

ZWEI–EBENEN–OPTIMIERUNGSAUFGABEN  
MIT NICHTKONVEXER ZIELFUNKTION  
IN DER UNTEREN EBENE:  
PFADVERFOLGUNG UND SPRÜNGE

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik  
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg  
genehmigte

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.

vorgelegt

von Diplom–Mathematiker Steffen Vogel

geboren am 24.11.1969 in Karl-Marx-Stadt / heute Chemnitz

Gutachter: Prof. Dr. Stephan Dempe, Freiberg  
Prof. Dr. Diethard Klatte, Zürich  
Prof. Dr. Jiří Outrata, Erlangen

Tag der Verleihung: 15. April 2002

---

## Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle in erster Linie Herrn Prof. Dr. Stephan Dempe danken, der diese Arbeit nicht nur inspirierte und mir als Betreuer stets zur Seite stand, sondern auch durch konstruktive Kritik und wertvolle Kommentare zur Qualität dieses Werkes beigetragen hat.

Ich bedanke mich ebenso bei meinem Kollegen Herrn Dr. Heiner Schreier und allen anderen Mitarbeitern der Fakultät für Mathematik und Informatik der TU Bergakademie Freiberg, die bei Fragen immer ein offenes Ohr hatten.

Mein Dank geht auch an meine Familie, Freunde und Bekannte für ihre Unterstützung während der Anfertigung dieser Arbeit.

Freiberg, im Oktober 2001

Steffen Vogel

Zwei–Ebenen–Optimierungsaufgaben  
mit nichtkonvexer Zielfunktion  
in der unteren Ebene:  
Pfadverfolgung und Sprünge

Steffen Vogel

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Begriffsbildung . . . . .	4
1.2	Ein Komplexbeispiel . . . . .	6
1.2.1	Problemstellung . . . . .	7
1.2.2	Lösungsansatz . . . . .	10
1.2.3	Reale Gegebenheiten . . . . .	11
1.3	Ein Ausblick . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>12</b>
2.1	Formulierung des Zwei–Ebenen–Problems . . . . .	12
2.2	Optimistische und pessimistische Lösung . . . . .	13
2.3	Generelle Voraussetzungen . . . . .	19
2.4	Mengentheoretische Lösbarkeitsgarantien . . . . .	22
2.5	Nebenbedingungen in der oberen Ebene . . . . .	29

1	<i>EINLEITUNG</i>	2
<b>3</b>	<b>Schwache und asymptotische Lösungen</b>	<b>31</b>
3.1	Schwache Lösungen . . . . .	31
3.2	Asymptotische Lösungen als Spezialfall schwacher Lösungen . . .	39
<b>4</b>	<b>Mathematische Zwei–Ebenen–Optimierung</b>	<b>43</b>
4.1	Die Aufgabe der unteren Ebene . . . . .	45
4.1.1	Generelle Voraussetzungen . . . . .	45
4.1.2	Stationäre und kritische Punkte . . . . .	47
4.1.3	Nichtdegenerierte kritische Punkte . . . . .	51
4.1.4	Richtungsableitbarkeit der Lösungsfunktion . . . . .	54
4.2	Optimalität in der Aufgabe (MZO) . . . . .	56
4.2.1	Lokaler und globaler Optimalitätsbegriff . . . . .	63
4.2.2	Motivation subglobaler Lösungen . . . . .	70
4.2.3	Definition der subglobalen Lösungen . . . . .	73
4.2.4	Der Spezialfall der einparametrischen unteren Ebene . . .	87
<b>5</b>	<b>Einparametrische Zwei–Ebenen–Aufgaben</b>	<b>92</b>
5.1	Die generischen Typen . . . . .	95
5.2	Subglobale Lösungen und Optimalitätskriterien . . . . .	101
5.3	Generizität in der einparametrischen Zwei–Ebenen–Optimierung .	117
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>

# 1 Einleitung

Oftmals treten in Anwendungsgebieten der Mathematik und ganz besonders in Aufgabenstellungen des Operations Research parametrische Optimierungsprobleme auf, in denen die bezüglich eines Parameters zu minimierende oder zu maximierende Zielfunktion von weiteren Variablen abhängt, deren Wertevorrat wiederum von diesem Parameter beeinflusst wird. Mathematisch formuliert hat man es also mit einem Problem der Form

$$\begin{aligned}
 F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\
 t &\in T \\
 x &\in \Psi(t)
 \end{aligned}
 \tag{ZEOA}$$

mit einer Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  zu tun, in dem  $t$  einen Wert aus  $T$  annehmen kann. Was auf den ersten Blick wie eine gewöhnliche Optimierungsaufgabe aussieht, erweist sich bei genauerer Betrachtung der Zielfunktion  $F(\cdot, \cdot)$  als in hohem Maße problematisch. Abhängig von  $x$  und  $t$  soll sie nämlich nur bezüglich  $t$  minimiert werden, was schon an diesem Punkt die Frage nach dem hier zu verwendenden Optimalitätsbegriff aufwirft. Sie stellt sich in der Regel nur dann nicht, falls  $\Psi(t)$  für alle  $t \in T$  die Kardinalität Eins hat und somit die Nebenbedingung „ $x \in \Psi(t)$ “ einfach als eine herkömmliche, passend gewählte Punkt–Punkt–Abbildung  $x = x(t)$  formuliert werden kann. Alle  $x$  in (ZEOA) wären folglich durch den Term  $x(t)$  zu ersetzen, was die eben beschriebenen Schwierigkeiten eliminiert. Leider ist die Einelementigkeit der Abbildung  $\Psi(t)$  für alle  $t \in T$  nur einer kleinen und in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle spielenden Klasse von Beispielen eigen.

Ursprung von Aufgaben des Typs (ZEOA) sind meist hierarchische Strukturen, die von folgenden Eigenschaften geprägt sind:

- Die Belegung der Variablen  $x$  sowie des Parameters  $t$  mit konkreten Werten wird von zwei Entscheidungsträgern vorgenommen, die unterschiedliche Stufen in der Hierarchie repräsentieren.
- Die Vorgabe der Größe  $t = \bar{t}$  erfolgt durch den in der übergeordneten Hierarchiestufe Stehenden, den so genannten *Leader*.
- In Abhängigkeit von dieser Festlegung ermittelt der *Follower* ein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$ . Da  $\Psi$  meist objektive Einschränkungen an die Wahl von  $x$  in Abhängigkeit von  $t$  beschreibt, nennt man einen konkreten mengenwertigen Funktionswert  $\Psi(\bar{t})$  auch die Menge der für  $\bar{t}$  rationalen Reaktionen sowie ein Element  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  eine rationale Antwort. Der Follower handelt unter dem Einfluss des Parameters und eventuell weiterer äußerer Faktoren völlig selbständig.
- Der Leader versucht nun seinen Parameter derart zu wählen, dass die Funktion  $F$  unter Einbeziehung der vom Follower zu erwartenden Reaktion minimiert wird.

Die Begriffe Leader und Follower haben im Zusammenhang mit der Untersuchung solcher Probleme auch im nicht englischsprachigen Raum eine Verwendungshäufigkeit gefunden, die ihre Übersetzung unnötig macht und sogar als unangebracht erscheinen lässt.

Man bemerkt sofort die Möglichkeit, die Zahl der Stufen im Entscheidungsprozess auf mehr als zwei zu erhöhen. Die daraus resultierenden Aufgaben sind dann bekannt als Mehrebenen–Optimierungsprobleme und wurden ebenso wie die Zwei–Ebenen–Aufgaben erstmals beschrieben von VON STACKELBERG (siehe [35]).

Zur Motivation der im weiteren Verlauf verwendeten Optimalitätsbegriffe betrachte man das folgende einfache Problem:

**Beispiel 1.1** Eine Aufgabe des Typs (ZEOA) sei gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x, t) = x &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in \{0, 1\} \\ x &\in \Psi(t) = \{x \mid |x| \leq t\}. \end{aligned}$$

Für  $t_0 = 0$  ist  $\Psi(t_0) = \{0\}$  und deshalb sowohl die rationale Antwort  $x_0 = 0$  als auch der zu erwartende Zielfunktionswert  $F(x_0, t_0) = 0$  eindeutig bestimmt. Im Punkt  $t_1 = 1$  steht dem Follower jedoch das Intervall  $[-1, 1]$  als Menge der rationalen Reaktionen zur Verfügung. Dementsprechend kann der Wert der Zielfunktion je nach zu beobachtender Antwort ebenfalls beliebig zwischen  $-1$  und  $1$  schwanken.

Man kann in diesem Beispiel *beide* für  $t$  zulässigen Werte als Lösung interpretieren.

Argumentation für Lösung $t_1 = 1$	Argumentation für Lösung $t_0 = 0$
Hier spielt die Überlegung eine Rolle, dass für $t_1$ eine Antwort $x \in [-1, 0)$ des Followers auftreten kann, die den Zielfunktionswert negativ und damit <i>besser</i> als für $t_0$ werden lässt.	$t_0$ als Lösung begründet man dadurch, dass für $t_1$ der Follower mit $x \in (0, 1]$ reagieren könnte, woraus ein schlechterer als der für $t = t_0$ erreichbare Zielfunktionswert 0 resultierte.

Beide Vorgehensweisen haben ihre Berechtigung und spielen in der Zwei-Ebenen-Optimierung eine wichtige Rolle. Man bemerkt, dass bei einer Lösungsermittlung in Übereinstimmung mit der in der linken Spalte der Tabelle beschriebenen Strategie der Leader auf günstige, möglicherweise sogar unterstützende Reaktionen des Followers hofft, wohingegen ein nach der rechts gegebenen Begründung Entscheidender dies nicht tut, sondern eventuell geradezu „mit dem Schlimmsten rechnet“.

Die vorgestellten Ansätze zur Lösung von (ZEOA) heißen dementsprechend *optimistische* (in der Tabelle links) und *pessimistische* Strategie.

## 1.1 Begriffsbildung

Schaut man sich die gerade eingeführten Vorgehensweisen an, so fällt auf, dass der Follower zunächst gezwungen ist, die Güte jedes  $\bar{t} \in T$  dahingehend zu untersuchen, welchen Wert der Zielfunktion er bei Anwendung der optimistischen (pessimistischen) Strategie günstigenfalls (schlechtestenfalls) zu erwarten hat. Folglich

bewertet er jedes  $\bar{t} \in T \cap \text{dom } \Psi$  mit dem Wert

$$\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = \min_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t})$$

bzw.

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = \max_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t})$$

und sucht anschließend über der zulässigen Parametermenge  $T \cap \text{dom } \Psi$  das Minimum der Funktion  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  respektive  $\varphi_{\text{pess}}(t)$ . Hierin beschreibt die im folgenden Abschnitt in aller mathematischen Strenge eingeführte Menge  $\text{dom } \Psi$  die Menge aller  $t$ , für die eine Reaktion des Followers überhaupt existiert.

Nunmehr kann erläutert werden, was die Aufgabe (ZEOA) zu einer *Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe* macht. Ohne Verwendung der beiden Parameterbewertungsfunktionen  $\varphi_{\text{opt/pess}}$  ergeben sich nämlich für (ZEOA) die Ersatzaufgaben

$$F_{\text{opt}} = \min_{t \in T \cap \text{dom } \Psi} \min_{x \in \Psi(t)} F(x, t)$$

im optimistischen und

$$F_{\text{pess}} = \min_{t \in T \cap \text{dom } \Psi} \max_{x \in \Psi(t)} F(x, t)$$

im pessimistischen Fall. Die Berechnung des Minimums bzw. Maximums der Zielfunktion  $F(x, t)$  für festes  $\bar{t} \in T \cap \text{dom } \Psi$  über alle  $x \in \Psi(\bar{t})$  ist die mittlere Optimierungsebene und die Minimierung der sich ergebenden Funktionen  $\varphi_{\text{opt/pess}}(t)$  über  $t \in T$  die obere Ebene.

Die Nichtverwendung des Begriffes „untere Ebene“ ergibt sich aus der Tatsache, dass zahlreiche Instanzen von (ZEOA) dadurch gekennzeichnet sind, dass die Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi$  als die Menge aller Lösungen einer vom Parameter  $t$  abhängigen und vom Follower zu lösenden weiteren Optimierungsaufgabe (OA) definiert ist. Die Bestimmung der Lösung des Problems (OA) für festes  $t \in T$  ist dann die Aufgabe der unteren Ebene.

Verallgemeinernd ist es deshalb natürlich auch möglich, die meist vom Follower vorgenommene Bestimmung von  $\Psi(\bar{t})$  für  $\bar{t} \in T$  auch bei Abwesenheit einer dabei zu minimierenden zweiten Zielfunktion stets als Aufgabe der unteren Ebene zu bezeichnen. Die Einschränkung des Begriffes der *Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe* auf Probleme, in denen  $\Psi(t)$  als Lösungsmenge einer Optimierungsaufgabe mit Parameter  $t$  definiert ist (siehe SCHMIDT [31]), scheint somit unnötig. Vielmehr sind dort eine Vielzahl von mathematischen Fragestellungen denkbar. Die Abhängigkeit des  $x$  von  $t$  kann also zum Beispiel in Form eines einfachen parametrischen Ungleichungssystems gegeben sein, oder auch als Lösung einer Variationsungleichung bzw. eines Komplementaritätsproblems<sup>1</sup>. Gleichwohl

<sup>1</sup>Wenn  $\Psi(t)$  als Lösung einer Variationsungleichung oder einer verallgemeinerten Gleichung der Form „ $0 \in \Gamma(x, t)$ “ gegeben ist, dann wird die Aufgabe (ZEOA) selbst ein MPEC (*mathematical program with equilibrium constraints*) genannt (siehe [26, 28]).

wird die Behandlung von Optimierungsproblemen in der unteren Ebene auch in dieser Arbeit den größten Raum einnehmen.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob im Fall dass  $\Psi(t)$  für alle  $t \in T$  einelementig ist, der Begriff der Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe adäquat ist. Die eindeutige Bestimmtheit der rationalen Antwort des Followers und die daraus resultierende triviale Lösungsfindung in der mittleren Ebene macht letztere nämlich eigentlich überflüssig. Durchaus sinnvoll wäre also die Forderung, dass zumindest ein  $\bar{t} \in T$  die Eigenschaft  $\text{card } \Psi(\bar{t}) > 1$  besitzt.

Im Sinne dieser strengen Auslegung handelt es sich demnach bei der folgenden Aufgabe *nicht* um ein Zwei-Ebenen-Optimierungsproblem, obwohl dort zwei den Hierarchien zugeordnete Optimierungsaufgaben zu lösen sind:

**Beispiel 1.2** *Ein Unternehmen erziele bei einem Absatz von  $x$  Produkteinheiten einen Gewinn vor Steuern von  $B(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{10}x$ . Auf die Absatzmenge werde eine erlösunabhängige Mengensteuer in Höhe von  $S(x) = rx$  ( $r \in [0, 1]$ ) erhoben. Bei welchem Steuersatz wird die höchste Steuereinnahme erzielt, falls unterstellt wird, dass der Unternehmer seinen Nettogewinn maximiert?*

**Lösung:** *Die Nettogewinnfunktion  $N_r(x) = B(x) - S(x) = 2\sqrt{x} - (\frac{1}{10} + r)x$  hat für alle zulässigen Steuersätze  $r$  das eindeutig bestimmte globale Maximum  $x_{\max}(r) = 100/(10r + 1)^2$ . Folglich ist die Steuereinnahme bei Realisation dieses Produktionsprogramms gleich  $S(x_{\max}(r)) = 100r/(10r + 1)^2$ , die als Funktion von  $r$  aufgefasst ein wiederum eindeutig bestimmtes Maximum für  $r_{\max} = \frac{1}{10}$  annimmt. Damit kann bei diesem Steuersatz und der entsprechend obigen Annahmen gewählten Produktionsmenge von 25 Einheiten die höchste Steuereinnahme von 2,5 Geldeinheiten erwartet werden. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 graphisch dargestellt.*

Fragestellungen, die auf eine Zwei-Ebenen-Aufgabe (ZEOA) führen, treten in der Realität recht häufig auf. Eine der bekanntesten dürfte die Prinzipal-Agenten-Theorie sein, die oft auf das Problem der Bestimmung optimaler Anreize hinausläuft (siehe [6]). Ein technisches Anwendungsbeispiel, welches sich mit der kostenminimalen Einstellung chemischer Gleichgewichte beschäftigt, wurde von OEDER in [27] beschrieben.

## 1.2 Ein Komplexbeispiel

Ein sehr interessanter Anwendungsfall der Zwei-Ebenen-Optimierung wurde kürzlich von BARD, PLUMMER und SOURIE in [2] und [3] beschrieben. Seine wesentlichsten Fragestellungen seien hier in vereinfachter Form dargestellt.



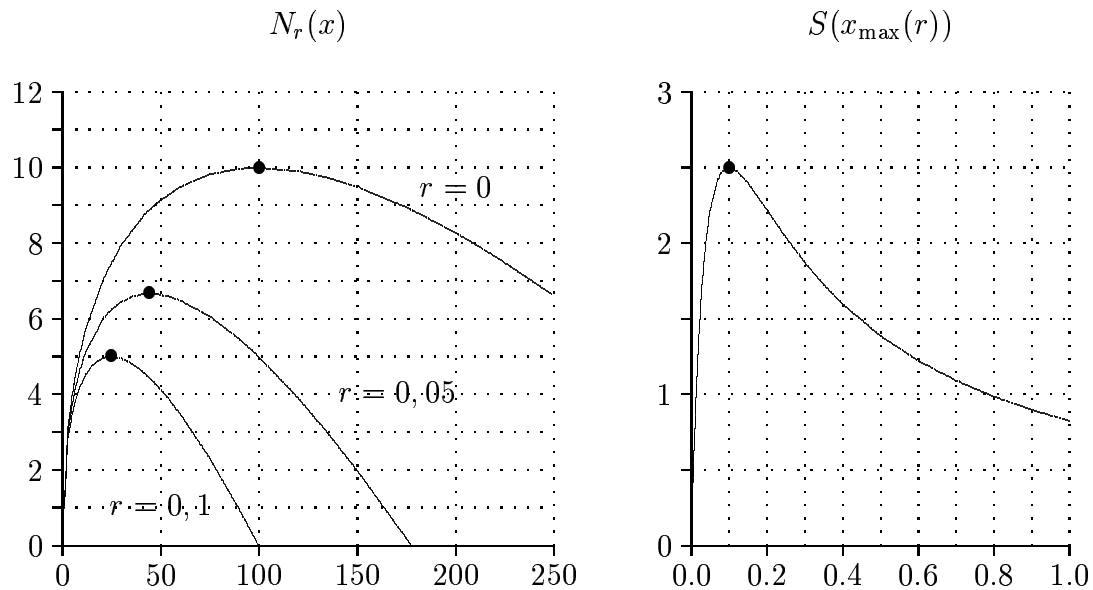


Abbildung 1: Nettogewinnfunktion für verschiedene Steuersätze und Steuereinnahme bei gewinnmaximaler Produktionsmenge

### 1.2.1 Problemstellung

Die hohen Subventionen für die europäische Landwirtschaft sowie der Wunsch nach einer Reduktion der Abgasemissionen von Kraftfahrzeugen hat die Regierung Frankreichs dazu bewogen, für chemische Betriebe Anreize in Form von Steuererleichterungen zur Produktion von Biokraftstoffen (Ethanol und Ester) aus Weizen, Mais, Raps, Sonnenblumen u.ä. zu schaffen. Der Anbau dieser Pflanzen soll auf sonst brachliegendem Gelände erfolgen. Wir haben 2 Entscheidungsträger:

- Die Regierung hat das Problem, die Produktion von Biokraftstoff mit einer Steuererleichterung zu belohnen und gleichzeitig die öffentlichen Ausgaben zu minimieren. Zweites Ziel ist es, den zur Kraftstoff-Gewinnung genutzten Brachlandanteil über einen vorgegebenen Prozentsatz anzuheben.
- Die Landwirte wollen in unserem Modell ihren Profit maximieren. Dabei ist zu beachten, daß sie beim Anbau von Pflanzen zur Kraftstoffproduktion auf Brachland erstens einen Mehraufwand an Arbeit haben, und zweitens die direkten Brachland-Subventionen verlieren. Der erzielbare Erlös muß also ausfallende Subventionen und Arbeitsaufwand übersteigen.

Beginnen wir mit dem Problem der Landwirte. Der Vereinfachung halber wollen wir uns auf einen einzigen Landwirt beschränken. Er produziert auf  $x$  Hektar

Land verschiedene Pflanzen zu Ernährungszwecken und möchte auf  $y$  Hektar Land verschiedene Pflanzen zur Herstellung von Biokraftstoffen herstellen. Hier sind  $x$  und  $y$  Vektoren, deren einzelne Komponenten  $x_i$  und  $y_j$  angeben, wieviel Land der Landwirt für die einzelne Pflanzensorte reservieren möchte. Desweiteren läßt er  $z$  Hektar seines Ackers brach liegen. Wenn er insgesamt über  $\sigma$  Hektar Ackerland verfügt, muß er dieses so auf die einzelnen Pflanzensorten und das Brachland aufteilen, daß in der Gesamtheit sein ganzes Land aufgeteilt wird. Die folgende Bedingung beschreibt die Forderung, daß die Summe über alle diese Flächen gleich der gesamten, dem Landwirt gehörenden Ackerfläche ist:

$$\sum x_i + \sum y_j + z = \sigma. \quad (1)$$

Eine ähnliche weitere Nebenbedingung ergibt sich aus der Beschränkung des zur Nahrungsmittelproduktion verwendeten Ackerlandes auf  $\theta \cdot 100\%$  des gesamten Ackerlandes (das sind beispielsweise 85% des gesamten Ackerlandes). Wenn wir natürlicherweise annehmen, daß der Landwirt diese Bedingung vollständig ausnutzt, ergibt sich die Forderung mit einem gegebenen  $\theta \in (0, 1)$  als

$$\sum y_j + z = (1 - \theta)\sigma. \quad (2)$$

Natürliche Bedingungen ergeben sich daraus, daß die für die einzelnen Pflanzensorten reservierten Flächen nicht negativ sein dürfen:

$$x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \quad y_j \geq 0 \text{ für alle } j, \quad z \geq 0. \quad (3)$$

Eine Grundannahme des Modells besteht darin, daß der Landwirt sein Ackerland so unterteilen möchte, daß er einen maximalen Gewinn beim Verkauf der auf seinem Land gewachsenen Produkte auf dem Markt erzielt. Wenn wir davon ausgehen, daß der Landwirt weiß, welche Menge der einzelnen Pflanzensorten je Hektar wächst und er den Gewinn je Mengeneinheit jeder Pflanzensorte kennt, so kann er durch Multiplikation dieser beiden Größen den realisierten Gewinn  $a_i$  und  $b_j$  für die auf einem Hektar gewachsene Menge jeder Pflanzensorte ermitteln. Damit ergibt sich ein Gewinn von  $a_i x_i$  für die auf  $x_i$  Hektar gewachsene Menge der  $i$ -ten Nahrungsmittelpflanze. Für die zwecks Erzeugung von Biokraftstoffen reservierten Flächen erhalten wir einen Gewinn von  $b_j y_j$ . Da der Landwirt gleichzeitig von der Regierung noch  $c$  Geldeinheiten für jeden Hektar nicht bewirtschafteten Ackerlandes erhält, kann man den Gewinn des Landwirtes als

$$f(x, y, z) = \sum a_i x_i + \sum b_j y_j + cz \quad (4)$$

berechnen. Ein den Gewinn maximierender Landwirt wird also sein Ackerland so aufteilen, daß die Funktion (4) einen maximalen Wert annimmt unter Beachtung der Forderungen (1), (2), (3).

Ein Unterschied zwischen beiden Größen  $a_i$  und  $b_j$  soll hier aber nicht unerwähnt bleiben: Während sich die Zahl  $a_i$  unabhängig vom Wirken der Regierung durch die Marktkräfte ergibt, wird die Industrie die auf einem Hektar gewachsene Menge an Pflanzen für die Herstellung von Biokraftstoffen zu einem Preis  $d_j$  aufkaufen, der eventuell über dem Marktwert liegt. Gleichzeitig ist dieser Preis auch von den durch die Regierung an die Industrie gezahlten Subventionen  $s_j$  abhängig. Sei der Marktwert mit  $m_j$  und der Aufwand des Landwirtes beim Anbau der  $j$ -ten Pflanzensorte für die Herstellung von Biokraftstoffen auf einem Hektar Ackerland mit  $d_j$  bezeichnet. Dann ergibt sich der Gewinn je Hektar Ackerland als

$$b_j = m_j + s_j - d_j. \quad (5)$$

Aus Sicht der Regierung ist dabei die Größe  $s_j$  zunächst unbekannt und soll bestmöglich bestimmt werden. Zu bemerken ist natürlich, daß die optimale Aufteilung seines Ackerlandes durch den Landwirt jetzt ebenfalls vom Parameter  $s_j$  abhängt.

Wenden wir uns nun dem Problem der Regierung zu. Dem Ziel der Förderung der Herstellung von Biokraftstoffen gemäß sollen auf mindestens  $\sigma_1$  Hektar Land entsprechende Pflanzen angebaut werden. Im Modell ergibt sich

$$\sum y_j \geq \sigma_1 \quad (6)$$

als eine diesem Ziel entsprechende Bedingung. Wenn man aus den auf einem Hektar gewachsenen Pflanzen der Sorte  $j$  genau  $r_j$  Tonnen Biokraftstoff herstellen kann, so beschränkt die Bedingung

$$\sum r_j y_j \leq L \quad (7)$$

die insgesamt hergestellte Menge an Biokraftstoffen nach oben. Zu beachten ist dabei, daß es verschiedene Sorten von Biokraftstoffen gibt (analog zu Benzin, Diesel). Das bedeutet, daß (7) eigentlich mehrere gleichartige Bedingungen symbolisiert. Variable Größen im Problem der Regierung sind die Höhe der Subventionen  $s_j$ , die natürlich ebenso wie die Gewinne der Landwirte pro Hektar Ackerland nichtnegativ sein müssen:

$$s_j \geq 0, b_j \geq 0 \text{ für alle } j. \quad (8)$$

Die Regierung wird nun bestrebt sein, die Höhe der Subventionen  $s_j$  so zu bestimmen, daß die Bedingungen (6), (7), (8) eingehalten werden und die aufzubringende Geldmenge insgesamt minimal ist. Bei der Reservierung von  $y_j$  Hektar zur Herstellung einer Sorte Pflanzen zur Biokraftstoffherstellung durch den Landwirt

entstehen der Regierung einerseits Kosten in Höhe von  $s_j$  Geldeinheiten für Subventionen. Andererseits spart sie aber auch  $c$  Geldeinheiten ein, die sonst für nicht bewirtschaftetes Land anfallen. Damit ergeben sich zu minimierende Ausgaben in Höhe von

$$g(s, y) = \sum s_j y_j - c \sum y_j \quad (9)$$

Zu beachten ist hierbei, daß sowohl (9) als auch die linken Seiten der Bedingungen (6) und (7) von der durch den Landwirt gewählten Aufteilung seines Ackerlandes abhängen. Diese Aufteilung kann nicht durch die Regierung direkt beeinflußt werden! Damit entsteht folgende Aufgabe für die Regierung:

„Wie sind die Höhen der Subventionen  $s_j$  zu wählen, daß bei der Bestimmung der Gewinnkoeffizienten  $b_j$  nach (5) der Landwirt sein ihm zur Verfügung stehendes Ackerland durch Minimierung der Funktion (4) unter den Nebenbedingungen (1), (2) und (3) so in Flächen  $x_i$ ,  $y_j$  und  $z$  aufteilen wird, daß die Funktion (9) minimal wird und die Bedingungen (6), (7) und (8) eingehalten werden?“

### 1.2.2 Lösungsansatz

Durch Festlegung der Höhen der Subventionen  $s_j$  bestimmt die Regierung Frankreichs die durch die Industrie an den Landwirt zu zahlenden Preise  $m_j + s_j$  für die auf einem Hektar wachsende Menge an Pflanzen zur Biokraftstoffherzeugung. In Abhängigkeit von diesen Daten bestimmen die Landwirte die optimale Aufteilung ihres Landes in Brachflächen und in für die Herstellung der verschiedenen Pflanzensorten vorgesehenen Flächen.

Diese Reaktion erfolgt zunächst nur auf dem Papier und wird in die Funktion (9) eingesetzt. Durch Variation der Entscheidungsvariablen  $s_j$  der Regierung wird diese nun bestrebt sein, den Wert der Funktion (9) unter Einhaltung der Bedingungen (6), (7) und (8) zu verringern.

Die Maximierung der Funktion (4) unter den Bedingungen (1) bis (3) ist eine lineare Optimierungsaufgabe. Problematisch ist jedoch deren Dimension, wenn viele Landwirte betrachtet werden. Würden nur zwei Pflanzensorten durch die Regierung subventioniert, so könnte man versuchen, sich durch zufällige Wahl von Punkten  $(s_1, s_2)$  in der Ebene einen groben Überblick über die bei Fixierung der Höhe der Subventionen auf die jeweiligen Koordinatenwerte angenommenen Werte der Funktion (9) zu verschaffen. Daraus ließe sich dann eventuell eine Vermutung über die etwaige Lage der gesuchten Lösung ableiten, die durch erneute Positionierung zufälliger Punkte verfeinert werden könnte. Auf dem Computer ist

so eine Idee durch Monte-Carlo-Simulation realisierbar. In der Praxis ist das jedoch so nicht möglich, da die Anzahl der subventionierten Pflanzensorten größer ist (5 Sorten).

### 1.2.3 Reale Gegebenheiten

Es gibt zwischen dem hier dargestellten Modell auf der einen und dem tatsächlich gelösten Problem (das wesentlich mehr Realitätsnähe aufweist) einige Unterschiede, die hauptsächlich auf hier gemachten Vereinfachungen beruhen. Die wichtigsten werden kurz beleuchtet.

- Im realen Modell wird nicht die gesamte Fläche als ein landwirtschaftlicher Betrieb betrachtet, sondern die Entscheidung über den Anbau wird auf circa 300 Höfen gefällt. Das führt zu einem wesentlichen Anstieg der Zahl der Parameter und der Entscheidungsvariablen bei den Bauern (jeweils mehrere tausend Variable). Diese Aufgabe kann nur mit Hilfe eines Dekompositionsansatzes gelöst werden, indem man die rationale Reaktion der Landwirte (da sie unabhängig voneinander entscheiden) für jeden Hof einzeln berechnet.
- Die Bauern verlieren bei der Nutzung ihrer Flächen zur Industriepflanzenzucht keineswegs sämtliche Brachlandsubventionen, sondern bekommen einen (je nach Pflanzenart unterschiedlichen) Teil dieser Unterstützung weiterhin als „Ersatzsubvention“, die die Regierung natürlich wiederum auf der Ausgabenseite berücksichtigen muß.
- Die Industrie kann ihrerseits noch Erlöse aus dem Verkauf der bei der Umwandlung von Pflanzen in Kraftstoff entstehenden Nebenprodukte erwirtschaften. In obiger vereinfachter Darstellung wurde diese Möglichkeit nicht beachtet. Außerdem erhält die Industrie auch noch Subventionen für die hergestellten Biokraftstoffe selbst, die bei der Regierung erneut Kosten verursachen.
- Völlig außer acht gelassen wurde das Problem der Industrie, welches im obigen Modell nur durch die Gleichung (5) beschrieben wird. In der Praxis entscheidet die Industrie ebenso selbständig über die Produktion von Biokraftstoffen und den damit verbundenen Ankauf von entsprechenden Pflanzen. Als Anhaltspunkt für eine solche Entscheidung können erneut Lösungen von Optimierungsaufgaben verwendet werden.

## 1.3 Ein Ausblick

Gegenstand der Arbeit wird zunächst die mathematisch exakte Formulierung der Zwei-Ebenen-Ebenen-Optimierungsaufgabe und der bei ihrer Behandlung

genutzten Lösungsbegriffe sein. Es folgen einige wohlbekannte klassische mengentheoretische Lösbarkeitsgarantien.

Daran schließt sich eine Abschwächung der eingeführten Lösungen an, die als schwache Lösungen bezeichnet werden. Sie existieren unter sehr viel weniger restriktiven Bedingungen und können als asymptotisch interpretiert werden.

Der Abschnitt 4 behandelt dann den Fall, dass die Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  Minimumspunkte einer parametrischen Optimierungsaufgabe in der unteren Ebene repräsentiert. Dazu werden zunächst Resultate über die Eigenschaften der vom Parameter  $t$  abhängigen sogenannten „Lösungsfunktion“  $x(\cdot)$  bereitgestellt. In einem zweiten Teil wird zunächst festgestellt, dass die *lokale* Lösungen der unteren Ebene darstellende PMA  $\Psi_{\text{loc}}$  oft unbrauchbar ist, während bekanntenmaßen  $\Psi_{\text{glob}}$  als Menge der *globalen* Minimumspunkte der unteren Ebene schwer zu bestimmen ist. Zur Umgehung dieser Schwierigkeiten wird eine Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi_{\text{sg}}$  der *subglobalen* Minima vorgeschlagen, die auf Überdeckungen wenigstens einer Teilmenge von  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  des Abschlusses der lokalen Minimumspunkte der unteren Ebene beruht.

Die Betrachtung des Falls der einparametrischen Optimierungsaufgaben ( $t \in \mathbf{R}$ ) in der unteren Ebene wird den Abschluss der Arbeit bilden. Da wir uns dabei auf die von JONGEN, JONKER und TWILT untersuchten generischen Aufgaben konzentrieren, liegt es nahe Vorschläge zu erarbeiten, wie der Begriff der Generizität auch auf die entsprechende Zwei–Ebenen–Aufgabe übertragen werden kann. Dies wird im Unterabschnitt 5.3 erfolgen.

## 2 Grundlagen

In diesem Abschnitt soll es zunächst um eine mathematische Formulierung des Zwei–Ebenen–Optimierungsproblems, die Definition des Begriffs der optimalen Lösung sowie um Aussagen betreffend die Garantie der Existenz einer solchen Lösung gehen.

Des weiteren werden hier auch generelle Voraussetzungen mit Gültigkeit für die gesamte Arbeit getroffen.

### 2.1 Formulierung des Zwei–Ebenen–Problems

Wir betrachten die Zwei–Ebenen–Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in T \\ x &\in \Psi(t) \subseteq X. \end{aligned} \tag{ZEOA}$$

Hierin seien  $T \subseteq \mathbf{R}^m$  und  $X \subseteq \mathbf{R}^n$  mit  $m, n \in \mathbf{N}$ , sowie  $F : X \times T \rightarrow \mathbf{R}$  eine (im Allgemeinen als stetig vorausgesetzte) reellwertige Funktion. Da  $m$  und  $n$  endlich sein sollen, beschränken wir uns also auf endlich-dimensionale Vektorräume.

$\Psi : T \rightarrow 2^X$  sei eine Punkt–Menge–Abbildung (PMA), die jedem Element von  $T$  eine (möglicherweise leere) Teilmenge von  $X$  zuordnet. Bei der Definition des Graphen  $\text{grph } \Psi$  einer PMA  $\Psi$  verfahren wir wie bei üblichen Funktionen<sup>2</sup>:

$$\text{grph } \Psi := \{(x, t) \mid t \in T, x \in \Psi(t)\}.$$

Er stellt somit eine Teilmenge des Vektorraumes  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  dar. Weiterhin wird im folgenden oft der Begriff der *Domäne* oder des *eigentlichen Definitionsbereichs* einer solchen Abbildung gebraucht:

$$\text{dom } \Psi := \{t \in T \mid \Psi(t) \neq \emptyset\}.$$

Sie ist demzufolge die Menge aller derjenigen  $t$  aus  $T$ , die durch  $\Psi$  auf eine nicht-leere Menge abgebildet werden. Da hierin von vornherein nur Parameterwerte  $t$  betrachtet werden, die in  $T$  enthalten sind, folgt aus dieser Festlegung genau genommen sofort die Gleichheit  $\text{dom } \Psi = T \cap \text{dom } \Psi$ . Soll allerdings gesondert hervorgehoben werden, dass ein  $\bar{t}$  sowohl ein dem Leader a priori zur Verfügung stehender Parameter ist, als auch ein Wert, für den Reaktionen des Followers tatsächlich existieren, so wird in dieser Arbeit auch  $T \cap \text{dom } \Psi$  anstelle der kürzeren Schreibweise zu finden sein (siehe zum Beispiel Abschnitt 1).

Der tatsächliche Wert  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  des Parameters  $t$  in obigem Problem wird vom Leader vorgegeben. In Abhängigkeit von dessen Wahl hat der Follower eine Menge möglicher Reaktionen  $\Psi(\bar{t})$ , so dass für jedes  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  seine Zielstellungen befriedigt werden.  $\Psi(\bar{t})$  wird deshalb häufig als *Menge rationaler Reaktionen* bezeichnet, während jedes ihrer Elemente eine *rationale Antwort* genannt wird.

Der Terminus *Problem der oberen Ebene* (oder kurz *obere Ebene*) bezieht sich auf die Bestimmung einer Lösung der Zwei–Ebenen–Aufgabe (ZEOA) durch den Leader. Das *Problem der unteren Ebene* (*untere Ebene*) ist die Bestimmung der Menge rationaler Reaktionen und die Auswahl einer rationalen Antwort  $x \in \Psi(t)$  für gegebenes  $t$ , vorgenommen durch den Follower.

## 2.2 Optimistische und pessimistische Lösung

In der Zwei–Ebenen–Optimierung bereitet es oft Probleme zu definieren, wann ein  $t_0 \in T$  Lösung von (ZEOA) genannt werden soll. Grund dafür ist die Tat-

---

<sup>2</sup>Man verwendet für einwertige Funktionen  $f : T \rightarrow X$  normalerweise die Schreibweise  $\text{grph } f = \{(t, x) \mid t \in T, x = f(t)\}$ . Es hat sich jedoch in der parametrischen und in der Zwei–Ebenen–Optimierung durchgesetzt, in Funktionen der Form  $F(x, t)$  stets die abhängige (Follower-) Variable  $x$  der unabhängigen (Leader-) Variablen  $t$  voranzustellen. Dies soll in dieser Arbeit im Graphen von Punkt–Menge–Abbildungen konsequent fortgeführt werden.

sache, dass dem Follower mitunter keine oder mehrere rationale Reaktionen zur Verfügung stehen.

Falls  $\Psi(\bar{t})$  aus nur genau einem Element besteht, ist des Followers Antwort eindeutig bestimmt und folglich wohldefiniert im Sinne einer herkömmlichen Funktion die  $\mathbf{R}^m$  in  $\mathbf{R}^n$  abbildet. Gleiches gilt dann auch für den Wert der Zielfunktion der oberen Ebene, in welche die Reaktion des Followers einfach eingesetzt werden kann. Für bestimmte Parameterwerte kann die Menge der rationalen Reaktionen jedoch aus mehr als einem Element bestehen, von denen der Follower ein beliebiges auswählt. Die Anführungszeichen in (ZEOA) sollen für die Schwierigkeiten stehen, die aus dieser Wahlfreiheit resultieren können. Um nun den Begriff der Lösung von (ZEOA) zu definieren, betrachtet man zwei verschiedene Herangehensweisen, nämlich eine optimistische und eine pessimistische.

**Optimistische Strategie:** Der Leader bestimmt eine Lösung für den Fall der maximal möglichen Unterstützung durch den Follower. Er hofft also, für ein  $\bar{t} \in T$  mit  $\Psi(\bar{t}) \neq \emptyset$  werde letzterer mit  $\bar{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t})$  antworten. Mathematisch ausgedrückt löst der Leader das Problem

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{opt}}(t) &\rightarrow \min_{t \in \operatorname{dom} \Psi} \\ \varphi_{\text{opt}}(t) &= \min_x \{F(x, t) \mid x \in \Psi(t)\}. \end{aligned} \quad (\text{OPT})$$

**Pessimistische Strategie:** Der Leader versucht den Schaden, den der Follower durch seine Reaktion in der Zielfunktion der oberen Ebene anrichten kann, zu minimieren. In diesem Fall muss

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{pess}}(t) &\rightarrow \min_{t \in \operatorname{dom} \Psi} \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &= \max_x \{F(x, t) \mid x \in \Psi(t)\} \end{aligned} \quad (\text{PESS})$$

untersucht werden.

Es soll hierbei allerdings betont werden, dass diese Alternativen nicht durch irgendein Maß an Zusammenarbeit zwischen den beiden Entscheidungsträgern generiert werden. Obwohl man bemerken könnte, dass die optimistische (pessimistische) Formulierung von (ZEOA) äquivalent zu perfekter Kooperation (bzw. Antikooperation) ist, muss ganz klar herausgestellt werden, dass diese Interpretation des Leaders den Follower in keinsten Weise beeinflusst. Also ist letzterer nicht gezwungen, mit irgendeiner den obigen Herangehensweisen entsprechenden Strategien zu handeln. Es kann somit der Fall eintreten, dass selbst bei einer pessimistischen Interpretation der Aufgabe (ZEOA) durch den Leader eine in der Realität beobachtbare Reaktion des Followers sich als maximal unterstützend herausstellt. Analog kann eine optimistische Haltung unvorteilhafte Antworten nicht ausschließen. In diesem Zusammenhang drücken die Termini *Optimismus*



und *Pessimismus* lediglich die durch den Leader getroffene Einschätzung der Effektivität eines über die Wahl und Bereitstellung des Parameters  $t$  hinaus vorhandenen Einflusses auf die Antwort des Followers aus. Diese Einwirkung kann oder soll oft nicht in das mathematische Modell aufgenommen werden. Die Beurteilung ihrer Wirksamkeit ist darüber hinaus in vielen Fällen subjektiv.

Lösungen  $t_{\text{opt}}$  und  $t_{\text{pess}}$  zu den Problemen (OPT) bzw. (PESS) werden optimistische respektive pessimistische Lösungen genannt, sofern sie existieren. Die Zahlen  $F_{\text{opt}} := \varphi_{\text{opt}}(t_{\text{opt}})$  und  $F_{\text{pess}} := \varphi_{\text{pess}}(t_{\text{pess}})$  sind dann die jeweiligen optimalen Zielfunktionswerte in der oberen Ebene.

Weiterhin heißt ein  $\bar{x} \in \Psi(t_{\text{opt}})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, t_{\text{opt}}) = \varphi_{\text{opt}}(t_{\text{opt}})$  eine *Realisation der optimistischen Strategie* oder kurz *optimistische Realisation*. Analog wird die *Realisation der pessimistischen Strategie* erklärt als ein  $\bar{x} \in \Psi(t_{\text{pess}})$  mit  $F(\bar{x}, t_{\text{pess}}) = \varphi_{\text{pess}}(t_{\text{pess}})$ .

**Beispiel 2.1** *Wir untersuchen die Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe*

$$\begin{aligned} F(x) = x &\rightarrow \text{„min“}_t \\ t &\in [-1, 1] \\ x &\in \Psi(t) := \{x \mid x^2 + t^2 = 1\}, \end{aligned}$$

d.h. der Graph der PMA  $\Psi$  ist gerade der Einheitskreis,  $\text{dom } \Psi = [-1, 1]$ . Dann gilt:

- $\varphi_{\text{opt}}(t) = -\sqrt{1-t^2}$  und dem zufolge ist  $\bar{t} = 0$  die optimistische Lösung mit dem optimalen optimistischen Zielfunktionswert  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = -1$ .  $\bar{x} = -1$  ist die Realisation der optimistischen Strategie.
- $\varphi_{\text{pess}}(t) = \sqrt{1-t^2}$ , folglich sind  $\bar{t}_1 = -1$  und  $\bar{t}_2 = 1$  pessimistische Lösungen unseres Problems mit  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}_1) = \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}_2) = 0$  als optimalem pessimistischen Zielfunktionswert. Für beide Lösungen ist  $\bar{x} = 0$  pessimistische Realisation.

Wenn im folgenden im Widerspruch zu der eben gegebenen Definition von einer optimistischen oder pessimistischen Lösung  $(\bar{x}, \bar{t})$  gesprochen wird, dann soll dies stets bedeuten, dass gilt:

- $\bar{t}$  ist Lösung von (ZEOA) im obigen Sinne, und
- $\bar{x}$  ist eine Realisation der jeweils zugrundeliegenden Strategie.

Man sieht der Lösung sofort an, welche Art der Darstellung (mit bzw. ohne Angabe einer Realisation) gewählt wurde. Einmal besteht sie nämlich nur aus einem  $t \in T$ , das andere Mal aus einem  $(x, t) \in X \times T$ .

Das nächste Beispiel zeigt zwei verschiedene Punkt-Menge-Abbildungen  $\Psi$  und wir erhalten auch unterschiedliches Lösbarkeitsverhalten:

**Beispiel 2.2** *Wir suchen Lösungen zu*

$$\begin{aligned} F(x) = (x + 1)^2 &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in [-3, 2] \\ x &\in \Psi(t), \end{aligned} \tag{ZE}$$

wobei  $\Psi$  die Menge aller optimalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - 3x &\rightarrow \min_x \\ x &\geq t \end{aligned} \tag{P_1(t)}$$

sei.

- *Angenommen, der Follower wählt stets eine global optimale Lösung von  $(P_1(t))$ . Ein Blick auf die Zielfunktion der unteren Ebene in Abbildung 2 erlaubt die sofortige Angabe des Graphen der Menge der rationalen Reaktionen  $\text{grph } \Psi_{\text{glob}}$ . Dies ergibt die Funktionen*

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{opt}}(t) &= \begin{cases} (t + 1)^2, & t \in [-3, -2] \cup [1, 2] \\ 4, & t \in (-2, 1), \end{cases} \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &= \begin{cases} (t + 1)^2, & t \in [-3, -2] \cup [1, 2] \\ 4, & t \in [-2, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

*Obwohl  $\inf \varphi_{\text{opt}}(t) = \inf \varphi_{\text{pess}}(t) = 1$  gilt, existiert nur eine optimistische Lösung von (ZE), nämlich  $t^* = -2$ . Der optimale optimistische Zielfunktionswert ist folglich  $\varphi_{\text{opt}}(t^*) = 1$  und  $\bar{x} = -2$  ist optimistische Realisation. Das Infimum von  $\varphi_{\text{pess}}$  wird hingegen für kein  $t \in [-3, 2]$  angenommen.*

- *Ist  $\Psi$  die Menge  $\Psi_{\text{loc}}$  aller lokalen Minima des Problems der unteren Ebene, dann ist*

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{opt}}(t) &= \begin{cases} (t + 1)^2, & t \in [-3, -1) \cup [1, 2] \\ 4, & t \in [-1, 1), \end{cases} \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &= \begin{cases} 4, & t \in [-3, 1] \\ (t + 1)^2, & t \in (1, 2]. \end{cases} \end{aligned}$$

*Hier ergibt sich  $\inf \varphi_{\text{opt}}(t) = 0$ , wobei aber dieses Infimum nicht angenommen wird, denn  $x^* = -1$  ist nicht enthalten in  $\Psi_{\text{loc}}(-1)$ . Deshalb existiert keine optimistische Lösung. Jedoch gibt es pessimistische Lösungen, und zwar sind dies alle  $t^* \in [-3, 1]$  mit dem optimalen pessimistischen Zielfunktionswert 4. Für alle dieser  $t^*$  ist  $\bar{x}_1 = 1$  eine pessimistische Realisation, lediglich  $t^* = -3$  erlaubt zusätzlich  $\bar{x}_2 = -3$ .*

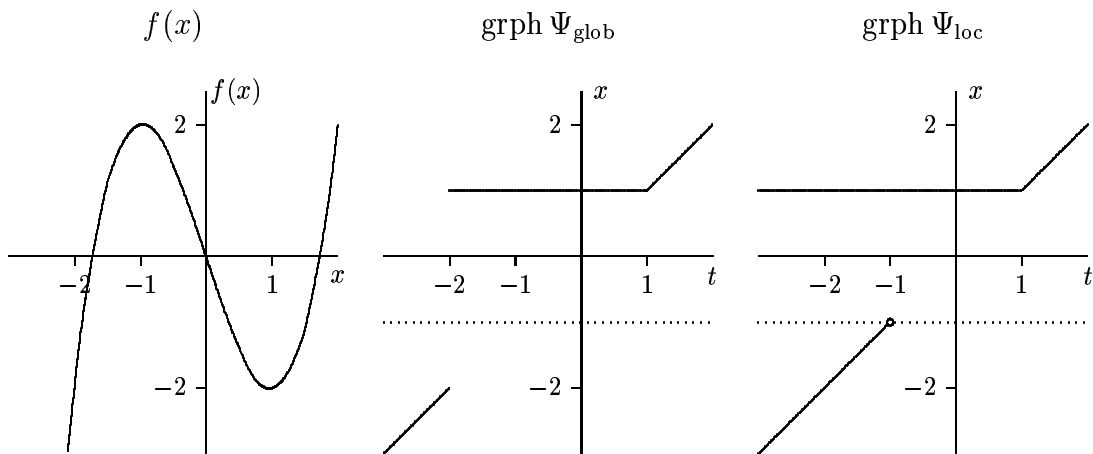


Abbildung 2: Zielfunktion, globale und lokale Minima in Beispiel 2.2

Dieses Beispiel zeigt, dass die Lösbarkeit von (ZEOA) im allgemeinen nicht garantiert werden kann. Wie man leicht sieht, ist für die Existenz einer Lösung der Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe selbst bei Stetigkeit aller involvierten Funktionen mehr als nur die Kompaktheit der Menge  $T$  sowie der Bilder  $\Psi(t)$  erforderlich.

Voraussetzungen für die Existenz von Lösungen der Aufgabe (ZEOA) wurden für den optimistischen Fall von HARKER und PANG ([14]) und im pessimistischen Fall von LUCCHETTI, MIGNANEGO und PIERI ([25]) angegeben.

Zum Abschluss dieses Unterabschnitts über die genutzten Lösungsbegriffe wird noch gezeigt, dass die Zwei-Ebenen-Aufgabe für die optimistische Herangehensweise eine oft einfacher zu handhabende äquivalente Formulierung besitzt. Diese existiert aufgrund der Min-Min-Struktur der Ersatzaufgabe (OPT) bezüglich der Zielfunktion der oberen Ebene. Wir können anhand der sich anschließenden Betrachtungen sogar eine Lösung mit entsprechender Realisation garantieren, wenn das Minimum bei der Bestimmung der Gütefunktion  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$  für gewisse  $t \in \text{dom } \Psi$  nur als Infimum existiert.

**Lemma 2.3** *In der Aufgabe (OPT) werde in der Definition der Gütefunktion  $\varphi_{\text{opt}}$  das Minimum durch das Infimum ersetzt, d.h. wir wollen*

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{opt}'}(t) &\rightarrow \min_{t \in \text{dom } \Psi} \\ \varphi_{\text{opt}'}(t) &= \inf_x \{F(x, t) \mid x \in \Psi(t)\} \end{aligned} \quad (\text{OPT}')$$

mit  $\varphi_{\text{opt}'} : \text{dom } \Psi \rightarrow \mathbf{R}^n \cup \{-\infty\}$  betrachten. Weiter sei

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \min_{(x, t)} \\ (x, t) &\in \text{grph } \Psi \end{aligned} \quad (\text{ZEOA}')$$

als eine Ersatzformulierung von (ZEOA) gegeben. Dann ist  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi$  genau dann Lösung von (ZEOA'), wenn  $\bar{t}$  Lösung von (OPT') ist und  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t})$  gilt.

**Beweis:** Wir zeigen beide Richtungen getrennt voneinander.

- Sei  $(\bar{x}, \bar{t})$  Lösung von (ZEOA'). Offensichtlich gilt

$$\inf_{(x, t)} \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{grph } \Psi, t = t^*\} \geq \inf_{(x, t)} \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{grph } \Psi\}$$

für alle  $t^* \in \text{dom } \Psi$  wegen  $\text{grph } \Psi|_{t=t^*} \subseteq \text{grph } \Psi$  bzw. in anderer Schreibweise

$$\varphi_{\text{opt}'}(t^*) \geq F(\bar{x}, \bar{t}) \quad \forall t^* \in \text{dom } \Psi. \quad (10)$$

Mit der analogen Begründung „ $\{\bar{x}\} \subseteq \Psi(\bar{t})$ “ gilt auch  $F(\bar{x}, \bar{t}) \geq \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t})$  und deshalb kann für  $\bar{t}$  in (10) nur das Gleichheitszeichen gelten. Folglich ist  $\bar{t}$  Lösung von (OPT') und es gilt  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t})$ .

- Es sei nun  $\bar{t}$  Lösung der Aufgabe (OPT') und es existiere ein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t})$ . Dann gilt für alle  $(x^*, t^*) \in \text{grph } \Psi$

$$F(x^*, t^*) \geq \varphi_{\text{opt}'}(t^*) \geq \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t}) = F(\bar{x}, \bar{t}).$$

$(\bar{x}, \bar{t})$  ist also Lösung von (ZEOA').

Damit ist die Aussage des Lemmas bewiesen.  $\square$

Die Gültigkeit dieses Hilfssatzes hat eine durchaus nicht zu vernachlässigende Bedeutung bei der Betrachtung der ursprünglich vorgestellten Aufgabe (OPT) anstelle von (OPT'). Da nämlich für *jede* Lösung  $(\bar{x}, \bar{t})$  von (ZEOA') der Parameter  $\bar{t}$  auch (OPT') löst und außerdem wegen  $\varphi_{\text{opt}'}(\bar{t}) = F(\bar{x}, \bar{t})$  und  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  auch  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  als echtes Minimum existiert, ist  $\bar{t}$  ebenso Lösung von (OPT) und  $\bar{x}$  eine Realisation der optimistischen Strategie.

Natürlich können wir auf diese Weise nicht ausschließen, dass es noch weitere  $t^* \in \text{dom } \Psi$  gibt, für die  $\varphi_{\text{opt}'}(t^*) = \varphi_{\text{opt}'}(\bar{t})$  gilt. Diese sind aber nur dann Lösung im strengen Sinne des Problems (OPT), wenn ein  $x^* \in \Psi(t^*)$  mit der Eigenschaft  $F(x^*, t^*) = \varphi_{\text{opt}'}(t^*)$  existiert und damit  $(x^*, t^*)$  auch (ZEOA') löst. Findet man kein solches  $x^*$ , so kann  $t^*$  zwar auch als optimistische Lösung interpretiert werden<sup>3</sup>, es mangelt dann jedoch an einer Realisation dieser Lösung.

Die folgende Aussage ist mit diesen Vorbemerkungen fast trivial und bedarf keines Beweises:

---

<sup>3</sup>Eine weitergehende Begründung, warum dieses sinnvoll sein kann, findet sich im nächsten Unterabschnitt.

**Lemma 2.4** *Die Aufgabe (ZEOA) besitzt genau dann eine optimistische Lösung und eine zugehörige Realisation, wenn  $F(x, t)$  über  $\text{grph } \Psi$  nach unten beschränkt ist und auf dieser Menge ihr Infimum als minimalen Funktionswert annimmt. Die Menge aller Paare  $(\bar{x}, \bar{t})$  als Realisation und optimistische Lösung von (ZEOA) ist die Menge aller Lösungen der Aufgabe (ZEOA').*

### 2.3 Generelle Voraussetzungen

Ziel der Arbeit soll es nicht sein, grundsätzlich alle Arten von Unlösbarkeiten der Zwei-Ebenen-Aufgabe zu diskutieren. Mit Blick auf die Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  sowie die Werte  $F_{\text{opt}}$  und  $F_{\text{pess}}$  sollen zunächst mögliche Probleme genannt werden, die nicht betrachtet werden:

1. Es gibt Werte  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ , für die  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  und/oder  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  nicht existieren, weil  $F(x, \bar{t})$  über der Menge  $\{(x, \bar{t}) \mid x \in \Psi(\bar{t})\}$  nicht nach unten bzw. oben beschränkt ist.
2. Es gibt Werte  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ , für die  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  nicht existiert, weil  $\inf_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t})$  zwar endlich, aber kein Minimum ist, d.h. es gibt kein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \inf_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t})$ .

Analoges kann für  $\varphi_{\text{pess}}$  in der pessimistischen Strategie auftreten.

3. Die Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  oder  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  haben nur endliche reelle Zahlen als Funktionswerte, aber sind auf  $\text{dom } \Psi$  nicht nach unten beschränkt, die Systeme (OPT) bzw. (PESS) mithin unlösbar.

Wenigstens für die beiden ersten genannten Punkte scheint ein Umgehen der entsprechenden Schwierigkeiten ohne weitere Voraussetzungen unter Umständen möglich. Da dafür jedoch eine gewisse Interpretation der eigentlichen Aufgabe vonnöten ist, die unter bestimmten Bedingungen dem Leader eventuell nicht möglich ist, soll später auf die Betrachtung dieser Fälle nicht weiter eingegangen werden.

zu 1.: Hat man es bei der optimistischen Herangehensweise mit einem Parameterwert  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  mit  $\inf_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t}) = -\infty$  zu tun, so setze man einfach  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) := -\infty$ . Sofort ist dann auch  $F_{\text{opt}} = -\infty$ , was man in der Tat als optimalen optimistischen Zielfunktionswert der oberen Ebene auffassen kann. Folglich würde man dieses  $\bar{t}$  als optimistische Lösung interpretieren können, wobei man sich lediglich darüber im klaren sein muss, dass diese keine Realisation im oben vorgestellten Sinne besitzt.

Ein wenig anders liegen die Dinge bei Parameterwerten  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ , für die  $\sup_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t}) = +\infty$  ist. Ähnlich wie oben setzt man bei zugrundegelegter pessimistischer Strategie  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) := +\infty$ . Sobald dann ein  $\hat{t} \in \text{dom } \Psi$

mit  $\varphi_{\text{pess}}(\hat{t}) < +\infty$  existiert, kommt  $\bar{t}$  als pessimistische Lösung offensichtlich nicht mehr in Frage.

In beiden Fällen besitzt der Leader Deutungsspielraum. So könnte er einen Parameter  $\bar{t}$  mit  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = -\infty$  als unzulässig betrachten, weil er nur Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  erlauben will, deren Bildraum der Raum der reellen Zahlen ist. Würde er dagegen  $\varphi_{\text{opt}} : \text{dom } \Psi \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  annehmen, dann wäre  $\bar{t}$  Lösung des Problems der oberen Ebene (jedoch wie bereits erwähnt ohne Realisierung  $\bar{x}$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = -\infty$ ).

Entscheidet sich der Leader bei der pessimistischen Strategie für den um  $\pm\infty$  erweiterten Bildraum der Funktion  $\varphi_{\text{pess}}$ , so steht weiterhin die Frage, ob er im Fall  $\varphi_{\text{pess}} \equiv +\infty$  alle Elemente von  $T$  als Lösung betrachten kann oder er das Problem als unlösbar einstuft.

zu 2.: Das zweite Problem könnte man entschärfen, indem man in der Formulierung der den verschiedenen Interpretationen entsprechenden Ersatzaufgaben (OPT) und (PESS) die in der Festlegung der Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}$  und  $\varphi_{\text{pess}}$  auftretenden Minima und Maxima durch Infima beziehungsweise Suprema ersetzt. Was auf den ersten Blick so aussieht als habe man die Schwierigkeiten damit schlicht „wegdefiniert“, hat einen durchaus plausiblen Hintergrund, der beispielhaft für die pessimistische Strategie erläutert werden soll.

Der Leader kann, wie weiter oben bereits ausgeführt, nämlich ohnehin nicht erwarten, dass der Follower für  $t = \bar{t}$  bei pessimistischer Strategie anti-kooperativ antwortet, selbst wenn das entsprechende Problem der mittleren Ebene als Maximierungsaufgabe lösbar ist. Die Tatsache der Existenz eines  $\bar{x} \in \arg \max_x \{F(x, \bar{t}) \mid x \in \Psi(\bar{t})\}$  wird nur dann zu einer mit Sicherheit vorhersagbaren Antwort des Followers führen, falls  $\Psi(\bar{t}) = \{\bar{x}\}$  gilt. Ist die Kardinalität dieser  $\bar{x}$  stets enthaltenden Menge nicht Eins, steht es ihm frei, irgendeines ihrer Elemente zu wählen. Dies läßt prinzipiell keinen Schluss hinsichtlich der Qualität seiner Reaktion bezogen auf die pessimistische Herangehensweise des Leaders zu. Damit ist die Bedeutung von  $\bar{x}$  als Lösung von  $\max_x \{F(x, \bar{t}) \mid x \in \Psi(\bar{t})\}$  in gewissem Sinne obsolet.

Die analoge Argumentationskette gilt für die optimistische Strategie. Dann erscheint es im Grundsatz wenig problematisch, die Minima und Maxima bei der Definition der Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  in (OPT) und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  in (PESS) durch Infima bzw. Suprema zu ersetzen, wobei wiederum die Existenz der Realisationen in der unteren Ebene nicht gesichert ist.

Leider erscheint es unmöglich, für das dritte der oben genannten Probleme eine nur auf Nutzung der bestehenden Interpretationsspielräume beruhende „Lösung“ zu finden. Im Gegensatz zum ersten Fall, wo je nach Deutung des Leaders die Funktionen  $\varphi_{\text{opt/pess}}$  per definitionem auch infinite Werte annehmen könnten,

existiert nämlich für eine nach unten unbeschränkte, ausschließlich endliche Werte annehmende Funktion  $\varphi : \text{dom } \Psi \rightarrow \mathbf{R}$  kein  $\bar{t}$  mit  $\varphi(\bar{t}) = \inf_t \{\varphi(t) \mid t \in \text{dom } \Psi\}$ .

Um alle diese Schwierigkeiten zu beseitigen, wollen wir an die Aufgabe (ZEOA) generell die folgenden Bedingungen stellen:

**(A1)** In der Aufgabe (ZEOA) gelte:

1. Die Funktion  $F : M \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $M \subseteq X \times T$  sei wenigstens auf dem Abschluss des Graphen von  $\Psi$  definiert und dort stetig.
2. Für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  sei das Bild  $\Psi(t)$  der Punkt–Menge–Abbildung kompakt.
3. Der Graph von  $\Psi$  sei nicht leer und beschränkt in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ .
4.  $\text{dom } \Psi$  sei kompakt.

Am wenigsten einschneidend ist hierbei der erste Punkt einzuschätzen, da andernfalls vernünftige Resultate generell nur sehr schwer zu erzielen sind. Bei der Einführung der Lösungsbegriffe zeigte sich zudem, dass einmal das Minimum und einmal das Maximum der Funktion  $F(x, \bar{t})$  über alle  $x \in \Psi(\bar{t})$  für  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  gesucht ist. Deshalb wird auch der Versuch, die geforderte Stetigkeit durch die Unterhalb- oder Oberhalbstetigkeit von  $F$  zu ersetzen, wenig hilfreich sein.

Gemeinsam mit dieser Voraussetzung garantiert die zweite Annahme die Lösbarkeit des Problems der mittleren Ebene, d.h. für alle  $\bar{t} \in T$  sind  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  und  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  wohldefiniert. Sie sichert außerdem die Existenz zweier nicht notwendig voneinander verschiedener  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Psi(\bar{t})$  mit  $F(\bar{x}_1, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  und  $F(\bar{x}_2, \bar{t}) = \varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$ . Im Falle der optimistischen oder pessimistischen Lösbarkeit der gegebenen Zwei–Ebenen–Aufgabe ist also gewährleistet, dass es stets eine der gewählten Strategie entsprechende Realisation gibt.

Der dritte Punkt in der Annahme (A1) ist ebenfalls in Verbindung mit der Stetigkeit von  $F$  über  $\text{cl}(\text{grph } \Psi)$  zu sehen. Mit der Beschränktheit des Graphen von  $\Psi$  ist dessen Abschluss dann nämlich eine kompakte Teilmenge des endlich-dimensionalen Vektorraumes  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ . Folglich existieren sowohl

$$\bar{F}_{\min} = \min_{(x,t)} \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{cl}(\text{grph } \Psi)\}$$

als auch

$$\bar{F}_{\max} = \max_{(x,t)} \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{cl}(\text{grph } \Psi)\}$$

als (endliche) reelle Zahlen. Da bei Gültigkeit der zweiten Voraussetzung offenbar weiterhin

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\min} &\leq \varphi_{\text{opt}}(t), \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &\leq \bar{F}_{\max} \end{aligned}$$

und

$$\varphi_{\text{opt}}(t) \leq \varphi_{\text{pess}}(t)$$

jeweils für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  gelten, folgt aus der Endlichkeit der Zahlen  $\bar{F}_{\min}$  und  $\bar{F}_{\max}$  die Beschränktheit der Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  über der Domäne  $\text{dom } \Psi$  der betrachteten Punkt–Menge–Abbildung. Die Beschränktheit des Graphen von  $\Psi$  ist in den meisten ökonomisch interessanten Fragestellungen eine sinnvolle und oft von vornherein erfüllte Restriktion.

Die vierte Eigenschaft soll lediglich die Konvergenz jeder Fundamentalfolge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  gegen ein  $t_0 \in \text{dom } \Psi$  sichern. Dazu würde im  $\text{dom } \Psi$  enthaltenen vollständigen Vektorraum  $\mathbf{R}^m$  die Forderung nach der Abgeschlossenheit dieses eigentlichen Definitionsbereiches ausreichen. Eine solche Voraussetzung impliziert aber gemeinsam mit der aus der Beschränktheit von  $\text{grph } \Psi$  (siehe 3.) resultierenden Beschränktheit von  $\text{dom } \Psi$  sofort die Kompaktheit dieser Menge als Teilmenge des endlich-dimensionalen Vektorraumes  $\mathbf{R}^m$ . Die Kompaktheit von  $\text{dom } \Psi$  ist somit unter der dritten Bedingung äquivalent zur Abgeschlossenheit dieser Menge. Wir wollen deshalb bereits an dieser Stelle die im Zusammenhang mit der Untersuchung von unendlichen Folgen oft besser nutzbare Kompaktheitsforderung in (A1) aufnehmen.

## 2.4 Mengentheoretische Lösbarkeitsgarantien

Bei der Formulierung der Aufgaben (OPT) und (PESS) hatten wir stillschweigend angenommen, dass für jedes  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  die Zahlen  $\min\{F(x, \bar{t}) \mid x \in \Psi(\bar{t})\}$  beziehungsweise  $\max\{F(x, \bar{t}) \mid x \in \Psi(\bar{t})\}$  existieren. Mit der Annahme (A1) haben wir nun die Voraussetzungen geschaffen, diese Forderung zu erfüllen.

Gleichwohl ist auch unter der Bedingung (A1) die Existenz optimaler Lösungen der Aufgabe (ZEOA) weder unter optimistischer, noch unter pessimistischer Herangehensweise gesichert.

Im Beispiel 2.2 ist diese Restriktion für beide dort betrachteten Punkt–Menge–Abbildungen erfüllt, trotzdem ist einmal die optimistische und einmal die pessimistische Lösbarkeit des Problems nicht gegeben. Wir brauchen demzufolge weitere Eigenschaften der PMA  $\Psi$ . Im folgenden wird sich zeigen, dass dies gerade die Oberhalb- und die Unterhalbstetigkeit dieser Abbildung sind. Wir verwenden nachstehende, für allgemeine metrische Räume formulierte Definitionen:

**Definition 2.5**  $\mathfrak{T} = (T, d_T)$  und  $\mathfrak{X} = (X, d_X)$  seien metrische Räume über den Grundmengen  $T$  und  $X$  sowie mit den Abstandsfunktionen  $d_T$  und  $d_X$ .  $\Psi : T_1 \rightarrow 2^X$  sei eine mengenwertige Funktion, die jedem Element  $t \in T_1 \subseteq T$  eine (möglicherweise leere) Teilmenge  $\Psi(t)$  von  $X$  zuordnet. Dann heißt die Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  im Punkt  $t_0 \in T_1$  mit  $\Psi(t_0) \neq \emptyset$



- oberhalb stetig (*u.s.c.*), wenn für alle Folgen  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$  die Menge  $X_{\text{acc}}$  aller Häufungspunkte der Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  nicht leer und in  $\Psi(t_0)$  enthalten ist;
- unterhalb stetig (*l.s.c.*), wenn für alle  $x_0 \in \Psi(t_0)$  und für alle Folgen  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$  eine Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  mit  $x_k \in \Psi(t_k)$  ( $k = 1, \dots, \infty$ ) existiert, so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .

Ist  $\Psi$  *u.s.c.* (*l.s.c.*) in allen Punkten  $t \in T_2$  ( $T_2 \subseteq T_1$ ), dann heißt  $\Psi$  auch *u.s.c.* (*l.s.c.*) auf  $T_2$ .

Diese Halbstetigkeitsbegriffe sind allerdings außerordentlich restriktiv. Um dies zu erkennen empfehlen wir, sie mit den allgemeineren Begriffen beider Arten der Halbstetigkeit nach BERGE und HAUSDORFF zu vergleichen (siehe z.B. [1]). Ohne ins Detail zu gehen, soll hier nur erwähnt werden, dass aus der Unterhalbstetigkeit von  $\Psi$  in  $\bar{t} \in T$  im Sinne der Definition 2.5 folgt, dass  $\Psi$  in  $\bar{t}$  sowohl *l.s.c.-B* als auch *l.s.c.-H* ist. Gleiches gilt für die Oberhalbstetigkeit.

Weiterhin ist es problemlos möglich, die Einschränkung  $\Psi(t_0) \neq \emptyset$  aufzuheben und damit auch Halbstetigkeitsuntersuchungen für Punkte mit leerer Bildmenge durchzuführen. Dies wird jedoch im weiteren Verlauf unbedeutend sein. Ohne Beweis sei hier lediglich mitgeteilt, dass  $\Psi$  im Punkt  $t_0$  mit  $\Psi(t_0) = \emptyset$  stets *l.s.c.*, und genau dann, wenn  $t_0 \notin \text{cl}(\text{dom } \Psi)$  auch *u.s.c.* ist.

Es existieren zwei klassische Resultate im Hinblick auf die Lösbarkeit der Aufgabe (ZEOA), die die Halbstetigkeit der Punkt–Menge–Abbildung der rationalen Reaktionen voraussetzen.

**Satz 2.6** (siehe z.B. BANK et al. [1]) Die Aufgabe (ZEOA) erfülle (A1).

1. Ist  $\Psi$  *u.s.c.* auf  $\text{dom } \Psi$ , dann existiert eine optimistische Lösung von (ZEOA).
2. Ist  $\Psi$  *l.s.c.* auf  $\text{dom } \Psi$ , dann existiert eine pessimistische Lösung von (ZEOA).

(A1) ist im Beispiel 2.2 jeweils für beide, sich nur in der zugrundeliegenden PMA unterscheidenden Aufgaben erfüllt. Jedoch ist  $\Psi_{\text{loc}}$  im Punkt  $t_1 = -1$  nicht oberhalb stetig, während  $\Psi_{\text{glob}}$  in  $t_2 = -2$  nicht unterhalb stetig ist.

Später wird noch die folgende einfache Aussage von Bedeutung sein:

**Satz 2.7** Die Domäne der Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  in (ZEOA) ist kompakt und  $\Psi$  ist auf  $\text{dom } \Psi$  oberhalb stetig genau dann, wenn  $\text{grph } \Psi$  kompakt in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  ist.

**Beweis:** Ist  $\text{grph } \Psi = \emptyset$  und somit  $\text{dom } \Psi = \emptyset$ , dann gilt die Aussage per definitionem. Es sei also für den Rest dieses Beweises  $\text{grph } \Psi \neq \emptyset$  vorausgesetzt.

- Um zu zeigen, dass aus der Oberhalbstetigkeit von  $\Psi$  und der Kompaktheit ihres eigentlichen Definitionsbereichs die Kompaktheit von  $\text{grph } \Psi$  folgt, nehme man eine beliebige Folge  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi$ . Es sei  $\bar{T} = \text{dom } \Psi$ . Wegen der Kompaktheit dieser Menge enthält  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine konvergente Teilfolge, die gegen ein  $t_0 \in \bar{T}$  strebt. O.E.d.A. sei  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$  angenommen. Dann besitzt aufgrund der Oberhalbstetigkeit von  $\Psi$  an der Stelle  $t_0$  die Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  einen Häufungspunkt  $x_0$  mit  $x_0 \in \Psi(t_0)$ , d.h.  $(x_0, t_0) \in \text{grph } \Psi$ . Wiederum gelte  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ . Aus  $x_k \rightarrow x_0$  und  $t_k \rightarrow t_0$  folgt im Vektorraum  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  die Aussage  $(x_k, t_k) \rightarrow (x_0, t_0)$ . Deshalb hat jede beliebige Folge  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi$  einen Häufungspunkt in  $\text{grph } \Psi$ , also ist unter den gegebenen Voraussetzungen dieser Graph kompakt.
- Sei nun  $\text{grph } \Psi$  kompakt. Die Projektion

$$P : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m \quad \text{mit} \quad P(x, t) = t$$

bildet  $\text{grph } \Psi$  auf  $\text{dom } \Psi$  ab. Da  $\text{grph } \Psi$  kompakt ist, ist wegen der Stetigkeit von  $P$  auch das Bild  $\text{dom } \Psi$  kompakt.

Um die Oberhalbstetigkeit von  $\Psi$  zu zeigen, wählen wir zu einem beliebigen  $t_0 \in \text{dom } \Psi$  eine Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0. \quad (11)$$

Es seien  $x_k \in \Psi(t_k)$  für  $k \in \mathbf{N}$  ebenfalls beliebig gewählt. Dann hat  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty}$  aufgrund der Kompaktheit von  $\text{grph } \Psi$  einen Häufungspunkt. Nach (11) besitzt jeder dieser Punkte die Form  $(x_{\text{acc}}, t_0)$  und ist wegen der durch die Kompaktheit implizierten Abgeschlossenheit des Graphen von  $\Psi$  ein Element dieser Teilmenge des  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , d.h. es gilt  $(x_{\text{acc}}, t_0) \in \text{grph } \Psi$  bzw.  $x_{\text{acc}} \in \Psi(t_0)$  für alle Häufungspunkte  $x_{\text{acc}}$  der Folge  $\{x_k\}$ . Dies wiederum bedeutet, dass  $\Psi$  an der Stelle  $t_0 \in \text{dom } \Psi$  oberhalb stetig ist. Da  $t_0$  als ein beliebiges Element des eigentlichen Definitionsbereichs von  $\Psi$  gewählt war, ist  $\Psi$  u.s.c. auf  $\text{dom } \Psi$ .

Damit ist die Äquivalenz beider Aussagen gezeigt.  $\square$

Den Abschluss dieses Unterabschnitts bilden einige Hinweise, wie man die in (A1) enthaltene Forderung nach der Beschränktheit des Graphen von  $\Psi$  im Satz 2.6 abschwächen kann.

HARKER und PANG ([14]) haben gezeigt, dass diese Voraussetzung im optimistischen Fall dadurch ersetzt werden kann, dass die Funktion  $F$  im Unendlichen durch einen bestimmten Funktionswert nach unten beschränkt ist. Konkret lautet diese Bedingung (die Bezeichnungen der beiden folgenden Annahmen wurden aus [14] übernommen):

(B) Es existiert ein reelles  $\alpha > 0$  und ein  $(x^*, t^*) \in \text{grph } \Psi$  mit  $\|(x^*, t^*)\| \leq \alpha$ , so dass  $F(x, t) \geq F(x^*, t^*)$  für alle  $(x, t) \in \text{grph } \Psi$  mit  $\|(x, t)\| \geq \alpha$  gilt.

Als Garant dies zu erfüllen, führen sie die Eigenschaft eines infiniten Wachstums von  $F$  im Unendlichen an:

(B') Für alle Folgen  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k, t_k)\| = \infty$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) = \infty$ .

Es kann gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung eines nichtleeren und in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  abgeschlossenen Graphen von  $\Psi$  und der Stetigkeit von  $F$  aus der Erfüllung der Bedingung (B) die Existenz einer optimistischen Lösung von (ZEOA) folgt. Es gilt sogar die Umkehrung, also lässt sich (B) nicht abschwächen:

**Satz 2.8** *Der Graph der PMA  $\Psi$  in (ZEOA) sei nichtleer und abgeschlossen, die Funktion  $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  sei auf  $\text{grph } \Psi$  stetig. Dann gilt:*

1. ([14, Satz 1]) *Gilt (B), dann existiert eine optimistische Lösung von (ZEOA).*
2. *Existiert für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  der Wert  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  als Minimum, so impliziert die optimistische Lösbarkeit von (ZEOA) die Gültigkeit der Annahme (B).*

**Beweis:** Der Beweis der ersten Aussage ist unter Verwendung der uns bereits bekannten Ersatzformulierung

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \min_{(x, t)} & \text{(ZEOA')} \\ (x, t) &\in \text{grph } \Psi \end{aligned}$$

in [14] enthalten. Es bleibt daher lediglich die Zulässigkeit der Verwendung dieser Ersatzformulierung, d.h. die Erfüllung der Voraussetzungen des Lemmas 2.4 zu zeigen.

Sei also  $((x^*, t^*), \alpha) \in \text{grph } \Psi \times \mathbf{R}$  so gewählt, dass damit die Relationen in (B) gelten. Dann ist

$$\inf \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{grph } \Psi\} = \inf \{F(x, t) \mid (x, t) \in \text{grph } \Psi, \|(x, t)\| \leq \alpha\}$$

erfüllt, weil hierin die rechte Seite nach oben gegen  $F(x^*, t^*)$  abgeschätzt werden kann und für alle  $(x, t) \in \text{grph } \Psi$  mit  $\|(x, t)\| > \alpha$  der Funktionswert  $F(x, t)$  nie kleiner als  $F(x^*, t^*)$  ist. Da  $\text{grph } \Psi$  und  $\{(x, t) \mid \|(x, t)\| \leq \alpha\}$  jeweils abgeschlossen sind (erstere laut Voraussetzung) und letztere sogar beschränkt ist, erfolgt die Suche nach dem Infimum auf der rechten Seite dieser Ungleichung

über einer kompakten Menge.  $F(\cdot, \cdot)$  ist auf  $\text{grph } \Psi$  (und insbesondere auf der rechts zu untersuchenden Teilmenge davon) stetig. Folglich existiert das gesuchte Infimum als Minimum, welches dann auch sofort das Minimum der linken Seite darstellt. Damit nimmt  $F(\cdot, \cdot)$  auch über ganz  $\text{grph } \Psi$  ein Minimum an und die Ersatzformulierung (ZEOA') ist wegen Lemma 2.4 erlaubt.

Ist umgekehrt  $(x^0, t^0)$  ein Paar aus optimistischer Lösung der gegebenen Aufgabe mit entsprechender Realisation, so gilt unter der in 2. aufgenommenen Zusatzvoraussetzung analog zur Abschätzung im zweiten Teil des Beweises zu Lemma 2.3

$$F(x, t) \geq \varphi_{\text{opt}}(t) \geq \varphi_{\text{opt}}(t^0) = F(x^0, t^0)$$

für alle  $(x, t) \in \text{grph } \Psi$ . Ist  $\delta > \|(x^0, t^0)\|$  beliebig, dann ist insbesondere  $F(x, t) \geq F(x^0, t^0)$  für alle  $(x, t) \in \text{grph } \Psi$  deren Norm  $\|(x, t)\|$  größer als  $\delta$  ist. Da offensichtlich  $\delta$  auch positiv ist, gilt (B) mit  $\alpha := \delta$  und  $(x^*, t^*) := (x^0, t^0)$ .  $\square$

Eine wesentliche Voraussetzung für die Richtigkeit der in diesem Beweis verwendeten Ersatzformulierung von (ZEOA) ist die Gültigkeit der Abschätzung  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) \leq F(x, \bar{t})$  für alle  $x \in \Psi(\bar{t})$ . Diese ist jedoch wirklich nur im optimistischen Fall gegeben. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die zu Satz 2.8 analoge Aussage für die pessimistische Strategie nicht gilt, selbst wenn  $\Psi$  unterhalb stetig ist und  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  existiert.

**Beispiel 2.9** *Gesucht ist eine pessimistische Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} F(x, t) &= xe^{-t^2} \rightarrow \text{„min“} \\ & \quad \underset{t}{t} \\ t &\in \mathbf{R}, \\ x &\in \Psi(t) := [1 - e^{-t^2}, 1]. \end{aligned}$$

Die PMA  $\Psi$  ist stetig, also auch unterhalb stetig. Desweiteren sieht man leicht, dass wegen  $\exp(-t^2) : \mathbf{R} \rightarrow (0, 1]$  die Gleichungen  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = F(x, \bar{t})$  für kleinst- und  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = F(x, \bar{t})$  für größtmögliches  $x$  bei fixiertem  $\bar{t}$  gelten. Folglich sind

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{opt}}(t) &= (1 - e^{-t^2})e^{-t^2} \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &= e^{-t^2} \end{aligned}$$

die optimistische und die pessimistische Gütefunktion.  $\varphi_{\text{opt}}$  hat den eindeutig bestimmten Minimumspunkt  $t_{\text{opt}} = 0$ . Damit existiert eine optimistische Lösung und wegen Satz 2.8 gilt die Annahme (B), allerdings nur mit  $(x^*, t^*) = (0, 0)$  ( $\alpha > 0$  kann beliebig gewählt werden). Eine pessimistische Lösung existiert jedoch nicht!

Gleichwohl ist es möglich, eine hinreichende Bedingung für die Existenz pessimistischer Lösungen unter Verwendung von (B') zu formulieren.

**Satz 2.10** *Die Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  in (ZEOA) habe einen nichtleeren und abgeschlossenen eigentlichen Definitionsbereich  $\text{dom } \Psi$ ,  $\Psi$  selbst sei auf  $\text{dom } \Psi$  unterhalb stetig und die Bilder  $\Psi(\bar{t})$  seien abgeschlossen für alle  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ . Es existiere weiterhin ein  $t_0 \in \text{dom } \Psi$ , für das die Bildmenge  $\Psi(t_0)$  beschränkt ist.  $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  sei auf  $\text{grph } \Psi$  stetig und erfülle (B'). Dann existiert eine pessimistische Lösung der Zwei–Ebenen–Aufgabe (ZEOA).*

**Beweis:** Der Beweis vollzieht sich in mehreren Schritten. Zunächst wird gezeigt, dass  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  entweder unendlich ist oder als Maximum (und nicht nur als Supremum) von  $F(x, \bar{t})$  über alle  $x \in \Psi(\bar{t})$  existiert. Es schließt sich der Nachweis der Unterhalbstetigkeit dieser Bewertungsfunktion an, um schließlich im dritten Teil die Existenz einer pessimistischen Lösung und somit die Richtigkeit der Aussage des Satzes zu folgern.

1. Es sei  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ .

Ist  $\Psi(\bar{t})$  unbeschränkt, dann gibt es eine Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Psi(\bar{t})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_k, \bar{t})\| = \infty$ . Wegen (B') ist dann auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, \bar{t}) = \infty$  und folglich ist  $F(x, \bar{t})$  über  $\Psi(\bar{t})$  nicht nach oben beschränkt. Wir setzen in diesem Fall  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) := \infty$ . Mit dieser (und nur dieser) Festlegung ist auch weiterhin die Ungleichung „ $F(x, \bar{t}) \leq \varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$ “ für alle  $x \in \Psi(\bar{t})$  gewährleistet.

Ist andernfalls  $\Psi(\bar{t})$  beschränkt, dann ist diese Menge wegen ihrer vorausgesetzten Abgeschlossenheit als Teilmenge des endlich–dimensionalen Vektorraums  $\mathbf{R}^n$  kompakt. Da  $F$  insbesondere auf  $\Psi(\bar{t})$  stetig ist, existiert  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  als endliche reelle Zahl und es gibt ein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$ .

Somit ist gezeigt, dass  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  für  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  genau dann endlich ist (und als Maximum existiert), falls  $\Psi(\bar{t})$  beschränkt ist.

2. Nun wird die Unterhalbstetigkeit der auf den um  $\infty$  erweiterten Raum der reellen Zahlen abbildenden Funktion  $\varphi_{\text{pess}}$  gezeigt. Hierbei ist interessanterweise *keine* Fallunterscheidung bezüglich finiter und infiniter Funktionswerte vonnöten.

Sei  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  und  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$ . Wir wählen eine beliebige Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{t}$ . Wegen der Unterhalbstetigkeit von  $\Psi$  existiert nun  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  mit  $x_k \in \Psi(t_k)$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ . Also konvergiert  $(x_k, t_k)$  gegen  $(\bar{x}, \bar{t})$  und deshalb gilt für die stetige Funktion  $F$

$$F(\bar{x}, \bar{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k). \quad (12)$$

Es gilt aber auch  $F(x_k, t_k) \leq \varphi_{\text{pess}}(t_k)$  für alle natürlichen Zahlen  $k$  und wir erhalten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) \quad (13)$$

nach dem Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$ . Aus (12) und (13) folgt sofort

$$F(\bar{x}, \bar{t}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k), \quad (14)$$

worin die rechte Seite von den in Abhängigkeit von  $\bar{x}$  konkret gewählten  $x_k$  unabhängig ist. Demzufolge gilt diese Ungleichung für alle  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$ . Betrachten wir nun die Folge  $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \Psi(\bar{t})$ , für die  $F(\bar{x}_j, \bar{t})$  gegen  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  konvergiere bzw. im Falle  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = \infty$  bestimmt divergiere gegen  $+\infty$ , dann impliziert (14)

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\bar{x}_j, \bar{t}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k)$$

beziehungsweise

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k). \quad (15)$$

Weil  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  als eine *beliebige* gegen  $\bar{t}$  konvergierende Folge aus dem  $\Psi$  gewählt wurde, ist damit die Unterhalbstetigkeit von  $\varphi_{\text{pess}} : \text{dom } \Psi \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  gezeigt. Natürlich werden wir im Folgenden weniger diese Eigenschaft, sondern vielmehr deren mathematische Repräsentation (15) benötigen.

3. Wir betrachten den Wert  $F_{\text{pess}} := \inf\{\varphi_{\text{pess}}(t) \mid t \in \text{dom } \Psi\}$ . Da laut Voraussetzung für mindestens ein  $t_0 \in \text{dom } \Psi$  das Bild  $\Psi(t_0)$  eine beschränkte Menge sein soll, ist für dieses  $t_0$  der Wert  $\varphi_{\text{pess}}(t_0) < \infty$  (wegen 1.). Es gilt also  $F_{\text{pess}} < +\infty$ .

Wir wählen eine Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) = F_{\text{pess}}$ , wobei (ähnlich zur Argumentation in 2.) für nicht endliches  $F_{\text{pess}}$  die bestimmte Divergenz der Folge gegen  $-\infty$  gemeint sei.

Angenommen,  $\{t_k\}$  hätte keinen Häufungspunkt. Dann existiert darin eine Teilfolge, für die die Norm der dort enthaltenen Elemente aus  $\text{dom } \Psi$  gegen unendlich geht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei bereits  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|t_k\| = \infty$ . Man wähle nun zu jedem  $k \in \mathbf{N}$  ein  $x_k \in \Psi(t_k)$ . Offenbar gilt dann auch  $\|(x_k, t_k)\| \rightarrow \infty$ , wegen (B') also  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) = +\infty$ . Weil gleichzeitig für alle  $k$  stets  $F(x_k, t_k) \leq \varphi_{\text{pess}}(t_k)$  gilt, kann  $\varphi_{\text{pess}}(t_k)$  für  $k \rightarrow \infty$  ebenfalls nur gegen  $+\infty$  und folglich *nicht* gegen  $F_{\text{pess}} < +\infty$  konvergieren. Dies steht im Widerspruch zur Wahl der  $t_k$ .

Demzufolge besitzt  $\{t_k\}$  einen Häufungspunkt  $\bar{t}$  und es sei wiederum o.E.d.A.  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{t}$ . Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von  $\text{dom } \Psi$  ist  $\bar{t}$  im eigentlichen Definitionsbereich dieser Punkt–Menge–Abbildung enthalten. Würde nun in (15) die strenge Ungleichung gelten, wäre wegen

$$F_{\text{pess}} \leq \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) < \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) = F_{\text{pess}}$$

ein Widerspruch evident. Es kann also nur

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) = F_{\text{pess}} \quad (16)$$

sein. Da aufgrund von  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  die Existenz eines  $x_0 \in \Psi(\bar{t})$  garantiert ist und in  $(x_0, \bar{t})$  der Wert der Funktion  $F$  eine wohldefinierte reelle Zahl ist, kann wegen

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) \geq F(x_0, \bar{t}) > -\infty,$$

der bereits gezeigten Aussage  $F_{\text{pess}} < +\infty$  und (16) die Zahl  $F_{\text{pess}}$  nur endlich sein. Also ist auch  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  endlich und wegen 1. existiert ein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  mit

$$F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = F_{\text{pess}}.$$

Das heißt  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  ist eine pessimistische Lösung der Aufgabe (ZEOA) und  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  ist die entsprechende Realisation der pessimistischen Strategie.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.  $\square$

Obwohl somit gezeigt ist, dass auch für unbeschränkte Graphen der in der Formulierung von (ZEOA) auftretenden Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  eventuell Aussagen zur Existenz von Lösungen möglich sind, werden wir uns im folgenden trotzdem auf beschränktes  $\text{grph } \Psi$  konzentrieren.

Man wird in der Arbeit von HARKER und PANG übrigens den verwendeten Strategie–Begriff vergeblich suchen. Tatsache ist, dass dort (wie auch in vielen anderen Abhandlungen, in denen die Aufteilung der Variablen auf mehr als einen Entscheidungsträger keine wesentliche Rolle spielt oder ganz einfach nicht gegeben ist) stillschweigend die Lösung unter *optimistischen* Gesichtspunkten gesucht ist.

## 2.5 Nebenbedingungen in der oberen Ebene

Die eben durchgeführten Betrachtungen werden um einiges komplizierter, falls auch in der oberen Ebene von den Leader-Variablen abhängige Einschränkungen an die Follower-Variablen auftreten. Die derart restringierte Aufgabe (ZEOA) werde mit (RZEOA) bezeichnet und stellt sich in der Form

$$\begin{array}{l} F(x, t) \rightarrow \text{„min“} \\ t \in T \\ x \in \Phi(t) \\ \hline x \in \Psi(t) \end{array} \quad (\text{RZEOA})$$

mit einer weiteren Punkt–Menge–Abbildung  $\Phi : T \rightarrow 2^X$  dar. Hierbei stellt die Forderung „ $x \in \Phi(t)$ “ den über die Minimierung der Zielfunktion der oberen

Ebene hinausgehenden Wunsch des Leaders dar, dass der Follower für ein konkret vorgegebenes  $\bar{t} \in T$  mit einem  $\bar{x} \in \Phi(\bar{t})$  reagieren möge. Analog zu der weiter oben beschriebenen Tatsache, dass eine optimistische oder pessimistische Interpretation der Aufgabe (ZEOA) durch den Leader den Follower in seiner Reaktion nicht beeinflusst, ist in dieser Formulierung wesentlich, dass die Antwort des Followers nach wie vor nur durch die PMA  $\Psi$  eingeschränkt wird. Hier ist es also notwendig deutlich zu machen, dass die beiden letzten Zeilen in (RZEOA) keinesfalls zu „ $x \in \Phi(t) \cap \Psi(t)$ “ zusammengefasst und auf diese Weise die Nebenbedingungen der oberen Ebene in die untere verschoben werden können. Dies ist die Aufgabe des waagerechten Trennstrichs. Beispiele für die Veränderung des Lösbarkeitsverhaltens und der Lösungen bei Inbetrachtziehung von Restriktionen in der jeweils anderen Ebene finden sich u.a. in [31].

Als Motivation zur Einführung der in (RZEOA) zu verwendenden Optimalitätsbegriffe eignen sich Überlegungen, wie sie ISHIZUKA und AIYOSHI in [16] angestellt haben und die hier in leicht vereinfachter Form wiedergegeben werden.

Die größte Schwierigkeit in (RZEOA) ergibt sich aus der Tatsache, dass für ein konkretes  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  gewisse Elemente der Menge  $\Psi(\bar{t})$  die Restriktion  $x \in \Phi(\bar{t})$  der oberen Ebene eventuell nicht erfüllen. Selbst wenn man also annimmt, dass alle  $\bar{t}$  mit  $\Psi(\bar{t}) \cap \Phi(\bar{t}) = \emptyset$  als Lösungen entfallen, verbleibt die Möglichkeit zwei verschiedene Mengen von in Frage kommenden Parametern  $t$  zu betrachten. Dies ist einmal die „optimistische Parametermenge“

$$T_{\text{opt}} = \{\bar{t} \in T \cap \text{dom } \Psi \mid \Psi(\bar{t}) \cap \Phi(\bar{t}) \neq \emptyset\}$$

als Menge aller Parameter, für die *wenigstens eine* der rationalen Reaktionen die Nebenbedingung der oberen Ebene erfüllt, sowie die „pessimistische Parametermenge“

$$T_{\text{pess}} = \{\bar{t} \in T \cap \text{dom } \Psi \mid \Psi(\bar{t}) \subseteq \Phi(\bar{t})\},$$

deren Elemente dadurch gekennzeichnet sind, dass für *jede* denkbare rationale Reaktion  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  des Followers auch  $\bar{x} \in \Phi(\bar{t})$  gilt.

Unter Benutzung der bereits vorgestellten Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  ergeben sich nun eine ganze Reihe von Kombinationen, die jede für sich eine ganz spezielle Art von Optimalität repräsentieren. In [16] werden beispielhaft die Optimalmengen

$$T_{\text{pess}}^* = \{t^* \in T_{\text{pess}} \mid \nexists t \in T_{\text{pess}} \text{ mit } \varphi_{\text{pess}}(t) < \varphi_{\text{pess}}(t^*)\}$$

und

$$T_{\text{opt}}^* = \{t^* \in T_{\text{opt}} \mid \nexists t \in T_{\text{pess}} \text{ mit } \varphi_{\text{pess}}(t) < \varphi_{\text{opt}}(t^*)\}$$

eingeführt, deren Interpretation dem Leser überlassen sei. Aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten in diesen Definitionen das Subskript „pess“ durch „opt“ und



umgekehrt zu ersetzen, besteht eine der Aufgaben bei der Lösung von (RZEOA) darin, die denkbaren Optimalitätsbegriffe hinsichtlich ihrer Praxisrelevanz zu untersuchen.

Vorschläge zur Bestimmung wenigstens einiger Elemente der Mengen  $T_{\text{opt/pess}}^*$  liegen vor, und zwar für  $T_{\text{opt}}^*$  von ISHIZUKA/AIYOSHI in der bereits erwähnten Arbeit [16], sowie für  $T_{\text{pess}}^*$  eine Reihe von Arbeiten von LORIDAN/MORGAN (siehe zum Beispiel [21, 22, 23, 24]).

### 3 Schwache und asymptotische Lösungen

Im nun folgenden Abschnitt wird es darum gehen, die Lösungsbegriffe ausgehend von den Ersatzaufgaben (OPT) und (PESS) soweit zu verallgemeinern, dass die entsprechend definierten Lösungen unter weitaus schwächeren Voraussetzungen existieren als die Lösungen von (OPT) und (PESS).

#### 3.1 Schwache Lösungen

Es wird neben den bereits weiter oben vorgestellten Lösungsbegriffen zunächst das wesentlich allgemeinere Konzept der schwachen Lösungen eingeführt. Es wird sich zeigen, dass solche Lösungen sowie die zugehörigen schwachen Realisationen der optimistischen bzw. pessimistischen Strategie unter erheblich weniger restriktiven Bedingungen existieren als die vorstehend beschriebenen herkömmlichen Lösungen. Letztere werden zur besseren Unterscheidung und zur Vermeidung von Missverständnissen gegebenenfalls auch als *strenge Lösungen* bezeichnet werden.

Um das Vorhandensein schwacher Lösungen in der Aufgabe (ZEOA) zu sichern, müssen an die Bilder der Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi$  keinerlei Bedingungen hinsichtlich Abgeschlossenheit gestellt werden. Die bei deren Einführung zu betrachtenden Punkte können allerdings sehr wohl beliebige Elemente der Abschließung von  $\text{grph } \Psi$  sein. Dies motiviert die Annahme (A1') als eine in diesem Abschnitt hinreichende schwächere Variante von (A1), sowie die darauf folgende Vereinbarung.

(A1') In der Aufgabe (ZEOA) gelte:

1. Die Funktion  $F : M \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $M \subseteq X \times T$  sei wenigstens auf dem Abschluss des Graphen von  $\Psi$  definiert und dort stetig.
2. Der Graph von  $\Psi$  sei nicht leer und beschränkt in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ .

**Definition 3.1** *Es sei  $\Psi : T \rightarrow 2^X$  mit  $T \subseteq \mathbf{R}^m$  und  $X \subseteq \mathbf{R}^n$  eine Punkt–Menge–Abbildung. Dann heißt die PMA  $\Phi$ , die durch  $\text{grph } \Phi = \text{cl}(\text{grph } \Psi)$  gegeben ist, der Abschluss von  $\Psi$ . Man schreibt  $\Phi = \text{cl } \Psi$  oder auch  $\Phi = \overline{\Psi}$ .*

Entsprechend dieser Festlegung besteht die Konstruktion der PMA  $\bar{\Psi}$  aus drei Schritten:

1. Bestimmung des Graphen von  $\Psi$ ;
2. Bildung der Abschließung dieser Menge im  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ ;
3. Interpretation der Abschließung von  $\text{grph } \Psi$  als PMA  $\bar{\Psi}$ .

Alle diese Vorgänge sind jeweils eindeutig durchführbar und darum ist der Abschluß einer gegebenen Punkt–Menge–Abbildung stets eindeutig bestimmt.

Ist zum Beispiel für  $t \in \mathbf{R}$  durch  $\Psi(t) = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + t^2 < 1\}$  eine PMA gegeben, so ist  $\text{grph } \Psi = \{(x, t) \mid x^2 + t^2 < 1\}$ , d.h. das Innere der Einheitskugel im  $\mathbf{R}^2$  und es gilt  $\text{dom } \Psi = (-1, 1)$ . Dem zweiten Punkt folgend bildet man  $\text{grph } \bar{\Psi} = \text{cl}(\text{grph } \Psi) = \{(x, t) \mid x^2 + t^2 \leq 1\}$ . Damit ist  $\bar{\Psi}(t) = \{x \mid x^2 + t^2 \leq 1\}$  und  $\text{dom } \bar{\Psi} = [-1, 1]$ .

Sofort ist klar, dass dann für eine beliebig gewählte PMA  $\Psi$  jedes Bild  $\bar{\Psi}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  eine abgeschlossene Menge darstellt. Die Domäne von  $\bar{\Psi}$  ist jedoch nicht notwendigerweise abgeschlossen, d.h. folglich gilt offenbar für die Abschließung von Punkt–Menge–Abbildungen nicht unbedingt die Gleichheit  $\text{dom } \bar{\Psi} = \text{cl}(\text{dom } \Psi)$ .

Die ähnliche Aussage  $\text{grph } \bar{\Psi} = \text{cl}(\text{grph } \Psi)$  ist Hauptbestandteil der Definition 3.1. Betrachtet man aber  $\Psi(t) = \{t^{-1}\}$  für  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , so ist bereits der Graph von  $\Psi$  abgeschlossen. Mithin gilt  $\bar{\Psi} = \Psi$ . Für die eigentlichen Definitionsbereiche ist also  $\text{dom } \bar{\Psi} = \text{dom } \Psi = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , was keine abgeschlossene Menge und damit insbesondere nicht  $\text{cl}(\text{dom } \Psi)$  darstellt.

Obgleich die Bilder von  $\bar{\Psi}$  jeweils abgeschlossen sind, verbietet sich die Vermutung  $\bar{\Psi}(t) = \text{cl}(\Psi(t))$  ebenfalls. So ist im oben präsentierten Beispiel (in dem der Graph von  $\Psi$  dem Inneren der 2-dimensionalen Einheitskugel entspricht)  $\Psi(1) = \emptyset$ , also auch  $\text{cl}(\Psi(1)) = \emptyset$ . Für den Abschluss von  $\Psi$  ist aber  $\bar{\Psi}(1) = \{0\}$ , d.h. nicht gleich  $\text{cl}(\Psi(1))$ . Die Hypothese scheitert also (unter anderem) sofort aufgrund des möglichen Vorhandenseins gewisser  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi} \setminus \text{dom } \Psi$ , für die dann offensichtlich einerseits  $\bar{\Psi}(\bar{t}) \neq \emptyset$  und andererseits  $\Psi(\bar{t}) = \emptyset$  und deshalb auch  $\text{cl}(\Psi(\bar{t})) = \emptyset$  gilt.

Es sei des weiteren vermerkt, dass die „Modifikation“ einer Abbildung durch Betrachtung des Abschlusses einer in Räumen höherer Dimension definierten Menge keineswegs neu ist.

Ist  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  eine konvexe Funktion, so bezeichnet

$$G_\lambda := \left\{ g_\lambda : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \mid g_\lambda(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \ \forall \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \right. \\ \left. g_\lambda \text{ unterhalb stetig auf } \mathbf{R}^n \right\}$$

die Menge aller unterhalb stetigen Minoranten von  $f$ .

Dann existiert ein  $\lambda_0 \in \Lambda$  mit der Eigenschaft  $g_{\lambda_0}(x) \geq g_\lambda(x)$  für alle  $\lambda \in \Lambda$  und alle  $x \in \mathbf{R}^n$ . Die Funktion  $g_{\lambda_0}$  heißt auch die *maximale unterhalb stetige Minorante* von  $f$ . Diese Abbildung kann erstens dadurch bestimmt werden, dass man

$$g_{\lambda_0}(\bar{x}) = \inf_{\{x_k\} \rightarrow \bar{x}} \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$$

setzt. Die Konvexität von  $f$  sichert  $g_{\lambda_0}(\bar{x}) > -\infty$ . Eine zweite, zur Bestimmung von  $\bar{\Psi}$  ähnliche Möglichkeit besteht darin,  $g_{\lambda_0}$  aus der Vorschrift

1. bestimme  $\text{epi } f := \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid y \geq f(x)\}$ , den „Epigraphen“ von  $f$ ;
2. setze  $E := \text{cl}(\text{epi } f)$ ;
3. interpretiere  $E$  als Epigraphen von  $g_{\lambda_0}$

zu erhalten.

Aussagen bezüglich der Abgeschlossenheit der Domäne von  $\bar{\Psi}$  sind möglich, wenn der Graph von  $\Psi$  beschränkt ist:

**Lemma 3.2** *Ist der Graph der PMA  $\Psi : T \rightarrow 2^X$  mit  $T \subseteq \mathbf{R}^m$  und  $X \subseteq \mathbf{R}^n$  im Raum  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  beschränkt, so ist  $\text{dom } \bar{\Psi}$  kompakt und es gilt  $\text{dom } \bar{\Psi} = \text{cl}(\text{dom } \Psi)$ . Die Punkt–Menge–Abbildung  $\bar{\Psi}$  ist dann oberhalb stetig auf ihrer Domäne.*

**Beweis:** Ist  $\text{grph } \Psi$  beschränkt, dann ist  $\text{grph } \bar{\Psi} = \text{cl}(\text{grph } \Psi)$  im vollständigen und endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  kompakt. Die Kompaktheit von  $\text{dom } \bar{\Psi}$  folgt aus Satz 2.7, ebenso wie die Oberhalbstetigkeit von  $\bar{\Psi}$  auf  $\text{dom } \bar{\Psi}$ .

Wegen  $\text{grph } \Psi \subseteq \text{grph } \bar{\Psi}$  gilt offensichtlich  $\text{dom } \Psi \subseteq \text{dom } \bar{\Psi}$  und aus der Kompaktheit und damit Abgeschlossenheit von  $\text{dom } \bar{\Psi}$  folgt

$$\text{cl}(\text{dom } \Psi) \subseteq \text{dom } \bar{\Psi}. \quad (17)$$

Umgekehrt folgt für jedes  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  die Existenz eines  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \bar{\Psi}$ . Also gibt es eine Folge  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq \text{grph } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, t_k) = (\bar{x}, \bar{t})$ . Da diese Konvergenzaussage im  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{t}$  impliziert und weiterhin  $\{t_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \text{dom } \Psi$  gilt, ist  $\bar{t}$  ein Häufungspunkt einer Folge von Punkten aus  $\text{dom } \Psi$ , d.h.  $\bar{t} \in \text{cl}(\text{dom } \Psi)$ . Da  $\bar{t}$  als ein beliebiger Punkt aus  $\text{dom } \bar{\Psi}$  gewählt war, gilt

$$\text{cl}(\text{dom } \Psi) \supseteq \text{dom } \bar{\Psi}. \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt auch die letzte noch zu zeigende Behauptung.  $\square$

Basierend auf dem Begriff des Abschlusses einer PMA können jetzt schwache Lösungen der Zwei-Ebenen-Aufgabe definiert werden. Man erklärt dazu für die Aufgabe (ZEOA) die folgenden Funktionen, die bei Nichterfülltsein der Annahme (A1') auch die Werte  $+\infty$  oder  $-\infty$  annehmen können:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{\text{opt}}(t) &:= \inf_{x \in \Psi(t)} F(x, t) \quad \text{für alle } t \in \text{dom } \Psi, \\ \bar{F}_{\text{opt}} &:= \inf_{t \in \text{dom } \Psi} \bar{\varphi}_{\text{opt}}(t), \\ \bar{\varphi}_{\text{pess}}(t) &:= \sup_{x \in \Psi(t)} F(x, t) \quad \text{für alle } t \in \text{dom } \Psi, \\ \bar{F}_{\text{pess}} &:= \inf_{t \in \text{dom } \Psi} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(t).\end{aligned}$$

Ähnlich zu der bei der Einführung der Annahme (A1) gemachten Begründung für den dortigen dritten Punkt sind alle diese Zahlen unter (A1') endlich, sowie nach oben und unten beschränkt. Das wird im Beweis zu Satz 3.5 noch ausführlich nachzulesen sein.

**Definition 3.3** *Es sei die Aufgabe (ZEOA) gegeben und es bezeichne  $\bar{\Psi}$  den Abschluss  $\text{cl } \Psi$  der Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi$ .*

- *Ein  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  heißt schwache optimistische Lösung von (ZEOA), falls ein  $\bar{x} \in \bar{\Psi}(\bar{t})$  existiert, so dass  $\bar{F}_{\text{opt}} = F(\bar{x}, \bar{t})$  gilt.*
- *Ein  $\bar{s} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  heißt schwache pessimistische Lösung von (ZEOA), falls ein  $\bar{x} \in \bar{\Psi}(\bar{s})$  und eine Folge  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  existieren, so dass für den Grenzübergang  $k \rightarrow +\infty$  die Folgen  $\{s_k\}$  gegen  $\bar{s}$  und  $\{\bar{\varphi}_{\text{pess}}(s_k)\}$  gegen  $\bar{F}_{\text{pess}}$  konvergieren und  $\bar{F}_{\text{pess}} = F(\bar{x}, \bar{s})$  gilt.*

*Analog zu der Festlegung bei den herkömmlichen Lösungen heißt für die schwache optimistische Lösung  $\bar{t}$  jedes  $\bar{x} \in \bar{\Psi}(\bar{t})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$  eine schwache optimistische Realisation, und das Wertepaar  $(\bar{x}, \bar{t})$  ebenfalls schwache optimistische Lösung von (ZEOA). Gleiches wird analog für den Fall einer pessimistischen Strategie erklärt.*

Eine Diskussion der Gründe für die doch recht deutlichen Unterschiede in der mathematischen Darstellung schwacher Lösungen bei optimistischer und bei pessimistischer Strategie ist Gegenstand der Ausführungen dieses Abschnittes ab dem Beispiel 3.10 auf Seite 42.

Es ergibt sich aus dieser Festlegung insbesondere, dass im Fall der Endlichkeit der Funktionswerte von  $F$  über  $\text{grph } \bar{\Psi}$  nur dann von einer schwachen Lösung

gesprochen werden soll, wenn  $\bar{F}_{\text{opt}}$  bzw.  $\bar{F}_{\text{pess}}$  endlich sind. Dies ist bei Erfülltheit von (A1') gesichert.

Man sieht weiterhin leicht, dass mit einer schwachen optimistischen (pessimistischen) Lösung auch stets eine schwache optimistische (pessimistische) Realisation existiert.

Außerdem ist offensichtlich, dass unter der Bedingung (A1') ein  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  mit der Eigenschaft  $\bar{\varphi}_{\text{opt}}(\bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$  eine schwache optimistische Lösung von (ZEOA) ist. Die analoge Aussage für die pessimistische Betrachtungsweise gilt ebenso.

**Beweisskizze** Gilt (A1'), so ist  $\text{cl}(\Psi(\bar{t}))$  kompakt und  $F$  ist auf dieser Menge stetig. Deshalb gilt

$$\min_{x \in \text{cl}(\Psi(\bar{t}))} F(x, \bar{t}) = \inf_{x \in \Psi(\bar{t})} F(x, \bar{t}) = \bar{\varphi}_{\text{opt}}(\bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$$

und es existiert ein  $\bar{x} \in \text{cl}(\Psi(\bar{t}))$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$ . Ähnlich bei pessimistischer Interpretation, die zusätzlich geforderte Folge sei einfach  $\{s_k \equiv \bar{t}\}_{k=1}^{\infty}$ .

In der Tat gilt diese Aussage aber nur für  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$ , da im Falle  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$ , aber  $\bar{t} \notin \text{dom } \Psi$  die Funktionen  $\bar{\varphi}_{\text{opt/pess}}(\bar{t})$  nicht definiert sind. Warum wir für  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  und damit insbesondere auch für alle  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi} \setminus \text{dom } \Psi$  nicht einfach die Werte der Funktion  $F$  auf dem Abschluss des Graphen von  $\Psi$  ( $F$  ist dort als stetig vorausgesetzt!) zu Rate ziehen können, wird auf Seite 43 anhand eines Beispiels erläutert.

Der Umkehrschluss, nämlich dass eine schwache optimistische/pessimistische Lösung  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  auch  $\bar{\varphi}_{\text{opt}}(\bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$  bzw.  $\bar{\varphi}_{\text{pess}}(\bar{t}) = \bar{F}_{\text{pess}}$  erfüllt, ist bei beiden Strategien falsch.

**Beispiel 3.4** *In der Aufgabe*

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in [0, 1] \\ \Psi(t) &= \begin{cases} \{t - 1\}, & t \in (0, 1] \\ \{0\}, & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

erhält man

$$\bar{\varphi}_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} t - 1, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

und damit  $\bar{F}_{\text{opt}} = -1$ .  $(\bar{x}, \bar{t}) = (-1, 0)$  ist das einzige Element aus  $\text{grph } \bar{\Psi}$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{F}_{\text{opt}}$ , also auch die eindeutig bestimmte schwache optimistische Lösung des Problems. Trotz  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  gilt  $-1 = \bar{F}_{\text{opt}} \neq \bar{\varphi}_{\text{opt}}(\bar{t}) = 0$ .

Für die Aufgabe

$$\begin{aligned} x^2 + s^2 &\rightarrow \text{„min“} \\ \text{grph } \Psi &= \{(x, s) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid xs = 0\} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\bar{\varphi}_{\text{pess}}(s) = \begin{cases} s^2, & s \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

und folglich  $\bar{F}_{\text{pess}} = 0$ . Wählen wir nun die gegen  $\bar{s} = 0$  konvergierende Folge  $\{s_k = 1/k\}_{k=1}^{\infty}$ , so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-2} = 0 = \bar{F}_{\text{pess}}$  und mit  $\bar{x} = 0 \in \Psi(\bar{s})$  gilt  $F(\bar{x}, \bar{s}) = \bar{F}_{\text{pess}}$ .  $\bar{s} = 0$  ist also eine schwache pessimistische Lösung. Obwohl  $\bar{s} \in \text{dom } \Psi$  ist, gilt  $0 = \bar{F}_{\text{pess}} \neq \bar{\varphi}_{\text{pess}}(\bar{s}) = 1$ .

Im Gegensatz zu den strengen Lösungen der Optimierungsaufgaben (OPT) und (PESS) existieren schwache Lösungen unter weit weniger einschneidenden Voraussetzungen, wie die folgenden Aussagen zeigen werden. Dazu betrachten wir die analoge Formulierung

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in \text{dom } \Psi \\ x &\in \Psi(t) \end{aligned} \tag{ZEOA}$$

der gegebenen Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe.

**Satz 3.5** (ZEOA) *erfülle die Bedingung (A1'), d.h. der Graph der Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi$  sei nichtleer und beschränkt und  $F$  sei stetig auf  $\text{cl}(\text{grph } \Psi)$ . Dann besitzt (ZEOA) sowohl eine schwache optimistische als auch eine schwache pessimistische Lösung.*

*Ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine schwache optimistische Lösung von (ZEOA), dann existiert eine Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{t}$ , so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$  gilt.*

**Beweis:** Wir können kurz  $\text{cl}(\text{grph } \Psi) = \text{grph } \bar{\Psi}$  schreiben, womit  $\bar{\Psi} = \text{cl } \Psi$  die im Sinne der Definition 3.1 festgelegte PMA ist. Wegen der Beschränktheit von  $\text{grph } \Psi$  ist  $\text{grph } \bar{\Psi}$  als abgeschlossene Teilmenge des endlich-dimensionalen vollständigen Vektorraums  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  kompakt.

Aufgrund der Stetigkeit von  $F$  auf der kompakten Menge  $\text{grph } \bar{\Psi}$  existieren

$$F_{\min} := \min_{(x,t) \in \text{grph } \bar{\Psi}} F(x, t) \quad \text{und} \quad F_{\max} := \max_{(x,t) \in \text{grph } \bar{\Psi}} F(x, t)$$

als endliche reelle Zahlen. Da also offenbar

$$-\infty < F_{\min} \leq F(x, t) \leq F_{\max} < +\infty$$

für alle  $(x, t) \in \text{grph } \bar{\Psi}$  gilt, existieren alle im weiteren Verlauf des Beweises benötigten Grenzwerte, Infima und Suprema als endliche reelle Zahlen. Insbesondere sind  $\bar{\varphi}_{\text{opt}}(t)$  und  $\bar{\varphi}_{\text{pess}}(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  sowie  $\bar{F}_{\text{opt}}$  und  $\bar{F}_{\text{pess}}$

wohl-definierte reelle Zahlen. Darauf wird im folgenden nicht nochmals hingewiesen.

Wir betrachten jetzt eine Folge  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  und  $\varepsilon_k > 0$  für alle natürlichen Zahlen  $k$ . Wegen der soeben getroffenen Endlichkeitsaussagen und aufgrund der Beschränktheit von  $\Psi(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  und von  $\text{dom } \Psi$  existiert eine Folge  $\{(x_k, t_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq \text{grph } \Psi$  mit

$$\left| \overline{F}_{\text{opt}} - \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon_k$$

und

$$\left| \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) - F(x_k, t_k) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon_k.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt  $\left| F(x_k, t_k) - \overline{F}_{\text{opt}} \right| < \varepsilon_k$  und somit geht  $F(x_k, t_k)$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\overline{F}_{\text{opt}}$ . Aus der Kompaktheit der Menge  $\text{grph } \overline{\Psi}$  ergibt sich, dass  $\{(x_k, t_k)\}$  als Teilmenge dieses Graphen einen Häufungspunkt  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \overline{\Psi}$  besitzt, d.h.

$$\bar{t} \in \text{dom } \overline{\Psi} \quad \text{und} \quad \bar{x} \in \overline{\Psi}(\bar{t}). \quad (19)$$

Also enthält diese Folge eine gegen  $(\bar{x}, \bar{t})$  konvergierende Teilfolge. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, t_k) = (\bar{x}, \bar{t})$ . Die Stetigkeit von  $F$  auf  $\text{grph } \overline{\Psi}$  erlaubt die Implikation

$$\left( \left( \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, t_k) = (\bar{x}, \bar{t}) \right) \wedge \left( \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) = \overline{F}_{\text{opt}} \right) \right) \Rightarrow F(\bar{x}, \bar{t}) = \overline{F}_{\text{opt}}.$$

Da beide Bedingungen auf der Seite der Voraussetzungen erfüllt sind, gilt  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \overline{F}_{\text{opt}}$ . Demnach ist mit (19)  $\bar{t}$  eine schwache optimistische Lösung und  $\bar{x}$  eine dazugehörige schwache Realisation der optimistischen Strategie.

Es sei nun  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \overline{\Psi}$  eine schwache optimistische Lösung. Dann existiert eine Folge  $\{x_k, t_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \text{grph } \Psi$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, t_k) = (\bar{x}, \bar{t})$ . Da  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  Teilmenge von  $\text{dom } \Psi$  ist, existiert für alle  $k \in \mathbf{N}$  der Wert  $\overline{\varphi}_{\text{opt}}(t_k)$  und

$$F(x_k, t_k) \geq \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) \geq \overline{F}_{\text{opt}}$$

gilt offensichtlich<sup>4</sup>. Führen wir in dieser fortlaufenden Ungleichung den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  aus, ergibt sich

$$F(\bar{x}, \bar{t}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) \geq \overline{F}_{\text{opt}} \quad (20)$$

wegen der Stetigkeit von  $F$  auf dem Abschluss des Graphen von  $\Psi$ . Da für die betrachtete schwache optimistische Lösung jedoch auch  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \overline{F}_{\text{opt}}$  gilt,

---

<sup>4</sup>Die linke Ungleichung gilt in der analogen Formulierung für den pessimistischen Fall *nicht*. Wir haben im Gegenteil  $F(x_k, t_k) \leq \overline{\varphi}_{\text{pess}}(t_k)$ . Somit gelten die nun folgenden Argumente nur für die optimistische Herangehensweise.

können in (20) nur die Gleichheitszeichen gelten und die im Satz behauptete Existenz der geforderten Folge ist gezeigt.

Nun bleibt noch die Existenz einer schwachen pessimistischen Lösung zu zeigen. Dies ist jedoch schnell getan.

Zu der wie oben gewählten  $\varepsilon$ -Folge finden wir mit analoger Begründung eine Folge  $\{(x_k, s_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi$  mit

$$\left| \overline{F}_{\text{pess}} - \overline{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon_k \quad (21)$$

und

$$\left| \overline{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) - F(x_k, s_k) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon_k.$$

Wiederum folgt die Konvergenz von  $F(x_k, s_k)$  gegen  $\overline{F}_{\text{pess}}$  für  $k \rightarrow \infty$ . Auch hat  $\{(x_k, s_k)\}$  einen Häufungspunkt  $(\bar{x}, \bar{s}) \in \text{grph } \overline{\Psi}$ , d.h.

$$\bar{s} \in \text{dom } \overline{\Psi} \quad \text{und} \quad \bar{x} \in \overline{\Psi}(\bar{s}). \quad (22)$$

Erneut sei o.E.d.A.  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, s_k) = (\bar{x}, \bar{s})$ . Die Stetigkeit von  $F$  auf  $\text{grph } \overline{\Psi}$  ergibt  $F(\bar{x}, \bar{s}) = \overline{F}_{\text{pess}}$ . Daraus und aus (22) unter der zusätzlichen Beachtung von (21) folgt, dass  $(\bar{x}, \bar{s})$  schwache pessimistische Lösung von (ZEOA) ist.  $\square$

Man sieht leicht, dass für den Fall der Existenz der Funktionswerte  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  strenge Lösungen im Sinne der Probleme (OPT) und (PESS) auch schwache Lösungen sind:

**Satz 3.6** *Wenn (ZEOA) die Bedingung (A1) erfüllt und eine optimistische (pessimistische) Lösung  $\bar{t}$  mit Realisation  $\bar{x}$  besitzt, dann ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  auch eine schwache optimistische (pessimistische) Lösung von (ZEOA).*

**Beweis:** Wegen der in (A1) geforderten Kompaktheit von  $\Psi(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  und der Stetigkeit von  $F$  auf  $\text{grph } \Psi$  ist  $\varphi_{\text{opt}}(t) = \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t)$  auf  $\text{dom } \Psi$ . Für eine optimistische Lösung  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  von (ZEOA) gilt also

$$\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = \min_{t \in \text{dom } \Psi} \varphi_{\text{opt}}(t) = \inf_{t \in \text{dom } \Psi} \varphi_{\text{opt}}(t) = \inf_{t \in \text{dom } \Psi} \overline{\varphi}_{\text{opt}}(t) = \overline{F}_{\text{opt}}.$$

Aus der Voraussetzung folgt weiterhin, dass es ein  $\bar{x} \in \Psi(\bar{t})$  gibt, so dass  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  und damit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \overline{F}_{\text{opt}}$  ist. Demnach ist  $\bar{t}$  bzw.  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine schwache optimistische Lösung von (ZEOA).

Der Beweis, dass eine pessimistische Lösung auch schwache pessimistische Lösung ist, verläuft völlig analog. Wir schließen aus der Existenz einer pessimistischen Lösung  $\bar{s} \in \text{dom } \Psi$

$$\varphi_{\text{pess}}(\bar{s}) = \min_{s \in \text{dom } \Psi} \varphi_{\text{pess}}(s) = \inf_{s \in \text{dom } \Psi} \varphi_{\text{pess}}(s) = \inf_{s \in \text{dom } \Psi} \overline{\varphi}_{\text{pess}}(s) = \overline{F}_{\text{pess}}$$



und aus der Voraussetzung das Vorhandensein eines Punktes  $\bar{x} \in \Psi(\bar{s})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, \bar{s}) = \bar{F}_{\text{pess}}$ . Die Folge  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit  $s_k \equiv \bar{s} \in \text{dom } \Psi$  ist dann eine Folge, deren Existenz in der Definition schwacher pessimistischer Lösungen gefordert wird. Folglich ist  $\bar{s}$  eine derartige Lösung.  $\square$

Wir wissen somit, dass schwache Lösungen beider Art unter den Bedingungen des Satzes 3.5 existieren und dass bei Erfülltsein von (A1) eventuell vorhandene strenge optimistische bzw. pessimistische Lösungen von (ZEOA) in Einheit mit ihren jeweiligen Realisationen wiederum schwache Lösungen und entsprechende Realisationen sind.

### 3.2 Asymptotische Lösungen als Spezialfall schwacher Lösungen

Die Berechenbarkeit der „Gütefunktionen“  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$  unter den Voraussetzungen des Satzes 3.6 gestattet es uns nun, schwache Lösungen als asymptotisch zu interpretieren. Motiviert werden soll dieser Begriff von der folgenden Argumentation:

Wir betrachten dazu die herkömmliche (d.h. nicht–hierarchische) Optimierungsaufgabe

$$\min_x \{f(x) \mid x \in M\}, \quad (\text{OA})$$

in der die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  nach unten beschränkt sei. Dann existiert das Infimum  $f_{\text{inf}} := \inf_x \{f(x) \mid x \in M\}$  als (endliche) reelle Zahl und Lösungen von (OA) sind genau diejenigen  $x_0 \in M$ , für die  $f(x_0) = f_{\text{inf}}$  gilt. Betrachten wir andererseits eine Folge  $X := \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f_{\text{inf}}$  (deren Existenz unabhängig von der Lösbarkeit von (OA) gesichert ist), zeigt sich, dass man damit dem infimalen Zielfunktionswert  $f_{\text{inf}}$  in der Tat beliebig nahe kommen kann. Hat nun die Folge  $X$  zusätzlich noch einen Häufungspunkt  $\bar{x} \in \text{cl } M$ , können wir aufgrund des Vorhandenseins einer gegen  $\bar{x}$  konvergierenden Teilfolge von  $X$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit sofort  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$  annehmen. Dies begründet die folgende Festlegung:

**Definition 3.7** *Gegeben sei die Optimierungsaufgabe (OA) und es sei  $f$  auf  $M$  nach unten beschränkt. Ein  $\bar{x} \in \text{cl } M$  heißt asymptotische Lösung von (OA), wenn es eine für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{x}$  konvergierende Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$  gibt, für die  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \inf \{f(x) \mid x \in M\}$  gilt.*

Obige Argumentation sichert die Existenz einer asymptotischen Lösung unter der Voraussetzung der Beschränktheit von  $f$  nach unten, falls  $M$  eine beschränkte Teilmenge eines endlich–dimensionalen Vektorraums ist.

Schwache Lösungen stellen in gewisser Weise asymptotische Lösungen von (ZEOA) dar. Nach Satz 3.5 ist nämlich bekannt, dass zu einer schwachen optimistischen Lösung  $\bar{t} \in \text{dom } \bar{\Psi}$  eine gegen  $\bar{t}$  konvergierende Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  existiert, für die  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$  gilt<sup>5</sup>. Ist zudem die Bedingung (A1) erfüllt, so gilt  $\bar{\varphi}_{\text{opt}}(t) = \varphi_{\text{opt}}(t)$  für alle  $t \in \text{dom } \Psi$ , d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{opt}}(t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$ . Deshalb kann der Leader selbst bei nicht vorhandener optimistischer Lösung den Wert  $\varphi_{\text{opt}}(t)$  (den Funktionswert in der oberen Ebene für die günstigste vom Follower zu erwartende Reaktion) der Zahl  $\bar{F}_{\text{opt}}$  beliebig gut annähern. Aus dem Beweis zu Satz 3.5 geht außerdem die Beschränktheit von  $\varphi_{\text{opt}}$  und damit die Endlichkeit von  $\bar{F}_{\text{opt}}$  hervor.

Die gleiche Aussage gilt für eine schwache pessimistische Lösung  $\bar{s}$ , wobei aber die gegen diesen Punkt konvergierende Folge  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit der Eigenschaft  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) = \bar{F}_{\text{pess}}$  bereits laut Definition 3.3 existieren soll. Hier kann dann der Leader die Konvergenz des Funktionswertes der schlechtesten vom Follower wählbaren Antwort gegen  $\bar{F}_{\text{pess}}$  erreichen.

Da asymptotische Lösungen später noch eine Rolle spielen werden, sollen sie hier auch für die Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe formal eingeführt werden. Das darauf folgende Lemma stellt die Beziehung zwischen asymptotischen Lösungen von (ZEOA) im Sinne der Definition 3.8 und asymptotischen Lösungen der Ersatzaufgaben (OPT) und (PESS) laut Definition 3.7 her.

**Definition 3.8** *Die schwachen optimistischen (pessimistischen) Lösungen des Problems (ZEOA) heißen asymptotische optimistische (pessimistische) Lösungen, falls (ZEOA) die Bedingung (A1) erfüllt.*

Es sei nochmals betont, dass die Verwendung der Bedingung (A1) anstelle der schwächeren Variante (A1') lediglich der Sicherung der Existenz von  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  bzw.  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  für  $\bar{t} \in \text{dom } \Psi$  als echte Minima bzw. Maxima dient.

**Lemma 3.9** *(ZEOA) erfülle (A1). Dann ist ein  $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$  asymptotische optimistische [pessimistische] Lösung von (ZEOA) genau dann, wenn  $\bar{t}$  auch asymptotische Lösung des Ersatzproblems (OPT) [(PESS)] ist.*

**Beweis:** Die Aussage wird beispielhaft nur für die optimistische Strategie gezeigt. Die zusätzlichen gegebenen Hinweise sollten für die Durchführung des Beweises für die pessimistische Interpretation ausreichen. Die Endlichkeit aller verwendeten Zahlen kann im Beweis zu Satz 3.5 nachgelesen werden. Wegen (A1) und der damit gegebenen Kompaktheit aller Bilder von  $\Psi(t)$  ( $t \in \text{dom } \Psi$ )

---

<sup>5</sup>Nutzt man im optimistischen Fall die Ersatzformulierung (ZEOA') der gegebenen Aufgabe, so gilt natürlich sofort: „Es existiert eine Folge  $\{(x_k, t_k)\}$  mit  $x_k \in \Psi(t_k)$  und  $F(x_k, t_k) \rightarrow \bar{F}_{\text{opt}}$ “. Diese Argumentation kann aber nicht auf die pessimistische Strategie übertragen werden!

gilt offenbar stets  $\bar{\varphi}_{\text{opt}} \equiv \varphi_{\text{opt}}$  und  $\bar{\varphi}_{\text{pess}} \equiv \varphi_{\text{pess}}$ . Daraus wiederum ergibt sich  $\bar{F}_{\text{opt}} = \inf\{\varphi_{\text{opt}}(t) \mid t \in \text{dom } \Psi\}$  und die analoge Aussage für die pessimistische Herangehensweise.

- $\bar{t}$  sei eine asymptotische optimistische, d.h. auch schwache optimistische Lösung von (ZEOA). Offenbar erfüllt (ZEOA) mit (A1) gleichzeitig auch die schwächere Bedingung (A1') und aus Satz 3.5 ergibt sich die Existenz einer Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \in \text{dom } \Psi$ , die für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{t}$  konvergiert und die  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{opt}}(t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$  erfüllt. Wegen der oben begründeten Gleichungen ist auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{opt}}(t_k) = \inf\{\varphi_{\text{opt}}(t) \mid t \in \text{dom } \Psi\}$ . Mithin ist  $\bar{t}$  als Grenzpunkt von  $\{t_k\}$  asymptotische Lösung der Aufgabe (OPT) im Sinne der Definition 3.7.

Für die pessimistische Strategie ist die Existenz der benötigten Folge Gegenstand der Definition der schwachen pessimistischen Lösung.

- Sei nun  $\bar{t}$  eine asymptotische Lösung von (OPT), d.h. es existiere eine für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{t}$  konvergierende Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  mit der Eigenschaft  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{opt}}(t_k) = \inf\{\varphi_{\text{opt}}(t) \mid t \in \text{dom } \Psi\}$ . Hier ist die rechte Seite wiederum  $\bar{F}_{\text{opt}}$  und deshalb gilt offenbar auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{opt}}(t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$ . Weiterhin existiert wegen (A1) für jedes natürliche  $k$  ein  $x_k \in \Psi(t_k)$  mit  $F(x_k, t_k) = \varphi_{\text{opt}}(t_k)$  und folglich ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$ . Da  $\text{grph } \Psi$  eine beschränkte Teilmenge eines endlich-dimensionalen Raumes ist, hat  $\{(x_k, t_k)\}$  einen Häufungspunkt in  $\text{cl}(\text{grph } \Psi)$ , dessen  $t$ -Komponente wegen der Wahl von  $\{t_k\}$  gleich  $\bar{t}$  ist. Es sei also o.E.d.A.  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, t_k) = (\bar{x}, \bar{t})$  und es gilt  $\bar{x} \in \bar{\Psi}(\bar{t})$ . Da  $F$  auf dem Abschluss von  $\text{grph } \Psi$  stetig ist, gilt  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, t_k) = \bar{F}_{\text{opt}}$ . Damit ist  $\bar{t}$  eine schwache optimistische Lösung der Aufgabe (ZEOA) im Sinne der Definition 3.3 und wegen (A1) asymptotische optimistische Lösung von (ZEOA) nach Definition 3.8.

Ist  $\bar{s}$  asymptotische Lösung von (PESS) und  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \text{dom } \Psi$  eine Folge, für die  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \bar{s}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(s_k) = \inf\{\varphi_{\text{pess}}(s) \mid s \in \text{dom } \Psi\}$  gilt, dann ist wegen  $\bar{\varphi}_{\text{pess}} \equiv \varphi_{\text{pess}}$  und  $\inf\{\varphi_{\text{pess}}(s) \mid s \in \text{dom } \Psi\} = \bar{F}_{\text{pess}}$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) = \bar{F}_{\text{pess}}$ .  $\{s_k\}$  ist also eine Folge, deren Existenz in der Definition 3.3 für die pessimistische Interpretation der Aufgabe (ZEOA) gefordert ist.

Damit ist der Beweis vollständig erbracht.  $\square$

Es soll an dieser Stelle noch die Frage diskutiert werden, warum in der Definition der schwachen pessimistischen Lösung die Existenz einer gegen diese Lösung  $\bar{s}$  konvergierenden Folge  $\{s_k\}$  mit der Eigenschaft  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(s_k) = \bar{F}_{\text{pess}}$  vorausgesetzt wird, während bei einer optimistischen Strategie deren Vorhandensein als Aussage des Satzes 3.5 auftaucht.

**Beispiel 3.10** Für die Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} F(x, t) = x^2 + t^2 &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in (-1, 1) \\ x &\in \Psi(t) := \{0, 1\} \end{aligned}$$

gilt

$$\bar{\varphi}_{\text{opt}}(t) = t^2$$

und

$$\bar{\varphi}_{\text{pess}}(t) = 1 + t^2.$$

Folglich ist  $\bar{t} = 0$  optimistische und pessimistische Lösung der Aufgabe, und zwar sowohl im herkömmlichen Sinne als auch als schwache Lösung. Wäre jetzt die schwache pessimistische Lösung in der gleichen Weise erklärt wie die optimistische, d.h. wir beschränkten uns auf die Existenz eines  $\bar{x} \in \bar{\Psi}(\bar{t})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{F}_{\text{pess}} = 1$ , dann wären ebenfalls  $t_1 = -1$  und  $t_2 = 1$  schwache pessimistische Lösungen der Aufgabe, denn mit  $\bar{x} = 0$  gilt dann

$$(\bar{x}, t_i) \in \text{grph } \bar{\Psi} \quad \text{und} \quad F(\bar{x}, t_i) = \bar{F}_{\text{pess}} \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Für jede gegen 1 wachsende oder gegen  $-1$  fallende Parameterfolge  $\{t_k\} \subseteq (-1, 1)$  gilt aber  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_{\text{pess}}(t_k) = 2$ . Also muss der Leader damit rechnen, dass der Follower stets die 1 als Antwort wählt, wodurch der Wert der Zielfunktion der oberen Ebene gegen  $2 > \bar{F}_{\text{pess}}$  konvergiert.  $t_1$  und  $t_2$  stellen mithin keine asymptotischen Lösungen dar.

Das grundlegende Problem stellt hier die unterschiedliche Struktur der zu lösenden Probleme dar. Hinsichtlich der Zielfunktion  $F$  der oberen Ebene handelt es sich um eine Min-Min-Aufgabe für die optimistische und eine Min-Max-Aufgabe für die pessimistische Strategie (siehe dazu auch Lemma 2.3 auf Seite 17 und die dort gemachten Vorbemerkungen). Dadurch ergeben sich die substanziellen Unterschiede in der Festlegung der den verschiedenen Strategien entsprechenden schwachen Lösungen. Zu deren Überwindung hilft es übrigens nicht, die Forderungen

$$\text{„} \bar{F}_{\text{opt}} = \bar{\varphi}_{\text{opt}}(\bar{t}) \quad \text{für eine schwache optimistische Lösung } \bar{t} \text{“}$$

und

$$\text{„} \bar{F}_{\text{pess}} = \bar{\varphi}_{\text{pess}}(\bar{s}) \quad \text{für eine schwache pessimistische Lösung } \bar{s} \text{“}$$

aufzustellen, da die Funktionen  $\bar{\varphi}_{\text{opt}}$  und  $\bar{\varphi}_{\text{pess}}$  für die durchaus als schwache Lösungen in Frage kommenden Elemente der Menge  $\text{cl}(\text{dom } \Psi) \setminus \text{dom } \Psi$  schlichtweg nicht definiert sind. Man könnte nun zwar mittels der Untersuchung der

Funktionen<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{\text{opt},A}(t) &:= \inf_{x \in \bar{\Psi}(t)} F(x, t) \quad \text{für alle } t \in \text{dom } \bar{\Psi}, \\ \bar{F}_{\text{opt},A} &:= \inf_{t \in \text{dom } \bar{\Psi}} \bar{\varphi}_{\text{opt},A}(t), \\ \bar{\varphi}_{\text{pess},A}(t) &:= \sup_{x \in \bar{\Psi}(t)} F(x, t) \quad \text{für alle } t \in \text{dom } \bar{\Psi}, \\ \bar{F}_{\text{pess},A} &:= \inf_{t \in \text{dom } \bar{\Psi}} \bar{\varphi}_{\text{pess},A}(t)\end{aligned}$$

die Existenz von  $\bar{\varphi}_{\text{opt},A}(t)$  und  $\bar{\varphi}_{\text{pess},A}(t)$  für alle  $t \in \text{cl}(\text{dom } \Psi) = \text{dom } \bar{\Psi}$  garantieren, doch eine solche Vorgehensweise könnte die Aufgabe bei pessimistischer Strategie möglicherweise stark verfälschen.

**Beispiel 3.11** *Die Aufgabe*

$$\begin{aligned}F(x, t) &= (x - 1)^2 + (t - 1)^2 \rightarrow \text{„min“} \\ t &\in [-1, 3] \\ x &\in \Psi(t) := \begin{cases} \{0, 3\} & \text{für } t \in [-1, 0) \cup (0, 3] \\ \{0\} & \text{für } t = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

in der die PMA  $\Psi$  unterhalbstetig, aber im Punkt  $t = 0$  nicht oberhalbstetig ist (siehe Abbildung 3), hat eine pessimistische Lösung  $t_{\text{pess}} = 0$  mit  $\bar{F}_{\text{pess}} = 2$  und der Realisation  $\bar{x} = 0$ , was gleichzeitig auch eine schwache pessimistische Lösung darstellt (siehe auch Satz 3.6). Würde man sich auf die Betrachtung der auf der Menge  $[-1, 3]$  definierten Funktion  $\bar{\varphi}_{\text{pess},A}$  konzentrieren, erhielte man wegen  $\bar{\Psi}(t) = \{0, 3\}$  für alle  $t \in [-1, 3]$

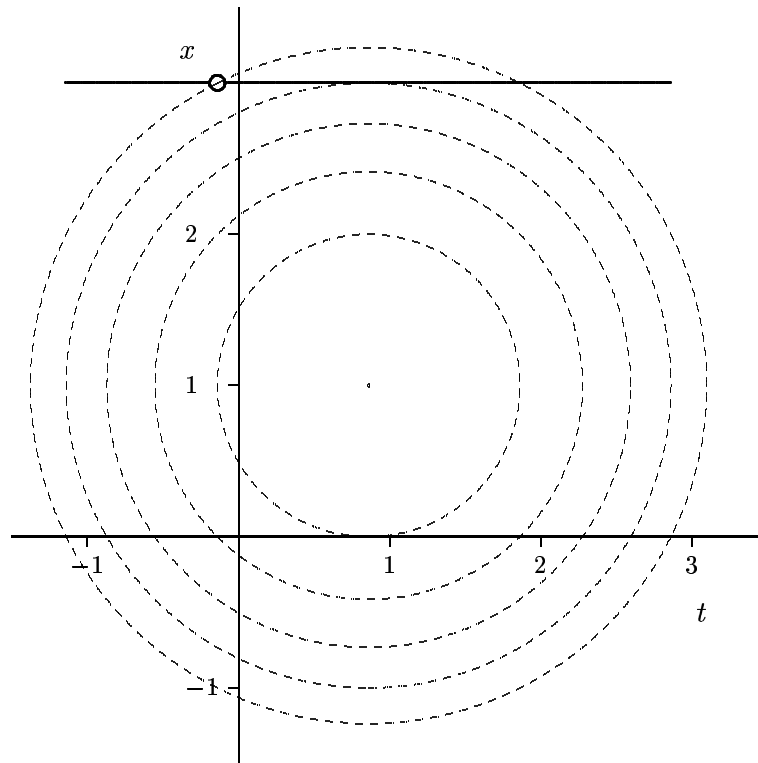
$$\bar{\varphi}_{\text{pess},A}(t) = (t - 1)^2 + 4$$

mit dem eindeutigen Minimum  $\bar{t} = 1$ . Die eigentliche Lösung der Ursprungsaufgabe geht hierbei verloren.  $t_{\text{pess}}$  stellt noch nicht einmal einen lokalen Minimumpunkt der Funktion  $\bar{\varphi}_{\text{pess},A}$  dar.

## 4 Mathematische Zwei-Ebenen-Optimierung

Eine besondere Bedeutung hat im Zusammenhang mit der Zwei-Ebenen-Optimierung stets der Fall, dass die Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi(t)$  für alle  $t \in T$  als Menge aller (lokalen oder globalen) Lösungen eines Optimierungsproblems in

<sup>6</sup>Das an die Subskripte angehängte „A“ soll hier nochmals die Entstehung der PMA  $\bar{\Psi}$  über den Abschluss von  $\text{grph } \Psi$  verdeutlichen.

Abbildung 3:  $\text{grph } \Psi$  und Niveaulinien im Beispiel 3.11

der unteren Ebene gegeben ist (siehe dazu auch Beispiel 2.2). In der mathematischen Zwei-Ebenen-Optimierung sei dabei das Problem der unteren Ebene durch eine Zielfunktion  $f$  sowie eine Menge von Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen gegeben. Wir betrachten also

$$\begin{aligned}
 F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\
 x &\in \Psi(t) \\
 t &\in T \subseteq \mathbf{R}^m
 \end{aligned}
 \tag{MZO}$$

wobei für ein  $t \in T$  die Menge  $\Psi(t)$  als Menge aller Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &\rightarrow \min_x \\
 g_i(x, t) &\leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\} \\
 h_j(x, t) &= 0, \quad j \in J = \{1, \dots, q\} \\
 x &\in \mathbf{R}^n
 \end{aligned}
 \tag{P(t)}$$

gegeben ist.

## 4.1 Die Aufgabe der unteren Ebene

Bevor Optimalitätskriterien für (MZO) präsentiert werden, soll es im diesem Unterabschnitt zunächst vorrangig darum gehen, Ergebnisse für die parametrische Optimierungsaufgabe  $P(t)$  zusammenzutragen.

### 4.1.1 Generelle Voraussetzungen

Um die nachfolgenden Ausführungen nicht unnötig zu verkomplizieren, seien nun zunächst einige allgemeingültige Annahmen für  $P(t)$  und damit auch (MZO) getroffen, auf deren Erfüllung nur noch an exponierten Stellen der Arbeit eingegangen wird.

Wir definieren mit

$$M(t) = \{x \mid g_i(x, t) \leq 0 \ (i \in I), \ h_j(x, t) = 0 \ (j \in J)\}$$

für jedes  $t \in T$  die Menge aller zulässigen  $x \in \mathbf{R}^n$ , was uns erlaubt,  $M : T \rightarrow 2^{\mathbf{R}^n}$  als eine Punkt-Menge-Abbildung zu interpretieren.

Damit ist evident, dass hier „Zulässigkeit“ in dem Sinne gemeint sein soll, dass  $M(t)$  die Menge aller  $x$  ist, die die Nebenbedingungen der Aufgabe der unteren Ebene erfüllen. Ist im weiteren Verlauf im Zusammenhang mit der parametrischen Optimierung von einem zulässigen Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  die Rede, so soll dies stets  $\bar{t} \in T$  und  $\bar{x} \in M(\bar{t})$  bedeuten.

In der mathematischen Zwei-Ebenen-Optimierung ist jedoch ein genauerer und in verschiedenen Zusammenhängen erklärter Zulässigkeitsbegriff vonnöten, der Gegenstand der Definition 4.7 auf Seite 56 sein wird.

Die Funktionen  $g_i$  ( $i \in I$ ) und  $h_j$  ( $j \in J$ ) seien jeweils Abbildungen der Menge  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  in den Raum  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen und alle in  $P(t)$  auftretenden Funktionen seien bezüglich  $(x, t)$  wenigstens zweifach stetig differenzierbar, d.h. es gelte  $(f, g, h) \in C^2(\mathbf{R}^{n+m}, \mathbf{R}^{1+p+q})$ .

Für alle  $(x, t) \in \text{grph } M$  sei mit  $I_0(x, t) := \{i \in I \mid g_i(x, t) = 0\}$  die Indexmenge aller aktiven Ungleichungsnebenbedingungen bezeichnet. Wenn klar ist, in welchem Punkt die aktuelle Untersuchung gerade stattfindet, wird auch nur  $I_0$  verwendet werden.

Die Annahmen (LICQ) und (MFCQ) spielen eine wichtige Rolle, wenn eine handhabbare lokale Struktur der PMA  $M(t)$  in der Aufgabe der unteren Ebene garantiert werden soll.

**(LICQ)** (*linear independence constraint qualification*) Im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  sind die Vektoren  $\{\nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) \ (i \in I_0(\bar{x}, \bar{t})), \ \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}) \ (j \in J)\}$  linear unabhängig.

**(MFCQ)** (*Mangasarian-Fromowitz constraint qualification*) Im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  sind die Vektoren  $\nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t})$  ( $j \in J$ ) linear unabhängig und es existiert ein Vektor  $d \in \mathbf{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\nabla_x^\top g_i(\bar{x}, \bar{t})d &< 0, & i \in I_0(\bar{x}, \bar{t}), \\ \nabla_x^\top h_j(\bar{x}, \bar{t})d &= 0, & j \in J.\end{aligned}$$

Ist für festes  $\bar{t}$  und ein  $\bar{x} \in M(\bar{t})$  die Bedingung (LICQ) erfüllt, dann existiert eine differenzierbare und auf dem affinen Unterraum

$$T_{\bar{x}, \bar{t}}^- = \bar{x} + \left\{ \bigcap_{j \in J} \ker \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}) \right\}$$

lokal invertierbare Koordinatentransformation  $\Theta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-q}$  mit  $\Theta(\bar{x}) = 0$ , für die das System der im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  aktiven Nebenbedingungen in den neuen Koordinaten äquivalent zu  $\Theta_i(x) \geq 0$  für  $i = 1, \dots, |I_0(\bar{x}, \bar{t})|$  ist. Eine Idee zur Konstruktion der Abbildung  $\Theta$  ist enthalten in [11].

Ist lediglich (MFCQ) erfüllt, dann sind die Zusammenhänge um einiges komplizierter. Die zu verwendende Koordinatentransformation erweist sich in diesem Fall als im allgemeinen nicht mehr differenzierbar, sondern nur noch als stetig. Gilt (MFCQ) für *alle* Punkte aus  $M(\bar{t})$ , dann kann immerhin gezeigt werden, dass  $M(\bar{t})$  eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - q$  ist ([12]).

Vektorwertige Funktionen werden im weiteren Verlauf häufig durch die Angabe einer Indexmenge als Subskript dargestellt. Ist zum Beispiel

$$v(w) = \begin{pmatrix} v_1(w) \\ v_2(w) \\ v_3(w) \\ v_4(w) \end{pmatrix}$$

definiert, dann gelte mit  $K = \{1, 3\}$

$$v_K(w) = \begin{pmatrix} v_1(w) \\ v_3(w) \end{pmatrix}.$$

Außerdem sei eine Ungleichung der Form  $v_K(w) \leq 0$  stets so zu verstehen, dass  $v_k(w) \leq 0$  für alle  $k \in K$  zu gelten hat. Mit oben getroffener Wahl heißt das  $v_1(w) \leq 0$  und  $v_3(w) \leq 0$ . Entsprechend sind für die Ungleichungsrestriktionen dann die drei Schreibweisen

$$„g(x, t) \leq 0“ \quad \text{und} \quad „g_i(x, t) \leq 0, \quad i \in I“ \quad \text{und} \quad „g_I(x, t) \leq 0“$$

äquivalent.



### 4.1.2 Stationäre und kritische Punkte

Wir betrachten zunächst für das Problem der unteren Ebene  $P(t)$  das Karush–Kuhn–Tucker–System

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x, t) + \lambda^\top \nabla_x g(x, t) + \mu^\top \nabla_x h(x, t) &= 0, \\ g(x, t) &\leq 0, \\ h(x, t) &= 0, \\ \lambda &\geq 0, \\ \lambda_i g_i(x, t) &= 0, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{KKT}$$

Darauf basierend wird  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein *stationärer Punkt* genannt, wenn Multiplikatoren  $\lambda \in \mathbf{R}^p$  und  $\mu \in \mathbf{R}^q$  existieren, so dass  $(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)$  Lösung des Systems (KKT) ist. Das Quadrupel  $(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)$  heißt *Karush–Kuhn–Tucker–Punkt* und wir werden im folgenden mit  $I^+(\lambda)$  die Indexmenge der positiven Komponenten des  $\lambda$ -Teils einer dieser Lösungen von (KKT) bezeichnen, d.h.

$$I^+(\lambda) = \{i \in I \mid \lambda_i > 0\}.$$

Mit Blick auf die Komplementaritätsbedingungen gilt offenbar  $I^+(\lambda) \subseteq I_0(\bar{x}, \bar{t})$ .

Man kann (KKT) unter Zuhilfenahme der Menge  $I_0 = I_0(x, t)$  auch in der äquivalenten Form

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x, t) + \lambda_{I_0}^\top \nabla_x g_{I_0}(x, t) + \mu^\top \nabla_x h(x, t) &= 0, \\ g(x, t) &\leq 0, \\ h(x, t) &= 0, \\ \lambda_{I_0} &\geq 0, \\ \lambda_i &= 0, \quad i \in I \setminus I_0(x, t) \end{aligned}$$

darstellen. Hier wird ein wesentliches Kriterium für KKT–Punkte deutlicher, nämlich dass  $-\nabla_x f(x, t)$  eine Linearkombination der Gradienten nach  $x$  der aktiven Nebenbedingungen ist, in die nur nichtnegative Vielfache der Gradienten der aktiven Ungleichungsrestriktionen eingehen. Verallgemeinert man diese Idee, indem man auch den Gradienten der Zielfunktion mit einem nichtnegativen Multiplikator  $\lambda_0$  versieht, gelangt man zu den so genannten Fritz–John–Punkten. Sie sind Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla_x f(x, t) + \lambda_{I_0}^\top \nabla_x g_{I_0}(x, t) + \mu^\top \nabla_x h(x, t) &= 0, \\ x &\in M(t) \\ \lambda_0 &\geq 0, \\ \lambda_{I_0} &\geq 0, \\ \lambda_i &= 0, \quad i \in I \setminus I_0(x, t), \\ \lambda_0 + \sum_{i \in I_0(x, t)} \lambda_i + \sum_{j \in J} |\mu_j| &> 0. \end{aligned} \tag{FJ}$$

Die letzte Bedingung sichert die lineare Abhängigkeit der Gradienten, denn sie vermeidet, dass mit  $(\lambda_0, \lambda, \mu) = (0, 0^p, 0^q)$  jeder Punkt  $(x, t) \in \text{grph } M$  als Fritz–John–Punkt erkannt wird.

Läßt man nun noch die an die  $\lambda$  gestellten Nichtnegativitätsforderungen fallen, ergibt sich eine in der Theorie der Pfadverfolgung sehr wichtige Obermenge der Fritz–John–Punkte.

**Definition 4.1** *Ein Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  mit  $\bar{x} \in M(\bar{t})$  heißt verallgemeinerter kritischer Punkt (g.c.-Punkt), wenn die Vektoren*

$$\{\nabla_x f(\bar{x}, \bar{t}), \nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) \ (i \in I_0(\bar{x}, \bar{t})), \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}) \ (j \in J)\}$$

*linear abhängig sind.*

G.c.-Punkte sind also dadurch charakterisiert, dass es reellwertige Multiplikatoren  $\lambda_0, \lambda_i \ (i \in I_0)$  und  $\mu_j \ (j \in J)$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla_x f(x, t) + \sum_{i \in I_0} \lambda_i \nabla_x g_i(x, t) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla_x h_j(x, t) &= 0, \\ g_i(x, t) &\leq 0, \quad i \in I, \\ h_j(x, t) &= 0, \quad j \in J, \\ |\lambda_0| + \sum_{i \in I_0} |\lambda_i| + \sum_{j \in J} |\mu_j| &> 0 \end{aligned} \quad (23)$$

gilt. Für einen g.c.-Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  im Sinne der Definition 4.1 nennt man auch  $\bar{x}$  einen g.c.-Punkt für  $P(\bar{t})$ . Man kann die Summation über  $I_0$  in (23) durch die Summation über  $I$  unter zusätzlicher Beachtung der Komplementaritätsbedingung  $\sum_{i \in I} |\lambda_i g_i(x, t)| = 0$  ersetzen.

Kann für einen verallgemeinerten kritischen Punkt  $\lambda_0 \neq 0$  und folglich  $\lambda_0 = 1$  gesetzt werden, vereinfacht sich (23) zu

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x, t) + \lambda_{I_0}^\top \nabla_x g_{I_0}(x, t) + \mu^\top \nabla_x h(x, t) &= 0, \\ g(x, t) &\leq 0, \\ h(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

bzw. nach der oben erwähnten Änderung der Menge der Summationsindizes zu

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x, t) + \lambda^\top \nabla_x g(x, t) + \mu^\top \nabla_x h(x, t) &= 0, \\ x &\in M(t), \\ \sum_{i \in I} |\lambda_i g_i(x, t)| &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Da verallgemeinerte kritische Punkte in denen die Bedingung (LICQ) gilt, stets die eindeutige Lösbarkeit von (24) in den Variablen  $(\lambda, \mu)$  implizieren, erhalten sie einen eigenen Namen.

(ND1) Im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  gilt (LICQ).

**Definition 4.2** *Es sei  $\bar{x}$  ein verallgemeinerter kritischer Punkt von  $P(\bar{t})$ .  $(\bar{x}, \bar{t})$  heißt kritischer Punkt, wenn er die Bedingung (ND1) erfüllt. Dann heißt  $\bar{x}$  auch ein kritischer Punkt von  $P(\bar{t})$ .*

In [11, Kapitel 2] definiert JONGEN kritische Punkte als diejenigen verallgemeinerten kritischen Punkte, in denen (LICQ) gilt *und* für die es  $(\lambda, \mu)$  gibt, die (24) erfüllen. Wegen der g.c.-Eigenschaft existieren für diese Punkte jedoch auf jeden Fall Lösungen  $(\lambda_0, \lambda, \mu)$  von (23). Aus dem Erfülltsein der Regularitätsbedingung (LICQ) kann man leicht schlussfolgern, dass dann o.E.d.A.  $\lambda_0 = 1$  gilt und (24) eine eindeutige Lösung  $(\lambda, \mu)$  besitzt. Unsere schwächere Formulierung reicht also aus.

Ist  $\bar{x}$  das Argument eines lokalen Minimums der Aufgabe  $P(\bar{t})$ , dann ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein g.c.-Punkt und  $\lambda_0, \lambda_i$  ( $i \in I$ ) in (23) können nichtnegativ gewählt werden. Man hat hier wieder einen Punkt vom Fritz–John–Typ. Falls dort (MFCQ) gilt, ist  $\lambda_0$  sogar positiv und somit kann erneut speziell  $\lambda_0 = 1$  gesetzt werden. Folglich ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein stationärer Punkt und das für  $\lambda_0 = 1$  zu (23) äquivalente System (24) ist auch lösbar unter der Zusatzbedingung  $\lambda \geq 0$ . Eine solche Lösung  $(\lambda, \mu)$  von (24) heißt *Lagrange-Vektor*, seine Komponenten *Lagrange-Multiplikatoren*. Die Menge aller dieser Vektoren werde mit dem Symbol  $\Lambda(\bar{x}, \bar{t})$  bezeichnet:

$$\Lambda(\bar{x}, \bar{t}) = \{(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \text{ löst (24) und es gilt } \lambda \geq 0 \text{ (komponentenweise)}\}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) &= f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j \in J} \mu_j h_j(\bar{x}, \bar{t}) \\ &= f(\bar{x}, \bar{t}) + \lambda^\top g(\bar{x}, \bar{t}) + \mu^\top h(\bar{x}, \bar{t}) \end{aligned}$$

ist die Lagrange-Funktion.

Man sieht leicht, dass (LICQ) sowohl (MFCQ) als auch die Eindeutigkeit des Lagrange-Vektors impliziert. Das Erfülltsein der Mangasarian–Fromowitz-Bedingung ist nach einem wichtigen Resultat von GAUVIN (siehe [10]) äquivalent zu der Aussage, dass  $\Lambda(\bar{x}, \bar{t})$  ein nichtleeres kompaktes Polyeder ist.

Im Unterschied dazu soll im weiteren Verlauf der jeweilige  $(\lambda, \mu)$ -Teil einer Lösung von (24) als *Lagrange-Parameter* bezeichnet werden.

Die Vereinigung aller g.c.-Punkte sei mit  $\Sigma_{\text{gc}}$  bezeichnet:

$$\Sigma_{\text{gc}} := \bigcup_{t \in T} \{(\bar{x}, t) \mid \bar{x} \text{ ist ein g.c.-Punkt von } P(t)\}$$

Analog sollen

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{glob}} &:= \bigcup_{t \in T} \{(\bar{x}, t) \mid \bar{x} \in \arg \min P(t)\}, \\ \Sigma_{\text{loc}} &:= \bigcup_{t \in T} \{(\bar{x}, t) \mid \bar{x} \in \arg \text{locmin} P(t)\}, \\ \Sigma_{\text{stat}} &:= \bigcup_{t \in T} \{(\bar{x}, t) \mid \bar{x} \text{ ist ein stationärer Punkt von } P(t)\}\end{aligned}$$

und

$$\Sigma_{\text{FJ}} := \bigcup_{t \in T} \{(\bar{x}, t) \mid \bar{x} \text{ ist ein Fritz-John-Punkt von } P(t)\}$$

die Menge aller globalen bzw. lokalen Minimumstellen sowie die Menge aller stationären bzw. Fritz-John-Punkte symbolisieren. Jedes  $x$ , das Element mindestens einer dieser vier Mengen ist, ist ein verallgemeinerter kritischer Punkt, folglich gilt wegen  $\Sigma_{\text{glob}} \subseteq \Sigma_{\text{loc}}$  unter anderem

$$\Sigma_{\text{loc}} \cup \Sigma_{\text{stat}} \subseteq \Sigma_{\text{gc}}.$$

Für lokale Minimumpunkte folgt dies aus der bereits genannten Darstellung als Fritz-John-Punkt.

Die von oben nach unten sowie von links nach rechts zu lesende Tabelle 1 zeigt die Beziehungen zwischen den verschiedenen Punkttypen. Leider gibt es keine zur Inklusionsrelation zwischen Fritz-John- und g.c.-Punkten analoge Enthaltenseinsbeziehung zwischen stationären und kritischen Punkten. Während nämlich in ersteren (LICQ) durchaus verletzt sein kann, ist das bei kritischen Punkten per definitionem nicht möglich.  $\Sigma_{\text{stat}}$  ist also eventuell keine Teilmenge der kritischen Punkte.

Stationäre Punkte sind		Kritische Punkte sind
Fritz-John-Punkte	sind	g.c.-Punkte

Tabelle 1: Punktbeziehungen

Wenn für einen g.c.-Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$ , in dem (LICQ) möglicherweise verletzt ist, eine Lösung  $(\lambda, \mu)$  von (24) mit  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in I$  existiert, dann lösen diese Multiplikatoren offensichtlich auch das KKT-System für  $(x, t) = (\bar{x}, \bar{t})$ , weshalb der betrachtete Punkt dann auch stationär ist.

### 4.1.3 Nichtdegenerierte kritische Punkte

Für die Pfadverfolgung ist es von entscheidender Wichtigkeit, diejenigen verallgemeinerten kritischen Punkte weitergehend auszuzeichnen, die streng stabil im Sinne von KOJIMA (siehe [19]) sind und in deren Umgebung die Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dabei spielen die strenge Komplementaritätsbedingung sowie die strenge Regularitätsbedingung eine wesentliche Rolle. Es sei jetzt  $(\lambda, \mu)$  die eindeutige Lösung von (24) für den kritischen Punkt  $(x, t) = (\bar{x}, \bar{t})$ .

**(ND2)** (*strict complementarity condition*) Im kritischen Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  gilt für die Lagrange-Parameter die strenge Komplementarität

$$\lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in I_0(\bar{x}, \bar{t}).$$

**(ND3)** (*strict regularity condition*) Im kritischen Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist die zweite Ableitung nach  $x$  der Lagrange-Funktion regulär auf dem im Tangentenkegel an  $M(\bar{t})$  enthaltenen Unterraum, d.h. mit

$$\begin{aligned} T_{\bar{x}, \bar{t}}(M) &= \{d \in \mathbf{R}^n \mid \nabla_x^\top g_i(\bar{x}, \bar{t})d = 0, i \in I_0, \nabla_x^\top h_j(\bar{x}, \bar{t})d = 0, j \in J\} \\ &= \bigcap_{i \in I_0} \ker \nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) \cap \bigcap_{j \in J} \ker \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}) \end{aligned}$$

gilt

$$d^\top \nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)d \neq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{x}, \bar{t}}(M) \setminus \{0^n\}.$$

Für die in Matrixschreibweise  $Av = w$  gegebene lineare Funktion  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  sind die Eigenwerte der auf den Vektorunterraum  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  eingeschränkten Funktion  $\mathcal{A}|_{\mathcal{V}'}$  definiert als die Eigenwerte der Matrix  $V'^\top AV'$ , wobei  $V'$  die Matrixdarstellung einer Basis von  $\mathcal{V}'$  ist. Wichtig ist, dass die Vorzeichen dieser Eigenwerte von der eigentlichen Wahl der Basis  $V'$  unabhängig sind. Unter Benutzung dieser Notation lässt sich die Ungleichheitsbedingung in (ND3) einfach dadurch ausdrücken, dass die Eigenwerte der eingeschränkten Abbildung  $\nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)|_{T_{\bar{x}, \bar{t}}(M)}$  sämtlich ungleich Null sind.

**Definition 4.3** Sei  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein g.c.-Punkt.

- Ist dort (ND1) verletzt, so heißt dieser Punkt ein degenerierter Punkt.
- Ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein kritischer Punkt, d.h. (ND1) gilt, dann heißt er
  - nichtdegenerierter kritischer Punkt, wenn  $(\bar{x}, \bar{t})$  und der wegen (ND1) eindeutig bestimmte Lagrange-Parameter  $(\lambda, \mu)$  sowohl (ND2) als auch (ND3) erfüllen;

LI	linearer Index	Anzahl der negativen Komponenten im Vektor $\lambda$
LCI	linearer Koindex	Anzahl der positiven Komponenten im Vektor $\lambda$
QI	quadratischer Index	Anzahl der negativen Eigenwerte von $L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) _{T_{\bar{x}, \bar{t}}(M)}$
QCI	quadratischer Koindex	Anzahl der positiven Eigenwerte von $L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) _{T_{\bar{x}, \bar{t}}(M)}$

Tabelle 2: Indizes und Koindizes nichtdegenerierter kritischer Punkte

– degenerierter kritischer Punkt, wenn (ND2) oder (ND3) verletzt sind.

Für einen nichtdegenerierten kritischen Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  und den zugehörigen Lagrange-Parameter  $(\lambda, \mu)$  definiert man Indizes und Koindizes in der in der Tabelle 2 beschriebenen Art und Weise. Wegen der Eindeutigkeit des Lagrange-Parameters sind diese Anzahlen wohldefiniert. Man könnte diese Indizes sogar für degenerierte kritische Punkte einführen. Für diese spielen aber die linearen und quadratischen (Ko-)Indizes keine große Rolle. Später wird sich zeigen, dass vielmehr die *Veränderungen* der Indizes bei Durchgang des verfolgten Pfades durch degenerierte kritische Punkte und auch durch g.c.-Punkte, die (LICQ) nicht erfüllen, entscheidend sind.

Man sieht, dass für einen nichtdegenerierten kritischen Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  der Funktionswert  $f(\bar{x}, \bar{t})$  genau dann ein lokales Minimum (Maximum) der Aufgabe  $P(\bar{t})$  der unteren Ebene ist, wenn  $LI+QI=0$  ( $LCI+QCI=0$ ) ist. Das streng hinreichende Optimalitätskriterium zweiter Ordnung ist für diese Punkte ein Spezialfall von (ND3):

**(SSOC)** (*strong sufficient optimality condition of second order*) Für alle Paare  $(\lambda, \mu) \in \Lambda(\bar{x}, \bar{t})$  und jeden Vektor  $d \neq 0^n$  mit

$$d \in \bigcap_{i \in I_+(\lambda)} \ker \nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) \cap \bigcap_{j \in J} \ker \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t})$$

gilt  $d^\top \nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) d > 0$ .

Um die Spezialisierung deutlich werden zu lassen, beachte man dass für nichtdegenerierte kritische Minimumspunkte  $\Lambda(\bar{x}, \bar{t})$  einelementig ist und für den (nichtnegativen)  $\lambda$ -Teil des somit einzigen Lagrange-Multiplikators aufgrund der strengen Komplementarität die Indexmengen  $I_0$  und  $I_+(\lambda)$  übereinstimmen.

Aus dem Satz über implizite Funktionen erhält man sofort, dass in einer hinreichend kleinen offenen Umgebung eines nichtdegenerierten kritischen Punktes die Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, da laut den von uns getroffenen Voraussetzungen in der folgenden Aussage  $r \geq 2$  gilt.

**Satz 4.4** *Es sei  $\bar{x}$  ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $P(\bar{t})$ , wobei  $\bar{t}$  aus dem Inneren der Menge  $T$  sei. Die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  seien auf einer offenen Umgebung des Punktes  $(\bar{x}, \bar{t})$   $r$ -fach stetig nach  $(x, t)$  differenzierbar ( $r \geq 1$ ). Dann gilt:*

1. ([19]) *Der Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist streng stabil im Sinne von KOJIMA, d.h. es existieren offene Umgebungen  $U$  von  $\bar{t}$  und  $V$  von  $\bar{x}$  sowie eine eindeutig bestimmte, stetige Funktion  $x(\cdot)$ , so dass  $x(t')$  für alle  $t' \in U$  ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $P(t')$  in der Menge  $V$  ist.*
2. ([11]) *Auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung  $W$  von  $(\bar{x}, \bar{t})$  besteht die Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  nur aus nichtdegenerierten kritischen Punkten und ist auf  $W$  eine  $(r-1)$ -fach stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Obwohl der zweite Punkt in [11] nur für  $T \subseteq \mathbf{R}$  angeführt wird, kann die Aussage dieses Satzes leicht auf höherdimensionale Parameterräume verallgemeinert werden (siehe z.B. [9]).

Vorstehender Satz zeigt bereits die herausragende Bedeutung, die die nichtdegenerierten kritischen Punkte in der Pfadverfolgung besitzen. Da die oben genannte Funktion  $x(t)$ , die in der Umgebung nichtdegenerierter lokaler Minima oft auch als „Lösungsfunktion“ bezeichnet wird, lokal auf einer offenen Umgebung von  $\bar{x}$  stetig differenzierbar ist, ist es dort besonders einfach, auf steilsten Abstiegen beruhende Verfahren durchzuführen. Die Ableitung von  $x(\cdot)$  kann nach dem folgenden Satz von FIACCO und MCCORMIC bestimmt werden:

**Satz 4.5** ([9]) *Der Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  sei ein nichtdegenerierter kritischer Punkt des Problems  $P(t)$ .  $x(\cdot)$  sei die in Satz 4.4 eingeführte Funktion. Dann gilt:*

- *Es existieren stetig differenzierbare Funktionen  $\lambda(t)$  und  $\mu(t)$ , so dass auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung  $V$  von  $\bar{t}$  das Paar  $(\lambda(t), \mu(t))$  der eindeutig bestimmte Lagrange-Parameter von (24) für  $x = x(t)$  ist.*

- Die Ableitungen der Funktionen  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$  und  $\mu(t)$  im Punkt  $\bar{t}$  berechnen sich aus

$$\begin{pmatrix} \nabla x(\bar{t}) \\ \nabla \lambda_{I_0}(\bar{t}) \\ \nabla \mu(\bar{t}) \end{pmatrix} = B^{-1}N,$$

$$\nabla \lambda_{I \setminus I_0}(\bar{x}, \bar{t})(\bar{t}) = 0$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L_{I_0}(\bar{x}, \bar{t}, \lambda_{I_0}(\bar{t}), \mu(\bar{t})) & \nabla_x^\top g_{I_0}(\bar{x}, \bar{t}) & \nabla_x^\top h(\bar{x}, \bar{t}) \\ \nabla_x g_{I_0}(\bar{x}, \bar{t}) & 0 & 0 \\ \nabla_x h(\bar{x}, \bar{t}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$N = \begin{pmatrix} -\nabla_{xt}^2 L_{I_0}(\bar{x}, \bar{t}, \lambda_{I_0}(\bar{t}), \mu(\bar{t})) \\ -\nabla_t g_{I_0}(\bar{x}, \bar{t}) \\ -\nabla_t h(\bar{x}, \bar{t}) \end{pmatrix},$$

wobei für  $I' \subseteq I$

$$L_{I'}(x, t, \lambda(t), \mu(t)) := f(x, t) + \sum_{i \in I'} \lambda_i(t) g_i(x, t) + \sum_{j \in J} \mu_j(t) h_j(x, t)$$

definiert sei.

Natürlich kann nicht erwartet werden, dass man auf diese Weise eine auf der gesamten Menge  $T$  stetig differenzierbare Funktion  $x(t)$  nichtdegenerierter kritischer Punkte von  $P(t)$  erhält. Folglich ist es unabdingbar, sich über die topologische Struktur der Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  der verallgemeinerten kritischen Punkte im klaren zu sein, auch und gerade an den Stellen, an denen Degeneration auftritt.

#### 4.1.4 Richtungsableitbarkeit der Lösungsfunktion

Speziell zur Durchführung einer Pfadverfolgung in der Menge der lokal optimalen Punkte  $\Sigma_{\text{loc}}$  ist es nicht unbedingt notwendig, eine stetig differenzierbare Lösungsfunktion zu haben. Vielmehr reicht es in den meisten Fällen aus, dass diese Funktion richtungsdifferenzierbar ist. Diese Eigenschaft kann unter der Bedingungen (CRCQ) garantiert werden, was die wichtigste Aussage eines Satzes von RALPH und DEMPE (siehe [29]) ist.

**(CRCQ)** (*constant rank constraint qualification*) Es existiert eine offene Umgebung  $W$  von  $(\bar{x}, \bar{t})$ , so dass für beliebige, feste Teilmengen  $I' \subseteq I_0(\bar{x}, \bar{t})$  und  $J' \in J$  die Gradientenmenge  $\{\nabla_x g_{I'}(\bar{x}, \bar{t})\} \cup \{\nabla_x h_{J'}(\bar{x}, \bar{t})\}$  für alle  $(x, t) \in W$  denselben Rang besitzt.



Unter dieser Annahme, deren Erfülltsein aus der Gültigkeit von (LICQ) folgt, kann gezeigt werden dass die Lösungsfunktion  $x(\cdot)$  eine stückweise stetig differenzierbare und deshalb richtungsableitbare Funktion ist.

Wir betrachten dazu Mengen  $K_\lambda(\bar{x}, \bar{t})$  als Gesamtheit aller Lösungen des linearen Systems

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\bar{x}, \bar{t}) \begin{pmatrix} d \\ r \end{pmatrix} &= 0, & i \in I^+(\lambda) \\ \nabla g_i(\bar{x}, \bar{t}) \begin{pmatrix} d \\ r \end{pmatrix} &\leq 0, & i \in I_0(\bar{x}, \bar{t}) \setminus I^+(\lambda) \\ \nabla h_j(\bar{x}, \bar{t}) \begin{pmatrix} d \\ r \end{pmatrix} &= 0, & j \in J \end{aligned}$$

und

$$S(\bar{x}, \bar{t}, r) := \arg \max_{\lambda', \mu'} \{ \nabla_i L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda', \mu') r \mid (\lambda', \mu') \in \Lambda(\bar{x}, \bar{t}) \}$$

sowie die quadratische Aufgabe

$$\frac{1}{2} d^\top \nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) d + r^\top \nabla_{xt}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu) d \rightarrow \min_d \quad (QP_{\lambda, \mu}(\bar{x}, \bar{t}, r)) \\ (d, r) \in K_\lambda(\bar{x}, \bar{t})$$

die bei Erfülltsein der streng hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung streng konvex ist.

**Satz 4.6** *Man betrachte das parametrische Optimierungsproblem  $P(t)$  im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$ .*

- *Wenn in diesem Punkt (MFCQ) und (SSOC) erfüllt sind, dann*
  - *ist  $\bar{x}$  eine isolierte lokal optimale Lösung von  $P(\bar{t})$ ;*
  - *([19]) ist die Lösungsfunktion  $x(t)$  an der Stelle  $t = \bar{t}$  streng stabil in Sinne von KOJIMA, d.h. es existieren offene Umgebungen  $U$  von  $\bar{t}$  und  $V$  von  $\bar{x}$  sowie eine eindeutig bestimmte stetige Funktion  $x : U \rightarrow V$ , so dass  $x(t)$  mit  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  die eindeutige lokal optimale Lösung in  $V$  von  $P(t)$  für alle  $t \in U$  ist;*
  - *([5]) ist die Funktion  $x(\cdot)$  richtungsdifferenzierbar im Punkt  $\bar{t}$  und ihre Richtungsableitung in Richtung  $r \in \mathbf{R}^m$*

$$x'(\bar{t}; r) := \lim_{s \rightarrow +0} \frac{1}{s} [x(\bar{t} + sr) - \bar{x}]$$

*ist die eindeutige Lösung von  $(QP_{\lambda, \mu}(\bar{x}, \bar{t}, r))$  für passend gewähltes  $(\lambda, \mu) \in S(\bar{x}, \bar{t}, r)$ .*

- ([29]) Ist zusätzlich zu diesen beiden Bedingungen auch (CRCQ) erfüllt in  $(\bar{x}, \bar{t})$ , dann
  - ist  $x(\cdot)$  stückweise stetig differenzierbar ( $PC^1$ -Funktion) auf einer offenen Umgebung von  $(\bar{x}, \bar{t})$ ;
  - ist die Richtungsableitung die eindeutig bestimmte Lösung der Aufgabe  $(QP_{\lambda, \mu}(\bar{x}, \bar{t}, r))$  für beliebiges  $(\lambda, \mu) \in S(\bar{x}, \bar{t}, r)$ .

Später wird sich zeigen, dass in den so genannten generischen einparametrischen Optimierungsproblemen die Bedingung (CRCQ) in all den Punkten erfüllt ist, in denen auch (MFCQ) gilt.

## 4.2 Optimalität in der Aufgabe (MZO)

Der Abschnitt über die in der unteren Ebene durch Gleichungen und Ungleichungen restringierten Zwei-Ebenen-Aufgaben soll mit einigen Optimalitätsbegriffen beschlossen werden. Zu diesem Zweck muss wie bereits angekündigt der Begriff der Zulässigkeit etwas komplexer definiert werden.

**Definition 4.7 (Zulässigkeit in der mathematischen Zwei-Ebenen-Optimierung)**

- Jedes  $\bar{t} \in T$  mit  $M(\bar{t}) \neq \emptyset$  heißt zulässig in (MZO).
- Für ein in (MZO) zulässiges  $\bar{t}$  heißt  $\bar{x}$  zulässig bezüglich  $\bar{t}$  in der unteren Ebene, wenn  $\bar{x} \in M(\bar{t})$ .
- $\bar{x}$  heißt zulässig bezüglich  $\bar{t}$  in der oberen Ebene, wenn  $\bar{x}$  Lösung der Aufgabe  $P(\bar{t})$  (und deshalb offenbar auch zulässig bezüglich  $\bar{t}$  in der unteren Ebene) ist.

Große Schwierigkeiten wird die formelmäßige Beschreibung von Optimalitätsbedingungen bereiten, wenn die Restriktion  $t \in T \subseteq \mathbf{R}^m$  an die zulässige Parametermenge nicht konkretisiert wird. Wir wollen deshalb für den Rest dieses Abschnittes annehmen, dass die Menge  $T$  aller zulässigen Parameter durch „box constraints“ gegeben sei. Wir betrachten also

$$\left. \begin{array}{l}
 F(x, t) \rightarrow \text{„min“}_t \\
 t_1 \in [\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1] \\
 \vdots \\
 t_m \in [\underline{\alpha}_m, \bar{\alpha}_m]
 \end{array} \right\} \text{(MMZO)}$$


---


$$x \text{ löst } \left\{ \begin{array}{l}
 f(x, t) \rightarrow \min_t \\
 g_i(x, t) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, p) \\
 h_j(x, t) = 0 \quad (j = 1, \dots, q)
 \end{array} \right\} P(t)$$

wobei nun zusätzlich zur bereits geforderten zweifach stetigen Differenzierbarkeit von  $f$ ,  $g$  und  $h$  noch  $F \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R})$  gelte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir weiterhin  $\underline{\alpha}_k < \bar{\alpha}_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, m\}$  voraus<sup>7</sup> und definieren

$$T := \{t \in \mathbf{R}^m \mid \underline{\alpha}_k \leq t_k \leq \bar{\alpha}_k, k = 1, \dots, m\}.$$

Des weiteren wollen wir sichern, dass die Aufgabe (MZO) die Annahme (A1) auf Seite 21 erfüllt. Dies kann in der konkretisierten Version (MMZO) der mathematischen Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe (MZO) mit der Gültigkeit der folgenden Punkte erreicht werden, worin der Vollständigkeit halber auch nochmals die Differenzierbarkeitsanforderung enthalten ist:

**(A2)** In der Aufgabe (MMZO) gelte:

1. Auf  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  seien die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  zweifach,  $F$  einfach nach  $(x, t)$  stetig differenzierbar.
2. Die Menge  $\text{grph } M := \{(x, t) \mid t \in T, x \in M(t)\}$  ist im Vektorraum  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  beschränkt und nichtleer.

Die Eigenschaft  $\text{grph } M \neq \emptyset$  im zweiten Punkt garantiert, dass wenigstens ein zulässiger Wert der Leader-Variablen existiert und bedarf sicher keiner weiteren Erläuterung, ebenso wie die Tatsache, dass es wenigstens für einen solchen Parameter eine nichtleere Menge von in der unteren Ebene zulässigen Werten der Follower-Variablen  $x$  geben soll.

Die Beschränktheitsbedingung, die doch recht restriktiv erscheint, spielt eine wesentliche Rolle für die Garantie der Existenz einer Lösung des Problems  $P(t)$  für alle  $t \in T \cap \text{dom } M$  und bezüglich der in (A1) aufgenommenen Kompaktheitsforderung an den eigentlichen Definitionsbereich der Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi$ .

<sup>7</sup>Anderenfalls wäre  $T$  entweder leer ( $\underline{\alpha}_k > \bar{\alpha}_k$ ) oder  $t_k$  wäre konstant ( $\underline{\alpha}_k = \bar{\alpha}_k$ ) und könnte in der gesamten Aufgabe (MMZO) durch diese Konstante ersetzt werden.

Sie kann einfach dadurch erreicht werden, dass bei Bedarf die Endlichkeit aller  $\underline{\alpha}_k$  und  $\bar{\alpha}_k$  gefordert wird und Variablenbeschränkungen der Form

$$-\infty < \underline{\beta}_i \leq x_i \leq \bar{\beta}_i < \infty \quad i = 1, \dots, n$$

oder eine die Norm der Variablen  $x$  nach oben begrenzende Nebenbedingung zur unteren Ebene hinzugefügt werden. Eine solche Vorgehensweise ist für die meisten praktischen Anwendungen durchaus denkbar.

Weiter gilt offenbar

$$\text{grph } M = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{n+m} \mid [t \in T] \wedge [g(x, t) \leq 0] \wedge [h(x, t) = 0]\}.$$

Wegen der aus der Differenzierbarkeit folgenden Stetigkeit aller hierin auftretenden Funktionen ist  $\text{grph } M$  abgeschlossen, also folgt bei Beschränktheit dieser Menge im endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  die Kompaktheit von  $\text{grph } M$  sowie von  $M(t)$  für alle  $t \in \text{dom } M$ . Deshalb ist nach Satz 2.7 auf Seite 23 die PMA  $M$  oberhalb stetig auf der kompakten Menge  $\text{dom } M$ .

Für das folgende Lemma seien

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{glob}}(t) &= \{x \mid x \text{ ist globaler Minimumspunkt von } P(t)\}, \\ \Psi_{\text{FJ}}(t) &= \{x \mid x \text{ ist Fritz-John-Punkt von } P(t)\}, \\ \Psi_{\text{gc}}(t) &= \{x \mid x \text{ ist verallgemeinerter kritischer Punkt von } P(t)\} \end{aligned}$$

definiert.

**Lemma 4.8** (MMZO) *erfülle die Annahme (A2) und die PMA  $\Psi$  sei eine der drei gerade eingeführten Abbildungen. Dann erfüllt die Aufgabe*

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\ t &\in T \\ x &\in \Psi(t) \end{aligned} \quad (\text{ZEOA})$$

*die Annahme (A1) und besitzt sowohl eine schwache optimistische als auch eine schwache pessimistische Lösung.*

**Beweis:** Laut (A2.1) ist  $F$  auf  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  differenzierbar und somit auf jeder beliebigen Teilmenge dieses Raumes und insbesondere auf dem Abschluss des Graphen jeder beliebigen Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi : \mathbf{R}^m \rightarrow 2^{\mathbf{R}^n}$  stetig. Folglich gilt (A1.1).

Die Menge der globalen Minimumspunkte der stetigen Zielfunktion  $f$  über der kompakten Menge  $M(t)$  ist bekanntlich abgeschlossen.

Ersetzt man in den Systemen (FJ) und (23) die Bedingung, dass die Multiplikatoren  $\lambda_0$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  nicht sämtlich verschwinden dürfen, durch die äquivalente

Normierung  $\lambda_0^2 + \lambda^\top \lambda + \mu^\top \mu = 1$ , dann wird offensichtlich, dass für fixiertes  $t$  auch die Mengen der Fritz–John- und der verallgemeinerten kritischen Punkte von  $P(t)$  abgeschlossen ist.

Als abgeschlossene Teilmengen des Kompaktums  $M(t)$  sind also  $\Psi_{\text{glob}}(t)$ ,  $\Psi_{\text{FJ}}(t)$  und  $\Psi_{\text{gc}}(t)$  für alle  $t \in \text{dom } M$  kompakt und (A1.2) ist erfüllt.

Außerdem ist wegen

$$\emptyset \neq \Psi_{\text{glob}}(t) \subseteq \Psi_{\text{FJ}}(t) \subseteq \Psi_{\text{gc}}(t) \quad \forall t \in \text{dom } M \quad (25)$$

der Graph von  $\Psi$  jeweils nichtleer und als Teilmenge von  $\text{grph } M$  beschränkt, d.h. (A1.3) gilt.

Aus (25) folgt weiterhin  $\text{dom } \Psi = \text{dom } M$  für alle drei betrachteten Punkt–Menge–Abbildungen  $\Psi$ . Da  $\text{grph } M$  bereits als kompakt identifiziert wurde, sind nach Satz 2.7 der eigentliche Definitionsbereich der PMA  $M$  und somit auch  $\text{dom } \Psi$  kompakt. Damit ist schließlich auch das Erfülltsein von (A1.4) gezeigt.

Damit ist natürlich auch jeweils die schwächere Variante (A1') erfüllt und wegen Satz 3.5 existieren in allen drei Fällen schwache optimistische und schwache pessimistische Lösungen.  $\square$

Die Aussage der schwachen optimistischen bzw. pessimistischen Lösbarkeit kann auch gezeigt werden bei Verwendung der PMA

$$\Psi_{\text{loc}}(t) = \{x \mid x \text{ ist lokaler Minimumpunkt von } P(t)\},$$

die unter den gegebenen Voraussetzungen für alle  $t \in T$  ebenfalls beschränkt und wegen  $\Psi_{\text{glob}}(t) \subseteq \Psi_{\text{loc}}(t)$  nicht leer ist. Es kann lediglich der Fall eintreten, dass für gewisse  $t$  die Menge  $\Psi_{\text{loc}}(t)$  nicht abgeschlossen und damit die Bedingung (A1.2) verletzt ist. Diese tritt aber in (A1') nicht mehr auf und die Existenz schwacher Lösungen beider Strategien ist gesichert.

Die Menge der stationären Punkte wurde im letzten Lemma ebenfalls nicht untersucht. Der Grund dafür ist, dass (wie im folgenden Beispiel demonstriert) deren Existenz nicht gesichert werden kann.

**Beispiel 4.9** Die in der Variablen  $t \in [0, 1]$  parametrische Aufgabe

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq t \end{aligned}$$

hat stets die eindeutig bestimmte Lösung  $x^* = (-\sqrt{t}, 0)$ . Betrachtet man für diesen Punkt das System (KKT) zur Bestimmung der stationären Punkte, so erhält man schnell für positives  $t$  den Lagrange-Multiplikator  $\lambda_1 = 1/(2\sqrt{t})$  (damit ist

die Stationarität von  $x^*$  nachgewiesen), der für von oben gegen 0 konvergierendes  $t$  gegen  $+\infty$  geht. Tatsächlich enthält für  $\bar{t} = 0$  (und deshalb  $\bar{x} = (0, 0)$  als einzigem zulässigen Punkt) das zu lösende Karush–Kuhn–Tucker–System die nicht erfüllbare Bedingung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Ableitung der Lagrange–Funktion. Andererseits hat (FJ)

$$\begin{aligned} \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 &= 1 \\ \lambda_0, \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

die Lösung  $(\lambda_0, \lambda_1) = (0, 1)$  und  $\bar{x}$  ist als Fritz–John–Punkt identifiziert.

Es zeigt sich, dass das Festhalten an der Bedingung  $\lambda_0 = 1$  bei Annäherung an einen Fritz–John–Punkt, der kein stationärer Punkt ist, zu in mindestens einer Komponente gegen  $\pm\infty$  strebenden Lagrange–Multiplikatoren führt. Im Beweis zum folgenden Satz gilt deshalb das Beschränktheitsargument für stationäre Punkte nicht, weswegen seine Aussage ohne weitere Voraussetzungen nur für verallgemeinerte kritische und für Fritz–John–Punkte formuliert werden kann.

**Satz 4.10** Die Aufgabe (MMZO) erfülle die Annahme (A2). Die PMA  $\Psi$  stehe entweder für die Menge aller Fritz–John–Punkte oder für die Menge aller verallgemeinerten kritischen Punkte, d.h. es sei  $\Psi \equiv \Psi_{\text{FJ}}$  oder  $\Psi \equiv \Psi_{\text{gc}}$ . Dann hat

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\ t &\in T, \\ x &\in \Psi(t) \end{aligned}$$

eine strenge optimistische Lösung.

**Beweis:** Wir zeigen die Aussage stellvertretend für verallgemeinerte kritische Punkte. Es sei also  $\Psi(t) = \Psi_{\text{gc}}(t)$ .

Offenbar gilt

$$\text{grph } \Psi_{\text{gc}} = \bigcup_{t \in T} (\Psi_{\text{gc}}(t) \times \{t\}) = \{(x, t) \mid t \in T, x \in \Psi_{\text{gc}}(t)\} = \Sigma_{\text{gc}}$$

für die Menge aller verallgemeinerten kritischen Punkte in (MMZO).

Wie schon im Beweis zu Lemma 4.8 angeklungen ist, normieren wir in (23) die Lagrange–Parameter äquivalent durch  $\lambda_0^2 + \lambda^\top \lambda + \mu^\top \mu = 1$ , woraufhin die strenge Ungleichung in der letzten Zeile von (23) automatisch erfüllt ist.

$(x, t)$  ist ein g.c.-Punkt und damit ein Element des Graphen von  $\Psi_{\text{gc}}$  genau dann, wenn  $t \in T$  und  $x$  ein g.c.-Punkt der Aufgabe  $P(t)$  ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz von Lagrange-Parametern, die zusammen mit  $(x, t)$  das System

$$\begin{aligned} G(t) &\leq 0 \\ \lambda_0 \nabla_x f(x, t) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla_x g_i(x, t) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla_x h_j(x, t) &= 0, \\ g_i(x, t) &\leq 0, \quad i \in I, \\ \lambda_i g_i(x, t) &= 0, \quad i \in I, \\ h_j(x, t) &= 0, \quad j \in J, \\ \lambda_0^2 + \sum_{i \in I} \lambda_i^2 + \sum_{j \in J} \mu_j^2 &= 1 \end{aligned} \quad (26)$$

lösen. Die Menge  $\mathcal{X}$  aller  $(x, t, \lambda_0, \lambda, \mu)$ , die dieses System mit  $t \in T$  erfüllen, ist wegen der aus (A2.1) folgenden Stetigkeit aller in (26) auftretenden Terme abgeschlossen und wegen (A2.2) und der letzten Gleichung in (26) beschränkt. Folglich ist  $\mathcal{X}$  als Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums sogar kompakt.

Die Projektion  $P(x, t, \lambda_0, \lambda, \mu) \mapsto (x, t)$  ist eine stetige Abbildung und deshalb ist auch

$$\begin{aligned} P(\mathcal{X}) &= \{(x, t) \mid \exists(\lambda_0, \lambda, \mu) : (x, t, \lambda_0, \lambda, \mu) \in \mathcal{X}\} \\ &= \{(x, t) \mid \exists(\lambda_0, \lambda, \mu) : (x, t, \lambda_0, \lambda, \mu) \text{ löst (26), } t \in T\} \\ &= \text{grph } \Psi_{\text{gc}} \end{aligned}$$

kompakt. Aus Satz 2.7 folgt die Kompaktheit von  $\text{dom } \Psi_{\text{gc}}$  und die Oberhalbstetigkeit dieser PMA über ihrem eigentlichen Definitionsbereich.

Wegen des in Lemma 4.8 gezeigten Erfülltseins von (A1) kann nun der Satz 2.6 angewendet werden, um tatsächlich die Existenz einer (strengen) optimistischen Lösung der in der Behauptung genannten Zwei-Ebenen-Aufgabe zu zeigen.

Der Beweis für den Fall der Betrachtung aller Fritz-John-Punkte ist völlig analog. Der einzige Unterschied ist das Auftreten der zusätzlichen Nichtnegativitätsbedingung  $(\lambda_0, \lambda) \geq 0$  in (26).  $\square$

Nicht ohne weitere Voraussetzungen lässt sich die Existenz optimistischer Lösungen bei Verwendung anderer als im Satz 4.10 genannter Punkt-Menge-Abbildungen oder gar pessimistischer Lösungen garantieren. Dazu reicht es im Allgemeinen nicht einmal aus, die Konvexität der Aufgabe der unteren Ebene bezüglich  $x$  für alle  $t \in T$  zu fordern.

**Beispiel 4.11** *Die Aufgabe der unteren Ebene*

$$x \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}x &\in [-1, 1] \\xt &= 0\end{aligned}$$

(die im Punkt  $\bar{t} = 0$  keine Regularitätsbedingung erfüllt) ist für alle  $t \in \mathbf{R}$  konvex und besitzt die im Punkt  $\bar{t} = 0$  weder oberhalb noch unterhalb stetige Optimalmengenabbildung

$$\Psi_{\text{glob}}(t) = \begin{cases} \{0\}, & t \neq 0, \\ \{-1\}, & t = 0. \end{cases}$$

Da diese PMA stets einelementige Werte annimmt, sind in der die Annahme (A2) erfüllenden Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned}x^2 + t^2 &\rightarrow \text{„min“}_t \\t &\in [-1, 1] \\x &\in \Psi_{\text{glob}}(t)\end{aligned}$$

optimistische und pessimistische Strategie äquivalent und es ist

$$\varphi_{\text{opt/pess}}(t) = \begin{cases} t^2, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Das Infimum dieser Funktion ist 0, das als Zielfunktionswert der oberen Ebene einzig von  $(x, \bar{t}) = (0, 0)$  angenommen werden kann. Da jedoch  $\varphi_{\text{opt/pess}}(0) = 1$  gilt, hat die Aufgabe weder eine strenge optimistische noch eine strenge pessimistische Lösung.

Stellvertretend als Garant für eine optimistische Lösbarkeit sei ohne Beweis hier nur die folgende, für (MMZO) unter der Annahme (A2) formulierte Konsequenz einer Aussage aus [1] mitgeteilt:

**Lemma 4.12** (MMZO) erfülle (A2). Es sei die Punkt-Menge-Abbildung  $M$  außerdem stetig (d.h. sowohl oberhalb, als auch unterhalb stetig) auf ihrem eigentlichen Definitionsbereich. Dann ist  $\Psi_{\text{glob}}$  oberhalb stetig auf  $\text{dom } M$  ([1, Satz 4.2.2]).

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes existiert folglich eine optimistische Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned}F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\t &\in T \\x &\in \Psi_{\text{glob}}(t).\end{aligned}$$

Sind alle lokalen Minima der parametrischen Aufgabe der unteren Ebene streng stabil, ist (MMZO) auch bei pessimistischer Herangehensweise lösbar:



**Satz 4.13** (MMZO) *erfülle (A2) und alle  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  seien streng stabil im Sinne von KOJIMA. Dann ist die Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi_{\text{loc}}$  unterhalb stetig auf ganz  $T$  und folglich existiert eine pessimistische Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“} \\ & \quad \quad \quad t \in T \\ & \quad \quad \quad x \in \Psi_{\text{loc}}(t). \end{aligned}$$

**Beweis:** Es seien  $\bar{t} \in \text{dom } M$  und  $\bar{x} \in \Psi_{\text{loc}}(\bar{t})$  beliebig gewählt. Wegen der Stabilitätsvoraussetzung existieren offene Umgebungen  $U$  von  $\bar{t}$  und  $V$  von  $\bar{x}$  sowie eine eindeutig bestimmte stetige Funktion  $x(\cdot)$ , so dass  $x(t')$  für alle  $t' \in U \cap \text{dom } M$  lokaler Minimumspunkt der Aufgabe  $P(t')$  ist. Wählen wir nun eine beliebige Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq U \cap T$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t'$  und dazu entsprechend die Folge  $\{x_k = x(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ , so ist offenbar  $x_k \in \Psi_{\text{loc}}(t_k)$  und wegen der Stetigkeit von  $x(\cdot)$  sowie aufgrund der Tatsache  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ . Also ist  $\Psi_{\text{loc}}$  unterhalb stetig auf  $T$ . Die Lösbarkeit der genannten Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe folgt dann aus Satz 2.6.  $\square$

#### 4.2.1 Lokaler und globaler Optimalitätsbegriff

Es soll nun geklärt werden, was unter einer Lösung der Aufgabe (MMZO) zu verstehen ist. Zunächst ist völlig einsichtig, dass in der Formulierung der Probleme (OPT) und (PESS) einfach  $\Psi = \Psi_{\text{glob}}$  eingesetzt werden kann. Das Ergebnis ist ein globaler Optimalitätsbegriff, der hinsichtlich der Qualität (lokal bzw. global) der Lösungen der Ersatzprobleme (OPT) und (PESS) bis jetzt stets stillschweigend als der gültige angesehen wurde:

**Definition 4.14 (Globale Optimalität)** *In der Aufgabe (MMZO) werde die PMA  $\Psi \equiv \Psi_{\text{glob}}$  betrachtet. Dann heißt ein  $\bar{t} \in \text{dom } M$  globale optimistische/pessimistische Lösung von (MMZO), wenn der Vektor  $\bar{t}$  globaler Minimumspunkt der Aufgabe (OPT) bzw. der Aufgabe (PESS) ist.*

Obwohl diese Minimalitätseigenschaft in gewissem Sinne die „wünschenswerteste“ ist, muss erwähnt werden, dass ein Algorithmus für die Suche nach einer solchen Lösung äußerst schwierig zu realisieren ist. Er müsste nämlich in der Lage sein, das parametrische Problem

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“} \\ (x, t) &\in \Sigma_{\text{glob}} \end{aligned}$$

zu lösen, in dem die Überprüfung des Erfülltseins der Nebenbedingung sehr problematisch ist.

Andererseits hilft es auch nicht weiter, sich sowohl bei der Suche des Infimums der Funktionen  $\varphi_{\text{opt}}$  und  $\varphi_{\text{pess}}$  als auch bei der Verfolgung des Pfades, auf dem ein Punkt  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  gefunden wurde, gänzlich auf *lokale* Suchmethoden zu beschränken. Eine solche Restriktion der zu verwendenden Algorithmen führt nämlich zu einem in vielen Fällen wenig brauchbaren Optimalitätsbegriff:

**Definition 4.15 (Lokale Optimalität)** Ein  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  heißt lokale Lösung von (MMZO) falls gilt:

- $(\bar{x}, \bar{t})$  ist streng stabil im Sinne von KOJIMA.
- Bei Ersetzung von  $x$  durch die Lösungsfunktion  $x(t)$  auf  $\text{dom } M \cap U$  mit einer hinreichend kleinen offenen Umgebung  $U$  von  $\bar{t}$  besitzt die (dann nur noch von  $t$  abhängige) Zielfunktion  $F(x, t)$  der oberen Ebene ein lokales Minimum im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t}) = (x(\bar{t}), \bar{t})$ .

Obwohl numerisch weitaus einfacher zu behandeln als die globale Minimalität, ist dieser Zugang dem ersteren Vorschlag deutlich unterlegen. Zunächst bemerkt man, dass hierbei keine Unterscheidung in optimistische und pessimistische Strategie erfolgt. Dies ist aber keine Überraschung, da ausgehend von einem isolierten Minimumpunkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  die Erkennung eines weiteren  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  nur mittels nicht-lokaler Suchstrategien erfolgen kann. Sind diese jedoch nicht verfügbar, so ist die Frage nach der Existenz weiterer Minimumpunkte für denselben Wert der Leader-Variablen nicht beantwortbar. Deshalb sind (lokal betrachtet) die optimistische und die pessimistische Strategie äquivalent.

Sofort ist es uns möglich, notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Optimalität zu formulieren. Dazu definieren wir für  $\bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m)^\top \in T$  mit

$$R(\bar{t}) := \{r \in \mathbf{R}^m \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } \bar{t} + \varepsilon r \in T\}$$

die Menge aller derjenigen Richtungen, in die der Parameter  $\bar{t}$  um einen hinreichend kleinen positiven Betrag verschoben werden kann, ohne die Menge  $T$  der zulässigen Parameterwerte zu verlassen. Offensichtlich ist dann

$$R(\bar{t}) = R_1(\bar{t}) \times \dots \times R_m(\bar{t})$$

mit

$$R_k(\bar{t}) = \begin{cases} [0, +\infty), & \underline{\alpha}_k = \bar{t}_k \\ (-\infty, +\infty), & \underline{\alpha}_k < \bar{t}_k < \bar{\alpha}_k \\ (-\infty, 0], & \bar{t}_k = \bar{\alpha}_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, m)$$

und es gilt  $R(\bar{t}) = \mathbf{R}^m$  genau dann, wenn  $\bar{t} \in \text{int } T$ .

**Satz 4.16 (Notwendige Optimalitätsbedingung)** (MMZO) *erfülle die Annahme (A2). Es seien  $\bar{t} \in T$  und  $\bar{x}$  eine lokal optimale Lösung von  $P(\bar{t})$ . Die Aufgabe der unteren Ebene erfülle im Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  die Bedingungen (MFCQ), (SSOC) und (CRCQ).*

*Es sei mit  $x(\cdot)$  die wegen Satz 4.6 eindeutig bestimmte, stückweise stetig differenzierbare Lösungsfunktion auf der offenen Umgebung  $U$  von  $\bar{t}$  bezeichnet. Man setze  $\bar{F}(t) := F(x(t), t)$  für alle  $t \in U$ . Dann ist  $\bar{F}(\cdot)$  auf  $U$  eine  $PC^1$ -Funktion.*

*Ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine lokale Lösung der Aufgabe (MMZO), so ist die Richtungsableitung  $\bar{F}'(\bar{t}; r)$  nicht negativ für alle  $r \in R(\bar{t})$ .*

**Satz 4.17 (Hinreichende Optimalitätsbedingung)** *Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Satzes 4.16 gelte  $\bar{F}'(\bar{t}; r) > 0$  für alle  $r \in R(\bar{t})$ . Dann ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine lokale Lösung der Zwei-Ebenen-Aufgabe (MMZO).*

Die Sätze 4.16 und 4.17 sind leicht einzusehen. Aus den Voraussetzungen folgt unter Verwendung von Satz 4.6 insbesondere die  $PC^1$ -Eigenschaft der Lösungsfunktion  $x(\cdot)$ . Da  $F(\cdot, \cdot)$  ebenfalls  $PC^1$  (sogar  $C^1$ ) ist und Kompositionen von  $PC^1$ -Funktionen wieder stückweise stetig differenzierbar sind, gilt diese Eigenschaft und die daraus resultierende Richtungsableitbarkeit ebenso für die Abbildung  $\bar{F}(\cdot)$  auf einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes  $\bar{t}$ .

Von der Richtigkeit der in den beiden Aussagen auftretenden Schlüsse

$$(\bar{x}, \bar{t}) \text{ löst (MMZO)} \quad \Rightarrow \quad \bar{F}'(\bar{t}; r) \geq 0 \text{ für alle } r \in R(\bar{t})$$

und

$$\bar{F}'(\bar{t}; r) > 0 \text{ für alle } r \in R(\bar{t}) \quad \Rightarrow \quad (\bar{x}, \bar{t}) \text{ löst (MMZO)}$$

überzeugt man sich sehr schnell anhand einer Argumentation betreffend das „Richtungswachstum“ der Funktion  $\bar{F}(\cdot)$ . Mittels

$$\bar{F}'(\bar{t}; r) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{t}) \cdot x'(\bar{t}; r) + \frac{\partial F}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) \cdot r$$

erhält man die benötigten Richtungsableitungen.

Später wird die Komplexität der darzustellenden Sachverhalte noch wesentlich zunehmen. Deshalb sei ab jetzt eine Vereinfachung gestattet: Ist in der Funktion  $F(x, t)$  das Argument  $x$  in Abhängigkeit von  $t$  gegeben, dann bezeichne bereits

$$F'(x(t), t; r) := \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{t}) \cdot x'(\bar{t}; r) + \frac{\partial F}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) \cdot r$$

die Richtungsableitung der nur noch von  $t$  abhängigen Funktion  $\bar{F}(t) = F(x(t), t)$ , ohne das die explizite Definition der Funktion  $\bar{F}(t)$  aufgeschrieben wird.

Um einiges weniger offensichtlich (dafür aber umso interessanter im Hinblick auf eine numerische Bewältigung des Problems) sind notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Optimalität, wie sie DEMPE in [4] unter einer sogar leicht schwächeren Bedingung als (CRCQ) beschreibt. Grundlage dabei ist die Annäherung an das Problem mit Hilfe einer Art von Dekompositionsmethode, die auf einer Untersuchung der aktiven Indexmenge (Indizes der im betrachteten Punkt aktiven Nebenbedingungen) und der durch Weglassen einiger darin enthaltener ausgezeichnete Nebenbedingungen modifizierten Aufgabe auf einer Umgebung dieses Punktes beruht.

Für die Bestimmung von Subgradienten der Lösungsfunktion  $x(\cdot)$  sei an dieser Stelle auf die Arbeit [8] verwiesen, in der beschrieben wird, in welcher Form zu diesem Zweck die Lösungen und vorliegenden Multiplikatoren der quadratischen Ersatzaufgabe  $(QP_{\lambda,\mu}(\bar{x}, \bar{t}, r))$  nutzbringend verwertet werden können. Dort ist auch ein nicht-deterministischer Algorithmus enthalten, dessen Rückgabewert mit Wahrscheinlichkeit 1 (siehe spätere Definition 5.2 auf Seite 93) ein solcher Subgradient ist.

Von einem strengen Beweis der Sätze 4.16 und 4.17 soll jedoch abgesehen werden, da uns lokale Lösungen in Sinne der Definition 4.15 später nicht mehr interessieren werden. Neben der Nichtunterteilbarkeit in die beiden bekannten Strategietypen (optimistisch oder pessimistisch) gibt es nämlich noch ein weiteres schwerwiegendes Problem.

Bei der Einschränkung auf lokale Lösungen kann es außerdem passieren, dass man bei der Durchführung eines auf Pfadverfolgung basierenden Algorithmus selbst bei einer stetigen Punkt-Menge-Abbildung  $M$  ein lokales Minimum der Funktion  $F(x, t)$  über der Menge der Fritz-John-Punkte in einem Punkt  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  vorfindet, der nicht mehr in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten und folglich in der oberen Ebene unzulässig ist. Erfolgt dann für den aktuellen Parameterwert tatsächlich ein Übergang zu einem Punkt  $(x^*, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  (d.h.  $x^*$  löst  $P(\bar{t})$ ), dann ist die dabei auftretende Veränderung des Wertes der Zielfunktion der oberen Ebene prinzipiell nicht vorhersagbar und kann sämtliche bis dato gemachten Minimierungsbemühungen entwerten. Werden keine Maßnahmen ergriffen, dieses Problem zu entschärfen, kann die Suche nach lokalen Lösungen zur Verzyklung führen, selbst wenn globale Lösungen existieren.

**Beispiel 4.18** *Wir suchen lokale Lösungen der Aufgabe*

$$F(x, t) = x^2 \rightarrow \text{„min“}_t$$

$$t \in [-4, 4]$$

$$x \text{ löst } \left\{ \begin{array}{l} f(x, t) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - tx \rightarrow \min_x \\ x \in [-4, 4] \end{array} P(t) \right\},$$

in der die Schrankenbedingungen lediglich (A2) sichern. In der Aufgabe der unteren Ebene ist  $\nabla_x f(x, t) = x^3 - 3x - t$  und somit sind alle verallgemeinerten kritischen Punkte durch  $t = x^3 - 3x$  beschrieben.

Weiter gilt  $\nabla_{xx}^2 f(x, t) = 3x^2 - 3$  und deshalb sind alle g.c.-Punkte, deren  $x$ -Wert betragsmäßig größer (kleiner) als 1 ist, Argumente lokaler Minima (Maxima) der Funktion  $f(x, t)$ . Wir erhalten die in Abbildung 4 gezeigte Situation, wobei die Punkte  $Y_2 = (2, -1)$  und  $Y_4 = (-2, 1)$  keine lokalen Extrema, wohl aber stationäre Punkte darstellen.

Eine auf Pfadverfolgung und Sprüngen beruhende Suche nach lokalen Lösungen im Sinne der Definition 4.15 kann dann den folgenden unbefriedigenden Verlauf nehmen:

1. Startend im Punkt  $Y_1 = (-2, -2) \in \Sigma_{\text{loc}}$  notiert man für die obere Ebene den Zielfunktionswert  $(-2)^2 = 4$ . Verfolgen wir den Pfad lokaler Minima mit negativem  $x$ -Wert für wachsendes  $t$  (also von  $Y_1$  bis  $Y_2$ ), so stellen wir eine Abnahme des Betrages von  $x$  und somit eine Verbesserung in der oberen Ebene fest. Im Punkt  $Y_2 = (2, -1)$  ergibt sich das eindeutig bestimmte Minimum  $(-1)^2 = 1$  von  $F(x, t)$  auf dem Abschluss des im Schritt 1 verfolgten Pfades.
2. Es ist jedoch  $Y_2 = (2, -1) \notin \Sigma_{\text{loc}}$ , d.h. in  $x_2 = -1$  liegt kein lokales Minimum der Aufgabe  $P(t_2)$  mit  $t_2 = 2$  mehr vor. Deshalb erfolgt für diesen Parameter ein Übergang zur eindeutig bestimmten Lösung  $x_3 = 2$  der unteren Ebene. Wir landen im Punkt  $Y_3 = (2, 2)$ , womit sich wiederum in der oberen Ebene der Zielfunktionswert  $2^2 = 4$  ergibt.
3. Völlig analog zu Schritt 1 fällt jetzt der Funktionswert von  $F$  entlang des Pfades lokaler Minima mit positivem  $x$ -Wert (von  $Y_3$  bis  $Y_4$ ) für fallende Parameter  $t$  und wir erreichen im Punkt  $Y_4 = (-2, 1)$  das Minimum der Zielfunktion der oberen Ebene auf dem Abschluss desjenigen Pfades lokaler Minima, der die Punkte  $Y_3$  und  $Y_4$  verbindet.
4. Wie im Schritt 2 bemerken wir aber erneut, dass  $Y_4$  selbst nicht in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten ist. Wiederum erfolgt ein Übergang zum eindeutig bestimmten lokalen Minimum von  $P(-2)$ , welches im Punkt  $Y_1$  angenommen wird. Somit sind wir am Ausgangspunkt unserer Suche angelangt.

Diese Argumente zusammenfassend müssen wir also zur Kenntnis nehmen, dass für alle  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $(x^*, t^*) \in \Sigma_{\text{loc}} \cap U_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t})$  mit der Eigenschaft  $F(\bar{x}, \bar{t}) > F(x^*, t^*)$  existiert. Demzufolge existieren für die gegebene Aufgabe keine lokalen Lösungen im Sinne der Definition 4.15.

Wegen Satz 4.13 gibt es jedoch für die untersuchte Aufgabe eine pessimistische Lösung, und zwar  $t_{\text{pess}} = 0$  mit den Realisationen  $x_{\text{pess}}^{(1)} = \sqrt{3}$  und  $x_{\text{pess}}^{(2)} = -\sqrt{3}$ .

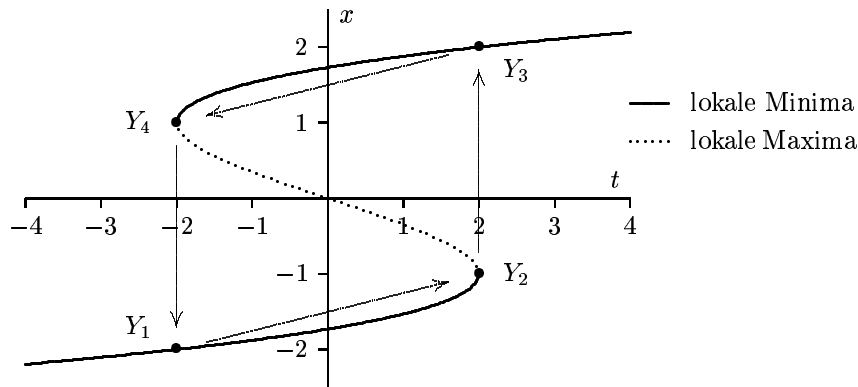


Abbildung 4: Lokale Extrempunkte der Aufgabe  $P(t)$  aus Beispiel 4.18 und möglicher Verlauf eines Pfadverfolgungsalgorithmus ohne Zyklenvermeidung

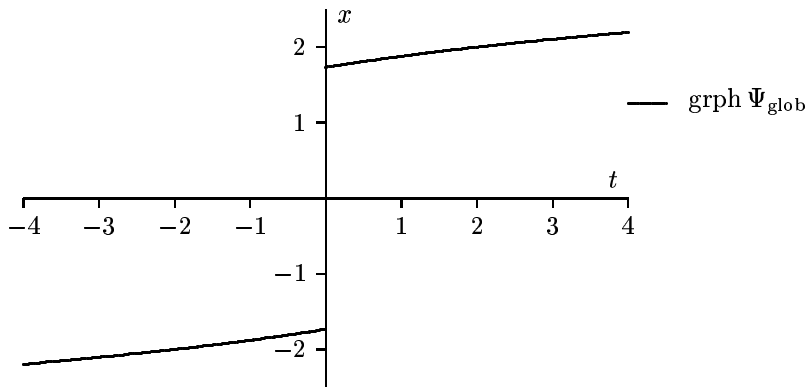
Desweiteren sei ohne Begründung mitgeteilt, dass die Parameterwerte  $\pm 2$  schwache optimistische Lösungen im Sinne der Definition 3.3 auf Seite 34 sind.

Eine wesentliche Feststellung mit Bezug auf die gestellte Aufgabe ist, dass aufgrund des Lemmas 4.12 eine globale optimistische Lösung im Sinne der Definition 4.14 existiert! Auch diese wollen wir nun noch bestimmen. Dazu ersetzen wir in  $f(x, t)$  lediglich den Wert  $t$  durch die implizite Darstellung der als stationäre Punkte infrage kommenden  $x$  und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - tx &= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - (x^3 - 3x)x \\ &= -\frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} = -\frac{3}{4}(x^4 - 2x^2) \\ &= -\frac{3}{4}[(x^2 - 1)^2 - 1]. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass bei Vorhandensein zweier lokaler Minima der Aufgabe  $P(t)$  derjenige  $x$ -Wert globales Minimum der unteren Ebene ist, für den das Minimum der Abstände zu den Werten 1 und  $-1$  maximal wird. Abbildung 5 veranschaulicht die entstehende Situation. Leicht identifiziert man dort die globale optimistische Lösung  $t_{\text{opt}} = 0$ , wiederum mit den gleichen Realisationen  $\pm\sqrt{3}$  wie die pessimistische Lösung bei Betrachtung der PMA  $\Psi_{\text{loc}}$ .

Wir stellen also fest, dass im Gegensatz zur herkömmlichen Optimierungsaufgabe  $\min\{f(x) \mid x \in M\}$ , in der globale Minima auch lokal optimal sind, diese Eigenschaft in der Zwei-Ebenen-Optimierung bei Verwendung des oben eingeführten lokalen Optimalitätsbegriffes nicht erfüllt ist. Wünschenswert wäre demzufolge ein etwas strengerer lokaler Optimalitätsbegriff, der diese Implikation zumindest für den Fall der optimistischen Strategie zulässt, welcher wegen seiner Min-Min-Struktur bezüglich der Zielfunktion der oberen Ebene in der Ersatzaufgabe (OPT) leichter handhabbar ist.

Abbildung 5: Globale Extrempunkte der Aufgabe  $P(t)$  aus Beispiel 4.18

Der sich im folgenden für stetige Punkt–Menge–Abbildungen  $M(t)$  tatsächlich als schwieriger herausstellende pessimistische Fall soll uns jetzt wenigstens noch eine Bemerkung wert sein. Es wird dem sich in Beispiel 4.18 vertieft habenden Leser nämlich nicht entgangen sein, dass  $t_{\text{opt}} = 0$  nicht nur globale *optimistische*, sondern gleichzeitig auch globale *pessimistische* Lösung der behandelten Aufgabe ist, obwohl  $\Psi_{\text{glob}}$  im Lösungspunkt nicht unterhalb stetig ist. Wir nehmen dieses Verhalten mit Freude zur Kenntnis, sollten aber nicht unterschlagen, dass diese Eigenschaft mehr oder minder dem Zufall zu verdanken ist. Für  $\bar{t} = 0$  als einzigem Punkt mit *zwei* bezüglich der global minimalen Interpretation der Aufgabe der unteren Ebene existierenden rationalen Reaktionen  $\bar{x}^{(1,2)} = \pm\sqrt{3}$  sind nämlich auch die zu untersuchenden Werte  $F(\bar{x}^{(1)}, \bar{t})$  und  $F(\bar{x}^{(2)}, \bar{t})$  der Zielfunktion der oberen Ebene identisch. Lassen wir nun in dieser Funktion Störungen derart zu, dass  $\tilde{F}(x, t) = F(x + \tau, t)$  betrachtet werden muss, dann sind für alle  $\tau \neq 0$  die Funktionswerte  $\tilde{F}(\bar{x}^{(1)}, \bar{t})$  und  $\tilde{F}(\bar{x}^{(2)}, \bar{t})$  voneinander verschieden, ohne dass sich auf den Parameterintervallen  $[-4, 0)$  und  $(0, 4]$  für betragsmäßig hinreichend klein gewähltes  $\tau$  das Monotonieverhalten von  $\tilde{F}$  von dem der Funktion  $F$  auf  $\text{grph } \Psi_{\text{glob}}$  unterscheidet. Es wird deshalb weiterhin Ziel des Followers sein, seinen Parameter so gut wie möglich gegen  $\bar{t} = 0$  zu steuern. Die Bewertungsfunktion  $\varphi_{\text{pess}}$  hat im Punkt  $\bar{t}$  den Wert

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) &= \sup_{\{t_k\} \rightarrow \bar{t}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi_{\text{pess}}(t_k) \\ &= \max\{(\tau - \sqrt{3})^2, (\tau + \sqrt{3})^2\} \end{aligned}$$

und ist dort für  $\tau \neq 0$  nicht unterhalb stetig. Eine globale pessimistische Lösung existiert dann nicht mehr. Dem Leser, der an dieser Stelle noch weiter ins Detail gehen will sei gesagt, dass diese Argumentation für  $\tau \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  gilt. Wird die Störung außerhalb dieses Intervalls gewählt, ändert sich das Monotonieverhalten von  $\tilde{F}$  auf  $\text{grph } \Psi_{\text{glob}}$  für genau eines der Intervalle  $[-4, 0)$  und  $(0, 4]$ . Dann existiert wieder eine globale pessimistische Lösung!

### 4.2.2 Motivation subglobaler Lösungen

Nun kommen wir also zum versprochenen Optimalitätsbegriff, der die optimistische Lösbarkeit unter den in (A2) formulierten Restriktionen für stetige Punkt-Menge-Abbildungen  $M(t)$  (d.h. unter den Voraussetzungen des Lemmas 4.12) garantiert und in der unteren Ebene ohne die Bestimmung globaler Minimumpunkte der parametrischen Aufgabe  $P(t)$  auskommt. Dazu muss lediglich eine bis jetzt noch nicht betrachtete Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi_{sg}$  eingeführt werden.

Die Überlegung im folgenden Problem diene uns als Motivation. Sie kann sogar anhand der Aufgabe aus 4.18 durchgeführt werden, da die topologische Struktur des Graphen von  $\Psi_{loc}$  in diesem Beispiel und in der sich anschließenden Argumentation identisch sind. Wir wollen jetzt jedoch eine möglichst allgemeine Form der Darstellung wählen, die unseres Erachtens eine größere Klarheit ausstrahlt. Diese scheint hier sehr erstrebenswert, da die auf dieser Untersuchung basierenden Definitionen wesentlich für das weitere Verständnis der Arbeit sind.

Wir betrachten dazu eine Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgabe, in der uns die Menge der lokalen Minimumpunkte des Problems der unteren Ebene explizit in Form von vom Parameter  $t$  abhängenden Funktionen und ihren entsprechenden Definitionsbereichen gegeben sind. Speziell sei ein Sachverhalt der Form

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_t \\ t &\in [a_1, a_4] \subseteq \mathbf{R} \\ x &\in \Psi_{loc}(t) \end{aligned}$$

gegeben, in dem die Punkt-Menge-Abbildung der lokalen Lösungen  $\Psi_{loc}$  der unteren Ebene  $\min_x \{f(x, t) \mid x \in M(t)\}$  durch

$$\Psi_{loc}(t) = \begin{cases} \{x_1(t)\} & t \in [a_1, a_2], \\ \{x_1(t), x_2(t)\} & t \in (a_2, a_3), \\ \{x_2(t)\} & t \in [a_3, a_4] \end{cases}$$

mit  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  dargestellt sei.  $x_1(\cdot)$  und  $x_2(\cdot)$  seien aber sogar auf den Intervallen  $[a_1, a_3]$  bzw.  $[a_2, a_4]$  definiert und dort auch stetig. Diese Kontinuitätsannahme gelte bzgl. der Variablen  $(x, t)$  ebenso für die beiden Zielfunktionen  $F(\cdot, \cdot)$  und  $f(\cdot, \cdot)$  in allen untersuchten Punkten.

Wir bezeichnen mit

$$P_1 = \bigcup_{t \in [a_1, a_3]} (x_1(t), t), \quad P_2 = \bigcup_{t \in (a_2, a_4]} (x_2(t), t)$$

die beiden Pfade der lokalen Minimumpunkte der parametrischen Aufgabe der unteren Ebene und mit

$$f_1(t) = f(x_1(t), t) \quad (t \in [a_1, a_3]), \quad f_2(t) = f(x_2(t), t) \quad (t \in [a_2, a_4])$$



die Werte der Funktion  $f(x, t)$  auf den Abschließungen dieser Pfade, jetzt jedoch nur noch in Abhängigkeit vom Parameter  $t$ . Die  $f_i(\cdot)$  sind wegen unserer Annahmen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.

Wir gehen desweiteren davon aus, dass bei der Durchführung einer auf Pfadverfolgung beruhenden Suche nach Lösungen der ZEOA gewährleistet sei, dass bei der Überprüfung des Weges  $P_1$  für  $t = a_3$  der Übergang zum lokalen Minimumspunkt  $x_2(a_3)$  mittels Abstiegsverfahren möglich ist. Damit sichern wir  $f_1(a_3) > f_2(a_3)$ . Analog soll auch  $f_1(a_2) < f_2(a_2)$  gelten.

Damit kann der Follower die sich anschließende, konkret für  $t_3 = a_3$  formulierte Überlegung anstellen:

„Da ich im Parameterwert  $a_3$  eine echte Verbesserung meiner stetigen Zielfunktion  $f$  durch einen Sprung auf den Pfad  $P_2$  erreiche, kann unter der Voraussetzung, dass  $(a_3, x_2(a_3))$  ein streng stabiler Minimumspunkt und  $(a_3, x_1(a_3))$  ein Häufungspunkt solcher Punkte ist, nur gelten:

*Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t \in U_\varepsilon(a_3) \cap (a_2, a_3]$  die Ungleichung  $f_1(t) > f_2(t)$  erfüllt ist.*

Im Sinne einer Suche nach möglichst guten (d.h. günstigstenfalls globalen) Lösungen meiner Aufgabe  $P(t)$  wäre es demzufolge besser, auf dieser Umgebung von  $a_3$  Punkte auf  $P_2$  als vom Leader zu berücksichtigende rationale Reaktionen zu wählen.

Sollte es mir also gelingen, mich bei einer Verfolgung des Pfades  $P_1$  bei wachsendem Parameter für hinreichend nahe bei  $a_3$  befindliches  $t$  von einer rein lokalen Betrachtung der Aufgabe  $P(t)$  der unteren Ebene zu lösen, könnte ein Sprung auf den Pfad  $P_2$  mit Verbesserung des Wertes meiner Zielfunktion sogar schon für einen Parameter  $\bar{t} < a_3$  möglich sein.“

Tatsächlich erscheint so ein Vorhaben umsetzbar, und zwar zumindest für den Fall, dass während des Lösungsvorgangs diejenigen Parameter-Intervalle, auf denen die Aufgabe  $P(t)$  mehr als eine lokal minimale Lösung besitzt, hinreichend oft untersucht werden (z.Bsp. also bei Verzyklung)!

Es soll nun ebenso wie im Beispiel 4.18 bei der Suche nach lokalen Lösungen der ZEOA der Verzyklungsfall eintreten: Startend mit dem Parameter  $t_1 = a_1$  und der eindeutig bestimmten rationalen Reaktion  $x_1(a_1)$  des Followers, ist es möglich, dass auf dem daraufhin verfolgten Pfad  $P_1$  die Zielfunktion  $F$  der oberen Ebene für wachsendes  $t$  streng monoton fällt und der Leader deshalb den von ihm vorgegebenen Parameter zu erhöhen versucht. Im Punkt  $t_3 = a_3$  angekommen, erfolgt durch den Follower der Sprung auf den Pfad  $P_2$ , auf dem sich die Funktion  $F$  nun für fallendes  $t$  als streng monoton fallend herausstellen könnte.  $t_2 = a_2$  bewirkt

erneut einen Sprung (diesmal von  $P_2$  nach  $P_1$ ) und wir erhalten Verzyklung auf den „Eckpunkten“  $(a_2, x_1(a_2))$ ,  $(a_3, x_1(a_3))$ ,  $(a_3, x_2(a_3))$  und  $(a_2, x_2(a_2))$ .

Nun kann der Follower sein Vorhaben, von der rein lokalen Betrachtung lokaler Minimumspunkte seiner Aufgabe abzurücken, folgendermaßen in die Tat umsetzen:

1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beginne die Pfadverfolgung mit dem Parameterwert  $t_1 = a_1$  im Punkt  $(x_1(t_1), t_1) \in P_1$ . Der Leader trachte laut Voraussetzung danach, bei Untersuchung des Pfades  $P_1$  das  $t$  so weit wie möglich zu erhöhen.
2. Bei Erreichen des Wertes  $t_3 = a_3$  (bzw. nach dessen Passieren, da die während eines Pfadverfolgungs-Algorithmus gewählten Parameterwerte diskret und deshalb im Allgemeinen ungleich  $t_3$  sind) erfolgt durch den Follower ein Übergang auf den Pfad  $P_2$ , auf dem der Leader seine Variable  $t$  zu verkleinern versucht.
3. Verkleinert sich der Parameter  $t$  auf einen Wert kleiner als  $a_3$ , so untersucht der Follower bei der Berechnung seiner rationalen Reaktion nunmehr *beide* ihm bekannten Pfade. Für  $t \in (a_2, a_3)$  antwortet er also mit einem Element aus der Menge

$$\Psi_{\text{sg}}(t) = \left\{ x_{i_0}(t) \mid f(x_{i_0}(t), t) = \min \left\{ f(x_i(t), t) \mid i \in \{1, 2\} \right\} \right\} \quad (27)$$

bevor für  $t \leq a_2$  wiederum nur eine Antwort auf  $P_1$  infrage kommt.

Nun wird die Funktion  $f_{\text{diff}}(t) := f_1(t) - f_2(t)$  betrachtet, die das Intervall  $[a_2, a_3]$  nach  $\mathbf{R}$  abbildet und wegen der Stetigkeit der  $f_i(\cdot)$  selbst stetig ist. Mit dieser Definition gilt in den Sprungpunkten  $f_{\text{diff}}(a_2) < 0$  und  $f_{\text{diff}}(a_3) > 0$ . Demzufolge existiert nach dem Satz von BOLZANO ein  $a' \in (a_2, a_3)$  mit  $f_{\text{diff}}(a') = 0$ . Schreiben wir dies mit den Funktionen  $f(\cdot, \cdot)$  und  $x_i(\cdot)$  nieder, so ergibt sich

$$f(x_1(a'), a') = f(x_2(a'), a') \quad (28)$$

und damit haben wir mit  $a'$  einen Parameterwert vorliegen, in dem die Zielfunktionswerte der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene übereinstimmen und somit  $\Psi_{\text{sg}}$  mehrelementig ist. In allen Punkten  $a' \in (a_2, a_3)$ , die die Gleichung (28) erfüllen, muss der Leader zur Bestimmung der Gütefunktion  $\varphi_{\text{opt/pess}}(a')$  seine vorgegebene Strategiewahl (optimistisch oder pessimistisch) einbeziehen.

In Abbildung 6 ist der erläuterte Sachverhalt graphisch dargestellt, wobei speziell der Fall illustriert wird, dass genau ein Parameterwert existiert, der (28) erfüllt.

Die Legende in Abbildung 6 zeigt jedoch, dass die PMA  $\Psi_{\text{sg}}$  auch für die nicht im Intervall  $(a_2, a_3)$  befindlichen Parameter definiert sein soll. Dies kann schnell

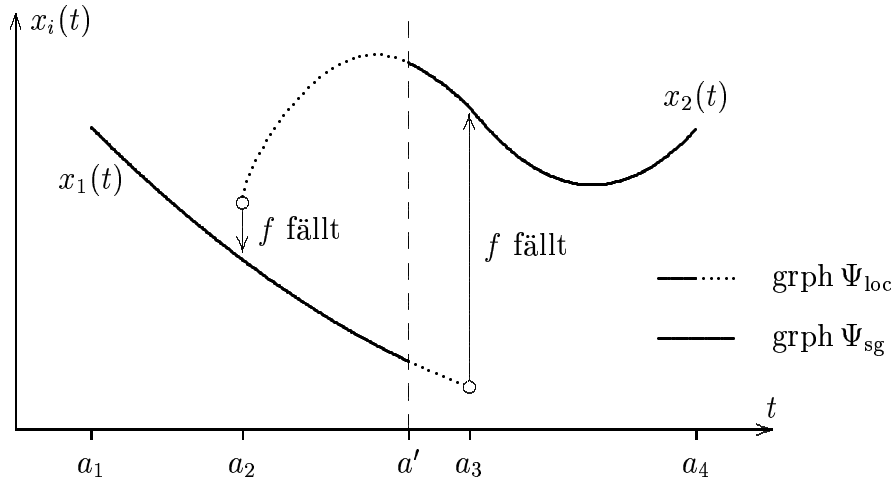


Abbildung 6: Motivation subglobaler Lösungen

erreicht werden. Definieren wir nämlich mit

$$I(t) = \begin{cases} \{1\} & t \in [a_1, a_2] \\ \{1, 2\} & t \in (a_2, a_3) \\ \{2\} & t \in [a_3, a_4] \end{cases}$$

die Menge derjenigen Indizes  $i$ , für die die Aufgabe  $P(t)$  ein lokales Minimum auf dem Pfad  $P_i$  besitzt, so werde einfach

$$\Psi_{\text{sg}}(t) = \left\{ x_{i_0}(t) \mid f(x_{i_0}(t), t) = \min \{ f(x_i(t), t) \mid i \in I(t) \} \right\} \quad (29)$$

gesetzt, was für  $t \in (a_2, a_3)$  sofort  $I(t) = \{1, 2\}$  und damit den Spezialfall (27) ergibt.

Desweiteren darf der Leser hoffen, dass das für unsere modifizierte PMA  $\Psi$  gewählte Subskript „sg“ schon die bei der Suche nach subglobalen Lösungen zugrunde zulegende Punkt–Menge–Abbildung ist. Dies ist in der Tat so, bedarf jedoch ohne Zweifel noch einer mathematischen Präzisierung.

### 4.2.3 Definition der subglobalen Lösungen

Das wesentlichste Kriterium, welches subglobale Lösungen von globalen oder lokalen Lösungen unterscheidet, ist die verwendete Punkt–Menge–Abbildung  $\Psi_{\text{sg}}$ . Dieser soll deshalb unser Hauptaugenmerk gelten. Ein erster Versuch dazu findet sich in [34], wobei wir uns hier um eine etwas allgemeinere Formulierung bemühen werden. Später wird allerdings tatsächlich noch der in [34] speziell untersuchte Fall  $m = 1$ , d.h.  $T \subseteq \mathbf{R}$  behandelt werden. Dann sind Vereinfachungen und auch

gewisse Generalizitätsaussagen möglich, die die Pfadverfolgung bei der Suche nach subglobalen Lösungen überhaupt erst praktikabel erscheinen lassen.

Zu Beginn erfolgen einige Festlegungen, die in ihrer Gesamtheit leider erst in einem größeren Zusammenhang motiviert werden können.

**Definition 4.19 (Pfad lokaler Minima)** Sei  $\bar{T} \subseteq \text{dom } M \subseteq T$  eine zusammenhängende Menge und  $\bar{x} : \bar{T} \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine stetige Funktion. Dann heißt das Funktion-Menge-Paar  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  ein Pfad lokaler Minima (PLM), falls für alle  $\bar{t} \in \bar{T}$  die Eigenschaft  $(\bar{x}(\bar{t}), \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  erfüllt ist. Die Funktion  $\bar{x}(\cdot)$  heißt Auswahlfunktion im PLM  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$ .

In dieser Formulierung beschreibt also  $\bar{x}(\cdot)$  eine Funktion, die jedem Element aus  $\bar{T}$  einen Punkt aus dem Abschluss der Menge der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene zuordnet. Da  $\bar{x}(\cdot)$  stetig und  $\bar{T}$  zusammenhängend sein sollen, ist

$$\text{grph } \bar{x} := \bigcup_{t \in \bar{T}} (\bar{x}(t), t)$$

eine zusammenhängende Komponente von  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  mit paarweise verschiedenen Parameterwerten. Wir bezeichnen des weiteren mit

$$\text{dom } \bar{x} := \bar{T}$$

die Domäne bzw. den Definitionsbereich des PLM  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$ .

Es ist klar, dass jedes  $(x^*, t^*) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  und speziell natürlich jedes  $(x^*, t^*) \in \Sigma_{\text{loc}}$  in wenigstens einem PLM enthalten ist, und zwar trivialerweise in  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  mit  $\bar{T} = \{t^*\}$  und  $\bar{x}(t^*) = x^*$ .

Nachdem wir soeben lokale Minima zu Pfaden zusammengefasst haben, betrachten wir jetzt auch noch Mengen solcher PLM:

**Definition 4.20 (PLM-Überdeckung)** Es sei  $\mathcal{T} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (x_\gamma(\cdot), T_\gamma)$  eine Menge von PLM der Aufgabe (MMZO). Dann heißt  $\mathcal{T}$  eine PLM-Überdeckung, falls für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$ , für die eine lokal minimale Lösung der unteren Ebene existiert, ein  $\gamma \in \Gamma$  existiert, so dass  $\bar{t}$  in  $T_\gamma$  und  $(x_\gamma(\bar{t}), \bar{t})$  in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten sind.

Solch eine Überdeckung wird demzufolge dadurch charakterisiert, dass für jeden in der unteren Ebene zulässigen Parameterwert  $\bar{t}$ , der eine lokal minimale Lösung der unteren Ebene besitzt, wenigstens ein lokales Minimum  $\bar{x}$  der Aufgabe  $P(\bar{t})$  existiert, so dass  $(\bar{x}, \bar{t})$  im Graphen wenigstens eines der betrachteten Pfade lokaler Minima enthalten ist. Deshalb muss keineswegs jedes lokale Minimum der unteren Ebene in einem PLM enthalten sein. Ist also mit

$$\text{grph } \mathcal{T} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \text{grph } x_\gamma$$

der Graph der Überdeckung  $\mathcal{T}$  definiert, gilt offenbar nicht notwendigerweise  $\Sigma_{\text{loc}} \subseteq \text{grph } \mathcal{T}$ . Lediglich  $\text{grph } \mathcal{T} \subseteq \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  ist stets erfüllt.

Es sei

$$\Gamma_{\text{loc}}(t) := \{\gamma \in \Gamma \mid (x_\gamma(t), t) \in \Sigma_{\text{loc}}\}$$

die Indexmenge derjenigen PLM, in denen der Wert der Funktion  $x_\gamma(\cdot)$  ein lokales Minimum der unteren Ebene repräsentiert.

Nun kann die Menge der subglobalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene definiert werden.

**Definition 4.21 (Subglobale Lösungen)**  $\mathcal{T} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (x_\gamma(\cdot), T_\gamma)$  sei eine PLM-Überdeckung. Dann heißt die Punkt-Menge-Abbildung

$$\Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) := \arg \min_x \{f(x, \bar{t}) \mid x = x_\gamma(\bar{t}), \gamma \in \Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})\} \quad (30)$$

die Menge der subglobalen Lösungen von  $P(\bar{t})$ .

Analog heißen die Lösungen von (MMZO) bei Verwendung der PMA  $\Psi \equiv \Psi_{\text{sg}}$  subglobale Lösungen der Zwei-Ebenen-Aufgabe.

Subglobale Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene entstehen also auf die folgende Art und Weise:

1. Bestimme eine PLM-Überdeckung  $\mathcal{T} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (x_\gamma(\cdot), T_\gamma)$  für die gegebene Aufgabe der unteren Ebene.
2. Suche für jedes  $\bar{t} \in \text{dom } M$  die Menge  $\Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})$ .
3. Wähle aus  $\Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})$  eines derjenigen  $\bar{\gamma}$  und das zugehörige  $\bar{x}$ , mit denen die Zielfunktion der unteren Ebene ihren minimalen Wert gemäß (30) annimmt.

Wir bemerken überdies, dass für festes  $\bar{t} \in \text{dom } M$  unter der Voraussetzung der Existenz eines minimalen Arguments in (30) offenbar  $f(x, \bar{t})$  konstant für alle  $x \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  ist. Dies berechtigt uns, die Funktion

$$f_{\text{sg}}(\bar{t}) := f(x, \bar{t}), \quad x \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$$

zu betrachten, welche wohl-definiert ist und subglobaler Minimalwert der Aufgabe der unteren Ebene heißen soll. Offenbar gilt

$$f_{\text{sg}}(\bar{t}) := \min_{\gamma} \{f(x_\gamma(\bar{t}), \bar{t}) \mid \gamma \in \Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})\}. \quad (31)$$

Darauf aufbauend sei mit

$$\Gamma_{\text{sg}}(\bar{t}) := \{\gamma \in \Gamma_{\text{loc}}(\bar{t}) \mid f(x_\gamma(\bar{t}), \bar{t}) = f_{\text{sg}}(\bar{t})\}$$

die Indexmenge derjenigen Pfade einer PLM-Überdeckung bezeichnet, für die  $(x_\gamma(\bar{t}), \bar{t})$  subglobale Lösung dieser Aufgabe ist.

So leicht sich die Idee der subglobalen Lösungen formulieren lässt, so schwierig scheint ihre tatsächliche Nutzung ohne weitere Voraussetzungen zu sein. Insbesondere die folgenden Punkte sind als kritisch anzusehen:

**Überabzählbarkeit:** Bemühen wir uns darum, bei der Konstruktion einer PLM-Überdeckung nicht nur jeden *Parameter*, sondern tatsächlich jeden *lokal minimalen Punkt* der Aufgabe der unteren Ebene in einen Pfad lokaler Minima einzubeziehen, kann dazu eine Überdeckung mit unendlich oder sogar überabzählbar vielen PLM's notwendig sein. Dazu reicht es aus, einen Parameterwert  $\bar{t}$  zu haben, für den  $P(\bar{t})$  unendlich beziehungsweise überabzählbar viele Lösungen  $\bar{x}$  besitzt.

Neben der Schwierigkeit, solche Datenmengen zu verarbeiten, ist für dann möglicherweise unendliche Indexmengen  $\Gamma_{\text{loc}}$  die Existenz des in (30) geforderten Minimums nicht gesichert. Hier kann jedoch das Minimum nicht durch ein Infimum ersetzt werden, weil wir in der Tat dasjenige  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  benötigen, welches die subglobale Lösung der unteren Ebene realisiert. Überdies scheint es ganz allgemein kaum sinnvoll, von der Suche nach einem infimalen *Argument* zu sprechen, da dies naturgemäß stets auch minimales Argument ist.

Das Ziel, jeden Punkt aus  $\Sigma_{\text{loc}}$  mit einem PLM abzudecken, ist jedoch nicht generell unplausibel. Man wird es auf diese Weise nämlich schaffen, stets auch die *globalen* Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene zu betrachten.

**Eindeutigkeit:** PLM-Überdeckungen müssen nicht eindeutig sein. Der denkbar einfachste Fall tritt ein, wenn alle  $t \in \text{dom } M$  ( $\text{dom } M$  zusammenhängend) zwei lokal optimale Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  in der unteren Ebene erlauben und sich  $x_1(\cdot)$  und  $x_2(\cdot)$  bereits als stetig herausstellen. In diesem Fall wären dann zum Beispiel  $\mathcal{T}_1 = \{(x_1(\cdot), \text{dom } M)\}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \{(x_2(\cdot), \text{dom } M)\}$  und auch  $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  PLM-Überdeckungen im Sinne der Definition 4.20.

**Grenzen:** Das schwerwiegendste Problem ergibt sich angesichts der Tatsache, dass die in einer PLM-Überdeckung enthaltenen Pfade lokaler Minima (insbesondere die Grenzen deren Definitionsbereiche) in einer *numerisch verwertbaren* Form gespeichert werden müssen. Wie dies in höherdimensionalen Parameterräumen in vernünftiger Art und Weise geschehen soll, ist völlig unklar.

In Spezialfällen ist jedoch die Möglichkeit einer vernünftig zu handhabenden Speicherung von Pfaden lokaler Minima durchaus vorstellbar. In der *linearen* Zwei-

Ebenen-Optimierung könnte man zum Beispiel die Idee verfolgen, alle auftretenden Basismatrizen aufzuzählen und anhand der zu gewissen Lösungen gehörenden Stabilitätsintervalle *Inzidenzlisten* dieser Basismatrizen (und evtl. weiterer nützlicher Informationen) zu erzeugen. Daraus ergäbe sich die Möglichkeit, die benötigten Informationen über die sich ergebenden PLM bei Bedarf implizit zu rekonstruieren. Sehr hilfreich ist dabei die Tatsache, dass das der Zwei-Ebenen-Optimierung zugeordnete parametrische Optimierungsproblem im linearen Fall vollständig gelöst ist. Selbst für quadratische Aufgaben könnte eine solche Herangehensweise nicht unerhebliche Erfolge zeigen.

Neben den genannten Schwierigkeiten ist es überdies zweifelsohne wünschenswert, den Definitionsbereich  $\bar{T}$  von  $\bar{x}(\cdot)$  möglichst groß zu machen, um den Bereich der zulässigen Parameter „mit möglichst wenigen“ Pfaden lokaler Minima überdecken zu können:

**Definition 4.22 (Maximaler Pfad lokaler Minima)**  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  sei ein Pfad lokaler Minima. Ein solcher Pfad heißt *parametermaximal (MPLM)*, wenn für alle zusammenhängenden echten Obermengen  $\hat{T}$  von  $\bar{T}$  mit  $\bar{T} \subset \hat{T} \subseteq T$  und alle auf  $\hat{T}$  stetigen Abbildungen  $\hat{x}(t) : \hat{T} \rightarrow \mathbf{R}^n$ , die  $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$  auf  $\bar{T}$  erfüllen, ein  $\hat{t} \in \hat{T}$  existiert, für das das Paar  $(\hat{x}(\hat{t}), \hat{t})$  nicht in  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  enthalten ist.

Ein MPLM  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  ist demzufolge ein Pfad lokaler Minima, der *nicht* durch die Hinzunahme weiterer Punkte zu  $\bar{T}$  stetig auf eine zusammenhängende,  $\bar{T}$  echt enthaltende Parametermenge als PLM fortgesetzt werden kann. In denjenigen Häufungspunkten von  $\bar{T}$ , die selbst nicht in dieser Menge liegen, läßt sich laut dem folgenden Hilfssatz die Funktion  $\bar{x}(\cdot)$  überhaupt nicht stetig fortsetzen.

**Lemma 4.23** *Es sei  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  ein MPLM und  $t^* \in \text{cl } \bar{T} \setminus \bar{T}$ . Dann existiert keine Funktion  $\hat{x}(\cdot)$ , die  $\bar{x}(\cdot)$  stetig auf  $\bar{T} \cup \{t^*\}$  fortsetzt.*

**Beweis:** Wie in der Aussage formuliert sei  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  ein MPLM und  $t^* \in \text{cl } \bar{T} \setminus \bar{T}$ .

Wir bezeichnen mit  $F_\Lambda$  alle Folgen  $\{t_k^{(\lambda)}\}_{k=1}^\infty \subseteq \bar{T}$ , die gegen  $t^*$  konvergieren. Wenn ein  $x^* \in \mathbf{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}(t_k^{(\lambda)}) \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda \quad (32)$$

existiert, so ist mit  $\hat{x}(t^*) := x^*$  offenbar eine stetige Fortsetzung von  $\bar{x}(\cdot)$  auf der zusammenhängenden Menge  $\bar{T} \cup \{t^*\}$  gefunden. Es zeigt sich, dass das Paar  $(x^*, t^*)$  im Abschluss von  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten ist.

Für beliebiges  $\lambda_0 \in \Lambda$  gilt nämlich

$$(\bar{x}(t_k^{(\lambda_0)}), t_k^{(\lambda_0)}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}} \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N}$$

laut Definition und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{x}(t_k^{(\lambda_0)}), t_k^{(\lambda_0)}) = (x^*, t^*)$$

aufgrund der Wahl von  $x^*$ . Folglich ist  $(x^*, t^*)$  ein Häufungspunkt der abgeschlossenen Menge  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  und somit selbst in dieser Menge enthalten. Also ist  $(\hat{x}(\cdot), \hat{T})$  mit  $\hat{T} = \bar{T} \cup \{t^*\}$ ,  $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$  für  $t \in \bar{T}$  und  $\hat{x}(t^*) = x^*$  ein PLM auf der zusammenhängenden,  $\bar{T}$  echt enthaltenden Parametermenge  $\hat{T}$ . Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  ein MPLM ist.

Es kann deswegen kein  $x^*$  geben, welches (32) erfüllt. Dann ist aber  $\bar{x}(\cdot)$  im Punkt  $t^*$  nicht stetig fortsetzbar.  $\square$

Unglücklicherweise lässt sich nicht jeder Pfad lokaler Minima parametermaximal erweitern. Schauen wir uns zur Demonstration die Gegebenheiten im Beispiel 4.24 an, in dem die Menge der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene in ihrer topologischen Struktur der Auffahrt in einem Parkhaus mit zwei Etagen ähnelt:

**Beispiel 4.24 („Parkhaus-Problem“)** In Abbildung 7 sei mit  $\Omega$  die Menge der lokal optimalen Punkte einer Aufgabe der unteren Ebene bezeichnet, welche von den zwei Parametern  $t_1$  und  $t_2$  abhängt.  $A_1$  und  $A_2$  als Teilmengen des Randes von  $\Omega$  seien Strecken, wobei die Projektion von  $A_2$  auf die  $(t_1, t_2)$ -Ebene gerade  $A_1$  sei. Diese Projektion sei mit  $P_A$ , die Projektion von  $\Omega$  mit  $P_\Omega$  bezeichnet. Nun ist folgendes ersichtlich:

Es sei  $(x_1(\cdot), T_1)$  ein Pfad lokaler Minima mit  $\text{grph } x_1 = A_1$ . Er repräsentiere also die lokalen Minima auf der Strecke  $A_1$ . Offenbar gilt dann  $T_1 = P_A$  und  $x_1(T_1) \equiv 0$ . Wollen wir diesen PLM zu  $(x_2(\cdot), T_2)$  parametermaximal erweitern, so stellen wir fest, dass der Graph von  $x_2(\cdot)$  keinen Punkt der Menge  $A_2$  enthalten darf. Die hierzu gehörenden Parameterwerte stammen nämlich aus  $P_A$  und der Funktionswert soll dort bereits 0 sein, wohingegen Punkte aus  $A_2$  den Wert  $\alpha$  darstellen.

Tatsächlich entfällt sogar die Möglichkeit, dass irgendein Häufungspunkt von  $\text{grph } x_2$  in  $A_2$  enthalten ist. Gäbe es eine Folge  $\{(x_2(t_k), t_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq \text{grph } x_2$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_2(t_k), t_k) = (x^*, t^*) \in A_2$ , so kann für den Parameter-Anteil in diesem Grenzwert nur  $t^* \in P_A$  gelten. Da wegen  $T_1 = P_A$  der Parameterwert  $t^*$  bereits im Definitionsbereich von  $x_1$  enthalten ist und  $x_1(\cdot)$  und  $x_2(\cdot)$  auf  $P_A$  identisch sind, gilt

$$x_2(t^*) = 0. \quad (33)$$

Andererseits konvergiert der  $x$ -Teil der betrachteten Folge offenbar gegen  $\alpha$ . Soll  $x_2(\cdot)$  stetig sein, muss also

$$x_2(t^*) = \alpha > 0 \quad (34)$$



gelten. (33) und (34) konstituieren einen Widerspruch und die Existenz obiger Folge ist widerlegt.

Ein Pfad lokaler Minima, der  $(x_1(\cdot), T_1)$  mit  $T_1 = P_A$  und  $x_1(T_1) \equiv 0$  parametermaximal erweitert, muss also einen Graphen besitzen, der  $A_1$  enthält und die bezüglich Mengeninklusion größte zusammenhängende Teilmenge von  $\Omega \setminus A_2$  ist, die keinen Häufungspunkt in  $A_2$  hat. Eine solche Menge existiert jedoch nicht!

Der Vollständigkeit halber sei mitgeteilt, dass sehr wohl ein parametermaximaler Pfad lokaler Minima  $(x_3(\cdot), T_3)$  im untersuchten Beispiel existiert. Er ist durch

$$T_3 = P_\Omega \setminus P_A, \quad \text{grph } x_3 = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2)$$

gegeben. Da  $x_3(\cdot)$  auf  $P_A$  nicht definiert ist, treten die bei der Forderung nach Stetigkeit im ersten Teil der Betrachtungen sichtbar gewordenen Schwierigkeiten hier nicht auf. Dieser Pfad ist allerdings keine Erweiterung von  $(x_1(\cdot), T_1)$  wie weiter oben gefordert, da  $x_3(\cdot)$  dann gerade auch auf  $P_A$  erklärt und identisch  $x_1(\cdot)$  sein müsste.

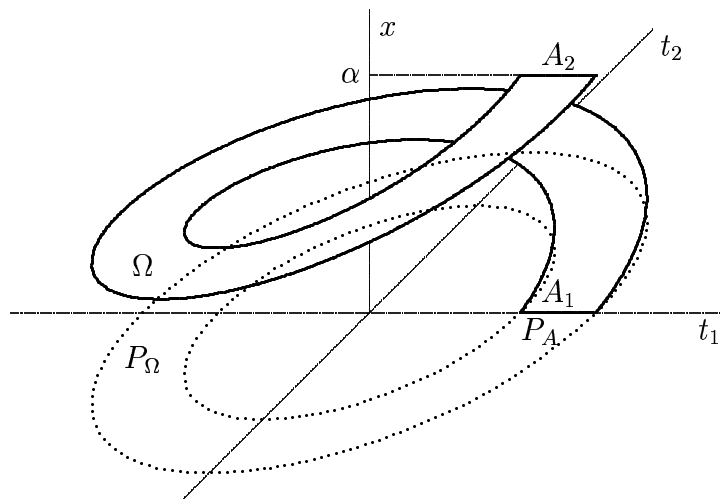


Abbildung 7: Ein nicht zu einem MPLM erweiterbarer Pfad lokaler Minima

Um im Folgenden wenigstens *einige* nutzbringende Aussagen formulieren zu können, wollen wir nun den Begriff der nichtdegenerierten Pfade lokaler Minima einführen. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass sich ihr Definitionsbereich als Abschluss dessen innerer Punkte beschreiben lässt (eine Idee, die unter anderem auch bei der Definition wesentlich aktiver Auswahlfunktionen in der Theorie der  $PC^1$ -Funktionen eine Rolle spielt, siehe [32]) und die Funktion  $x(\cdot)$  höchstens auf dem Rand dieser Menge *keine* lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene repräsentiert:

**Definition 4.25** Ein PLM  $(\bar{x}(\cdot), \bar{T})$  heißt echter Pfad lokaler Minima, falls für dessen Definitionsbereich  $\bar{T} = \text{cl}(\text{int } \bar{T})$  gilt und für alle  $t \in \text{int } \bar{T}$  der Funktionswert  $\bar{x}(t)$  ein lokales Minimum der Aufgabe der unteren Ebene darstellt. Eine PLM-Überdeckung, in der nur echte Pfade lokaler Minima vorkommen, soll dementsprechend echte PLM-Überdeckung genannt werden.

Wir wollen ab sofort generell nur noch echte PLM-Überdeckungen zulassen. Wenn also im folgenden von einem PLM bzw. einer PLM-Überdeckung die Rede ist, dann soll sich dieses stets auf einen *echten* Pfad lokaler Minima respektive eine *echte* PLM-Überdeckung beziehen.

Es gibt eine Aussage, die bei Erfüllung weiterer Bedingungen durch die PLM-Überdeckung die optimistische Lösbarkeit der Aufgabe (MMZO) bei Verwendung subglobaler Lösungen zur Folge hat.

**Satz 4.26** Für die die Annahme (A2) erfüllende Aufgabe (MMZO) sei durch  $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^k (x_i(\cdot), T_i)$  eine nur endlich viele Pfade lokaler Minima enthaltende PLM-Überdeckung im Sinne der Definition 4.25 gegeben. Für alle  $r \in \{1, \dots, k\}$  und jedes  $\bar{t} \in T_r$  gelte wenigstens eine der folgenden Aussagen:

1. Das Paar  $(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  ist enthalten in der Menge der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene und es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap \text{dom } M$  Teilmenge von  $T_r$  ist.
2. Es existiert ein von  $r$  und  $\bar{t}$  abhängiges  $s \in \{1, \dots, k\}$ , so dass  $\bar{t}$  in  $T_s$  enthalten ist und  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  gilt.

Dann ist die in Abhängigkeit von  $\mathcal{T}$  gemäß (30) bestimmte Punkt-Menge-Abbildung der subglobalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene oberhalb stetig auf  $\text{dom } M$ .

Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir drei Hilfssätze, deren Verwendung die Lesbarkeit des Beweises zu Satz 4.26 doch entscheidend verbessert. Die Richtigkeit dieser Lemmata könnte dem einen oder anderen Leser durchaus offensichtlich erscheinen, jedoch möchte sich der Autor dieser Arbeit beim Umgang mit Punkt-Menge-Abbildungen und deren Graphen jeglicher „Argumentation durch Anschauung“ enthalten.

Gegenstand ist zunächst die Wohldefiniertheit der PMA  $\Psi_{\text{sg}}$ :

**Lemma 4.27** Zur Aufgabe (MMZO) sei eine PLM-Überdeckung  $\mathcal{T}$  gewählt, die nur endlich viele Pfade lokaler Minima enthält. Dann sind  $\Gamma_{\text{loc}}(t)$  und  $\Psi_{\text{sg}}(t)$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$  nicht leer.

**Beweis:** Wie in der Aussage des Satzes 4.26 seien die PLM's in  $\mathcal{T}$  mit 1 bis  $k$  durchnummeriert. Dann existiert nach Definition 4.20 für jedes  $\bar{t} \in \text{dom } M$  ein  $r \in \{1, \dots, k\}$  mit  $(x_r(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$ . Also ist  $\Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})$  nicht leer.

Andererseits ist  $\Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$  eine Teilmenge von  $\{1, \dots, k\}$ , kann also stets nur endlich viele Elemente enthalten. Damit existiert das in (30) geforderte Argument des Minimums immer,  $\Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  ist folglich ebenfalls nicht leer.  $\square$

Man zeigt nun, dass für jeden Punkt aus dem Graphen von  $\Psi_{\text{sg}}$  die erste Bedingung aus Satz 4.26 erfüllt ist:

**Lemma 4.28** *Eine zur Aufgabe (MMZO) gewählte PLM-Überdeckung  $\mathcal{T}$  erfülle die Bedingungen des Satzes 4.26. Es sei  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  und es gelte  $\bar{x} = x_r(\bar{t})$ ,  $\bar{t} \in T_r$  ( $r \in \{1, \dots, k\}$ ). Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap \text{dom } M \subseteq T_r$ .*

**Beweis:** Existierte solch ein  $\varepsilon$  nicht, dann kann es sich beim betrachteten Punkt  $(\bar{x}, \bar{t})$  nur um einen handeln, für den in den Voraussetzungen von Satz 4.26 die zweite Eigenschaft erfüllt ist. Dann gibt es also ein  $s_1 \in \{1, \dots, k\}$  mit

$$f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_r(\bar{t}), \bar{t}), \quad \bar{t} \in T_{s_1}. \quad (35)$$

Da jedoch  $f(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  das subglobale Minimum der Aufgabe  $P(\bar{t})$  repräsentiert, kann (35) nur bedeuten, dass  $(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t})$  nicht in  $\Sigma_{\text{loc}}$  selbst, sondern nur im Abschluss dieser Menge enthalten ist. Auch dafür gilt deshalb die zweite Eigenschaft der Voraussetzungen von Satz 4.26. Wiederum schließen wir das Vorhandensein eines  $s_2 \in \{1, \dots, k\}$  mit

$$f(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}), \quad \bar{t} \in T_{s_2}$$

analog zu oben. Wir können nun diese Argumentation ad infinitum fortsetzen und erhalten eine Folge  $\{x_{s_l}(\bar{t})\}_{l=1}^\infty$  mit

$$f(x_{s_{l+1}}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_{s_l}(\bar{t}), \bar{t}), \quad \bar{t} \in T_{s_l}. \quad (36)$$

In der untersuchten Überdeckung sind aber nur endlich viele PLM's und darum auch nur endlich viele Indizes  $s_l$  enthalten (wobei wir uns sogar auf diejenigen Pfade beschränken, deren Definitionsbereich den Parameterwert  $\bar{t}$  enthält). Da mit  $s_l$  sofort auch  $f(x_{s_l}(\bar{t}), \bar{t})$  eindeutig bestimmt ist und dieser Funktionswert der Zielfunktion der unteren Ebene dann ebenfalls nur endlich viele verschiedene Werte annimmt, kann (36) also nur für endlich viele  $l \in \mathbf{N}$  gelten.

Aus obigem induktiven Schluss folgte allerdings die Behauptung, dass diese strenge Ungleichung für alle natürlichen Zahlen  $l$  gilt. Dies ist ein Widerspruch und damit ist die Annahme der Nichtexistenz des gesuchten  $\varepsilon > 0$  widerlegt.  $\square$

Den Abschluss der Vorbereitungen zum Beweis des Satzes 4.26 bildet die Behauptung, dass es bei der Bestimmung der Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi_{\text{sg}}$  unnötig ist zu unterscheiden, ob ein betrachteter Punkt aus  $\text{grph } \mathcal{T}$  lokaler Minimumpunkt der Aufgabe der unteren Ebene oder nur ein Punkt aus dem Abschluss von  $\Sigma_{\text{loc}}$  ist:

**Lemma 4.29** *Unter den Bedingungen des Satzes 4.26 gilt*

$$\Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) = \arg \min_x \{f(x, \bar{t}) \mid x = x_r(\bar{t}) \text{ mit } \bar{t} \in T_r, r \in \{1, \dots, k\}\} \quad (37)$$

für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$ .

**Beweis:** Wir definieren

$$\Psi'_{\text{sg}}(\bar{t}) = \arg \min_x \{f(x, \bar{t}) \mid x = x_r(\bar{t}) \text{ mit } \bar{t} \in T_r, r \in \{1, \dots, k\}\}$$

und damit ist „ $\Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) = \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$ “ die Behauptung des Lemmas. Der Beweis, dass  $\Psi'_{\text{sg}}(\cdot)$  für alle  $t \in \text{dom } M$  wohldefiniert und nicht leer ist, ist prinzipiell der gleiche wie der Nachweis der selben Eigenschaft für die PMA  $\Psi_{\text{sg}}(\cdot)$ .

Analog zur Definition des subglobalen Minimalwertes der Aufgabe  $P(\bar{t})$  sei unter Verwendung dieser PMA

$$f'_{\text{sg}}(\bar{t}) := f(x, \bar{t}), \quad x \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$$

festlegt. Wegen

$$\Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) = \arg \min_x \{f(x, \bar{t}) \mid x = x_r(\bar{t}) \text{ mit } \bar{t} \in T_r, r \in \Gamma_{\text{loc}}(\bar{t})\}$$

und  $\Gamma_{\text{loc}}(\bar{t}) \subseteq \{r \in \{1, \dots, k\} \mid \bar{t} \in T_r\}$  gilt offensichtlich  $f'_{\text{sg}}(\bar{t}) \leq f_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Deshalb ist auch

$$f(\hat{x}, \bar{t}) \leq f(\bar{x}, \bar{t}), \quad \forall \hat{x} \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t}), \bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) \quad (38)$$

richtig. Sei  $\bar{t} \in \text{dom } M$  beliebig gewählt.

- Wir nehmen ein  $\hat{x} \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$  und ein  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Angenommen, es wäre  $\hat{x}$  nicht in  $\Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  enthalten. Wegen (38) und der daraus resultierenden Tatsache, dass der Funktionswert in der unteren Ebene für festes  $t = \bar{t}$  im Punkt  $\hat{x}$  keinesfalls größer als in  $\bar{x}$  ist, kann dies nur bedeuten, dass  $(\hat{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$  gilt,  $\hat{x}$  mithin kein lokales Minimum der Aufgabe  $P(\bar{t})$  darstellt. Folglich muss  $(\hat{x}, \bar{t})$  die zweite Bedingung in den Voraussetzungen des Satzes 4.26 erfüllen. Also existiert ein Index  $r \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\bar{t} \in T_r$  und  $f(x_r(\bar{t}), \bar{t}) < f(\hat{x}, \bar{t})$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zu  $\hat{x} \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Damit ist die Annahme  $\hat{x} \notin \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  falsch und deshalb gilt

$$\Psi'_{\text{sg}}(\bar{t}) \subseteq \Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) \quad \forall \bar{t} \in \text{dom } M. \quad (39)$$

- Sei jetzt  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Analog zu oben nehmen wir an, dass  $\bar{x} \notin \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$  gelten würde. Nun sei  $\hat{x}$  ein Element aus  $\Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Die Annahme, dass dann in (38) Gleichheit erfüllt wäre, ergäbe sofort den Widerspruch  $\bar{x} \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Also gilt  $f(\hat{x}, \bar{t}) < f(\bar{x}, \bar{t})$ . Wiederum ist hier  $(\hat{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$  die einzige Möglichkeit,  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  erfüllt zu haben. Dieser Punkt erfüllt also Bedingung 2 in den Voraussetzungen des Satzes 4.26. Erneut existiert ein Index  $r \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\bar{t} \in T_r$  und  $f(x_r(\bar{t}), \bar{t}) < f(\hat{x}, \bar{t})$  im Widerspruch zu  $\hat{x} \in \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$ . Die Annahme  $\bar{x} \notin \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t})$  war also falsch und

$$\Psi_{\text{sg}}(\bar{t}) \subseteq \Psi'_{\text{sg}}(\bar{t}) \quad \forall \bar{t} \in \text{dom } M \quad (40)$$

gilt.

Aus (39) und (40) folgt die Behauptung.  $\square$

Es ist dem Autor bewusst, dass sich die beiden Teile des vorstehenden Beweises auch in einer „genau dann, wenn“-Form zusammengefasst erledigen lassen. Dieser Version mangelt es jedoch aufgrund einiger durchzuführender Fallunterscheidungen etwas an Klarheit.

Nun kommen wir zum Beweis der Aussage des Satzes 4.26:

**Beweis:** Wir führen unsere Argumentation in zwei Schritten: Wir betrachten eine beliebige, im Parameterteil gegen  $\bar{t} \in \text{dom } M$  konvergierende Folge  $\{(x_l, t_l)\}_{l=1}^{\infty} \subseteq \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  und zeigen erstens die Existenz eines Häufungspunktes ihres  $x$ -Teils und zum zweiten das Enthaltensein jedes dieser Akkumulationspunkte in  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ .

1. Zunächst wird gezeigt, dass  $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$  einen Häufungspunkt besitzt. Zu diesem Zweck notieren wir, dass für alle  $l \in \mathbf{N}$  ein (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmter) Index  $r(l)$  mit  $x_l = x_{r(l)}(t_l)$  existiert, d.h. der Punkt  $(x_l, t_l)$  ist im Graphen des PLM  $(x_{r(l)}(\cdot), T_{r(l)})$  enthalten. Da der Wertevorrat für die Funktion  $r : \mathbf{N} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  endlich ist, gibt es eine unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlen, für die  $r(\cdot)$  konstant ist. Es sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit bereits  $r(l) =: r$  konstant für alle  $l \in \mathbf{N}$ . Es gelte also  $x_l = x_r(t_l)$ . Nun ist dementsprechend  $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$  Teilmenge von  $T_{i(l)} = T_r$ . Da wir echte Pfade lokaler Minima betrachten wollen, ist  $T_r$  abgeschlossen und enthält insbesondere  $\bar{t}$  als Grenzpunkt dieser Folge. Die für Pfade lokaler Minima geforderte Stetigkeit der Funktion  $x_r(\cdot)$  impliziert  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_r(t_l) = x_r(\bar{t})$ . Wegen  $x_r(t_l) = x_l$  muss also auch der  $x$ -Teil der ursprünglich betrachteten Folge von Punkten aus dem Graphen von  $\Psi_{\text{sg}}$  gegen  $x_r(\bar{t})$  konvergieren. Damit besitzt  $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$  einen Häufungspunkt.

Anlässlich der weiteren Untersuchung der PMA  $\Psi_{\text{sg}}$  auf deren Oberhalbstetigkeit können wir uns also auf bereits konvergente Folgen aus  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  beschränken.

2. Wir untersuchen nun eine beliebige Folge  $\{(x_l, t_l)\}_{l=1}^{\infty}$  von Elementen des Graphen von  $\Psi_{\text{sg}}$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = \bar{t}$ . Es sei  $\bar{x}$  Grenzpunkt von  $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ . Es bleibt lediglich  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  zu zeigen. Dazu führen wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch.

Aufgrund der für PLM-Überdeckungen gültigen Definition ist offensichtlich  $\text{dom } M = \bigcup_{i=1}^k T_i$ . Für echte Überdeckungen sind die  $T_i$  abgeschlossen, was wegen der nur endlichen Vereinigung deshalb auch für  $\text{dom } M$  gilt. Wir bemerken also  $\bar{t} \in \text{dom } M$ .

Wegen der bereits weiter oben verwendeten Argumentation betreffend die endliche Anzahl zur Verfügung stehender PLM's existiert für  $\{t_l\}$  wenigstens ein  $r \in \{1, \dots, k\}$ , so dass es eine unendliche Teilfolge  $l' \subseteq \mathbf{N}$  mit  $t_{l'} \in T_r$  und  $x_{l'} = x_r(t_{l'})$  gibt. Erneut sei schon  $x_l = x_r(t_l)$  erfüllt, womit offenbar auch  $\bar{x} = x_r(\bar{t})$  gilt.

Wäre also  $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ . Mit der in Lemma 4.27 gezeigten Wohldefiniertheit von  $\Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  existiert auch  $f_{\text{sg}}(\bar{t})$  und offenbar gilt dann  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) < f(\bar{x}, \bar{t})$ . Dann gibt es einen durch den Index  $s \in \{1, \dots, k\}$  bestimmten echten Pfad lokaler Minima mit

$$\bar{t} \in T_s, \quad (x_s(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}, \quad f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) = f_{\text{sg}}(\bar{t}).$$

Mithin gilt  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ . Wir verwenden die abkürzende Schreibweise  $\hat{x} := x_s(\bar{t})$ . Wegen  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) < f(\bar{x}, \bar{t})$  ist auch  $f(\hat{x}, \bar{t}) < f(\bar{x}, \bar{t})$ .

Wegen Lemma 4.28 lässt sich nun ein  $\varepsilon > 0$  finden, so dass  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap \text{dom } M$  Teilmenge von  $T_s$  ist. Da also  $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$  gegen  $\bar{t}$  konvergiert und per definitionem Teilmenge von  $\text{dom } M$  ist, gilt ab einem hinreichend großen Index  $l_0 \in \mathbf{N}$  die Aussage  $\{t_l\}_{l=l_0}^{\infty} \subseteq T_s$ , was nach Weglassung der  $l_0 - 1$  führenden Glieder dieser Folge ohne Einschränkung der Allgemeinheit sofort  $\{t_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq T_s$  erlaubt.

Nunmehr sind die nur noch vom Parameterwert abhängigen Funktionen

$$f_r(t) := f(x_r(t), t)$$

und

$$f_s(t) := f(x_s(t), t)$$

für alle  $t \in \{t_l\}$  definiert und aufgrund der Stetigkeit sowohl von  $x_r(\cdot)$  und  $x_s(\cdot)$  als auch von  $f(\cdot, \cdot)$  selbst stetig. Man sieht leicht, dass  $f_r(\bar{t}) = f(\bar{x}, \bar{t})$  und  $f_s(\bar{t}) = f(\hat{x}, \bar{t})$  ist. Wir haben also  $f_r(\bar{t}) > f_s(\bar{t})$ . Wegen  $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = \bar{t}$  gibt es einen hinreichend großen Index  $l_1 \in \mathbf{N}$ , so dass

$$f_r(t_l) > f_s(t_l) \quad \forall l \geq l_1$$

bzw.

$$f(x_r(t_l), t_l) > f(x_s(t_l), t_l) \quad \forall l \geq l_1$$

gilt. Diese Abschätzung und die in Lemma 4.29 gezeigte Eigenschaft (37) implizieren wegen  $\{t_l\} \subseteq T_r \cap T_s$  sofort  $x_r(t_l) \notin \Psi_{sg}(t_l)$ , der Wahl der Folge  $\{(x_l, t_l)\}_{l=1}^{\infty}$  widersprechend. Demzufolge war unsere Annahme,  $(\bar{x}, \bar{t})$  wäre nicht in  $\text{grph } \Psi_{sg}$  enthalten, falsch. Da die betrachtete Folge aus  $\text{grph } \Psi_{sg}$  beliebig sowie  $(\bar{x}, \bar{t})$  als irgendeiner ihrer Häufungspunkte gewählt waren, ist damit gezeigt, dass *jeder* Häufungspunkt *jeder* dieser Folgen ebenfalls in  $\text{grph } \Psi_{sg}$  liegt.

Aus diesen beiden Punkten folgt die Oberhalbstetigkeit von  $\Psi_{sg}$  und somit die Behauptung des Satzes 4.26.  $\square$

Schauen wir uns die beiden Bedingungen in Satz 4.26 an die Punkte, die auf den Graphen der endlich vielen PLM's liegen, genauer an, so stellen wir sofort fest, dass offenbar die erste stets für alle  $(\bar{x}, \bar{t}) = (x_r(\bar{t}), \bar{t})$  mit  $\bar{t} \in \text{int } T_r$  erfüllt ist. Es sei daran erinnert, dass wir echte Pfade lokaler Minima betrachten, die innere Punkte  $\bar{t}$  von  $T_r$  tatsächlich auf lokale Minimumspunkte von  $P(\bar{t})$  abbilden. Wir könnten uns hier also die Frage stellen, warum nicht die (sogar naheliegendere) Formulierung ...

„Für alle  $r \in \{1, \dots, k\}$  und alle  $\bar{t} \in \text{bd } T_r$  existiert ein von  $r$  und  $\bar{t}$  abhängiges  $s \in \{1, \dots, k\}$ , so dass  $\bar{t}$  in  $T_s$  enthalten ist und  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  gilt.“

... verwendet wurde, hätte sie doch außerdem den Beweis erheblich vereinfacht. Die Antwort hierauf ist einfach: Dazu müssen wir lediglich erkennen, dass *jeder* Randpunkt  $\hat{t}$  von  $\text{dom } M$  auch Randpunkt jedes Pfades lokaler Minima  $(x_r(\cdot), T_r)$  mit  $\hat{t} \in T_r$  ist, da in der Definition 4.19 gefordert war, das  $x_r(\cdot)$  stets auf einer Teilmenge von  $\text{dom } M$  erklärt ist. Unter Nutzung der „Alternativ-Formulierung“ müsste also unabhängig davon, ob  $(x_r(\hat{t}), \hat{t})$  weitere nützliche und verwertbare Eigenschaften hat, ein  $s_1 \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\hat{t} \in T_{s_1}$  und  $f(x_{s_1}(\hat{t}), \hat{t}) < f(x_r(\hat{t}), \hat{t})$  existieren. Da wieder  $\hat{t} \in \text{bd } T_{s_1}$  gilt, konstruiert man wie im Beweis zu Lemma 4.28 eine unendliche, streng monoton fallende Folge von Funktionswerten der Zielfunktion der unteren Ebene für festes  $t = \hat{t}$ , die Existenz der geforderten Überdeckung widerlegend. Nunmehr reift im aufmerksamen Leser die Erkenntnis, dass die entsprechend modifizierte Version des Satzes 4.26 für jedes Problem, in dem  $\text{dom } M$  Randpunkte enthält, die „Theorie der leeren Menge“ beschreibe.

Die sich nun anschließende Aussage ist unter Verwendung der zusammengetragenen Eigenschaften fast trivial:

**Satz 4.30** *Erfüllen (MMZO) und die PLM-Überdeckung  $\mathcal{T}$  die Voraussetzungen*

des Satzes 4.26, so existiert eine optimistische Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“} \\ t &\in \text{dom } M \\ x &\in \Psi_{\text{sg}}(t) \end{aligned}$$

mit  $M(t) = \{x \mid g_i(x, t) \leq 0 \ (i \in I), \ h_j(x, t) = 0 \ (j \in J)\}$ .

**Beweis:**  $F(\cdot, \cdot)$  ist auf der Menge  $\text{grph } M$  und damit auch auf deren Teilmenge  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  stetig.

Weiterhin existiert  $\Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in \text{dom } M$  als nichtleere Menge (siehe Lemma 4.27) und ist wegen der Endlichkeit der Anzahl der PLM's sicher endlichmächtig und damit kompakt.

Die in (A2) enthaltene Beschränktheit von  $\text{grph } M$  impliziert die Beschränktheit von  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ .

Im Beweis zu Lemma 4.8 wurde die Kompaktheit von  $\text{dom } M$  herausgearbeitet, selbiges gilt wegen  $\text{dom } M = \text{dom } \Psi_{\text{sg}}$  auch für den eigentlichen Definitionsbereich der Punkt-Menge-Abbildung der subglobalen Lösungen der unteren Ebene.

Damit erfüllt die in der Aussage erwähnte Aufgabe die Annahme (A1). Aus Satz 4.26 folgt die Oberhalbstetigkeit der PMA  $\Psi_{\text{sg}}$  auf  $\text{dom } M$ . Die Anwendung von Satz 2.6 auf Seite 23 zeigt die behauptete optimistische Lösbarkeit.  $\square$

Man wird sich für den allgemeinen mehrparametrischen Fall ziemlich stark einschränken müssen, um Aussagen zu erhalten, wann eine endliche Überdeckung mit echten Pfaden lokaler Minima, wie sie im Satz 4.26 gefordert war, existiert. Allenfalls in praktischer Hinsicht ist zur Durchführung eines Pfadverfolgungs-Algorithmus mit Sprüngen das folgende sehr einfache Resultat von Interesse:

**Satz 4.31** *Unter den Bedingungen des Satzes 4.26 sei  $\mathcal{T} = \bigcup_{r=1}^k (x_r(\cdot), T_r)$  eine nur endlich viele Pfade lokaler Minima enthaltende echte PLM-Überdeckung mit  $\text{grph } \mathcal{T} = \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ , d.h. die gewählten Pfade lokaler Minima sollen tatsächlich alle lokalen Minima und deren Häufungspunkte überdecken. Für alle  $r \in \{1, \dots, k\}$  und jedes  $\bar{t} \in T_r$  gelte eine der folgenden Aussagen:*

1. *Das Paar  $(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  ist enthalten in der Menge der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene und es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap \text{dom } M$  Teilmenge von  $T_r$  ist.*
2.  *$(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  ist kein lokales Minimum der Aufgabe der unteren Ebene.*



Dann ist die in Abhängigkeit von  $\mathcal{T}$  gemäß (30) bestimmte Punkt-Menge-Abbildung der subglobalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene oberhalb stetig auf  $\text{dom } M$ .

Leicht sieht man, dass im vorstehenden Satz die beiden Bedingungen 1. und 2. an die Punkte aus dem Graphen von  $\mathcal{T}$  einander ausschließen. Ist der zweite Punkt erfüllt, muss wegen der Überdeckung *aller* Elemente aus  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  ein (wiederum von  $\bar{t}$  und  $r$  abhängiger) Index  $s \in \{1, \dots, k\}$  existieren, so dass  $\bar{t}$  in  $T_s$  enthalten ist und  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_r(\bar{t}), \bar{t})$  gilt. Damit ist die Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes 4.26 gezeigt und Satz 4.31 somit bewiesen. Das eigentlich Interessante an dieser Formulierung ist die Tatsache, dass dieses  $s$  stets mit Hilfe eines geeigneten Abstiegsverfahrens (eines welches in stationären Punkten der Aufgabe  $P(\bar{t})$ , die keine lokalen Minimumpunkte sind, nicht abbricht) und somit mit lediglich lokalen Suchmethoden bestimmt werden kann.

Gleichwohl sollte man sich davor hüten, die Bedingungen im Satz 4.31 als im Allgemeinen erfüllt zu betrachten. Im Vorgriff sei der Leser bereits an dieser Stelle auf Punkte von B-Typ B verwiesen, die jedoch erst im folgenden Abschnitt definiert werden. Lediglich in Aufgaben, in denen die untere Ebene ein parametrisches Problem gänzlich *ohne* Nebenbedingungen ist, scheint die Nutzung dieses Satzes eine echte Alternative, wobei dann jedoch die in (A2) enthaltene Beschränktheit von  $\text{grph } M$  nicht mehr gegeben ist und gegebenenfalls andere, die Beschränktheit des Graphen von  $\mathcal{T}$  implizierende Eigenschaften der Aufgabe (z.Bsp. Konvexität) zu Rate gezogen werden müssen.

Sind Nebenbedingungen vorhanden, kommt man nicht umhin, sich über die topologische Struktur des Graphen der Punkt-Menge-Abbildung  $M$  und der lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene in einer Umgebung des aktuell untersuchten Punktes  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  klar zu werden. Diese Entscheidung ist in höherdimensionalen Parameterräumen alles andere als trivial und setzt einen teilweise recht hohen Abstraktionsgrad voraus. Insbesondere SIERSMA hat für kleine Dimensionen die Singularitäten einiger Funktionen spezieller Natur ermittelt und aufgezählt (siehe z.Bsp. SIERSMA [33]).

Die sich laut SIERSMA in solchen Räumen ergebenden Schwierigkeiten (aber beispielsweise auch der im „Parkhaus-Problem“ auftretende Effekt) sollen uns nun dazu bewegen, uns für den Rest der Arbeit mit dem eindimensionalen Fall zu beschäftigen.

#### 4.2.4 Der Spezialfall der einparametrischen unteren Ebene

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll uns nun der Fall  $m = 1$ , also die Abhängigkeit der parametrischen Aufgabe der unteren Ebene von nur einem reellen Parameter interessieren. Hierbei soll lediglich darauf eingegangen werden, wie sich die

im Zusammenhang mit subglobalen Lösungen gemachten Definition und Aussagen vereinfachen lassen.

**Pfade lokaler Minima** Eine ganz wesentliche und nützliche Eigenschaft beschränkter zusammenhängender Mengen des  $\mathbf{R}^1$  ist die Tatsache, dass es sich dabei stets um (möglicherweise nicht abgeschlossene) Intervalle handelt, deren Abschließungen sich einfach durch die Angabe eines unteren und eines oberen Randpunktes beschreiben lassen. Damit liegen die Grenzen der Definitionsbereiche der Pfade lokaler Minima in der einparametrischen ZEOA tatsächlich in einer numerisch verwertbaren Form vor.

Ist nun  $(x(\cdot), [t_1, t_2])$  mit  $t_1 < t_2$  und  $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbf{R}^m$  ein PLM, so ist lediglich noch die rechentechnische Aufbereitung der Funktion  $x(\cdot)$  ein nicht-triviales Problem. Im Laufe der numerischen Behandlung der entsprechenden Zwei-Ebenen-Aufgabe können jedoch mit der Bestimmung der Intervallgrenzen  $t_1$  und  $t_2$  zugleich die dabei gefundenen Funktionswerte  $x(\cdot)$  gespeichert und zur später notwendigen Interpolation genutzt werden. In der Praxis wird die Bestimmung eines solchen Pfades in groben Zügen folgendermaßen aussehen:

Man wählt einen Parameter  $\bar{t} \in T \subseteq \mathbf{R}$  und bestimmt eine lokal optimale Lösung  $\bar{x}$  der Aufgabe  $P(\bar{t})$ . Dieses Parameter-Lösungs-Paar kann als der degenerierte Pfad  $(x(\cdot), \{\bar{t}\})$  mit  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  interpretiert werden. Im Verlauf eines Pfadverfolgungsalgorithmus würde man nun den Wert des Parameters sukzessive erhöhen und dabei eine endliche, streng monoton wachsende Folge  $\{t_r^+\}_{r=1}^{r_{\text{umax}}}$  mit Elementen größer  $\bar{t}$  solange erzeugen, bis die gefundenen, in  $\Sigma_{\text{loc}}$  befindlichen Paare  $(x_{r_{\text{umax}}-1}, t_{r_{\text{umax}}-1}^+)$  und  $(x_{r_{\text{umax}}}, t_{r_{\text{umax}}}^+)$  nicht auf demselben Pfad lokaler Minima liegen. Analog verfährt man bei der Bestimmung einer Approximation der unteren Grenze des Definitionsbereichs von  $x(\cdot)$  durch Betrachtung einer streng monoton fallenden Folge  $\{t_r^-\}_{r=1}^{r_{\text{lmax}}}$  mit Elementen kleiner als  $\bar{t}$ . Im Ergebnis erhalten wir eine den Pfad lokaler Minima  $(x(\cdot), [t_1, t_2])$  approximierend beschreibende Datenstruktur in folgender Form:

$t_{\text{lmax}-1}^-$	$t_{\text{lmax}-2}^-$	$\cdots$	$t_2^-$	$t_1^-$	$\bar{t}$	$t_1^+$	$t_2^+$	$\cdots$	$t_{\text{umax}-2}^-$	$t_{\text{umax}-1}^-$
$x_{\text{lmax}-1}^-$	$x_{\text{lmax}-2}^-$	$\cdots$	$x_2^-$	$x_1^-$	$\bar{x}$	$x_1^+$	$x_2^+$	$\cdots$	$x_{\text{umax}-2}^-$	$x_{\text{umax}-1}^-$

$$T \subseteq [t_{\text{lmax}}^-, t_{\text{umax}}^+].$$

Wegen der Diskretheit der bei obigem Verfahren untersuchten Menge der Parameterwerte bedarf es insbesondere eines Kriteriums, welches die Entscheidung

zulässt, ob zwei in der Tabelle benachbarte Punkte  $(x_r^\pm, t_r^\pm)$  und  $(x_{r+1}^\pm, t_{r+1}^\pm)$  aus  $\Sigma_{\text{loc}}$  überhaupt durch einen Pfad lokaler Minima verbunden werden können. Auch sollte gesichert werden, dass beim Übergang von einem zum (im Sinne der beschriebenen Verfahrensweise) nächsten Parameterwert (zum Beispiel also von  $t_2^+$  zu  $t_3^+$ ) stets  $x(t_2^+)$  als Näherung für  $x(t_3^+)$  verwendet wird, scheint dies doch die einfachste und naheliegendste Möglichkeit, eine Vielzahl unnötiger Sprünge zu vermeiden.

**Parametermaximale PLM's** Unabhängig von der Tatsache, dass hinter dem eben erläuterten Ansatz zu einem Algorithmus offensichtlich bereits die Idee steckt, parametermaximale Pfade lokaler Minima zu bestimmen, haben einparametrische PLM's sogar die schöne Eigenschaft, sich *stets* parametermaximal erweitern zu lassen. Schwierigkeiten wie die im „Parkhaus-Problem“ beschriebene können also für  $m = 1$  nicht auftreten. Diese nach Ansicht des Autors keineswegs triviale Tatsache soll hier bewiesen werden.

Zur Festlegung der verwendeten Terminologie zunächst die ...

**Definition 4.32** Ein PLM  $(x_1(\cdot), T_1)$  heiÙe enthalten im PLM  $(x_2(\cdot), T_2)$ , falls  $\text{grph } x_1 \subseteq \text{grph } x_2$  gilt.

Leicht erschließt sich, dass  $(x_1(\cdot), T_1)$  genau dann in  $(x_2(\cdot), T_2)$  enthalten ist, wenn  $T_1 \subseteq T_2$  gilt und  $x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$  für alle  $\bar{t} \in T_1$  ist. In diesem Fall soll auch  $(x_2(\cdot), T_2)$  eine *Erweiterung* von  $(x_1(\cdot), T_1)$  heißen.

Wird nun die Erweiterung eines Pfades  $(x_0(\cdot), T_0)$  zum Pfad  $(x_\infty(\cdot), T_\infty)$  iterativ vorgenommen, werden wir eine Folge von einander enthaltenden PLM's in der Form

$$\text{grph } x_0 \subseteq \text{grph } x_1 \subseteq \text{grph } x_2 \subseteq \dots \subseteq \text{grph } x_i \subseteq \dots \subseteq \text{grph } x_\infty$$

erhalten. Falls ein zunächst unbekannter *parametermaximaler* Pfad lokaler Minima  $(x_\infty(\cdot), T_\infty)$  als End- bzw. Grenzpunkt dieser Iteration gesucht ist, ist es als problematisch einzuschätzen, dass bei einer praktischen Verfolgung dieser Idee die Bedingung  $\text{grph } x_i \subseteq \text{grph } x_\infty$  schwer überprüfbar ist. Es sei daran erinnert, dass im Beispiel 4.24 auf Seite 78 ein eindeutig bestimmter MPLM existiert, während man sich leicht überlegt, dass die parametermaximale Erweiterbarkeit der oben betrachteten Folge verlorenght, sobald für irgendein  $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  der Graph von  $x_i(\cdot)$  einen Punkt in  $A_1 \cup A_2$  bzw.  $T_i$  ein Element aus  $P_A$  enthält. Man sollte deshalb nicht erstaunt sein, wenn sich die parametermaximale Erweiterbarkeit im Allgemeinen nur unter verschärften Bedingungen garantieren lässt.

**Lemma 4.33** *Es sei  $(x_0(\cdot), T_0)$  ein Pfad lokaler Minima. Wenn für alle Folgen  $\{(x_i(\cdot), T_i)\}_{i=1}^\infty$  von PLM's mit*

$$\text{grph } x_{i-1} \subseteq \text{grph } x_i \quad (i = 1, \dots, \infty) \quad (41)$$

*die durch  $\text{grph } x_\infty := \bigcup_{i=0}^\infty \text{grph } x_i$  implizit gegebene Abbildung ebenfalls einen Pfad lokaler Minima repräsentiert, dann ist  $(x_0(\cdot), T_0)$  parametermaximal erweiterbar, also in einem MPLM enthalten.*

Dies ist leicht zu zeigen: Wäre  $(x_0(\cdot), T_0)$  nicht parametermaximal erweiterbar, dann gibt es eine der oben betrachteten Folgen derart, dass  $\text{grph } x_\infty$  keinen PLM darstellt. Soll so eine Folge jedoch laut Voraussetzung nicht existieren, dann muss  $(x_0(\cdot), T_0)$  also in einem parametermaximalen Pfad lokaler Minima enthalten sein.

Wir kommen nun zur wichtigsten Aussage dieses Unterabschnitts:

**Satz 4.34** *Für  $T \subseteq \mathbf{R}$  lässt sich jeder Pfad lokaler Minima parametermaximal erweitern.*

Im zugehörigen Beweis ist insbesondere von Interesse, welche Eigenschaft den  $\mathbf{R}^1$  gegenüber dem  $\mathbf{R}^m$  mit  $m \geq 2$  auszeichnet. Es ist dies die Existenz einer Ordnungsrelation, die es erlaubt, jede zusammenhängende Menge (Intervall) durch zwei Randpunkte zu beschreiben, die gleichzeitig obere und untere Schranke für die im Intervall enthaltenen Elemente sind. Die Menge der Randpunkte einer zusammenhängenden Teilmenge des  $\mathbf{R}^1$  ist also insbesondere stets endlich und diskret, womit die Überprüfung der Stetigkeit einer Funktion auf  $[a, b]$ , die diese Eigenschaft auf  $(a, b)$  bereits besitzt, durch simple Enumeration der Randpunkte erledigt werden kann.

Im Beweis begnügen wir uns mit der Betrachtung beschränkter Mengen. Er lässt sich jedoch auch für unbeschränkte Mengen führen.

**Beweis:** Es sei  $(x_0(\cdot), T_0)$  ein PLM mit  $\text{cl } T_0 = [a_0, b_0]$ , wobei für die Randpunkte  $-\infty < a_0 < b_0 < +\infty$  gelten soll.

Man betrachte eine beliebige unendliche Folge  $\{x_i(\cdot), T_i\}_{i=1}^\infty$  von PLM mit  $T_{i-1} \subseteq T_i$  und  $\text{grph } x_{i-1} \subseteq \text{grph } x_i$  ( $i = 1, \dots, \infty$ ). Wir zeigen, dass dann die durch den Graphen  $\text{grph } x_\infty := \bigcup_{i=0}^\infty \text{grph } x_i$  repräsentierte Punkt-Menge-Abbildung  $x_\infty(\cdot)$  eine stetige Punkt-Punkt-Abbildung, also wiederum ein PLM ist.

1. Leicht zeigt man die Einelementigkeit der Funktionswerte von  $x_\infty(\cdot)$ .

Gäbe es einen Parameter  $\bar{t} \in \mathbf{R}$ , so dass zwei voneinander verschiedene  $y_1$  und  $y_2$  mit  $\{(\bar{t}, y_1), (\bar{t}, y_2)\} \subseteq \text{grph } x_\infty$  existierten, müsste es aufgrund der Definition von  $\text{grph } x_\infty$  zwei ebenfalls voneinander verschiedene Indizes  $i_1$  und  $i_2$  mit

$x_{i_1}(\bar{t}) = y_1$  und  $x_{i_2}(\bar{t}) = y_2$  geben. O.B.d.A. sei  $i_1 < i_2$ . Da aufgrund der Transitivität der durch die Definition 4.32 gegebenen Relation dann  $(x_{i_1}(\cdot), T_{i_1})$  in  $(x_{i_2}(\cdot), T_{i_2})$  enthalten ist, sind sowohl  $(\bar{t}, y_1)$  als auch  $(\bar{t}, y_2)$  Elemente des Graphen von  $x_{i_2}(\cdot)$ . Wir haben deshalb  $x_{i_2}(\bar{t}) = y_1$  und  $x_{i_2}(\bar{t}) = y_2$  mit  $y_1 \neq y_2$  im Widerspruch zur Eigenschaft dieser Abbildung, laut Voraussetzung eine *Funktion* zu sein. Wir haben also bereits gezeigt, dass wir  $x_\infty(\cdot)$  als Funktion auffassen können.

2. Ebenso leicht zeigt man, dass der Definitionsbereich  $T_\infty$  von  $x_\infty(\cdot)$  gleich  $\bigcup_{i=0}^\infty T_i$  ist. Es ist nämlich  $\bar{t}$  offenbar genau dann in  $T_\infty$  enthalten, wenn es ein  $\bar{y}$  mit  $(\bar{t}, \bar{y}) \in \text{grph } x_\infty$  gibt. Dies ist äquivalent zur Existenz eines Index  $i_0 \in \mathbf{N}$  mit  $(\bar{t}, \bar{y}) \in \text{grph } x_{i_0}$  und dies gleichbedeutend mit  $\bar{t} \in \bigcup_{i=0}^\infty T_i$ .

3. Etwas mehr Mühe macht es zu zeigen, dass die Funktion  $x_\infty(\cdot)$  auf dem Innern ihres Definitionsbereiches  $T_\infty$  stetig ist:

Es sei  $\bar{t} \in \text{int } T_\infty$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass auch  $\bar{t} - \varepsilon$  und  $\bar{t} + \varepsilon$  im Innern von  $T_\infty$  und damit auch in  $T_\infty$  liegen. Folglich gibt es Indizes  $i_1, i_2 \in \mathbf{N}$ , so dass  $\bar{t} - \varepsilon \in T_{i_1}$  und  $\bar{t} + \varepsilon \in T_{i_2}$ . Wegen  $T_{i-1} \subseteq T_i$  gilt dann offenbar  $\bar{t} - \varepsilon \in T_{i_3}$  und  $\bar{t} + \varepsilon \in T_{i_3}$  mit  $i_3 := \max\{i_1, i_2\}$  und aufgrund der Zusammenhangseigenschaft der Mengen  $T_i$  ist sogar  $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \subseteq T_{i_3}$ . Die Funktion  $x_{i_3}(\cdot)$  ist auf  $T_{i_3}$  und damit insbesondere auf  $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon)$  stetig. Da  $x_\infty(\cdot)$  auf dieser offenen Menge mit  $x_{i_3}(\cdot)$  übereinstimmt, ist auch diese Funktion in  $\bar{t}$  stetig.

4. Also ist  $x_\infty(\cdot)$  eine auf  $\text{int } T_\infty$  stetige Funktion und kann (falls sie dort definiert ist) lediglich auf  $\text{rd } T_\infty$  (dem Rand von  $T_\infty$ ) Unstetigkeiten besitzen.

Es sei nun  $\text{int } T_\infty = (a, b)$ . Ist  $x_\infty(\cdot)$  in  $\bar{t} = b$  definiert, dann existiert ein Index  $i_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , so dass  $b \in T_{i_0}$  und  $x_{i_0}(\cdot)$  in  $b$  stetig für alle  $i \geq i_0$ . Als oberer Randpunkt von  $T_\infty$  hat  $b$  gleichzeitig die Eigenschaft, dass es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$T_\infty \cap U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b]$$

und

$$T_i \cap U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b] \quad (i \geq i_0)$$

gibt. Auf  $U_\varepsilon(b)$  sind also alle  $x_i(\cdot)$  für  $i \geq i_0$  und  $x_\infty(\cdot)$  identisch, d.h. sie sind für dieselben Argumente definiert und haben dort wegen

$$\text{grph } x_{i_0} \subseteq \text{grph } x_{i_0+1} \subseteq \dots \subseteq \text{grph } x_\infty$$

die gleichen Funktionswerte. Da die  $x_i(\cdot)$  ( $i \geq i_0$ ) im Punkt  $b$  stetig sind und auf einer offenen Umgebung dieses Arguments mit  $x_\infty(\cdot)$  übereinstimmen, ist damit auch die Stetigkeit letzterer Funktion in  $\bar{t} = b$  gezeigt. Völlig analog zeigt man die Stetigkeit von  $x_\infty(\cdot)$  im Punkt  $a$ , falls die Funktion dort erklärt ist.

Also ist für alle betrachteten PLM-Folgen die (41) erfüllen, die damit definierte Abbildung  $x_\infty(\cdot)$  stetig. Da die Graphen der  $x_i(\cdot)$  Teilmengen von  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ , gilt das auch für deren Vereinigungsmenge  $\text{grph } x_\infty$ . Mit Anwendung von Lemma 4.33 ergibt sich sofort die Behauptung des Satzes.  $\square$

## 5 Einparametrische Zwei-Ebenen-Aufgaben

Dieser Abschnitt soll sich nun mit dem einparametrischen Fall  $T \subseteq \mathbf{R}$  beschäftigen. Es wird also die Aufgabe der unteren Ebene

$$\begin{aligned} f(x, t) &\rightarrow \min_x \\ g_i(x, t) &\leq 0 \quad i \in I = \{1, \dots, p\} \\ h_j(x, t) &= 0 \quad j \in J = \{1, \dots, q\}, \end{aligned} \quad P_1(t)$$

betrachtet werden, in der die Menge  $T$  der zulässigen Parameterwerte eine Teilmenge des  $\mathbf{R}^1$  ist, die wir im folgenden als zusammenhängend und kompakt annehmen wollen, d.h.  $T = [a, b]$  mit  $-\infty < a < b < +\infty$ .

Das Problem

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„} \min_{t \in [a, b]} \text{“} \\ x &\text{ löst } P_1(t) \end{aligned} \quad (\text{EZO})$$

ist dann die untersuchte Zwei-Ebenen-Aufgabe.

Einparametrische Probleme haben eine herausragende Bedeutung bei der Behandlung von Optimierungsaufgaben unter Verwendung des Einbettungsprinzips. Hierbei verbindet man eine schwierig zu lösende Aufgabe  $A_1$  mit einer Aufgabe  $A_0$  mit bekannter oder leicht zu bestimmender Lösung durch die Aufgabe  $P_1(t)$  so, dass  $P_1(0) \equiv A_0$  und  $P_1(1) \equiv A_1$  gilt. Man löst nun  $P_1(0)$  und verfolgt den Verlauf der lokalen oder (soweit möglich) globalen Minima für wachsenden und gegen 1 gehenden Parameter  $t$ . Findet man auf diese Weise ein Minimum der Aufgabe  $P_1(1)$ , so hat man das schwerere Problem  $A_1$  gelöst. Leider kann nicht garantiert werden, dass es eine auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetige Funktion  $x(t)$  mit  $x(t) \in \arg \min P_1(t)$  gibt, die zwei wenigstens lokal optimale Lösungen  $x(0)$  von  $A_0$  und  $x(1)$  von  $A_1$  mit einem zusammenhängenden Pfad verbindet.

Obwohl dieses Anwendungsgebiet der einparametrischen Optimierungsaufgaben im Rahmen der Behandlung von Zwei-Ebenen-Aufgaben keine allzu große Rolle spielt, wollen wir diesen Fall gesondert untersuchen. Die Analyse der Problemstellung  $P_1(t)$  ist nämlich so weit fortgeschritten, dass interessante und teilweise sogar recht anschauliche Algorithmen für (EZO) angegeben werden können.

An einigen Stellen der folgenden Passagen treten die Formulierungen „für fast alle“ und „mit Wahrscheinlichkeit Eins“ auf. Die Verwendung dieser Begriffe setzt natürlich die Definition des verwendeten Maßes (naheliegenderweise das Lebesgue-Maß) bzw. Wahrscheinlichkeitsbegriffes voraus. Wir beschränken uns auf zwei sehr einfache Spezialfälle, die die Einführung eines die notwendigen Axiome erfüllenden Wahrscheinlichkeitsmaßes erübrigen, sich im weiteren jedoch als ausreichend herausstellen werden.

Ein  $n$ -Würfel  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  der Kantenlänge  $\delta > 0$  ist das Mengenprodukt

$$C = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

wobei  $I_i = [a_i, a_i + \delta]$  jeweils abgeschlossene Intervalle sein. Das Maß von  $C$  ist dann  $\kappa(C) = \delta^n$ .

**Definition 5.1** Eine Menge  $X \subseteq \mathbf{R}^n$  heißt Menge vom Maß Null, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Überdeckung von  $X$  mit  $n$ -Würfeln existiert, so dass die Summe deren Maße kleiner als  $\varepsilon$  ist.

**Definition 5.2** Eine Eigenschaft  $\mathbf{H} : \mathbf{R}^n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$  heißt erfüllt für fast alle  $x \in \mathbf{R}^n$  oder erfüllt mit Wahrscheinlichkeit Eins, falls die Menge

$$X_f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{H}(x) = \text{falsch}\}$$

aller Elemente des  $\mathbf{R}^n$ , für die die Eigenschaft nicht gilt, das Maß Null hat.

Besondere Aufmerksamkeit soll einer speziellen Klasse des Problems  $P_1(t)$  gewidmet werden, nämlich der Menge der sogenannten generischen einparametrischen Optimierungsaufgaben. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sich alle verallgemeinerten kritischen Punkte in fünf Klassen einteilen lassen. Weiterhin ist die Menge der generischen Probleme unter Verwendung einer geeigneten Topologie offen und dicht in der Menge aller einparametrischen Optimierungsaufgaben mit  $q < n$ , weswegen sich jedes nicht-generische Problem mit einer kleinen Störung mit Wahrscheinlichkeit Eins in ein generisches transformieren lässt.

Eines der wichtigsten Werkzeuge zur theoretischen Untermauerung dieser Idee ist die Untersuchung, unter welchen Bedingungen  $0_{n+p+q}$  (das Nullelement des

$\mathbf{R}^{n+p+q}$ ) ein Regulärwert der Abbildung  $\mathcal{H} : \mathbf{R}^{n+1+p+q} \rightarrow \mathbf{R}^{n+p+q}$  mit

$$\mathcal{H}(x, t, y, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla_x f(x, t) + \sum_{i=1}^p y_i^+ \nabla_x g_i(x, t) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla_x h_j(x, t) \\ \hline y_1^- - g_1(x, t) \\ \vdots \\ y_p^- - g_p(x, t) \\ \hline h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_q(x, t) \end{pmatrix}$$

ist, wobei  $y^+ := \max\{y, 0\}$  und  $y^- := \min\{y, 0\}$  für alle reellen Zahlen  $y$  sei. Über die Äquivalenz des Gleichungssystems  $\mathcal{H} = 0_{n+p+q}$  und des Karush–Kuhn–Tucker–Systems sowie die Frage, wie aus Lösungen des einen Lösungen des anderen werden, wird in der Literatur hinlänglich berichtet (z.Bsp. in [11], [30]). Aufgrund mangelnder Offensichtlichkeit sei hier wenigstens auf

$$y_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } g_i(x, t) = 0, \\ g_i(x, t) & \text{falls } g_i(x, t) < 0 \end{cases}$$

hingewiesen. Soll nun das oben genannte Nullelement auf Regularität untersucht werden, sind die Ableitung von  $\mathcal{H}$  und damit bereits die zweiten Ableitungen von  $f(x, t)$ ,  $g_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und  $h_j(x, t)$  ( $j = 1, \dots, q$ ) vonnöten. Ein darüber hinausgehend verfolgter Ansatz, für die KKT–Punkte nun auch noch das Erfülltsein der Bedingung (SSOC) zu verifizieren und erneut mit Wahrscheinlichkeit Eins zu garantieren, setzt dann wegen der Behandlung der zweiten Ableitung der Lagrange–Funktion sogar die Existenz aller dritten Ableitungen der in  $P_1(t)$  auftretenden Funktionen voraus.

Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt voraussetzen, dass

$$\begin{aligned} f &\in C^3(\mathbf{R}^n \times T, \mathbf{R}), \\ G = (g_1, \dots, g_p) &\in C^3(\mathbf{R}^n \times T, \mathbf{R}^p) \end{aligned}$$

und

$$H = (h_1, \dots, h_q) \in C^3(\mathbf{R}^n \times T, \mathbf{R}^q)$$

gelten.

Eine Zusammenfassung der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten findet sich bei HIRSCH ([15]), wobei im Hinblick auf „generische Eigenschaften“ insbesondere das sich mit dem Lemma von SARD auseinandersetzende Kapitel 3 über die Transversalität von Interesse ist.



## 5.1 Die generischen Typen

JONGEN, JONKER und TWILT haben in den 80er Jahren die topologische Struktur degenerierter kritischer Punkte in der einparametrischen Optimierung untersucht (siehe [17]). Wichtigstes Ergebnis ihrer Forschungen war die Klasse  $\mathcal{F}^{**}$  der generischen einparametrischen Probleme. In diesen Aufgaben haben die verallgemeinerten kritischen Punkte die Eigenschaft, dass sie sich genau einer von fünf Kategorien zuordnen lassen.

Ausgangspunkt war die Überlegung, dass in parametrischen Aufgaben, in denen sich eine lokale Minimumstelle  $x_1$  von  $P(t_1)$  nicht mit einer lokalen Minimumstelle  $x_2$  von  $P(t_2)$  (o.B.d.A.  $t_1 < t_2$ ) durch einen stetigen Pfad  $x(t)$  mit  $x(t) \in \text{arglocmin} P(t)$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  verbinden lässt, Stellen existieren müssen, in denen degenerierte oder degenerierte kritische Punkte auftreten. Ist nun  $[t_1, t_2]$  gerade jenes Intervall, an dessen Randpunkten der Pfad  $x(t)$  endet, dann sind unter der Voraussetzung  $\{t_1, t_2\} \in \text{int } T$  diese Punkte keine nichtdegenerierten kritischen Punkte.

JONGEN, JONKER und TWILT haben zum Zweck der Kategorisierung dieser Stellen die folgenden Punkttypen eingeführt. In der nun folgenden kurzen Darstellung dieser Typen wird jedoch auf die Nennung zahlreicher generischer Eigenschaften verzichtet. Der interessierte Leser sei dazu auf [11], [17] und für eine Abhandlung der topologischen Eigenschaften der Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  auf [18] verwiesen.

Es sei  $(\bar{x}, \bar{t})$  ein g.c.-Punkt.

**Typ 1** Dies sind alle nichtdegenerierten kritischen Punkte. Auf einer offenen Umgebung von  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist die Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  somit eine zweifach stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Die Ableitung der Funktion  $x(t)$  bestimmt man nach Satz 4.5.

**Typ 2** Diese Punkte erfüllen die Bedingungen (ND1) und (ND3) und wenigstens eine Ungleichungsnebenbedingung ist aktiv. Wegen (ND1) gibt es genau einen Vektor  $(\lambda_{I_0}, \mu)$  mit

$$\nabla_x f(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{i \in I_0} \lambda_i \nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}) = 0.$$

In Punkten vom Typ 2 gibt es *genau* einen Index  $i_0 \in I_0$  mit  $\lambda_{i_0} = 0$ , d.h. es gilt  $I_0 = I^+(\lambda) \cup \{i_0\}$ . Folglich ist die strenge Komplementaritätsbedingung (ND2) verletzt.

Beispielhaft soll an dieser Stelle wenigstens auf *eine* generische Eigenschaft eingegangen werden. Definiert man den Kegel

$$\tilde{T} = \bigcap_{i \in I^+(\lambda)} \ker \nabla_x g_i(\bar{x}, \bar{t}) \cap \bigcap_{j \in J} \ker \nabla_x h_j(\bar{x}, \bar{t}),$$

der wegen (LICQ) und  $I^+(\lambda) \subset I_0$  den Raum  $T_{\bar{x}, \bar{t}}(M)$  als echten Unterraum enthält, dann sind alle Eigenwerte von  $\nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)|_{\tilde{T}}$  ungleich Null. Damit den nächsten Typ vorwegnehmend, gilt für generische Probleme, dass in kritischen Punkten höchstens eine der Bedingungen (ND2) und (ND3), und das auch nur einmal (ein verschwindender Lagrange-Parameter, ein Eigenwert gleich 0) verletzt ist.

**Typ 3** Punkte dieses Typ sind g.c.-Punkte, die (ND1) und (ND2) erfüllen, aber in denen die Bedingung (ND3) dahingehend verletzt ist, dass genau ein Eigenwert der Abbildung  $\nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \lambda, \mu)|_{T_{\bar{x}, \bar{t}}(M)}$  Null wird.

**Typ 4** Hier ist (ND1) verletzt, obwohl  $|I_0| + |J| \leq n$  gilt.

**Typ 5** In Punkten vom Typ 5 ist wiederum (ND1) verletzt, aber die Anzahl der aktiven Nebenbedingungen  $|I_0| + |J|$  ist gleich  $n + 1$ .

Mit  $\Sigma_{\text{gc}}^i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) sei die Menge aller verallgemeinerten kritischen Punkte der Aufgabe  $P_1(t)$  bezeichnet, die vom Typ  $i$  sind. Man repräsentiert  $P_1(t)$  nun mit dem Tripel  $(f, g, h)$  aus Zielfunktion und Nebenbedingungen.

**Satz 5.3** ([17]) *Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller einparametrischen Optimierungsaufgaben  $(f, g, h)$  mit  $q < n$  (Anzahl der Gleichungsnebenbedingungen kleiner als Dimension des Vektorraumes der Entscheidungsvariablen). Sei*

$$\mathcal{F}^{**} = \{(f, g, h) \mid \text{jeder g.c.-Punkt ist vom Typ 1,2,3,4 oder 5}\}.$$

Dann gilt:

- Die Klasse  $\mathcal{F}^{**}$  ist mit der starken Whitney-Topologie  $C_s^3$  offen und dicht in  $C^3(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R})^{1+p+q}$ .
- Ist  $(f, g, h) \in \mathcal{F}^{**}$ , dann ist die Menge  $\Sigma_{\text{gc}}^1$  offen und dicht in  $\Sigma_{\text{gc}}$ , und für  $i = 2, \dots, 5$  ist  $\Sigma_{\text{gc}}^i$  eine diskrete Punktmenge.
- (siehe [13]) Ist die PMA  $M(t)$  oberhalb stetig auf der (kompakten) Menge  $T$ , dann ist die Anzahl aller g.c.-Punkte vom Typ ungleich 1 endlich.

Die Klasse  $\mathcal{F}^{**}$  ist die Menge der *generischen einparametrischen Optimierungsprobleme*.

Es sei an dieser Stelle noch eine wichtige Bemerkung gestattet. Man könnte sich nämlich die Frage stellen, ob im vorstehenden Satz die drei in den letzten beiden Punkten enthaltenen Eigenschaften ( $\Sigma_{\text{gc}}^1$  offen und dicht in  $\Sigma_{\text{gc}}$ ,  $\Sigma_{\text{gc}}^i$  diskret bzw.

endlich für  $i = 2, 3, 4, 5$ ) nicht vielmehr zu den die Problemklasse  $\mathcal{F}^{**}$  definierenden Eigenschaften zählen. Betrachtet man die triviale Aufgabe

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \min \\ x - t &\leq 0 \\ t - x &\leq 0 \end{aligned}$$

mit der Lösungsfunktion  $x(t) = t$ , so stellt man in der Tat sofort fest, dass für alle lokalen Minimumspunkte (LICQ) und damit (ND1) verletzt sind. Es gilt  $n = 1$  (Dimension des Raumes der  $x$ -Variablen) und da die Anzahl der aktiven Nebenbedingungen stets 2 ist, erfüllen alle lokalen Minimumspunkte die Gleichung  $|I_0| + |J| = n + 1$ . Sie scheinen also sämtlich als Punkte vom Typ 5 identifiziert, was der Behauptung des Satzes 5.3 offenkundig widerspräche.

Berücksichtigt man jedoch eine der oben weggelassenen Generizitätseigenschaften für den Typ 5, so wird sichtbar, dass sie von *keinem* dieser Punkte erfüllt wird. Die Aufgabe ist also *nicht* in  $\mathcal{F}^{**}$  enthalten. Ganz konkret lautet diese Bedingung (Kriterium D2 in [17]), dass die Gradienten nach  $(x, t)$  aller aktiven Nebenbedingungen linear unabhängig sein müssen. Im obigen Restriktionssystem erhielten wir stets das dieses verletzende Vektorpaar  $(1, -1)^\top$  und  $(-1, 1)^\top$ . Folglich ist keiner der lokalen Minimumspunkte vom (generischen) Typ 5.

In [30] hat RÜCKMANN gezeigt, dass sich jedes nicht notwendigerweise generische Problem der Form  $P_1(t)$  mit  $q < n$  mit einer speziellen Störung mit Wahrscheinlichkeit 1 in eines der Klasse  $\mathcal{F}^{**}$  transformieren lässt.

**Satz 5.4 ([30])** Gegeben sei  $(f, g, h) \in C^3(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R})^{1+p+q}$  mit  $q < n$ . Dann ist für fast alle

$$(b, A, c, D, e, F) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{p \times n} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{q \times n}$$

das durch die Störung

$$\begin{aligned} f' &:= f(x, t) + b^\top x + \frac{1}{2}x^\top Ax, \\ g' &:= g(x, t) + c + Dx, \\ h' &:= h(x, t) + e + Fx \end{aligned}$$

gegebene einparametrische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f'(x, t) &\rightarrow \min_x \\ g'_i(x, t) &\leq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ h'_j(x, t) &= 0 \quad j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

generisch, d.h.  $(f', g', h') \in \mathcal{F}^{**}$ . Dabei bezeichne  $\mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$  die Menge aller symmetrischen  $n \times n$ -Matrizen.

Es schließt sich nun eine Diskussion des Verhaltens der Abschließung der Menge  $\Sigma_{\text{loc}}$  in den verallgemeinerten kritischen Punkten an. Generische Probleme haben die Eigenschaft, dass sich Punkte  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  eindeutig in drei von den Jongen-Jonker-Twilt-Typen verschiedene Klassen einteilen lassen. Sei also  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ .

**Typ A**  $\bar{x}$  ist ein lokaler Minimumpunkt der Aufgabe  $P(\bar{t})$  und  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist wiederum streng stabil im Sinne von KOJIMA. Folglich existieren offene Umgebungen  $U$  von  $\bar{t}$  und  $V$  von  $\bar{x}$  sowie eine stetige Funktion  $x : U \rightarrow V$  mit  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ , so dass für alle  $t \in U$  der Funktionswert  $x(t)$  in  $\arg \min P(t)$  enthalten ist. Ist der betrachtete Punkt *nicht* vom Typ 1, dann ist im Unterschied zu Satz 4.5 die Lösungsfunktion jedoch im allgemeinen nicht differenzierbar.

In generischen Problemen gilt darüber hinaus, dass ein Punkt vom Typ A kein isolierter Punkt der Menge  $M(\bar{t})$  ist. In jeder beliebigen offenen Umgebung von  $\bar{x}$  finden sich also außer diesem Punkt weitere Elemente von  $M(\bar{t})$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $(U_\varepsilon(\bar{x}) \cap M(\bar{t})) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ .

Über die Differenzierbarkeitseigenschaften von  $\Sigma_{\text{gc}}$  in einer Umgebung von g.c.-Punkten  $(\bar{x}, \bar{t})$  des Typs 1 wurde bereits hinreichend oft berichtet. Der Satz von FIACCO und MCCORMIC sowie die Aussage über die strenge Stabilität im Sinne von KOJIMA gelten dann nämlich ebenso für Pfade lokaler Minimumpunkte, die in der Menge der nichtdegenerierten kritischen Punkte enthalten sind. Sie sind somit sämtlich vom Typ A.

Die obige Auswahlfunktion  $x : U \rightarrow V$  ist darüber hinaus auf einer offenen Umgebung von  $\bar{t}$  stückweise stetig differenzierbar, d.h. eine  $PC^1$ -Funktion. Diese Eigenschaft ist bekannt, wird jedoch im Beweis zu Satz 5.9 auf Seite 107 noch für spezielle Punkte verifiziert werden.

**Typ B**  $\bar{x}$  ist ein degenerierter lokaler Minimumpunkt von  $P_1(\bar{t})$  in dem Sinne, dass ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(\bar{x}) \cap M(\bar{t}) = \{\bar{x}\}$  existiert, d.h.  $\bar{x}$  ist ein isoliertes Element von  $M(\bar{t})$ . In generischen Problemen existiert dann ein  $\delta > 0$ , so dass  $M(t) \cap U_\varepsilon(\bar{x}) = \emptyset$  entweder für alle  $t \in U_\delta(\bar{t})$  mit  $t < \bar{t}$  oder für alle  $t \in U_\delta(\bar{t})$  mit  $t > \bar{t}$ . Folglich endet lokal betrachtet die Menge zulässiger Punkte bei  $\bar{t}$ .

Zur Veranschaulichung betrachte man in der unteren Ebene ein Optimierungsproblem mit  $M(t) = \{x \mid x^2 \leq t\}$  und es sei  $T = [-1, 1]$ . Für positives  $t$  ist nun  $M(t) = [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$  ein Intervall, welches nicht nur aus einem Punkt besteht. Weiter ist  $M(0) = \{0\}$  und folglich  $\bar{x} = 0$  Lösung von  $P(\bar{t})$  mit  $\bar{t} = 0$  für beliebige Zielfunktion in der unteren Ebene.  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist demzufolge vom Typ B. Wählt man ein  $t < \bar{t}$ , so gilt  $M(t) = \emptyset$ .

**Typ C** Der Pfad verfolgter Minima endet im betrachteten Punkt und es gilt bereits  $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$ . Dann kann man sich mittels einer geeigneten Abstrategie zu einem Punkt  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  bewegen.  $\bar{x}$  und  $\hat{x}$  gehören zu

derselben verbundenen Komponente von  $M(\bar{t})$ . Im Hinblick auf die beiden bereits beschriebenen Typen ist somit klar, dass  $(\bar{x}, \bar{t})$  vom Typ A ist. Der Übergang von  $(\bar{x}, \bar{t})$  nach  $(\hat{x}, \bar{t})$  heißt *Sprung*. Zur Illustration sei auf das Beispiel 4.18 verwiesen, welches zwei Punkte vom Typ C enthält.

Zur Vermeidung von Unklarheiten nennen wir gegebenenfalls die eben beschriebenen Klassen *B-Typen*<sup>8</sup>, während die Typen verallgemeinerter Punkte nach JONGEN, JONKER und TWILT als *JJT-Typen* bezeichnet seien. Tabelle 3 zeigt die möglichen B-Typen von g.c.-Punkten  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  mit JJT-Typ 1 bis 5. Man bemerkt, dass bei Erfülltsein der Mangasarian–Fromowitz–Bedingung weder JJT-Typ 4 noch B-Typ B auftreten können.

JJT-Typ	1	2		3	4	5	
(ND1)	ja	ja		ja	nein	nein	
(ND2)	ja	nein		ja	-	-	
(SSOC)	ja	ja	nein	nein	-	ja	
(MFCQ) in JJT-Typen 4, 5	-	-		-	nein	ja	nein
B-Typ	A	A	C	C	B oder C	A	B

Tabelle 3: Zusammenhang zwischen JJT-Typen und B-Typen

Eine weitere aus dieser Tabelle hervorgehende Eigenschaft ist, dass in generischen einparametrischen Optimierungsaufgaben die strenge Stabilität lokaler Minima stets äquivalent zum Erfülltsein der Mangasarian–Fromowitz–Bedingung (MFCQ) und des streng hinreichenden Optimalitätskriteriums zweiter Ordnung (SSOC) ist. Für die streng stabilen lokalen Minima (B-Typ A), die vom JJT-Typ 1 oder 2 sind, sei an die Implikation „(LICQ) gilt  $\Rightarrow$  (MFCQ) gilt“ erinnert.

Es mag eventuell überraschen, dass alle obigen 8 Kombinationen aus JJT- und B-Typen schon im dimensionsmäßig einfachsten Fall  $x \in \mathbf{R}^1$  auftreten können. Somit ist die Gelegenheit gegeben, alle diese Möglichkeiten einfach und anschaulich zu illustrieren, wie in Abbildung 8 geschehen. Darin ist der gepunktete Bereich der Graph der PMA  $M$  und die stark gezeichnete Linie die Menge derjenigen lokalen Minima der Aufgabe  $P_1(t)$ , die vom Typ 1 sind. Die hervorgehobenen Punkte kennzeichnen verallgemeinerte kritische Punkte aus dem Abschluss von  $\Sigma_{\text{loc}}$ , die nicht vom Typ 1 sind, wobei die Kreise diejenigen Punkte darstellen, in denen die Eigenschaft der lokalen Minimalität verloren geht (B-Typ C). Die dort startenden Pfeile geben die Richtungen der dann resultierenden Sprünge an. Die punktierte Linie von 3C nach 2C stellt (nur einige!) lokale Maxima dar und soll belegen, dass die skizzierte Situation durchaus nicht unreal ist. Offensichtlich sollte nämlich für diejenigen Parameter  $\bar{t} \in T$ , für die zwei (oder mehr) isolierte lokal

<sup>8</sup>behaviour (engl.) – Verhalten

minimale Lösungen der zugrundeliegenden einparametrischen Optimierungsaufgabe in *derselben* verbundenen Komponente von  $M(\bar{t})$  existieren, im Fall  $x \in \mathbf{R}^1$  stets auch ein lokales Maximum zwischen diesen Minimumspunkten existieren. Dies ist in Abbildung 8 mit dem eingezeichneten Pfad lokaler Maxima erfüllt.

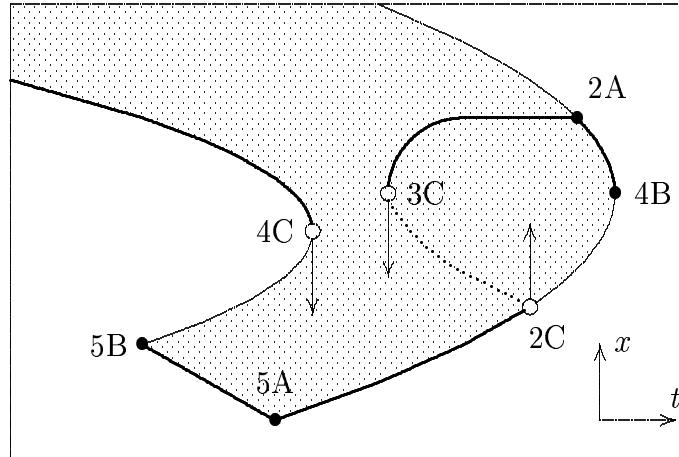


Abbildung 8: Alle 8 möglichen Punkttypen-Kombinationen für  $x \in \mathbf{R}$

Im folgenden Resultat seien nun noch einige Eigenschaften des Abschlusses der Menge der lokalen Minimumspunkte für beschränktes  $\text{grph } M$  zusammengefasst. Sie beruhen wiederum in der Hauptsache auf den Erkenntnissen von JONGEN, JONKER und TWILT.

**Resultat 5.5** Es sei  $P_1(t)$  ein generisches einparametrisches Optimierungsproblem aus  $\mathcal{F}^{**}$ , in dem der Graph der Punkt-Menge-Abbildung  $M$  beschränkt und abgeschlossen (folglich kompakt) ist. Weiter sei  $\text{dom } M = T = [a, b]$ , d.h. für alle in der unteren Ebene zulässigen Parameter  $\bar{t}$  sei insbesondere  $M(\bar{t}) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

1.  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ , die Abschließung der Menge aller lokalen Minimumspunkte der Aufgabe, lässt sich darstellen als eine endliche Vereinigung zweifach stetig differenzierbarer, eindimensionaler Mannigfaltigkeiten mit Rand.
2.  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  besteht aus einer endlichen Anzahl parametermaximaler Pfade lokaler Minima  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  mit  $T_s = [a_s, b_s]$  ( $a_s < b_s$ ), so dass für alle  $s \in \{1, \dots, k\}$  die folgenden Punkte erfüllt sind:
  - (a)  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  für alle  $\bar{t} \in \text{int } T_s$ , folglich sind die Pfade sogar echte PLM im Sinne der Definition 4.25.
  - (b)  $x_s(\cdot)$  ist auf  $\text{int } T_s$  eine stückweise zweifach stetig differenzierbare Funktion.

- (c) Für  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  ist  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  kein streng stabiles lokales Minimum von  $P_1(\bar{t})$  (B-Typ A) oder es ist  $\bar{t} \in \{a, b\}$ , d.h. ein solcher parametermaximaler Pfad kann nur dann in einem Punkt von B-Typ A enden, wenn dort auch die Menge  $T$  der zulässigen Parameter endet.
- (d) Es ist  $\text{grph } \mathcal{T} = \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  und für alle  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k\}$  mit  $s_1 \neq s_2$  ist  $\text{grph } x_{s_1} \cap \text{grph } x_{s_2} = \emptyset$ , also ist für alle  $\bar{t} \in T_{s_1} \cap T_{s_2}$  die Ungleichung  $x_{s_1}(\bar{t}) \neq x_{s_2}(\bar{t})$  erfüllt.

Da wir uns für den Rest der Arbeit nun tatsächlich nur noch um Aufgaben kümmern wollen, für die die eben gemachten Aussagen gelten, fassen wir die nötigen Voraussetzungen nun noch zusammen:

**(A3)** In der Aufgabe

$$\left. \begin{array}{l} F(x, t) \rightarrow \min_{t \in T=[a, b]} \\ x \text{ löst } P_1(t) \end{array} \right\} \text{(EZO)}$$


---


$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, t) \rightarrow \min_x \\ g_i(x, t) \leq 0 \quad i \in I = \{1, \dots, p\} \\ h_j(x, t) = 0 \quad j \in J = \{1, \dots, q\} \end{array} \right\} P_1(t)$$

sei die Aufgabe  $P_1(t)$  in  $\mathcal{F}^{**}$  enthalten (insbesondere seien alle in der Aufgabe der unteren Ebene auftretenden Funktionen dreifach stetig nach  $(x, t)$  differenzierbar), der Graph der Punkt-Menge-Abbildung  $M$  eine beschränkte Teilmenge des  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ , und für alle  $\bar{t} \in [a, b]$  sei  $M(\bar{t}) \neq \emptyset$  (d.h.  $\text{dom } M = [a, b] = T$ ).

Die Zielfunktion  $F(\cdot, \cdot)$  der oberen Ebene sei auf  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  zweifach stetig nach  $(x, t)$  differenzierbar.

## 5.2 Subglobale Lösungen und Optimalitätskriterien

Nun da die Klasse der generischen einparametrischen Optimierungsprobleme bekannt ist, soll der Übergang zu den entsprechenden Zwei-Ebenen-Aufgaben des Typs (EZO) unter der Bedingung  $(f, g, h) \in \mathcal{F}^{**}$  erfolgen. Dabei beschränken wir uns auf Aufgaben, die die Annahme (A3) erfüllen. In denen besteht nach dem Resultat 5.5 der Abschluss der Menge  $\Sigma_{\text{loc}}$  der lokalen Minimumpunkte der Aufgabe  $P_1(t)$  aus einer Vereinigung endlich vieler stückweise zweifach stetig differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, also

$$\text{cl } \Sigma_{\text{loc}} = \bigcup_{s=1}^k \text{grph } x_s,$$

worin  $(x_s(\cdot), T_s)$  endlich viele echte Pfade lokaler Minima im Sinne der Definition 4.25 und die Funktionen  $x_s(\cdot)$  auf den Intervallen  $T_s$  stückweise zweifach stetig differenzierbar sind.

Nun soll die Idee der subglobalen Lösungen speziell auf einparametrische generische Optimierungsaufgaben übertragen werden.

Zunächst ein recht einfaches Ergebnis, welches die Existenz subglobaler Lösungen garantiert:

**(GMFCQ)** In der Aufgabe  $P_1(t)$  gelte für alle  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFCQ). In den Punkten von JJT-Typ 5, die vom B-Typ A sind, gelte (CRCQ).

**Lemma 5.6** *In der Aufgabe (EZO) gelte die Annahme (A3). Weiterhin sei (GMFCQ) erfüllt. Dann erfüllt die in Resultat 5.5 genannte PLM-Überdeckung von  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  die Eigenschaften in der Voraussetzung des Satzes 4.31 auf Seite 86.*

**Beweis:** Der Beweis ist sehr einfach:

Sei  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  mit  $T_s = [a_s, b_s]$  die laut Resultat 5.5 existierende PLM-Überdeckung mit den dort geforderten Eigenschaften. Wir betrachten ein beliebiges  $s \in \{1, \dots, k\}$  sowie ein  $\bar{t}$  aus  $T_s$ . Dann können zwei Fälle eintreten:

1. Ist  $\bar{t} \in \text{int } T_s = (a_s, b_s)$ , dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{t}$ , so dass  $U$  wiederum gänzlich in  $\text{int } T_s$  liegt. Laut Resultat 5.5 werden alle inneren Punkte der Intervalle  $T_s$  auf lokale Minimumpunkte abgebildet, d.h.  $x_s(U) \subseteq \Sigma_{\text{loc}}$ . Diese Punkte erfüllen also die erste der in den Voraussetzungen des Satzes 4.31 auftretende Bedingung.
2. Es sei nun  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur den Fall  $\bar{t} = a_s$ .
  - (a)  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  sei vom B-Typ A. Wegen Resultat 5.5 kann im Randpunkt  $(x_s(a_s), a_s)$  des Pfades parametermaximaler lokaler Minima nur dann ein Punkt vom B-Typ A vorliegen, wenn  $a_s = a$  ist. Dann ist für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  auch  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap T \subseteq T_s$  und  $(x_s(a_s), a_s)$  erfüllt wegen der Eigenschaft  $T = \text{dom } M$  aus (A3) folglich wiederum die erste Bedingung im Satz 4.31.
  - (b)  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  sei vom B-Typ B. Dann ist nach Tabelle 3 auf Seite 99 im als generisch vorausgesetzten Problem der unteren Ebene in diesem Punkt (MFCQ) verletzt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass (GMFCQ) gelte.



- (c) Ist  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  vom B-Typ C, dann existiert ein  $x^* \in M(\bar{t})$  derart, dass  $x^*$  lokaler Minimumspunkt der Aufgabe  $P_1(\bar{t})$  mit  $f(x^*, \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  gilt. Da laut Voraussetzung  $\mathcal{T}$  jedoch *alle* Elemente von  $\Sigma_{\text{loc}}$  überdecken soll, existiert ein  $s' \in \{1, \dots, k\} \setminus \{s\}$  mit  $\bar{t} \in T_{s'}$  und  $x^* = x_{s'}(\bar{t})$ , also  $f(x_{s'}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$ . Damit gilt für  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  die zweite an die in der Überdeckung enthaltenen Punkte gestellte Bedingung in 4.31.

Der Beweis ist somit erbracht.  $\square$

Wesentlich und deshalb ausschlaggebend für die gewählte Namensgebung der Annahme (GMFCQ) ist die Gültigkeit des Lemmas 5.6. Ein wichtiger Grund hierin auch (CRCQ) aufzunehmen, ist die Möglichkeit, die Richtungsableitbarkeit einer uns später häufiger begegnenden Funktion zu zeigen.

Damit ist für diese „Komplett-Überdeckung“ von  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  unter (GMFCQ) nach Satz 4.31 die PMA  $\Psi_{\text{sg}}$  oberhalb stetig auf  $\text{dom } M$  und deren Graph ist als Teilmenge des als beschränkt vorausgesetzten Graphen von  $M$  wieder beschränkt. Nach Satz 2.6 existiert eine optimistische subglobale Lösung der Aufgabe für jede Zielfunktion der oberen Ebene, die die Bedingungen der Annahme (A3) erfüllt, also insbesondere stetig ist (siehe dazu auch [34]).

Fraglich ist jedoch nach wie vor, wie unter den Bedingungen (A3) und (GMFCQ) eine PLM-Überdeckung *aller* Punkte aus  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  tatsächlich gefunden werden kann. Beschränkt man sich auf lokale Suchmethoden, könnte sich das als schwierig herausstellen. Erinnerung sei nur an den schon einmal erwähnten Fall, dass  $\Sigma_{\text{loc}}$  aus zwei Pfaden  $(x_1(\cdot), T_1)$  und  $(x_2(\cdot), T_2)$  besteht und die Parameterintervalle  $T_1$  und  $T_2$  bereits ganz  $T$  überdecken. Beginnt man einen Pfadverfolgungsalgorithmus dann im Punkt  $(x_1(\bar{t}), \bar{t})$  mit  $\bar{t} \in T$ , so erhält man schließlich als Menge der gefundenen lokalen Minima lediglich  $\bigcup_{t \in T} (x_1(t), t)$ , wenn nicht-lokale Suchmethoden, die einen Übergang von  $(x_1(\hat{t}), \hat{t})$  nach  $(x_2(\hat{t}), \hat{t})$  für irgendein  $\hat{t} \in T$  ermöglichen, nicht zur Verfügung stehen.

Betrachten wir nun Überdeckungen als Vereinigungen von Pfaden lokaler Minima der Form  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  mit  $\text{grph } \mathcal{T} = \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ . Festgestellt worden war, dass unter den Bedingungen des Lemmas 5.6 die Überdeckung  $\mathcal{T}$  die Eigenschaft hat, dass für alle  $s \in \{1, \dots, k\}$  und alle  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  die Menge  $T$  der in der unteren Ebene zulässigen Parameter endet oder ein Sprung zu einem lokalen Minimumspunkt  $\hat{x}$  der Aufgabe  $P_1(\bar{t})$  möglich ist, in dem eine echte Verbesserung der Zielfunktion der Followers auftritt. Im Satz 4.31 hatten wir die Existenz dieser „besseren“ Reaktion dadurch garantiert, dass der Graph von  $\mathcal{T}$  wirklich *alle* lokalen Minima enthält. Speziell existiert dann unter der Voraussetzung der Kompaktheit von  $M(\bar{t})$  auch eines, welches für oben untersuchte  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  einen lokalen Minimumspunkt der Aufgabe  $P_1(\bar{t})$  repräsentiert, wenn für den Parameter  $\bar{t}$  im Punkt  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  die lokale Minimalitätseigenschaft verloren geht.

Gleichwohl ist offensichtlich, dass wir dazu unter bestimmten Bedingungen keineswegs die Menge  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  komplett durch  $\mathcal{T}$  überdecken müssen. Wesentlich ist vielmehr, dass in den betreffenden Punkten „wenigstens eine“ in der unteren Ebene bessere Reaktion in der Menge der vorhandenen Pfade lokaler Minima existiert:

**Definition 5.7** *Mit den verwendeten Bezeichnungen sei  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  ( $T_s = [a_s, b_s]$ ) eine echte PLM-Überdeckung im Sinne der Definition 4.25 auf Seite 80. Dann heißt  $\mathcal{T}$  abgeschlossen bezüglich Sprüngen, falls für alle Indizes  $s \in \{1, \dots, k\}$  und alle  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  mit  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$  ein von  $s$  und  $\bar{t}$  abhängiges  $s' \in \{1, \dots, k\}$  existiert, so dass  $f(x_{s'}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  gilt und  $(x_{s'}(\bar{t}), \bar{t})$  in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten ist.*

Unter den Bedingungen (A3) und der das Vorliegen von Punkten des B-Typs C in den Randpunkten der Intervalle, die keine Randpunkte von  $T$  sind, garantierenden Erfüllung von (GMFCQ) ist es also durchaus denkbar, dass eine Überdeckung  $\mathcal{T}'$  von parametermaximalen Pfaden lokaler Minima existiert, so dass die in ihr enthaltenen Punkte jeweils mindestens eine der zwei Bedingungen aus Satz 4.31 erfüllen, ohne dass dazu  $\text{grph } \mathcal{T}'$  die Menge  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  vollständig überdecken muss. Eine solche Überdeckung würde dann die Voraussetzungen des Satzes 4.26 erfüllen und die Existenz optimistischer subglobaler Lösungen für stetige Funktion  $F(\cdot, \cdot)$  garantieren.

Wichtig ist hier, dass der Graph dieser Überdeckung  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$  nicht vollständig enthalten muss. Im obigen Beispiel mit den zwei  $T$  komplett überstreichenden Parameterintervallen  $T_1$  und  $T_2$  wären also sowohl  $\mathcal{T}_1 = \{(x_1(\cdot), T)\}$  als auch  $\mathcal{T}_2 = \{(x_2(\cdot), T)\}$  bezüglich Sprüngen abgeschlossene PLM-Überdeckungen.

Eine ganz entscheidende Feststellung ist demzufolge, dass zur Bestimmung von solchen, zumindest unter (A3) und (GMFCQ) existierenden Überdeckungen die Bestimmung *aller* lokalen Minima der Aufgabe der unteren Ebene unnötig ist. Da letzteres Problem letztendlich auf die Berechnung einer globalen Lösung der parametrischen Aufgabe  $P_1(t)$  hinausläufe, stellt die Bestimmung subglobaler Lösungen über bezüglich Sprüngen abgeschlossenen Pfaden lokaler Minima eine Vereinfachung des Problems dar, da in den nicht in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthaltenen Punkten vom B-Typ C zur Bestimmung lokaler Minima der Aufgabe der unteren Ebene für gleichbleibenden Parameterwert lediglich geeignete *lokale* Abstiegsverfahren vonnöten sind.

Der Autor schlägt dazu den rekursiven Algorithmus in Abbildung 9 vor, dessen Durchführbarkeit und Endlichkeit unter (A3) und (GMFCQ) bewiesen werden kann.

**Satz 5.8** *Erfüllt die Aufgabe (EZO) die Annahme (A3) und gilt zusätzlich (GMFCQ), dann ist der Algorithmus in Abbildung 9 durchführbar und endlich*

**Algorithmus** Rekursive Prozedur zur Konstruktion einer bezüglich Sprüngen abgeschlossenen PLM-Überdeckung  $\mathcal{T}$ :

```

begin
  wähle ein  $(x, t) \in \Sigma_{\text{loc}}$ ,  $\mathcal{T} := \emptyset$ ,  $s := 1$ 
  call RekFindePLM( $(x, t)$ )
stop

Subroutine RekFindePLM( $(x, t)$ )
begin
  finde den parametermaximalen PLM  $(x_s(\cdot), T_s = [a_s, b_s])$  mit  $(x, t) \in \text{grph } x_s$ 
  und „ $\bar{t} \in \{a, b\}$ “ oder „ $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  vom B-Typ C“ für  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$ 
   $\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \{(x_s(\cdot), T_s)\}$ 
  for  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$ 
    if  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$  then
      finde ein  $\bar{x}$ , so dass  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  und  $f(\bar{x}, \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$ 
      if  $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \text{grph } \mathcal{T}$  then
         $s := s + 1$ 
        call RekFindePLM( $(\bar{x}, \bar{t})$ )
      end if
    end if
  end for
return

```

Abbildung 9: Algorithmus zur Bestimmung einer sprung-abgeschlossenen PLM-Überdeckung

(d.h. er terminiert) und der Rückgabewert  $\mathcal{T}$  ist eine bezüglich Sprüngen abgeschlossene PLM-Überdeckung mit parametermaximalen Pfaden lokaler Minima.

**Beweis:** Die Prozedur „RekFindePLM“ generiert einen parametermaximalen Pfad lokaler Minima  $(x_s(\cdot), T_s)$  mit  $T_s = [a_s, b_s] \subseteq T$ , in dem jeder Endpunkt  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  des Parameterintervalls  $T_s$  mit den Randpunkten von  $T$  zusammenfällt oder  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  ein Element der Abschließung von  $\Sigma_{\text{loc}}$  vom B-Typ B oder C darstellt. Unter (GMFCQ) treten Punkte vom B-Typ B jedoch nicht auf, d.h. aus  $\bar{t} \notin \{a, b\}$  folgt  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$ . Folglich ist in diesem Fall die Existenz eines lokalen Minimumspunktes  $\bar{x}$  der Aufgabe  $P_1(\bar{t})$  mit  $f(\bar{x}, \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  gesichert und er kann mittels geeigneter Abstiegsstrategien aufgefunden werden. Damit ist die Durchführbarkeit aller Schritte bereits gezeigt.

Man überzeugt sich weiterhin schnell davon, dass für ein  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  die Prozedur „RekFindePLM“ zur Bestimmung eines diesen Punkt enthaltenen MPLM nur dann aufgerufen wird, wenn  $(\bar{x}, \bar{t})$  nicht in  $\text{grph } \mathcal{T}$  und damit in noch keinem der bis zu diesem Zeitpunkt konstruierten parametermaximalen Pfade lokaler Minima enthalten ist. Jeder Aufruf von „RekFindePLM“ erzeugt also einen MPLM, der von allen anderen in  $\mathcal{T}$  enthaltenen verschieden ist. Da es unter den gegebenen Bedingungen davon laut Resultat 5.5 jedoch nur endlich viele gibt, wird die Subroutine ebenfalls nur endlich viele Male aufgerufen, d.h. der Algorithmus terminiert.  $\square$

Im Beispiel 4.18 auf Seite 66 könnte ganz konkret der in Abbildung 10 skizzierte Verlauf eintreten. Beim Nachvollziehen dieses Beispiels muss beachtet werden, dass bei der Darstellung eines Punktes die  $x$ - vor der  $t$ -Koordinate erscheint, in Abbildung 4 auf Seite 68 jedoch die waagerechte Achse  $t$  und die senkrechte Achse  $x$  entspricht. Aufdatierungen der globalen Variablen  $\mathcal{T}$  und  $s$  sind mit Rahmen versehen, abkürzend sei  $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$  gesetzt.

Gegenstand der weiteren Untersuchungen werden nun lokale Optimalitätskriterien für subglobale Lösungen in der einparametrischen Zwei-Ebenen-Optimierung mit generischer Aufgabe in der unteren Ebene sein. Die zur Bestimmung der Punkt-Menge-Abbildung  $\Psi_{\text{sg}}$  benötigte PLM-Überdeckung sei dabei bezüglich Sprüngen abgeschlossen. Diese werden die Grundlage für die darauf folgenden, auf die Aufgabe (EZO) übertragenen Generizitätseigenschaften bilden. Dabei findet eine Beschränkung auf die optimistische Strategie statt.

Der Rest der Arbeit ist jedoch nur als Anregung zu verstehen. Insbesondere wird auffallen, dass in den jetzt folgenden Passagen Punkte vom B-Typ B komplett ausgeklammert sein werden. Eine Vervollständigung der im Anschluss vorgetragenen Ideen auf Punkte vom JJT-Typ 4 und die die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung verletzenden Punkte vom JJT-Typ 5 erscheint wünschenswert, ja sogar notwendig.

Wir suchen nun lokale Lösungen  $\bar{t} \in T$  der Aufgabe

$$\begin{aligned} F(x, t) &\rightarrow \text{„min“}_{t \in [a, b]} \\ x &\in \Psi_{\text{sg}}(t) \end{aligned} \quad (\text{EZO})$$

in dem Sinne, dass  $\bar{t}$  ein lokales Minimum der Aufgabe

$$\varphi_{\text{opt}}(t) \rightarrow \min_{t \in T}, \quad \text{mit} \quad \varphi_{\text{opt}}(t) := \min\{F(x, t) \mid x \in \Psi_{\text{sg}}(t)\}$$

darstelle. Solche Lösungen seien auch nur kurz als subglobale optimistische Lösungen bezeichnet.

Wähle  $(x, t) = (-2, -2) \in \Sigma_{\text{loc}}$ ,  $\mathcal{T} = \emptyset$ ,  $s = 1$

Rufe `RekFindePLM((-2, -2))`

Konstruiere den  $(-2, -2)$  enthaltenden und die Punkte  $(-\alpha, -4)$  und  $(-1, 2)$  verbindenden parametermaximalen Pfad lokaler Minima  $(x_1(\cdot), T_1)$  mit  $T_1 = [-4, 2]$

$\mathcal{T} = \{(x_1(\cdot), T_1)\}$

$(x_1(-4), -4) = (-\alpha, -4) \in \Sigma_{\text{loc}}$

$(x_1(2), 2) = (-1, 2) \notin \Sigma_{\text{loc}}$

Springe zu  $(2, 2) \in \Sigma_{\text{loc}}$

$(2, 2) \notin \text{grph } \mathcal{T}$

$s = 2$

Rufe `RekFindePLM((2, 2))`

Konstruiere den  $(2, 2)$  enthaltenden und die Punkte  $(1, -2)$  und  $(\alpha, 4)$  verbindenden parametermaximalen Pfad lokaler Minima  $(x_2(\cdot), T_2)$  mit  $T_2 = [-2, 4]$

$\mathcal{T} = \{(x_1(\cdot), T_1), (x_2(\cdot), T_2)\}$

$(x_1(-2), -2) = (1, -2) \notin \Sigma_{\text{loc}}$

Springe zu  $(-2, -2) \in \Sigma_{\text{loc}}$

$(-2, -2) \in \text{grph } \mathcal{T}$

$(x_1(4), 4) = (\alpha, 4) \in \Sigma_{\text{loc}}$

Abbildung 10: Erzeugung einer bezüglich Sprüngen abgeschlossenen PLM-Überdeckung im Beispiel 4.18 mit dem Algorithmus aus Abbildung 9

Zunächst wird es jedoch noch um einige weitere Eigenschaften der aus der sprung-abgeschlossenen Überdeckung erzeugten Menge der subglobalen Lösungen insbesondere im Hinblick auf Richtungsableitungen gehen.

**Satz 5.9** *In der Aufgabe (EZO) seien die Voraussetzungen des Satzes 5.8 erfüllt. Es sei  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  eine bzgl. Sprüngen abgeschlossene PLM-Überdeckung, in der die  $(x_s(\cdot), T_s)$  für alle  $s \in \{1, \dots, k\}$  jeweils parametermaximale Pfade lokaler Minima seien.*

*Dann existiert für alle  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$  mit  $\bar{x} = x_s(\bar{t})$  im Falle  $\bar{t} \notin \{a, b\}$  die Richtungsableitung  $x'_s(\bar{t}; r)$  für beliebiges  $r \in \mathbf{R}$  und diese kann mit Hilfe des Satzes 4.6 auf Seite 55 durch Lösen des quadratischen Problems  $(QP_{\lambda, \mu}(\bar{x}, \bar{t}, r))$  für ein beliebiges Element  $(\lambda, \mu)$  aus  $S(\bar{x}, \bar{t}, r)$  bestimmt werden.*

**Beweis:** Da die Graphen der einzelnen Auswahlfunktionen  $x_s(\cdot)$  ( $s = 1, \dots, k$ ) nach Resultat 5.5 jeweils paarweise disjunkt sind, andererseits aber wegen der Definition der subglobalen Lösungen offenbar  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}} \subseteq \text{grph } \mathcal{T}$  gilt, ist das in der Behauptung genannte  $s$  stets eindeutig bestimmt.

Wir nehmen nun ein  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ .

Im Fall  $\bar{t} \in \{a, b\}$  ist nichts zu beweisen. Wir beschränken uns demzufolge auf die gegenteilige Möglichkeit  $\bar{t} \notin \{a, b\}$ .

Wäre nun  $\bar{t} \in \{a_s, b_s\}$  (also gleich einem der Randpunkte des Definitionsbereichs des parametermaximalen Pfads) müsste  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) = (\bar{x}, \bar{t})$  nach Resultat 5.5 ein Punkt vom B-Typ B oder C sein. Unter (GMFCQ) treten Punkte vom B-Typ B jedoch nicht auf, folglich ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  vom B-Typ C und somit nicht in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten. Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit bzgl. Sprüngen existiert ein Index  $s' \in \{1, \dots, k\}$  mit  $(x_{s'}(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  und  $f(x_{s'}(\bar{t}), \bar{t}) < f(\bar{x}, \bar{t})$ . Dies wiederum widerspricht der Wahl von  $(\bar{x}, \bar{t})$  als Element des Graphen von  $\Psi_{\text{sg}}$ .

Mithin liegt  $\bar{t}$  im *Innern* des Intervalls  $[a_s, b_s]$  und  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist vom B-Typ A. Dort ist  $x_s(\cdot)$  nach Resultat 5.5 eine  $PC^2$ -Funktion und deshalb existieren alle Richtungsableitungen. Es bleibt zu zeigen, dass der zweite Teil des Satzes 4.6 (wo in  $(QP_{(\lambda, \mu)}(\bar{x}, \bar{t}, r))$  ein beliebiges  $(\lambda, \mu) \in S(\bar{x}, \bar{t}, r)$  eingesetzt werden kann) anwendbar ist, d.h. dass (CRCQ) gilt.

Dies ist aber klar:  $(\bar{x}, \bar{t})$  ist nämlich entweder vom JJT-Typ 1, 2 oder 5. In den ersten beiden Punktklassen gilt (LICQ) und damit die lineare Unabhängigkeit der Ableitungen nach  $x$  der aktiven Restriktionen der Aufgabe der unteren Ebene, eine auf einer hinreichend kleinen Umgebung von  $(\bar{x}, \bar{t})$  ebenfalls gültige Behauptung. Dies impliziert Rangkonstanz und folglich das Erfülltsein von (CRCQ). Für Punkte vom Typ 5 ist (CRCQ) in (GMFCQ) vorausgesetzt.

Damit ist die Behauptung des Satzes vollständig bewiesen.  $\square$

Somit ist die Berechnung der Richtungsableitungen der Auswahlfunktionen  $x_s(\cdot)$  mit uns bekannten Mitteln möglich. Da  $x_s(\bar{t}; r)$  positiv homogen in  $r$  ist, können wir uns auf Richtungen mit  $\|r\| = 1$  und deshalb auf  $r = \pm 1$  einschränken. Wie man sich leicht überzeugt, sind in den Randpunkten des Intervalls  $T$  auch  $x'_{s_1}(a; 1)$  und  $x'_{s_2}(b; -1)$  wie in Satz 5.9 bestimmbar, wenn  $(x_{s_1}(a), a)$  und  $(x_{s_2}(b), b)$  im Graphen von  $\Psi_{\text{sg}}$  liegen.

An dieser Stelle seien noch einmal die bei der Einführung der subglobalen Lösungen der unteren Ebene gemachten Definitionen für den nun zu betrachtenden Fall endlich vieler Pfade lokaler Minima wiederholt, wenngleich in einer anderen (möglicherweise sogar etwas klareren) Reihenfolge als im Unterabschnitt 4.2.3 ab Seite 73.

$\Gamma_{\text{loc}}(t) := \{s \in \{1, \dots, k\} \mid t \in T_s, (x_s(t), t) \in \Sigma_{\text{loc}}\}$	Menge der in $t$ aktiven Pfade lokaler Minima
$f_{\text{sg}}(t) := \min_s \{f(x_s(t), t) \mid s \in \Gamma_{\text{loc}}(t)\}$	subglobaler Minimalwert der Aufgabe der unteren Ebene
$\Gamma_{\text{sg}}(t) := \{s \in \Gamma_{\text{loc}}(t) \mid f(x_s(t), t) = f_{\text{sg}}(t)\}$	subglobale Lösungen enthaltende, in $t$ aktive Pfade lokaler Minima
$\Psi_{\text{sg}}(t) := \{x_s(t) \mid s \in \Gamma_{\text{sg}}(t)\}$	subglobale Lösungen

Die nachfolgenden Optimalitätskriterien sind durch einfache Argumente bezüglich des „Richtungswachstums“ der betrachteten Funktionen verifizierbar, weshalb auf einen strengen Beweis hier verzichtet wird. Wohl aber sollen einzelne Bemerkungen die jeweilige Sachlage erläutern. Von erheblicher Bedeutung ist jedoch die  $PC^1$ -Eigenschaft der Funktion  $f_{\text{sg}}(\cdot)$  und deren daraus resultierende Richtungsableitbarkeit:

**Satz 5.10** *Die Aufgabe (EZO) erfülle die Annahme (A3) und es gelte (GMFCG). In der bzgl. Sprüngen abgeschlossenen PLM-Überdeckung  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  seien alle Pfade lokaler Minima parametermaximal. Dann ist die Funktion  $f_{\text{sg}}(\cdot)$  auf  $T = [a, b]$  eine  $PC^1$ -Funktion und für die Richtungsableitungen  $f'_{\text{sg}}(t, \pm 1)$  ( $t \in (a, b)$ ) sowie  $f'_{\text{sg}}(a, 1)$  und  $f'_{\text{sg}}(b, -1)$  gilt (siehe [34])*

$$\begin{aligned} f'_{\text{sg}}(t; r) &= \min_{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t)} \{f'(x_s(t), t; r)\} \\ &= \min_{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_s(t), t) \cdot x'_s(t; r) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_s(t), t) \cdot r \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

**Beweis:** Zunächst zeigt man die Stetigkeit der Funktion  $f_{\text{sg}}(\cdot)$ . Dazu nehme man ein beliebiges  $\bar{t} \in T$  und betrachte eine Folge  $\{t_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq T$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = \bar{t}$ . Wegen der nur endlichen Anzahl von Pfaden lokaler Minima in der Überdeckung  $\mathcal{T}$  existieren ein Index  $s \in \{1, \dots, k\}$  sowie eine Teilfolge  $\{t_{l_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{t_l\}_{l=1}^{\infty}$  mit  $f_{\text{sg}}(t_{l_i}) = f(x_s(t_{l_i}), t_{l_i})$  und ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte bereits  $f_{\text{sg}}(t_l) = f(x_s(t_l), t_l)$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ .

Wegen der Stetigkeit von  $x_s(\cdot)$  auf der abgeschlossenen Menge  $T_s \supseteq \{t_l\}$  existiert  $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x_s(t_l), t_l)$  und ist gleich  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$ . Mithin gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{\text{sg}}(t_l) = f(x_s(\bar{t}), \bar{t}). \quad (43)$$

- Wäre  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$ , dann gäbe es einen Index  $s_1 \in \{1, \dots, k\}$  mit den Eigenschaften  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) = f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t})$ ,

$$f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \quad (44)$$

und  $(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$ . Wegen unserer speziellen Betrachtung parametermaximaler PLM's und aufgrund der von (GMFCQ) garantierten Abwesenheit von Punkten vom B-Typ B ist für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  die Menge  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap T$  Teilmenge von  $T_{s_1}$  und  $(x_{s_1}(t), t)$  ist vom B-Typ A für alle ihre Elemente. Für einen hinreichend großen Index  $l_0 \in \mathbf{N}$  ist  $\{t_l\}_{l=l_0}^\infty \subseteq T_{s_1}$  und unter Beachtung von (43) und (44) sowie der Stetigkeit von  $x_{s_1}(\cdot)$  auf  $U_\varepsilon(\bar{t}) \cap T$  ergibt sich

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(x_{s_1}(t_l), t_l) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} f_{\text{sg}}(t_l) = f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) > f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t})$$

im Widerspruch zur gerade konstatierten Stetigkeit von  $x_{s_1}(\cdot)$  insbesondere im Grenzpunkt  $\bar{t}$  der Folge  $\{t_l\}_{l=l_0}^\infty$ .

- Noch schneller führen wir die Annahme  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) > f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  zum Widerspruch: Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  nicht in  $\Sigma_{\text{loc}}$  enthalten ist. Wegen der Abgeschlossenheit der betrachteten PLM-Überdeckung bezüglich Sprüngen muss dann ein  $s_1 \in \{1, \dots, k\}$  mit  $(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  und  $f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  existieren. Also gilt

$$f_{\text{sg}}(\bar{t}) \leq f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$$

und der Widerspruch zur Annahme ist ersichtlich.

Es gilt demzufolge  $f_{\text{sg}}(\bar{t}) = f(x_s(\bar{t}), \bar{t})$ . Also gilt  $f_{\text{sg}}(t) = f(x_s(t), t)$  für alle Elemente der betrachteten Folge und in deren Grenzpunkt  $\bar{t}$ . Die Stetigkeit von  $x_s(\cdot)$  zeigt dann die Stetigkeit von  $f_{\text{sg}}(\cdot)$ .

Man überzeugt sich nun noch davon, dass durch

$$\bar{x}_s(t) := \begin{cases} x_s(a_s), & t < a_s \\ x_s(t), & t \in [a_s, b_s] \\ x_s(b_s), & t > b_s \end{cases}$$

wegen der in Resultat 5.5 enthaltenen stückweise stetigen Differenzierbarkeit der  $x_s(\cdot)$   $PC^1$ -Funktionen gegeben sind, aus denen man aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f(\cdot, \cdot)$  mittels  $\bar{f}_s(t) := f(\bar{x}_s(t), t)$  ebenfalls wieder  $PC^1$ -Funktionen konstruiert. Leicht sieht man, dass

$$\Psi_{\text{sg}}(t) \subseteq \bigcup_{s=1}^k \{\bar{x}_k(t)\}$$



und damit

$$f_{\text{sg}}(t) \in \bigcup_{s=1}^k \{\bar{f}_s(t)\}$$

für alle  $t \in T$  gilt.  $f_{\text{sg}}(\cdot)$  ergibt sich also als stetige Auswahl aus  $PC^1$ -Funktionen und ist deshalb selbst stückweise stetig differenzierbar. Für die verwendeten Argumente betreffend den Umgang mit solchen Abbildungen siehe [32].

Die entsprechende Formel für die zulässigen Richtungsableitungen ergibt sich dann sofort aus dem bereits erwähnten Argument über das Richtungswachstum der involvierten Funktionen. Die Existenz der in (42) eingehenden Richtungsableitungen ist Inhalt der Aussage des Satzes 5.9.  $\square$

Noch einer weiteren Indexmenge kommt eine wesentliche Bedeutung zu. Wir definieren mit  $K_{\min}(t, r)$  die Menge aller derjenigen in  $\Gamma_{\text{sg}}(t)$  enthaltenen Elemente von  $\{1, \dots, k\}$ , für die in (42) das Minimum angenommen wird, es sei also

$$K_{\min}(t, r) := \left\{ s \in \Gamma_{\text{sg}}(t) \mid f'_{\text{sg}}(t; r) = f'(x_s(t), t; r) \right\}.$$

Hat man sich einmal von der Richtigkeit der Gleichung (42) überzeugt, ist es nicht schwer zu sehen (nach Meinung des Autors aber auch nicht sofort offensichtlich), dass dann für  $K_{\min}(t, r)$  die folgende verbale Beschreibung gültig ist:

$K_{\min}(t, r)$  gibt die Menge der Indizes aller derjenigen subglobale Lösungen enthaltenden und in  $t \in T$  aktiven Pfade lokaler Minima an, die bei marginaler Änderung von  $t$  auf  $t + \delta r$  ( $\delta > 0$ ) als Elemente von  $\Gamma_{\text{sg}}(t + \delta r)$  infrage kommen.

Die Begründung ist letztendlich die gleiche wie die für (42):  $K_{\min}(t, r)$  gibt in der Tat diejenigen, subglobale Lösungen repräsentierenden Pfade an, auf denen bei Änderung von  $t$  in Richtung  $r$  die Funktion  $f_{\text{sg}}(\cdot)$  am meisten fällt bzw. am wenigsten wächst. Auf diesen Pfaden würde also der Follower bei der Suche nach subglobalen Lösungen der unteren Ebene seine Reaktion wählen.

Durchaus wohl durchdacht ist bei der verbalen Beschreibung die Verwendung des Terminus „infrage kommen“, da nämlich die Elemente von  $K_{\min}(d, r)$  nicht gleich  $\Gamma_{\text{sg}}(t + \delta r)$  „sein müssen“. Wollte man diesen Schluss ziehen, so hieße dies, dass aus der Gleichheit zweier Funktionen und aller ihrer Richtungsableitungen (und nichts anderes betrachten wir) in einem Punkt  $z_0$  die Identität der Funktionen auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von  $z_0$  folgte. Dies ist jedoch falsch, wie man anhand von  $z^2$  und  $z^4$  in  $z_0 = 0$  leicht überprüft.

Natürlich ist jedoch  $\Gamma_{\text{sg}}(t + \delta r) \equiv \{s_0\}$  für hinreichend kleines positives  $\delta$ , falls  $K_{\min}(t, r) = \{s_0\}$  gilt.

Um nun die Optimalitätskriterien in einer vernünftigen und verständlichen Form darbieten zu können, übertragen wir nun noch die sich mit subglobalen Lösungen beschäftigenden Begriffe auf die Aufgabe (EZO) des Leaders. Hierbei muss ohne Zweifel die von diesem verwendete Strategie integriert werden. Für eine PLM-Überdeckung  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  seien deshalb mit

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{opt}}(t) &:= \min_{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t)} \{F(x_s(t), t)\} \\ \varphi_{\text{pess}}(t) &:= \max_{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t)} \{F(x_s(t), t)\}\end{aligned}$$

die optimistische bzw. pessimistische Güte- oder Bewertungsfunktion für subglobale Lösungen und mit

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{sg opt}}(t) &:= \{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t) \mid F(x_s(t), t) = \varphi_{\text{opt}}(t)\} \\ \Gamma_{\text{sg pess}}(t) &:= \{s \in \Gamma_{\text{sg}}(t) \mid F(x_s(t), t) = \varphi_{\text{pess}}(t)\}\end{aligned}$$

die durch ihre Indextmengen angegebenen optimistischen bzw. pessimistischen subglobalen Lösungen definiert.

Wir brauchen die Richtungsableitung der Zielfunktion der oberen Ebene in der Schreibweise, in der die  $x$ -Variable von  $t$  abhängt:

$$F'(x_s(t), t; r) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_s(t), t) \cdot x'_s(t; r) + \frac{\partial F}{\partial t}(x_s(t), t) \cdot r$$

Wir setzen nun noch per definitionem

$$F'(x_{s_1}(a), a; -1) = F'(x_{s_2}(b), b; 1) = +\infty \quad (45)$$

für alle  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k\}$  mit  $a \in T_{s_1}$  und  $b \in T_{s_2}$ , um alle diese Richtungsableitungen mit vernünftigen Werten belegt zu haben. Und dass diese Unendlichkeiten wirklich brauchbar sind, erschließt sich aus deren Interpretation: Sie zeigen an, dass bei Verlassen des zulässigen Parameterbereichs  $T$  der Zielfunktionswert der oberen Ebene stets „unendlich schlecht“ wird. Dieses und damit das Überschreiten der Grenzen von  $T$  wird der Leader vermeiden wollen.

**Satz 5.11 (Notwendiges Optimalitätskriterium im optimistischen Fall)**

*Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes 5.10 sei  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$ .*

*Wenn  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung von (EZO) als lokales Minimum von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$  ist, dann gilt für jedes zulässige  $r \in \{\pm 1\}$  eine der folgenden Aussagen:*

1.  $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \emptyset$ .
2.  $K_{\min}(\bar{t}, r) \subseteq \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  und es existiert ein Element  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$ , so dass  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$ .

3.  $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) \neq \emptyset$  und  $K_{\min}(\bar{t}, r) \not\subseteq \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$ .

Der Begriff der zulässigen Richtung  $r$  beziehe sich dabei darauf, dass wir Richtungsableitungen in Richtung  $-1$  für  $\bar{t} = a$  und in Richtung  $1$  für  $\bar{t} = b$  ausschließen. Trotz allem ist auch für unzulässige Richtungen der Ausdruck  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r)$  wohl-definiert (siehe (45)) und passt hervorragend in die Formulierung der Aussage, wovon sich der geneigte Leser selbst überzeugen möge.

**Beweis:** Ist  $s \notin \Gamma_{\text{sg}}(\bar{t})$  so gilt  $f(x_s(t), t) > f_{\text{sg}}(t)$  für alle  $t \in U_\varepsilon(\bar{t}) \cap T_s$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ , d.h. die Auswahlfunktion  $x_s(\cdot)$  ist bei der Bildung von  $f_{\text{sg}}(t)$  auf einer offenen Umgebung von  $\bar{t}$  nicht aktiv.

**Beweis:**  $T_s$  ist abgeschlossen (siehe dazu neben den Voraussetzungen von Satz 5.10 auch das Resultat 5.5),  $\mathbf{R} \setminus T_s$  also offen.

Für  $\bar{t} \notin T_s$  ist  $\bar{t}$  folglich innerer Punkt des Komplements von  $T_s$  und die Aussage gilt trivialerweise.

Ist  $\bar{t} \in T_s$  und  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) > f_{\text{sg}}(\bar{t})$  gilt die Behauptung aufgrund der Stetigkeit von  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $x_s(\cdot)$  und wegen Satz 5.10 der von  $f_{\text{sg}}(\cdot)$ .

Der als letztes verbleibende Fall  $\bar{t} \in T_s$  und  $f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \leq f_{\text{sg}}(\bar{t})$  kann nur für  $(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \notin \Sigma_{\text{loc}}$  auftreten und aus der Abgeschlossenheit bzgl. Sprüngen der betrachteten Überdeckung mit Pfaden lokaler Minima folgt die Existenz eines  $s_1 \in \{1, \dots, k\}$  mit den Eigenschaften  $\bar{t} \in T_{s_1}$ ,  $(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) \in \Sigma_{\text{loc}}$  und  $f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) < f(x_s(\bar{t}), \bar{t}) \leq f_{\text{sg}}(\bar{t})$  mit Widerspruch.  $\square$

Daraus folgt, dass auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von  $\bar{t}$  die Menge  $\Gamma_{\text{sg}}(\cdot)$  in  $\Gamma_{\text{sg}}(\bar{t})$  enthalten ist. Deshalb die Einschränkung auf Betrachtung der Indizes in  $\Gamma_{\text{sg}}(\bar{t})$  bei der Bestimmung von  $K_{\min}(\bar{t}, r)$ .

Aus der  $PC^1$ -Eigenschaft der Funktion  $x_s(t)$  und damit von  $f(x_s(t), t)$  folgt mit Hilfe eines Arguments mit Bezug auf eine richtungsgebundene Taylor-Entwicklung erster Ordnung im Punkt  $\bar{t}$ , dass auf dem Intervall  $[\bar{t} + \delta r]$  für hinreichend kleines positives  $\delta$  und zulässige Richtung  $r$   $\Gamma_{\text{sg}}(\cdot)$  Teilmenge von  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  ist.

Es sei jetzt  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung von (EZO), also  $\bar{t}$  lokales Minimum von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$  und  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$  mit  $F(\bar{x}, \bar{t}) = \varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$ . Angenommen, für eine zulässige Richtung  $r$  gelte *keine* der drei Bedingungen. Dann folgt speziell aus dem Verletztsein von 1. und 3., dass

$$K_{\min}(\bar{t}, r) \subseteq \Psi_{\text{sg opt}}(\bar{t}) \quad (46)$$

ist. Dies heißt: Wie auch immer der Leader den Parameter  $t$  ausgehend von  $\bar{t}$  in Richtung  $r$  betragsmäßig hinreichend klein verändert, wird die Antwort des Followers nach wie vor auf einem Pfad  $\text{grph } x_s$  mit  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$  liegen, der im

Parameterwert  $t = \bar{t}$  eine die optimistische Strategie realisierende subglobale Lösung repräsentiert, denn wegen (46) gilt insbesondere  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) = F(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  für alle  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$ . Da laut unserer Gegenannahme auch 2. verletzt sein soll, gilt jedoch  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) < 0$  ( $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$ ), d.h. es wird auf allen für eine nach der beschriebenen Parameteränderung infrage kommenden „Antwortpfaden“ ein besserer Zielfunktionswert in der oberen Ebene erzielt. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung sei. Unsere Annahme, dass für ein zulässiges  $r \in \{\pm 1\}$  keine der Bedingungen 1. bis 3. erfüllt ist, war also falsch und damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Eine interessierende Frage ist nun noch, weshalb die vollkommen ohne differentielle Eigenschaften der Funktion  $F(\cdot, \cdot)$  auskommenden Bedingungen 1. und 3. nicht zu einer zusammengefasst sind. Die Antwort darauf ist recht einfach: 3. dient lediglich dazu, dass im betrachteten Lösungspunkt wenigstens eine der drei Aussagen bzgl. der Mengen  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  und  $\Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  erfüllt ist. Weitergehende Aussagen (beispielsweise die Vorzeichen der Richtungsableitungen betreffend) sind praktisch nicht möglich (siehe die späteren Bemerkungen zu einer Behauptung in [34]). Dagegen ist 1. insofern ausgezeichnet, als aus der Erfülltheit dieser Eigenschaft bereits ein strenges Wachstum von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$  in Richtung  $r$  folgt:

Wir betrachten speziell den Fall  $r_0 = 1$ , also wachsendes  $t$  ( $a \leq \bar{t} < b$ ). Nun existiert ein  $\alpha > 0$  mit  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) + \alpha = \min_{s \in K_{\min}(\bar{t}, r_0)} \{F(x_s(\bar{t}), \bar{t})\}$ .  $\alpha$  ist damit der Wert, um den das Minimum der Zielfunktion  $F(\cdot, \cdot)$  der oberen Ebene auf den Pfaden  $\text{grph } x_s$  mit  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r_0)$  den Wert  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$  übersteigt. Dass dieses  $\alpha > 0$  existiert, ist dadurch begründet, dass wegen  $K_{\min}(\bar{t}, r_0) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \emptyset$  für jeden der (endlich vielen) Indizes  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r_0)$  auch  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) < F(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  gilt. Folglich wird die Erhöhung des Parameters von  $\bar{t}$  auf  $\bar{t} + \delta$  (woraufhin für betragsmäßig hinreichend kleines positives  $\delta$  der Follower eine Antwort auf einem Pfad  $\text{grph } x_s$  mit  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r_0)$  wählt) zunächst einen Übergang auf einen solchen Pfad mit dem Index  $x_{s_0}$  und damit eine Änderung des Wert der Funktion  $F(\cdot, \cdot)$  um den Wert

$$\begin{aligned} F(x_{s_0}(\bar{t} + \delta), \bar{t} + \delta) - \varphi_{\text{opt}}(\bar{t}) &= F(x_{s_0}(\bar{t} + \delta), \bar{t} + \delta) - F(x_{s_0}(\bar{t}), \bar{t}) \\ &\quad + \underbrace{F(x_{s_0}(\bar{t}), \bar{t}) - \varphi_{\text{opt}}(\bar{t})}_{\geq \alpha} \\ &\geq [F(x_{s_0}(\bar{t} + \delta), \bar{t} + \delta) - F(x_{s_0}(\bar{t}), \bar{t})] + \alpha \end{aligned}$$

bewirken. Da wegen der Stetigkeit von  $F(\cdot, \cdot)$  und  $x_{s_0}(\cdot)$  der Betrag des Terms in eckigen Klammern für betragsmäßig kleines  $\delta$  klein bleibt, ist diese Veränderung aufgrund von  $\alpha > 0$  immer noch positiv und deshalb für den Leader stets eine *echte* Verschlechterung, und zwar unabhängig von den differentiellen Eigenschaften von  $F(\cdot, \cdot)$  in Richtung  $r_0$ .

Gilt also 1. für *alle* zulässigen  $r$  (und da es höchstens zwei davon gibt, ist diese Überprüfung sehr schnell durchführbar), so ist die lokale Optimalität von  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t})$

gesichert. Das nun zu formulierende hinreichende Optimalitätskriterium wird dies bestätigen, da für  $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \emptyset$  die Gültigkeit der auftretenden Ungleichung tatsächlich für *keinen* Index zu überprüfen ist.

**Satz 5.12 (Hinreichendes Optimalitätskriterium im optimistischen Fall)** *Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Satzes 5.10 sei  $\bar{x} \in \Psi_{\text{sg}}(\bar{t})$ .*

*Gilt für alle zulässigen Richtungen  $r \in \{\pm 1\}$  und in Abhängigkeit von  $r$  für alle  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  die Ungleichung  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) > 0$ , so ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung von (EZO) als lokaler Minimumspunkt von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$ .*

**Beweis:**  $r_0 \in \{\pm 1\}$  sei eine zulässige Richtung und  $\delta > 0$  betragsmäßig hinreichend klein. Bekannt ist, dass beim Parameterübergang von  $\bar{t}$  nach  $\bar{t} + \delta r$  der Wert  $\varphi_{\text{opt}}(\bar{t} + \delta r)$  bei Zugrundelegung subglobal optimaler Reaktionen des Followers auf einem Pfad  $\text{grph } x_{s_0}$  mit  $s_0 \in K_{\min}(\bar{t}, r)$  liegen wird. Nach den Vorbemerkung ist klar, dass dies im Fall  $s_0 \notin \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  Wachstum und damit Verschlechterung der Zielfunktion  $F(\cdot, \cdot)$  des Leaders bedeutete.

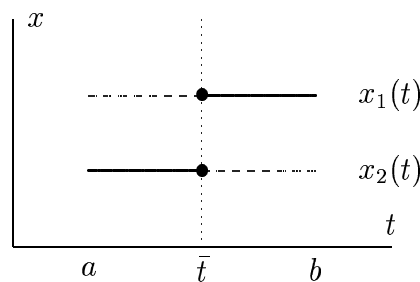
Auch für  $s_0 \in \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  und deshalb  $s_0 \in K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  ergibt sich eine solche, nun allerdings aufgrund der geforderten Positivität der betrachteten Richtungsableitung.  $\square$

Es bleibe an dieser Stelle nicht verschwiegen, dass sich die in [34] veröffentlichte Formulierung der notwendigen Optimalitätskriterien im optimistischen Fall nachträglich leider als inkorrekt herausgestellt hat. Dort wurde behauptet:

Wenn  $(\bar{x}, \bar{t})$  subglobale optimistische Lösung von (EZO) ist, dann gilt für  $r \in \{\pm 1\}$ :

- $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \emptyset$ , oder
- es gibt ein  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$ , so dass  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$ .

Dies ist falsch! Schauen wir zur Illustration auf die folgenden Gegebenheiten.



Nehmen wir an, dass die stark ausgezeichnete Linie die Menge  $\text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ , also die Menge der subglobalen Lösungen der Aufgabe der unteren Ebene sei. Weiterhin sei  $\bar{t}$  lokaler Minimumspunkt der Funktion  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$ . Überdies gelte die Ungleichung  $F(x_1(t), t) < F(x_2(t), t)$  für alle  $t \in [a, b] = T$  und folglich ist  $x_1(\bar{t})$  die Realisation der optimistischen Strategie im Lösungspunkt. Außerdem sollen die Richtungsableitungen  $f(x_1(\bar{t}), \bar{t}; -1)$  und  $f(x_2(\bar{t}), \bar{t}; -1)$  übereinstimmen (eine Eigenschaft, die der Tatsache  $\Gamma_{\text{sg}}(t) = \{2\}$  für  $t < \bar{t}$  nicht widerspricht, wie anhand der Funktionen  $z^2$  und  $z^4$  bereits begründet).

Wir betrachten speziell  $r = -1$ . Es gilt  $\Gamma_{\text{sg}}(\bar{t}) = \{1, 2\}$  und aufgrund der so eben vorausgesetzten Gleichheit der Richtungsableitungen auch  $K_{\text{min}}(\bar{t}) = \{1, 2\}$ . Jedoch gilt  $\Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \{1\}$  und die in der alternativen Formulierung auftretende Relation  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$  ist nur für den Index  $s = 1$  zu überprüfen. Nun ist es aber so, dass der Follower unter der Voraussetzung in erster Linie subglobale Lösungen *seiner* Aufgabe der unteren Ebene zu wählen, bei Verkleinerung des Parameters  $t$  auf einen Wert kleiner  $\bar{t}$  in *jedem Fall* stets mit  $x_2(t)$  antwortet. Die Art und Weise, wie sich die Zielfunktion  $F(\cdot, \cdot)$  der oberen Ebene auf dem Pfad  $\text{grph } x_1$  für  $t < \bar{t}$  verhält, spielt in diesem Zusammenhang keinerlei Rolle. Gleiches gilt natürlich dann auch für die Richtungsableitung  $F(x_1(\bar{t}), \bar{t}; -1)$ , und das Resultat des Vergleichs dieser Zahl mit 0 ist unerheblich.

Leider gibt es im pessimistischen Fall ernsthafte Schwierigkeiten, notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zu formulieren. In gewisser Hinsicht lohnt es sich eventuell noch nicht einmal, in dieser Richtung ernsthafte Bemühungen anzustellen, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel 5.13** *In der Aufgabe der unteren Ebene sei auf einer abgeschlossenen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\bar{t}$  ( $\varepsilon > 0$ ) die Punkt-Menge-Abbildung der subglobalen Lösungen durch*

$$\Psi_{\text{sg}}(t) = \begin{cases} \{x_2(t)\}, & t \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}) \\ \{x_1(t), x_2(t)\}, & t = \bar{t} \\ \{x_1(t)\}, & t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon] \end{cases}$$

*gegeben und für den Parameterwert  $\bar{t}$  gelte  $F(x_1(\bar{t}), \bar{t}) < F(x_2(\bar{t}), \bar{t})$ , was insbesondere  $x_1(\bar{t}) \neq x_2(\bar{t})$  impliziert. Nun kann  $\bar{t}$  in keinem Fall subglobale pessimistische Lösung als Minimumspunkt von  $\varphi_{\text{pess}}(\cdot)$  sein:*

*Offensichtlich ist nämlich  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) = F(x_2(\bar{t}), \bar{t})$  und  $\Gamma_{\text{sg pess}}(\bar{t}) = \{2\}$ , denn wir suchen bei der pessimistischen Herangehensweise unter den subglobalen Lösungen der unteren Ebene diejenige, die den Wert der Zielfunktion der oberen Ebene maximiert. Folglich gilt  $F(x_1(\bar{t}), \bar{t}) < \varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  und wegen der Stetigkeit der Funktionen  $x_1(\cdot)$  und  $F(\cdot, \cdot)$  existiert ein  $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon]$  mit*

$$F(x_1(t), t) < \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) \text{ für alle } t \in [\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon_0]. \quad (47)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $\varepsilon_0 = \varepsilon$ . Nun hat aber der Follower für  $t > \bar{t}$  stets nur eine Reaktion zur Auswahl, nämlich  $x_1(t)$ . Deshalb gilt also  $\Gamma_{\text{sg opt}}(t) = \{1\}$  und  $\varphi_{\text{pess}}(t) = F(x_1(t), t)$ . Der rechte Term in letzterer Gleichung ist aber laut (47) kleiner als  $\varphi_{\text{pess}}(\bar{t})$  und aus

$$\varphi_{\text{pess}}(t) < \varphi_{\text{pess}}(\bar{t}) \text{ für alle } t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon]$$

erschließt sich die behauptete Tatsache, dass  $\bar{t}$  kein lokaler Minimumspunkt von  $\varphi_{\text{pess}}(\cdot)$  sein kann.

Natürlich kann  $\bar{t}$  im Fall  $F(x_1(\bar{t}), \bar{t}) = F(x_2(\bar{t}), \bar{t})$  durchaus ein lokales Minimum von  $\varphi_{\text{pess}}(\cdot)$  realisieren. Verwiesen sei hier nur auf die auf Seite 68 beginnende Diskussion des Beispiels 4.18 auf Seite 66 unter Annahme einer pessimistischen Strategie. Wie dort bereits herausgearbeitet, ist die benötigte Gleichheit der Funktionswerte der oberen Ebene jedoch nichts, was wir im Allgemeinen erwarten können. Eine Beschränkung auf die Fälle, in denen  $\Gamma_{\text{sg}}(t) = \{s_0\}$  auf einer offenen Umgebung des Punktes  $\bar{t}$  einelementig und konstant ist, ergibt aber nur Optimalitätskriterien, wie wir sie schon bei der rein lokalen Betrachtung der Aufgabe angetroffen hatten.

### 5.3 Generizität in der einparametrischen Zwei-Ebenen-Optimierung

Die Beschäftigung mit diesem Gegenbeispiel wirft jetzt die wichtige Frage auf, ob wir mit dem tatsächlichen Eintritt der beschriebenen Situation wirklich rechnen müssen, oder ob vielmehr nach einer wie auch immer gearteten Störung erwartet werden kann, dass das erläuterte Problem nicht auftritt. Ziel wird jetzt also sein, die in der Aufgabe der unteren Ebene erfolgten Generizitätsbetrachtungen auf die *gesamte* Aufgabenstellung (EZO) zu übertragen.

Die sich anschließenden Ausführungen können jedoch lediglich als Anregungen für weitere Untersuchungen verstanden werden. Obwohl die formulierte Hypothese durchaus plausibel ist, sind zu deren Beweis tiefgründige Kenntnisse der Theorie transversaler Abbildungen sowie eine gewisse Versiertheit beim Umgang mit dem Lemma von SARD und dessen Implikationen vonnöten (siehe [15]).

Speziell wird es uns um eine über die Ergebnisse von JONGEN, JONKER und TWILT betreffend die topologische Struktur der Menge  $\Sigma_{\text{gc}}$  durch Einbeziehung der Funktion  $f(\cdot, \cdot)$  hinausgehende Betrachtung der unteren Ebene gehen. Den Abschluss bildet die Untersuchung, wie sich die Beseitigung der noch zu spezifizierenden Degeneration auf die Anwendung der Optimalitätsbedingungen im Satz 5.11 auswirkt.

Dazu betrachten wir nun allerdings wieder die vollständige Überdeckung des Abchlusses der Menge  $\Sigma_{\text{loc}}$  mit Pfaden lokaler Minima. Es sei also unter den Voraussetzungen des Resultates 5.5

$$\mathcal{T} := \bigcup_{s=1}^k (x_k(\cdot), T_k), \quad \text{grph } \mathcal{T} = \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$$

eine solche Überdeckung mit den dortigen Eigenschaften. Ohne weitergehende Begründung sei mitgeteilt, dass die erzielten Ergebnisse sich sofort auf die Überdeckung des Intervalls  $T$  mit parametermaximalen PLM, die nur eine Teilmenge von  $\Sigma_{\text{loc}}$  überdecken, übertragen lassen.

Dazu wollen wir erreichen, dass in der unteren Ebene die Menge  $\bar{T}$  derjenigen Parameter, für die (mindestens) zwei aktive Auswahlfunktionen  $x_{s_1}(\cdot)$  und  $x_{s_2}(\cdot)$  denselben Zielfunktionswert der unteren Ebene repräsentieren, eine diskrete Menge wird und für alle diese Übereinstimmungspunkte  $\bar{t}$  die Richtungsableitungen  $f'(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}; r)$  und  $f'(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t}; r)$  für  $r \in \{\pm 1\}$  nicht gleich sind. Dass so etwas denkbar ist, zeigt der aus der Transversalitätstheorie (siehe z.Bsp. [15]) folgende ...

**Satz 5.14** *Es seien  $f_1, f_2 \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  zweifach stetig differenzierbare Funktionen und  $T \in \mathbf{R}$  kompakt. Dann gelten für fast alle  $a \in \mathbf{R}$  die Aussagen:*

1. *Die Menge  $T_{\text{deg}} = \{t \in T \mid f_1(t) = f_2(t) + a\}$  ist eine diskrete und wegen der Kompaktheit von  $T$  endlich-mächtige Teilmenge von  $T$ .*
2. *Für alle  $\bar{t} \in T_{\text{deg}}$  ist  $f'_1(\bar{t}) \neq f'_2(\bar{t})$ .*

Bevor wir uns diesen Satz zunutze machen können, besteht das Problem, dass in dieser Formulierung nur die Funktion  $f_2(\cdot)$  diejenige ist, die durch den Wert  $a$  gestört wird. Unklar ist, wie diese Auszeichnung in unserer Aufgabenstellung realisiert werden kann. Jedoch kommt uns die im Resultat 5.5 erwähnte Eigenschaft zu Hilfe, dass für alle Parameterwerte  $\bar{t} \in T_{s_1} \cap T_{s_2}$  ( $s_1 \neq s_2$ ) stets  $x_{s_1}(\bar{t}) \neq x_{s_2}(\bar{t})$  gilt. Wir haben also berechtigten Grund zu der Annahme, dass die folgende Vermutung gilt (vergleiche Satz 5.4 auf Seite 97, dessen Aussage hierin enthalten ist):

**Hypothese 5.15** *Es sei  $P_1(t) \in \mathcal{F}^{**}$  und es gelte (A3). Dann hat für fast alle*

$$(b, A, c, D, e, F) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{p \times n} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{q \times n}$$

*das durch die Störung*

$$\begin{aligned} f' &:= f(x, t) + b^\top x + \frac{1}{2} x^\top A x, \\ g' &:= g(x, t) + c + D x, \\ h' &:= h(x, t) + e + F x \end{aligned}$$



gegebene einparametrische Optimierungsproblem  $P'_1(t)$

$$\begin{aligned} f'(x, t) &\rightarrow \min_x \\ g'_i(x, t) &\leq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ h'_j(x, t) &= 0 \quad j = 1, \dots, q \end{aligned}$$

die Eigenschaft, dass  $P'_1(t)$  in  $\mathcal{F}^{**}$  liegt und für die  $\text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$ -Überdeckung

$$\mathcal{T} := \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s), \quad \text{grph } \mathcal{T} = \text{cl } \Sigma_{\text{loc}}$$

für alle  $s_1, s_2 \in \{1, \dots, k\}$  mit  $s_1 \neq s_2$  die Aussagen

- $T_{\text{deg}}(s_1, s_2) := \{f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) = f(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t})\}$  enthält nur endlich viele Elemente, und
- für alle  $\bar{t} \in T_{\text{deg}}(s_1, s_2) \cap (\text{int } T_{s_1} \cup \text{int } T_{s_2})$  und  $r \in \{\pm 1\}$  ist die Ungleichung  $f'(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}; r) \neq f'(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t}; r)$  erfüllt

gelten.

Ein Beweis für diese Aussage steht aus. Ein Gegenbeispiel konnte aber trotz intensiver Suche ebenfalls nicht gefunden werden.

Dass für fast alle genannten Störungsparameter  $P'_1(t) \in \mathcal{F}^{**}$  gilt, ist dabei jedoch offensichtlich, ist doch  $\mathcal{F}^{**}$  eine offene und dichte Teilmenge aller einparametrischen Optimierungsprobleme mit  $q < n$  (siehe Satz 5.3, [17], [30]) und die ungestörte Aufgabe  $P_1(t)$  laut Voraussetzung in dieser Menge enthalten.

Die einparametrischen Probleme der unteren Ebene, in denen die Überdeckung aus Hypothese 5.15 die dortigen Eigenschaften hat, seien mit  $\mathcal{F}^{***}$  bezeichnet.

Da unter der Voraussetzung (A3) nur endlich viele Pfade lokaler Minima zur Abdeckung von  $\Sigma_{\text{loc}}$  benötigt werden und damit auch nur endlich viele Paare  $\{s_1, s_2\} \subseteq \{1, \dots, k\}$  existieren, folgt sofort und ohne Beweis ...

**Lemma 5.16** *Es sei  $P_1(t) \in \mathcal{F}^{***}$  und die Annahmen (A3) und (GMFCQ) sollen gelten.  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  sei eine bzgl. Sprüngen abgeschlossene PLM-Überdeckung mit parametermaximalen Pfaden lokaler Minima. Es sei für jedes  $\bar{t} \in T$  die (bereits bekannte) Indexmenge*

$$\Gamma_{\text{sg}}(\bar{t}) = \{s \in \{1, \dots, k\} \mid \bar{t} \in T_s, (x_s(\bar{t}), \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}\}$$

betrachtet. Dann ist die Menge

$$T_{\text{deg}} := \{\bar{t} \in T \mid \exists s_1, s_2 \in \Gamma_{\text{sg}}(\bar{t}) (s_1 \neq s_2) \text{ mit } f(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}) = f(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t})\}$$

endlich mächtig und für alle  $\bar{t} \in T_{\text{deg}}$  gilt

$$f'(x_{s_1}(\bar{t}), \bar{t}; r) \neq f'(x_{s_2}(\bar{t}), \bar{t}; r) \quad [\forall s_1, s_2 \in \Gamma_{\text{sg}}(\bar{t}), s_1 \neq s_2]$$

für alle zulässigen Richtungen  $r$  ( $r \neq -1$  falls  $\bar{t} = a$  und  $r \neq 1$  falls  $\bar{t} = b$ ).

Deshalb ist für alle  $\bar{t}$  die Menge  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  wie man leicht sieht stets einelementig. Die Auswirkungen dieser Feststellung sind erheblich! Schauen wir uns die drei Bedingungen aus Satz 5.11, von denen im optimistischen Lösungspunkt eine erfüllt sein muss, etwas genauer an:

1. „ $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) = \emptyset$ .“

Dies ist eine sehr schöne Eigenschaft, über deren herausragende Bedeutung bereits hinlänglich berichtet wurde. Eine spezielle Diskussion des Falles  $|K_{\min}(\bar{t}, r)| = 1$  erübrigt sich.

2. „ $K_{\min}(\bar{t}, r) \subseteq \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  und es existiert ein Element  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$ , so dass  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$ .“

Das sieht hier schon etwas anders aus: Da  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  stets einelementig ist, kann sofort

„ $K_{\min}(\bar{t}, r) \subseteq \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  und für alle  $s \in K_{\min}(\bar{t}, r)$  gilt  $F'(x_s(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$ .“

formuliert werden.

3. „ $K_{\min}(\bar{t}, r) \cap \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t}) \neq \emptyset$  und  $K_{\min}(\bar{t}, r) \not\subseteq \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$ .“

In diesem Fall sind die Implikationen dramatisch und (da wir in Ansätzen belegt hatten, dass es hier keine vernünftigen differentiellen Eigenschaften der Funktion  $F(\cdot, \cdot)$  zu konstatieren gibt) in höchstem Maße positiv! Dieser Fall kann nämlich in Aufgaben, in denen  $P_1(t) \in \mathcal{F}^{***}$  ist, gar nicht mehr auftreten. Schließlich bedeutet die Erfülltheit dieser Bedingung, dass es ein  $s_1 \in K_{\min}(\bar{t}, r)$  gibt, welches *ebenso* in  $\Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  enthalten ist, sowie die Existenz eines  $s_2 \in K_{\min}(\bar{t}, r)$ , das *nicht* Element von  $\Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  ist. Um dies möglich zu machen, müsste  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  wenigstens zweielementig sein, was für  $P_1(t) \in \mathcal{F}^{***}$  nicht realisierbar ist.

Leicht verifiziert man, dass dann die Formulierung der Sätze 5.11 und 5.12 die folgende Form annimmt, in der  $k_{\min}(\bar{t}, r)$  das einzige Element von  $K_{\min}(\bar{t}, r)$  bezeichne:

**Lemma 5.17** *In der Aufgabe (EZO) erfülle die Aufgabe  $P_1(t)$  die Annahmen (A3) und (GMFCQ). Es sei sogar  $P_1(t) \in \mathcal{F}^{***}$ . In der bzgl. Sprüngen abgeschlossenen PLM-Überdeckung  $\mathcal{T} = \bigcup_{s=1}^k (x_s(\cdot), T_s)$  seien alle Pfade lokaler Minima parametermaximal.*

*Es sei  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{grph } \Psi_{\text{sg}}$ . Abkürzend sei stets  $s(r) = k_{\min}(\bar{t}, r)$ . Dann gilt:*

- Ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung von (EZO) als lokales Minimum von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$ , dann gilt für jedes zulässige  $r \in \{\pm 1\}$ 
  1.  $s(r) \notin \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$ , oder
  2.  $F'(x_{s(r)}(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0$ .
- Ist  $s(r) \notin \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})$  oder  $F'(x_{s(r)}(\bar{t}), \bar{t}; r) > 0$  für jedes zulässige  $r$ , dann ist  $\bar{t}$  subglobale optimistische Lösung von (EZO).

Noch weiter kann die Formulierung vereinfacht werden, wenn wir die jeweiligen Bedingungen als Implikationen schreiben. Es sei daran erinnert, dass „ $A \Rightarrow B$ “ unter anderem immer dann wahr ist, wenn  $A$  falsch ist.

**Satz 5.18** *Man betrachte (EZO) unter den Bedingungen und mit den Bezeichnung aus 5.17.*

*Ist  $(\bar{x}, \bar{t})$  eine subglobale optimistische Lösung von (EZO), dann gilt für jedes zulässige  $r \in \{\pm 1\}$*

$$(s(r) \in \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})) \Rightarrow F'(x_{s(r)}(\bar{t}), \bar{t}; r) \geq 0.$$

*Gilt*

$$(s(r) \in \Gamma_{\text{sg opt}}(\bar{t})) \Rightarrow F'(x_{s(r)}(\bar{t}), \bar{t}; r) > 0$$

*für alle zulässigen  $r$ , dann ist  $\bar{t}$  subglobale optimistische Lösung von (EZO) als lokales Minimum von  $\varphi_{\text{opt}}(\cdot)$ .*

Mit diesem Satz ist ein Werkzeug gegeben, einparametrische Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben unter Zugrundelegung einer optimistischen Strategie erfolgversprechend zu behandeln.

## Literatur

- [1] B. Bank, J. Guddat, D. Klatt, B. Kummer, K. Tammer. *Non-linear parametric optimization*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
- [2] J. F. Bard, J. Plummer, J.-C. Sourie. *Determining tax credits for converting nonfood crops to biofuels: An application of bilevel programming*. In: *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. A. Migdalas et al. (Herausg.), Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] J. F. Bard, J. Plummer, J.-C. Sourie. *A bilevel programming approach to determining tax credits for biofuel production*. *European Journal Oper. Res.* 120, 1(2000)30-46.

- [4] S. Dempe. *A necessary and a sufficient optimality condition for bilevel programming problems*. Optimization, 25(1992)341-354.
- [5] S. Dempe. *Directional differentiability under Slater's condition*. Mathematical Programming, 59(1993)49-69.
- [6] S. Dempe. *Computing optimal incentives via bilevel programming*. Optimization, 33(1995)29-42.
- [7] S. Dempe. *An implicit function approach to bilevel programming problems*. In: *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. A. Migdalas et al. (Herausg.), Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] S. Dempe, S. Vogel. *The subdifferential of the optimal solution in parametric optimization*. In: *Proceedings of the International Conference on Parametric Optimization and Related Topics V, Tokyo 1997*. J. Guddat et al. (Herausg.), Verlag Peter Lang, 2000.
- [9] A. V. Fiacco, G. P. McCormic. *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques*. J. Wiley & Sons, New York, 1968.
- [10] J. Gauvin. *A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming*. Mathematical Programming, 12(1977)136-138.
- [11] J. Guddat, F. Guerra Vazquez, H. Th. Jongen. *Parametric optimization: Singularities, pathfollowing, and jumps*. J. Wiley & Sons, 1990.
- [12] J. Guddat, H. Th. Jongen, J.-J. Rückmann. *On stability and stationary points in nonlinear optimization*. J. Aust. Math. Soc., Serie B, 28(1986)36-56.
- [13] F. Guerra, G. López. *A parametric embedding for the finite minimax problem*. Mathematical Methods of Operations Research, 49(1999)359-371.
- [14] P. T. Harker, J.-S. Pang. *Existence of optimal solutions to mathematical programs with equilibrium constraints*. Operations Research Letters, 7(1988)61-64.
- [15] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics, Bd. 33, Springer-Verlag, 1976. Korrigierte 5. Fassung 1994.
- [16] Y. Ishizuka, E. Aiyoshi. *Double Penalty Method for Bilevel Optimization Problems*. Annals of Operations Research, 34(1992)73-88.
- [17] H. Th. Jongen, P. Jonker, F. Twilt. *Critical sets in parametric optimization*. Mathematical Programming, 34(1986)333-353.

- [18] H. Th. Jongen, G.-W. Weber. *Nonconvex optimization and its structural frontiers*. Lect. Notes in Economics and Mathematics, Bd. 378 (W. Krabs, J. Zowe, eds.) Ss. 151-203, 1992.
- [19] M. Kojima. *Strongly stable stationary solutions in nonlinear programs*. In: *Analysis and computation of fixed points*. Academic Press, 1980.
- [20] M. A. Krasnoselskiĭ, P. P. Zabreĭko. *Geometricheskie metody nelinejnogo analiza*. Verlag Nauka, Moskau, 1975.
- [21] P. Loridan, J. Morgan. *Approximate solutions for two-level optimization problems*. In: *Trends in Mathematical Optimization*. K.-H. Hoffmann, J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal, J. Zowe (Herausg.) 1988.
- [22] P. Loridan, J. Morgan. *Quasiconvex lower level problems and applications in two-level optimization*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 345(325-341), Springer-Verlag, 1990.
- [23] P. Loridan, J. Morgan. *New results on approximate solutions in two-level optimization*. Optimization 20(1989)819-836.
- [24] P. Loridan, J. Morgan. *A theoretical approximation scheme for Stackelberg problems*. J. Optim. Theory Appl., 16(1989)95-110.
- [25] R. Lucchetti, F. Mignanego, G. Pieri. *Existence theorems of equilibrium points in Stackelberg games with constraints*. Optimization 18(1987)857-866.
- [26] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang, D. Ralph. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, 1997.
- [27] W. Oeder. *Ein Verfahren zur Lösung von Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben in Verbindung mit der Untersuchung von chemischen Gleichgewichten*. Dissertation, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, 1988.
- [28] J. Outrata, M. Kočvara, J. Zowe. *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [29] D. Ralph, S. Dempe. *Directional derivatives of the solution of a parametric nonlinear program*. Math. Program., 70(1995)159-172.
- [30] J.-J. Rückmann. *Einparametrische nichtkonvexe Optimierung: Strukturuntersuchungen und eine Verallgemeinerung des Einbettungsprinzips*. Dissertation, Technische Hochschule Leipzig, 1988.
- [31] H. Schmidt. *Zwei-Ebenen-Optimierungsaufgaben mit mehrelementiger Lösung der unteren Ebene*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz, 1995.

- [32] S. Scholtes. *Introduction to piecewise differentiable equations*. Technischer Report 53/1994, Universität Karlsruhe, Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie, 1994.
- [33] D. Siersma. *Singularities of functions on boundaries, corners, etc.* Q. J. Math., Oxford II Series 32(1981)119-127.
- [34] S. Vogel, S. Dempe. *Pathfollowing and jumps in bilevel programming*. In: *Operations Research Proceedings 1999*. K. Inderfurth et al. (Herausg.), Springer-Verlag 2000.
- [35] H. von Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*. Springer-Verlag Berlin, 1934.