 \cdot \ln \frac{R_{m+1}}{R_m}}, \quad \lambda_1 \equiv \lambda_Z,$$

$$\tilde{q}_{DZ} := \tilde{q}_{U_{(M+1)}} + \tilde{q}_{RZ} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{DZ}} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad (\text{B3.1.1.4.1-1.3})$$

wobei wiederum $\alpha_1 = \alpha$ zu setzen ist.

2) Zur Spannungsberechnung beim Drahtziehen:

Zur theoretischen Ermittlung der Spannungs- und Geschwindigkeitsverhältnisse in der Umformzone sowie des Kraft-, Arbeits- und Leistungsbedarfs beim Drahtziehen ist i.allg. die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen erforderlich, welches sich zusammensetzt aus zwei Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement, der Fließbedingung nach *MISES* sowie vier Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen nach *LEVY* und *v. MISES* [PAW 66, S. 385f]. Hieraus können prinzipiell die Normal- und Schubspannungsfelder sowie die Geschwindigkeitsfelder der Werkstoffverschiebungen in der Umformzone, d.h. der Werkstofffluß, erhalten werden. Obwohl jedoch mit diesem bereits anspruchsvollen Modell nur eine genäherte Widerspiegelung des realen Drahtziehvorganges möglich ist - z.B. werden thermische Verhältnisse sowie rheologische Erscheinungen in den Gleichungen nicht implizit berücksichtigt, gestaltet sich die mathematisch-analytische Lösung noch so kompliziert, daß sie in geschlossener Form bisher nicht gefunden werden konnte. Deshalb ist man gezwungen, entweder auf vordergründig numerische Verfahren auszuweichen oder aber so weitreichende Modellvereinfachungen vorzunehmen, daß geschlossene Lösungsformeln - bei noch tragbarem Genauigkeitsverlust - möglich werden.

Aus diesem Grunde sind eine ganze Reihe von Näherungsverfahren entwickelt worden - vgl. z.B. [LEH 91, 1.Lb S. 36ff], [LEH 91a], [TRO 92], [ZOM 94], wovon die Methoden der finiten Differenzen (FDM), finiten Elemente (FEM) sowie der Rand-Elemente (BEM) die mit Abstand umfassendsten Aussagen und genauesten numerischen Ergebnisse zulassen [DAH 93, B 4.8-4.10]. Die FEM - ursprünglich im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie für den Ingenieurbau entwickelt - ähnelt dem *RAYLEIGH-RITZ*-Verfahren und wird seit Mitte der siebziger Jahre mit rasch wachsendem Erfolg zur numerischen Approximation von Lösungen partieller Differentialgleichungen aus praktisch allen Gebieten der angewandten Mathematik, insbesondere auch zur Bearbeitung nichtlinearer Aufgabenstellungen, eingesetzt. Damit ist dieses mathematische Instrumentarium auch auf allgemein-plastizitätsmechanische, thermische und thermoelastische Problemstellungen anwendbar und es können - je nach Rechenaufwand - quantitativ nahezu beliebig genaue Aussagen z.B. zu Spannungs-, Formänderungs-, Geschwindigkeits- und Temperaturfeldern gewonnen werden, vorausgesetzt, die erforderlichen Randbedingungen lassen sich hinreichend genau formulieren und quantitativ vorgeben; allein hierzu sind i.allg. aufwendige Experimente notwendig. Außerdem sind zur effektiven Bedienung und ggf. Anpassung von kommerzieller FEM-Software neben profunden umformtechnischen Kenntnissen auch einige Erfahrungen im Umgang mit der betreffenden Rechentechnik (Workstation, ggf. PC), dem Betriebssystem (z.B. UNIX), den Routinen für Datenein- und -ausgabe sowie der Daten-nachbehandlung (z.B. Grafikmodul) unumgänglich. Wegen dieses nicht unerheblichen Aufwandes an Meß-, Rechen- und Programmtechnik sowie qualifiziertem Personal (Meßtechniker, Bearbeiter, ggf. Programmierer bzw. Informatiker oder Mathematiker) und den damit verbundenen Kosten

werden diese modernen Methoden in der betrieblichen Praxis z.Z. nur bedingt eingesetzt. Das allerdings ist ein Grund dafür, daß weit größere Näherungsverfahren eine nicht zu unterschätzende Bedeutung bis heute behalten haben und in gewissem Umfang wohl auch behalten werden.

Die theoretische Bestimmung von Ziehholnormalspannung sowie axialer und radialer Ziehspannung bzw. Ziehkraft kann auf der Grundlage der elementaren Plastizitätstheorie und deren Vereinfachungen aus dem Gleichgewicht der Axial- und Radialkräfte am rotationssymmetrischen Scheibenelement oder aus der Energiebilanz zwischen innerer und äußerer Arbeit vorgenommen werden. Hier soll lediglich eine kurze Darstellung des Lösungsweges auf der Basis des Kräftegleichgewichts am Scheibenelement (Scheibentheorie) gebracht werden.

Werden also näherungsweise sogen. „parallelepipedische Umformung“ und „COULOMBSche Reibung“ $\tau_R/\sigma_N = \mu$ vorausgesetzt⁷¹, so lassen sich für „beliebige“ Ziehholkontur mit dem Radius $R = R(z)$ Axial- und Radialkräfte - unter Vernachlässigung von Trägheitskräften - wie folgt ansetzen:

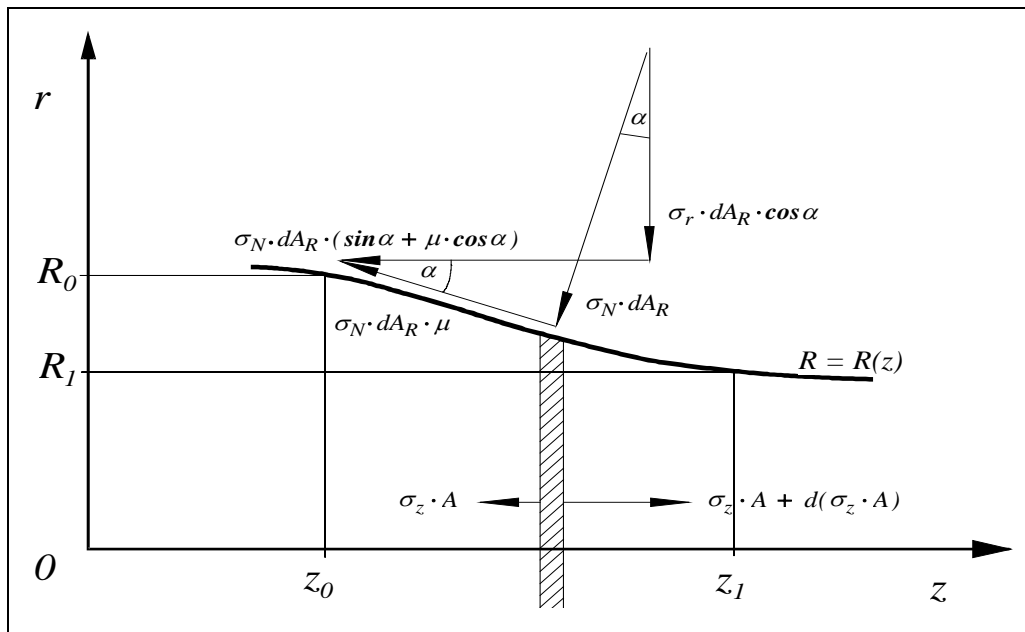


Bild B3.1-1: Kräfteplan am Scheibenelement

Unter Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts am Scheibenelement (Querschnitt $A = \pi R^2$) in radialer und axialer Richtung

$$\sum_i F_{r_i} : \quad \sigma_N \cdot dA_R \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) + \sigma_r \cdot dA_R \cdot \cos \alpha = 0 \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.1})$$

$$\sum_i F_{z_i} : \quad \sigma_z \cdot A + d(\sigma_z \cdot A) - \sigma_z \cdot A - \sigma_N \cdot dA_R \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 0 \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.2})$$

⁷¹ Zuerst von *Leonardo DA VINCI* (1452-1519) gefunden und von *G. AMONTONS* (1663-1705) wiederentdeckt, während *COULOMB* (1736-1806) als erster die Unabhängigkeit der Reib-Schubspannung von der Gleitgeschwindigkeit festgestellt hat - vgl. auch [KRI 96], [BOW 59].

gewinnt man zunächst unter Beachtung von $\tan \alpha = -\frac{dR}{dz} \equiv -R'$ und infolge (B3.1.1.4.1-2.1) mit

$$\text{der Ziehholnormalspannung (Werkzeugdruck) } \sigma_N = -\frac{\sigma_r}{1 - \mu \tan \alpha} = -\frac{\sigma_r}{1 + \mu R'} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.3})$$

aus (B3.1.1.4.1-2.2) die Differentialgleichung

$$\sigma'_z + 2 \cdot \frac{R'}{R} \cdot \sigma_z - \frac{2}{R} \cdot \frac{R' - \mu}{1 + \mu R'} \cdot \sigma_r = 0. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.4})$$

Die Radialspannung σ_r - die infolge der vereinfachenden Scheibentheorie von der Radiuskoordinate unabhängig ist - läßt sich durch die *TRESCA-MOHR*sche Fließbedingung, die sogen. Schubspannungshypothese

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_F \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.5})$$

eliminieren, so daß schließlich für die Drahtlängsspannung eine gewöhnliche und inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\sigma'_z + p(z) \cdot \sigma_z + q(z) = 0 \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.6})$$

mit den variablen Koeffizienten

$$p = \frac{2}{R} \cdot \frac{1 + R'^2}{1 + \mu R'} \cdot \mu, \quad q = \frac{2}{R} \cdot \frac{R' - \mu}{1 + \mu R'} \cdot \sigma_F, \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.7})$$

erhalten wird.

Eine Lösung dieser Dgl. (B3.1.1.4.1-2.6) läßt sich z.B. dadurch gewinnen, daß zunächst die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Dgl. aufgesucht und anschließend mit der Methode der Variation der Konstanten die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung hinzuaddiert wird; vgl. z.B. [ZEI 96, Kap. 1.12.4.5]. Diese Lösung besitzt noch eine frei verfügbare Konstante, die aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß die Drahtspannung am Ziehholeinlauf bei $z = z_0$ mit $\sigma_z(z_0) := \sigma_G = F_G/A_0$ (Gegenzugspannung) bekannt ist, womit schließlich

$$\sigma_z = \sigma_z(z) = e^{-\int_{z_0}^z p(\zeta) d\zeta} \cdot \left[\sigma_z(z_0) - \int_{z_0}^z q(\zeta) \cdot e^{\int_{z_0}^{\zeta} p(\xi) d\xi} d\zeta \right] \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.8})$$

als Lösung für die Axialspannung im Draht erhalten wird. Die Radialspannung $\sigma_r = \sigma_r(z)$ ergibt sich mit (B3.1.1.4.1-2.8) unmittelbar aus (B3.1.1.4.1-2.5) und die Normalspannung aus (B3.1.1.4.1-2.3). Die über der Berührungsfläche zwischen Draht und Ziehhol mittlere Normalspannung wird aus

$$\sigma_{Nm} = \frac{2\pi}{A_R} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \sigma_N(z) \cdot R(z) \cdot \sqrt{1 + R'^2(z)} \cdot dz \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.9})$$

mit der das Ziehhol radial begrenzenden Mantelfläche

$$A_R = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} R(z) \cdot \sqrt{1 + R'^2(z)} \cdot dz \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.10})$$

erhalten; $\sigma_N(z)$ entsprechend (B3.1.1.4.1-2.3) mit (B3.1.1.4.1-2.5) und (B3.1.1.4.1-2.8).

Für hinreichend einfache Bauarten der Funktionen $R = R(z)$, $\mu = \mu(z)$ und $\sigma_F = \sigma_F(z)$ sind die Integrationen analytisch geschlossen möglich, bei komplizierteren Integranden kann (B3.1.1.4.1-2.8) nur noch numerisch ausgewertet werden. Speziell für konisches Ziehholprofil hat *SACHS* bereits im Jahre 1927 eine elementare Herleitung gebracht [SAC 27], wobei er allerdings näherungsweise $\sigma_r \approx \sigma_N$ und damit anstelle (B3.1.1.4.1-2.5) die Fließbedingung $\sigma_z - \sigma_N \approx \sigma_F$ verwendet hat, weshalb seine und analog abgeleitete Lösungsausdrücke [LEH 91, 3.Lb, Kap. 7.2.1] mit einer aus (B3.1.1.4.1-2.8) entsprechend spezialisierten Lösung auch nicht exakt, sondern nur näherungsweise übereinstimmen können.

Die Scheibentheorie vernachlässigt die radialen Werkstoffumlenkungen am Ein- und Austritt der Umformzone und liefert damit im Prinzip zu kleine Kräfte. Diesen Umstand berücksichtigend haben *KÖRBER* und *EICHINGER* sogenannte Eckenkorrekturen beim Bandziehen eingeführt [KÖR 40], die *SIEBEL* auf das Drahtziehen übertragen hat. Entsprechend ist ein aus der Radialverschiebung resultierender Ziehspannungsanteil

$$\sigma_S \approx \frac{1}{3} \cdot (|R'_0| \cdot \sigma_{F_0} + |R'_1| \cdot \sigma_{F_1}) \approx \frac{2}{3} \cdot \sigma_{F_m} \cdot \tan \tilde{\alpha}; \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.11})$$

zur Ziehspannungsgleichung (3.1.1.4-2.8) hinzuzuaddieren.

Den Ziehmaschinenkonstrukteur interessiert besonders, wie groß die auf das Ziehwerkzeugwiderlager (Ziehsteinhalter) wirkenden Kräfte F_W werden können. Aus dem äußeren Gleichgewicht der Axialkräfte am Ziehsteinhalter folgt unmittelbar

$$F_W = A \cdot (\sigma_z + \sigma_S) - A_0 \cdot \sigma_z(z_0) \equiv A \cdot (\sigma_z + \sigma_S) - F_G. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.12})$$

Eine weitere interessante Frage betrifft die Form der Ziehholkontur $R = R(z)$ zwischen $z_0 \leq z \leq z_1$, die zu gegebenen Ausgangs- und Endhalbmessern $R_0 = R(z_0)$ und $R_1 = R(z_1)$ sowie zu vorgegebenen Funktionen $\mu = \mu(z)$ und $\sigma_F = \sigma_F(z)$ eine möglichst niedrige Ziehspannung $\sigma_{Z_{Min}}$ liefert und damit eine entsprechend schonende Drahtbeanspruchung gewährleistet. Diese Aufgabe führt auf ein mathematisches Variationsproblem, das jedoch auf der Grundlage der elementaren Plastizitätstheorie leider keine befriedigenden Ergebnisse liefern kann, da ja die Scheibentheorie den Werkstofffluß vereinfachend vorgibt anstelle ihn aus den allgemeinen Grundgleichungen herzuleiten. Herkömmlich begnügt man sich deshalb damit, lediglich für den Spezialfall eines konischen Ziehholprofils den „optimalen“ Ziehholöffnungswinkel zu berechnen [LEH 91, 3.Lb, Kap. 7.3].

Die Zieharbeit W für ein gezogenes Volumen $V = A \cdot l$ berechnet sich zu

$$W = (\sigma_z + \sigma_S) \cdot V, \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.13})$$

während für die Ziehleistung P in der Zeitspanne Δt dann bekanntlich gilt:

$$P = W / \Delta t. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.14})$$

Eine weitere wichtige, Anstrengungsgrad genannte zientechnische Kenngröße wird gebildet als Verhältnis aus Ziehspannung zu Fließspannung am Ziehdüsenaustritt

$$a = \frac{\sigma_z(z_1) + \sigma_S}{\sigma_F(z_1)}. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.15})$$

Um in der Paxis sicher, d.h. ohne häufige Drahtreiber, ziehen zu können, sollte der Anstrengungsgrad - je nach Werkstoff, Anlagentechnik und Ziehbedingungen - möglichst nicht größer als 0,7 bis 0,8 sein [LIP 67, S.820], [DAH 93, Kap. D3.2.3.1].

Anzumerken ist, daß die bisher vernachlässigten Trägheitskräfte für den Kraft- und Arbeitsbedarf tatsächlich von völlig untergeordneter Bedeutung sind, wie *LIPPMANN* und *MAHRENHOLTZ* [LIP 67, S. 232] nachweisen.

Ergänzend werden für konisches Ziehholprofil $\alpha = \tilde{\alpha} = \text{konst.}$, also speziell für einen Konturradius $R(z) := R_0 - z \cdot \tan \tilde{\alpha}$ im Bereich der Umformzone $z_0 = 0 \leq z \leq l_U$, einige Gleichungen für die Drahtlängs- und Normalspannungen angegeben. Dabei werden vereinfachend mittlere Werte für Reibung und Fließspannung entlang der Ziehholkontur vereinbart, d.h., $\mu = \text{konst.}$, $\sigma_F = \sigma_{Fm} = \text{konst.}$, und der Endradius wird mit R_I entsprechend $R(l_U) := R_0 - l_U \cdot \tan \tilde{\alpha} = R_I$ bezeichnet. Dann ergibt die Ausführung der Integrationen in (B3.1.1.4.1-2.8) nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_U}(z) = \sigma_{Fm} \cdot \cos \tilde{\alpha} \cdot \left(\cos \tilde{\alpha} + \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\mu} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \right] + \dots \\ \dots + \sigma_z(0) \cdot \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.16})$$

Damit wird zunächst die Normalspannung (B3.1.1.4.1-2.3) unter Beachtung von (B3.1.1.4.1-2.5) zu

$$\begin{aligned} \sigma_{N_U}(z) = - \frac{\sigma_{z_U}(z) - \sigma_{Fm}}{1 - \mu \tan \tilde{\alpha}} \\ = \frac{\sigma_{Fm}}{1 - \mu \tan \tilde{\alpha}} \cdot \left\{ 1 - \cos \tilde{\alpha} \cdot \left(\cos \tilde{\alpha} + \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\mu} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \right] \right\} - \dots \\ \dots - \frac{\sigma_z(0)}{1 - \mu \tan \tilde{\alpha}} \cdot \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.17})$$

erhalten und weiter die mittlere Normalspannung (B3.1.1.4.1-2.9) ermittelt:

$$\begin{aligned} \sigma_{Nm_U} = \frac{2\pi}{A_R} \cdot \int_{z_0}^{z_I} \sigma_{N_U}(z) \cdot R(z) \cdot \sqrt{1 + R'^2(z)} \cdot dz = \frac{2\pi}{-\Delta A} \cdot \int_{R_0}^{R_I} R \cdot \sigma_{N_U}(R) \cdot dR; \quad \Delta A = A_0 - A_I \\ = \sigma_{Fm} \cdot \frac{\cos^2 \tilde{\alpha}}{\mu \cot \tilde{\alpha}} \cdot \frac{A_I}{\Delta A} \left[1 - \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \right] - \dots \\ \dots - \frac{\sigma_z(0)}{1 + \mu \cot \tilde{\alpha}} \cdot \frac{A_0}{\Delta A} \left[1 - \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{2 \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})} \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.18})$$

Beim Drahtziehen werden aus bekannten Gründen gute Schmierungsbedingungen zwischen Draht und Ziehhol angestrebt ($0 < \mu \ll 0,2$), andererseits sind überwiegend Ziehwerkzeuge mit Ziehholöffnungswinkeln $2\tilde{\alpha}$ im Bereich zwischen 10° und 20° im Einsatz. Damit lassen sich aus der Ziehspannung (B3.1.1.4.1-2.16) Näherungslösungen gewinnen, die mit etwas geänderter

Fließbedingung, wie schon erwähnt, bereits von *SACHS* [SAC 27] und - über das Gleichgewicht der Arbeit - von *SIEBEL* gefunden worden waren.

Infolge der Näherungen $\cos \tilde{\alpha} \cdot \left(\cos \tilde{\alpha} + \frac{\sin \tilde{\alpha}}{\mu} \right) \approx 1 + \frac{\tan \tilde{\alpha}}{\mu}$ und $\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})} \approx 2\mu \cot \tilde{\alpha}$ wird zunächst die *SACHS*sche Ziehspannungsformel erhalten:

$$\sigma_{z_U}(z) = \sigma_{Fm} \cdot \left(1 + \frac{\tan \tilde{\alpha}}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{2\mu \cot \tilde{\alpha}} \right] + \sigma_z(0) \cdot \left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{2\mu \cot \tilde{\alpha}} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.19})$$

Wird dagegen unter Verwendung des Umformgrades $\varphi = 2 \ln(R_0/R)$ und unter Einhaltung der

Bedingung $|\mu \cot \tilde{\alpha} \cdot \varphi \ll 1|$ die Näherung $\left(\frac{R(z)}{R_0} \right)^{\frac{2\mu}{\sin \tilde{\alpha} \cdot (\cos \tilde{\alpha} - \mu \sin \tilde{\alpha})}} \approx 1 - \mu \cot \tilde{\alpha} \cdot \varphi$ herangezogen und auf (B3.1.1.4.1-2.16) angewendet, so ergibt sich die *SIEBEL*sche Ziehspannungsformel:

$$\sigma_{z_U}(z) = \sigma_{Fm} \cdot (1 + \mu \cot \tilde{\alpha}) \cdot \varphi(z) + \sigma_z(0) \cdot (1 - \mu \cot \tilde{\alpha} \cdot \varphi(z)). \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.20})$$

Im allgemeinen besitzen Ziehdüsen neben einer mehr oder weniger konischen Umformzone eine sich daran anschließende zylindrische Führungs- bzw. Kalibrierzone ($R' = 0$), deren Länge in Bruchteilen bzw. Vielfachen des Fertigdrahtdurchmessers angegeben wird: $l_K \approx (0 \dots 2) \cdot d_I$. Sie dient der Verbesserung der Standzeit der Ziehwerkzeuge und der Erhöhung der Maßhaltigkeit des gezogenen Drahtes. Die Axialspannung des die Ziehdüse verlassenden Drahtes setzt sich deshalb sowohl aus dem soeben angegebenen Umformanteil $\sigma_{z_U}(l_U)$ bei $z = l_U$ als auch aus einem noch zu berechnenden Kalibrieranteil $\sigma_{z_K}(l_{UK})$ bei $z = l_U + l_K = l_{UK}$ zusammen.

Bereits *C. T. YANG* berechnete diesen Spannungsanteil, allerdings unter der Annahme, daß noch über die volle Kalibrierlänge die Fließbedingung weiterwirke. *PAWELSKI* referiert *YANG*s Ergebnis [PAW 62] und kommt im Vergleich mit Versuchsergebnissen von *LUEG* und *TREPTOW* zur Feststellung, daß der Führungszoneneinfluß durch die *YANG*sche Betrachtungsweise zwar qualitativ richtig wiedergegeben wird, jedoch die quantitative Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen erst dann zu erreichen ist, wenn mit halbierten Reibwerten oder Führungslängen gerechnet wird.

Die Ursache für den um mindestens das Doppelte zu hohen Führungszoneneinfluß dürfte darin zu suchen sein, daß in der Kalibrierzone nicht mehr die Fließbedingung (B3.1.1.4.1-2.5), wie sie *YANG* auch dort noch verwendet, gilt. Die Schwierigkeit besteht dann also in der Festlegung eines dem realen Spannungszustand besser genügenden Ansatzes. Dabei soll nachfolgend von der unbewiesenen, jedoch nicht unbegründeten Vorstellung ausgegangen werden, daß die Radialspannung, wie sie sich aus (B3.1.1.4.1-2.5) am Ende der Umformzone bzw. Beginn der Führungszone ergibt, auf „irgendeine Weise“ bis zum Ende der Führungszone hin abnimmt. Hier ist Spielraum, solange detaillierte Meßergebnisse $\sigma_r(z_i)$ oder eine tieferegehende theoretische Analyse fehlen. Ersatzweise werde deshalb von dem Radialspannungsansatz

$$\sigma_r(z) = \left(\sigma_z(z) - \sigma_{F_I} \right) \cdot \left(1 - \frac{z - l_U}{l_K} \right)^\gamma; \quad \gamma \geq 0, \quad l_U \leq z \leq l_{UK} = l_U + l_K \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.21})$$

ausgegangen, der den *YANG*schen Ansatz als Grenzfall ($\gamma = 0$) enthält. Es treten an Stelle (B3.1.1.4.1-2.7) die neuen Koeffizienten

$$p = \frac{4\mu}{d_I} \left(1 - \frac{z-l_U}{l_K} \right)^\gamma, \quad q = -p \cdot \sigma_{FI}; \quad d_I = 2R_I. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.22})$$

Damit läßt sich gemäß (B3.1.1.4.1-2.8) die Axialspannung des Drahtes in der Führungs- bzw. Kalibrierzone explizit berechnen:

$$\sigma_{z_K}(z) = e^{-\psi(z)} \cdot \sigma_{z_K}(l_U) + \left(1 - e^{-\psi(z)} \right) \cdot \sigma_{FI} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.23})$$

mit

$$\psi(z) := \frac{4\mu l_K}{(1+\gamma) \cdot d_I} \left[1 - \left(1 - \frac{z-l_U}{l_K} \right)^{1+\gamma} \right], \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.24})$$

wobei Kontinuität der Axialspannungen $\sigma_{z_K}(l_U) = \sigma_{z_U}(l_U)$ offenbar gewährleistet wird.

Die Normalspannung in der Kalibrierzone ist dann wegen (B3.1.1.4.1-2.3), also $\sigma_N = -\sigma_r$, sowie mit (B3.1.1.4.1-2.21) und (B3.1.1.4.1-2.23) durch

$$\sigma_{N_K}(z) = \left(\sigma_{FI} - \sigma_{z_K}(l_U) \right) \cdot \left(1 - \frac{z-l_U}{l_K} \right)^\gamma \cdot e^{-\psi(z)} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.25})$$

gegeben. Damit liegt auch die mittlere Normalspannung für die Kalibrierzone vor:

$$\sigma_{Nm_K} = \frac{1}{l_K} \int_{l_U}^{l_{UK}} \sigma_{N_K}(z) \cdot dz = \left(\sigma_{FI} - \sigma_{z_K}(l_U) \right) \cdot \frac{d_I}{4\mu l_K} \left(1 - e^{-\psi(l_{UK})} \right). \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.26})$$

Über den freien Parameter γ , der die Art und Steilheit des Abklings der Radialspannung entlang der Führungs- bzw. Kalibrierlänge entsprechend (B3.1.1.4.1-2.21) wesentlich bestimmt, läßt sich der Einfluß der Kalibrierzone regulieren. Um leichter zu erkennen, welchen quantitativen Einfluß der Parameter insgesamt hat, kann von der Näherung $e^{-\psi(l_{UK})} \approx 1 - \psi(l_{UK})$ mit

$\psi(l_{UK}) = \frac{4\mu l_K}{(1+\gamma) \cdot d_I} \ll 1$ Gebrauch gemacht werden:

- für die Axialspannung aus (B3.1.1.4.1-2.23)

$$\sigma_{z_K}(l_{UK}) \approx \sigma_{z_K}(l_U) + \left(\sigma_{FI} - \sigma_{z_K}(l_U) \right) \cdot \frac{4\mu l_K}{(1+\gamma) \cdot d_I} \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.27})$$

und für den mittleren Normalspannungsanteil aus (B3.1.1.4.1-2.26)

$$\sigma_{Nm_K} \approx \frac{\sigma_{FI} - \sigma_{z_K}(l_{UK})}{\gamma + 1}. \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.28})$$

Es zeigt sich, daß der Kalibrierzonenanteil, wie ihn YANG (für $\gamma = 0$) erhält, mit $\gamma = 1$ etwa halbiert wird. Damit läßt sich die Diskrepanz, die PAWELSKI zwischen Meß- und Rechen-ergebnissen seinerzeit kritisierte, mühelos mit γ -Werten im Bereich von $\gamma \approx 1 \dots 2$ korrigieren, was einem etwa quasilinearen bis (höchstens) parabolischen Radialspannungsabbau entspricht. Mit dem intuitiv naheliegenden, wenn auch streng physikalisch nicht abgesicherten Ansatz (B3.1.1.4.1-2.21) läßt sich also die Axialspannung eines die Ziehöse verlassenden Drahtes $\hat{\sigma}_z = \sigma_{z_K}(l_{UK})$ entsprechend der Beziehungen (B3.1.1.4.1-2.23) bzw. (B3.1.1.4.1-2.27) - unter angemessener Berücksichtigung des Kalibrierzoneneinflusses durch geeignete Wahl des Parame-

ters γ - und unter Verwendung der Formeln für den Umformanteil (B3.1.1.4.1-2.8), (B3.1.1.4.1-2.16) oder (B3.1.1.4.1-2.19) bzw. (B3.1.1.4.1-2.20) sowie den Schiebungsanteil (B3.1.1.4.1-2.11) berechnen:

$$\hat{\sigma}_z = e^{-\psi(l_{UK})} \cdot \sigma_z(l_U) + \left(1 - e^{-\psi(l_{UK})}\right) \cdot \sigma_{F1} + \sigma_S . \quad (\text{B3.1.1.4.1-2.29})$$

Lediglich erwähnt werden soll, daß eine Vielzahl weiterer Näherungsansätze zur Ziehspannungsberechnung bekannt sind, deren Herleitungen auf modifizierten, z.T. auch deutlich verschiedenen Voraussetzungen beruhen. Besonders interessant sind Beziehungen, die hergeleitet wurden von AVITZUR auf der Grundlage der Obere-Schranken-Theorie [AVI 83], von KNESCHKE auf der Grundlage der NAVIER-STOKESchen Bewegungsgleichungen zäher Medien, bekannt als Hydrodynamische Theorie [KNE 71] und [WEB 71] oder von TROOST und BACHERER SOLIZ auf plastizitätsmechanisch elementarer Grundlage, jedoch unter besonderer Berücksichtigung des Werkstoffverhaltens bezüglich Verfestigung und Temperatur [BAC 78], [TRO 92a].

Zu Kapitel 3.1.1.4.2: Temperaturmessung im Ziehwerkzeug

Versuchsprogramm zur Temperaturmessung mit vier präparierten Hartmetall-Ziehwerkzeugen:

Versuchsplan	Versuchs-Nr	Versuchswerkzeug	Werkstoff	Festigkeitsniveau	d ₀ [mm]	d ₁ [mm]	ε [%]
141	1...3	HMZ 1	CuZn37	F30	1,13	1,00	21,7
"	4...6	"	"	F38	1,15	"	24,4
"	7...9	"	"	F55	"	"	"
"	10...12	"	"	>F55	"	"	"
142	1...3	HMZ 2	"	F30	1,13	0,98	24,8
"	4...6	"	"	F38	1,15	"	27,4
"	7...9	"	"	F55	"	"	"
"	10...12	"	"	>F55	"	"	"
143	1...3	HMZ 3	"	F30	1,13	1,01	20,1
"	4...6	"	"	F38	1,15	"	22,9
"	7...9	"	"	F55	"	"	"
"	10...12	"	"	>F55	"	"	"
144	1...3	HMZ 4	"	F30	1,13	1,00	21,7
"	4...6	"	"	F38	1,15	"	24,4
"	7...9	"	"	F55	"	"	"
"	10...12	"	"	>F55	"	"	"
145	1...2	HMZ 1	U8A ⁷²	-	1,21	1,00	31,7
146	1...2	HMZ 2	"	-	1,21	0,98	34,4
147	1...2	HMZ 3	"	-	1,21	1,01	30,3
148	1...4	HMZ 4	"	-	1,21	1,00	31,7

⁷² Stahlkorddraht (0,8%C; 0,2%Si; 0,2%Mn)

Zu Kapitel 3.1.1.4.3: Numerisches Beispiel zur thermischen Draht-Düse-Kopplung

Ausgewählte Temperaturen für Draht und HMZ 1 - Kern (Berechnung Nr. 145.1.6.23):

z [mm]	Vollzylinderradius									Hohlzylinderradius r [mm]								
	0,00	0,20	0,30	0,40	0,45	0,49	0,52	0,54	0,55	0,55	0,7	1	2	3	4	6	8	11
0,00	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	67,8	67,8	67,7	67,4	66,8	66,0	63,8	61,4	57,1
1,85	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	68,8	68,8	68,7	68,3	67,6	66,6	64,3	61,7	57,8
3,70	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	71,7	71,7	71,7	71,7	70,1	68,8	65,7	62,7	58,6
5,55	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	78,9	78,9	78,7	77,2	75,1	72,6	68,0	64,0	59,4
7,40	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	95,3	95,0	94,2	89,2	83,5	78,3	70,8	65,6	60,1
7,75	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	100,3	100,3	99,4	92,7	85,6	79,6	71,3	65,9	60,3
8,10	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	107,4	107,1	105,8	96,7	87,6	80,8	71,8	66,2	60,4
8,45	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	115,9	115,9	114,5	101,0	89,9	82,0	72,2	66,4	60,6
8,80	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	108,7	133,5	124,7	105,5	91,9	83,1	72,6	66,6	60,8
8,93	27,1	27,1	27,1	27,1	27,3	30,7	45,9	70,7	88,8	142,2	143,1	132,2	108,1	92,8	83,5	72,9	66,7	60,7
9,05	34,4	34,4	34,4	34,5	36,9	48,5	73,0	101,3	119,5	175,4	157,0	140,0	108,9	93,3	83,8	73,0	66,9	60,9
9,18	41,6	41,6	41,6	42,6	48,7	67,2	96,9	126,8	144,8	191,6	169,7	144,0	110,6	94,0	84,2	73,1	67,0	60,9
9,30	48,8	48,8	48,9	51,5	61,9	85,6	117,6	145,8	161,2	202,7	178,1	152,9	113,0	94,6	84,5	73,3	66,9	60,8
9,48	59,0	59,0	59,2	65,3	81,2	108,6	139,2	163,4	176,2	209,4	189,0	159,5	114,6	95,5	84,9	73,6	67,0	60,9
9,65	69,0	69,1	69,8	80,0	99,7	128,1	156,7	178,4	189,7	218,2	198,0	166,7	116,8	96,1	85,2	73,7	67,2	61,1
9,83	79,2	79,3	80,8	95,3	117,3	145,7	172,9	193,2	204,0	230,9	208,0	172,9	118,3	96,7	85,5	73,8	67,3	61,2
10,00	89,2	89,4	92,0	110,2	133,7	162,2	189,0	209,5	220,7	246,2	218,4	179,7	119,5	97,2	85,8	73,9	67,3	61,1
10,13	96,5	96,8	100,5	121,0	145,4	174,1	201,4	222,8	234,6	261,0	225,4	181,8	119,8	97,3	85,9	74,1	67,4	61,2
10,25	103,7	104,3	108,9	131,6	156,9	186,3	214,2	236,0	247,8	272,3	231,0	181,5	120,4	97,6	86,1	74,1	67,5	61,3
10,38	110,8	111,7	117,5	142,2	168,4	198,4	226,3	246,9	257,4	277,1	231,4	179,3	120,3	97,7	86,2	74,2	67,7	61,3
10,50	118,1	119,4	126,3	152,8	179,8	209,8	235,9	253,2	260,8	266,9	227,1	178,6	119,4	97,6	86,2	74,1	67,7	61,5
10,70	118,1	120,0	128,8	158,1	185,4	211,5	228,9	237,0	239,7	239,3	214,5	177,5	118,9	97,5	86,2	74,3	67,7	61,5
10,90	118,1	120,9	131,5	162,7	188,2	209,7	223,1	229,6	232,0	230,9	205,8	170,2	118,1	97,1	86,0	74,3	67,7	61,5
11,10	118,3	122,1	134,5	166,3	189,5	207,9	219,1	224,6	226,6	221,5	194,2	160,9	115,8	96,5	85,9	74,4	67,9	61,6
11,30	118,5	123,4	137,3	169,0	190,1	205,9	215,1	219,0	220,0	195,5	175,9	151,3	113,7	96,0	85,7	74,3	68,0	61,7
11,60	119,1	125,8	141,4	172,0	189,9	201,9	207,7	209,6	209,8	147,2	145,4	138,0	110,4	94,9	85,3	74,4	68,0	61,8
11,90	119,8	128,1	144,9	173,4	188,5	197,8	202,2	203,5	203,6	129,7	129,3	125,6	107,1	93,5	85,0	74,4	68,1	62,0
12,20	120,8	130,6	147,9	174,2	186,9	194,5	197,9	198,9	199,1	119,4	118,9	116,6	103,3	92,2	84,3	74,3	68,2	62,0
12,50	122,2	133,2	150,6	174,5	185,4	191,7	194,5	195,4	195,5	111,0	110,9	109,8	99,9	90,9	83,6	74,2	68,2	62,2
13,38	127,2	140,0	156,0	174,1	181,5	185,6	187,3	187,9	187,9	97,6	97,5	96,9	92,6	87,0	81,9	73,9	68,3	62,5
14,25	132,9	145,3	159,0	172,9	178,3	181,2	182,4	182,8	182,8	90,5	90,5	90,3	87,8	84,2	80,3	73,5	68,3	62,9
15,13	138,9	149,9	161,2	172,1	176,0	178,2	179,1	179,4	179,4	87,1	87,1	86,9	85,2	82,5	79,3	73,2	68,2	63,2
16,00	143,9	153,3	162,5	171,0	174,1	175,7	176,4	176,6	176,6	85,9	85,9	85,8	84,3	81,9	78,8	73,0	68,1	63,6

Zu Kapitel 3.1.1.5.2:

Zur Konvergenzverbesserung der DINI-Koeffizienten (3.1.1.5-4.2) waren zwei Reihensummationen möglich ($H := hR$):

$$2\omega^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n \frac{r}{R})}{(\mu_n^2 - \omega^2) \cdot (H^2 + \mu_n^2) \cdot J_0(\mu_n)} = \frac{J_0(\omega \frac{r}{R})}{H \cdot J_0(\omega) - \omega \cdot J_0(\omega)} - \frac{1}{H} \tag{B3.1.1.5.2-1}$$

und

$$2\omega^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n \frac{r}{R})}{\mu_n^2 (\mu_n^2 - \omega^2) (H^2 + \mu_n^2) \cdot J_0(\mu_n)} = \frac{J_0(\omega \frac{r}{R})}{\omega^2 \cdot (H \cdot J_0(\omega) - \omega \cdot J_1(\omega))} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{H} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2H} \right] \tag{B3.1.1.5.2-2}$$

Zur Konvergenzverbesserung der kalorischen Temperatur (3.1.1.5-6) waren folgende Reihen-
summutationen möglich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^4 \cdot (H^2 + \mu_n^2)} = \frac{4+H}{2^5 \cdot H^3} \quad (\text{B3.1.1.5.2-3})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^6 \cdot (H^2 + \mu_n^2)} = \frac{4+2H+\frac{1}{3}H^2}{2^6 \cdot H^4} \quad (\text{B3.1.1.5.2-4})$$

$$2\omega^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 (\mu_n^2 - \omega^2)(H^2 + \mu_n^2)} = \frac{J_0(\omega)}{\omega^2 \cdot (H \cdot J_0(\omega) - \omega \cdot J_1(\omega))} - \frac{1}{H} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{2H} \right);$$

folgt direkt aus (B3.1.1.5.2-2) für $r = R$. (B3.1.1.5.2-5)

Zu Kapitel 3.1.1.5.3: Mehrfachzug

Drahttemperaturen beim Ziehen von unlegiertem stark verzinktem Stahldraht auf einer elfzügigen
Naßziehmaschine, berechnet nach den in Kapitel 3.1.1.5.3 gemachten Vorgaben mit den im
Anhang C mitgeteilten HP48-Programmen (Directories „TEMP.W“ und „T4“):

Tabelle		<i>z</i>	<i>d</i>	<i>v</i>	σ_F	$\mathcal{G}(z,R)$	$\mathcal{G}(z,0)$	$\bar{\mathcal{G}}(z)$
Zug		mm	mm	m/s	N/mm ²	°C	°C	°C
		0,000	1,500	1,667	567	20,0	20,0	20,0
1	Ziehen	0,268	1,431	1,832		142,8	33,2	44,5
		0,535	1,431	1,832		197,1	46,5	68,2
		0,803	1,431	1,832		239,9	59,7	91,4
	Kühlen	200,803	1,360	2,027		71,6	73,1	72,3
		400,803	1,360	2,027		60,1	61,0	60,5
		600,803	1,360	2,027		52,8	53,3	53,0
		800,803	1,360	2,027		48,1	48,5	48,3
1000,803	1,360	2,027	953	45,1	45,4	45,3		
2	Ziehen	1001,052	1,296	2,234		209,6	63,3	77,7
		1001,300	1,296	2,234		280,3	81,2	108,9
		1001,549	1,296	2,234		335,4	99,0	139,3
	Kühlen	1201,549	1,230	2,479		104,1	106,7	105,4
		1401,549	1,230	2,479		82,5	84,2	83,3
		1601,549	1,230	2,479		68,1	69,3	68,7
		1801,549	1,230	2,479		58,7	59,4	59,0
2001,549	1,230	2,479	1047	52,4	52,9	52,6		
3	Ziehen	2001,778	1,171	2,737		234,8	72,3	87,6
		2002,008	1,171	2,737		312,0	91,7	121,2
		2002,237	1,171	2,737		371,7	111,1	153,9
	Kühlen	2202,237	1,110	3,044		116,6	119,5	118,0
		2402,237	1,110	3,044		92,8	94,8	93,8
		2602,237	1,110	3,044		76,4	77,8	77,1
		2802,237	1,110	3,044		65,1	66,0	65,6
3002,237	1,110	3,044	1077	57,3	58,0	57,6		
4	Ziehen	3002,429	1,060	3,335		243,7	76,4	90,7
		3002,620	1,060	3,335		321,5	94,7	122,5
		3002,811	1,060	3,335		381,4	113,1	153,4
	Kühlen	3202,811	1,010	3,676		119,0	121,7	120,3
		3402,811	1,010	3,676		96,3	98,2	97,2
		3602,811	1,010	3,676		80,1	81,5	80,8
		3802,811	1,010	3,676		68,6	69,5	69,1
4002,811	1,010	3,676	1109	60,4	61,0	60,7		

Fortsetzung
Tabelle

		z	d	v	σ_F	$\vartheta(z,R)$	$\vartheta(z,0)$	$\bar{\vartheta}(z)$
Z u g		mm	mm	m/s	N/mm ²	°C	°C	°C
5	Ziehen	4003,002	0,960	4,065		268,9	82,0	98,0
		4003,194	0,960	4,065		354,9	102,8	133,7
		4003,383	0,960	4,065		420,0	123,4	168,1
		4003,385	0,960	4,065		417,6	123,1	168,2
	Kühlen	4203,385	0,910	4,528		133,1	136,0	134,5
		4403,385	0,910	4,528		108,6	110,7	109,6
		4603,385	0,910	4,528		90,5	92,0	91,3
		4803,385	0,910	4,528		77,2	78,3	77,8
		5003,385	0,910	4,528	1136	67,4	68,2	67,8
6	Ziehen	5003,557	0,865	5,007		288,2	89,4	105,6
		5003,729	0,865	5,007		378,0	110,7	141,9
		5003,831	0,865	5,007		420,0	123,3	162,8
		5003,901	0,865	5,007		426,1	131,6	176,0
	Kühlen	5203,901	0,820	5,577		142,8	145,6	144,2
		5403,901	0,820	5,577		118,0	120,1	119,1
		5603,901	0,820	5,577		99,2	100,8	100,0
		5803,901	0,820	5,577		84,9	86,1	85,5
		6003,901	0,820	5,577	1161	74,1	75,0	74,5
7	Ziehen	6004,035	0,785	6,081		290,0	93,3	107,3
		6004,169	0,785	6,081		376,9	111,9	139,1
		6004,253	0,785	6,081		420,0	123,6	158,7
		6004,303	0,785	6,081		423,9	130,4	169,5
	Kühlen	6204,303	0,750	6,667		139,9	142,4	141,2
		6404,303	0,750	6,667		117,6	119,5	118,6
		6604,303	0,750	6,667		100,3	101,8	101,0
		6804,303	0,750	6,667		86,8	88,0	87,4
		7004,303	0,750	6,667	1186	76,3	77,3	76,8
8	Ziehen	7004,437	0,715	7,329		314,7	97,8	113,4
		7004,570	0,715	7,329		409,1	118,6	148,6
		7004,589	0,715	7,329		420,0	121,3	153,4
		7004,704	0,715	7,329		447,9	139,2	180,8
	Kühlen	7204,704	0,680	8,110		152,3	154,9	153,6
		7404,704	0,680	8,110		129,3	131,3	130,3
		7604,704	0,680	8,110		111,0	112,6	111,8
		7804,704	0,680	8,110		96,4	97,7	97,1
		8004,704	0,680	8,110	1204	84,9	85,9	85,4
9	Ziehen	8004,838	0,645	9,005		347,4	108,6	125,8
		8004,928	0,645	9,005		420,0	124,3	152,1
		8004,972	0,645	9,005		428,0	132,2	164,6
		8005,106	0,645	9,005		481,0	155,6	199,6
	Kühlen	8205,106	0,610	10,078		170,7	173,3	172,0
		8405,106	0,610	10,078		146,4	148,5	147,4
		8605,106	0,610	10,078		126,6	128,3	127,4
		8805,106	0,610	10,078		110,4	111,9	111,1
		9005,106	0,610	10,078	1221	97,3	98,5	97,9
10	Ziehen	9005,221	0,580	11,138		366,0	120,2	136,5
		9005,275	0,580	11,138		420,0	130,9	154,5
		9005,335	0,580	11,138		440,8	143,2	173,6
		9005,450	0,580	11,138		495,3	165,8	207,2
	Kühlen	9205,450	0,550	12,397		179,5	182,1	180,8
		9405,450	0,550	12,397		155,8	158,0	156,9
		9605,450	0,550	12,397		136,2	137,9	137,0
		9805,450	0,550	12,397		119,8	121,3	120,6
		10005,450	0,550	12,397	1239	106,3	107,5	106,9

Fortsetzung
Tabelle

		z	d	v	σ_F	$\vartheta(z,R)$	$\vartheta(z,0)$	$\bar{\vartheta}(z)$
Zug		mm	mm	m/s	N/mm ²	°C	°C	°C
11	Ziehen	10005,546	0,525	13,595		377,1	127,7	142,8
		10005,581	0,525	13,595		420,0	135,5	155,9
		10005,641	0,525	13,595		447,9	149,2	177,1
		10005,737	0,525	13,595		502,2	170,4	208,4
	Kühlen	10805,737	0,500	15,000		126,0	127,4	126,7
		11605,737	0,500	15,000		83,7	84,4	84,1
		12405,737	0,500	15,000		62,2	62,6	62,4
		13205,737	0,500	15,000		51,3	51,5	51,4
		14005,737	0,500	15,000	1258	45,7	45,8	45,8

Kurzbeschreibung des HP48GX-Programms zur Berechnung von Drahttemperaturen in Zugfolgen:

Das Berechnungsprogramm besteht im wesentlichen aus zwei Programmblöcken, die in den Verzeichnissen „TEMP.W“ und „T4“ abgelegt sind (siehe Anhang C). Mit dem Programmblock „TEMP.W“ werden Eingabe und Aufbereitung der Daten so organisiert, daß die Temperaturberechnung mit „T4“ erfolgen kann; unabhängig davon ist in anderen Zusammenhängen eine Temperaturberechnung über die kleine Eingaberoutine „Input“ im Verzeichnis „T4“ auch direkt aus jenem Verzeichnis heraus möglich. Für Temperaturberechnungen zum Drahtziehen erfolgt die Eingabe im Verzeichnis „TEMP.W“ über „Input“, wobei mittels **Help**-Button über mögliche Eingabeformate (*REAL*, *LIST*, *ARRY*, *ALGEB*) und mittels **Unit**-Button über zu verwendende Maßeinheiten informiert wird. So können z.B. Wärme- und Temperaturleitfähigkeit sowohl als reelle Zahl als auch als algebraisches Formelobjekt (zur Berücksichtigung einer Temperaturabhängigkeit) eingegeben werden. Es sind vorzugeben:

- für die Zugfolge: Drahtdurchmesser $d.0 \hat{=} d_0$, $d. \hat{=} [d_1 d_2 \dots d_{jE}]$
 Ziehgeschwindigkeit (letzter Zug) $v.jE \hat{=} v_{jE}$
 Reibwert $\mu. \hat{=} \mu_0$, $\mu.\theta \hat{=} \mu_\theta$
 Reibwertgrenztemperatur (optional) $\theta\mu \hat{=} \vartheta_\mu$; nur wirksam, wenn der Reibwert als temperaturabhängige Stufenfunktion vorgegeben wird - vgl. (3.1.1.5-7) und Bild 3.1.1-16
- Ziehsteindaten: Ziehholöffnungswinkel $\forall.2\alpha \hat{=} 2\alpha := [2\alpha_1 2\alpha_2 \dots 2\alpha_{jE}]$
 Ziehsteinaußendurchmesser $d.Z \hat{=} D_2$
 Ziehsteinmanteltemperatur $\theta.RZ \hat{=} \tilde{\vartheta}_{R2}$
 mittlere Wärmeleitfähigkeit des Ziehsteins $\lambda.Z \hat{=} \lambda_Z$
 Wärmeübergang Draht-Düse $\alpha D \downarrow Z \hat{=} \alpha$
- zwischen Zügen: Starttemperatur $T0 \hat{=} \vartheta_0$ (am Beginn der Zugfolge)
 Umgebungstemperatur $TU \hat{=} \vartheta_U$
 Wärmeübergang $\alpha. \hat{=} \alpha > 0$ (Draht-Ziehmittel oder Draht-Luft)
 Emissionsgrad $\varepsilon. \hat{=} \varepsilon$
 Ziehsteinabstand $\Delta L.j \hat{=} \Delta L_j$
 Drahtdurchmesser $d.j$; es wird automatisch die Zugfolge vorgeschlagen $d.j = d$.

Wärmeleitfähigkeit λ und Temperaturleitfähigkeit a , ggf. als Funktion der Temperatur vorzugeben
Genauigkeit, mit der die Temperaturen zu berechnen sind,
d.h. $preci \approx \Delta\vartheta$

Die Vorgaben für Reibwert, Ziehholöffnungswinkel, Ziehsteinaußendurchmesser, Ziehsteinmanteltemperatur, Wärmeleitfähigkeit des Ziehsteins, Wärmeübergang Draht-Düse, Umgebungstemperatur, Wärmeübergang Draht-Luft bzw. Draht-Ziehemulsion, Emissionsgrad, Ziehsteinabstand und Drahtdurchmesser lassen sich je Zug spezifizieren, indem sie als Liste { } oder Vektor [] eingegeben werden. Andernfalls, wenn in jedem Zug dieselben Werte verwendet werden, genügt die einmalige Eingabe des betreffenden Wertes. Bei der Vorgabe der Wärmeübergangskoeffizienten „zwischen den Zügen“ sind nur Werte größer Null zugelassen, was realitätsnahen Verhältnissen entspricht; der unrealistische Spezialfall $\alpha = 0$ ist in den Formeln (3.1.1.5-4) bis (3.1.1.5-6) zwar mit enthalten, jedoch erst durch entsprechende Grenzwertbildung lassen sich hieraus numerisch brauchbare Formeln gewinnen, worauf jedoch verzichtet wurde.

Bei der Unterteilung der Drahtstrecken zwischen je zwei Zügen in mehrere Drahtabschnitte, z.B. zur Berücksichtigung unterschiedlicher Wärmeübergangsverhältnisse, muß aus programmtechnischen Gründen beachtet werden, daß die Anzahl der abgelegten Umgebungstemperaturen, Wärmeübergangskoeffizienten bzw. Emissionsgrade jeweils mit der Anzahl der (gleichen) Drahtdurchmesser übereinstimmt - der zunächst mit der Zugfolge überschriebene d_j -Vektor ist entsprechend zu ergänzen.

Die Temperaturberechnung hat in jedem Falle bei allen z -Werten $z = L_j$ zu erfolgen, weshalb die z -Variable in der Routine „&L&z“ zunächst mit den L_j -Werten überschrieben wird. Weitere z -Werte können auf Abfrage hinzugefügt werden, ggf. unter Nutzung der durch **z..**-Button aktivierbaren Routine „**zExpand**“, womit sich Umformzone und Abschnitte zwischen den Zügen noch einmal in äquidistante Unterabschnitte unterteilen lassen.

[Anmerkung: Die z -Werte müssen in jedem Falle alle L_j -Werte exakt enthalten, da eine Reihe interner Abfragen auf dem Vergleich von z - und L_j -Werten beruht. Aus demselben Grunde darf auch die Stellenzahl dieser z - bzw. L_j -Werte, festgelegt durch Rundung auf sechs Stellen nach dem Komma (6 RND am Ende der Programme „&L&z“ und „zExpand“), nicht einseitig geändert werden.]

Die Reibungsbedingungen im Ziehhol lassen sich berücksichtigen als konstanter oder linear temperaturabhängiger Reibwert, indem die Koeffizienten des Ansatzes $\mu := \mu_0 + \mu_g \cdot \vartheta_W$ als einzeiliger Vektor bzw. im Falle einer Stufenfunktion

$$\mu := \begin{cases} \mu_{01} + \mu_{g1} \cdot \vartheta_W & \text{für } \vartheta_W \leq \vartheta_\mu \\ \mu_{02} + \mu_{g2} \cdot \vartheta_W & \text{für } \vartheta_W > \vartheta_\mu \end{cases} \quad (\text{B3.1.1.5.3-1})$$

als zweizeilige Matrix vorgegeben werden; überschreitet die Wirkflächentemperatur ϑ_W im Laufe der Rechnung eine z.B. schmiermittelbedingte Grenztemperatur ϑ_μ , so wechselt das Programm die entsprechenden Koeffizienten aus, nachdem es in der Routine „**θμ?**“ des Verzeichnisses „**T4**“ die z -Koordinate, bei der die Oberflächentemperatur die Grenztemperatur ϑ_μ überschreitet, iterativ mit dem HP48-internen Solverbefehl *ROOT* bestimmt hat.

Für die als gerade Kreiskegel angenommenen Umformzonen werden im Unterprogramm „**d&vq**“ die betreffenden Durchmesser und Geschwindigkeiten der thermisch äquivalenten Ersatzzylinder berechnet. In diesem Spezialfall geradliniger Berandung erhält man aus (3.1.1.2-5) den Ersatzdurchmesser eines j-ten Zuges zu $d_j^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{d_{j-1}^2 + d_{j-1} \cdot d_j + d_j^2}$, der sich für kleinere Querschnittsabnahmen nur sehr wenig vom mittleren Durchmesser $\tilde{d}_j = \frac{1}{2}(d_{j-1} + d_j)$ unterscheidet. Die entsprechenden Geschwindigkeiten werden mit $v_j^* = v_{j-1} \cdot \left(\frac{d_{j-1}}{d_j^*}\right)^2$ gebildet.

Im Programmteil „**&αF**“ werden zur Berücksichtigung der thermischen Draht-Ziehdufen-Wechselwirkung gemäß der Beziehungen (3.1.1.4-8) zunächst die normal- bzw. fließspannungsfreien Anteile von Randquellen $q \cdot RF := (\mu_0 + \mu_g \cdot \tilde{\vartheta}_{R2}) \cdot \frac{\tilde{v}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z}\right)$ und Wärmeübergang $\alpha F := \frac{\mu_g \cdot \tilde{v}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z}\right)$ gebildet. Die Vorgabe der Fließspannung wird durch

die Prozedur „**σInp**“ realisiert, indem entweder Einzelwerteingabe je Zug erfolgt oder indem eine Funktion vorgegeben wird, die vom Umformgrad bzw. allgemeiner von Umformgrad, Umformgeschwindigkeit und Umformperatur abhängen kann. Im Falle der Verwendung eines temperaturabhängigen Ansatzes wird die Fließspannung, ausgelöst vom Programm „**Loop**“ im Verzeichnisses „**T4**“, iterativ in Abhängigkeit der berechneten Temperaturverhältnisse aktualisiert. Bei Verwendung temperaturabhängiger Stoffwerte erfolgt auf die gleiche Weise deren Anpassung; in diesem Falle realisiert die am Anfang des Hauptprogramms „**Hp**“ stehende Routine „**Ia&λ**“ zunächst die symbolische Integration von Temperatur- und Wärmeleitfähigkeit $Ia(\vartheta) := \int a(\vartheta) d\vartheta$ und $I\lambda(\vartheta) := \int \lambda(\vartheta) d\vartheta$, so daß dann damit in der Prozedur „**Loop**“ integrale Stoffmittelwerte $aq := \frac{Ia(\bar{\vartheta}(z)) - Ia(\bar{\vartheta}(L_{j-1}))}{\bar{\vartheta}(z) - \bar{\vartheta}(L_{j-1})}$, $\lambda q := \frac{I\lambda(\bar{\vartheta}(z)) - I\lambda(\bar{\vartheta}(L_{j-1}))}{\bar{\vartheta}(z) - \bar{\vartheta}(L_{j-1})}$

gebildet und iterativ in der *DO-UNTIL*-Anweisung fortlaufend solange aktualisiert werden, bis die Änderung der radial gemittelten Temperatur $\bar{\vartheta}(z)$ eine vorgegebene Schranke - im vorliegenden Programm gleich „ $10 \cdot preci$ “ gesetzt - erreicht bzw. unterschritten hat (mit dem vorzugebenden Parameter „*preci*“ wird die Rechengenauigkeit gesteuert, wobei für den einseitigen Temperaturfehler etwa $\Delta\vartheta \approx preci$ gilt).

Die modifizierten Werte für Wärmeübergang und Randquellen entsprechend einer Randbedingung 3. Art werden (vereinfachend mit $q_{R0} := \mu_0 \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{\sigma}_F$ und $q_{Rg} := \mu_g \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{\sigma}_F$) gebildet zu:

$$\alpha := \alpha_{DZ} - \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z}\right) \cdot \frac{q_{Rg}}{2} \quad (B3.1.1.5.3-2)$$

$$q_R := \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z}\right) \cdot (q_{R0} + q_{Rg} \cdot \tilde{\vartheta}_{R2}). \quad (B3.1.1.5.3-3)$$

[*Anmerkung*: Die Randquelle q_R ergibt sich aus den Beziehungen (3.1.1.4-8) durch Randfunktionsvergleich $\lambda_D \cdot r_{DZ} := \alpha_{DZ} \cdot \tilde{\vartheta}_{R2} + \left(1 + \frac{\alpha_{DZ}}{k_Z}\right) \cdot \frac{q_{R0}}{2} \stackrel{!}{=} \alpha \cdot \vartheta_U + q_R$, wenn als neuer Wärmeübergang α nach (B3.1.1.5.3-2) eingesetzt wird und als Umgebungstemperatur z.B. die mittlere Ziehring-Außenwandtemperatur $\vartheta_U := \tilde{\vartheta}_{R2}$ verwendet wird; für ϑ_U könnte auch eine

beliebig andere Temperatur herangezogen werden, ohne daß sich dadurch an den Temperaturverhältnissen der Randwertaufgabe etwas ändern würde: die Randquellen q_R gleichen wegen der Konstanz der Randfunktion \mathcal{R}_{DZ} eine solche Änderung exakt aus.]

Die Temperaturberechnung selbst basiert auf den Formeln (3.1.1.5-4) bis (3.1.1.5-6), so daß sich mit dem Programm „**Tvz**“ im Verzeichnis „**T4**“ die folgenden Temperaturen berechnen lassen:

- Drahtoberflächentemperatur $T_R \hat{=} \mathcal{G}_R(z)$
- Drahtachsenteperatur $T \hat{=} \mathcal{G}(z,0)$ (ggf. auch für andere Werte $r \in \langle 0, R \rangle$)
- über den Drahtquerschnitt gemittelte Temperatur $T_Q \hat{=} \bar{\mathcal{G}}(z)$
- nach Abfrage durch „**Tqq?**“ auf Wunsch auch die kalorische Temperatur $T_{QQ} \hat{=} \tilde{\mathcal{G}}(z)$, gemittelt über ein Volumenteil des aktuellen j -ten Drahtabschnitts von $z = L_{j-1}$ bis $z \leq L_j$, wobei in „**Tvz**“ die Programmteile „**Tvz1**“ und „**Tvz2**“ aufgerufen werden.

Die Eigenwertberechnung nach den Formeln des Kapitels A2.3.2.7 wird mit dem Unterprogramm „**μ**“ vorgenommen. Um Rechenzeit zu sparen, werden die Eigenwerte lediglich dann neu berechnet bzw. ergänzt, wenn ein neuer Parameter hR vorliegt oder wenn die Anzahl der bereits abgespeicherten Eigenwerte auf Grund der Konvergenzverhältnisse nicht mehr ausreicht.

Die *BESSEL*- und *NEUMANN*-Funktionen nullter und erster Ordnung werden in den Programmen „**J0**“, „**J1**“, „**N0**“ und „**N1**“ (Directory „**FUNCTIONS**“) realisiert. Aus Rechenzeitgründen wurde dabei auf die Approximation durch gebrochen rationale Polynome zurückgegriffen, wie sie in [HAR 68] dargestellt wird (Index-Nr.: 5843, 6042, 6239, 6440, 6544, 6745, 6944, 7145); es wird hiermit eine Genauigkeit von elf gültigen Ziffern gewährleistet.

[*Anmerkung:* Die Programme der *BESSEL*-Funktionen sind für reelle, die der *NEUMANN*-Funktionen für reelle positive Argumente zugelassen. Wird den Funktionen ein ungültiges Argument, z.B. auch '?' angeboten, so zeigt das Display eine knappe Erläuterung der Funktion sowie einen charakteristischen Ausschnitt des Graphen (in der im Programmanhang angegebenen Programmdokumentation wurde aus Platzgründen auf die Wiedergabe der umfangreichen Ziffernkolonnen im Anschluß an *GROB* (*Graphik-Objekt*) verzichtet.]

Die Reihensummierung in der unbestimmten *DO-UNTIL*-Schleife des Programms „**Tvz**“ wird solange fortgesetzt, bis das in „**Test**“ formulierte Abbruchkriterium erfüllt ist. Das heißt, die berechnete Partialsumme(n) wird als Ergebnis akzeptiert, wenn der Betrag von mindestens drei Reihengliedern die vorgegebene Genauigkeitsschranke „*preci*“ unterschritten hat.

Während der Berechnungen informiert die Routine „**Disp2**“ und ggf. „**Disp5**“ fortlaufend über den Berechnungsfortgang. Die Ergebnisausgabe schließlich erfolgt mit „**Output**“ über eine Datenmatrix (ΣDAT), die in der Matrix-Writer-Umgebung bequem gelesen werden kann. Über Menütasten lassen sich weitere Parameter - vorgegebene wie berechnete - abrufen, ebenso kann man sich mittels **Unit**- und **Help**-Button über verwendete Maßeinheiten und Aufbau der Temperaturmatrix informieren.

[*Anmerkung:* Die Berechnung der elfzügigen Zugfolge im ausgeführten Beispiel dauert mit dem Original-*HP48GX* ca. zwei Stunden. Mit einer *HP48*-Emulation für PC (*Pentium 133, Windows NT*) wird lediglich etwa ein Fünftel dieser Zeit benötigt. Die *HP48/49*-Emulationssoftware wurde von Sebastien Carlier und Christoph Gießelink erstellt. Sie läßt sich im Internet von der Hewlett-Packard-WebSite <http://www.hp48.org/hp49/pc/emulators> kostenlos downloaden.]

Zu Kapitel 3.1.2.1: Drahtkühlung im Kühlrohr

Die Kühlrohrlänge läßt sich für vorgegebene Drahttemperaturabsenkung $\Delta\vartheta_K = \vartheta_K - \vartheta_W$ besonders einfach und, solange die Bedingung $\frac{v \cdot d}{a} \gg 1$ eingehalten wird, hinreichend genau z.B. durch Formel (A2.3.3.2-3.5) abschätzen. Wenn die Kühlzeit mit $t_K = l_K/v$, die Wassertemperatur mit ϑ_W und die Drahttemperatur am Kühlrohranfang und Kühlrohrende mit $\vartheta_0 = \vartheta(z=0)$ und $\vartheta_K = \vartheta(t=t_K)$ bzw. $\vartheta_K = \vartheta(z=l_K)$ bezeichnet werden, so ergibt sich eine erforderliche Kühlrohrlänge von

$$l_K \approx \frac{\rho c d v}{4 \alpha} \cdot \ln \frac{\vartheta_0 - \vartheta_W}{\vartheta_K - \vartheta_W}. \tag{B3.1.2.1-1}$$

Zum selben Ergebnis führen auch die Formeln von [SAU 83, (18)] bzw. [KEU 84, (15)], wenn beachtet wird, daß für $\frac{v \cdot d}{a} \gg 1$ in guter Näherung Wärmeleitung in Achsrichtung vernachlässigt

werden kann, womit wiederum $\left[\sqrt{(v/2a)^2 + 4\alpha/\lambda d} - v/2a \right]^{-1} \approx \frac{\lambda d}{4a\alpha} \cdot v = \frac{\rho c d}{4\alpha} \cdot v$ gilt.

Allerdings ändern sich die Wärmeübertragungsverhältnisse entlang der Kühlrohrlänge i.allg. gravierend [PAW 85], so daß in den Formeln mit konstantem Wärmeübergangskoeffizienten ein repräsentativer Mittelwert $\alpha = \bar{\alpha} := \frac{1}{l_K} \cdot \int_0^{l_K} \alpha(z) \cdot dz$ einzusetzen ist. Sollen die lokalen Ab-

hängigkeiten des Wärmeübergangs genauer berücksichtigt werden, so kann bei Vorliegen wärmetechnisch dünnwandiger Verhältnisse sowie bei Vernachlässigung axialer Wärmeleitung entsprechend den Hinweisen des Kapitels A2.3.3.2.4 vorgegangen werden. Noch realitätsnähere Berechnungen lassen sich mit analytischen Lösungen erreichen, wie sie mit den in Kapitel A2.4.3 angegebenen Verfahren auch für den bewegten Vollzylinder bzw. Draht herzuleiten sind, wofür stellvertretend auf Lösung (A2.5-2) mit (A2.5-4) verwiesen sei.

Zu Kapitel 3.1.2.2.5.2: Drahtkühlung auf der Ziehtrommel

Vorgabewerte zur Abschätzung der Ziehtrommelkühlung:

zu Tabellen 1-3:		Trommel 2		Trommel 11		Trommel 12	
Draht-Ziehstein							
ρ	[kg/m ³]	7800		7800		7800	
c	[J/(kgK)]	500		500		500	
λ_D	[W/(m K)]	50		50		50	
ϑ_{DZA}	[°C]	20		20		20	
d_0, d_1	[mm]	4,95	4,45	1,96	1,74	1,74	1,6
σ_{Fm}	[N/mm ²]	1268		1934		2039	
μ		0,07		0,05		0,05	
$2\tilde{\alpha}$	[°]	12		12		12	
D_{Z2}	[mm]	52		52		52	
λ_Z	[W/(m K)]	26		26		26	
Draht auf Trommel							
v_{Draht}	[m/s]	0,9	1,43	6	9,3	7,1	11,1
Draht-Ø	[mm]	4,45		1,74		1,6	
Windungsanzahl w		102		50		5/15	
α_{DU}	[W/(m ² K)]	20		20		20	
ϑ_{UDU}	[°C]	20		20		20	
Ziehtrommel							
L	[mm]	600		350		350	
D_1	[mm]	568		568		568	
D_2	[mm]	594		594		594	
λ_T	[W/(m K)]	45		45		45	
α_{UT1} - Berechnung							
\dot{V}	[m ³ /h]	1		1		1 (2)	
ϑ_{Wasser}	[°C]	18		18		18	
s	[mm]	10		10		10	
l_S	[mm]	180		180		180	
$\vartheta_{UT1} = \vartheta_{Wasser}$	[°C]	18		18		18	
α_{UT2}	[W/(m ² K)]	40		40		40	
ϑ_{UT2}	[°C]	20		20		20	
Draht-Trommel							
α_K	[W/(m ² K)]	10		10		10	
α_L	[W/(m ² K)]	500000		500000		500000	
$\varepsilon_D, \varepsilon_T$		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
E_D, E_T		210000	210000	210000	210000	210000	210000
v_D, v_T		0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
ρ_L - Berechnung		mit F_{ZG} nach SIEBEL					
F_G	[N]	200		200		200	
$\sigma_{Fm}, d_0, d_1, \mu, 2\tilde{\alpha}$		siehe oben		siehe oben		siehe oben	
Führungszone							
l_Z	[mm]	$d_1/2$		$d_1/2$		$d_1/2$	
γ	[-]	2		2		2	
μ_T		0,06		0,06		0,06	

Zu Kapitel 3.2.2: Beispiel Konduktives Drahterwärmen im Durchlauf

Die Temperaturberechnungen zur Beispielaufgabe wurden mit dem iterativen Verfahren, wie es in Kapitel A2.3.3.2.3.2 beschrieben ist, vorgenommen. Die Berechnung der volumenbezogenen Wärmequellichte erfolgt drahtabschnittsweise, um die thermischen und elektrischen Stoffwerte infolge Temperaturänderung entlang der Wärmebehandlungsstrecke entsprechend aktualisieren zu können. In einem Leiter mit veränderlichem Querschnitt $A = A(z)$ wird in einem Volumenelement $dV = A(z) \cdot dz$ das Leistungsinkrement $dP = I \cdot dU = (U/R)^2 \cdot dR$ in Wärme umgesetzt, woraus die Wärmequellichte zu $q_V = dP/dV$ resultiert. Der elektrische Widerstand eines Volumenelements ändert sich infolge Temperaturänderung entlang des Leiters $\mathcal{R} = \mathcal{R}(z)$ ebenfalls. Hierzu wird eine Materialkenngröße, der temperaturabhängige spezifische elektrische Widerstand $\rho_\beta = \rho_\beta(\mathcal{R})$, herangezogen. Die differentielle Widerstandsänderung eines Volumenelements läßt sich dann durch $dR = \frac{\rho_\beta(z)}{A(z)} \cdot dz$ ausdrücken. Die lokale Wärmequellichte schließlich ergibt sich

hiermit explizit zu $q_V(z) = \left(\frac{U}{A(z) \cdot R} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z)$. Sie ist konkret berechenbar, wenn bei vorausgesetzter Kenntnis von Querschnitts- und Temperaturverlauf des Leiters die an der betrachteten Leiterstrecke anliegende elektrische Spannung U sowie der Gesamtwiderstand R bekannt sind.

Diese allgemeinen Ergebnisse lassen sich durch einige Zusatzbetrachtungen auf die Verhältnisse in elektrischen Widerstand-Durchlaufglühen spezialisieren. Hierbei ist die elektrische Auslegung der Wärmebehandlungseinrichtung zu beachten. Häufig werden das **Zwei-Strecken-** und das **Drei-Strecken-Prinzip** realisiert. Die entsprechenden elektrischen Ersatzschaltbilder zur Erfassung der elektrischen Verhältnisse zeigt das folgende Bild.

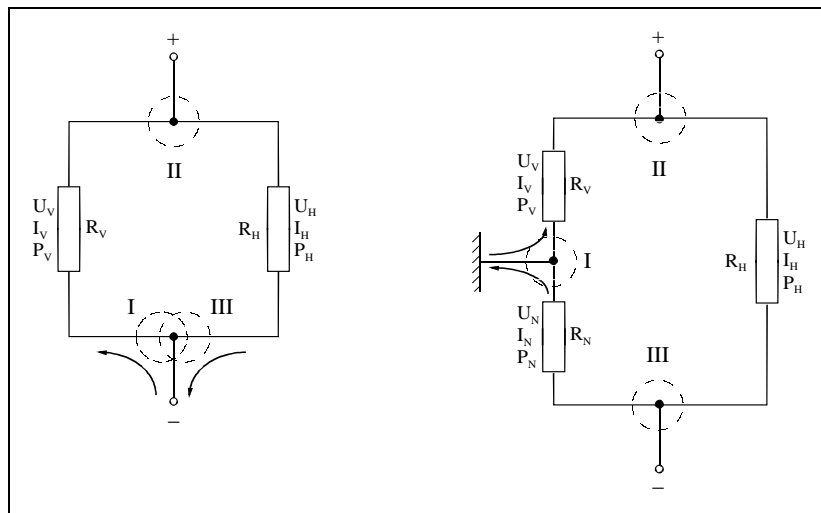


Bild B3.2-1: Elektrische Ersatzschaltung für Zwei- (links) und Dreistreckenprinzip (römische Ziffern geben die Reihenfolge der Kontaktrollen an)

Beim Zweistreckenprinzip sind Vor- und Hauptheizstrecke parallel geschaltet, beim Dreistreckenprinzip liegen Vor- und Nachheizstrecke in Reihe, jedoch parallel zur Hauptheizstrecke. Damit lassen sich die Wärmequellichten für jede dieser Strecken bei eingespeister Gesamtspannung U_{ges} angeben.

Zweistreckenprinzip:

$$\mathbf{q}_V(z) = \left(\frac{U_{ges}}{A(z) \cdot R_V} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z), \quad (\text{B3.2.2-1})$$

$$\mathbf{q}_H(z) = \left(\frac{U_{ges}}{A(z) \cdot R_H} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z) \quad (\text{B3.2.2-2})$$

Dreistreckenprinzip:

$$\mathbf{q}_V(z) = \left(\frac{U_{ges}}{A(z) \cdot (R_V + R_N)} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z), \quad (\text{B3.2.2-3})$$

$$\mathbf{q}_H(z) = \left(\frac{U_{ges}}{A(z) \cdot R_H} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z), \quad (\text{B3.2.2-4})$$

$$\mathbf{q}_N(z) = \left(\frac{U_{ges}}{A(z) \cdot (R_V + R_N)} \right)^2 \cdot \rho_\beta(z), \quad (\text{B3.2.2-5})$$

wobei sich die Widerstände der Teilstrecken $l := l_V, l_H, l_N$ entsprechend

$$R_l = \int_{(l)} dR = \int_{(l)} \frac{\rho_\beta(z)}{A(z)} \cdot dz \quad (\text{B3.2.2-6})$$

berechnen lassen.

Damit ist das Problem als im Prinzip gelöst anzusehen, jedoch lassen sich noch sinnvolle Vereinfachungen vornehmen. So sind die Durchmesseränderungen beim Ziehglühen so gering, daß sie außer Betracht bleiben können, d.h. $A(z) = A = konst.$ Weiterhin wird man zur Verringerung des Rechenaufwands nicht unbedingt mit durchgängig z-abhängigen Wärmequell-dichten arbeiten wollen, zumal diese Abhängigkeit zunächst nicht einmal bekannt ist und erst im Verlaufe der iterativen Berechnung des Temperaturverlaufs gewonnen und verbessert wird. Es ist deshalb vorteilhaft, die zwei bzw. drei Heizstrecken in Abschnitte zu unterteilen und durch Mittelwertbildung das Problem teilweise zu diskretisieren. Dann läßt sich z.B. in einem i-ten Abschnitt statt $\rho_\beta(z)$ mit einem auf der kalorischen Temperatur $\tilde{\vartheta}_i$ beruhenden spezifischen

Widerstandsmittelwert $\tilde{\rho}_{\beta_i} \approx \rho_\beta(\tilde{\vartheta}_i)$ rechnen (der integrale Mittelwert $\tilde{\rho}_{\beta_i} = \frac{l}{\Delta l_i} \cdot \int \rho_\beta(\vartheta(z)) \cdot dz$

wäre hier nicht so geeignet). Für den Gesamtwiderstand einer Teilstrecke wird analog $R_l = \frac{l}{A} \tilde{\rho}_{\beta_l}$

mit $\tilde{\rho}_{\beta_l} \approx \rho_\beta(\tilde{\vartheta}_l)$ verwendet.

Auf dieser Grundlage und unter Verwendung des Iterationsverfahrens für wärmetechnisch dünnwandiges Gut (Kapitel A2.3.3.2.3.2) ist ein Rechenprogramm für HP48 entwickelt worden, mit dem auch die Berechnungen zum vorliegenden Beispiel vorgenommen wurden. Verwendete Vorgaben und Ergebnisse sind nachfolgend zusammengestellt.

d [mm]	D [m]	l_V [m]	l_H [m]	l_N [m]
0,5	0,12	0,918	0,515	0,600

D: eff. Kontaktrollendurchmesser

Die temperaturabhängigen Stoffwerte wurden durch Polynome approximiert:

$$a(\vartheta) := \sum_{k=0}^5 a_k \cdot \vartheta^k \text{ in [m}^2/\text{s], wenn } \vartheta \text{ in [}^\circ\text{C] eingesetzt wird;}$$

$$\text{mit } a_0 = 3,53764 \cdot 10^{-5}; a_1 = 7,48949 \cdot 10^{-8}; a_2 = -2,45317 \cdot 10^{-10}; \\ a_3 = 3,17831 \cdot 10^{-13}; a_4 = -1,81698 \cdot 10^{-16}; a_5 = 3,75019 \cdot 10^{-20}$$

$$\lambda(\vartheta) := \sum_{k=0}^5 \lambda_k \cdot \vartheta^k \text{ in [W/(m}\cdot\text{K)], wenn } \vartheta \text{ in [}^\circ\text{C] eingesetzt wird;}$$

$$\text{mit } \lambda_0 = 1,15592 \cdot 10^2; \lambda_1 = 2,23052 \cdot 10^{-1}; \lambda_2 = -6,20794 \cdot 10^{-4} \\ \lambda_3 = 8,60589 \cdot 10^{-7}; \lambda_4 = -5,83454 \cdot 10^{-10}; \lambda_5 = 1,53979 \cdot 10^{-13}$$

In den benutzten Formeln für wärmetechnisch dünnwandiges Gut tritt nur das Produkt aus Dichte ρ und spezifischer Wärmekapazität c auf. Es läßt sich jedoch unmittelbar aus Temperaturleitfähigkeit a und Wärmeleitfähigkeit λ entsprechend $\rho c := \lambda/a$ bilden. Für den spezifischen elektrischen Widerstand wurde verwendet:

$$\rho_{\beta}(\vartheta) := \sum_{k=0}^3 \rho_{\beta_k} \cdot \vartheta^k \text{ in } [\Omega \cdot \text{m}], \text{ wenn } \vartheta \text{ in [}^\circ\text{C] eingesetzt wird;}$$

$$\text{mit } \rho_{\beta_0} = 6,40000 \cdot 10^{-8}; \rho_{\beta_1} = 4,44803 \cdot 10^{-12}; \rho_{\beta_2} = 1,17567 \cdot 10^{-13}; \\ \rho_{\beta_3} = -4,09302 \cdot 10^{-17}$$

Tabelle zum kombinierten Ziehen und Durchlauf-Widerstandsglügen:

		Zieh- bzw. Drahtgeschwindigkeit v													
		1 m/s				5 m/s				10 m/s					
z	ϑ_U	ε	t	α	\bar{g}	\tilde{g}	t	α	\bar{g}	\tilde{g}	t	α	\bar{g}	\tilde{g}	
[m]	[°C]	[-]	[ms]	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$	[°C]	[°C]	[ms]	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$	[°C]	[°C]	[ms]	$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$	[°C]	[°C]	
0,000	20	-	0	-	20	20	0	-	20	20	0	-	20	20	
0,180	30	0,1	180	70	99	60	36	140	84	52	18	180	78	49	
0,370	30	0,1	370	70	182	140	74	140	153	119	37	180	139	109	
0,550	30	0,1	550	70	261	221	110	140	219	186	55	180	199	169	
0,730	30	0,1	730	70	341	301	146	140	286	253	73	180	259	229	
0,918	30	0,1	918	70	427	384	184	140	359	323	92	180	324	292	
1,106	50	0,2	1106	250	388	407	221	500	345	352	111	550	317	321	
1,210	90	0,3	1210	1700	490	442	242	3500	460	404	121	3900	436	377	
1,310	90	0,3	1310	1700	572	534	262	3500	567	515	131	3900	551	494	
1,420	90	0,4	1420	1700	650	614	284	3500	685	628	142	3900	684	619	
1,520	90	0,4	1520	1700	713	684	304	3500	795	741	152	3900	813	750	
1,561	90	0,5	1561	1700	736	725	312	3500	841	818	156	3900	870	842	
1,621	30	0,2	1621	16000	159	348	324	32000	464	627	162	44000	595	720	
1,650	30	0,2	1650	15000	74	109	330	31000	317	385	165	43000	459	524	
1,700	30	0,2	1700	15000	47	57	340	31000	180	240	170	43000	306	376	
1,750	30	0,2	1750	15000	43	44	350	31000	113	143	175	43000	209	253	
1,810	30	0,2	1810	15000	42	42	362	30000	79	94	181	42000	142	172	
1,930	30	0,2	1930	14000	43	43	386	27000	62	68	193	38000	91	112	
2,050	30	0,2	2050	12000	45	44	410	24000	61	61	205	34000	77	83	
2,170	30	0,2	2170	9000	50	48	434	18000	68	65	217	25000	80	79	
2,290	30	0,2	2290	8000	52	51	458	16000	73	71	229	22000	85	83	
2,410	30	0,2	2410	6000	59	56	482	12000	82	78	241	17000	94	90	

Das Schmelzintervall von CuZn36 beträgt 902 bis 920°C.

Die je Drahtgeschwindigkeit verwendeten Spannungen und die in den einzelnen Heizstrecken umgesetzten elektrischen Leistungsanteile sowie die Gesamtleistung (ohne Berücksichtigung von Wirkungsgradverlusten) betragen:

v [m/s]	U_{ges} [V]	P_V [W]	P_H [W]	P_N [W]	P_{ges} [W]
1	15,4	282	942	169	1393
5	30,8	1119	3531	700	5350
10	41,4	1986	6308	1288	9582

Anmerkung zum konvektiven Wärmeübergang bei Wärmebehandlungsprozessen:

Für die quantitative Bestimmung des konvektiven Wärmeübergangs zwischen axial bewegtem Draht und längs vorbeistreichender Luft bzw. Fluid (ohne Phasenübergang) können z.B. die Angaben in [VDI 94, *Ge1-4*] oder in [SUC 76] herangezogen werden. Aus [SUC 76] ergibt sich zusammenfassend:

$$Nu \approx 0,4 \cdot \begin{cases} 2 \cdot \left(\ln \frac{8}{Pe} - 0,577 \right)^{-1} & \text{für } 0 \leq Pe < 7,3 \cdot 10^{-5} \\ Nu_0 \cdot \left(1 + \frac{0,013 \sqrt{Tu} \cdot Re^2 \cdot \sqrt[10]{Tu}}{3080 + \sqrt[4]{Tu} \cdot Re^2 \cdot \sqrt[10]{Tu} - 1/2} \right) & \text{für } Pe \geq 7,3 \cdot 10^{-5} \end{cases} \quad (B3.2.2-7.1)$$

mit der PECKET-Zahl $Pe = Re \cdot Pr$ und mit der $NU_{\beta ELT}$ -Zahl für turbulenzfreie Strömung

$$Nu_0 = 0,462 \cdot Pe^{0,1} + \frac{2,5}{\left(1 + \left(1,25 \cdot \sqrt[6]{Pr} \right)^{5/2} \right)^{2/5}} \cdot \frac{Pe^{0,7}}{1 + 2,79 \cdot Pe^{0,2}} \quad (B3.2.2-7.2)$$

Dabei sind $NU_{\beta ELT}$ -, $REYNOLDS$ - und $PRANDTL$ -Zahl bekanntlich durch $Nu = (\alpha \cdot d) / \lambda_f$, $Re \equiv (\omega_{\infty} \cdot d \cdot \rho_f) / \eta_f$ und $Pr \equiv (c_f \cdot \eta_f) / \lambda_f = v_f / a_f$ und damit die PECKET-Zahl durch $Pe = (\omega_{\infty} \cdot d) / a_f$ festgelegt; der Index f bei den Stoffgrößen weist auf deren Bezug, nämlich auf das den Draht umgebende Fluid, speziell also auf die Eigenschaften der Ofenatmosphäre bei deren mittlerer Temperatur hin. Als Strömungsgeschwindigkeit gilt im vorliegenden Zusammenhang die Drahtdurchlaufgeschwindigkeit, d.h., $\omega_{\infty} = v$. Der Geltungsbereich von (B3.2.2-7) erstreckt sich dann laut [SUC 76] auf $0 \leq Pr \leq \infty$ und $0 < Re \leq Re_{krit} = 3,78 \cdot 10^5 \cdot e^{-6 \sqrt{Tu}}$ für $0 \leq Tu < 0,2$. Der Turbulenzgrad Tu , der als Quadratwurzel aus dem Quotienten von zeitlich mittlerem Schwankungsquadrat der Geschwindigkeitsfluktuation der Ofenatmosphäre zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit zwischen Ofenatmosphäre und Draht definiert ist, wird beim Drahterwärmen im Durchlaufofen vorzugsweise im Bereich $0 \leq Tu < 0,01$ anzunehmen sein.

Zu Kapitel 3.3.1.1: Anmerkungen zu den Diffusionsaufgaben Lamelle, Faser und Kugel

a) Lamelle

Das Lösen des Anfangs-Randwertproblems (3.3.1.1-1) - (3.3.1.1-3) soll nach der Methode von *FOURIER* vorgenommen werden, d.h., durch Separation der Variablen und Anwendung des Superpositionsprinzips; vgl. z.B. [ZEI 96, Kap. 1.13.2.1], [LEW 52], [TOL 55, Kap. X], [TYC 59, Kap. VI, §2-1], [KNE 61, Band 2, Kap. 1.4] oder [SMI 68, Kap. VII]. Für die Konzentrationsverteilung $c(t,x)$ wird der Produktansatz $T(t) \cdot X(x)$ gemacht, von dem gefordert wird, den homogenen Teil der Differentialgleichung (3.3.1.1-3) zu erfüllen. D.h., für $\omega = 0$ sollen die Funktionen $T(t)$ und $X(x)$, unter Verwendung der Abkürzungen $\dot{T} \equiv \frac{dT}{dt}$ und $X'' = \frac{d^2X}{dx^2}$, der Gleichung

$$X \cdot \dot{T} = D(t) \cdot T \cdot X'',$$

bzw. nach Trennung der Variablen, der Beziehung

$$\frac{\dot{T}}{D(t) \cdot T} = \frac{X''}{X} = -\eta^2 = konst. \tag{B3.3.1.1-4}$$

genügen. Das aber bedeutet, daß die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{T} + \eta^2 \cdot D(t) \cdot T = 0 \tag{B3.3.1.1-5.1}$$

und

$$X'' + \eta^2 \cdot X = 0 \tag{B3.3.1.1-5.2}$$

zu lösen sind, was vorerst die Ergebnisse

$$T(t) = C \cdot e^{-\eta^2 \cdot \int_0^t D(\tau) \cdot d\tau}, \quad C = T(0) \tag{B3.3.1.1-6.1}$$

und

$$X(x) = A \cdot \sin(\eta \cdot x) + B \cdot \cos(\eta \cdot x) \tag{B3.3.1.1-6.2}$$

liefert.

Nunmehr sollen die Koeffizienten A und B bestimmt werden, wofür die homogenen Teile der Randbedingungen (3.3.1.1-2) heranzuziehen sind. Mit dem Produktansatz ergibt sich:

$$X'(0) - k_0 \cdot X(0) = 0 \tag{B3.3.1.1-7.1}$$

$$X'(L) + k_L \cdot X(L) = 0. \tag{B3.3.1.1-7.2}$$

Einführen der allgemeinen Lösung (B3.3.1.1-6.2) in (B3.3.1.1-7) führt auf ein Gleichungssystem, das nur für verschwindende Systemdeterminante nichttriviale Lösungen besitzt, d.h., nur für $\eta = \eta_n = v_n/L$ existieren die nichttrivialen Lösungen $A = A_n = 1$ und $B = B_n = \frac{v_n}{k_0 L}$, wobei die

Eigenwerte v_n die nach steigender Größe geordneten positiven Lösungen der transzendenten Eigenwertgleichung

$$\frac{v_n \cdot (k_0 + k_L)L}{v_n^2 - k_0L \cdot k_L L} = \tan v_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B3.3.1.1-8})$$

sind; sie ist mit Eigenwertgleichung (A2.4.1-17) identisch, so daß auch die Eigenwertbestimmung mit den Formeln (A2.4.2.4-4) und (A2.4.2.4-5) vorzunehmen ist. Damit werden entsprechend (B3.3.1.1-6.2) die zum *STURM-LIOUVILLE*-Problem (B3.3.1.1-5.2), (B3.3.1.1-7) gehörenden Eigenfunktionen

$$X_n(x) = \sin\left(v_n \cdot \frac{x}{L}\right) + \frac{v_n}{k_0L} \cdot \cos\left(v_n \cdot \frac{x}{L}\right) \quad (\text{B3.3.1.1-9})$$

erhalten. Infolge der Orthogonalität des Funktionensystems im $L_2[0, L]$ gilt für je zwei Eigenfunktionen

$$\int_0^L X_n(x) \cdot X_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ f_n^{(N)} & \text{für } m = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } f_n^{(N)} &= \int_0^L X_n^2(x) \cdot dx && (\text{B3.3.1.1-10}) \\ &= L \cdot \left[\frac{1}{k_0L} + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{v_n}{k_0L} \right)^2 \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{k_0 - k_L}{(k_0 + k_L) \cdot v_n} \cdot \sin v_n \cdot \cos v_n \right), \end{aligned}$$

wie leicht nachzuprüfen ist. Durch Linearkombination läßt sich - analog der *DINI*-Reihe (A2.3.1-R1) - eine *FOURIER*-Reihe aufbauen, mit der eine Funktion $f(x)$, die den *DIRICHLET*schen Bedingungen genügt, in $x \in (0, L)$ als

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot X_n(x); && f_n := \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \\ f_n^{(Z)} &:= \int_0^L X_n(\xi) \cdot f(\xi) \cdot d\xi, && f_n^{(N)} \text{ siehe (3.3.1.1-10)} \end{aligned} \quad (\text{B3.3.1.1-11})$$

dargestellt werden kann. Damit aber kann auch für die zum Anfangs-Randwertproblem (B3.3.1.1-1) - (3.3.1.1-3) gesuchte Lösung ein entsprechender *FOURIER*-Reihenansatz gemacht werden:

$$c(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x), \quad T_n(t) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^L X_n(\xi) \cdot c(t, \xi) \cdot d\xi. \quad (\text{B3.3.1.1-12})$$

Das Umformen der *FOURIER*-Koeffizienten durch zweifach partielle Integration, Substituieren mit (3.3.1.1-1) - (3.3.1.1-3) sowie entsprechendes Vereinfachen mit der Eigenwertgleichung (3.3.1.1-8) führt bezüglich dieser *FOURIER*-Koeffizienten schließlich auf eine gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung:

$$\dot{T}_n(t) + p(t) \cdot T_n(t) = q(t) \quad (\text{B3.3.1.1-13})$$

mit dem variablen Koeffizienten

$$p(t) := \left(\frac{v_n}{L} \right)^2 \cdot \mathbf{D}(t) \quad (\text{B3.3.1.1-13.1})$$

und der „Störfunktion“

$$q(t) := \frac{\mathbf{D}(t)}{f_n^{(N)}} \cdot [X(0) \cdot \mathbf{r}_0(t) + X(L) \cdot \mathbf{r}_L(t)] + \omega_n(t) \quad (\text{B3.3.1.1-13.2})$$

sowie den *FOURIER*-Koeffizienten des Quellterms

$$\omega_n(t) := \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^L X_n(\xi) \cdot \omega(t, \xi) \cdot d\xi. \quad (\text{B3.3.1.1-13.3})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist bekanntlich (z.B. [ZEI 96, Kap. 1.12.4.5]) durch

$$T_n(t) = T_n(0) \cdot e^{-\int_0^t p(\tau) \cdot d\tau} + \int_0^t q(\tau) \cdot e^{-\int \tau p(\zeta) \cdot d\zeta} \cdot d\tau \quad (\text{B3.3.1.1-14})$$

$$\text{mit } T_n(0) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^L X_n(\xi) \cdot \mathbf{c}_A(\xi) \cdot d\xi$$

gegeben. Damit aber ist das Anfangs-Randwertproblem (3.3.1.1-1) - (3.3.1.1-3) durch (B3.3.1.1-12) mit (B3.3.1.1-9) und (B3.3.1.1-14) gelöst, wofür in Kap. 3.3.1.1a) die endgültige Form der Lösung angegeben ist.

b) Faser

Das Lösen der Anfangs-Randwertaufgabe (3.3.1.1-17) - (3.3.1.1-19) für den Vollzylinder soll wie bei der Lamelle nach der Methode von *FOURIER* vorgenommen werden, d.h., durch Separation der Variablen und Anwendung des Superpositionsprinzips. Für die Konzentrationsverteilung $\mathbf{c}(t, r)$ werde der Produktansatz $T(t) \cdot Q(r)$ gemacht, von dem zunächst gefordert wird, den homogenen Teil der Differentialgleichung (3.3.1.1-19) zu erfüllen. D.h., für $\omega = 0$ sollen die

Funktionen $T(t)$ und $Q(r)$, unter Verwendung der Abkürzungen $\dot{T} \equiv \frac{\partial T}{\partial t}$ und $Q'' = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}$, der

Gleichung

$$Q \cdot \dot{T} = D \cdot T \cdot \left(Q'' + \frac{1}{r} Q' \right),$$

bzw. nach Trennung der Variablen, der Beziehung

$$\frac{\dot{T}}{D \cdot T} = \frac{Q'' + \frac{1}{r} Q'}{Q} = -\eta^2 = \text{konst.} \quad (\text{B3.3.1.1-20})$$

genügen. Das aber bedeutet, daß zunächst die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{T} + \eta^2 \cdot D \cdot T = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-21.1})$$

und

$$Q'' + \frac{1}{r} Q' + \eta^2 \cdot Q = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-21.2})$$

zu lösen sind, was vorerst die Ergebnisse

$$T(t) = C \cdot e^{-\eta^2 \cdot \int_0^t D(\tau) \cdot d\tau}, \quad C = T(0) \quad (\text{B3.3.1.1-22.1})$$

und

$$Q(r) = A \cdot \mathbf{J}_0(\eta \cdot r) + B \cdot \mathbf{N}_0(\eta \cdot r) \quad (\text{B3.3.1.1-22.2})$$

liefert.

Die Koeffizienten A und B werden unter Verwendung der Symmetriebedingung (3.3.1.1-18.1) und des homogenen Teils der Randbedingungen (3.3.1.1-18.2) ermittelt. Mit dem Produktansatz ergibt sich:

$$Q'(0) = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-23.1})$$

$$Q'(R) + k_R \cdot Q(R) = 0. \quad (\text{B3.3.1.1-23.2})$$

Einführen der allgemeinen Lösung (B3.3.1.1-22.2) in (B3.3.1.1-23) zeigt infolge des Grenzwertes $\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{N}_1(\eta \cdot r) \rightarrow -\infty$ zunächst, daß zur Vermeidung einer Singularität $B = 0$ gelten muß. Aus der zweiten Gleichung folgen dann für endliches A nichttriviale Lösungen nur für $\eta = \eta_n = \mu_n / R$, wobei die Eigenwerte μ_n die nach steigender Größe geordneten positiven Lösungen der transzendenten Eigenwertgleichung

$$k_R R \cdot \mathbf{J}_0(\mu_n) - \mu_n \cdot \mathbf{J}_1(\mu_n) = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-24})$$

sind; sie ist mit Eigenwertgleichung (A2.3.1-10) völlig identisch, so daß auch die Eigenwertbestimmung mit den Formeln (A2.3.2.7-1) und (A2.3.2.7-2) vorzunehmen ist. Damit werden entsprechend (B3.3.1.1-22.2) die zum *STURM-LIOUVILLE*-Problem (B3.3.1.1-21.2), (B3.3.1.1-23) gehörenden Eigenfunktionen

$$Q_n(r) = \mathbf{J}_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \quad (\text{B3.3.1.1-25})$$

erhalten. Infolge der Orthogonalität des Funktionensystems gilt für je zwei Eigenfunktionen

$$\int_0^R \rho \cdot Q_n(\rho) \cdot Q_m(\rho) \cdot d\rho = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ f_n^{(N)} & \text{für } m = n \end{cases}$$

mit $f_n^{(N)} = \int_0^R \rho \cdot Q_n^2(\rho) \cdot d\rho \equiv$ siehe (A2.3.1-R1) . (B3.3.1.1-26)

Damit läßt sich durch Linearkombination wieder eine *DINI*-Reihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot Q_n(r)$

aufbauen, die mit (A2.3.1-R1) völlig identisch ist. Damit aber läßt sich auch für die zum Anfangsrandwertproblem (3.3.1.1-17) - (3.3.1.1-19) gesuchte Lösung ein entsprechender *DINI*-Reihenansatz machen:

$$c(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot Q_n(r), \quad T_n(t) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho \cdot Q_n(\rho) \cdot c(t, \rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-27})$$

Das Umformen der *DINI*-Koeffizienten durch zweifach partielle Integration, Substituieren mit (3.3.1.1-17) - (3.3.1.1-19) sowie entsprechendes Vereinfachen mit der Eigenwertgleichung (B3.3.1.1-24) führt schließlich auf eine gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung bezüglich dieser *DINI*-Koeffizienten:

$$\dot{T}_n(t) + p(t) \cdot T_n(t) = q(t) \quad (\text{B3.3.1.1-28})$$

mit dem variablen Koeffizienten

$$p(t) := \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2 \cdot D(t) \quad (\text{B3.3.1.1-28.1})$$

und der „Störfunktion“

$$q(t) := \frac{D(t)}{f_n^{(N)}} \cdot R \cdot Q(R) \cdot \boldsymbol{r}(t) + \omega_n(t) \quad (\text{B3.3.1.1-28.2})$$

sowie den *DINI*-Koeffizienten des Quellterms

$$\omega_n(t) := \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho \cdot Q_n(\rho) \cdot \boldsymbol{\omega}(t, \rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-28.3})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist formal wiederum durch (3.3.1.1-14) gegeben, allerdings für $t=0$ und (3.3.1.1-17) hier mit den Koeffizienten aus (B3.3.1.1-27) zu

$$T_n(0) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho \cdot Q_n(\rho) \cdot c_A(\rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-29})$$

Damit aber ist das Anfangs-Randwertproblem (3.3.1.1-17) - (3.3.1.1-18) durch (B3.3.1.1-27) mit (B3.3.1.1-25) und (B3.3.1.1-14) mit (B3.3.1.1-29) gelöst, wofür vorn bereits die Darstellung (3.3.1.1-30) angegeben worden ist.

c) Kugel

Das Lösen der Anfangs-Randwertaufgabe (3.3.1.1-17), (3.3.1.1-18) und (3.3.1.1-32) für eine Vollkugel kann wiederum nach der Methode von *FOURIER* vorgenommen werden, d.h., durch Separation der Variablen und Anwendung des Superpositionsprinzips. Für die Konzentrationsverteilung $\boldsymbol{c}(t, r)$ werde der Produktansatz $T(t) \cdot Q(r)$ gemacht, von dem zunächst gefordert wird, den homogenen Teil der Differentialgleichung (3.3.1.1-22) zu erfüllen. D.h., für $\boldsymbol{\omega} = 0$ sollen die Funktionen $T(t)$ und $Q(r)$, unter Verwendung der Abkürzungen $\dot{T} \equiv \frac{\partial T}{\partial t}$ und $Q'' = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}$, der Gleichung

$$Q \cdot \dot{T} = D \cdot T \cdot \left(Q'' + \frac{2}{r} Q' \right),$$

bzw. nach Trennung der Variablen, der Beziehung

$$\frac{\dot{T}}{D \cdot T} = \frac{Q'' + \frac{2}{r} Q'}{Q} = -\eta^2 = \text{konst.} \quad (\text{B3.3.1.1-33})$$

genügen. Das aber bedeutet, daß zunächst die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{T} + \eta^2 \cdot D \cdot T = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-33.1})$$

und

$$Q'' + \frac{2}{r}Q' + \eta^2 \cdot Q = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-33.2})$$

zu lösen sind, was vorerst die Ergebnisse

$$T(t) = C \cdot e^{-\eta^2 \cdot \int_0^t D(\tau) d\tau}, \quad C = T(0) \quad (\text{B3.3.1.1-34.1})$$

und

$$\begin{aligned} Q(r) &= A \cdot \frac{e^{i\eta r}}{r} + B \cdot \frac{e^{-i\eta r}}{r} \\ &= \frac{A}{r} \cdot (\cos(\eta \cdot r) + i \cdot \sin(\eta \cdot r)) + \frac{B}{r} \cdot (\cos(\eta \cdot r) - i \cdot \sin(\eta \cdot r)) \end{aligned} \quad (\text{B3.3.1.1-34.2})$$

liefert.

Die Koeffizienten A und B werden unter Verwendung der Symmetriebedingung (3.3.1.1-18.1) und des homogenen Teils der Randbedingungen (3.3.1.1-18.2) ermittelt. Mit dem Produktansatz ergibt sich:

$$Q'(0) = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-35.1})$$

$$Q'(R) + k_R \cdot Q(R) = 0. \quad (\text{B3.3.1.1-35.2})$$

Die Bestimmung der beiden Konstanten des Ansatzes (B3.3.1.1-34.2) erfolgt aus den Bedingungen (B3.3.1.1-35). Aus der Bedingung (B3.3.1.1-35.1) und infolge des Grenzwertes

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\eta \cdot \cos(\eta \cdot r) - \frac{\sin(\eta \cdot r)}{r}}{r} = 0 \quad \text{wird zur Vermeidung einer Singularität } B = -A \text{ gefolgert.}$$

Aus der zweiten Gleichung folgen dann für endliches A nichttriviale Lösungen nur für $\eta = \eta_n = v_n / R$, wobei die Eigenwerte v_n die nach steigender Größe geordneten positiven Lösungen der transzendenten Eigenwertgleichung

$$(1 - k_R R) \cdot \sin v_n - v_n \cdot \cos v_n = 0 \quad (\text{B3.3.1.1-36})$$

sind. Damit werden entsprechend (B3.3.1.1-34.2) die zum *STURM-LIOUVILLE*-Problem (B3.3.1.1-33.2), (B3.3.1.1-35) gehörenden Eigenfunktionen

$$Q_n(r) = \frac{1}{r} \cdot \sin\left(v_n \frac{r}{R}\right) \quad (\text{B3.3.1.1-37})$$

erhalten. Infolge der Orthogonalität des Funktionensystems gilt für je zwei Eigenfunktionen

$$\int_0^R \rho^2 \cdot Q_n(\rho) \cdot Q_m(\rho) \cdot d\rho = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ f_n^{(N)} & \text{für } m = n \end{cases}$$

$$\text{mit } f_n^{(N)} = \int_0^R \rho^2 \cdot Q_n^2(\rho) \cdot d\rho = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin^2 v_n - k_R R}{1 - k_R R}. \quad (\text{B3.3.1.1-38})$$

Durch Linearkombination läßt sich eine *FOURIER*-Reihe aufbauen, mit der eine Funktion $f(r)$, die den *DIRICHLET*schen Bedingungen genügt, in $r \in (0, R)$ als

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot Q_n(r); \quad f_n := \frac{f_n^{(Z)}}{f_n^{(N)}} \quad (\text{B3.3.1.1-39})$$

$$f_n^{(Z)} := \int_0^R \rho^2 \cdot Q_n(\rho) \cdot f(\rho) \cdot d\rho, \quad f_n^{(N)} \text{ siehe (B3.3.1.1-38)}$$

dargestellt werden kann. Damit aber läßt sich auch für die zum Anfangs-Randwertproblem (3.3.1.1-17), (3.3.1.1-18) und (3.3.1.1-32) gesuchte Lösung ein entsprechender *FOURIER*-Reihenansatz machen:

$$c(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot Q_n(r), \quad T_n(t) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho^2 \cdot Q_n(\rho) \cdot c(t,\rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-40})$$

Das Umformen der *FOURIER*-Koeffizienten durch zweifach partielle Integration, Substituieren mit (3.3.1.1-17), (3.3.1.1-18) und (3.3.1.1-32) sowie entsprechendes Vereinfachen mit der Eigenwertgleichung (B3.3.1.1-36) führt schließlich auf eine gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung bezüglich dieser *DINI*-Koeffizienten:

$$\dot{T}_n(t) + p(t) \cdot T_n(t) = q(t) \quad (\text{B3.3.1.1-41})$$

mit dem variablen Koeffizienten

$$p(t) := \left(\frac{v_n}{R} \right)^2 \cdot D(t) \quad (\text{B3.3.1.1-42.1})$$

und der „Störfunktion“

$$q(t) := \frac{D(t)}{f_n^{(N)}} \cdot R^2 \cdot Q(R) \cdot r(t) + \omega_n(t) \quad (\text{B3.3.1.1-42.2})$$

sowie den *FOURIER*-Koeffizienten des Quellterms

$$\omega_n(t) := \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho^2 \cdot Q_n(\rho) \cdot \omega(t,\rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-42.3})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist formal wiederum durch (B3.3.1.1-14) gegeben, allerdings für $t=0$ und (B3.3.1.1-17) hier mit den Koeffizienten aus (B3.3.1.1-39) zu

$$T_n(0) = \frac{1}{f_n^{(N)}} \cdot \int_0^R \rho^2 \cdot Q_n(\rho) \cdot c_A(\rho) \cdot d\rho. \quad (\text{B3.3.1.1-43})$$

Damit aber ist das Anfangs-Randwertproblem (3.3.1.1-17), (3.3.1.1-18) und (3.3.1.1-32) durch (B3.3.1.1-40) mit (B3.3.1.1-37) und (3.3.1.1-14) mit (B3.3.1.1-43) gelöst, wofür vorn bereits die Darstellung (3.3.1.1-33) angegeben worden ist.

Zur Darstellung der Lösung (3.3.1.1-34) für zeitunabhängige Randbedingungen und Quellen wurde u.a. von der Reihensumme

$$\frac{k_R R}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin v_n \cdot \sin(v_n \frac{r}{R})}{f_n^{(N)}} \cdot \left(\frac{R}{v_n} \right)^2 = 1 \quad (\text{B3.3.1.1-44})$$

Gebrauch gemacht, die über (B3.3.1.1-17) leicht zu bestätigen ist.

Zu Kapitel 3.3.1.2.1: Reaktionskinetik - Phasenumwandlung - Wärmetönung

Wärmebehandlungen, bei denen Umwandlungsvorgänge ablaufen, sind i.allg. mit mehr oder weniger deutlichen Wärmetönungen - Wärmefreisetzung oder Wärmeentzug in Abhängigkeit von Art und Richtung der Umwandlung - verbunden. In einem entsprechenden Temperatur-Zeit-Fenster, in dem die Umwandlung abläuft, überlagern sich die Einflüsse der Wärmequellen/-senken den Abkühlungs- oder Erwärmungsverläufen des Wärmebehandlungsprozesses und können zu einer temporären Abweichung vom vorgesehenen Temperatur-Zeit-Profil führen. Diese exotherme/endotherme Reaktion - und damit die Wärmequelle/-senke - ist unmittelbar an den Verlauf der reaktionskinetischen Umwandlung $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t, \mathcal{G}(t))$ gekoppelt. Dabei ist die Wärmequellendichte im Wesentlichen der Umsatz- bzw. Umwandlungsgeschwindigkeit proportional, d.h. $\mathbf{q}_V(t) \sim \partial \mathbf{X}(t) / \partial t$. Die hierdurch hervorgerufene Eigenerwärmung/-abkühlung des Wärmegutes ist bei der thermischen Prozeßsteuerung ggf. entsprechend zu berücksichtigen. Eine Berechnung der resultierenden Temperaturverhältnisse ist allerdings analytisch geschlossen i.allg. nicht mehr möglich, da die Temperaturabhängigkeit der Umwandlung - und damit der Quellen $\mathbf{q}_V = \mathbf{q}_V(t, \mathcal{G}(t, x, y, z))$ - letztlich auf eine nichtlineare Integralgleichung bezüglich der gesuchten Temperaturen führt. Die Berechnung dieses thermischen Rückkopplungsproblems läßt sich jedoch auf numerisch-iterativem Wege vornehmen, ohne das hier weiter auszuführen - vgl. auch [KLU 94, Kap. 13.7.3.2].

Zu Kapitel 3.3.2.1: Startparameter-Ermittlung

Im allgemeinen Falle sind die reaktionskinetischen Parameter nichtlinear in den entsprechenden Gleichungen enthalten. Unter diesen Umständen benötigen die numerischen Lösungsverfahren zur erfolgreichen Suche dieser Parameter Startwerte, die in hinreichender Nähe der endgültigen Werte liegen sollten. Doch schon das Aufsuchen geeigneter Parameter-Startwerte ist i.allg. nicht unproblematisch. Ein relativ einfaches Verfahren für nur einen Reaktionsmechanismus wird später unter 2) angegeben werden. Vorerst einige Anmerkungen zur Auswertung isothermer Versuchsreihen, bei denen für die Parameter sogar geschlossene Lösungen existieren.

1) Konventionelle Bestimmung der reaktionskinetischen Parameter β und q bzw. q , k_X und Q_B bei isothermen statischen Rekristallisationsvorgängen:

Es werde vom *AVRAMI*-Ansatz, d.h. vom Rekristallisationsgrad als Funktion allein der Zeit

$$X = X(t; \beta, q) = 1 - e^{-\beta \cdot t^q} \tag{B3.3.2.1-1}$$

ausgegangen. Die beiden Parameter β und q sollen unter Heranziehung von N Meßergebnissen $X_n = X(t_n)$, $n=1 \dots N$, gewonnen bei einer einzigen, zeitunabhängigen Temperatur zu unterschiedlichen Wärmebehandlungszeiten $t_1, t_2, \dots t_N$, bestimmt werden. Da die Parameter nichtlinear in (B3.3.2.1-1) enthalten sind, scheiden direkte Lösungsverfahren aus. Allerdings läßt sich eine Ersatzaufgabe formulieren, indem (B3.3.2.1-1) durch zweifaches Logarithmieren linearisiert wird, was auf $\ln \ln \frac{1}{1-X} = \ln \beta + q \cdot \ln t$ bzw. auf die lineare Form

$$\boxed{y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi_1} \tag{B3.3.2.1-2}$$

mit $\alpha_0 = \ln \beta$, $\alpha_1 = q$, $\xi_1 = \ln t$, $y = \ln \ln \frac{1}{1-X}$ führt.

Zur mathematisch eindeutigen Festlegung der Geradengleichung (B3.3.2.1-2), d.h., zur Bestimmung der beiden Parameter α_0 und α_1 (bzw. β und q), reichen **zwei** Meßwerte $y_1 = y(\xi_{11})$, $y_2 = y(\xi_{12})$ bzw. $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$ aus. Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases} \tag{B3.3.2.1-3}$$

mit $a_{11} = 1$, $a_{12} = \ln t_1$, $b_1 = \ln \ln \frac{1}{1-X_1}$
 $a_{21} = 1$, $a_{22} = \ln t_2$, $b_2 = \ln \ln \frac{1}{1-X_2}$
 $x_1 = \ln \beta$, $x_2 = q$.

Die Lösung läßt sich bekanntlich durch

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{B3.3.2.1-4}$$

mit $\Delta_1 = a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2$, $\Delta_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$, $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

geschlossen angeben. Damit werden die Parameter explizit zu

$$q = \frac{\ln \ln \frac{1}{1-X_1} - \ln \ln \frac{1}{1-X_2}}{\ln \frac{t_1}{t_2}}$$

$$\beta = -\frac{\ln(1-X_1)}{t_1^q} \quad \text{oder} \quad \beta = -\frac{\ln(1-X_2)}{t_2^q} \quad (\text{B3.3.2.1-5})$$

erhalten.

In der „Praxis“ werden aus Genauigkeitsgründen als Wertepaare häufig die 0,05 und 0,95-Umsätze $X_1 = X(t_{0,05}) = 0,05$; $X_2 = X(t_{0,95}) = 0,95$ herangezogen. Da Meßwerte jedoch stets fehlerbehaftet sind, wird die Parameterbestimmung in dieser einfachen Art, d.h., allein auf der Grundlage von zwei (relativ willkürlich ausgewählten) Meßwertpaaren, nur dann befriedigende Ergebnisse liefern, wenn zwei sehr präzise Messungen Verwendung finden und das Rekristallisationsverhalten des Werkstoffs dem idealisierten Verlauf (B3.3.2.1-1) tatsächlich sehr nahekommt. Aus mathematischer Sicht ist die Verwendung von nur zwei Meßwertpaaren keinesfalls zwingend.

Es ist deshalb unter dem Aspekt des Meßfehlerausgleichs wesentlich besser, auch überschüssige Meßwertpaare oder möglichst alle (von groben Meßfehlern bereinigte) Meßergebnisse in die Parameterbestimmung einzubeziehen. Eine bestmögliche Approximation wird - wie allgemein üblich - durch geeigneten Vergleich aller Meß- und Rechenwerte erreicht, indem die Parameter gerade so berechnet werden, daß die Summe der Abweichungsquadrate (nach GAUß) minimiert wird. Für $N \geq 2$ Meßwertpaare (X_n, t_n) gilt dann:

$$S(\beta, q) = \sum_{n=1}^N [X(t_n; \beta, q) - X_n]^2 \rightarrow \text{MIN} \quad (\text{B3.3.2.1-6})$$

Da die beiden Parameter im Ansatz $X(t; \beta, q)$ nichtlinear vorkommen, ist das aus der Minimumbedingung $\frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial S}{\partial q} = 0$ resultierende Normalgleichungssystem gleichfalls nichtlinear und läßt sich nicht mehr geschlossen lösen, jedoch stehen hierfür entsprechende numerische Methoden der nichtlinearen Quadratmittellapproximation zur Verfügung; z.B. [SCH 91, Kap. 7].

Wird die Forderung (B3.3.2.1-6) allerdings nicht auf (B3.3.2.1-1), sondern auf die bezüglich der Parameter linearisierte Form (B3.3.2.1-2) angewendet, so entsteht ein lineares, mit direkten Methoden explizit lösbares Gleichungssystem. Analog zu (B3.3.2.1-6) ist die Summe der Abweichungsquadrate zu minimieren

$$S(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N [y(\xi_{In}; x_1, x_2) - y_n]^2 \rightarrow \text{MIN}, \quad (\text{B3.3.2.1-7})$$

woraus das lineare Normalgleichungssystem, das formal mit (B3.3.2.1-3) übereinstimmt, resultiert, jetzt allerdings mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= N, & a_{12} &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n}, & b_1 &= \sum_{n=1}^N y_n \\
 a_{21} &= a_{12}, & a_{22} &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n}^2, & b_2 &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n} \cdot y_n.
 \end{aligned}
 \tag{B3.3.2.1-8}$$

Mit der Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ entsprechend (B3.3.2.1-4) liegen auch die gesuchten Parameter

$$\beta = e^{x_1}, \quad q = x_2
 \tag{B3.3.2.1-9}$$

vor; speziell für $N = 2$ wird wieder das Interpolationsergebnis (B3.3.2.1-5) erhalten.

Die Parameter (B3.3.2.1-9) befriedigen also i.allg. nicht mehr nur den interpolatorischen Grenzfall, sondern vermitteln insbesondere zwischen den fehlerbehafteten Beobachtungen durch Ausgleich. Sie sind repräsentativ für die Gesamtheit jener Versuche, die für unterschiedliche Zeiten, jedoch bei einer einzigen und darüberhinaus zeitlich konstanten Temperatur (isotherm) durchgeführt worden sind. Analog ließe sich ein Berechnungsverfahren angeben für Meßwerte, die isochronen, jedoch auf unterschiedlich hohem und zeitunabhängigem Temperaturniveau (isotherm) geführten Wärmebehandlungen entstammen, was hier jedoch nicht separat ausgeführt wird. Dafür soll sofort das etwas allgemeinere Problem, die gleichberechtigte Berücksichtigung der beiden Wärmebehandlungsvariablen Temperatur und Zeit, betrachtet werden, wobei die Temperatur allerdings immer noch als zeitunabhängige Prozeßvariable auftritt. Damit liegen aus isothermen Wärmebehandlungen gewonnene $3N$ Meßwerte (t_n, Θ_{kn}, X_n) , $n = 1, 2, \dots, N \geq 3$ zur Parameteridentifikation vor.

Die Temperatur wird in den Modellansatz (B3.3.2.1-1) eingeführt, indem berücksichtigt wird, daß der Parameter β immer nur für eine bestimmte Temperatur Θ_k gilt, d.h., β ist eine Funktion der Temperatur $\beta = \beta(\Theta_k)$. Diese Temperaturabhängigkeit ist als analytischer Zusammenhang mit (3.3.1.2-4.5) bereits bekannt (*Betrachtung hier reduziert auf $\mathcal{G}_B = -273^\circ\text{C}$*):

$$\beta(\Theta_k) = T^{-q} = \left(\frac{q}{k_X} \cdot e^{\frac{Q_X}{\mathcal{R} \cdot \Theta_k}} \right)^{-q}.
 \tag{B3.3.2.1-10}$$

In diesem Zusammenhang treten zwei weitere Parameter auf, Aktivierungsenergie Q_X und Mengenfaktor k_X , deren Identifikation nun gleichfalls zu erfolgen hat. Anstelle der linearisierten Gleichung (B3.3.2.1-2) findet man

$$\ln \ln \frac{1}{1-X} = q \cdot \ln \frac{k_X}{q} + q \cdot \ln t - q \cdot \frac{Q_X}{\mathcal{R} \cdot \Theta_k},
 \tag{B3.3.2.1-11}$$

was der linearen Form

$$\boxed{y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi_1 + \alpha_2 \cdot \xi_2}
 \tag{B3.3.2.1-12}$$

mit den neuen Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= q \cdot \ln \frac{k_X}{q}, & \alpha_1 &= q, & \alpha_2 &= q \cdot Q_X, & \xi_1 &= \ln t, & \xi_2 &= -\frac{1}{\mathcal{R} \cdot \Theta_k} \\
 y &= \ln \ln \frac{1}{1-X}
 \end{aligned}$$

entspricht. Zur Bestimmung der drei Unbekannten $x_1 = \alpha_0$, $x_2 = \alpha_1$ und $x_3 = \alpha_2$ in Gl. (B3.3.2.1-12) ist wieder von der Forderung zur Minimierung der Summe der Abweichungsquadrate

$$S(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^N [y(\xi_{1n}, \xi_{2n}; x_1, x_2, x_3) - y_n]^2 \rightarrow \text{MIN} \quad (\text{B3.3.2.1-13})$$

auszugehen, wofür die Erfüllung der Bedingung $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$, $i = 1 \dots 3$ notwendig ist. Hieraus ergibt sich das dreizeilige Normalgleichungssystem zu

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases} \quad (\text{B3.3.2.1-14})$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{11} &= N, & a_{12} &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n}, & a_{13} &= \sum_{n=1}^N \xi_{2n}, & b_1 &= \sum_{n=1}^N y_n \\ a_{21} &= a_{12}, & a_{22} &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n}^2, & a_{23} &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n} \xi_{2n}, & b_2 &= \sum_{n=1}^N \xi_{1n} \cdot y_n \\ a_{31} &= a_{13}, & a_{32} &= a_{23}, & a_{33} &= \sum_{n=1}^N \xi_{2n}^2, & b_3 &= \sum_{n=1}^N \xi_{2n} \cdot y_n \end{aligned}$$

Eine geschlossene Lösung läßt sich bekanntlich angeben durch:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (\text{B3.3.2.1-15})$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \cdot b_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) \cdot b_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \cdot b_3 \\ \Delta_2 &= (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \cdot b_1 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \cdot b_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \cdot b_3 \\ \Delta_3 &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \cdot b_1 + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \cdot b_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot b_3 \\ \Delta &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \cdot a_{11} + (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \cdot a_{12} + (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \cdot a_{13} \end{aligned}$$

Mit der Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ entsprechend (B3.3.2.1-15) liegen die gesuchten Parameter vor:

$$k_X = x_2 \cdot e^{x_1/x_2}, \quad q = x_2, \quad Q_X = \frac{x_3}{x_2} \quad (\text{B3.3.2.1-16})$$

Der Parameter β läßt sich in Abhängigkeit von Θ_k gemäß (B3.3.2.1-10) berechnen.

Bei der numerischen Auswertung von Lösungen der Form (B3.3.2.1-15) bzw. (B3.3.2.1-4), deren Koeffizienten meßfehlerbehafteten Ausgleichsproblemen entstammen, werden häufig Genauigkeitsprobleme auftreten. Diese sind darin begründet, daß die Koeffizientenmatrix des Normalgleichungssystems überwiegend schlecht konditioniert ist, infolgedessen die Koeffizientendeterminante sehr klein ($\Delta \rightarrow 0$) und die Lösung (B3.3.2.1-15) numerisch unbrauchbar wird. Abhilfe läßt sich z.B. durch Diagonalisierung der Koeffizientenmatrix herbeiführen [SPÄ 73, Kap. 2.2].

Ganz allgemein werden zum Lösen von *Least-squares*-Problemen der Art (B3.3.2.1-7), (B3.3.2.1-13), deren direkte Berechnung numerisch leider überwiegend instabil verläuft, spezielle Maßnahmen der Matrizenverarbeitung herangezogen⁷³, wofür insbesondere Verfahren der Orthogonalisierung durch Faktorisierung oder Verfahren der Regularisierung zu nennen sind [SCH 91, Kap. 3.3 und 3.4].

2) Ermittlung reaktionskinetischer Iterations-Startparameter q , k_B , \mathcal{G}_B und Q_B im Falle anisothermer statischer Rekrystallisationsvorgänge:

Isotherme Temperatur-Zeit-Verhältnisse stellen Idealisierungen dar, die sich immer nur annähernd realisieren lassen. Wärmebehandlungsprozesse besitzen, selbst wenn sie über einen längeren Zeitbereich bei konstanter Temperatur geführt werden, zumindest während der Aufheiz- und Abkühlphasen anisotherme Abschnitte. Die Parameterbestimmung für Wärmebehandlungsbedingungen, die auch anisotherme Temperatur-Zeit-Verhältnisse einschließen, wird mit deutlich aufwendigeren numerisch-iterativen Verfahren im Rahmen der nichtlinearen Quadratmittelapproximation durchgeführt, wofür Parameter-Startwerte benötigt werden.

Sollen die Startparameter für einen Ansatz in der Art des Rekrystallisationsgrades unter anisothermen Bedingungen sowie unter Berücksichtigung einer Bezugstemperatur zu vorgegebenen $2N$ Meßwerten (t_n, X_n) und N Prozeßfunktionen $\mathcal{G}_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, die sich nicht notwendigerweise alle voneinander unterscheiden müssen, ermittelt werden, so sind - bei Beschränkung auf einen Reaktionsmechanismus - mit dem nachfolgend angegebenen Verfahren befriedigende Ergebnisse erzielt worden. Der Rekrystallisationsgrad sei statt durch (3.3.1.2-4.4) bzw. (B3.3.2.1-1) durch den verallgemeinerten Ansatz

$$\mathbf{X}(t) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{q} \cdot \mathbf{I}(t)\right)^q}; \quad \mathbf{I}(t) = k_B \cdot \mathbf{J}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}(t) = \int_0^t e^{\frac{-Q_B}{\mathcal{R} \cdot (\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_B)}} \cdot d\tau \quad (\text{B3.3.2.1-17})$$

gegeben. Linearisieren durch zweifaches Logarithmieren ergibt zunächst

$$\ln \ln \frac{1}{1 - \mathbf{X}(t)} = q \cdot \ln \frac{k_B}{q} + q \cdot \ln \mathbf{J}(t). \quad (\text{B3.3.2.1-18})$$

Wird die Funktion \mathbf{J} - unter formaler Einführung einer Korrekturfunktion $p = p(t)$ - durch

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) &= \int_0^t e^{\frac{-Q_B}{\mathcal{R} \cdot (\mathcal{G}(\tau) - \mathcal{G}_B)}} d\tau \\ &= t \cdot p(t) \cdot e^{\frac{-Q_B}{\mathcal{R} \cdot (\bar{\mathcal{G}} - \mathcal{G}_B)}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{G}} := \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \mathcal{G}(\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (\text{B3.3.2.1-19.1})$$

quasi linearisiert, so erhält man

$$\ln \ln \frac{1}{1 - X} = q \cdot \ln \frac{k_B}{q} + q \cdot \ln(p \cdot t) - q \cdot \frac{Q_B}{\mathcal{R} \cdot (\bar{\mathcal{G}} - \mathcal{G}_B)}. \quad (\text{B3.3.2.1-19.2})$$

⁷³ Der Pocket-PC *HP48GX* bietet einige sehr nützliche Befehle zur Faktorisierung quadratischer und rechteckiger Matrizen sowie den Befehl *LSQ* zum unmittelbaren numerischen Auflösen linearer, insbesondere auch über- oder unterbestimmter und ggf. schlecht konditionierter Gleichungssysteme.

Diese Gleichung besitzt die Form

$$\boxed{y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi_1 + \frac{\alpha_2}{\xi_2 + \alpha_3}} \quad (\text{B3.3.2.1-20})$$

mit $\alpha_0 := q \cdot \ln \frac{k_B}{q}$, $\alpha_1 := q$, $\alpha_2 := -q \cdot \frac{Q_B}{\mathcal{R}}$, $\alpha_3 := -\mathcal{G}_B$

$$\xi_1 := \ln(p \cdot t) = \frac{Q_B^{(v-1)}}{\mathcal{R} \cdot (\bar{\mathcal{G}} - \mathcal{G}_B^{(v-1)})} + \ln J^{(v-1)}, \quad \xi_2 := \bar{\mathcal{G}}$$

$$y := \ln \ln \frac{1}{1 - X}$$

und kann zur Parameterbestimmung herangezogen werden, indem nach dem Vorschlag aus [SPÄ 74, Kap. 5.1] bei Vorliegen von $N > 4$ Meßwerttripeln $(\xi_{1n}, \xi_{2n}, y_n)$ das folgende äquivalente nichtlineare Ausgleichsproblem für die vier gesuchten Parameter $x_1 = \alpha_0$, $x_2 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_2$, $x_4 = \alpha_3$ bei zwei unabhängigen ξ_1, ξ_2 und einer abhängigen y Variablen betrachtet wird:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \|f(\mathbf{x}, \Xi) - \mathbf{y}\|_2^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \left(y(\xi_{1n}, \xi_{2n}; x_1, x_2, x_3, x_4) - y_n \right)^2 \rightarrow \mathbf{MIN}, \end{aligned} \quad (\text{B3.3.2.1-21})$$

wo $f := x_1 + x_2 \cdot \xi_1 + \frac{x_3}{\xi_2 + x_4}$ die Approximationsfunktion, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$

der gesuchte Parametervektor, $\Xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{1N} & \xi_{2N} \end{bmatrix}$ eine Datenmatrix der unabhängigen Variablen

ξ_1, ξ_2 und $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_N]$ ein Datenvektor der abhängigen Variablen y sind.

Die ersten drei linear vorkommenden Parameter x_1, x_2, x_3 lassen sich mittels der Bedingungen

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B3.3.2.1-22})$$

d.h., mit dem Normalgleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(x_1 + \xi_{1n} \cdot x_2 + \frac{x_3}{\xi_{2n} + x_4} \right) &= \sum_{n=1}^N y_n \\ \sum_{n=1}^N \left(x_1 + \xi_{1n} \cdot x_2 + \frac{x_3}{\xi_{2n} + x_4} \right) \cdot \xi_{1n} &= \sum_{n=1}^N y_n \cdot \xi_{1n} \\ \sum_{n=1}^N \left(x_1 + \xi_{1n} \cdot x_2 + \frac{x_3}{\xi_{2n} + x_4} \right) \cdot \frac{1}{\xi_{2n} + x_4} &= \sum_{n=1}^N y_n \cdot \frac{1}{\xi_{2n} + x_4} \end{aligned} \quad (\text{B3.3.2.1-23})$$

eliminieren; die gesuchten Parameter x_1, x_2, x_3 sind allerdings als Funktionen des nichtlinearen, noch unbekanntem Parameters x_4 aufzufassen.

Die Bestimmung von x_4 kann durch Suchverfahren vorgenommen werden als:

a) Minimumsuche

$$S = S(x_4) = S(x_1(x_4), \dots, x_3(x_4), x_4) \rightarrow \mathbf{MIN} \quad (\text{B3.3.2.1-24.1})$$

b) Nullstellensuche

$$\frac{\partial}{\partial x_4} S(x_1(x_4), \dots, x_3(x_4), x_4) = 0,$$

d.h.
$$\sum_{n=1}^N \left(x_1 + x_2 \cdot \xi_{1n} + \frac{x_3}{\xi_{2n} + x_4} - y_n \right) \cdot \frac{1}{(\xi_{2n} + x_4)^2} = 0. \quad (\text{B3.3.2.1-24.2})$$

Die Aktualisierung der künstlich eingeführten Funktion $p(t) = p^{(v)} := \frac{\mathbf{J}^{(v-1)}}{t} \cdot \mathbf{e}^{\frac{Q_B^{(v-1)}}{\mathcal{R}(\bar{\vartheta} - \vartheta_B^{(v-1)})}}$ wird jeweils nach Neuberechnung der beiden Parameter Q_B und ϑ_B vorgenommen, wobei als Iterationsstartwert mit $p^{(0)} = 1$ begonnen werden kann. Ggf. ist eine Dämpfung gemäß $p^{(v)} := \sqrt[r]{p^{(v-1)}}$ mit $r = 5 \dots 15$ erforderlich. Die ursprünglichen Parameter ergeben sich zu

$$\begin{aligned} q &:= x_2, & k_B &:= x_2 \cdot \sqrt{x_2} \cdot e^{x_1} \\ \vartheta_B &:= -x_4, & Q_B &:= -\mathcal{R} \cdot \frac{x_3}{x_2}. \end{aligned} \quad (\text{B3.3.2.1-25})$$

Die auf diese Weise erhaltenen Parameterwerte werden überwiegend nur grobe Näherungen für das bezüglich (B3.3.2.1-17) zu lösende Identifikationsproblem darstellen, jedoch können sie als Ausgangs- bzw. Startwerte für weiterführende numerisch-iterative Verfahren der nichtlinearen Quadratmittelapproximation herangezogen werden.

Zu Kapitel 3.3.2.2: Beispiel zu thermisch aktivierten Reaktionen

Tabelle: Entfestigungsglühung von NiCr2Mn-Drähten; $d = 2,2 \text{ mm}$, $\varphi = 2$

ϑ_U [°C]	t [s]	T [s]	σ_{ZB} [MPa]	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	ε_{ZB} [%]	$X_{\sigma_{ZB}}$	$X_{\sigma_{0,2}}$	X_{ε}
20	∞	-	1125	1114	1,10	0,000	0,000	0,000
500	30	37,51	1109	1092	1,55	0,027	0,022	0,012
500	60	37,51	1116	1093	1,60	0,015	0,021	0,013
500	90	37,51	1115	1091	2,45	0,017	0,023	0,036
500	120	37,51	1112	1104	2,55	0,022	0,010	0,039
500	300	37,51	1068	1028	6,10	0,096	0,087	0,134
500	600	37,51	1045	974	9,10	0,134	0,142	0,215
550	30	34,75	1115	1093	1,68	0,017	0,021	0,016
550	60	34,75	1120	1092	1,40	0,008	0,022	0,008
550	90	34,75	1113	1072	2,23	0,020	0,043	0,030
550	120	34,75	1093	1092	4,75	0,054	0,022	0,098
550	300	34,75	1027	943	9,30	0,165	0,174	0,220
550	600	34,75	1016	914	10,1	0,183	0,203	0,242
600	30	32,15	1103	1085	1,73	0,037	0,029	0,017
600	60	32,15	1078	1095	3,64	0,079	0,019	0,068
600	90	32,15	1092	1047	4,60	0,055	0,068	0,094
600	120	32,15	1036	975	6,44	0,150	0,141	0,143
600	300	32,15	997	896	9,55	0,215	0,222	0,227
600	600	32,15	986	885	11,00	0,234	0,233	0,266
700	30	27,46	1123	1102	1,80	0,003	0,012	0,019
700	60	27,46	1090	1073	4,25	0,059	0,042	0,085
700	90	27,46	1057	1010	5,80	0,114	0,106	0,126
700	120	27,46	1005	909	8,00	0,202	0,208	0,185
700	300	27,46	913	780	10,60	0,356	0,339	0,255
700	600	27,46	888	744	11,00	0,398	0,376	0,266
800	30	23,42	1124	1097	1,55	0,002	0,017	0,012
800	60	23,42	1084	1076	3,90	0,069	0,039	0,075
800	90	23,42	942	820	8,60	0,308	0,299	0,201
800	120	23,42	918	785	9,85	0,348	0,334	0,235
800	300	23,42	580	268	28,25	0,916	0,860	0,729
800	600	23,42	578	257	30,80	0,919	0,871	0,797
900	30	20,04	1103	1090	1,90	0,037	0,024	0,021
900	60	20,04	992	902	8,70	0,224	0,215	0,204
900	90	20,04	866	715	9,65	0,435	0,405	0,230
900	120	20,04	582	267	27,60	0,913	0,861	0,711
900	300	20,04	564	221	31,90	0,943	0,908	0,827
900	600	20,04	566	196	33,90	0,939	0,933	0,881
1000	30	17,32	1068	1029	6,35	0,096	0,086	0,141
1000	60	17,32	887	748	10,70	0,400	0,372	0,258
1000	90	17,32	568	227	33,70	0,936	0,901	0,875
1000	120	17,32	567	174	35,50	0,938	0,955	0,923
1000	300	17,32	563	153	34,80	0,945	0,977	0,905
1000	600	17,32	556	143	35,80	0,956	0,987	0,932
1100	30	15,26	968	859	8,95	0,264	0,259	0,211
1100	60	15,26	561	186	34,35	0,948	0,943	0,893
1100	90	15,26	560	149	38,35	0,950	0,981	1,000
1100	120	15,26	558	145	38,25	0,953	0,985	0,997
1100	300	15,26	545	135	37,30	0,975	0,995	0,972
1100	600	15,26	530	130	35,40	1,000	1,000	0,921

Die transformierten Spannungen werden aus $X_{\sigma} := \frac{\sigma_{MAX} - \sigma}{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}$, die transformierte Bruchdehnung dagegen aus $X_{\varepsilon} := \frac{\varepsilon - \varepsilon_{MIN}}{\varepsilon_{MAX} - \varepsilon_{MIN}}$ berechnet.

Zu Kapitel 3.3.3: Ausblick - allgemeine Gleichung zu thermisch aktivierten Reaktionen

1) Die Superposition sigmoidaler Elementarereignisse weist tatsächlich eine gewisse Ähnlichkeit mit *FOURIER*-Reihen auf, denn eine Gesamtreaktion (3.3.1.3-5.2) läßt sich formal auch schreiben als:

$$y(t) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n \cdot e^{-(b_n \cdot f_n(t))^{c_n}} \quad (\text{B3.3.3-1.1})$$

Vergleichsweise hierzu die komplexwertige Darstellung einer endlichen trigonometrischen *FOURIER*-Reihe:

$$y(t) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n \cdot e^{i b_n t}; \quad b_n: \text{ gegeben.} \quad (\text{B3.3.3-1.2})$$

Wenn man will, läßt sich die Werkstoff-Gesamtreaktion gleichsam aus einer sehr großen Anzahl verschieden gewichteter Elementarreaktionen zusammengesetzt vorstellen. Dann kann - bei geeigneter Anordnung der Summanden sei Konvergenz der Reihen vorausgesetzt - für die Summationsgrenzen sogar der Grenzübergang $N_1 \rightarrow \infty$ und $N_2 \rightarrow \infty$ vollzogen werden. D.h., das Kontinuum mechanischer (elektrischer u.a.) Festkörpereigenschaften, wie es nach Kaltformgebung durch thermische Anregung erhalten wird, läßt sich als Summe aller beteiligten elementarkinetischen Vorgänge bzw. Einzelreaktionen auffassen.

Damit allerdings endet die formale Ähnlichkeit mit der *FOURIER*-Reihe. Während die Berechnung der in (B3.3.3-1.2) linear vorkommenden *FOURIER*-Koeffizienten a_n zu gegebener Funktion $y(t)$ - oder diskreten Wertepaaren (t_k, y_k) - mit analytischen Mitteln explizit möglich ist - z.B. [TOL 55], [ZEI 96, Kap. 1.10.4 bzw. 7.7.9.1...4], gelingt die Koeffizientenbestimmung für die Reihe (B3.3.3-1.1) infolge der nichtlinear enthaltenen Koeffizienten b_n, c_n sowie weiterer unbekannter Parameter, die in den (monoton wachsenden) Funktionen $f_n(t)$ vorkommen, auf direktem Wege leider nicht. Hierfür sind die weit aufwendigeren Methoden der nichtlinearen Quadratmittelapproximation, worauf bereits in Kapitel 3.3.2.1 hingewiesen wurde, heranzuziehen.

2) Wie unschwer zu erkennen ist, besitzen die Funktionen (3.3.3-1) bzw. (3.3.3-2) für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ Grenzwerte, die jedoch nicht notwendigerweise - wie im Falle der Gleichungen (3.3.2.2-2) bzw. (3.3.2.2-3) - den Maximal- bzw. Minimalwert der Funktion darstellen. Für die Spannung aus (3.3.3-1) z.B. ergeben sich die Grenzwerte

$$\sigma(t=0) = \sigma_{MIN} + (\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{m_E} \gamma_j \right\} \neq \sigma_{MAX} \quad (\text{B3.3.3-2.1})$$

und

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \sigma_{MIN} + (\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{m_A} \gamma_{m_E+j} \right\} \neq \sigma_{MIN} \quad (\text{B3.3.3-2.2})$$

Für die Dehnung (3.3.3-2) trifft das analog zu.

Damit im Definitionsbereich und insbesondere im Bereich, für den die Meßergebnisse vorliegen, die Funktionen (3.3.3-1) bzw. (3.3.3-2) das globale Maximum und Minimum nachbilden, müssen z.B. für die Zugfestigkeit $\sigma(t=t_{MAX}) = \sigma_{MAX}$ und $\sigma(t=t_{MIN}) = \sigma_{MIN}$ gelten, d.h., es sind die Bedingungen

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m_E} \gamma_j \cdot e^{-\left(\frac{I_j(t_{MAX})}{q_j}\right)^{q_j}} + \sum_{j=1}^{m_A} \gamma_{m_E+j} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{I_{m_E+j}(t_{MAX})}{q_{m_E+j}}\right)^{q_{m_E+j}}}\right) \right\} \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{B3.3.3-2.3})$$

und

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m_E} \gamma_j \cdot e^{-\left(\frac{I_j(t_{MIN})}{q_j}\right)^{q_j}} + \sum_{j=1}^{m_A} \gamma_{m_E+j} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{I_{m_E+j}(t_{MIN})}{q_{m_E+j}}\right)^{q_{m_E+j}}}\right) \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{B3.3.3-2.4})$$

zu erfüllen. Wie aus der Maximumbedingung (B3.3.3-2.3) zu folgern ist, ergibt sich für die Summe der Gewichte i.allg. $\sum_{j=1}^{m_A+m_E} \gamma_j > 1$. Aus der Minimumbedingung (B3.3.3-2.4) folgt andererseits, daß neben positiven Werten für die Gewichte γ_j nunmehr auch negative zuzulassen sind. Für eine sinnvolle Einschränkung der zahlreichen Freiheitsgrade sind konkretere Informationen über das Reaktionsverhalten, insbesondere über Anzahl und Art der Reaktionsmechanismen des betreffenden Werkstoffs heranzuziehen. Damit lassen sich immerhin schon die Zahlen m_E und m_A sowie die Vorzeichen der Gewichte vorab festlegen. Diese Überlegungen sind sinngemäß auf die Dehnungen (3.3.3-2) zu übertragen.

Anhang C

Programmbeispiele für Taschencomputer HP48/HP50 (vgl. Anhang B zu Kap. 3.1.1.5.3)

1) Approximation der Besselfunktionen erster und zweiter Art, nullter und erster Ordnung:

DIR FUNCTIONS BEGIN

J0

```
<< → x << IF x TYPE 0 ==
      THEN IF x ABS 6 ≤
        THEN x SQ → X
          << X 2 9 START DUP X *
            NEXT
              3.09238023013E-11 * NEG SWAP
              3.97686978431E-8 * + SWAP 2.36689712419E-5 *
              - SWAP 8.26938970192E-3 * + SWAP
              1.80022982119 * - SWAP 242.55386911 * + OVER
              19164.3521162 * - 3 PICK 793510.461809 * + 4
              PICK 13745920.7854 * - 56402862.6357 + 4
              ROLLD SWAP 914.451493619 * + SWAP
              354794.873612 * + 56402862.6357 + /
          >>
        ELSE -3 SF RAD 64 x SQ / DUP qzero 8 * x ABS / SWAP
          pzero x ABS π 4 / - DUP COS ROT * SWAP SIN ROT
          * - 2 π / x ABS / √ * DEG -3 CF
        END
      ELSE "BESSEL'sche Funktion
        1. Art, 0. Ordnung:

        J0(x) ist Lsg. d. Dgl.

        x2·y''+x·y'+x2·y = 0"
        GROB 131 64 ...
        Pict
      END
    >>
```

J1

```
<< → x << IF x TYPE 0 ==
      THEN IF x ABS 7 ≤
        THEN x SQ → X
          << X 2 8 START DUP X *
            NEXT
              4.65970885799E-10 * SWAP 5.27864249691E-7 *
              - SWAP 2.72021071213E-4 * + SWAP
              8.04888363009E-2 * - SWAP 14.4042778563 * +
              OVER 1528.82002374 * - 3 PICK
              89022.9562971 * + 4 PICK 2409048.81785 * -
              20401207.7331 + 4 ROLLD SWAP 808.869176791 *
              + SWAP 282204.297661 * + 40802415.4661 + /
          >>
        x *
        ELSE -3 SF RAD 64 x SQ / DUP qone 8 * x ABS / SWAP
          pone x ABS π 3 * 4 / - DUP COS ROT * SWAP SIN
          ROT * - 2 π / x ABS / √ * DEG x SIGN *
        END
```

```

ELSE "BESSEL'sche Funktion
1. Art, 1. Ordnung:

J1(x) ist Lsg. d. Dgl.

x2·y''+x·y'+ ...
...+(x2-1)·y = 0"
GROB 131 64 ...
Pict
END
>>
>>
NO
<< → x << IF x TYPE 0 == x 0 ≥ AND
THEN IF x 6.3 ≤
THEN x SQ → X
<< X 2 9 START DUP X *
NEXT
5.4536566301E-11 * SWAP 6.75374999886E-8 * -
SWAP 3.83973574726E-5 * + SWAP
1.26847702561E-2 * - SWAP 2.57484257091 * +
SWAP 316.800017013 * - OVER 22078.1390771 *
+ 3 PICK 753230.18487 * - 4 PICK
8940252.08619 * + 3725168.20812 - 4 ROLLD
SWAP 874.730890185 * + SWAP 327383.895688
* + 50473596.4569 + /
>>
2 π →NUM / x J0 * x LN * +
ELSE -3 SF RAD 64 x SQ / DUP qzero 8 * x / SWAP
pzero x π 4 / - DUP SIN ROT * SWAP COS ROT * +
2 π / x / √ * DEG -3 CF
END
ELSE "BESSEL'sche Funktion
2. Art, 0. Ordnung
bzw.
NEUMANN'sche Funktion
0. Ordnung"
GROB 131 64 ...
Pict
END
>>
>>
N1
<< → x << IF x TYPE 0 == x 0 ≥ AND
THEN IF x 6 ≤
THEN x SQ → X
<< X 2 9 START DUP X *
NEXT
3.50145363898E-12 * SWAP 4.82185774092E-9 * -
SWAP 3.1025814169E-6 * + SWAP 1.18396050289E-3 *
- SWAP .284802919633 * + SWAP 42.9825568532 * -
OVER 3865.98978208 * + 3 PICK 185448.827785 * -
4 PICK 3739829.4401 * + 13784147.4024 - 4 ROLLD
SWAP 993.627582193 * + SWAP 414435.98912 * +
70306803.7834 + /

```

```

>>
x * x J1 x LN * x INV - 2 π →NUM / * +
ELSE -3 SF RAD 64 x SQ / DUP qone 8 * x / SWAP
pone x π 3 * 4 / - DUP SIN ROT * SWAP COS ROT *
+ 2 π / x / √ * DEG -3 CF
END
ELSE "BESSEL'sche Funktion
2. Art, 1. Ordnung
bzw.
NEUMANN'sche Funktion
1. Ordnung"
GROB 131 64 ...
Pict
END
>>
>>
pzero
<< DUP SQ DUP2 * 3 DUPN .913339019254 * SWAP 102.649980996 * + SWAP
1192.92778602 * + 2405.3173687 + 4 ROLLD SWAP 103.897614309 * +
SWAP 1195.57034659 * + 2405.3173687 + /
>>
pone
<< DUP SQ DUP2 * 3 DUPN 1.19570846655 * SWAP 137.085681069 * + SWAP
1682.11038622 * + 3518.52530699 + 4 ROLLD SWAP 134.14130751 * +
SWAP 1675.66777398 * + 3518.52530699 + /
>>
qzero
<< DUP SQ DUP2 * 3 DUPN 1.00421617208E-2 * SWAP .842653831546 * +
SWAP 7.45542466497 * + 12.1333813657 + 4 ROLLD SWAP 58.0189006291
* + SWAP 484.256581577 * + 776.536407408 + / NEG
>>
qone
<< DUP SQ DUP2 * 3 DUPN 3.76266305598E-2 * SWAP 3.00285296798 * +
SWAP 27.3236264772 * + 45.6182220738 + 4 ROLLD SWAP 66.3931950612
* + SWAP 587.061942319 * + 973.188737575 + /
>>
Pict
<< → s g << { { } { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU CLLCD s 1
DISP -1 WAIT DROP 0 MENU g PICT STO { } PVIEW PICT
PURGE CLLCD
>>
>>
DIR FUNCTIONS END

```

2) Programme zur thermischen Berechnung von Zugfolgen in Mehrfachziehmaschinen:

DIR TEMP.W BEGIN

Info

```
<< CLLCD
  " Drahttemperatur für
    Zugfolge (DIR HEAT
    erforderlich)"
  4 DISP 2 FREEZE
>>
```

Input

```
<< IF 'HEAT' VTYPE 15 ≠
  THEN 1000 .1 BEEP FUNCTIONS
    "Verzeichnis HEAT ist
    nicht geladen !"
    1 DISP 1 FREEZE
  ELSE 1 23 FOR f f CF
    NEXT PARV
    "Drahttemperaturen
    beim Ziehen
    =====

    Eingabe Zugfolge :
    "
    Rem
    { d.0 d. v.jE μ. μ.θ θμ Help1 Units } TMENU HALT
  IF μ. SIZE SIZE 2 ==
  THEN 21 SF
  END
  "Ziehsteindaten :
  "
  Rem
  { ¥.2α d.Z θ.RZ λ.Z αD↓Z Help2 Units } TMENU HALT
  "Zwischen den Zügen :
  "
  Rem d. 'd.j' STO
  {T0 TU. α. ε. ΔL.j d.j λ a preci { } Help3 Units }
  TMENU HALT σInp 'N' 'z.Ltg' STO Hp
END
>>
```

Hp

```
<< Init d&vq &αF &R &v &L&z &.& Mem. Purg. 'Mem.' RCL 'Mem.' 'Purg.'
RCL 'Purg.' 'Sto.' RCL 'Sto.' HEAT TEMPERATURE CYLINDER T4 PADR STO
STO STO Sto. TU DUP 'TU.K' STO 'TU.S' STO 15 SF RAND RAND 2 →LIST
{hRq hRC} STO Tqq? Up1 Mem. Purg. { Mem. Purg. Sto. TU.K TU.S }
PURGE DRAWING WIRE TEMP.W PARV Sto. R 2000 * 'd' STO Lj 1000 *
'Lj' STO { R z.Ltg Σld } PURGE Output
>>
```

Init

```
<< DEPTH DROPN d. IF SIZE DUP TYPE 5 ==
      THEN OBJ→ DROP
      END
'jE' STO 'l.d' 'q.VF' 'k.Z' 'α.DZ' 'v.' 'v.q' 'd.q' 'jC'
1 8 START jE 1 →LIST RDM
      NEXT
v.jE 'd.' jE GET SQ * → vs << vs d.0 SQ / 'v.0' STO
      1 jE FOR k 'v.' k vs k →d. SQ / PUT
      NEXT
      >>
θ.RZ jE →Pr μ. jE →Prμ μ.θ jE →Prμ 3 →LIST {θ.RZ. μ.. μ.θ.} STO
>>
```

d&vq

```
<< 1 jE FOR j IF j 1 ==
      THEN d.0
      ELSE 'd.' j 1 - GET
      END
      'd.' j GET → d0 d1 << d0 SQ d0 d1 * + d1 SQ + 3 / √ DUP
      'd.q' j ROT PUT d0 SWAP / SQ
      IF j 1 ==
      THEN v.0
      ELSE 'v.' j 1 - GET
      END
      >>
      * 'v.q' j ROT PUT
      NEXT
d.q 5 RND 'd.q' STO
>>
```

&αF

```
<< IF 21 FC?
      THEN {jE}
      ELSE {2 jE}
      END
0 CON DUP 2 →LIST {q.RF αF} STO
1 jE FOR k 'l.d' k DUP →l.d PUT 'k.Z' k 2 λ.Z k →Pr1 * k →d.q
k →d.Z OVER / LN * / DUP 4 ROLLD PUT INV α↓Z k →Pr1
INV + INV 'α.DZ' k ROT PUT k →v.q 2 / 'α.DZ' k GET
'k.Z' k GET / 1 + *
→ m << IF 21 FC?
      THEN m 'μ.θ.' k GET DUP2 * 'αF' k ROT PUT 'θ.RZ.'
      k GET * 'μ..' k GET + * 'q.RF' k ROT PUT
      ELSE 1 2 FOR j 'μ.θ.' {j k} GET m *
      'αF' {j k} ROT PUT
      NEXT
      1 2 FOR j 'μ.θ.' {j k} GET
      'θ.RZ.' k GET * 'μ..' k GET + m *
      'q.RF' {j k} ROT PUT
      NEXT
      END
      >>
k →Δphi k →v.q * k →l.d .001 * / 'q.VF' k ROT PUT
NEXT
>>
```

&R

```
<< 0 → i << 0 jE FOR k WHILE 'd.j' 'i' INCR
      IFERR GET
      THEN IF -55 FC?
        THEN DROP2
        END
        0
      ELSE DUP IF k →d. <
        THEN 'd.q' k 1 + GET
          SWAP 'jC' k 1 +
            i k + PUT 0
        ELSE 1
        END
      END
    REPEAT
    END
  NEXT
  i jE + 1 - →ARRY 2 / .001 * 'R' STO
>>
```

&v

```
<< 0 → i << 'd.' jE GET → d.jE << d.j OBJ→ DROP WHILE d.jE ==
      REPEAT 'i' INCR DROP
      END
    >>
    DEPTH DROPN jC OBJ→ OBJ→ DROP ROLL DROP DUP i 1 + +
    jE →ARRY jC - jE 1 →LIST 1 CON - 'ΔjC' STO
  >>
  1 jE FOR j IF 'jC' 1 GET 1 > j 1 == AND
    THEN v.0 'jC' 1 GET 1 - nDUP
    END
    'v.q' j GET 'v.' j GET 'ΔjC' j GET nDUP
  NEXT
  DEPTH →ARRY 'v' STO
>>
```

&L&z

```
<< ΔL.j OBJ→ IF DUP TYPE 5 ==
      THEN OBJ→ DROP
      END
  → j << j ROLL 1 j 1 - START j ROLL OVER +
    NEXT
    j →ARRY 'L.j' STO
  >>
  l.d OBJ→ DROP jE ROLL 1 jE 1 -
  START jE ROLL OVER +
  NEXT
  jE →ARRY 'Σld' STO
  1 → i << IF 'jC' 1 GET 1 >
    THEN 0
    ELSE 'Σld' 1 GET 1
    END
    jE FOR j 'jC' j 1 +
      IF DUP jE >
      THEN DROP2 L.j SIZE IF DUP TYPE 5 ==
```

```

                                THEN OBJ→ DROP
                                END
                                jE + 1 +
ELSE GET
END
IF j 0 ==
THEN 0
ELSE 'Σld' j GET
END
→ jCj Σldj << DO 'L.j' i GET Σldj +
                UNTIL 'i' INCR j + jCj ≥
                END
                'i' DECR DROP
                                >>
NEXT
>>
DEPTH →ARRY 6 RND DUP 'Lj' STO 'z' STO CLLCD
"Es wurde der z-Vektor
mit dem Lj-Vektor be-
legt.

Weitere z-Werte
einfügen ?"
Rem { CONT { } z { } {"z.." << zExpand 0 MENU >>}} TMENU HALT Displ
'z' .001 STO* 'Lj' .001 STO*
>>

zExpand
<< {k1 k2} PURGE { } TMENU
"Anzahl äquidistanter
z-Abschnitte im
Ziehhol ?"
"k1 "
INPUT OBJ→ SWAP STO
"Anzahl äquidistanter
z-Abschnitte zwischen
zwei Zügen ?"
"k2 "
INPUT OBJ→ SWAP STO 0
1 jE 2 * FOR j 'z' j GET OVER - IF j 2 MOD 1 ==
                                THEN k1
                                ELSE k2
                                END
                                SWAP OVER / → k Δz << 1 k START DUP Δz +
                                NEXT
                                >>
NEXT
DEPTH ROLL DROP DEPTH 1 →LIST →ARRY 6 RND
>>

&.&
<< Lj SIZE OBJ→ DROP
→ J << 'ε' 0 jE nDUP jE →ARRY ε. 'TU' 0.RZ. TU.
1 5 FOR i IF i 2 ≤
                THEN J jE - →Pr
                ELSE IF i 3 ==
                        THEN 1 jE

```


— Anhang C —

```

FOR j j →σFm 1000000 *
  → σ << 'q.VF' j GET σ *
    IF 21 FC?
      THEN 2 j * 1 -
      ELSE 4 j * 3 -
    END
    ROLLD
    IF 21 FC?
      THEN 'q.RF' j GET σ * j ROLLD
        'α.DZ' j GET 'αF' j GET σ * -
      ELSE 1 2 FOR k 'q.RF' {k j} GET
        σ * 'α.DZ' j GET
        'αF' {k j} GET
        σ * -
      NEXT
    END
  >>
NEXT
IF 21 FS?
THEN AYSor
END
1 3 FOR k IF 21 FC? k 3 == OR
  THEN jE →ARRY
  ELSE 2 ROW→
  END
  CASE k 1 ==
    THEN 'αj'
    END k 2 ==
    THEN 'qRj'
    END k 3 ==
    THEN 'qVj'
    END
  END
  STO
  NEXT
  'α' αj α. J jE - →Pr 'qR' qRj J jE -
  1 →LIST 0 CON 'qV' qVj 3 PICK
END
END
J →Sort
NEXT
{ αj qRj qVj θ.RZ. μ.. μ.θ. } PURGE
IF 11 FC?
THEN 0 'j' STO 0 →σF 'σ.F0' STO
  IF 12 FS? 13 FS? OR 14 FS? 10 FC? AND OR
  THEN 1 jE FOR k k 'j' STO k →σF
    NEXT
  jE
  END
  IF 10 FS?
  THEN 0 z SIZE OBJ→ DROP nDUP DEPTH
  END
  →LIST 'σ.F.L' STO
END
END
>>

```

AYSor

```
<< { '4*jE' } →ARRY → a << 1 4 FOR i i jE 4 *
                                FOR n a n GET 4
                                STEP
                                { jE } →ARRY
                                NEXT
                                >> ROT SWAP
>>
```

σInp

```
<< CLLCD
CASE
  "Fließspannung σ.F :
  a: Einzelwertvorgabe ?"
  Rem Key
  THEN 11 SF
  "Eingabe : σ.F0-Wert,
              σ.F.L-Liste"
  Rem { σ.F0 σ.F.L { } { } { } Units1 }
  END
  "b: σ.F(phi) als
  Funktion(x) vorgeben ?"
  Rem Key
  THEN 12 SF
  "Eingabe von σ.F(phi)
  als Funktion von x
  z.B. in der Form:

  << x, f >> od. 'f(x)'

  "
  Rem { σ.F { } { } { } { } Units1 }
  END
  "c: Potenzansatz
  σ.F=σ0+σ1*phi^n ?"
  Rem Key
  THEN 13 SF
  "Eingabe der Koeff. :
              σ0 σ1 n"
  Rem { σ0 σ1 n { } { } Units1 }
  END
  "d: Potenz/Exp.-Ansatz
  σ.F(phi,phi.,T) ?"
  Rem Key
  THEN 14 SF
  "σ.F=σ.c*phi^m2*phi.^m3
  *e^(m4/phi-m1*T)"
  Rem
  "Fließspannung 'kalt' :
  "
  4 DISP 3 FREEZE { σ.k m1 m2 m3 m4 T.gr } TMENU HALT
  CLLCD
  "Fließspannung 'warm' :
  "
  4 DISP 3 FREEZE { σ.w n1 n2 n3 n4 }
  TMENU HALT CLLCD
```

```

"mittlere Umformtemp.
je Zug fest vorgeben ?"
Rem
  IF Key
  THEN
    "Umformtemperaturwerte
    Tqq (ggf.als Liste) :"
    Rem { Tqq }
  ELSE 10 SF
    "Temperaturberechnung
    erfolgt implizit !
    "
    Rem
    END
  END
END
END
IF 11 14 FOR f f FS?
  NEXT
  + + + 0 ==
THEN  $\sigma$ Inp
ELSE IF 10 FC?
  THEN TMENU HALT
  END
END
Displ
>>

Rem
<< 1 DISP 3 FREEZE
>>

Key
<< "      Ja          Nein
      ↓            ↓"
5 DISP { { } { Ja } { } { } { Nein } } TMENU -1 WAIT CLLCD
IF 12.1 ==
THEN 1
ELSE 0
END
>>

→Pr
<< → n << DUP IF TYPE 3 ≠
      THEN DUP IF SIZE SIZE 2 ==
            THEN
            ELSE IF DUP TYPE 0 ==
            THEN n nDUP n
            ELSE OBJ→
            END
            →ARRY
            END
      ELSE DUP IF SIZE SIZE 2 ==
            THEN →ROW DROP2
            END
      END
      END
>>
>>

```

```

→Pr1
<< → n << DUP  IF TYPE 0 ≠
                THEN IF DUP SIZE SIZE 2 ==
                    THEN { 1 n }
                    ELSE n
                    END
                GET
                END
                >>
>>

→Pr2
<< → n << IF 21 FS?
                THEN →ROW DROP IF OBJ→ OBJ→ DROP 1 ==
                    THEN n →Pr SWAP OBJ→ DROP n →Pr
                        SWAP
                    ELSE { n } →ARRY
                    END
                2 ROW→
                END
                >>
>>

→Prμ
<< IF 21 FC?
    THEN →Pr
    ELSE →Pr2
    END
>>

→Sort
<< → c b a J
    << 1 IF b SIZE SIZE 2 <
        THEN 1
        ELSE 2
        END
    FOR h 1 jE 1 +
        FOR i IF i jE ≤
            THEN 'jC' i GET
            ELSE J
            END
            → jc << IF i 1 ==
                THEN 1
                ELSE 'jC' i 1 - GET 1 +
                END
            jc FOR k IF k jc == i jE ≤ AND
                THEN 'b'
                IF b SIZE SIZE 2 <
                    THEN i
                    ELSE { h i }
                    END
                ELSE 'a' k 1 + i -
                END
            GET
        NEXT
    >>

```

```

        NEXT
        J →ARRY
    NEXT
    IF SIZE SIZE 2 ==
    THEN 2 ROW→
    END
    c STO
>>
>>

Mem.
<< T0 'T0' TU 'TU' α 'α' ε 'ε' qR 'qR' θμ 'θμ' qV 'qV' R 'R'
    z 'z' Lj 'Lj' v 'v' a 'a' λ 'λ' preci 'preci'
    z.Ltg 'z.Ltg' ΣDAT 'ΣDAT'
>>

Purg.
<< { z.Ltg TU α ε qR qV R z Lj v ΣDAT } PURGE
>>

Sto.
<< 1 16 START STO
    NEXT
>>

Output
<< ΣDAT { { "Exit" << WIRE 2.01 MENU >> } Input Lj d.0 d v.0
    v α T0 TU qR μ. μ.θ θμ qV σ.F0 σ.F.L ΣDAT Help4 Units } TMENU
>>

→σF
<< → k << CASE 11 FS?
    THEN IF k 0 ==
        THEN σ.F0
        ELSE 'σ.F.L' k GET
        END
    END 12 FS?
    THEN k →phi 'x' STO σ.F →NUM 'x' PURGE
    END 13 FS?
    THEN k →phi n ^ σ1 * σ0 +
    END 14 FS?
    THEN IF j 0 ==
        THEN .1
        ELSE k →phi.
        END
    IF k 0 ==
    THEN .05 T0
    ELSE k →phi IF 10 FS?
        THEN IF 15 FC?
            THEN T0
            ELSE IF k j <
                THEN T0q1
                ELSE Tq
            END
        END
    ELSE Tqq

```

```

                                IF DUP TYPE 0 ≠
                                THEN j GET
                                END
                                END
                                → p. p T << IF T T.gr ≤
                                THEN m1 m2 m3 m4 σ.k
                                ELSE n1 n2 n3 n4 σ.w
                                END
                                → a b c d e << p b ^ d p / a T * -
                                                EXP * p. c ^ * e *
                                >>
                                >>
                                END
                                END
                                >>
                                >>
                                →phi
                                << → k << IF k 0 ==
                                THEN 0
                                ELSE d.0 k →d. / LN 2 *
                                END
                                >>
                                >>
                                →phi.
                                << → k << IF 15 FS? 10 FS? AND 9 FC? AND
                                THEN .1
                                ELSE k →¥α TAN 4 * k →v. * k →d. .001 * /
                                END
                                >>
                                >>
                                →¥α
                                << → k << ¥.2α IF DUP TYPE 0 ≠
                                THEN k DUP IF j 1 - ==
                                THEN 1 +
                                END
                                GET
                                END
                                2 / DEG
                                >>
                                >>
                                →σFm
                                << → k << k 'j' STO k →σF k 1 - →σF + 2 /
                                >>
                                >>
                                →d.
                                << → k << IF k 0 ==
                                THEN d.0
                                ELSE 'd.' k GET
                                END
                                >>
                                >>

```

```

→v.
<< → k << IF k 0 ==
      THEN v.0
      ELSE 'v.' k GET
      END
      >>
>>

→v.q
<< → k << 'v.q' k GET
      >>
>>

→d.q
<< → k << 'd.q' k GET .001 *
      >>
>>

→¥2α
<< → k << ¥.2α IF DUP TYPE 0 ≠
      THEN k DUP IF j 1 - ==
      THEN 1 +
      END
      GET
      END
      DEG
      >>
>>

→d.z
<< → k << d.z IF DUP TYPE 0 ≠
      THEN k DUP IF j 1 - ==
      THEN 1 +
      END
      GET
      END
      >> .001 *
>>

→l.d
<< → k << k 1 - →d. k →d. - 2 / k →¥α SIN /
      >>
>>

Displ
<< CLLCD " - Moment bitte - " 4 DISP
>>

Units
<< "d, L, z : [mm]
      v [m/s], ¥.2α [°]
      T [°C], σ [MPa]
      μ.[-], μ.θ [1/K]
      α [W/(m²K)], ε [-]
      λ [W/(m*K)], a [m²/s]
      qR[W/m²], qV[W/m³]" 1 DISP 10 WAIT
>>

```

Units1

```
<< CLLCD "Maßeinheiten :
      σ: [MPa] bzw. [N/mm2]" 1 DISP 3 WAIT
>>
```

Help1

```
<< "Param./Variablen-Typ :
      d.0, v.jE: RE
      d. : {} od. []
      μ., μ.θ: RE, {}, []
              od. [[] []]
      θμ: RE"
      1 DISP 3 FREEZE { { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU -1 WAIT DROP
      "Reibwertansätze:
      μ=μ.+μ.θ*θR oder als
      Stufenfunkt. bei θR=θμ
      μ.1+μ.θ1*θR für θR≤θμ
      μ.2+μ.θ2*θR für θR>θμ
      Parameter als zweizeilige
      Matrizen ablegen!" 1 DISP 3 FREEZE 0 MENU
>>
```

Help2

```
<< "Param./Variablen-Typ :
      ¥.2α, d.Z, θ.RZ,
      λ.Z, αD↓Z :
      RE, {} od. []
      " 1 DISP 3 FREEZE
>>
```

Help3

```
<< "Param./Variablen-Typ :
      T0 preci : RE
      ΔL.j d.j : {} od. []
      TU. α. ε.:
              RE, {} od. []
      a, λ: RE oder 'f(x)'" 1 DISP 3 FREEZE
>>
```

Help4

```
<< "Matrixaufbau (ΣDAT) :
      =====
      z T(R,z) T(0,z) Tq(z)
      mm °C °C °C
      -----
      0 | T0 | T0 | T0
      .. | .. | .. | .." 1 DISP 3 FREEZE
IF 3 FS?
THEN 3 WAIT "Tqq [°C]: 5. Spalte → " 1 DISP 3 FREEZE
END
>>
```

DIR TEMP.W END

3) Programme zur Temperaturberechnung im axial bewegten Vollzylinder. Hiermit werden auch die Berechnungen für Zugfolgen vorgenommen:

DIR T4 BEGIN

Input

```
<< 1 23 FOR j j CF
      NEXT
      "Temperaturberechnung
      axial bewegten Drahtes
      mit analyt. Lösung
      ( bei  $\varepsilon > 0$  als Nähe-
      rung : z so, daß
      [T(R,z)-T0]/ $\theta_0 \ll 1$ 
      gilt ! )"
      1 DISP 3 FREEZE PARV
      { CONT { "Exit" << Exit KILL >> } preci z.Ltg T0 TU.K  $\alpha$ 
      TU.S  $\varepsilon$  qR qV R r. Lj1 z Lj v a  $\lambda$  Help Units } TMENU HALT
      Tqq? Hp
>>
```

Hp

```
<< Ia& $\lambda$  IF Lj TYPE 0  $\neq$  z TYPE 0  $\neq$  OR
      THEN Up1 IF 15 FC?C
      THEN Out1
      END
      ELSE Up2 Out2
      END
```

Mem2

>>

Up1

```
<< CLEAR CL $\Sigma$  IF  $\alpha$  '?' SAME
      THEN  $\alpha$ .K  $\rightarrow$ NUM ' $\alpha$ ' STO
      END
      Lj SIZE DUP IF TYPE 5 ==
      THEN OBJ $\rightarrow$  DROP
      END
      'jE' STO IF z TYPE 0 ==
      THEN Lj
      ELSE z
      END
      'z1' STO 0  $\rightarrow$ Ls 4 SF IF R TYPE 0  $\neq$ 
      THEN 8 SF DEPTH DROPN
      END
      T0 'T00' STO Line T00 'T0' STO
>>
```

Up2

```
<< Prae Loop Post
```

>>

Line

```
<< Init1 1 jE FOR j IF 10 FS?
      THEN j 'j.' STO
      END
```

```

IF j 1 ==
THEN 1 →Ls 0 'Lj1' STO
      'Lj1' 1 IFERR GET
          THEN DROP2 Lj
          END
ELSE IF j 2 ==
      THEN '?' 'T0' STO
      END
      Lj 'Lj1' STO j DUP →Ls 'Lj1'
      SWAP GET
END
'Lj' STO 'I' DECR DROP
WHILE 'z1' IF 22 FS? 23 FS?C AND
      THEN z 'Lj1' STO j →Ls I
      ELSE 'I' INCR
      END
      IFERR GET
      THEN IF -55 FC?
          THEN DROP2
          END
          0
      ELSE DUP 'z' STO Lj ≤
      END
REPEAT Up2 Out3
END
NEXT
IF 10 FS?
THEN α1. 'α1' STO qR1. 'qR1' STO qV1. 'qV1' STO
      { α1. qR1. qV1. j. } PURGE
END
'I' PURGE 4 CF 7 SF 0 →Ls 7 CF z1 'z' STO Lj1 'Lj' STO Round
>>

→Ls
<< → k << 'TU.K' 'TUK.1' 'TU.S' 'TUS.1' 'α' 'α1' 'ε' 'ε1' 'qR'
      'qR1' 'qV' 'qV1' 'R' 'R1' 'v' 'v1'
      1 8 FOR j IF 4 FS?
          THEN IF j 4 == j 6 == OR 21 FS? AND
              THEN IF 22 FC?
                  THEN {1 k}
                  ELSE {2 k}
                  END
              ELSE k
              END
              IFERR GET
              THEN IF -55 FC?
                  THEN 3 DROPN
                  END
              ELSE SWAP STO
              END
          ELSE IF 7 FC?
              THEN SWAP
              END
          EVAL SWAP STO
          END
NEXT
IF 15 FS?
THEN 0 'r.' STO

```

```

                END
            >>
>>
Loop
<< 2 SF IF qR 0 ≠ qV 0 ≠ OR 10 FS? AND
    THEN 9 SF
    END
    IF qR 0 ==
    THEN 22 CF
    END
    DO 'λ' RCL 'a' RCL
        1 2 FOR k DUP IF TYPE 0 ≠
            THEN DROP 1 SF IF T0 '?' SAME
                THEN T0q1
                ELSE T0
                END
            Tq IF 2 FS? Lj1 Lj1C ≠ AND
                THEN TU.K TU.S + 200 / +
                END
            DUP2 1 2 START 'x' STO IF k 1 ==
                THEN Ia
                ELSE Iλ
                END
            →NUM SWAP
        NEXT
        - ROT ROT - /
    END
    IF k 1 ==
    THEN 'aq'
    ELSE 'λq'
    END
    STO
    NEXT
    2 CF IF 9 FS?
        THEN α&q
        END
    Cs DUP →hR 'hrq' STO →β 'βq' STO tvz θμ? Tq
    IF 1 FC?C 9 FC? AND
    THEN DUP
    ELSE Tq. Tq 'Tq.' STO
    END
    UNTIL - ABS preci 10 * ≤
    END
    IF 10 FS?
    THEN 'α1.' I α PUT 'qR1.' I qR PUT 'qV1.' I qV PUT
        IF 9 FC?C
        THEN &σF
        END
    END
    END
>>

Prae
<< IF Lj1 Lj1C ≠
    THEN T0q1 'T0q2' STO Tqj 'T0q1' STO Pml LIST→ DROP
        'βj' STO 'qVj' STO 'Rj' STO 'vj' STO 'λj' STO

```

```

'aj' STO 'hRj' STO IF T0m '?' SAME
THEN T0q2
ELSE T0m
END
'T0j' STO Lj1C 'Lj2' STO  $\mu$ n 'μk' STO nMax 'kMax' STO
END
IF T0 '?' SAME
THEN IF Lj1 LjC ==
THEN TRj 'T0R' STO
END
ELSE T0 'T0R' STO
END
>>

Post
<< IF hRq hRC ==
THEN IF n nMax >
THEN n 'nMax' STO
END
ELSE n 'nMax' STO
END
hRq 'hRC' STO
IF z Lj ==
THEN Mem1
END
T0 'T0m' STO Lj1 'Lj1C' STO Lj 'LjC' STO z.Ltg 'Lm' STO
>>

Tvz
<< Init2
DO 1 'n' STO+ Disp3 Expand IF hRq hRC ≠ n nMax > OR
THEN 'μn' n hRq n  $\mu$  PUT
END
'μn' n GET SQ 'μQ' STO  $\beta$ q hRq / R *
IF T0 '?' SAME Lj1 0 > AND
THEN IF Lj1 Lj1C ≠ hRq hRC ≠ OR n nMax > OR T0m '?' SAME
NOT OR z.Ltg Lm SAME NOT OR
THEN Tn
END
Tnj n GET
ELSE T0
END
- qV R SQ *  $\lambda$ q /  $\mu$ Q / +  $\mu$ Q hRq SQ + /  $\mu$ Q R SQ / v
aq / Ex z Lj1 - * EXP / 2 hRq * IF 3 FS?
THEN DUP2 Tvz1
END
* DUP 'ΣptR' STO+ DUP  $\mu$ Q / 2 * hRq * 'Σpt' STO+
IF r. R ≠
THEN  $\mu$ Q  $\sqrt{r.}$  * R / J0  $\mu$ Q  $\sqrt{J0}$  / *
END
DUP 'Δptr' STO 'Σptr' STO+
UNTIL Test
END
 $\beta$ q hRq / R * 4 INV hRq INV + qV R SQ * 2 /  $\lambda$ q / 3 DUPN * +
IF 3 FS?
THEN 4 DUPN Tvz2
END

```

```

Σpt - 'Tq' STO SWAP 4 INV + 3 DUPN 2 INV - * +
ΣptR - 'TR' STO r. R / SQ 2 / - * + Σptr - 'T' STO Disp4
>>

```

Tvz1

```

<< μQ / SQ * IF T0 '?' SAME Lj1 0 > AND
    THEN βj hRj / Rj * T0j - qVj Rj SQ * λj /
        IF n kMax >
            THEN 'μk' n hRj n μ PUT
            END
        'μk' n GET SQ DUP 'μQj' STO / + μQj hRj SQ + / μQj /
        2 hRj * SQ * μQj INV hRq hRj - 2 / hRq / hRj / - *
        μQj Rj SQ / vj aj / Ex Lj1 Lj2 - * EXP / -
    END
v * R SQ * aq / z Lj1 - / DUP 'Δptq' STO 'Σptq' STO+
>>

```

Tvz2

```

<< 4 ROLL 3 INV 2 hRq / DUP SQ + + * SWAP 4 * ROT
    IF T0 '?' SAME Lj1 0 > AND
        THEN βj hRj / Rj * - * qVj Rj SQ * 2 / λj / 3 INV
            hRq INV + hRj INV + 4 hRq / hRj / + * -
        ELSE T0 - *
        END
+ 8 / v * R SQ * aq / z Lj1 - / - Σptq + 'Tqq' STO
>>

```

Tn

```

<< 0 'Σk' STO βj hRj / Rj * qVj λj / Rj SQ * μQ / +
    IF hRq hRj ==
        THEN DUP T0j - μQ Rj SQ / vj aj / Ex Lj1 Lj2 - * EXP / -
        ELSE qVj λj / Rj SQ * 2 / hRq INV hRj INV - * -
            1 kMax FOR k 'μk' k GET SQ 'μQj' STO βj hRj / Rj * T0j
                - qVj Rj SQ * λj / μQj / + μQj hRj SQ
                + / μQj Rj SQ / vj aj / Ex Lj1 Lj2 - *
                EXP / μQ μQj - / 'Σk' STO+
            NEXT
    Σk μQ * 2 * hRj * hRq / hRq hRj - * -
    END
'Tnj' n ROT PUT
>>

```

μ

```

<< → H n << IF -3 CF H n + TYPE 0 ==
    THEN IF n 1 ==
        THEN IF H 0 ==
            THEN 0
            ELSE 2 H * DUP DUP 8 INV + ROT 1 + / 5.783207
                / SWAP INV + INV √
            END
        ELSE -3 SF IF H 3 8 / - n 4 INV - π * OVER INV 1 +
            / SWAP OVER / ABS 1 <
            THEN DROP n 3 4 / - π * 2 / DUP SQ H 3
                8 / - + √ +
            END
    END

```

```

-3 CF
END
DUP
IF 0 >
THEN DO DUP J1 OVER J0 DUP2 H * SWAP 5 PICK * -
      ROT H * ROT 4 PICK * + / OVER +
UNTIL DUP DUP 4 ROLL - SWAP / ABS 5E-11 <
END
END
ELSE CLLCD "Eigenwert  $\mu(H,n)$  als
      n-te Nullstelle der
      transzend. Gleichung
       $H \cdot J_0(\mu) - \mu \cdot J_1(\mu) = 0$ "
      1 DISP 3 FREEZE
END
>>
>>
Test
<< IF  $\Delta p_{tr}$  ABS preci < IF 3 FS?
      THEN  $\Delta p_{tq}$  ABS preci < AND
      END
THEN 'J' INCR 3 ==
ELSE 0
END
>>
Round
<<  $\Sigma$ DAT preci INV LOG 0 RND
  → d << →COL DUP 1 +
    → k << 1 k FOR j k ROLL IF j 1 ==
      THEN 3
      ELSE IF 8 FC? j 2 == AND
        THEN -3
        ELSE d
        END
      END
    RND
  NEXT
  >>
  COL→
  >>
  ' $\Sigma$ DAT' STO
>>
Ia& $\lambda$ 
<< 'x' PURGE -3 CF  $\lambda$  EVAL COLCT a EVAL COLCT
  1 2 FOR k DUP IF TYPE 0 ≠
    THEN 0 'x' ROT OVER  $\int$  EVAL COLCT
      IF k 1 ==
        THEN 'Ia'
        ELSE 'I $\lambda$ '
        END
      CYLINDER STO T4
      IF 15 FC?
        THEN PARV

```

```

                ELSE PADR
                END
            ELSE DROP
            END
        NEXT
    >>

α&q
<< I j. T0q1 Tq DRAWING WIRE TEMP.W PARV 'Tq' STO 'T0q1' STO
    jC OBJ→ OBJ→ DROP →LIST SWAP POS 'j' STO 'σ.F.L' SWAP
    j →σF PUT j →σFm 1000000 * 'q.RF' j GET OVER * SWAP 'q.VF'
    j GET OVER * SWAP 'αF' j GET * 'α.DZ' j GET SWAP - HEAT
    TEMPERATURE CYLINDER T4 PADR 'α' STO 'qV' STO 'qR' STO
>>

&σF
<< I Tq DRAWING WIRE TEMP.W PARV 'Tq' STO 'σ.F.L' SWAP j →σF PUT
    HEAT TEMPERATURE CYLINDER T4 PADR
>>

Ex
<< IF z.Ltg 'J' SAME
    THEN 2 / DUP SQ ROT + √ SWAP -
    ELSE INV *
    END
>>

Init1
<< CLEAR 0 IF 8 FC?
    THEN 0
    END
    T0 DUP DUP IF 3 FS?
    THEN T0
    END
    DEPTH →ARRY Σ+
    IF 10 FS?
    THEN z1 SIZE 0 CON DUP DUP 'αl.' STO 'qRl.' STO 'qVl.' STO
    END
    Lj DUP 'Ljl' STO 1 'I' STO
>>

Init2
<< {0 0 0 0 0 0} {n J Σpt Σptq Σptr ΣptR} STO
>>

Cs
<< ε .0000000567 *
>>

→hR
<< → Cs << α 4 Cs * T0R TC + 3 ^ * + λq / R *
    >>
>>

α.K
<< 20.4 .0065 R / +
>>

```

→β

```
<< → Cs << α TU.K * qR + IF Cs 0 ≠
      THEN TU.S TC + SQ SQ 3 TOR * TC -
      TOR TC + 3 ^ * + Cs * +
      END
```

λq /

>>

>>

Expand

```
<< IF μn SIZE n <
      THEN μn {0} + μk {0} + Tnj {0} + 3 →LIST { μn μk Tnj } STO
      END
```

>>

θμ?

```
<< IF 21 FS? 22 FC? AND qR 0 > AND TR θμ > AND
      THEN {22 23} SF IF 3 FS?C
      THEN 7 SF
      END
```

```
<< IF z Lj1 ==
```

```
      THEN TOR
```

```
      ELSE Tvz TR
```

```
      END
```

```
      θμ - Disp5
```

```
>>
```

```
'z' Lj1 z DUP2 + 2 / SWAP 3 →LIST ROOT DROP Mem1
```

```
IF 7 FS?C
```

```
THEN 3 SF Tvz
```

```
END
```

```
END
```

>>

Tqq?

```
<< "kalor. Temperatur Tqq
      zusätzlich berechnen ?
```

```
      ja      nein „J"
```

```
3 DISP 2 FREEZE {{ } {↓} { } { } {↓}} TMENU -1 WAIT IF 12.1 ==
```

```
      THEN 3 SF
```

```
      END
```

```
CLLCD
```

>>

Mem1

```
<< TR 'TRj' STO Tq 'Tqj' STO
```

```
hRq aq λq v R qV βq 7 →LIST 'Pml' STO
```

>>

Mem2

```
<< IF μn SIZE 50 >
```

```
      THEN 'μn' μn 'μk' μk 'Tnj' Tnj 1 3 START OBJ→ 50 - DROPN 50
```

```
      →LIST SWAP STO
```

```
      NEXT
```

```
END
```

>>

Out1

```
<< ΣDAT { { "Exit" << Exit >> } Input { } ΣDAT { } Info } TMENU
>>
```

Out2

```
<< Displ { { "Exit" << Exit >> } Input } TMENU
>>
```

Out3

```
<< z IF 15 FS?
    THEN 1000 *
    END
    IF 8 FC?
    THEN DUP v /
    END
    TR T Tq IF 8 FC?
        THEN 5
        ELSE 4
        END
    IF 3 FS?
    THEN 1 + Tqq SWAP
    END
    →ARRY Σ+ Disp2
>>
```

Exit

```
<< CYLINDER 2 MENU 1 23 FOR j j CF
    NEXT
>>
```

Displ

```
<< preci INV LOG 0 RND → d << T IF r. R ≠
    THEN TR
    END
    Tq Tqq
    IF 3 FC? z.Ltg 'J' SAME OR
    THEN DROP
    ELSE d RND "Tqq" →TAG SWAP
    END
    d RND "Tq(z)" →TAG
    IF 3 FC? z.Ltg 'J' SAME OR
    THEN SWAP
    ELSE ROT
    END
    d RND "T(R,z)" →TAG
    IF r. R ≠
    THEN IF 3 FC? z.Ltg 'J' SAME OR
        THEN 3
        ELSE 4
        END
    ROLL d RND "T(r,z)" →TAG
    END
>>
STD
>>
```

Disp2

```
<< preci INV LOG 0 RND → d << "z = " z 6 RND →STR +
      "↓ T(z,R) = " TR d RND →STR + +
      "↓ T(z,0) = " T d RND →STR + +
      "↓ Tq      = " Tq d RND →STR + + "↓" +
      IF 3 FS?
      THEN "↓ Tqq      = " Tqq d RND →STR + +
      END
      >>
      3 DISP 2 FREEZE
>>
```

Disp3

```
<< " n = " n →STR + "↓ " + 1 DISP
>>
```

Disp4

```
<< IF Tq 10000 > Tq -1000 < OR
      THEN " ! Warnung ! ↓ Tq = " Tq →STR + 1 DISP
      END
>>
```

Disp5

```
<< CLLCD "z = " z →STR + "↓ TR = " TR →STR + + 3 DISP 2 FREEZE
>>
```

Units

```
<< "R, r, L, z : [m]
      v: [m/s]   α: [W/m2/K]
      T0, TU : [°C]
      qR: [W/m2]
      qV: [W/m3]
      λ: [W/(m*K)]
      a: [m2/s]"          1 DISP 8 WAIT
>>
```

Help

```
<< CLLCD "z.Ltg : 'J' od. 'N'
      T0 : RE od. '?'
      preci, Lj1, r. : RE
      TU, α, ε, qR, qV, R,
      z, Lj, v : RE, {}, []
      a, λ: RE oder 'f(x)'"    1 DISP 3 FREEZE
>>
```

Info

```
<< "Matrixaufbau (ΣDAT) :
      =====↓"
      IF 8 FC?
      THEN "z t T(R,z) T(r,z) Tq(z)
            m s   °C      °C      °C
            -----
            0|0|  T0 |  T0 |  T0
            .|.|  .. |  .. |  .."
>>
```

```
ELSE " z T(R,z) T(r,z) Tq(z)
      m °C °C °C
      -----
      0 | T0 | T0 | T0
      ..| .. | .. | .."
END
+ 1 DISP 3 FREEZE IF 3 FS?
                THEN 3 WAIT "Tqq [°C]: " IF 8 FC?
                                THEN "6"
                                ELSE "5"
                                END
                + ". Spalte → " + 1 DISP 3 FREEZE
                END
>>
DIR T4 END
```

Hinweis:

In den Verzeichnissen **PARV** und **PADR** muß der Parameter TC mit dem Wert 273,15 abgespeichert vorliegen.

4) Programme zur Berechnung der Drahtabkühlung auf einer innengekühlten Ziehtrommel:

DIR COOLING BEGIN

Info

```
<< CLLCD "Drahtkühlung auf der
      Ziehtrommel
      (kalorische Näherung)"
  4 DISP 2 FREEZE
>>
```

Input

```
<< PARV v. w. d. D.2 4 →LIST { v? w? d? D2? } STO CLLCD
  "Eingaben Draht:" 4 DISP 2 FREEZE
  { CONT { "Help" << Hlp1 >> } Info 0.0 α.U 0.U ρ c. d. v. w. }
  TMENU HALT
      IF '0.0' VTYPE 0 ≠
      THEN Inp1
      END
      IF v. v? ≠
      THEN '?' 'α.U1' STO
      END

  CLLCD
  "Eingaben Ziehtrommel:" 4 DISP 2 FREEZE
  { CONT { "Help" << Hlp2 >> } { } L D.1 D.2 α.U1 0.U1 α.U2 0.U2 λ.T }
  TMENU HALT
  IF 'α.U1' VTYPE 0 ≠
  THEN Inp2
  END
  IF w. w? ≠ d. d? ≠ OR D.2 D2? ≠ OR
  THEN '?' 'p.L' STO
  END

  CLLCD
  " Eingaben für Wärme-
  übertragung zwischen
  Trommel und Draht:"
  4 DISP 2 FREEZE
  { CONT { "Help" << Hlp3 >> } α.K α.L ε.TD p.L E.D γ.D E.T γ.T }
  TMENU HALT
  IF 'p.L' VTYPE 0 ≠
  THEN Inp3
  END
  Hp
>>
```

Hp

```
<< -3 SF Init 0
  DO 0E '0.E' STO 0EE '0.EE' STO αS 'α.S' STO
      αDT 'α.DT' STO αD 'α.D' STO 0UD '0.UD' STO αT2 'α.2' STO
      0UT2 '0U2' STO 0T '0.T2' STO dsp
  UNTIL 0.T2 2 RND SWAP OVER ==
  END
  DROP
  Out
>>
```

Inp1

```
<< CLLCD "Eing. Draht-Ziehstein:
      zur Berechnung der
      mittl. Drahttemp. am
      Ziehdüsenende (~Trom-
      melauflaufpunkt)"
3 DISP 2 FREEZE
{ CONT { "Help" << Hlp11 >> } { } 0.0Z d.0 σ.Fm λ.D μR{ } ¥.2α
  D.Z2 λ.Z } TMENU HALT DEG DZ1m 'D.Z1m' STO vm 'v.m' STO
1DZ '1.DZ' STO 0DZ '0.0' STO
>>
```

Inp2

```
<< CLLCD "Eingaben zur Berech-
      nung des mittleren
      Wärmeübergangskoeff.
      am Trommelinnenrand-
      Kühlwasser"
3 DISP 2 FREEZE
0.U1 '0.W' STO
{ CONT { "Help" << Hlp21 >> } V⊗ 0.W s. 1.s } TMENU HALT
0.W '0.U1' STO Re 're' STO α1 'α.U1' STO
>>
```

Inp3

```
<< CLLCD " Mittlere Pressung
      Draht-Ziehtrommel
      bestimmen:

      Aufhaspelkraft
      vorgeben      berechnen
      |              |"
1 DISP 3 FREEZE
{ { } { ↓ } { } { } { ↓ } } TMENU -1 WAIT
IF 12.1 ==
THEN { CONT { "Help" << Hlp31 >> } { } F.Auf } TMENU HALT
ELSE σ.Fm d.0 d. μR ¥.2α 5 →LIST STRAIN FORCE FORC2 Inp21 PARV
{ σ.Fm d.0 d.1 μR ¥.2α } STO
{ CONT Info { } F.G σ.Fm d.0 d.1 μR ¥.2α 1.z γ } TMENU HALT
FZ F.G + σ.Fm d.0 μR ¥.2α 5 →LIST
COOLING PARV { F.Auf σ.Fm d.0 μR ¥.2α } STO
END
Hlp32 { CONT { "Help" << Hlp32 >> } { } F.Ab } TMENU HALT
{ } TMENU
"Reibwert μ.T zwischen
Ziehtrommel und Draht:"
" 'μ.T' "
INPUT
OBJ→ SWAP STO " ↓" DUP DUP + DUP + + 3 DISP 2 FREEZE pL 'p.L' STO
>>
```

Out

```

<< { { "Exit" << WIRE 2 MENU >> } Input
      { "θ.A" << CLLCD "Drahttemp. am Zieh-
                    düsenende ~ Drahttemp.
                    am Trommelaufpunkt

                    θ.A = "
                    θ.0 0 RND →STR + " °C" + 3 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "θ.E" << CLLCD " Drahttemperatur bei
                    Abheben von Trommel

                    θ.E = "
                    θ.E 0 RND →STR + " °C" + 4 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "θ.EE" << CLLCD "Mittlere Drahttempera-
                    tur zwischen Trommel-
                    Auf- und Ablaufstelle

                    θ.EE = "
                    θ.EE 0 RND →STR + " °C" + 3 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "θ.T1" << CLLCD " Temperatur am
                    wassergekühlten
                    Trommelinnenrand

                    θ.T1 = "
                    D1 2 / 'r.' STO θT 0 RND →STR + " °C"
                    + 3 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "θ.T2" << CLLCD " Temperatur
                    am Trommelaußenrand

                    θ.T2 = "
                    D2 2 / 'r.' STO θT 0 RND →STR + " °C"
                    + 4 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { }
      { "p.L" << CLLCD " Linienpressung
                    Draht-Ziehtrommel

                    p.L = "
                    p.L 0 RND →STR + " N/m" + 4 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "b." << CLLCD "Kontaktbreite Draht -
                    Ziehtrommel nach HERTZ

                    b = "
                    b. 1000000 * 1 RND →STR + " µm" + 4 DISP 2 FREEZE
                    >> }
      { "α.U1" << CLLCD " Wärmeübergangskoeff.
                    Wasser-Tr.innenwand

                    α.U1 = "
                    α.U1 0 RND →STR + " W/(m²K)" + 4 DISP 2 FREEZE
                    >> }
    } TMENU
  >>

```

dsp

```
<< CLLCD
"
  θ.E = " θ.E 1 RND →STR +
"
  θ.EE = " + θ.EE 1 RND →STR +
"
  θ.T2 = " + θ.T2 1 RND →STR + "
" + 3 DISP 2 FREEZE
>>
```

Init

```
<< d. 1000 / D.1 1000 / D.2 1000 / L 1000 / 4 →LIST { d D1 D2 LT } STO
zE 'z.E' STO α.U θ.U α.U2 θ.U2 θ.0 + 2 / θ.U2 mD D2 2 / 0 b 9 →LIST
{ α.D θ.UD α.2 θ.T2 θU2 m.D r. α.S b. } STO
>>
```

b

```
<< d π / E 1000000 * / p.L * √ 4 * >>
```

E

```
<< E.T E.D * 1 γ.T SQ - E.D * 1 γ.D SQ - E.T * + / 2 * >>
```

zE

```
<< D2 d + π * w. * >>
```

mD

```
<< d w. * LT / >>
```

FN

```
<< F.Auf F.Ab - μ.T / >>
```

pL

```
<< FN D.2 d. + 1000 / π * w. * / >>
```

αDT

```
<< d b. - α.K α.S + * b. α.L * + d / >>
```

αS

```
<< ε.TD σ * θ.T2 θ.C + SQ SQ θ.EE θ.C + SQ SQ -
  θ.T2 θ.EE - / *
>>
```

αD

```
<< α.U α.DT + 2 / >>
```

θUD

```
<< α.DT θT OVER * α.U θ.U * + SWAP α.U + / >>
```

αT2

```
<< m.D α.DT * 1 m.D - α.U2 * + >>
```

θUT2

```
<< m.D α.DT * θ.EE * 1 m.D - α.U2 * θUD * + m.D α.DT * 1 m.D -
  α.U2 * + /
>>
```

θT

```
<< 2 D2 / α.2 λ.T / D2 r. / 2 / LN * + α.U1 * θ.U1 * 2 D1 / α.U1
    λ.T / r. D1 2 / / LN * + α.2 * θU2 * + α.U1 D2 / α.2 D1 / + 2 *
    α.U1 α.2 * λ.T / D2 D1 / LN * + /
>>
```

θEE

```
<< θ.UD IF DUP θ.E ≠
    THEN θ.E θ.0 - θ.UD θ.0 - θ.UD θ.E - / LN / - RE
    END
>>
```

θE

```
<< 1 4 α.D * ρ / c. / d / v. / z.E * NEG EXP - θ.UD θ.0 - * θ.0 +
>>
```

θDZ

```
<< qV qR D.Z1m / m * 4 * + 1.DZ * v.m / ρ / c. / θ.0Z + >>
```

qV

```
<< d.0 d. / LN 2 * ¥.2α 2 / TAN 2 * 3 / + v.m * 1.DZ / σ.Fm
    1000000 * *
>>
```

qR

```
<< σ.Fm 1000000 * μR. * v.m * >>
```

1DZ

```
<< d.0 d. - 2000 / ¥.2α 2 / TAN / >>
```

kZ

```
<< λ.Z D.Z1m 2 / / D.Z2 D.Z1m / LN / >>
```

DZ1m

```
<< d.0 d. + 2000 / >>
```

m

```
<< α.L kZ → α k << k α / 1 + INV 1 + 2 / 1 k α / 1 + INV 4 * 3 / 3 √
    / k * 1.DZ λ.D / ρ / c. / v.m / √ * - *
    >>
>>
```

vm

```
<< d. 1000 / D.Z1m / SQ v. * >>
```

α1

```
<< Nu.1 Nu.t MAX λW * 2 s. 1000 / * / >>
```

Nu.1

```
<< 3.66 1.2 D.1 2 s. * - D.1 / √ * + 3 ^ 1.615 1 .14 D.1 2 s. * - D.1 /
    3 XROOT * + * re Pr * 2 s. * * 1.s / 3 XROOT * 3 ^ re Pr * 2 s. * * 1.s
    / √ 2 1 22 Pr * + / 6 XROOT * 3 ^ + + 3 XROOT
>>
```


Nu.t

```
<< 1 .14 D.1 2 s. * - D.1 / .6 ^ * - .79 re LN * 1.64 - SQ INV 8 /
  → η << re 1000 - Pr * η * 1 12.7 η √ * Pr 2 3 / ^ 1 - * + /
    >>
  * 1 2 s. * 1.s / 2 3 / ^ + *
>>
```

Re

```
<< ω dh * γW / >>
```

Pr

```
<< 418.7 θ.W 27.3 + / 1.85 - >>
```

ω

```
<< ω.ax ω.⊗ * √ >>
```

ω.ax

```
<< v⊗ 3600 / As / >>
```

ω.⊗

```
<< D.1 D.2 d. + / v. * >>
```

dh

```
<< 2 s. * 1000 / >>
```

As

```
<< π →NUM D.1 s. - * s. * .000001 * >>
```

λW

```
<< .5623 .00205 θ.W * + .0000097 θ.W SQ * - >>
```

γW

```
<< .00006137 θ.W 30.6 + / .0000002 - >>
```

Hlp1

```
<< CLLCD "θ.0[°C]:
```

```
  Drahttemperatur am
  Trommelaufpunkt;
  wenn unbekannt,
  dann ? eingeben."
```

```
1 DISP 3 FREEZE { { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU -1 WAIT DROP
```

```
"α.U[W/(m²K)]: Wärme-
  überg.-koeff an Luft
```

```
θ.U[°C]: Lufttemperat.
```

```
ρ[kg/m³]: Dichte"
```

```
1 DISP 3 FREEZE -1 WAIT DROP
```

```
"c.[J/(kgK)]: spezif.
  Wärmekapazität
```

```
d.[mm]: Draht-Ø
```

```
v.[m/s]: Drahtgeschw.
```

```
w.[-]: Windungszahl"
```

```
3 DISP 2 FREEZE 0 MENU
```

```
>>
```

Hlp11

```
<< "θ.0Z[°C]:  
    Drahttemperatur  
    am Ziehdüsen Eintritt  
  
    d.0[mm]:  
    Drahtdurchmesser  
    am Ziehdüsen Eintritt"  
1 DISP 3 FREEZE { { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU -1 WAIT DROP  
"σ.Fm[N/mm2]: mittlere  
    Fließspannung  
μ[-]: Reibwert  
  
λ.D[W/(m·K)]: Wärme-  
    leitfähigkeit  
    des Drahtes"  
1 DISP 3 FREEZE -1 WAIT DROP  
"¥.2α[°]: Ziehholöffn.<  
D.Z2[mm]: Ziehstein-  
    außendurchmesser  
λ.Z[W/(m·K)]: Wärme-  
    leitfähigk. Ziehstein"  
3 DISP 2 FREEZE 0 MENU  
>>
```

Hlp2

```
<< CLLCD "L[mm]:    Trommelhöhe  
    D.1[mm]:    Tr.-Innen-Ø  
    D.2[mm]:    Tr.-Außen-Ø  
    θ.U1[°C]:    Umgeb.-temp.  
                Tr.Innenrand  
                = mittlere Kühl-  
                wassertemperatur"  
1 DISP 3 FREEZE { { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU -1 WAIT DROP  
CLLCD "α.U1[W/(m2K)]:  
  
    Wärmeübergangskoeffi-  
    zient am Innenrand;  
    wenn unbekannt,  
    dann ? eingeben."  
1 DISP 3 FREEZE -1 WAIT DROP  
"α.U2[W/(m2K)]: Wärme-  
    überg.-koeff.(außen)  
θ.U2[°C]: Umgeb.-temp.  
    Außenrand  
λ.T[W/(m·K)]: λTrommel"  
3 DISP 2 FREEZE 0 MENU  
>>
```

Hlp21

```
<< CLLCD  
    "Wärmeübertragung (als  
    Näherung) für laminare  
    bzw. turbulente Strö-  
    mung im konzentrischen  
    Ringspalt;  
    vgl. VDI-Wärmeatlas  
    (Gb1..6, Gd1..5)"  
1 DISP 3 FREEZE 4 WAIT
```

```
"V⊗[m³/h]: Volumenstrom
θ.W[°C]: mittlere
Kühlwassertemperatur
in der Ziehtrommel
( = θ.U1 )
s. [mm] Ringspaltdicke
l.s[mm] Ringspaltlänge"
```

```
1 DISP 3 FREEZE
```

```
>>
```

Hlp3

```
<< CLLCD "α.K[W/(m²K)]: αKonvek.
α.L[W/(m²K)]: αLeitung
Kontakt Draht→Trommel
```

```
ε.TD: Emissionsgrad
Trommel-Draht
```

```
"
```

```
1 DISP 3 FREEZE { { } { } { } { } { } { PgD↓ } } TMENU -1 WAIT DROP
CLLCD " p.L [N/m]
```

```
Linienpressung
Draht-Trommel;
wenn unbekannt,
dann ? eingeben."
```

```
1 DISP 3 FREEZE -1 WAIT DROP
```

```
"E.D, E.T in [N/mm²]:
E-Moduli Draht,Trommel
γ.D, γ.T [-]: Quer-
dehnungszahlen von
Draht und Trommel"
```

```
3 DISP 2 FREEZE 0 MENU
```

```
>>
```

Hlp31

```
<< CLLCD "F.Auf[N]: Kraft,
mit der der Draht auf
Ziehtrommel aufläuft"
```

```
4 DISP 2 FREEZE
```

```
>>
```

Hlp32

```
<< CLLCD "F.Ab[N]: Kraft,
mit der der Draht von
Ziehtrommel abläuft"
```

```
4 DISP 2 FREEZE
```

```
>>
```

```
DIR COOLING END
```

5) Allgemeine Hilfsprogramme:

nDUP braucht 2 Argumente (x, n) und erzeugt n Stackebenen (inkl.) mit dem Inhalt x der 1. Ebene

```
nDUP
<< DUP
  IF 0 ==
  THEN DROP2
  ELSE IF OVER TYPE DUP 0 == SWAP 1 == OR
  THEN 1 →LIST SWAP CON OBJ→ DROP
  ELSE IF DUP 1 >
    THEN 2 SWAP START DUP
    NEXT
  ELSE DROP
  END
END
END
>>
```