

Knotenfärbungen mit Abstandsbedingungen

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg
genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.,

vorgelegt

von Dipl.-Math. Anja Kohl

geboren am 3. März 1978 in Elsterwerda

Gutachter: Prof. Dr. Ingo Schiermeyer (Freiberg)

Prof. Dr. Margit Voigt (Dresden)

Prof. Dr. Arnfried Kemnitz (Braunschweig)

Tag der Verleihung: 30. August 2006

*meinem Vater gewidmet,
der dies nicht mehr erleben kann*

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mir in den letzten Jahren mit Rat und Tat zur Seite standen und somit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ein besonderer Dank gebührt dabei meinen Eltern.

Meinem Doktorvater Professor Ingo Schiermeyer danke ich für die gute Betreuung und für seine wertvollen Hinweise und Anregungen, die meine Freude an der Diskreten Mathematik gefördert haben; nicht zu vergessen, für seinen unermüdlichen Einsatz, mich für die Teilnahme an Konferenzen und Workshops zu begeistern und zum Halten von Vorträgen zu bewegen.

Meinem Kollegen Herrn Professor Martin Sonntag danke ich für fünf Jahre bester Zusammenarbeit und für seine immerwährende Hilfsbereitschaft in fachlichen oder (rechen)technischen Fragen und in allen Lebenslagen.

Frau Professor Margit Voigt und Herrn Professor Arnfried Kemnitz danke ich dafür, daß sie sich bereit erklärt haben, diese Dissertation zu begutachten und sich durch 150 Seiten zu arbeiten.

Meinem besten Freund Jörg Beykirch danke ich für seinen positiven Einfluß auf mich, der selbst bei großer räumlicher Distanz immer spürbar ist.

Ferner danke ich allen meinen Kollegen im "Institut für Diskrete Mathematik und Algebra" und meiner ehemaligen Kollegin Irmgard Gugel für das angenehme, kameradschaftliche und bisweilen humorvolle Arbeitsumfeld.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	7
2.1. Färbungen	7
2.1.1. Klassische Färbungen	8
2.1.2. T -Färbungen	10
2.1.3. Färbungen mit Abstandsbedingungen	12
2.2. Listenfärbungen	15
2.2.1. Klassische Listenfärbungen	15
2.2.2. T -Listenfärbungen	21
2.2.3. Listenfärbungen mit Abstandsbedingungen	23
3. Färbungen mit maximal zwei Abstandsbedingungen	27
3.1. $L(d, 0)$ -Labellings	27
3.2. $L(d, s)$ -Labellings	28
3.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Resultate	30
3.2.2. Exakte Werte für $\lambda_{d,s}$ einfacher Graphenklassen	31
3.3. Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen	32
3.3.1. Reguläre Parkettierungen	32
3.3.2. Potenzen von Wegen	35
3.3.3. Potenzen von Kreisen	41
3.4. Abschätzung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen	72
3.4.1. Graphen vom Durchmesser 2	72
3.4.2. Bäume	80
3.4.3. Outerplanare und K_4 -Minor-freie Graphen	85
3.4.4. Schranken für $\lambda_{d,1}$ wichtiger Graphenklassen	86
4. Listenfärbungen mit maximal zwei Abstandsbedingungen	87
4.1. $L(d, 0)$ -List Labellings	87
4.2. $L(d, s)$ -List Labellings	89
4.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Resultate	90
4.2.2. Schranken für $\chi_\ell^{d,s}$ von Bäumen und Kreisen	94
4.3. Abschätzung von χ_ℓ^d und $\chi_\ell^{d,1}$ für Kakteen	108
4.4. Graphen mit $\chi_\ell^{2,1} = \lambda_{2,1} + 1$	124

5. Weitere Färbungskonzepte	132
5.1. s -separierte $L(d, s)$ -Labellings	132
5.2. Zirkuläre $L(d, s)$ -Labellings	133
5.3. Consecutive $L(d, 0)$ -List Labellings	135
6. Zusammenfassung und Ausblick	136
A. Literaturverzeichnis	141
B. Symbolverzeichnis	148
C. Definitionen	149
D. Index	151

1. Einleitung

Durch die ständig wachsende Zahl an drahtlosen Kommunikationssystemen ist das Frequenzspektrum zu einer der begehrtesten Ressourcen unserer Zeit geworden. Daher wird es immer wichtiger, Frequenzkanäle möglichst effektiv zu verteilen. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich das *Frequenzzuweisungsproblem*.

Betrachten wir dieses Problem am Beispiel eines terrestrischen Mobilfunknetzes. Auf dem zu bedienenden Gebiet werden im Abstand von mehreren Kilometern Sendeantennen – die sogenannten Basisstationen – errichtet. Jede Basisstation ist für eine bestimmte Fläche – ihre Funkzelle – zuständig. Die Größe und Gestalt der Funkzelle hängt dabei vor allem von den geographischen Gegebenheiten und von der Sendereichweite der Basisstation ab. Um korrekt arbeiten zu können, benötigt jede Basisstation Frequenzkanäle, deren Anzahl sich aus Funkverkehrsprognosen ergibt. Liegen die zugewiesenen Frequenzkanäle im Frequenzspektrum zu dicht beieinander, kann es zu Interferenzen kommen. Ebenso kann der Funkverkehr gestört sein, wenn Basisstationen, deren Funkzellen benachbart sind, auf ähnlichen Frequenzkanälen senden. Je nach Sendekraft der Antennen und anderen Einflüssen können Interferenzen auch bei weiter voneinander entfernten Basisstationen auftreten. Unter Berücksichtigung aller dieser Bedingungen müssen nun den Basisstationen aus einem vorgegebenen Frequenzband die benötigten Frequenzkanäle zugewiesen werden. Dabei kommt erschwerend hinzu, daß aus rechtlichen oder technischen Gründen nicht jeder Frequenzkanal für jede Basisstation verwendet werden darf.

Zusammenfassend ergibt sich beim Frequenzzuweisungsproblem die folgende Ausgangssituation:

Allgemeines Modell des Frequenzzuweisungsproblems:

- Ein terrestrisches Mobilfunknetz mit n Basisstationen B_1, \dots, B_n ,
- Die Anzahl a_i der benötigten Frequenzkanäle für die Basisstation B_i , $i = 1, \dots, n$,
- Die Liste L_i erlaubter Frequenzkanäle für die Basisstation B_i , $i = 1, \dots, n$,
- Eine Menge T_{ij} , die sämtliche Level enthält, bei denen Interferenzen zwischen Signalen der Basisstationen B_i und B_j , $i, j = 1, \dots, n$, auftreten.

Grob unterscheidet man für dieses Problem zwei verschiedene Aufgabenstellungen: Bei realen Mobilfunknetzen ist es üblich, für eine gegebene Menge an verfügbaren Frequenzkanälen eine Frequenzzuweisung mit dem Ziel der Interferenzminimierung durchzuführen. Aufgrund der zahlreichen zu erfüllenden Bedingungen ist das allgemeine Frequenzzuweisungsproblem jedoch zu komplex, um es optimal auf effiziente Weise lösen zu können. Daher begnügt man sich in der Praxis mit Näherungslösungen, die durch Anwendung verschiedener Heuristiken erhalten werden.

In der theoretischen Forschung zieht man eher eine Frequenzzuweisung vor, bei der alle Bedingungen eingehalten werden, jedoch die Anzahl der dafür benötigten Frequenzkanäle bzw. die Differenz zwischen kleinstem und größtem verwendeten Frequenzkanal zu minimieren ist. Diese Varianten sollen auch hier von Interesse sein. Sie sind eng verwandt mit dem Graphenfärbungsproblem. Um diesen Zusammenhang nutzen zu können, muß zuerst das praktische Problem in die Sprache der Graphentheorie übersetzt werden. Der Einfachheit halber werden dabei die Frequenzkanäle mit natürlichen Zahlen numeriert und wir beschränken uns darauf, jeder Basisstation nur einen Frequenzkanal zuzuweisen. Um einen Graphen $G = (V, E)$ zu dem realen Mobilfunknetz zu konstruieren, wird jeder Basisstation ein Knoten zugeordnet. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn auf mindestens einem Level Interferenz zwischen den beiden zugehörigen Basisstationen auftreten kann. Jeder Kante e wird die Menge $T(e)$ der zugehörigen Interferenzlevel zugeordnet. Ferner wird jedem Knoten v eine Liste $L(v)$ der erlaubten Farben, d.h. der möglichen Frequenzkanäle, zugewiesen. Damit erhalten wir das folgende Modell:

Graphentheoretisches Modell des Frequenzzuweisungsproblems:

Das allgemeine Frequenzzuweisungsproblem wird graphentheoretisch beschrieben durch ein Tripel $(G, \mathcal{L}, \mathcal{T})$, wobei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = V(G)$ und der Kantenmenge $E = E(G)$ ist, und \mathcal{L}, \mathcal{T} Mengen 2. Stufe sind mit den Eigenschaften:

$$\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\} \text{ mit } \forall v \in V : L(v) \subseteq \mathbb{N},$$

$$\mathcal{T} = \{T(e) \mid e \in E\} \text{ mit } \forall e \in E : T(e) \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in T(e).$$

Das Ziel bei diesem Problem ist, eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ zu bestimmen, so daß gilt:

1. $\forall v \in V : f(v) \in L(v),$
2. $\forall e \in E : |f(v) - f(w)| \notin T(e),$ wobei $e = \{v, w\}.$

Für die Modellierung dieses Problems als Graphenfärbung gibt es eine Reihe von Konzepten, welche unterschiedliche Aspekte des Problems berücksichtigen. Der einfachste Ansatz ist anzunehmen, daß nur zwischen Basisstationen mit benachbarten Funkzellen Interferenz auftreten kann. Dazu ordnet man jeder Basisstation einen Knoten zu und verbindet zwei Knoten genau dann durch eine Kante miteinander, wenn die Funkzellen der beiden Basisstationen benachbart sind. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel dafür.

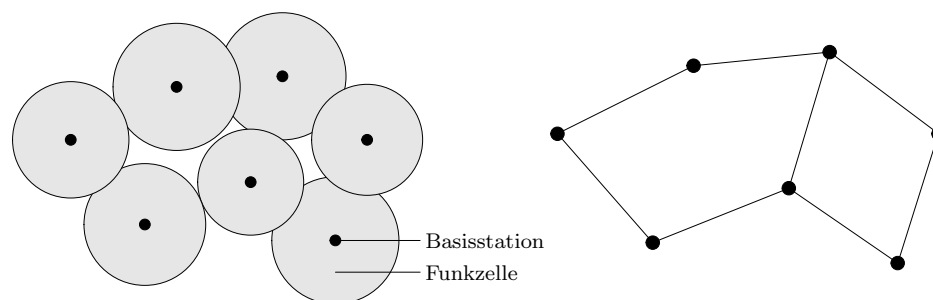


Abbildung 1.1.: Funknetz und ein einfaches graphentheoretisches Modell

Die Knoten des entstandenen Graphen $G = (V, E)$ sollen nun zulässig gefärbt werden. Da jedoch bei der gewöhnlichen Knotenfärbung weder die verschiedenen Interferenzlevel noch die Listen erlaubter Frequenzkanäle berücksichtigt werden, ist es sinnvoller, eines der folgenden erweiterten Färbungskonzepte zu verwenden:

***T*-Färbung**

Es wird eine Menge T verbotener Differenzen (inklusive 0) vorgegeben. Eine T -Färbung ist eine Knotenfärbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ des Graphen, bei der $|f(v) - f(w)| \notin T$ für je zwei adjazente Knoten $v, w \in V$ gilt.

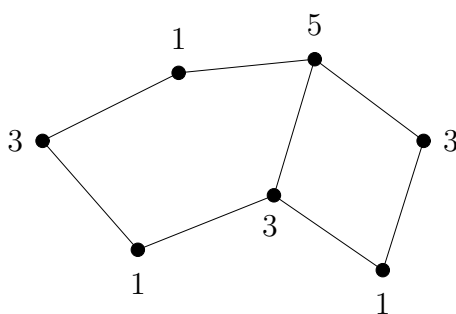


Abbildung 1.2.: T -Färbung eines Graphen für $T = \{0, 1, 3\}$

Mit der Menge T lassen sich verschiedene Interferenzlevel simulieren. Dadurch kann man mit der T -Färbung eine Frequenzzuweisung erreichen, bei der bestimmte Interferenzen vermieden werden. Diese sind aber für alle Kanten gleich. Außerdem werden die Mengen erlaubter Frequenzkanäle nicht berücksichtigt.

Listenfärbung

Es wird jedem Knoten $v \in V$ eine Menge $L(v)$ erlaubter Farben zugeordnet. Eine Listenfärbung ist eine Knotenfärbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ des Graphen, die jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe $f(v) \in L(v)$ zuordnet, so daß $f(v) \neq f(w)$ für je zwei adjazente Knoten $v, w \in V$ gilt.

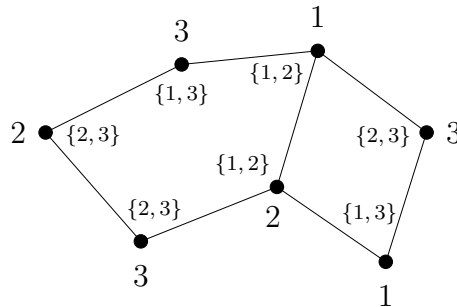


Abbildung 1.3.: Listenfärbung eines Graphen

Mit den vorgegebenen Mengen $L(v)$, welche auch Listen genannt werden, können offensichtlich die Mengen der erlaubten Frequenzkanäle simuliert werden. Jedoch werden Interferenzlevel, außer Level 0, ignoriert.

Um die Vorteile beider Konzepte zu nutzen, wird oftmals die T -Listenfärbung betrachtet. Diese berücksichtigt die Mengen erlaubter Frequenzkanäle und eine Menge von Interferenzleveln, die jedoch für alle Kanten gleich ist.

Bei den oben genannten Konzepten werden die Interferenzen, die zwischen Basisstationen mit nicht benachbarten Funkzellen auftreten, außer acht gelassen. Daher ist der nächstliegende Schritt, die Interferenzen zwischen Basisstationen, deren Funkzellen durch eine dazwischenliegende Funkzelle getrennt sind, in die Modellierung aufzunehmen. Man betrachtet nun nicht mehr nur die adjazenten Knoten im zugeordneten Graphen, sondern auch sämtliche Knoten mit paarweise Abstand 2.

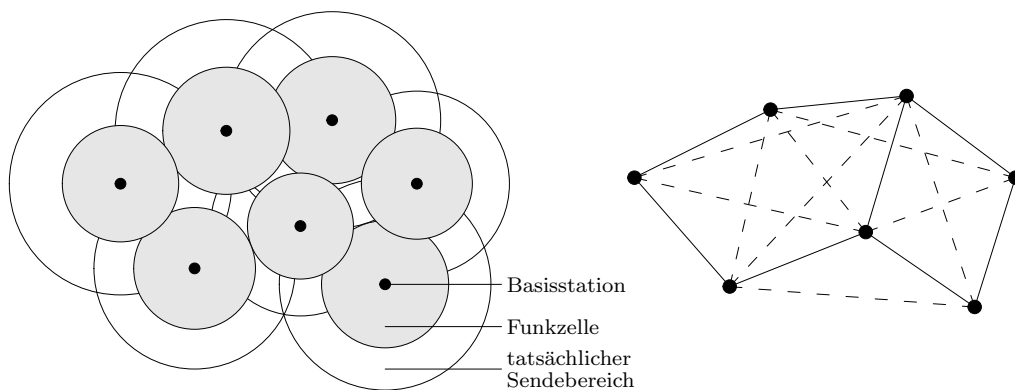


Abbildung 1.4.: Funknetz mit Sendebereichen und ein graphentheoretisches Modell

Färbungen mit Abstandsbedingungen

Es werden Abstandsbedingungen d und s mit $d \geq s$ festgelegt.

Ein $L(d, s)$ -Labelling ist eine Knotenfärbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ des Graphen, bei der $|f(v) - f(w)| \geq d$ gilt, wenn $v, w \in V$ adjazent sind, und $|f(v) - f(w)| \geq s$, wenn $v, w \in V$ Abstand 2 haben.

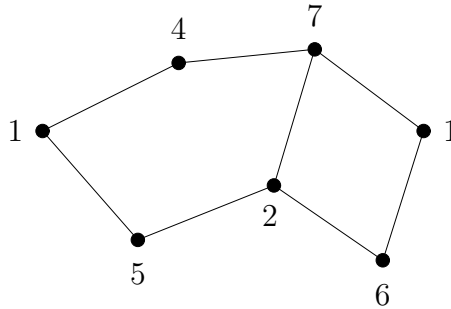


Abbildung 1.5.: $L(3, 1)$ -Labelling eines Graphen

$L(d, s)$ -Labellings vermeiden bei adjazenten Knoten die Interferenzlevel $0, \dots, d - 1$ und bei Knoten im Abstand 2 die Level $0, \dots, s - 1$. Wählt man d und s hinreichend groß, so läßt sich mit einem $L(d, s)$ -Labelling eine Frequenzzuweisung erreichen, bei der Interferenzen zwischen Basisstationen mit benachbarten Funkzellen bzw. mit Funkzellen, welche eine gemeinsame Nachbarfunkzelle haben, ausgeschlossen sind. Im Vergleich zur T -Färbung ist ein $L(d, s)$ -Labelling bei den Interferenzen von adjazenten Knoten zu restriktiv. Ferner werden die erlaubten Frequenzkanäle nicht berücksichtigt.

Daher gibt es auch zu diesem Färbungskonzept eine Listenversion – die sogenannten $L(d, s)$ -List Labellings.

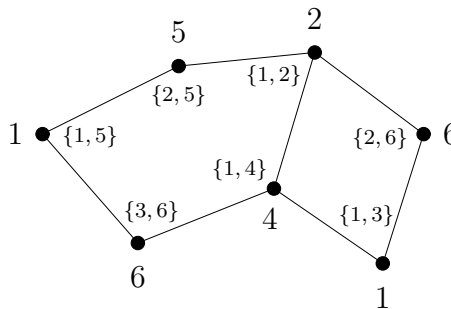


Abbildung 1.6.: $L(2, 1)$ -List Labelling eines Graphen

Um auch Interferenzen zwischen weiter entfernten Basisstationen zu vermeiden, kann man das Konzept der Färbungen mit Abstandsbedingungen auf eine beliebige Distanz r ausdehnen. D.h., es wird ein r -Tupel $P = (p_1, \dots, p_r)$ von Abstandsbedingungen festgelegt und man bestimmt eine Knotenfärbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ des Graphen, bei der $|f(v) - f(w)| \geq p_i$ für je zwei Knoten $v, w \in V$ im Abstand $i \leq r$ gilt. Solche Färbungen werden als L_P -Labellings bezeichnet.

Natürlich kann man L_P -Labellings auch als Listenfärbung modellieren; es ergeben sich die sogenannten L_P -List Labellings. Ist dabei r gleich der maximalen Distanz zweier Knoten, zwischen denen Interferenz auftreten kann, und wählt man die Abstandsbedingungen p_i groß genug, so kann man mit einem L_P -List Labelling eine Frequenzzuweisung ermitteln, bei der keine Interferenzen auftreten und alle Frequenzkanäle aus den erlaubten Mengen stammen.

Färbungen mit Abstandsbedingungen sind das Thema dieser Arbeit.

In Kapitel 2 werden alle drei soeben erwähnten Knotenfärbungsvarianten exakt definiert und es werden wichtige Resultate und Eigenschaften für jedes Färbungskonzept zusammengefaßt. In Kapitel 3 befassen wir uns mit den $L(d, s)$ -Labellings, d.h. den Färbungen mit Abstand-1- und Abstand-2-Bedingung. Den wesentlichen Anteil dieses Kapitels bildet die Berechnung bzw. Abschätzung von $\lambda_{d,1}$ – die minimale Differenz zwischen der größten und der kleinsten verwendeten Farbe bei einem $L(d, 1)$ -Labelling – für reguläre Parkettierungen, Weg- und Kreispotenzen, Graphen mit Durchmesser 2, Bäume sowie outerplanare und K_4 -Minor-freie Graphen. In Kapitel 4 betrachten wir die $L(d, s)$ -List Labellings; hauptsächlich für einfache Graphen, wie Wege, Sterne und Kreise. Für diese geben wir Schranken für $\chi_\ell^{d,s}$ – die Mindestgröße der Listen erlaubter Farben, so daß stets ein $L(d, s)$ -List Labelling existiert – an. Anschließend berechnen wir Schranken für $\chi_\ell^{d,0}$ und $\chi_\ell^{d,1}$ von Kakteen. Im letzten Abschnitt des Kapitels beweisen wir für einige spezielle Bäume die Gleichheit von $\chi_\ell^{2,1}$ und $\lambda_{2,1} + 1$. In Kapitel 5 bieten wir einen Einblick in weiterführende Färbungsarten mit Abstandsbedingungen und stellen drei solcher Varianten explizit vor. In Kapitel 6 geben wir eine kurze Zusammenfassung der Arbeit und zeigen eine Reihe offener Fragen sowie mögliche Richtungen für weitergehende Forschungen.

2. Grundlagen

Für das Verständnis dieser Arbeit werden grundlegende Begriffe aus der Graphentheorie vorausgesetzt, die der gängigen graphentheoretischen Literatur entnommen werden können. Unter anderem empfiehlt sich dabei das "Handbook of Graph Theory" [52] bzw. "Graphentheorie" [30] als Vertreter der deutschsprachigen Literatur. Wesentliche Begriffe und Symbole werden im Verlauf dieser Arbeit definiert bzw. im Anhang ab Seite 148 aufgeführt.

Im folgenden sei $G = (V, E)$ ein schlichter, endlicher, ungerichteter Graph mit der Knotenmenge $V = V(G)$ und der Kantenmenge $E = E(G)$. Sofern nicht anders vereinbart, ist $n = n(G)$ die Ordnung von G , also $n = |V|$, und $E \neq \emptyset$. $\Delta = \Delta(G)$ bezeichne den Maximalgrad von G .

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf zusammenhängende Graphen, da sich die gesuchte Grapheninvariante bei jeder betrachteten Färbungsart als Maximum über alle Komponenten des Graphen ergibt.

Für einen Knoten $v \in V$ sei $N(v)$ die Nachbarschaft von v , d.h. die Menge aller zu v adjazenten Knoten. Ferner sei $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Für den Knotengrad von v – die Anzahl der zu v inzidenten Kanten – schreiben wir $\deg(v)$. Ist $\deg(v) = k$, so wird v auch als k -Knoten bezeichnet. Der Abstand $\text{dist}(v, w)$ zweier Knoten $v, w \in V$ ist die Anzahl der Kanten eines kürzesten Weges von v nach w . Für eine Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ und eine Menge $U \subseteq V$ sei $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$.

2.1. Färbungen

Das bekannteste Problem aus der Graphentheorie ist sicherlich das *Vier-Farben-Problem*. Bereits 1852 wurde von Francis Guthrie die Vermutung aufgestellt, daß jede Landkarte derart mit vier Farben gefärbt werden kann, daß benachbarte Länder stets verschiedene Farben erhalten. Dabei wird vorausgesetzt, daß jedes Land aus einer zusammenhängenden Fläche besteht, und daß zwei Länder dann als benachbart gelten, wenn sie eine gemeinsame Grenze, nicht nur einen gemeinsamen Punkt, besitzen.



Ein Jahrhundert lang blieb dieses Problem ungelöst und war Antrieb für zahlreiche Forschungen, die wesentlich dazu beitrugen, die Graphentheorie zu dem zu machen, was sie heute ist.

1879 veröffentlichte Kempe [64] den ersten vermeintlichen Beweis, dessen Fehlerhaftigkeit jedoch 11 Jahre später von Heawood [55] nachgewiesen wurde. Immerhin konnten aber Kempes Methoden, welche unter dem Namen "Kempe-Ketten" bekannt wurden, dazu verwendet werden, den *Fünffarbensatz* – Jede Landkarte ist mit fünf Farben färbbar – zu zeigen.

Im Jahre 1976 wurde die Vier-Farben-Vermutung von Appel, Haken und Koch [6],[7] bewiesen. Sie bedienten sich dabei der Hilfe von Computern und über 1000 Stunden Berechnungsdauer. Da dieser Beweis so umfangreich und deshalb schwer nachprüfbar war, waren letzte Zweifel lange nicht ausgeräumt. Inzwischen geht man aber von der Richtigkeit des *Vierfarbensatzes* aus. Robertson, Sanders, Seymour und Thomas [85] präsentierten 1996 einen einfacheren und kürzeren Beweis, der jedoch auf den gleichen Ideen wie sein Vorgänger beruht und ebenfalls nicht ohne Computer verifizierbar ist. Weitere Informationen zur Geschichte des Vier-Farben-Problems finden sich in [3].

Das Vier-Farben-Problem läßt sich graphentheoretisch durch Übergang zu dem sogenannten Dualgraphen modellieren. Der *Dualgraph* zu einer gegebenen Landkarte ist der Graph, welcher entsteht, indem man jedem Land einen Knoten zuordnet und zwei Knoten genau dann durch eine Kante miteinander verbindet, wenn die zugehörigen Länder benachbart sind. Dualgraphen von Landkarten können stets derart in die Ebene gezeichnet werden, daß sich die Kanten nicht überkreuzen. Graphen mit dieser Eigenschaft nennt man *planare Graphen*. Das Vier-Farben-Problem ist damit äquivalent zu der Fragestellung, ob die Knoten eines planaren Graphen stets mit vier Farben gefärbt werden können, so daß adjazente (benachbarte) Knoten stets verschieden gefärbt sind.

Die Theorie der Knotenfärbungen ist in der Zwischenzeit beständig erweitert worden. Zum einen werden nicht mehr nur planare Graphen untersucht; zum anderen wird das Färbungskonzept selbst ständig verallgemeinert. Die nun folgenden Abschnitte geben einen Überblick über einige Entwicklungen auf diesem Gebiet. Besonderer Wert wird dabei auf diejenigen Konzepte und Resultate gelegt, die in Verbindung mit dem Thema dieser Arbeit stehen.

2.1.1. Klassische Färbungen

Definition 2.1 *Eine Knotenfärbung oder kurz Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{N}$, so daß $f(x) \neq f(y)$ für je zwei adjazente Knoten $x, y \in V$ gilt.*

Existiert eine Färbung mit k Farben, so sagt man, der Graph ist k -färbbar. Das kleinste k , für welches G k -färbbar ist, heißt chromatische Zahl von G und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet.

Schranken für die chromatische Zahl

In einem vollständigen Graphen müssen die Knoten stets paarweise verschiedene Farben erhalten. Daher ist die chromatische Zahl eines Graphen G stets mindestens so groß wie die Mächtigkeit eines größten in G existierenden vollständigen Untergraphen (*Clique*). Diese Mächtigkeit heißt *Cliquenzahl* $\omega(G)$ von G .

Läßt sich für die Knoten eines Graphen G eine Knotenordnung v_1, \dots, v_n angeben, so daß $|N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}| \leq k - 1$ für alle $i = 2, \dots, n$ erfüllt ist, dann heißt G $(k - 1)$ -degeneriert. Offensichtlich ist ein solcher Graph stets k -färbbar, da man die Knoten in der vorgegebenen Reihenfolge mit Hilfe eines Greedy-Algorithmus färben kann.

Das kleinste k , für welches G $(k - 1)$ -degeneriert ist, bezeichnet man als *coloring number* $col(G)$, was laut [30] mit *Reihenzahl* von G zu übersetzen ist. Neben der Definition durch den Degenerationsbegriff kann man die Reihenzahl auch als größte Zahl k auffassen, so daß G einen Untergraphen mit Minimalgrad $k - 1$ besitzt. Damit ist $col(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$. Insgesamt ergibt sich:

Satz 2.1 *Für jeden Graphen G gilt*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq col(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Bereits 1941 veröffentlichte Brooks [16] seinen mittlerweile berühmten und viel zitierten Satz:

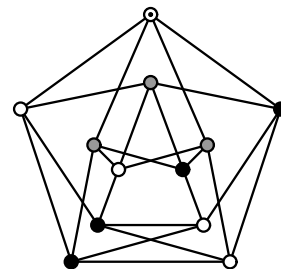
Satz 2.2 (Satz von Brooks) *Ist ein zusammenhängender Graph G vollständig oder ein Kreis ungerader Länge, dann ist $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Andernfalls gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Neuere Überlegungen (siehe u.a. [83]) gehen inzwischen dahin, daß "diese obere Schranke nur die Spitze des Eisbergs ist, und daß der Eisberg in Wirklichkeit wie folgt aussieht" (Zitat von Reed):

Vermutung 2.1 (Reed, [83]) *Für jeden Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1 + \omega(G)}{2} \right\rceil.$$

Der sogenannte *Chvátal-Graph* (siehe Bild rechts) – der kleinste 4-reguläre, dreiecksfreie Graph – mit Ordnung 12 und chromatischer Zahl 4 zeigt, daß das Aufrunden des Bruches $\frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2}$ notwendig ist.



Differenz zwischen Cliquenzahl und chromatischer Zahl

Einem klassischen Resultat von Erdős [32] zufolge, kann die Differenz zwischen chromatischer Zahl und Cliquenzahl beliebig groß sein. Konkret bewies er, daß für jede beliebige Konstante c und für alle $k > 1, g > 2$ ein nicht k -färbbarer Graph mit Taillenweite g und Ordnung $c \cdot k^{2g}$ existiert.

Der kleinste Graph, für den Cliquenzahl und chromatische Zahl nicht übereinstimmen, ist der Kreis C_5 der Länge 5 mit $\omega(C_5) = 2$ und $\chi(C_5) = 3$. Für den oben erwähnten Chvátal-Graphen gilt bereits $\chi - \omega = 2$. Einer Idee von Mycielski (siehe z.B. [81]) zufolge, läßt sich für jedes beliebige k ein dreiecksfreier Graph mit chromatischer Zahl k konstruieren. Folglich existiert für jedes k ein Graph G mit $\chi(G) - \omega(G) = k - 2$.

Eine besondere Klasse von Graphen bilden die perfekten Graphen. Ein Graph G heißt *perfekt*, wenn $\omega(H) = \chi(H)$ für jeden induzierten Untergraphen $H \subseteq G$ gilt. Bereits 1960 stellte Berge [8] die Vermutung auf, daß perfekte Graphen genau diejenigen Graphen sind, die weder einen ungeraden Kreis der Länge mindestens 5 noch das Komplement eines solchen Kreises als induzierten Untergraphen besitzen. Derartige Graphen bezeichnet man als *Berge-Graphen*.

Berges Vermutung schien lange Zeit unlösbar und initiierte intensive Forschung und zahlreiche Veröffentlichungen. Aufbauend auf diesen Vorarbeiten konnte die Vermutung kürzlich von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas [27] vollständig bewiesen werden:

Satz 2.3 (Strong Perfect Graph Theorem) *Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn weder G noch sein Komplement \overline{G} einen ungeraden Kreis der Länge größer gleich 5 als induzierten Untergraphen besitzt.*

2.1.2. T -Färbungen

Bereits 1980 führte Hale [54] die sogenannten T -Färbungen ein, als er eine Reihe von Frequenzzuweisungsproblemen graphentheoretisch modellierte. T ist dabei die *Menge verbotener Differenzen*.

Definition 2.2 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und eine endliche Menge T von nichtnegativen ganzen Zahlen, wobei $0 \in T$ angenommen wird. Eine T -Färbung von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots\}$, so daß $|f(x) - f(y)| \notin T$ für je zwei adjazente Knoten $x, y \in V$ gilt.*

Die T -Spannweite von G , geschrieben $sp_T(G)$, ist die kleinste Zahl m , für die G eine T -Färbung f mit $\max\{f(x) \mid x \in V\} = m$ besitzt.

Allgemeiner kann man $sp_T(G)$ auch als $\min \max_{x, y \in V} |f(x) - f(y)|$ definieren, wobei über alle T -Färbungen f zu minimieren ist. Bei $T = \{0\}$ handelt es sich um die gewöhnliche Färbung, d.h. $sp_{\{0\}}(G) = \chi(G) - 1$. Betrachtet man statt $sp_T(G)$ die T -chromatische Zahl $\chi_T(G)$, d.h. die minimale Anzahl benötigter

Farben für eine T -Färbung, so ist dies keine neue Grapheninvariante, denn es gilt $\chi_T(G) = \chi(G)$ für jeden Graphen G und jede Menge T . Dies wurde 1982 von Cozzens und Roberts [29] gezeigt. Daher genügt es, $sp_T(G)$ zu untersuchen.

Nennenswerte Arbeiten zum Thema T -Färbungen sind u.a. [29],[73],[82],[84], aus denen im folgenden einige Resultate vorgestellt werden.

Schranken für die T -Spannweite

Offenbar gilt stets $sp_T(G) \geq sp_{\{0\}}(G)$ für jeden Graphen G . Färbt man andererseits den Graphen G mit den Farben aus der Menge $\{0, \dots, \chi(G) - 1\}$ und multipliziert anschließend alle Farben mit dem Faktor $\max T + 1$, so gilt $|f(x) - f(y)| \geq \max T + 1$ für je zwei adjazente Knoten $x, y \in V(G)$. Demzufolge ist die resultierende Färbung eine T -Färbung. Daher gilt:

Satz 2.4 (Cozzens und Roberts, [29]) *Für alle Graphen G und alle Mengen T gilt*

$$\chi(G) - 1 \leq sp_T(G) \leq (\max T + 1)(\chi(G) - 1).$$

Eine verbesserte obere Schranke ist gegeben durch:

Satz 2.5 (Tesman, [90]) *Für alle Graphen G und alle Mengen T gilt*

$$sp_T(G) \leq |T| \cdot (\chi(G) - 1).$$

Ferner besteht folgender Zusammenhang zur Cliques- bzw. chromatischen Zahl:

Satz 2.6 (Cozzens und Roberts, [29]) *Für alle Graphen G und alle Mengen T gilt*

$$sp_T(K_{\omega(G)}) \leq sp_T(G) \leq sp_T(K_{\chi(G)}).$$

Gilt also $\omega(G) = \chi(G)$ für einen Graphen G , wie beispielsweise bei den perfekten Graphen, so reduziert sich das Problem der Berechnung von $sp_T(G)$ auf die Berechnung der T -Spannweite des vollständigen Graphen $K_{\omega(G)}$.

Resultate für spezielle Mengen T oder bestimmte Graphen

In mehreren Artikeln sind sogenannte r -Initialmengen Gegenstand der Untersuchungen. Dies sind Mengen der Form $T = \{0, 1, \dots, r\} \cup S$, wobei S kein Vielfaches von $r + 1$ enthält.

Satz 2.7 (Cozzens und Roberts, [29]) *Ist T eine r -Initialmenge, dann gilt für alle Graphen G*

$$sp_T(G) = sp_T(K_{\chi(G)}) = (r + 1)(\chi(G) - 1).$$

Ebenfalls untersucht wurden k -Vielfache von s Mengen; das sind Mengen der Form $T = \{0, s, 2s, \dots, ks\} \cup S$, wobei $s, k \geq 1$ und $S \subseteq \{s+1, s+2, \dots, ks-1\}$.

Satz 2.8 (Raychaudhuri, [82]) *Ist T ein k -Vielfaches von s Mengen, dann gilt für alle Graphen G :*

$$\begin{aligned} sp_T(G) &= sp_T(K_{\chi(G)}) \\ &= \begin{cases} st(1+k) - sk - 1 & , \text{ wenn } \chi(G) = st, t \geq 1 \\ st(1+k) + l - 1 & , \text{ wenn } \chi(G) = st + l, 1 \leq l \leq s - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Da $sp_T(G)$ oftmals mit der T -Spannweite von vollständigen Graphen übereinstimmt, wurden diese besonders intensiv untersucht, siehe z.B. [13] und [59].

2.1.3. Färbungen mit Abstandsbedingungen

Im folgenden sei $P = (p_1, \dots, p_r)$ ein festes r -Tupel von Abstandsbedingungen, d.h. von positiven ganzen Zahlen. Aufgrund des praktischen Hintergrundes wird $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$ angenommen.

Definition 2.3 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und ein r -Tupel P . Ein L_P -Labelling von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots\}$, so daß $|f(x) - f(y)| \geq p_i$ für je zwei Knoten $x, y \in V$ mit Abstand $\leq i \leq r$ gilt. Die L_P -Zahl von G , geschrieben $\lambda_P(G)$, ist die kleinste Zahl m , für die G ein L_P -Labelling f mit $\max\{f(x) \mid x \in V\} = m$ besitzt.*

Allgemeine Eigenschaften

Lemma 2.1 *Für alle Graphen G und alle Abstandsbedingungen P existiert ein L_P -Labelling f von G mit maximalem Label $\lambda_P(G)$, so daß jedes Label als Linearkombination von p_1, \dots, p_r dargestellt werden kann, d.h.*

$$\forall x \in V(G) \exists a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N} : f(x) = \sum_{i=1}^r a_i p_i.$$

Infolgedessen ist auch $\lambda_P(G)$ von dieser Form.

Dieses Lemma ist bereits in [44] für den Fall $r = 2$ gezeigt worden. Die dort verwendeten Beweismethoden können wie folgt auf $r \geq 1$ adaptiert werden:

Beweis. Sei f ein L_P -Labelling mit maximalem Label $\lambda_P(G)$. Ferner sei $\{l_0, l_1, \dots, l_p\}$ die Menge aller Linearkombinationen der Zahlen p_1, \dots, p_r , wobei $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_p$ gilt und l_p die kleinste Linearkombination größer gleich $\lambda_P(G)$ ist. Wir definieren ein L_P -Labelling f' durch

$$f'(v) = l_i \Leftrightarrow f(v) \in [l_i, l_{i+1}), \quad v \in V(G).$$

Damit ist f' ein Labelling, dessen Label alle von der Form $\sum_{i=1}^r a_i p_i$ sind. Ferner gilt $\max_{v \in V(G)} f' \leq \lambda_P(G)$. Folglich muß nur noch gezeigt werden, daß f' sämtliche Abstandsbedingungen eines L_P -Labellings erfüllt.

Angenommen, es existieren zwei Knoten $x, y \in V(G)$ mit $\text{dist}(x, y) = j \leq r$ und $|f'(x) - f'(y)| < p_j$. O.B.d.A. gelte $f(x) < f(y)$. Wir bestimmen a, b mit $f(x) \in [l_a, l_{a+1})$ und $f(y) \in [l_b, l_{b+1})$. Da wir, wie bereits erwähnt, $p_1 \geq \dots \geq p_r$ annehmen, gilt $l_{i+1} - l_i \leq p_r$ für alle i . Damit können keine zwei Knoten im Abstand $\leq r$ Label aus demselben Intervall $[l_i, l_{i+1})$ bekommen haben. Insbesondere ist dann auch $a < b$. Wir setzen $f(x) = l_a + \varepsilon_a$, $\varepsilon_a \geq 0$, und $f(y) = l_b + \varepsilon_b$, $\varepsilon_b \geq 0$. Da f ein zulässiges L_P -Labelling ist, gilt $f(y) - f(x) = l_b - l_a + \varepsilon_b - \varepsilon_a \geq p_j$. Wegen obiger Annahme gilt außerdem $f'(y) - f'(x) = l_b - l_a < p_j$. D.h.

$$l_b < p_j + l_a \leq l_b + \varepsilon_b - \varepsilon_a = f(y) - \varepsilon_a \leq f(y).$$

Offenbar ist aber auch $p_j + l_a$ eine Linearkombination der Zahlen p_1, \dots, p_r und es gilt $l_b < p_j + l_a \leq f(y)$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von b .

Folglich gibt es keine Abstandsverletzungen, und f' ist ein L_P -Labelling. \square

Desweiteren gelten die folgenden drei Monotonieeigenschaften, die leicht verifizierbar und daher ohne Beweis aufgelistet sind.

Lemma 2.2 *Sei G ein Graph und $H \subseteq G$ ein Untergraph von G . Dann gilt $\lambda_P(G) \geq \lambda_P(H)$ für alle Abstandsbedingungen P .*

Lemma 2.3 *Seien P und P' r -Tupel von Abstandsbedingungen mit $p_i \geq p'_i$ für alle $i = 1, \dots, r$. Dann gilt $\lambda_P(G) \geq \lambda_{P'}(G)$ für alle Graphen G .*

Lemma 2.4 *Seien $P = (p_1, \dots, p_r)$ und $P' = (p'_1, \dots, p'_{r'})$ Tupel von Abstandsbedingungen mit $r \geq r'$ und $p_i = p'_i$ für $i = 1, \dots, r'$. Dann gilt $\lambda_P(G) \geq \lambda_{P'}(G)$ für alle Graphen G .*

Besitzen alle Abstandsbedingungen einen gemeinsamen Teiler, so kann dieser Teiler aus dem Tupel herausgezogen werden. Dies wird im nächsten Satz deutlich, der analog zum Fall $r = 2$ in [44] mit Hilfe des Lemmas 2.1 gezeigt werden kann. Dazu sei dP das Tupel (dp_1, \dots, dp_r) .

Satz 2.9 *Für jeden Graphen G , alle Abstandsbedingungen P und $d \geq 1$ gilt*

$$\lambda_{dP}(G) = d \cdot \lambda_P(G).$$

Beweis. Multipliziert man die Label eines L_P -Labellings mit d , so erfüllt das resultierende Labelling die Eigenschaften eines L_{dP} -Labellings, d.h. $\lambda_{dP}(G) \leq d \cdot \lambda_P(G)$. Daher genügt es, $\lambda_{dP}(G) \geq d \cdot \lambda_P(G)$ zu zeigen.

Angenommen, es existiert ein L_{dP} -Labelling f mit $\max_{v \in V(G)} f(v) < d \cdot \lambda_P(G)$. Aufgrund von Lemma 2.1 können wir annehmen, daß für alle Knoten $v \in V(G)$ das Label $f(v)$ von der Form $f(v) = \sum_{i=1}^r da_i p_i$ ist. Dividieren wir alle Label

durch d , so gelten für das resultierende Labelling f' die Beziehungen $|f'(x) - f'(y)| \geq p_i$ für je zwei Knoten $x, y \in V(G)$ mit Abstand i und $\max_{v \in V(G)} f'(v) < \lambda_P(G)$. Das würde heißen, f' ist ein zulässiges L_P -Labelling mit maximalem Label kleiner als $\lambda_P(G)$. Dies ist ein Widerspruch. ■

Trivialerweise gilt außerdem:

Lemma 2.5 *Für jeden Graphen G gilt $\lambda_{(1, \dots, 1)}(G) = \lambda_{(1)}(G^r) = \chi(G^r) - 1$.*

Schranken für die L_P -Zahl

Satz 2.10 *Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt*

$$\max\{p_1(\chi(G) - 1), p_r(\chi(G^r) - 1)\} \leq \lambda_P(G) \leq p_1(\chi(G^r) - 1).$$

Beweis. Es gilt $p_r \leq p_i$ für alle $i = 1, \dots, r - 1$. Aus Lemma 2.3 und Satz 2.9 schließt man damit $\lambda_P(G) \geq \lambda_{(p_r, \dots, p_r)}(G) = p_r \cdot \lambda_{(1, \dots, 1)}(G) = p_r \cdot \lambda_{(1)}(G^r) = p_r(\chi(G^r) - 1)$.

Mit den gleichen Argumenten und aus Lemma 2.4 erhält man $\lambda_P(G) \geq \lambda_{(p_1)}(G) = p_1 \cdot \lambda_{(1)}(G) = p_1(\chi(G) - 1)$.

Aufgrund von $p_1 \geq p_i$ für alle $i = 2, \dots, r$ schließt man auf analoge Weise $\lambda_P(G) \leq \lambda_{(p_1, \dots, p_1)}(G) = p_1 \cdot \lambda_{(1, \dots, 1)}(G) = p_1 \cdot \lambda_{(1)}(G^r) = p_1(\chi(G^r) - 1)$. ■

Folgerung 2.1 *Ist $P = (d, \dots, d)$, so gilt $\lambda_P(G) = d(\chi(G^r) - 1)$.*

Ist p_2 (und damit auch p_3, \dots, p_r) klein im Vergleich zu p_1 , so erhält man als bessere obere Schranke:

Satz 2.11 *Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt*

$$\lambda_P(G) \leq p_1(\chi(G) - 1) + p_2(n(G) - \chi(G)).$$

Beweis. Wir bestimmen eine Knotenfärbung mit $\chi(G)$ Farben und zerlegen die Knotenmenge in die zugehörigen Farbklassen $V_1, \dots, V_{\chi(G)}$. Anschließend legen wir in jeder Farbklassse V_i willkürlich eine Knotenordnung $v_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_i = |V_i|$, fest. Für $i = 1, \dots, \chi(G)$ weisen wir nun den Knoten aus V_i in der festgelegten Reihenfolge jeweils das kleinste mögliche Label unter Einhaltung der Abstandsbedingungen zu. f sei das so entstandene L_P -Labelling.

Da Knoten innerhalb derselben Farbklassse paarweise nicht adjazent sind, müssen ihre Label paarweise höchstens Differenz p_2 haben. Daher gilt $f(v_{i,n_i}) \leq f(v_{i,1}) + p_2(n_i - 1)$ für alle $i = 1, \dots, \chi(G)$. Aufgrund der Abstand-1-Bedingung ist weiterhin $f(v_{i+1,1}) \leq f(v_{i,n_i}) + p_1$ für alle $i = 1, \dots, \chi(G) - 1$. Summiert über alle i ergibt sich

$$f(v_{\chi(G), n_{\chi(G)}}) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)-1} p_1 + p_2 \sum_{i=1}^{\chi(G)} (n_i - 1) = p_1(\chi(G) - 1) + p_2(n(G) - \chi(G)).$$

Sei $N_j(v) = \{w \mid w \in V \wedge \text{dist}(v, w) = j\}$ für den Graphen $G = (V, E)$. Bei gegebenen Abstandsbedingungen P sei der *gewichtete Grad* $\text{deg}_P(v)$ eines Knotens $v \in V$ gleich der Summe $\sum_{i=1}^r p_i |N_i(v)|$. Ferner sei $\Delta_P(G) = \max_{v \in V} \text{deg}_P(v)$ der maximale gewichtete Grad. Dann gilt:

Satz 2.12 (McDiarmid, [77]) *Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt*

$$\lambda_P(G) \leq \Delta_P(G).$$

2.2. Listenfärbungen

2.2.1. Klassische Listenfärbungen

Das Konzept der Listenfärbung und der sogenannten *Choosability* – Listenfärbbarkeit – wurde unabhängig voneinander im Jahre 1976 von Vizing [95] und im Jahre 1979 von Erdős, Rubin und Taylor [34] eingeführt.

Definition 2.4 *Jedem Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ sei eine Menge $L(v)$ von Farben, d.h. natürlichen Zahlen, zugewiesen. $L(v)$ wird als Liste von v bezeichnet, die Menge aller Listen $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$ heißt Listenzuweisung. Eine k –Listenzuweisung ist eine Listenzuweisung, in der alle Listen die gleiche Mächtigkeit k haben, also $\forall v \in V : |L(v)| = k$.*

Definition 2.5 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$. G ist \mathcal{L} –listenfärbbar, wenn jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe $f(v) \in L(v)$ zugeordnet werden kann, so daß $f(x) \neq f(y)$ für je zwei adjazente Knoten $x, y \in V$ gilt. f heißt dann Listenfärbung von G .*

Definition 2.6 *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k –listenfärbbar, wenn G für jede k –Listenzuweisung eine Listenfärbung besitzt. Das kleinste k , für welches G k –listenfärbbar ist, heißt listenchromatische Zahl von G und wird mit $ch(G)$ oder $\chi_\ell(G)$ bezeichnet.*

In späteren Kapiteln der vorliegenden Arbeit wird χ_ℓ^1 statt χ_ℓ als Bezeichnung verwendet, da Listenfärbungen dort in einem allgemeineren Kontext betrachtet werden.

Die nun folgenden allgemeinen Aussagen über Listenfärbungen sind den Arbeiten [34],[49],[53],[92],[96] entnommen.

Schranken für die listenchromatische Zahl

Stellt man sich die Frage, an welcher Stelle die listenchromatische Zahl χ_ℓ in die Kette von Ungleichungen im Satz 2.1 einzuordnen ist, so helfen folgende Überlegungen weiter:

Jeder k -listenfärbbare Graph G ist k -färbbar, da er für die spezielle k -Listenzuweisung $\forall v \in V(G) : L(v) = \{1, \dots, k\}$ auch eine Listenfärbung besitzen muß. In den meisten Fällen ist ein k -färbbarer Graph jedoch nicht k -listenfärbbar, was schon kleine Beispiele wie die vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$ und $K_{2,4}$ (siehe Abb. 2.1) zeigen.

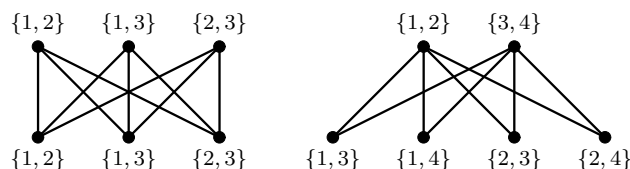


Abbildung 2.1.: Zwei bipartite, nicht 2-listenfärbbare Graphen

Weiterhin kann man sich analog zu den klassischen Färbungen überlegen, daß ein $(k - 1)$ -degenerierter Graph stets auch k -listenfärbbar ist. Daher folgt:

Satz 2.13 *Für jeden Graphen G gilt*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\ell(G) \leq \text{col}(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Interessanterweise gilt für Listenfärbungen eine dem Satz von Brooks (Satz 2.2) äquivalente Aussage:

Satz 2.14 (Vizing, [95]) *Ist ein zusammenhängender Graph G vollständig oder ein Kreis ungerader Länge, so gilt $\chi_\ell(G) = \Delta(G) + 1$. Andernfalls ist $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G)$.*

Charakterisierung von D -Listenfärbbarkeit

Definition 2.7 *Besitzt ein Graph $G = (V, E)$ für jede Listenzuweisung \mathcal{L} mit $\forall v \in V : |L(v)| \geq \text{deg}(v)$ eine Listenfärbung, so heißt G D -listenfärbbar.*

Rubin [34] konnte den Satz 2.14 verallgemeinern, indem er zeigte, daß ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ stets D -listenfärbbar ist, sofern mindestens ein Block von G weder eine Clique noch ein Kreis ungerader Länge ist. Eine weitere Verbesserung dieser Aussage ist der folgende Satz:

Satz 2.15 (Tuza und Voigt, [93]) *Seien $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und \mathcal{L} eine Listenzuweisung mit $|L(v)| \geq \text{deg}(v)$ für alle $v \in V$. Gilt*

(i) $\exists v \in V : |L(v)| > \text{deg}(v)$, oder

(ii) G enthält einen Block, der keine Clique und kein ungerader Kreis ist,

dann ist G \mathcal{L} -listenfärbbar.

Ein *Gallai-Baum* ist ein zusammenhängender Graph, in dem jeder Block vollständig oder ein ungerader Kreis ist. Folglich ist jeder zusammenhängende Graph, der kein Gallai-Baum ist, D -listenfärbbar.

Vollständige Graphen und ungerade Kreise sind gerade die 2-fach zusammenhängenden Gallai-Bäume. Kostochka et al. [67] erzielten ein dem Satz 2.15 äquivalentes Resultat und zeigten außerdem für die 2-fach zusammenhängenden Gallai-Bäume:

Satz 2.16 (Kostochka et al., [67]) *Ist ein 2-fach zusammenhängender Gallai-Baum $G = (V, E)$ für eine Listenzuweisung \mathcal{L} mit $|L(v)| = \deg(v)$ für alle $v \in V$ nicht listenfärbbar, so gilt:*

- (i) G ist regulär, und
- (ii) $L(v)$ ist für alle $v \in V$ identisch.

Das Alon-Tarsi-Theorem für Listenfärbungen

Um die folgenden Aussagen verständlich zu machen, müssen zunächst einige Begriffe eingeführt werden. Ein (nicht notwendig zusammenhängender) Unterdigraph H eines gerichteten Graphen D wird *Eulersch* genannt, wenn für alle Knoten $v \in V(H)$ der Innengrad $d_H^-(v)$ gleich dem Außengrad $d_H^+(v)$ ist. Weiterhin sagt man H ist *gerade*, sofern die Anzahl der Bögen von H gerade ist, andernfalls ist er *ungerade*. Mit $EE(D)$ bzw. $EO(D)$ wird die Anzahl der geraden bzw. ungeraden Eulerschen Unterdigraphen von D bezeichnet, wobei der leere Unterdigraph als gerader Eulerscher Unterdigraph aufgefaßt wird.

Ausgehend von diesen Definitionen stellten Alon und Tarsi folgenden Satz auf:

Satz 2.17 (Alon, Tarsi, [4]) *Sei $D = (V, E)$ ein Digraph. Für alle $v \in V(D)$ sei eine Liste $L(v)$ mit $d_D^+(v) + 1$ verschiedenen natürlichen Zahlen gegeben, wobei $d_D^+(v)$ den Außengrad von v darstellt. Ist $EE(D) \neq EO(D)$, so gibt es eine zulässige Knotenfärbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(v) \in L(v)$ für alle $v \in V(D)$.*

Bemerkt sei, daß sich dieses Resultat auf analoge Weise mit Hilfe des Innengrades formulieren läßt. Dies ist die inzwischen gebräuchlichere Variante.

Mit diesem Satz ist es Alon und Tarsi gelungen, ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Listenfärbung eines Graphen aufzustellen: Gibt es für einen ungerichteten Graphen G eine Orientierung D , welche der Bedingung $EE(D) \neq EO(D)$ genügt, wobei der maximale Außengrad a beträgt, so ist $\chi_\ell(G) \leq a + 1$.

Der Satz 2.17 gehört wohl zu den ungewöhnlichsten und damit interessantesten Resultaten auf dem Gebiet der Listenfärbungen. Vor allem auch deshalb, weil er mit rein algebraischen Mitteln bewiesen wurde. Bemühungen, einen nicht-algebraischen Beweis zu finden, waren bisher nur für Spezialfälle erfolgreich. Dazu gehört der Fall, daß die Orientierung des Graphen azyklisch ist. Hier

läßt sich der Satz leicht mit Induktion über die Anzahl der Knoten beweisen, beginnend mit dem stets vorhandenen Knoten mit Innengrad 0. Ebenso noch relativ einfach zu handhaben ist der Fall, daß kein ungerader Zyklus (orientierter Kreis) in der Orientierung existiert. Bondy, Boppana und Siegel [12] stellten hierzu fest, daß Satz 2.17 leicht aus Richardsons Theorem (siehe z.B. [9]) gefolgert werden kann. Dieses Theorem besagt, daß ein Digraph D ohne ungerade Zyklen stets einen *Kern* besitzt, d.h. eine unabhängige Menge $U \subseteq V(D)$, so daß $\forall v \in V(D) - U \exists w \in U : (v, w) \in E(D)$ erfüllt ist. Damit kann man auf folgende Weise eine zulässige Listenfärbung für den zugrunde liegenden Graphen G gewinnen:

Algorithmus 2.1 (Alon, Tarsi, [4])

Eingabe: *Eine Orientierung D von G ohne ungerade Zyklen und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ mit $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$*

Ausgabe: *Eine zulässige Listenfärbung für G*

- *Wähle eine Farbe $c \in \bigcup_{v \in V} L(v)$.*
- *Stelle den Unterdigraphen $H_c \subseteq D$ auf, welcher durch die Knoten $w \in V$ mit $c \in L(w)$ induziert wird.*
- *Färbe alle Knoten aus dem Kern U_c von H_c mit der Farbe c .*
- *Lösche die Menge U_c aus V und die Farbe c aus den Listen der Knoten aus $V(H_c) - U_c$.*
- *Wiederhole diese Schritte, bis alle Knoten gefärbt sind.*

Man kann sich nun leicht überlegen, warum es möglich ist, jeden Knoten aus V zulässig mit einer Farbe aus seiner Liste zu färben. Gilt $c \in L(v)$ für einen Knoten v , so gehört v zu H_c . Liegt v sogar im Kern U_c , so wird der Knoten gefärbt. Liegt er nicht im Kern, so muß er mindestens einen Nachfolger in U_c haben. Demzufolge kann es für höchstens $d_D^+(v)$ Farben c aus $L(v)$ passieren, daß v in $V(H_c) - U_c$ liegt und nicht mit c gefärbt werden kann. Da $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$, bleibt folglich eine Farbe in $L(v)$ übrig.

Für Orientierungen, welche ungerade Zyklen enthalten, steht der graphentheoretische Beweis von Satz 2.17 noch aus. Zumindest kann aber die Frage beantwortet werden, warum eine Orientierung D für G mit $EE(D) \neq EO(D)$ stets garantiert, daß in jedem Kreis ungerader Länge in G mindestens ein Knoten eine Liste mit mehr als zwei Farben erhält. Dazu folgende Ausführungen:

Beobachtung 2.1 Gegeben sei ein Digraph $D = (V, E)$, dessen Bogenmenge E sich derart in zwei Teilmengen E_1 und E_2 zerlegen läßt, so daß jeder Zyklus in D zu genau einem der beiden Unterdigraphen $D_1 := D[E_1]$ und $D_2 := D[E_2]$ gehört. Dann gilt

$$EE(D) \neq EO(D) \iff EE(D_1) \neq EO(D_1) \wedge EE(D_2) \neq EO(D_2).$$

Beweis. Ein gerader Eulerscher Unterdigraph von D setzt sich stets aus einem Eulerschen Unterdigraphen von D_1 und einem von D_2 zusammen, welche gleiche Parität haben, folglich gilt $EE(D) = EE(D_1) \cdot EE(D_2) + EO(D_1) \cdot EO(D_2)$. Bei einem ungeraden Eulerschen Unterdigraphen von D müssen die beiden Unterdigraphen aus D_1 und D_2 unterschiedliche Parität haben, daher ist hier $EO(D) = EE(D_1) \cdot EO(D_2) + EO(D_1) \cdot EE(D_2)$. Nun betrachten wir die Differenz $EE(D) - EO(D)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} EE(D) - EO(D) &= EE(D_1) \cdot EE(D_2) + EO(D_1) \cdot EO(D_2) \\ &\quad - EE(D_1) \cdot EO(D_2) - EO(D_1) \cdot EE(D_2) \\ &= (EE(D_1) - EO(D_1)) \cdot (EE(D_2) - EO(D_2)) \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich die Beobachtung sofort ablesen. □

Aus dieser Beobachtung läßt sich schließen, daß in einer Orientierung D für G mit $EE(D) \neq EO(D)$ jeder ungerade Zyklus in D mindestens einen Bogen mit einem zweiten Zyklus gemeinsam hat. Folglich hat wenigstens ein Knoten des ungeraden Zyklus Innengrad ≥ 2 und bekommt eine Liste mit mindestens drei Farben zugeordnet, was eine notwendige Bedingung dafür ist, daß stets alle Knoten des Zyklus zulässig mit Farben aus ihren Listen gefärbt werden können.

Beispiel 2.1 Als Beispiel zu dieser Aussage betrachten wir die in Abbildung 2.2 angegebenen Orientierungen D_1 und D_2 für den Diamanten. Beide enthalten einen Zyklus der Länge 3 und haben maximalen Innengrad 3. Jedoch enthält D_1 zusätzlich einen Zyklus der Länge 4, welcher dafür sorgt, daß der ungerade Zyklus stets listenfärbbar ist.

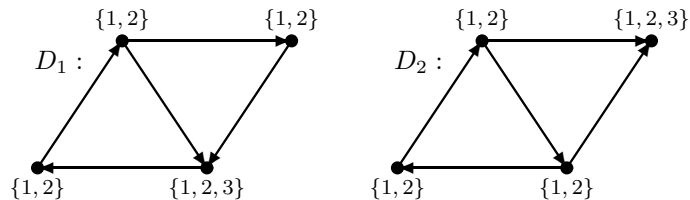


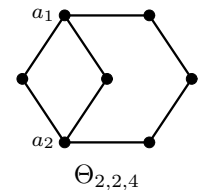
Abbildung 2.2.: Zwei Orientierungen für einen Graphen

Differenz zwischen chromatischer und listenchromatischer Zahl

Von Erdős, Rubin und Taylor [34] stammt der Beweis, daß die Differenz zwischen χ und χ_ℓ beliebig groß sein kann. Dazu zeigten sie, daß der vollständige, bipartite Graph $K_{m,m}$ für $m \geq \binom{2k-1}{k}$ nicht k -listenfärbbar ist. D.h. für jedes k existiert ein Graph G mit $\chi_\ell(G) - \chi(G) > k - 2$. Für den Spezialfall $k = 2$ konnten sie sogar ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben, wann ein Graph 2-listenfärbbar ist.

Der *Körper* (engl.: core) eines Graphen G , sei der Untergraph, der aus G durch sukzessives Entfernen von Blättern entsteht.

Weiterhin sei ein *Theta-Graph* $\Theta_{p,r,s}$ definiert als ein Graph, welcher aus zwei Knoten a_1 und a_2 besteht, die durch drei bis auf die Endknoten a_1 und a_2 knotendisjunkte Wege der Längen p, r und s miteinander verbunden sind.



Satz 2.18 (Rubin, [34]) *Ein zusammenhängender Graph G ist 2-listenfärbbar genau dann, wenn sein Körper zur Menge $\{K_1, C_{2p+2}, \Theta_{2,2,2p} \mid p \geq 1\}$ gehört.*

Folgerung 2.2 (Cogis, König, Palaysi, [28]) *Ein bipartiter Graph G ist genau dann 2-listenfärbbar, wenn kein Untergraph $H \subseteq G$ isomorph zu einer geraden Unterteilung eines der im Bild 2.3 dargestellten bipartiten Graphen ist. Dabei bedeutet gerade Unterteilung, daß Kanten durch Hinzunahme einer beliebigen, geraden Anzahl von Knoten unterteilt und damit durch ungerade Wege ersetzt werden.*

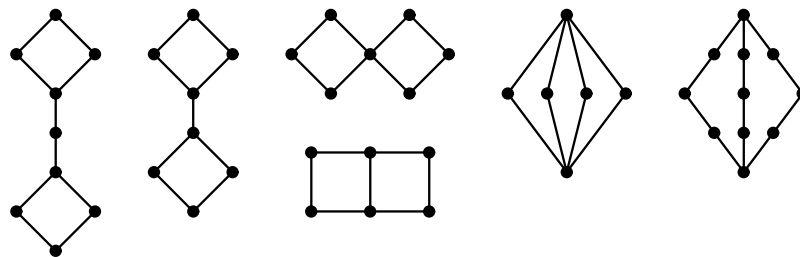


Abbildung 2.3.: Minimale nicht 2-listenfärbbare bipartite Graphen

Für k -listenfärbbare Graphen mit $k > 2$ sind noch keine solchen Charakterisierungen bekannt. Man hat jedoch schon eine Reihe von Graphenklassen ausfindig machen können, für welche die chromatische und die listenchromatische Zahl übereinstimmen. Offensichtlich gehören Bäume, vollständige Graphen und Kreise dazu; aber auch chordale Graphen (Tesman [91]), Kantengraphen von bipartiten Multigraphen (Galvin [42]) und Komplementärgraphen von dreiecksfreien Graphen (Gravier und Maffray [49]).

Die Knotenfärbung eines Kantengraphen $L(G)$ entspricht einer Kantenfärbung des zugehörigen Graphen G . Damit stützt das Ergebnis eine sehr bekannte Vermutung bzgl. der Listenfärbungen von Kanten, welche erstmals 1985 von Bollobás und Harris veröffentlicht wurde:

Vermutung 2.2 (Listenkantenchromatische Vermutung)

Ist G ein Kantengraph, dann gilt $\chi(G) = \chi_\ell(G)$.

Komplementärgraphen von dreiecksfreien Graphen können offensichtlich nicht $K_{1,3}$ als induzierten Untergraphen enthalten und sind daher *klauenfrei*. Daß für diese Graphen $\chi = \chi_\ell$ gilt, bestärkt die Vermutung

Vermutung 2.3 (Gravier und Maffray, [49]) *Ist G ein klauenfreier Graph, dann gilt $\chi(G) = \chi_\ell(G)$.*

2.2.2. T -Listenfärbungen

Tesman [91] brachte im Jahre 1993 das Konzept der T -Färbungen und das der Listenfärbungen zusammen, indem er T -Listenfärbungen betrachtete.

Definition 2.8 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$, eine endliche Menge T von nichtnegativen ganzen Zahlen, wobei $0 \in T$, und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$. G ist $\mathcal{L} - T$ -listenfärbbar, wenn jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe $f(v) \in L(v)$ zugeordnet werden kann, so daß $|f(x) - f(y)| \notin T$ für je zwei adjazente Knoten $x, y \in V$ gilt. f heißt dann T -Listenfärbung von G .*

Definition 2.9 *Ein Graph $G = (V, E)$ mit gegebener Menge T verbotener Differenzen heißt $k - T$ -listenfärbbar, wenn G für jede k -Listenzuweisung eine T -Listenfärbung besitzt. Das kleinste k , für welches G $k - T$ -listenfärbbar ist, heißt T -listenchromatische Zahl von G und wird mit $T - ch(G)$ bezeichnet.*

Bei $T = \{0\}$ handelt es sich um die gewöhnliche Listenfärbung.

Schranken für die T -listenchromatische Zahl

Offensichtlich ist jeder $k - T$ -listenfärbbare Graph auch k -listenfärbbar, da jede T -Listenfärbung auch eine zulässige Listenfärbung darstellt. Existiert keine T -Färbung mit Spannweite $k - 1$, so kann es natürlich auch keine T -Listenfärbung für die Listenzuweisung \mathcal{L} mit $L(v) = \{1, \dots, k\}$ für alle $v \in V(G)$ geben; in dem Falle ist G nicht $k - T$ -listenfärbbar.

Färbt man die Knoten des Graphen G , indem man sukzessive jeweils die kleinste oder größte Farbe in den Listen aller ungefärbten Knoten bestimmt, diese einem Knoten, in dessen Liste sie vorhanden ist, zuweist und anschließend die daraus resultierenden verbotenen Farben aus den übrigen Listen löscht, so werden aus der Liste eines Knotens v maximal $\deg(v) \cdot |T|$ Farben entfernt. Aus diesen Überlegungen läßt sich der nächste Satz ableiten:

Satz 2.19 (Tesman, [91]) Für jeden Graphen G und alle Mengen T gilt

$$\max\{sp_T(G) + 1, \chi_\ell(G)\} \leq T - ch(G) \leq \Delta(G) \cdot |T| + 1.$$

Wie für die gewöhnlichen Listenfärbungen kann auch hier die obere Schranke in ein dem Satz von Brooks äquivalentes Resultat umgewandelt werden.

Satz 2.20 (Waller, [97]) Ist ein zusammenhängender Graph G weder vollständig noch ein ungerader Kreis, dann gilt $T - ch(G) \leq \Delta(G) \cdot |T|$ für jede Menge T .

Weiterhin kann man folgende obere Schranke mit Bezug auf die Reihenzahl von G etablieren:

Satz 2.21 Für jeden Graphen G und alle Mengen T gilt

$$T - ch(G) \leq (2|T| - 1)(col(G) - 1) + 1.$$

Beweis. (vollständige Induktion über $n = n(G)$)

IA: $n = 1$. Es gilt $T - ch(K_1) = 1$. ✓

IV: Die Behauptung gelte für $n \leq N - 1$.

IS: $n = N$.

Seien $k := (2|T| - 1)(col(G) - 1) + 1$ und $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ eine k -Listenzuweisung. Aufgrund der Definition der Reihenzahl hat G stets einen Knoten u mit $deg(u) \leq col(G) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt außerdem $T - ch(G - u) \leq (2|T| - 1)(col(G - u) - 1) + 1$. Wegen $(2|T| - 1)(col(G - u) - 1) + 1 \leq k$, existiert für \mathcal{L} eine T -Listenfärbung f für den Graphen $G - u$. Seien $w_1, \dots, w_{deg(u)}$ die Nachbarn von u . Wir löschen aus der Liste $L(u)$ alle Farben c mit

$$\exists t \in T \exists i \in \{1, \dots, deg(u)\} : c \in \{f(w_i) - t, f(w_i) + t\}.$$

Folglich werden maximal $(2|T| - 1)deg(u) \leq k - 1$ Farben aus $L(u)$ gelöscht, so daß wenigstens eine zulässige Farbe $f(u) \in L(u)$ vorhanden ist. Damit existiert für G eine T -Listenfärbung. ✓ ■

Charakterisierung von $D - T$ -Listenfärbbarkeit

Definition 2.10 Besitzt ein Graph $G = (V, E)$ bei gegebener Menge T für jede Listenzuweisung \mathcal{L} mit $\forall v \in V : |L(v)| \geq deg(v) \cdot |T|$ eine T -Listenfärbung, so heißt G $D - T$ -listenfärbbar.

Satz 2.22 (Waller, [97]) Ein Graph $G = (V, E)$ ist $D - T$ -listenfärbbar für jede mögliche Menge T genau dann, wenn G kein Gallai-Baum ist.

Satz 2.23 (Waller, [97]) Ist ein Gallai-Baum $G = (V, E)$ für eine Menge T nicht $D - T$ -listenfärbbar, so gilt $T = \{0, s, 2s, \dots, rs\}$, $r \geq 0, s \geq 1$.

Das Alon-Zaks-Theorem für T -Listenfärbungen

Satz 2.24 (Alon, Zaks, [5]) Sei $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ eine Listenzuweisung eines Graphen G und T eine Menge verbotener Differenzen, die 0 enthält. Ferner sei G^T der Multigraph mit der Knotenmenge $V(G)$, der aus G entsteht, indem jede Kante aus $E(G)$ durch $2|T| - 1$ parallele Kanten ersetzt wird. Angenommen es gibt eine Orientierung D von G^T , welche den Bedingungen $EE(D) \neq EO(D)$ und $\forall v \in V(D) : d_D^-(v) + 1 \leq |L(v)|$ genügt. Dann existiert für G eine T -Listenfärbung.

Resultate für spezielle Mengen T oder bestimmte Graphen

Tesman [91] zeigte, daß $T\text{-}ch(G) \leq (2|T| - 1)(\chi(G) - 1) + 1$ für jeden chordalen Graphen G und jede Menge T gilt. Ferner wies er nach, daß chordale Graphen existieren, für welche diese Schranke scharf ist.

Die meisten der bisher gewonnenen Resultate zu T -Listenfärbungen beziehen sich jedoch nur auf sogenannte *arithmetische Mengen* T , wie z.B. $T_r := \{0, 1, \dots, r\}$ oder allgemeiner $T_{r,s} := \{0, s, 2s, \dots, rs\}$, $r \geq 0, s \geq 1$. Wie der folgende Satz zeigt, muß man zwischen T_r und $T_{r,s}$ keinen Unterschied machen:

Satz 2.25 (Alon und Zaks, [5]) Für jeden Graphen G und alle $r \geq 0, s \geq 1$ gilt $T_r\text{-}ch(G) = T_{r,s}\text{-}ch(G)$.

Alon und Zaks zeigten sogar, daß dieser Satz nochmals verallgemeinert werden kann auf Mengen der Art $T_{r,s}^a := \{as, (a+1)s, \dots, (a+r)s\}$, $a, r \geq 0, s \geq 1$. Für solche Mengen gilt $T_{r,1}^a\text{-}ch(G) = T_{r,s}^a\text{-}ch(G)$ für jeden Graphen G und $a, r \geq 0, s \geq 1$.

Für $T = T_r$ ist die T -listenchromatische Zahl bereits für eine Reihe von Graphen, u.a. Bäume, Kreise, und vollständige Graphen, berechnet worden. Da jedoch T_r -Listenfärbungen zu den sogenannten $L(d, s)$ -List Labellings gehören, für $d = r + 1$ und $s = 0$, sollen diese Ergebnisse erst im Abschnitt 4.1 über $L(d, 0)$ -List Labellings vorgestellt werden.

2.2.3. Listenfärbungen mit Abstandsbedingungen

Ein noch relativ junges Konzept ist das der L_P -List Labellings, welches von Fiala und Škrekovski [39] etabliert wurde. Ein L_P -List Labelling ist eine Kombination von L_P -Labelling und Listenfärbung bzw. kann auch als Verallgemeinerung von T_r -Listenfärbungen angesehen werden. $P = (p_1, \dots, p_r)$ sei wieder ein festes r -Tupel von Abstandsbedingungen mit $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$.

Definition 2.11 Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$, ein r -Tupel P und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$. Ein L_P -List Labelling von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{N}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\forall v \in V : f(v) \in L(v)$,
2. $|f(x) - f(y)| \geq p_i$, wenn $\text{dist}(x, y) \leq i \leq r$.

Die L_P -Listenzahl von G , geschrieben $\chi_\ell^P(G)$, ist die kleinste natürliche Zahl k , so daß G für jede k -Listenzuweisung ein L_P -List Labelling besitzt.

In späteren Kapiteln werden für die Fälle $r = 1, 2$ die in der Literatur gängigen Schreibweisen verwendet. Ein $L_{(d,s)}$ -List Labelling wird dabei als $L(d, s)$ -List Labelling bezeichnet und $\chi_\ell^{(d,s)}$ wird ohne Klammern $\chi_\ell^{d,s}$ geschrieben. Ferner wird ein $L_{(d)}$ -List Labelling durch $L(d, 0)$ -List Labelling ersetzt und $\chi_\ell^{(d)}$ durch χ_ℓ^d . Analog dazu werden die Begriffe bei der Nicht-Listenversion abgeändert.

Allgemeine Eigenschaften

Auch für die Listenversion der L_P -Labellings gelten die folgenden drei Monotonieeigenschaften:

Lemma 2.6 Sei G ein Graph und $H \subseteq G$ ein Untergraph von G . Dann gilt $\chi_\ell^P(G) \geq \chi_\ell^P(H)$ für alle Abstandsbedingungen P .

Lemma 2.7 Seien P und P' r -Tupel von Abstandsbedingungen mit $p_i \geq p'_i$ für alle $i = 1, \dots, r$. Dann gilt $\chi_\ell^P(G) \geq \chi_\ell^{P'}(G)$ für alle Graphen G .

Lemma 2.8 Seien $P = (p_1, \dots, p_r)$ und $P' = (p'_1, \dots, p'_{r'})$ Tupel von Abstandsbedingungen mit $r \geq r'$ und $p_i = p'_i$ für $i = 1, \dots, r'$. Dann gilt $\chi_\ell^P(G) \geq \chi_\ell^{P'}(G)$ für alle Graphen G .

Haben die Abstandsbedingungen einen gemeinsamen Teiler, so kann man – anders als bei den L_P -Labellings – nicht einfach den Teiler aus dem Tupel herausziehen. Es gilt jedoch der folgende Satz, der für den Fall $r = 1$ (siehe Satz 4.1 der vorliegenden Arbeit) in [5] gezeigt wurde. Die dort verwendete Beweisidee findet sich im Beweis der Verallgemeinerung $r \geq 1$ wieder.

Satz 2.26 Für jeden Graphen G , alle Abstandsbedingungen P und $d \geq 1$ gilt

$$\chi_\ell^{dP}(G) - 1 \geq d(\chi_\ell^P(G) - 1).$$

Beweis. Sei $k := \chi_\ell^P(G) - 1$. Folglich existiert eine k -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$, welche kein L_P -List Labelling zuläßt. D.h. in jeder möglichen Listenfärbung f für \mathcal{L} existieren zwei Knoten $x, y \in V(G)$ mit $|f(x) - f(y)| < p_{\text{dist}(x,y)}$.

Nun ersetzen wir jede Farbe $c \in \bigcup_{v \in V(G)} L(v)$ durch die Menge $A_c = \{1 + (c - 1)d, \dots, cd\}$ und erhalten eine neue Listenzuweisung $\mathcal{L}' = \{L'(v) \mid v \in V(G)\}$ mit $|L'(v)| = dk$ für alle $v \in V(G)$. In jeder Listenfärbung f' für \mathcal{L}' gibt es zwei Knoten $x, y \in V(G)$ und eine Farbe c , so daß $f'(x)$ zu A_c gehört und $f'(y)$ zu einer der Mengen aus $\{A_c, \dots, A_{c+p \cdot \text{dist}(x,y) - 1}\}$. Demzufolge beträgt die Differenz zwischen $f'(y)$ und $f'(x)$ höchstens $[c + p \cdot \text{dist}(x,y) - 1]d - [1 + (c - 1)d] = d \cdot p \cdot \text{dist}(x,y) - 1$. Daher kann f' niemals ein zulässiges L_{dP} -List Labelling sein, und es gilt $\chi_\ell^{dP}(G) > dk$. ■

Eine recht triviale Eigenschaft, die jedoch erwähnt werden soll, ist:

Lemma 2.9 Für jeden Graphen G gilt $\chi_\ell^{(1, \dots, 1)}(G) = \chi_\ell^{(1)}(G^r) = \chi_\ell(G^r)$.

Schranken für die L_P -Listenzahl

Satz 2.27 Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt

$$\chi_\ell^P(G) \geq 1 + \max\{\lambda_P(G), p_1(\chi_\ell(G) - 1), p_r(\chi_\ell(G^r) - 1)\}.$$

Beweis. Da $G = (V, E)$ für die Listenzuweisung gegeben durch $L(v) = \{0, \dots, \lambda_P(G) - 1\}$ für alle $v \in V$ kein L_P -List Labelling zuläßt, folgt sofort $\chi_\ell^P(G) \geq \lambda_P(G) + 1$.

Aus Lemma 2.8 und Satz 2.26 schließen wir $\chi_\ell^P(G) \geq \chi_\ell^{(p_1)}(G) \geq p_1(\chi_\ell^{(1)}(G) - 1) + 1 = p_1(\chi_\ell(G) - 1) + 1$. Weiterhin folgt aus Lemma 2.7 und Satz 2.26 $\chi_\ell^P(G) \geq \chi_\ell^{(p_r, \dots, p_r)}(G) \geq p_r(\chi_\ell^{(1, \dots, 1)}(G) - 1) + 1 = p_r(\chi_\ell(G^r) - 1) + 1$. ■

Satz 2.28 Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt

$$\chi_\ell^P(G) \leq (2p_1 - 1)(\text{col}(G^r) - 1) + 1.$$

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 2.7 ergibt sich $\chi_\ell^P(G) \leq \chi_\ell^{(p_1, \dots, p_1)}(G) = \chi_\ell^{(p_1)}(G^r)$. Ein $L_{(p_1)}$ -List Labelling ist eine T -Listenfärbung mit $T = \{0, \dots, p_1 - 1\}$. Damit folgt aus Satz 2.21 die Ungleichung $\chi_\ell^P(G) \leq \chi_\ell^{(p_1)}(G^r) \leq (2p_1 - 1)(\text{col}(G^r) - 1) + 1$. ■

Seien deg_P und Δ_P wie im Abschnitt über L_P -Labellings auf Seite 15 definiert.

Satz 2.29 (Fiala et al., [36]) Für jeden Graphen G und alle Abstandsbedingungen P gilt

$$\chi_\ell^P(G) \leq \Delta_P(G) + 1.$$

Dieser Satz läßt sich leicht aus den Ausführungen im folgenden Unterabschnitt ableiten.

Charakterisierung von $D - P$ -Listenfärbbarkeit

Definition 2.12 *Besitzt ein Graph $G = (V, E)$ bei gegebenen Abstandsbedingungen P für jede Listenzuweisung \mathcal{L} mit $\forall v \in V : |L(v)| \geq \deg_P(v)$ ein L_P -List Labelling, so nennen wir G $D - P$ -listenfärbbar.*

Mit Hilfe von G^r können wir ein in [36] vorgestelltes Resultat über verallgemeinerte T -Listenfärbungen von Graphen dahingehend abändern, daß es auf L_P -List Labellings anwendbar wird:

Satz 2.30 (Fiala et al., [36]) *Seien $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und \mathcal{L} eine Listenzuweisung mit $|L(v)| \geq \deg_P(v)$ für alle $v \in V$. Gilt*

(i) $\exists v \in V : |L(v)| > \deg_P(v)$, oder

(ii) G^r ist kein Gallai-Baum,

dann besitzt G für \mathcal{L} ein L_P -List Labelling.

Mit Hilfe von [36] lassen sich ferner Graphen G und Listenzuweisungen mit $|L(v)| = \deg_P(v)$ für alle $v \in V(G)$ charakterisieren, für die kein L_P -List Labelling möglich ist; darauf soll hier aber verzichtet werden.

Das Fiala-Škrekovski-Theorem für Listenfärbungen mit Abstandsbedingungen

Satz 2.31 (Fiala, Škrekovski, [39]) *Sei $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ eine Listenzuweisung eines Graphen G und $P = (p_1, \dots, p_r)$ ein r -Tupel von Abstandsbedingungen. Ferner sei G^P der Multigraph mit der Knotenmenge $V(G)$, so daß je zwei Knoten mit Abstand $i \in \{1, \dots, r\}$ in G durch $2p_i - 1$ parallele Kanten in G^P miteinander verbunden sind. Angenommen es gibt eine Orientierung D von G^P , welche den Bedingungen $EE(D) \neq EO(D)$ und $\forall v \in V(D) : d_D^-(v) + 1 \leq |L(v)|$ genügt. Dann existiert für G ein L_P -List Labelling.*

3. Färbungen mit maximal zwei Abstandsbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Färbungen beschäftigen, welche Bedingungen an die Differenz der Farben von Knoten im Abstand ≤ 2 stellen.

Definition 3.1 Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und zwei nichtnegative, ganze Zahlen d und s . Ein $L(d, s)$ -Labelling von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots\}$, so daß für je zwei Knoten x und y gilt:

1. $|f(x) - f(y)| \geq d$, falls $\text{dist}(x, y) = 1$ und
2. $|f(x) - f(y)| \geq s$, falls $\text{dist}(x, y) = 2$.

Die $L(d, s)$ -Zahl von G , geschrieben $\lambda_{d,s}(G)$, ist die kleinste Zahl m , für die G ein $L(d, s)$ -Labelling f mit $\max\{f(x) \mid x \in V\} = m$ besitzt.

Für $s = 0$ schreiben wir λ_d statt $\lambda_{d,0}$. Soweit nichts anderes vereinbart wurde, seien außerdem $d > 0$ und $d \geq s$.

Wir beginnen im Abschnitt 3.1 mit dem einfachen Fall $s = 0$, d.h. den Färbungen ohne Abstand-2-Bedingung. Im darauffolgenden Abschnitt 3.2 fassen wir für den Fall $s > 0$ wichtige Ergebnisse der letzten Jahre zusammen und geben $\lambda_{d,s}$ für einige Graphenklassen explizit an. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 betrachten wir den Fall $s = 1$ genauer und berechnen für eine Reihe von Graphenklassen den exakten Wert für $\lambda_{d,1}$ bzw. geben Schranken dafür an.

3.1. $L(d, 0)$ -Labellings

$L(d, 0)$ -Labellings sollen nur kurz angesprochen werden, da sie keinen wesentlichen Unterschied zur gewöhnlichen Knotenfärbung darstellen. Dies wird durch den folgenden Satz deutlich, welcher der Vollständigkeit halber mit Beweis aus [44] übernommen wurde. Da ein $L(d, 0)$ -Labelling außerdem eine T -Färbung für die $(d - 1)$ -Initialmenge $T = \{0, 1, \dots, d - 1\}$ ist, ist der folgende Satz im Grunde nur eine andere Schreibweise des Resultates aus Satz 2.7.

Satz 3.1 (Georges und Mauro, [44]) Für jeden Graphen G gilt

$$\lambda_d(G) = d \cdot \lambda_1(G) = d(\chi(G) - 1).$$

Beweis. Offensichtlich ist $\lambda_1(G) = \chi(G) - 1$. Multipliziert man die Label eines $L(1, 0)$ -Labellings mit d , so erfüllt das resultierende Labelling die Eigenschaften eines $L(d, 0)$ -Labellings, d.h. $\lambda_d(G) \leq d \cdot \lambda_1(G)$. Daher genügt es, $\lambda_d(G) \geq d \cdot \lambda_1(G)$ zu zeigen.

Es sei f ein optimales $L(d, 0)$ -Labelling für G . Wir wählen eine natürliche Zahl c , so daß $dc - d \leq \lambda_d(G) \leq dc - 1$ gilt. Für alle $1 \leq i \leq c$ sei $Y_i = \{v \in V(G) \mid di - d \leq f(v) \leq di - 1\}$. Zwei Knoten $x, y \in V(G)$ können nur dann in derselben Menge Y_i liegen, wenn $|f(x) - f(y)| < d$ ist, d.h. x und y müssen unabhängig sein. Bekanntermaßen ist die minimale Anzahl unabhängiger Mengen zur Überdeckung der Knotenmenge $V(G)$ die chromatische Zahl $\chi(G)$. Daraus folgt $c \geq \chi(G)$. Mit der obigen Bedingung $d(c - 1) \leq \lambda_d(G)$ ergibt sich $\lambda_d(G) \geq d(\chi(G) - 1) = d \cdot \lambda_1(G)$. ■

3.2. $L(d, s)$ -Labellings

Im Jahre 1988 stellte F.S. Roberts eine Variation des Frequenzzuweisungsproblems vor, in der "nahe" Basisstationen verschiedene Frequenzkanäle und "sehr nahe" Basisstationen Frequenzkanäle mit Differenz mindestens 2 erhalten sollten. Mit sehr nah bzw. nah meinte er, daß die Basisstationen im zugrunde liegenden Interferenzgraphen Abstand 1 bzw. Abstand 2 voneinander haben sollten. Damit war das Konzept der $L(2, 1)$ -Labellings geboren. Den ersten wesentlichen Beitrag lieferten Griggs und Yeh [51] im Jahre 1992, indem sie allgemeine Schranken bewiesen und für einfache Graphenklassen wie Wege, Kreise, Räder, Bäume, vollständige r -partite Graphen und Hyperwürfel exakte Werte oder Schranken berechneten. Unter anderem zeigten sie, daß für einen Graphen G der Ordnung n mit Maximalgrad Δ und chromatischer Zahl χ die oberen Schranken $\lambda_{2,1}(G) \leq n + \chi - 2$ und $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ gelten. Ferner konnten Griggs und Yeh beweisen, daß $\lambda_{2,1}(T) \in \{\Delta + 1, \Delta + 2\}$ für jeden Baum T gilt. Von ihnen stammt außerdem die bisher noch unbewiesene Vermutung

Vermutung 3.1 Für jeden Graphen G mit Maximalgrad $\Delta \geq 2$ gilt $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$.

Deren Richtigkeit wiesen sie für Graphen mit Durchmesser 2 nach. Seither erschien eine Vielzahl weiterer Artikel, in denen $L(2, 1)$ -Labellings verschiedener Graphenklassen behandelt werden. Die nächste Tabelle listet die wichtigsten Graphenklassen auf, zusammen mit den derzeit besten oberen Schranken.

Neben den $L(2, 1)$ -Labellings sind $L(1, 1)$ -Labellings die wohl am häufigsten untersuchten Färbungen mit Abstandsbedingung. Da ein $L(1, 1)$ -Labelling eines Graphen G einer gewöhnlichen Färbung des Quadrates von G entspricht, gilt $\lambda_{1,1}(G) = \chi(G^2) - 1$. Besonders oft wurde $\lambda_{1,1}$ für planare Graphen abgeschätzt, u.a. in [1],[14],[31],[56],[60],[61],[71],[78]. Speziell für outerplanare Graphen sind die Referenzen [2] und [72] zu nennen, sowie [70] für K_4 -Minor-freie Graphen.

Graphenklasse	Schranken für $\lambda_{2,1}$ (Es gilt stets auch $\lambda_{2,1} \geq \Delta + 1$.)	
Wege	$\lambda_{2,1} = 2, 3$ oder 4	(Griggs, Yeh, [51])
Kreise	$\lambda_{2,1} = 4$	(Griggs, Yeh, [51])
Reguläre Parkettierungen	$\lambda_{2,1} = \Delta + 2$	(Satz 3.4)
Bäume	$\lambda_{2,1} \leq \Delta + 2$	(Griggs, Yeh, [51])
Kakteen	$\lambda_{2,1} \leq \Delta + 3$	(Satz 4.22)
Outerplanare Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \Delta + 2$ für $\Delta \geq 8$	(Calamoneri, Petreschi, [22])
Planare Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 89$	(Molloy, Salavatipour, [78])
Hyperwürfel	$\Delta + 3 \leq \lambda_{2,1} \leq 2\Delta$	(Jonas, [61], Whittlesey et al., [102])
Einheitsintervallgraphen	$\lambda_{2,1} \leq 2\omega = 2\chi$	(Sakai, [86])
Stark Chordale Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \Delta + 2(\omega - 1)$	(Chang, Kuo, [25])
Kreisgraphen	$\lambda_{2,1} \leq 5\Delta - 2$	(Kohl, [65])
t -Bäume	$\lambda_{2,1} \leq (\Delta + 3 - t)t$	(Chang et al., [24])
Partielle t -Bäume	$\lambda_{2,1} \leq (\Delta + 2)t$	(Bodlaender et al., [11])
Split-Graphen	$\lambda_{2,1} = \Theta(\Delta^{1.5})$	(Bodlaender et al., [11])
Chordale Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\Delta^{1.5} + O(\Delta)$	(Král, [68])
Bipartite Graphen	$\lambda_{2,1} = \Theta(\Delta^2)$	(Jonas, [61], Bodlaender et al., [11])
Durchmesser-2-Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \Delta^2$	(Griggs, Yeh, [51])
Allgemeine Graphen	$\lambda_{2,1} \leq \Delta^2 + \Delta - 2$	(Gonçalves, [48])

Tabelle 3.1.: Schranken für $\lambda_{2,1}$ bestimmter Graphenklassen

Viele dieser Artikel wurden angeregt durch die seit 1977 bestehende Vermutung:

Vermutung 3.2 (Wegner, [101]) *Sei G ein planarer Graph mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$. Dann gilt*

$$\lambda_{1,1}(G) = \chi(G^2) - 1 \leq \begin{cases} 6 & , \text{für } \Delta = 3 \\ \Delta + 4 & , \text{für } 4 \leq \Delta \leq 7 \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor & , \text{für } \Delta \geq 8 \end{cases} .$$

Agnarsson und Halldórsson [2] sowie Lih und Wang [72] bewiesen unabhängig voneinander, daß $\lambda_{1,1} \in \{\Delta, \Delta + 1\}$ für einen outerplanaren Graphen G mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$ gilt, wie auch $\lambda_{1,1} = \Delta$ für $\Delta \geq 7$. Lih und Wang [70] konnten $\lambda_{1,1} \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor$ für K_4 -Minor-freie Graphen mit $\Delta \geq 4$ zeigen und $\lambda_{1,1} \leq 5$ für $\Delta = 3$. Die derzeit besten oberen Schranken für allgemeine planare Graphen sind $\lambda_{1,1} \leq \lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 77$ für $\Delta \geq 3$ und $\lambda_{1,1} \leq \lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 23$ für $\Delta \geq 241$ und stammen von Molloy und Salavatipour [78].

Im Jahre 1995 verallgemeinerten Georges und Mauro [44] das Konzept der Färbungen mit Abstandsbedingung und führten die $L(d, s)$ -Labellings ein. Sie berechneten $\lambda_{d,s}$ für eine Reihe von Graphen und bewiesen außerdem die meisten der im Abschnitt 2.1.3 aufgeführten Resultate für den Spezialfall $P = (d, s)$. Seit der Veröffentlichung dieses Artikels sind eine Reihe weiterer Arbeiten über $L(d, s)$ -Labellings erschienen. Eine gute Übersicht über die bisher erzielten Resultate zum $L(d, s)$ -Labelling-Problem bietet Calamoneri [19].

3.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Resultate

$L(d, s)$ -Labellings gehören zu den L_P -Labellings, wobei $P = (d, s)$ ist. Damit gelten natürlich sämtliche im Abschnitt 2.1.3 genannten Eigenschaften. Die daraus resultierenden allgemeinen Schranken sind im folgenden Satz zusammengetragen:

Satz 3.2 *Für jeden Graphen G mit Maximalgrad Δ und Ordnung n gilt*

$$(i) \quad \lambda_{d,s}(G) \geq \max\{d(\chi(G) - 1), s(\chi(G^2) - 1)\}, \quad (\text{Satz 2.10})$$

$$(ii) \quad \lambda_{d,s}(G) \leq d(\chi(G^2) - 1) \leq d\Delta^2, \quad (\text{Sätze 2.10 \& 2.2})$$

$$(iii) \quad \lambda_{d,s}(G) \leq sn + (d - s)\chi(G) - d, \quad (\text{Satz 2.11})$$

$$(iv) \quad \lambda_{d,s}(G) \leq d\Delta + s\Delta(\Delta - 1). \quad (\text{Satz 2.12})$$

Darüber hinaus gilt:

Satz 3.3 (Georges, Mauro [44]) *Sei G ein Graph mit Maximalgrad Δ . Enthält G einen Δ -Knoten, dessen sämtliche Nachbarn Δ -Knoten sind, dann gilt*

$$(i) \quad \lambda_{d,s}(G) \geq d + 2s(\Delta - 1), \text{ für } d \geq s\Delta,$$

$$(ii) \quad \lambda_{d,s}(G) \geq 2d + s(\Delta - 2), \text{ für } d \leq s\Delta.$$

Komplexität

Es ist bekannt, daß das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph mit r , $r \geq 3$, Farben gefärbt werden kann, \mathcal{NP} -vollständig ist. Da ein $L(d, s)$ -Labelling eine Verallgemeinerung der Knotenfärbung darstellt, liegt die Vermutung nahe, daß die Frage, ob ein gegebener Graph ein $L(d, s)$ -Labelling mit maximalem Label r besitzt, ebenfalls \mathcal{NP} -vollständig ist.

Betrachten wir dazu folgendes Entscheidungsproblem:

Problem: $L(2, 1)$ -Labelling

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$

Frage: Ist $\lambda_{2,1}(G) \leq |V|$?

Es wurde gezeigt, daß $L(2, 1)$ -Labelling in \mathcal{P} ist, für

- Kreise (Griggs und Yeh, [51]),
- Reguläre Parkettierungen (Bertossi et al., [10]),
- Bäume (Chang und Kuo, [25]).

Ferner wurde die \mathcal{NP} -Vollständigkeit von $L(2, 1)$ -Labelling nachgewiesen für

- Partielle 2-Bäume (Fiala et al., [35]),
- Split-Graphen (Bodlaender et al. [11]),
- Chordale Graphen (Bodlaender et al. [11]),
- Bipartite Graphen (Bodlaender et al. [11]),
- Durchmesser-2-Graphen (Griggs und Yeh, [51]),
- Δ -reguläre Graphen, $\Delta \geq 3$ (Fiala und Kratochvíl, [37]).

Damit ist das Problem natürlich für allgemeine Graphen auch \mathcal{NP} -vollständig.

3.2.2. Exakte Werte für $\lambda_{d,s}$ einfacher Graphenklassen

Graphenklasse	$\lambda_{d,s}$
Wege	$\begin{cases} 0 & , \text{für } n = 1 \\ d & , \text{für } n = 2 \\ d + s & , \text{für } n = 3, 4 \\ d + \min\{d, 2s\} & , \text{für } n \geq 5 \end{cases}$
Kreise	
für $d \geq 2s$	$\begin{cases} 2d & , \text{für } 2 \nmid n, n \geq 3 \\ d + 2s & , \text{für } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2d & , \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \wedge d \leq 3s \\ d + 3s & , \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \wedge d \geq 3s \end{cases}$
für $d \leq 2s$	$\begin{cases} 2d & , \text{für } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4s & , \text{für } n = 5 \\ d + 2s & , \text{sonst} \end{cases}$
Vollständige r -partite Graphen	$d(r-1) + s(n-r)$
Sterne	$d + s(n-2)$
Cliques	$(n-1)d$
Räder ($K_1 + C_n$)	$\begin{cases} d + s(n-1) & , \text{für } \frac{d}{s} \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ 3d & , \text{für } 2 \nmid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-1}{2} \\ 2d + \frac{n}{2}s & , \text{für } 2 \mid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-2}{2} \end{cases}$

Tabelle 3.2.: Exakte Werte für $\lambda_{d,s}$ einfacher Graphenklassen (aus [44])

3.3. Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen

3.3.1. Reguläre Parkettierungen

Eine *Parkettierung* (engl.: tiling) ist eine Überdeckung der Ebene mit Kopien desselben Polygons. Die einzig möglichen regulären Parkettierungen (d.h. es werden nur reguläre Polygone verwendet) sind die hexagonale, die quadratische und die trianguläre Parkettierung. Es ergeben sich daraus reguläre Graphen mit Knotengrad 3, 4 bzw. 6. Im Jahre 2001 wurde der folgende Satz gezeigt:

Satz 3.4 (Calamoneri und Petreschi, [21])

Für eine reguläre Parkettierung der Ebene mit Maximalgrad Δ gilt $\lambda_{d,1} = \Delta + 2^d - 2$, für $0 \leq d \leq 2$.

Es muß berücksichtigt werden, daß hier ein $L(0,1)$ -Labelling so definiert ist, daß zwei Knoten, die sowohl adjazent als auch durch einen Weg der Länge 2 miteinander verbunden sind (wie es in der triangulären Parkettierung der Fall ist), verschiedene Label erhalten müssen. Betrachtet man $L(0,1)$ -Labellings, bei denen die adjazenten Knoten nicht die Abstand-2-Bedingung erfüllen müssen, so ergibt sich $\lambda_{0,1} = 3$ für die trianguläre Parkettierung. In Hinsicht auf den praktischen Hintergrund ist diese Betrachtungsweise aber realitätsferner.

Im folgenden werden die Werte für $\lambda_{d,1}$, $d > 2$, für die drei regulären Parkettierungen berechnet. Diese Ergebnisse wurden in der Zwischenzeit unabhängig von den folgenden Betrachtungen auch durch Calamoneri [18] bewiesen und teilweise auf $\lambda_{d,s}$ für $s > 1$ erweitert.

►► Hexagonale Parkettierung

Satz 3.5 *Für eine hexagonale Parkettierung H gilt $\lambda_{d,1}(H) = 4 + d$, für $d \geq 3$.*

Aufgrund großer Ähnlichkeiten in der Beweisführung wird dieser Satz zusammen mit dem folgenden Satz 3.6 bewiesen.

►► Quadratische Parkettierung

Satz 3.6 *Für eine quadratische Parkettierung Q gilt*

$$\lambda_{d,1}(Q) = \begin{cases} 8 & , \text{für } d = 3 \\ 6 + d & , \text{für } d \geq 4 \end{cases} .$$

Beweis. Im folgenden seien $x = 3$, $\Delta = 3$ für die hexagonale bzw. $x = 5$, $\Delta = 4$ für die quadratische Parkettierung.

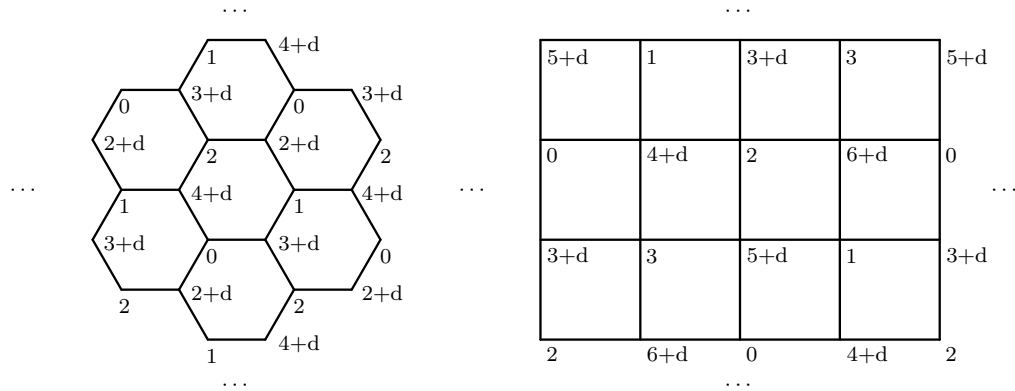


Abbildung 3.1.: $L(d, 1)$ -Labelling der hexagonalen und quadratischen Parkettierung

Sei $d \geq 3$. Durch explizite Angabe eines zulässigen $L(d, 1)$ -Labellings (siehe Abb. 3.1) ergibt sich zunächst $\lambda_{d,1} \leq x + 1 + d$.

Angenommen, es gilt $\lambda_{d,1} < x + 1 + d$. Dann existiert ein Labelling f mit $\max_{v \in V} f(v) = x + d$.

Sei u ein Knoten mit $f(u) = x + d$. Die Δ Nachbarn von u müssen Label aus der Menge $\{0, \dots, x\}$ erhalten haben. Gelte $f(v) = i$, $0 \leq i \leq x$, für einen Knoten $v \in N(u)$. Folglich müssen die Knoten aus $N(v) - \{u\}$ Label aus der Menge $C = \{0, \dots, i - d, i + d, \dots, x - 1 + d\}$ mit Kardinalität $|C| = x + 1 - d$ besitzen. Da jedoch alle Nachbarn von v paarweise Abstand 2 haben, muß C die notwendige Bedingung $|C| \geq |N(v) - \{u\}| = \Delta - 1$ erfüllen, also $x + 2 - \Delta \geq d$. Für die hexagonale Parkettierung mit $x = 3$ und $\Delta = 3$ führt dies zu $d \leq 2$, was jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung $d \geq 3$ steht.

Für die quadratische Parkettierung mit $x = 5$ und $\Delta = 4$ erhält man die notwendige Bedingung $d \leq 3$. Diese steht für $d \geq 4$ ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung. Für den Spezialfall $d = 3$ zeigt die Abbildung 3.3 (links) ein $L(3, 1)$ -Labelling der quadratischen Parkettierung Q mit maximalem Label 8. Durch erneute Anwendung der obigen Beweistechnik mit der Annahme $\lambda_{d,1} < x + d$ anstelle von $\lambda_{d,1} < x + 1 + d$ erhält man nun den Widerspruch $d \leq 2$. Demzufolge kann $\lambda_{3,1}(Q)$ nicht kleiner als 8 sein. ■

►► Trianguläre Parkettierung

Satz 3.7 Für eine trianguläre Parkettierung T gilt

$$\lambda_{d,1}(T) = \begin{cases} 11 & , \text{für } d = 3 \\ 6 + 2d & , \text{für } d \geq 4 \end{cases} .$$

Beweis. Sei $d \geq 3$. Durch explizite Angabe eines zulässigen $L(d, 1)$ -Labellings mit maximalem Label $6 + 2d$ (siehe Abb. 3.2) zeigt sich $\lambda_{d,1}(T) \leq 6 + 2d$.

Angenommen, es gilt $\lambda_{d,1}(T) < 6 + 2d$. Folglich gibt es ein Labelling f mit $\max_{v \in V(T)} f(v) = 5 + 2d$. Sei $f(u) = 5 + 2d$ für einen Knoten $u \in V(T)$.

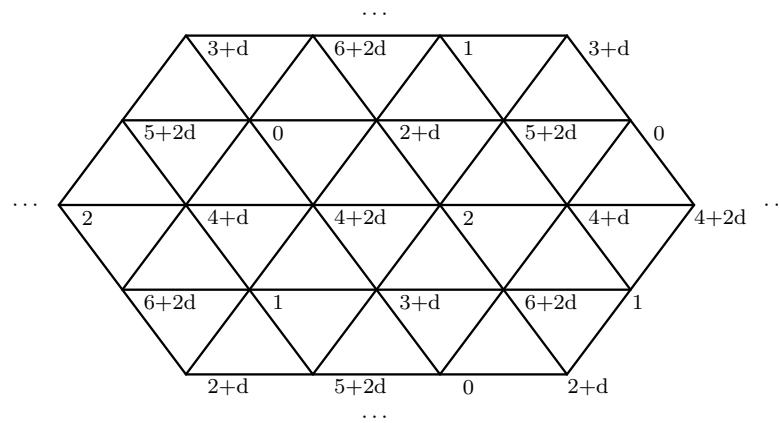
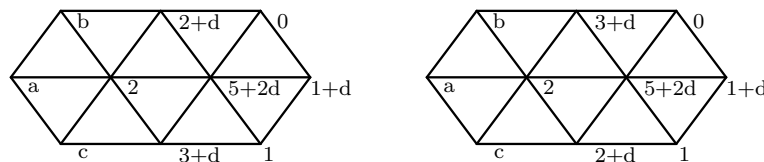


Abbildung 3.2.: $L(d, 1)$ -Labelling der triangulären Parkettierung

Angenommen, es gibt einen Knoten $v \in V(T)$ mit $f(v) = 5 + d$. Dann müssen die Nachbarn von v , welche einen Kreis der Länge 6 induzieren, Label aus der Menge $\{0, \dots, 5, 5 + 2d\}$ haben. Bekanntermaßen ist $\lambda_{d,1}(C_6) = 3 + d$ und demnach $\lambda_{d,1}(C_6) \geq 6$ für $d \geq 3$. Folglich muß $f(w) = 5 + 2d$ für einen Knoten $w \in N(v)$ gelten. Die verbleibenden Knoten aus der Menge $N(v) - \{w\}$ induzieren einen Weg mit 5 Knoten, für den $\lambda_{d,1}(P_5) = 2 + d$ ist, so daß wir die notwendige Bedingung $2 + d \leq 5$ erhalten.

Angenommen, es gibt einen Knoten $v \in V(T)$ mit $f(v) = 4 + d$. Dann müssen den Knoten aus $N(v)$ Label aus der Menge $\{0, \dots, 4, 4 + 2d, 5 + 2d\}$ zugewiesen worden sein. Durch analoge Argumentation wie oben erhalten wir $f(w) = 4 + 2d$ und $f(x) = 5 + 2d$ für zwei Knoten $w, x \in N(v)$. In Abhängigkeit davon, welche der Nachbarn diese Label haben, induzieren die Knoten aus $N(v) - \{w, x\}$ entweder einen Weg mit 3 Knoten und einen isolierten Knoten oder zwei Wege mit je 2 Knoten. In beiden Fällen benötigt man mindestens $1 + d$ als maximales Label. Also muß $1 + d \leq 4$ gelten.

Zusammenfassend ergibt sich, daß für $d > 3$ kein Knoten ein Label $4 + d$ oder $5 + d$ haben kann. Betrachten wir nun die Label der Nachbarn von u mit $f(u) = 5 + 2d$, so ergeben sich nur die unten aufgezeigten Möglichkeiten:



Offensichtlich gilt $a \geq 4 + d$ und demzufolge $b, c \geq 4 + 2d$. Wegen $b, c \neq 5 + 2d$ und $b \neq c$ ergibt sich ein Widerspruch zu $\lambda_{d,1}(T) < 6 + 2d$.

Als letztes betrachten wir den Sonderfall $d = 3$. Ein zulässiges $L(3, 1)$ -Labelling mit maximalem Label 11 ist in Abbildung 3.3 (rechts) angegeben. Um Gleichheit – also $\lambda_{3,1}(T) = 11$ – zu zeigen, nehmen wir $\lambda_{3,1}(T) < 11$ an und verwenden die gleichen Ideen wie für den Fall $d > 3$, um einen Widerspruch zu finden. ■

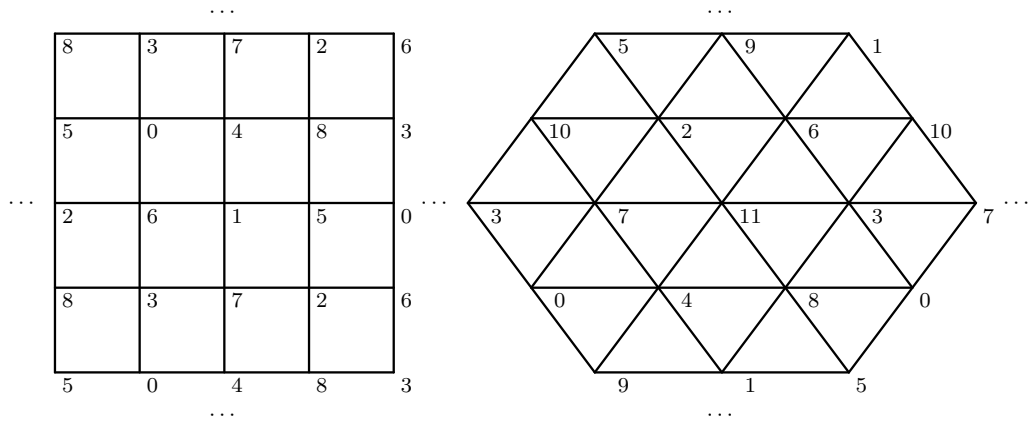


Abbildung 3.3.: $L(3,1)$ -Labelling der quadratischen und triangulären Parkettierung

3.3.2. Potenzen von Wegen

Im folgenden bezeichne P_n^r , $r \geq 1$, die r -te Potenz eines Weges mit n Knoten. Entsprechend [24] werden diese auch als r -Wege bezeichnet. In dem Artikel [24] von Chang et al. wurden bereits Werte für die $L(d,1)$ -Zahl für Wegpotenzen angegeben, jedoch erwiesen sich diese Ergebnisse als falsch.

Bevor wir uns der Berechnung von $\lambda_{d,1}(P_n^r)$ zuwenden können, müssen noch einige technische Hilfsmittel bereitgestellt werden.

▷▷ **Vorbetrachtungen:** Als erstes zerlegen wir die Knotenmenge $V(P_n^r)$ in Mengen von $r+1$ in P_n^r aufeinanderfolgenden Knoten

$$V(P_n^r) = \{v_0^0, \dots, v_r^0; v_0^1, \dots, v_r^1; \dots; v_0^{q-1}, \dots, v_r^{q-1}; v_0^q, \dots, v_{p-1}^q\}.$$

derart, daß $n = q(r+1) + p$, $p \in \{1, \dots, r+1\}$. Die Knotenmenge $\{v_0^i, \dots, v_r^i\}$, $i = 0, \dots, q$, werden wir als *Knotenreihe* R_i bezeichnen. Dabei sind die Knotenreihen R_0, \dots, R_{q-1} stets *vollständig* und die Knotenreihe R_q nur dann, wenn $p = r+1$ ist. Weiterhin definieren wir *Farbstufen* F_i , $i = 0, 1, \dots$, mit $F_i := \{id, 1+id, \dots, d-1+id\}$. Da zwei Label innerhalb derselben Farbstufe maximal die Differenz $d-1$ haben können, müssen je $r+1$ aufeinanderfolgende Knoten des r -Weges Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen erhalten.

Angenommen, es existiert ein zulässiges $L(d,1)$ -Labelling f von P_n^r mit

$$\max_{v \in V(P_n^r)} f(v) < (r+1)d.$$

Aus dieser Annahme leiten wir nun verschiedene Eigenschaften des Labellings f ab. Diese Eigenschaften werden in den Lemmata 3.1, 3.2 und 3.3 aufgelistet.

Wir betrachten im folgenden nur $q \geq 1$. Offensichtlich gilt $\forall v \in V(P_n^r) : f(v) \in \bigcup_{i=0}^r F_i$. Sei π diejenige Permutation der Zahlen $0, \dots, r$, für welche $f(v_{\pi(j)}^0) \in F_j, j = 0, \dots, r$, gilt. π existiert stets, da die Knoten innerhalb einer Knotenreihe Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen bekommen müssen.

Lemma 3.1 *Dann gilt:*

- (1) $f(v_{\pi(j)}^i) \in F_j, i = 1, \dots, q; j = 0, \dots, r$.
- (2) *Jede Clique mit $r + 1$ Knoten, folglich auch jede vollständige Knotenreihe R_i , besitzt aus jeder Farbstufe $F_j, j = 0, \dots, r$, genau ein Label, welches in der Form $a_j + jd$ mit $a_j \in \{0, \dots, d - 1\}$ geschrieben werden kann. Dabei muß die Beziehung $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r$ gelten.*

$$\Rightarrow f(v_{\pi(r)}^i) - rd \geq f(v_{\pi(r-1)}^i) - (r-1)d \geq \dots \geq f(v_{\pi(1)}^i) - d \geq f(v_{\pi(0)}^i),$$

$$i = 0, \dots, q - 1.$$
- (3) *Je zwei aufeinanderfolgende Knotenreihen R_i und $R_{i+1}, i = 0, \dots, q - 1$, müssen verschiedene Label aus der Farbstufe $F_j, j = 0, \dots, r$, besitzen.*

$$\Rightarrow f(v_{\pi(j)}^i) \neq f(v_{\pi(j)}^{i+1}), i = 0, \dots, q - 1; j = 0, \dots, r.$$
- (4) *Liegt in der Knotenreihe R_i der Knoten mit dem Label aus F_{j+1} rechts vom Knoten mit dem Label aus F_j , so ist er auch zum in R_{i+1} liegenden Knoten mit dem Label aus F_j adjazent.*

$$\Rightarrow \text{Gilt } \pi(j) < \pi(j+1), \text{ so ist } f(v_{\pi(j+1)}^i) \geq \max \left\{ f(v_{\pi(j)}^i), f(v_{\pi(j)}^{i+1}) \right\} + d,$$

$$i = 0, \dots, q - 1; j = 0, \dots, r - 1.$$
- (4') *Liegt in der Knotenreihe R_i der Knoten mit dem Label aus F_{j+1} links vom Knoten mit dem Label aus F_j , so ist er auch zum in R_{i-1} liegenden Knoten mit dem Label aus F_j adjazent.*

$$\Rightarrow \text{Gilt } \pi(j) > \pi(j+1), \text{ so ist } f(v_{\pi(j+1)}^i) \geq \max \left\{ f(v_{\pi(j)}^i), f(v_{\pi(j)}^{i-1}) \right\} + d,$$

$$i = 1, \dots, q; j = 0, \dots, r - 1.$$

Beweis.

Zu (1): Da je $r + 1$ aufeinanderfolgende Knoten eine Clique bilden, müssen sie Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen erhalten. Beginnen wir also in der ersten Knotenreihe mit einer bestimmten Permutation der Farbstufen, so muß diese Permutation für alle anderen Knotenreihen beibehalten werden.

Zu (2): Diese Beziehung ergibt sich aus der Abstand-1-Bedingung, die besagt, daß adjazenten Knoten zugewiesene Label stets mindestens Differenz d aufweisen müssen.

Zu (3): Diese Beziehung folgt aus der Tatsache, daß $v_{\pi(j)}^i$ und $v_{\pi(j)}^{i+1}, i = 0, \dots, q - 1; j = 0, \dots, r$, Abstand 2 haben.

Zu (4) und (4'): Gilt $\pi(j) < \pi(j+1)$, so ist $v_{\pi(j+1)}^i$ adjazent zu $v_{\pi(j)}^i$ und $v_{\pi(j)}^{i+1}$, $i = 0, \dots, q-1$; $j = 0, \dots, r-1$. Andernfalls ist $v_{\pi(j+1)}^i$ adjazent zu $v_{\pi(j)}^i$ und $v_{\pi(j)}^{i-1}$, $i = 1, \dots, q$; $j = 0, \dots, r-1$. Die Anwendung der Abstand-1-Bedingung führt dann zu den angegebenen Beziehungen. \square

Diese vier Beziehungen sollen an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 3.1 Es sei der Graph P_8^2 gegeben. Wir betrachten ein $L(d, 1)$ -Labelling, bei dem der erste Knoten ein Label aus der Farbstufe 0 erhält, der zweite aus der Farbstufe 2 und der dritte aus der Farbstufe 1.

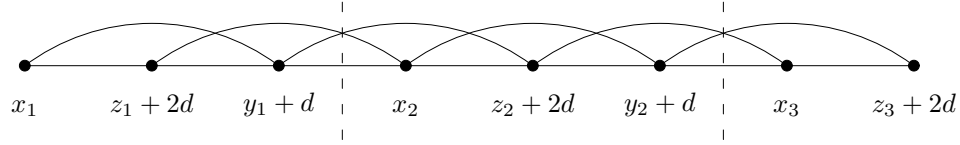


Abbildung 3.4.: $L(d, 1)$ -Labelling des P_8^2

Zu (1): Da der vierte Knoten adjazent zum zweiten und dritten ist, muß er wieder ein Label aus der Farbstufe 0 erhalten. Auf analoge Weise folgert man, daß der fünfte Knoten ein Label aus der Farbstufe 2 erhalten muß, usw.. Es ergibt sich ein Labelling-Schema wie im Bild 3.4 dargestellt, wobei die von d verschiedenen Variablen aus der Menge $\{0, 1, \dots, d-1\}$ sind.

Zu (2): Betrachtet man die erste Knotenreihe, so ergibt sich sofort $z_1 \geq y_1 \geq x_1$, da andernfalls die Abstand-1-Bedingung verletzt wäre.

Zu (3). Ebenso erkennt man, daß $x_1 \neq x_2$ sein muß, da der erste und der vierte Knoten Abstand 2 haben.

Zu (4). Der dritte Knoten ist adjazent zum ersten und vierten. Daraus resultiert $y_1 \geq \max\{x_1, x_2\}$.

Zu (4'). Der fünfte Knoten ist adjazent zum dritten und sechsten. Daraus resultiert $z_2 \geq \max\{y_1, y_2\}$.

Lemma 3.2 Seien $k \in \{0, \dots, r\}$ und i_k die Anzahl der Zahlen $j \in \{0, \dots, k-1\}$ mit $\pi(j+1) < \pi(j)$. Dann gilt $\max\{f(v_{\pi(k)}^i), f(v_{\pi(k)}^{i+1})\} \geq k+1+kd$,

(i) für $i = i_k, \dots, i_k + q - k - 1$, wenn $\pi(0) = 0$,

(ii) für $i = i_k, \dots, i_k + q - k - 2$, wenn $\pi(0) > 0$.

Beweis.

Zu (i): (vollständige Induktion über k)

IA: $k = 0$.

Es gilt $i_0 = 0$ und $f(v_{\pi(0)}^i) \geq 0$, $i = 0, \dots, q$. Aus Lemma 3.1 (3) folgt

$$\max\{f(v_{\pi(0)}^i), f(v_{\pi(0)}^{i+1})\} \geq 1, \text{ für } i = 0, \dots, q-1. \quad \checkmark$$

IV: Die Behauptung gelte für $k \leq K$.

IS: $k = K + 1$.

(a) Angenommen, $\pi(K) < \pi(K + 1)$, d.h. $i_{K+1} = i_K$.

Dann folgt aus IV mit Hilfe von Lemma 3.1 (4) $f(v_{\pi(K+1)}^i) \geq K + 1 + (K + 1)d$, $i = i_K, \dots, i_K + q - K - 1$, und aus Lemma 3.1 (3)

$$\max \left\{ f(v_{\pi(K+1)}^i), f(v_{\pi(K+1)}^{i+1}) \right\} \geq K + 2 + (K + 1)d,$$

für $i = i_K, \dots, i_K + q - (K + 1) - 1$. ✓

(b) Angenommen, $\pi(K) > \pi(K + 1)$, d.h. $i_{K+1} = i_K + 1$.

Dann folgt aus IV mit Hilfe von Lemma 3.1 (4') $f(v_{\pi(K+1)}^i) \geq K + 1 + (K + 1)d$, $i = i_K + 1, \dots, i_K + q - K$, und aus Lemma 3.1 (3)

$$\max \left\{ f(v_{\pi(K+1)}^i), f(v_{\pi(K+1)}^{i+1}) \right\} \geq K + 2 + (K + 1)d,$$

für $i = \underbrace{i_K + 1}_{=i_{K+1}}, \dots, \underbrace{i_K + 1 + q}_{=i_{K+1}} - (K + 1) - 1$. ✓

Zu (ii): Bei $\pi(0) > 0$ kann $\max\{f(v_{\pi(0)}^i), f(v_{\pi(0)}^{i+1})\} \geq 1$ nur bis $i = q - 2$ garantiert werden. Alles weitere ist analog zum Fall (i). Damit verschiebt sich nur die in (i) angegebene obere Grenze für die Variable i um 1 nach unten. □

Lemma 3.3 *Es existiert eine Knotenreihe R_i in P_n^r mit $f(v_{\pi(r)}^i) \geq r + 1 + rd$, wenn $q \geq r + 2$, und $f(v_{\pi(r)}^i) \geq q + rd$, wenn $q \leq r + 1$.*

Beweis. Wir setzen $t := \pi^{-1}(0)$.

Fall 1. $q \geq r + 2$.

Nach Lemma 3.2 gilt $\max\{f(v_{\pi(r)}^{i_r}), f(v_{\pi(r)}^{i_r+1})\} \geq r + 1 + rd$. Wegen $i_r \geq 0$ und $i_r + 1 \leq r + 1 \leq q - 1$ existieren beide Knoten $v_{\pi(r)}^{i_r}$ und $v_{\pi(r)}^{i_r+1}$ und folglich auch derjenige Knoten mit dem Label $\geq r + 1 + rd$.

Fall 2. $q \leq r + 1 \wedge t = 0$.

Offensichtlich ist dann $i_k \leq k - 1$ für $k \geq 1$.

Laut Lemma 3.2 (i) gilt $\max\{f(v_{\pi(q-1)}^{i_{q-1}}), f(v_{\pi(q-1)}^{i_{q-1}+1})\} \geq q + (q - 1)d$. Wegen $i_{q-1} \geq 0$ und $i_{q-1} + 1 \leq q - 1$ sind beide Knotenreihen $R_{i_{q-1}}$ und $R_{i_{q-1}+1}$ vollständig, weswegen wir o.B.d.A. $f(v_{\pi(q-1)}^{i_{q-1}}) \geq q + (q - 1)d$ setzen können. Es ergibt sich $f(v_{\pi(r)}^{i_{q-1}}) \geq q + rd$ aus Lemma 3.1 (2).

Fall 3. $q = 1 \wedge t > 0$.

Offensichtlich gilt $\max\{f(v_0^0), f(v_0^1)\} \geq 1 + td$. Ist $t = r$, so existiert der Knoten mit Label $\geq 1 + rd$. Ist $t < r$, so ist der Knoten $v_{\pi(t+1)}^0$ adjazent zu v_0^0 und v_0^1 ,

woraus $f(v_{\pi(t+1)}^0) \geq 1 + (t+1)d$ folgt. Aus Lemma 3.1 (2) resultiert $f(v_{\pi(r)}^0) \geq 1 + rd = q + rd$.

Fall 4. $2 \leq q \leq r+1 \wedge t > 0$.

Aus Lemma 3.2 (ii) schließen wir $\max\{f(v_{\pi(q-2)}^{i_{q-2}}), f(v_{\pi(q-2)}^{i_{q-2}+1})\} \geq q-1 + (q-2)d$.

Fall 4.1. $t > q-2$.

Nach Lemma 3.1 (2) folgt $\max\{f(v_{\pi(t-1)}^{i_{q-2}}), f(v_{\pi(t-1)}^{i_{q-2}+1})\} \geq q-1 + (t-1)d$. Sei $v_{\pi(t-1)}^{i^*}$, $i^* \in \{i_{q-2}, i_{q-2}+1\}$, derjenige Knoten mit Label $\geq q-1 + (t-1)d$. Da die Knoten $v_{\pi(t)}^{i^*}, v_{\pi(t)}^{i^*+1}$ existieren und adjazent zu $v_{\pi(t-1)}^{i^*}$ sind, folgt aus Lemma 3.1 (4') $\max\{f(v_{\pi(t)}^{i^*}), f(v_{\pi(t)}^{i^*+1})\} \geq q+td$. Aus bzw. analog zu Lemma 3.1 (2) ergibt sich $\max\{f(v_{\pi(r)}^{i^*}), f(v_{\pi(r)}^{i^*+1})\} \geq q+rd$.

Fall 4.2. $t \leq q-2$.

Aus $0 < t \leq q-2$ folgt $i_{q-2} \geq 1$ und $q \geq 3$.

– Ist $i_{q-2} = q-2$, d.h. $\pi(q-2) < \pi(q-3) < \dots < \pi(0)$, so gilt $t = q-2$. Sei $v_{\pi(q-2)}^{i^*}$, $i^* \in \{i_{q-2}, i_{q-2}+1\}$, derjenige Knoten mit Label $\geq q-1 + (q-2)d$. Dann existieren die Knoten $v_{\pi(q-1)}^{i^*-1}, v_{\pi(q-1)}^{i^*}$ und sind adjazent zu $v_{\pi(q-2)}^{i^*}$. Daher folgt $\max\{f(v_{\pi(q-1)}^{i^*-1}), f(v_{\pi(q-1)}^{i^*})\} \geq q + (q-1)d$ aus Lemma 3.1 (4). Mit bzw. analog zu Lemma 3.1 (2) ergibt sich $\max\{f(v_{\pi(r)}^{i^*-1}), f(v_{\pi(r)}^{i^*})\} \geq q+rd$.

– Ist $i_{q-2} \leq q-3$, so sind die Knotenreihen $R_{i_{q-2}-1}, \dots, R_{i_{q-2}+2}$ vollständig, so daß wir o.B.d.A. $f(v_{\pi(q-2)}^{i_{q-2}}) \geq q-1 + (q-2)d$ annehmen. Gilt $\pi(q-2) < \pi(q-1)$, so folgt $\max\{f(v_{\pi(q-1)}^{i_{q-2}-1}), f(v_{\pi(q-1)}^{i_{q-2}})\} \geq q + (q-1)d$ aus Lemma 3.1 (4) und damit $\max\{f(v_{\pi(r)}^{i_{q-2}-1}), f(v_{\pi(r)}^{i_{q-2}})\} \geq q+rd$ aus Lemma 3.1 (2). Für $\pi(q-2) > \pi(q-1)$ ergibt sich analog mit Lemma 3.1 (4') $\max\{f(v_{\pi(r)}^{i_{q-2}}), f(v_{\pi(r)}^{i_{q-2}+1})\} \geq q+rd$. \square

\triangleright **Berechnung von $\lambda_{d,1}$:**

Satz 3.8 Für einen r -Weg gilt $\lambda_{1,1}(P_n^r) = \min\{n-1, 2r\}$ und für $d \geq 2$,

$$\lambda_{d,1}(P_n^r) = \begin{cases} (n-1)d & , \text{ für } n \leq r+1 \\ \left\lceil \frac{n}{r+1} \right\rceil - 1 + rd & , \text{ für } r+1 < n \leq a(r+1) \\ a + rd & , \text{ für } a(r+1) < n \end{cases} ,$$

wobei $a := \min\{d, r+1\}$.

Beweis. Es gilt $\lambda_{1,1}(P_n^r) = \lambda_{1,0}(P_n^{2r}) = \omega(P_n^{2r}) - 1$. Wegen $\omega(P_n^{2r}) = \min\{n, 2r+1\}$ folgt die Behauptung für $\lambda_{1,1}(P_n^r)$. Sei nun $d \geq 2$. Für $n \leq r+1$ ist $P_n^r \cong K_n$ und damit $\lambda_{d,1}(P_n^r) = (n-1)d$.

Betrachten wir r -Wege mit $n > r+1$, so bilden je $r+1$ aufeinanderfolgende Knoten eine Clique, woraus $\lambda_{d,1}(P_n^r) \geq rd$ geschlossen werden kann. Ebenso läßt sich sofort eine Sequenz von $2r+3$ Labeln angeben:

$$\underbrace{0, d, \dots, (r+1)d}_{r+2 \text{ Terme}} ; \underbrace{1, 1+d, \dots, 1+rd}_{r+1 \text{ Terme}}$$

welche, wiederholt angewendet, ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling des r -Weges mit maximalem Label $(r + 1)d$ liefert. Folglich ist $\lambda_{d,1}(P_n^r) \leq (r + 1)d$.

Angenommen, es existiert ein $L(d, 1)$ -Labelling f von P_n^r mit $\max_{v \in V(P_n^r)} f(v) < (r + 1)d$. Aus Lemma 3.3 folgt dann $\max_{v \in V(P_n^r)} f(v) \geq r + 1 + rd$ für $q \geq r + 2$ und $\max_{v \in V(P_n^r)} f(v) \geq q + rd = \lceil \frac{n}{r+1} \rceil - 1 + rd$ für $q \leq r + 1$.

Dies bedeutet aber, daß für den Fall $d \leq \min\{q, r + 1\}$ die Annahme $\max_{v \in V(P_n^r)} f(v) < (r + 1)d$ verletzt worden ist. Somit reichen die $r + 1$ Farbstufen hier nicht aus. Demzufolge brauchen wir eine weitere Farbstufe F_{r+1} , aus der wir das Label $d + rd$ nehmen. In diesem Fall ist das obige Labelling-Schema, welches zu der oberen Schranke für $\lambda_{d,1}$ führte, bereits optimal.

Ist $d > \min\{q, r + 1\}$, so weisen wir durch Angabe spezieller Labelling-Schemen nach, daß die soeben gewonnenen unteren Schranken scharf sind.

Für $q < r + 1$ zeigt sich durch Verwendung des folgenden "abfallenden Labelling-Schemas"

$$\underbrace{q, q + d, \dots, q + rd}_{r+1 \text{ Terme}}, \underbrace{q - 1, q - 1 + d, \dots, q - 1 + rd}_{r+1 \text{ Terme}}, \dots, \underbrace{0, d, \dots, (p - 1)d}_{p \text{ Terme}}$$

daß ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling von P_n^r mit maximalem Label $\lceil \frac{n}{r+1} \rceil - 1 + rd$ existiert. Ist $q \geq r + 1$, so verwenden wir die Sequenz

$$0, 1 + d, \dots, r + rd ; 1, 2 + d, \dots, (r + 1) + rd$$

und wiederholen diese solange, bis allen Knoten des Graphen ein Label zugewiesen worden ist. ■

Bemerkung 3.1 *Bemerkt sei, daß das letzte Labelling aus dem Beweis nicht das einzige mögliche $L(d, 1)$ -Labelling für diesen Fall ist. Betrachten wir jedoch Labellings, welche für beliebig lange r -Wege zulässig sind, so ist allen diesen Labellings gemeinsam, daß bis auf wenige Ausnahmen*

$$f(v_{\pi(j)}^i) \in \{j + jd, j + 1 + jd\} \quad (3.1)$$

erfüllt sein muß. Ausnahmen kann es dabei nur an den "Enden" des Weges geben, wie z.B. das folgende Labelling-Schema des P_{12}^2 zeigt:

$$2, 2 + d, 3 + 2d ; 0, 1 + d, 2 + 2d ; 1, 2 + d, 3 + 2d ; 0, d, 2d.$$

Labellings, deren Struktur (bis auf die Ausnahmen an den Wegenden) der Bedingung (3.1) folgt, wollen wir als "alternierende Labelling-Schemen" bezeichnen.

Beispiel 3.2 Die im letzten Beweis verwendeten Labelling-Schemen sollen an zwei Graphen veranschaulicht werden. Dem Graphen P_9^2 werden die Label gemäß dem abfallenden Labelling-Schema und P_{10}^2 werden die Label gemäß einem alternierenden Labelling-Schema zugewiesen (siehe Bild 3.5).

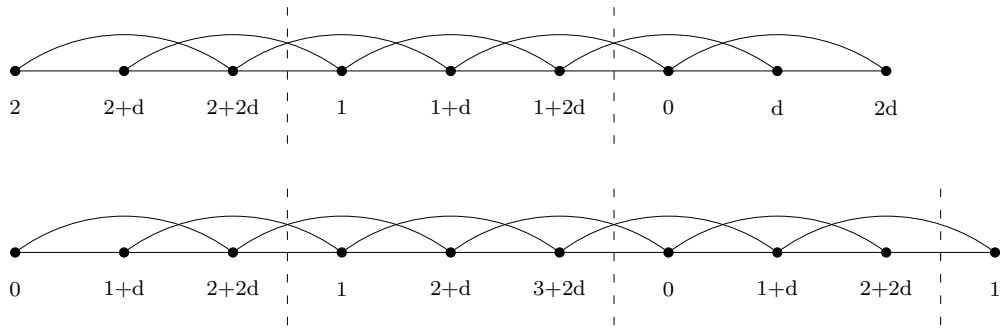


Abbildung 3.5.: $L(d, 1)$ -Labelling des P_9^2 und des P_{10}^2

3.3.3. Potenzen von Kreisen

Mit C_n^r , $r \geq 1$, sei die r -te Potenz eines Kreises mit n Knoten bezeichnet. C_n^r wird im folgenden auch r -Kreis genannt.

Lemma 3.4 (Materna, [76]) Für $n \leq 2r + 1$ ist $C_n^r \cong K_n$ und daher $\chi(C_n^r) = n$. Für $n > 2r + 1$ gilt

$$\chi(C_n^r) = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{r+1} \right\rfloor} \right\rceil.$$

Dieses Lemma liefert sofort $\lambda_{1,1}$ für r -Kreise, nämlich:

Folgerung 3.1

$$\lambda_{1,1}(C_n^r) = \chi((C_n^r)^2) - 1 = \chi(C_n^{2r}) - 1 = \begin{cases} n - 1 & , \text{für } n \leq 4r + 1 \\ \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{2r+1} \right\rfloor} \right\rceil - 1 & , \text{für } n > 4r + 1 \end{cases}$$

Weiterhin ist bereits $\lambda_{d,1}(C_n^r)$ für $r = 1$ bekannt:

Satz 3.9 (Georges und Mauro, [44])

$$\lambda_{d,1}(C_n) = \begin{cases} 2 + d & , \text{für } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \min\{2d, 3 + d\} & , \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2d & , \text{für } 2 \nmid n \end{cases}$$

Seien nun $d \geq 2$ und $r \geq 2$. Bevor wir uns der Bestimmung von $\lambda_{d,1}(C_n^r)$ widmen können, sind noch einige Vorbetrachtungen vonnöten.

Wie schon bei den Potenzen von Wegen, bilden auch im r -Kreis je $r + 1$ aufeinanderfolgende Knoten eine Clique. Greifen wir den Begriff der Farbstufe aus dem Beweis zu Satz 3.8 wieder auf, so müssen also je $r + 1$ aufeinanderfolgende Knoten Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen erhalten. Es wäre demnach sehr bequem, die Knotenmenge $V(C_n^r)$ in disjunkte Mengen von je $r + 1$ aufeinanderfolgenden Knoten zu zerlegen. Natürlich ist das nur möglich, wenn n

durch $r + 1$ teilbar ist. Im allgemeinen Fall werden wir stattdessen $V(C_n^r)$ in disjunkte Mengen von je mindestens $r + 1$ aufeinanderfolgenden Knoten zerlegen. D.h. wenn im folgenden von einer *Knotenreihe* die Rede ist, so ist damit eine Folge von mindestens $r + 1$ im r -Kreis (im Uhrzeigersinn) aufeinanderfolgenden Knoten gemeint. Eine k -*Knotenreihe* bezeichne eine Knotenreihe mit genau k Knoten. Ferner definieren wir eine *Zerlegung* \mathcal{Z} als Menge von disjunkten Knotenreihen, die zusammen $V(C_n^r)$ ergeben. Der Kürze wegen werden Zerlegungen der Knotenmenge im folgenden einfach als Zerlegungen der Knotenanzahl n in Summanden auf die Art

$$\mathcal{Z} : n = \sum_{i=0}^s b_i \cdot g_i \quad \text{bzw.} \quad n = \sum_{i=0}^s b_i \langle g_i \rangle$$

geschrieben, wobei b_i hier die Anzahl der Knotenreihen der Mächtigkeit g_i angibt. Die Klammern $\langle \rangle$ sollen, wenn nötig, hervorheben, welche Zahlen für Knotenreihen stehen.

Die Ermittlung einer Zerlegung läßt sich recht schnell erläutern: Man beginnt mit einer Knotenfärbung mit $\geq \chi(C_n^r)$ Farben und faßt dann jeweils mindestens $r + 1$ im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgende Knoten zu einer Knotenreihe zusammen. Dabei ist zu beachten, daß die Farben der Knoten innerhalb einer jeden Knotenreihe paarweise verschieden sind. Um anschließend ein Labelling für die vorliegende Zerlegung zu konstruieren, weist man jeder Farbe eine Farbstufe zu, so daß die entstehenden Farbstufen paarweise disjunkt sind. Der Kernpunkt bei solchen Zerlegungen ist, daß Knoten innerhalb derselben Knotenreihe Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen erhalten müssen. So wird gewährleistet, daß bei der Zusammensetzung aller Knotenreihen zum Gesamtkreis die Knoten mit Label aus derselben Farbstufe auch tatsächlich genügend großen Abstand haben.

▷▷ **Zerlegungseigenschaften von Kreispotenzen:** Um die verschiedenen r -Kreise auf ihre Zerlegungseigenschaften zu untersuchen, ist es hilfreich, auf die Division mit Rest zurückzugreifen. Dies wird im Verlauf dieses Kapitels öfters geschehen und soll deshalb möglichst kurz aufgeschrieben werden. Eine Formulierung wie $n = q(r + 1) + p$, $0 \leq p < r + 1$ steht beispielsweise für die Division von n durch $r + 1$, wobei q der Faktor und p der Rest ist.

Wir setzen zunächst:

$$\chi = \chi(C_n^r), \quad n = q(r + 1) + p, \quad 0 \leq p < r + 1 \quad \text{und} \quad p = kq + a, \quad 0 \leq a < q.$$

Diese Festlegungen behalten wir bis zum Ende des Abschnittes bei. Bemerket sei, daß sich $\chi(C_n^r) = \left\lceil \frac{n}{r+1} \right\rceil$ nun auch schreiben läßt als $\chi(C_n^r) = r + 1 + \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil$. Im folgenden möchten wir nur die Fälle $C_n^r \not\cong K_n$, d.h. $n \geq 2(r + 1)$ und damit $q \geq 2$ betrachten.

Lemma 3.5 *Seien $p = a$, $q > \max\{da, r + 2 + a\}$ und $d \geq 3$. Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V(C_n^r)$ derart, daß*

$$n = a_0 \langle r + 2 \rangle + a_1 \langle r + 1 \rangle, \quad a_0 \leq a_1 \leq (d - 1)a_0,$$

außer für die Fälle:

1. $d \geq 3$, $q \leq 2(r + 1 + a)$;
2. $d = 3$, $3r + 3a + 5 \leq q \leq 4r + 2a + 5$.

Für diese Sonderfälle existieren nur Zerlegungen mit entweder $a_0 \leq a_1$ oder $a_1 \leq (d - 1)a_0$.

Beweis. Wenn es eine solche Zerlegung gibt, so muß gelten:

$$n = q(r + 1) + a = a_0(r + 2) + a_1(r + 1) \quad \Rightarrow \quad (q - a_1 - a)(r + 1) = (a_0 - a)(r + 2).$$

Da $r + 1$ und $r + 2$ teilerfremd sind, muß $a_0 - a$ ein Vielfaches von $r + 1$ sein, weshalb wir $a_0 - a = h(r + 1)$, $h \geq 1$, setzen. Zusammen mit der Bedingung $a_0 \leq a_1$ ergibt sich für n :

$$\begin{aligned} n &\geq a_0(r + 2) + a_0(r + 1) = [h(r + 1) + a](2r + 3) \\ &= [h(2r + 3) + 2a](r + 1) + a \geq (2r + 3 + 2a)(r + 1). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$q \geq 2r + 2a + 3 \tag{3.2}$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz der gewünschten Zerlegung. Um zu untersuchen, wann dies auch hinreichend ist, setzen wir $q - a - r - 2 = x(2r + 4) + y$, $0 \leq y < 2r + 4$. D.h. $n = a(r + 2) + (q - a)(r + 1) = [a + (2x + 1)(r + 1)](r + 2) + y(r + 1)$.

Fall 1. $a + r < x + y$.

Wir zerlegen die Knotenmenge in der Art, daß

$$n = \underbrace{[a + (x + 1)(r + 1)]}_{=a_0} \langle r + 2 \rangle + \underbrace{[x(r + 2) + y]}_{=a_1} \langle r + 1 \rangle.$$

Es folgt $a_0 = x(r + 1) + (a + r + 1) \leq x(r + 1) + (x + y) = x(r + 2) + y = a_1$. Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= x(r + 1) + x + y \leq x(r + 1) + x + 2r + 3 \leq x(r + 1) + x(r + 1) + 2r + 3 \\ &= 2(x + 1)(r + 1) + 1 \leq (d - 1)(x + 1)(r + 1) + a \leq (d - 1)a_0, \\ &\text{außer für } x = 0 \wedge d = 3 \wedge a = 0 \wedge y = 2r + 3. \end{aligned}$$

In dem genannten Ausnahmefall gilt $q - r - 2 = y = 2r + 3$, also $q = 3r + 5$.

Fall 2. $a + r \geq x + y$.

Hier wird als Zerlegung

$$n = \underbrace{[a + x(r + 1)]}_{=a_0} \langle r + 2 \rangle + \underbrace{[(x + 1)(r + 2) + y]}_{=a_1} \langle r + 1 \rangle$$

verwendet. Es muß $x > 0$ sein, um die Ungleichung (3.2) zu erfüllen. Außerdem sieht man sofort $a_0 \leq a_1$ wegen $a \leq r$. Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= (x + 1)(r + 1) + 1 + x + y \leq (x + 1)(r + 1) + 1 + r + a \\ &= (x + 2)(r + 1) + a \leq (d - 1)x(r + 1) + a \leq (d - 1)a_0, \\ &\text{außer für } x = 1 \wedge d = 3 \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(r + 2) + y = 2(r + 1) + (2 + y) \leq 2(r + 1) + 2a = (d - 1)a_0, \\ &\text{für } x = 1 \wedge d = 3 \wedge y \leq 2(a - 1). \end{aligned}$$

Der Sonderfall für $d = 3$ ist demnach $q - a - r - 2 = 2r + 4 + y$, $y > 2(a - 1)$ und $a + r \geq 1 + y$, d.h. $3r + 3a + 5 \leq q \leq 4r + 2a + 5$.

Als Ausnahmefälle verbleiben folglich die in 2. genannten, da $q = 3r + 5$ für $a = 0$ auch als $q = 3r + 3a + 5$ geschrieben werden kann. Der Vollständigkeit halber muß für diese Fälle noch gezeigt werden, daß tatsächlich eine Zerlegung mit $a_0 \leq a_1 \leq (d - 1)a_0$ ausgeschlossen werden kann. Dazu die folgenden Betrachtungen, wobei h wie am Anfang des Beweises definiert ist:

Die Bedingung $a_0 \leq a_1 \leq (d - 1)a_0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_0 &\leq q - a - h(r + 2) \leq (d - 1)a_0 \\ \Leftrightarrow h(2r + 3) &\leq q - 2a \leq (d - 2)a + h[d(r + 1) + 1]. \end{aligned}$$

Durch weitere Umformungen und aus $h \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\left\lceil \frac{q - da}{d(r + 1) + 1} \right\rceil \leq h \leq \left\lfloor \frac{q - 2a}{2r + 3} \right\rfloor.$$

Für $d = 3$ und $3r + 3a + 5 \leq q \leq 4r + 2a + 5$, ergibt sich die Bedingung $2 \leq h \leq 1$, was ein Widerspruch ist. Demzufolge besitzen alle diese Sonderfälle Zerlegungen mit entweder $a_0 \leq a_1$ oder $a_1 \leq (d - 1)a_0$. Auf die explizite Angabe solcher Zerlegungen soll hier verzichtet werden, da sie analog zu den Zerlegungen aus den letzten zwei Fällen konstruiert werden können. \square

Lemma 3.6 Sei $p \neq 0$.

(i) Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V(C_n^r)$ derart, daß

$$n = a_0 \langle r + 1 + e \rangle + a_1 \langle r + e \rangle, \quad e \geq 1, \quad a_0 + a_1 = q, \quad r + 1 + e = \chi(C_n^r).$$

Dabei gilt:

- $a_0 = q$, $a_1 = 0$, $e = k$ für $a = 0$,
- $a_0 = a$, $a_1 = q - a$, $e = k + 1$ für $a > 0$.

(ii) Es existiert jedoch keine Zerlegung der Knotenmenge $V(C_n^r)$ mit

$$n = \sum_{i=0}^e a'_i \langle r + 1 + e - i \rangle, \quad a'_0 < a_0.$$

Beweis. Zu (i): Für $a = 0$ ist $p = kq$ und folglich gilt $n = q(r + 1 + k) = q\chi$. Daher existiert hier die gewünschte Zerlegung. Sei nun $a > 0$. Wir formen n wie folgt um:

$$\begin{aligned} n &= q(r + 1) + p = q(r + 1) + \underbrace{q \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor}_{=p} + a = q \left(r + \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \right) + a \\ &= q(\chi - 1) + a = a \langle \chi \rangle + (q - a) \langle \chi - 1 \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $a > 0$ folgt sofort $\chi - 1 \geq r + 1$. Damit besitzt diese Zerlegung die geforderte Eigenschaft, daß jede Knotenreihe wenigstens $r + 1$ Knoten enthalten muß. Außerdem ist $\chi = r + 1 + \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = r + 1 + k + \left\lfloor \frac{a}{q} \right\rfloor = r + 2 + k$.

Zu (ii): Angenommen, es gäbe die angegebene Zerlegung. Dann ist wegen

$$(q + 1)(r + 1) > n = \sum_{i=0}^e a'_i (r + 1 + e - i) \geq \sum_{i=0}^e a'_i (r + 1)$$

auf jeden Fall $\sum_{i=0}^e a'_i \leq q$. Somit ergäbe sich zusammen mit $a'_0 < a_0$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^e a'_i (r + 1 + e - i) \leq \sum_{i=0}^e a'_i (r + e) + a'_0 \leq q(r + e) + a'_0 \\ &< q(r + e) + a_0 = n. \quad \not\leq \end{aligned}$$

□

▷▷ **Labelling-Eigenschaften von Kreispotenzen:** Es sei noch einmal erwähnt, daß die Farbstufe F_i , $i = 0, 1, \dots$, für die Menge $\{id, 1 + id, \dots, d - 1 + id\}$ steht. Ferner sei im folgenden mit V_i die Menge aller Knoten gemeint, welche ein Label aus der Farbstufe F_i erhalten. f_{max} sei das größte vom Labelling f verwendete Label, d.h. $f_{max} = \max_{v \in V(C_n^r)} f(v)$. Ferner bezeichnen wir mit $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r)$ die kleinste Zahl c , für die bei gegebener Zerlegung \mathcal{Z} ein zulässiges Labelling f mit $f_{max} = c$ existiert.

Lemma 3.7 Seien $p = 0$, $d \geq r + 1$ und $\mathcal{Z} : n = q \langle r + 1 \rangle$ mit $2 \nmid q$. Dann existiert für \mathcal{Z} kein Labelling f mit $f_{max} \leq r + 1 + rd$.

Beweis. Aus Satz 3.8 ist bekannt, daß $\lambda_{d,1}(P_n^r) = r + 1 + rd$ für einen r -Weg mit mehr als $(r + 1)^2$ Knoten gilt. Gilt demnach $n > (r + 1)^2$ für den r -Kreis C_n^r , so folgt $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) \geq \lambda_{d,1}(C_n^r) \geq r + 1 + rd$ aus Lemma 2.2. Andererseits gilt $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) \geq r + 1 + rd$ auch für $2(r + 1) \leq n \leq (r + 1)^2$, da man den r -Kreis in gewissem Sinne als unendlich langen r -Weg auffassen und daher das abfallende Labelling-Schema (zumindest für das Labelling des gesamten r -Kreises) nicht verwenden kann. Dies läßt sich wie folgt erklären:

Es seien die q $(r + 1)$ -Knotenreihen im Uhrzeigersinn mit R_0, \dots, R_{q-1} nummeriert, und wir setzen wir $R_q := R_0$. Ferner sei v_i^j , $i = 0, \dots, r$; $j = 0, \dots, q$, der Knoten aus R_j , welcher ein Label aus der Farbstufe F_i besitzt. Dann muß bei einem abfallenden Labelling-Schema f die Zahlenfolge $\{f(v_i^j)\}_{j=0, \dots, q}$ für jedes $i \in \{0, \dots, r\}$ monoton fallend sein. Dies führt zum Widerspruch $f(v_i^0) > f(v_i^q) = f(v_i^0)$. Damit gilt stets $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) \geq r + 1 + rd$ für $n \geq 2(r + 1)$.

Angenommen, es existiert für \mathcal{Z} ein Labelling f mit $f_{max} = r + 1 + rd$.

Schritt 1. Wir zeigen: Es gibt maximal $\frac{q-1}{2}$ Knoten mit demselben Label im r -Kreis.

Angenommen, es gibt in V_s , $s \in \{0, \dots, r\}$, genau $\frac{q-1}{2} + i$, $i > 0$, Knoten mit demselben Label und somit $\frac{q+1}{2} - i$ Knoten mit einem anderen Label. Da alle Knoten aus V_s paarweise nicht adjazent sind, und Knoten mit demselben Label sogar einen Abstand ≥ 3 haben müssen, wäre dann:

$$n \geq \underbrace{\left[\frac{q-1}{2} + i \right] (2r+1)}_{\text{Knoten aus } V_s \text{ mit demselben Label bzw. adjazent dazu}} + \underbrace{\frac{q+1}{2} - i}_{\text{Knoten aus } V_s \text{ mit einem anderen Label}} = q(r+1) + r(2i-1).$$

Wegen $n = q(r + 1)$ muß zwangsläufig $i \leq 0$ sein. \Leftarrow

Schritt 2. Wir zeigen: $\forall s \in \{0, \dots, r\} \exists v \in V_s : f(v) \leq s - 1 + sd$.
(vollständige Induktion über s)

IA: $s = r$.

Wegen Schritt 1 darf es in V_r maximal $q - 1$ Knoten mit einem Label aus $\{r + rd, r + 1 + rd\}$ geben. Folglich existiert ein Knoten $v \in V_r$ mit $f(v) \leq r - 1 + rd$. \checkmark

IV: Die Behauptung gelte für $s \geq S + 1$.

IS: $s = S$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es einen Knoten $v \in V_{S+1}$ mit $f(v) \leq S + (S+1)d$. Dieser Knoten ist zu genau zwei Knoten w_1, w_2 aus V_S adjazent, weswegen $f(w_1), f(w_2) \leq S + Sd$ erfüllt sein muß. Da allerdings w_1 und w_2 Abstand 2 haben, müssen ihre Label verschieden sein, und es folgt: $\min\{f(w_1), f(w_2)\} \leq S - 1 + Sd$. \checkmark

Laut Schritt 2 müßte es in V_0 einen Knoten mit Label -1 geben, dies ist ein Widerspruch. Damit kann es das Labelling f nicht geben. \square

Lemma 3.8 Seien $p = a$ und $\mathcal{Z} : n = a_0(r + 1 + e)$, $0 < e < r$, $a_0 \geq 2$, wobei $a_0 \in \{q - 1, q\}$.

(i) Dann existiert für \mathcal{Z} kein Labelling f mit $f_{max} \leq (r + e)d$.

(ii) Sei $2 \nmid a_0$. Dann gibt es für \mathcal{Z} kein Labelling f mit $f_{max} \leq 1 + (r + e)d$, wenn $n < a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 + 1}{2}$.

Beweis.

Schritt 1. Wir zeigen: Es gibt maximal $\frac{a_0 + 1}{2}$ Knoten mit demselben Label im r -Kreis.

Angenommen, es gibt in V_s , $s \in \{0, \dots, r + e\}$, genau $\frac{a_0 + 1}{2} + i$, $i > 0$, Knoten mit demselben Label und somit $\frac{a_0 - 1}{2} - i$ Knoten mit einem anderen Label. Analog zum Schritt 1 des Beweises von Lemma 3.7 erhalten wir als notwendige Bedingung für n :

$$n \geq \left(\frac{a_0 + 1}{2} + i \right) (2r + 1) + \frac{a_0 - 1}{2} - i = a_0(r + 1) + (2i + 1)r$$

Wegen $n = q(r + 1) + a$, $r > 1$ und $a_0 \in \{q - 1, q\}$ folgt $i \leq 0$. \swarrow

Folglich kann es kein Labelling f mit $f_{max} = (r + e)d$ geben, da hier genau $a_0 > \frac{a_0 + 1}{2}$ Knoten das Label $(r + e)d$ erhalten müßten.

Sei nun $2 \nmid a_0$ und ein Labelling f mit $f_{max} \leq 1 + (r + e)d$ gegeben.

Schritt 2. Wir zeigen: $n \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2}$.

Sei $s' = \min\{s \mid s \in \{1, \dots, r + e\} \wedge \nexists v \in V_s : f(v) > 1 + sd\}$. (s' existiert immer, da die Knoten aus V_{r+e} nur die Label $(r + e)d$ und $1 + (r + e)d$ haben dürfen.) Angenommen, es gibt in $V_{s'}$ genau $\frac{a_0 + 1}{2} - i$, $i \geq 0$, Knoten mit Label $s'd$ und in $V_{s'-1}$ genau $\frac{a_0 + 1}{2} - j$, $j \geq 0$, Knoten mit Label $(s' - 1)d$. Wir führen die Bezeichnungen V_t^0 , V_t^1 bzw. $V_t^{>1}$ für die Menge der Knoten aus V_t mit Label td , $1 + td$ bzw. $> 1 + td$ ein. Folglich ist $|V_{s'}^1| = \frac{a_0 - 1}{2} + i$ und $|V_{s'-1}^1 \cup V_{s'-1}^{>1}| = \frac{a_0 - 1}{2} + j$.

• Es ist klar, daß weder die Knoten aus $V_{s'-1}^0$ noch die Knoten aus $V_{s'}^0$ zu einem Knoten aus $V_{s'-1}^1 \cup V_{s'-1}^{>1}$ adjazent sein dürfen. Damit gilt vorerst:

$$n \geq \underbrace{\left(\frac{a_0 - 1}{2} + j \right) (2r + 1)}_{\substack{\text{Knoten aus } V_{s'-1}^1 \cup V_{s'-1}^{>1} \\ \text{bzw. adjazent dazu (*)}} + \underbrace{\frac{a_0 + 1}{2} - j}_{\substack{\text{Knoten aus } V_{s'-1}^0 \\ (**)}} + \underbrace{\frac{a_0 + 1}{2} - i}_{\text{Knoten aus } V_{s'}^0}.$$

• Ist $|V_{s'-1}^0| - |V_{s'-1}^1 \cup V_{s'-1}^{>1}| = 1 - 2j \leq 0$, so können die Knoten aus $V_{s'-1}$ so angeordnet werden, daß die Knoten aus $V_{s'-1}^0$ bereits paarweise einen Abstand

≥ 3 haben. Ist dies nicht der Fall (bei $j = 0$), müssen $2r(1 - 2j)$ weitere Knoten hinzukommen, um den Abstand ≥ 3 zwischen den Knoten aus $V_{s'-1}^0$ zu gewährleisten. Da nun aber in jede der $1 - 2j$ "Lücken" ein Knoten aus $V_{s'}^0$ plaziert werden kann, muß $1 - 2j$ von (**) abgezogen werden. Es ergibt sich in Wirklichkeit nur ein Knotenzuwachs von $(2r - 1)(1 - 2j)$ Knoten.

• Ist $|V_{s'}^1| - |V_{s'-1}^1| = i - j + |V_{s'-1}^{>1}| \leq 0$, so können die Knoten aus $V_{s'}^1$ in der Menge (*) untergebracht werden. Andernfalls müssen $i - j + |V_{s'-1}^{>1}|$ zusätzliche Knoten eingesetzt werden.

Zusammengefaßt ergibt sich die folgende Abschätzung für n :

$$n \geq a_0(r + 1) + (2j - 1)r + \frac{a_0 + 1}{2} - i \\ + (2r - 1) \max\{0, 1 - 2j\} + \max\{0, i - j + |V_{s'-1}^{>1}|\}.$$

Bekannt ist aus Schritt 1, daß i nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Damit erhält man aus der vorherigen Ungleichung wegen $j \geq 0$:

$$j = 0: \quad n \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2} + \max\{-i, |V_{s'-1}^{>1}|\} \\ = a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2} + |V_{s'-1}^{>1}|, \\ j > 0: \quad n \geq a_0(r + 1) + (2j - 1)r + \frac{a_0 + 1}{2} - i + \max\{0, i - j + |V_{s'-1}^{>1}|\} \\ = a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2} + (2r - 1)(j - 1) + \max\{j - i, |V_{s'-1}^{>1}|\} \\ \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2} + |V_{s'-1}^{>1}|.$$

Insgesamt ergibt sich:

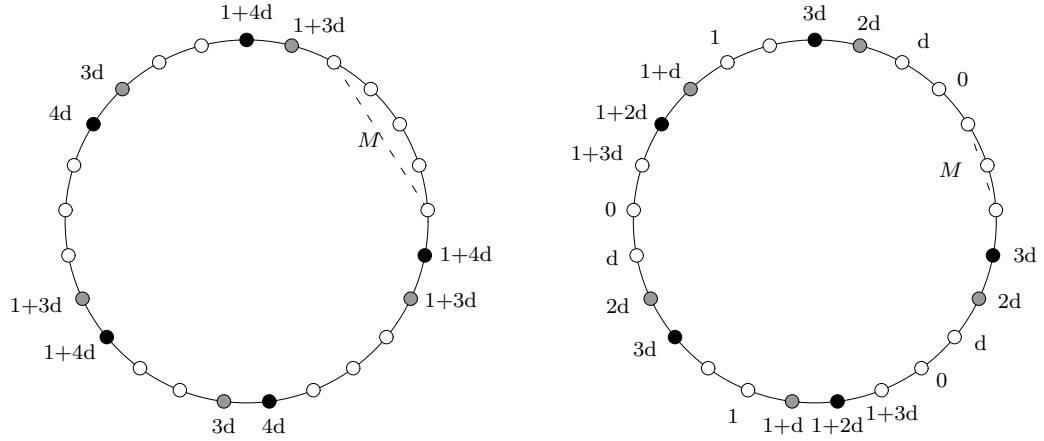
$$n \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2} + |V_{s'-1}^{>1}| \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0 - 1}{2}.$$

Schritt 3. Wir zeigen: $n \geq a_0(r + 1) + r + \frac{a_0+1}{2}$.

Gelte $n = a_0(r + 1) + r + \frac{a_0-1}{2}$. Die obige Ungleichung zeigt, daß nur noch der Fall $\forall s \in \{0, \dots, r + e\} \forall v \in V_s : f(v) \in \{sd, 1 + sd\}$ untersucht werden muß.

Fall 1. $|V_r^1| = \frac{a_0+1}{2}$.

Mit Hilfe von ähnlichen Überlegungen wie im Schritt 2 schließt man $|V_s^1| = \frac{a_0+1}{2}$ für $s = r + 1, \dots, r + e$. Dies ist aber nur möglich, wenn die Knoten aus V_r, \dots, V_{r+e} in einer festen Reihenfolge im r -Kreis angeordnet sind, welche in Abbildung 3.6 links angedeutet ist. (Dabei sind jeweils die Knoten aus V_{s-1} gegenüber denen aus V_s um einen Knoten im Uhrzeigersinn versetzt.) Die Knotenmenge M , welche im Bild durch eine gestrichelte Linie kenntlich gemacht wurde, enthält $2r - e$ Knoten. Wegen $e < r$ ist $|M| \geq r + 1$. Folglich enthält M eine Clique mit $r + 1$ Knoten. Jedoch brauchen diese $r + 1$ Knoten Label


 Abbildung 3.6.: Ausschnitte von $L(d, 1)$ -Labellings des C_{25}^3 , wobei $a_0 = 5, e = 1$

aus paarweise verschiedenen Farbstufen, es sind aber nur noch die Farbstufen F_0, \dots, F_{r-1} vorhanden. Daher ist dieser Fall ausgeschlossen.

Fall 2. $|V_r^1| = \frac{a_0-1}{2}$.

Es gilt dann $|V_s^0| = \frac{a_0+1}{2}$ für $s = 0, \dots, r$ (analog zu Schritt 2). Auch hier gibt es eine fest vorgegebene Reihenfolge für die Knoten aus V_0, \dots, V_r (siehe Bild 3.6 rechts). Wir betrachten erneut die hervorgehobene Menge M . Diese besitzt nun r aufeinanderfolgende Knoten, welche eine Clique bilden. Für diese Knoten stehen nur noch die Farbstufen F_{r+1}, \dots, F_{r+e} zur Verfügung. Wegen $r > e$ ergibt sich ein Widerspruch.

Demzufolge kann es für die vorgegebene Knotenanzahl $n = a_0(r+1) + r + \frac{a_0-1}{2}$ kein Labelling f mit $f_{max} = 1 + (r+e)d$ geben. \square

Lemma 3.9 Sei $\mathcal{Z} : n = a_0\langle r+1+e \rangle + a_1\langle r+e \rangle$, $0 < e$, $a_1 < a_0$, wobei $a_0 + a_1 \in \{q-1, q\}$. Dann gibt es für \mathcal{Z} kein Labelling f mit $f_{max} \leq (r+e)d$, wenn $n < a_0(2r+1) + 2a_1 + 1$.

Beweis. Angenommen, es sei ein r -Kreis mit den geforderten Eigenschaften gegeben, für den es ein Labelling f mit $f_{max} \leq (r+e)d$ gibt. Da die Zerlegung $n = a_0\langle r+1+e \rangle + a_1\langle r+e \rangle$ verwendet werden soll, und die Knoten innerhalb einer Knotenreihe ihre Label aus paarweise verschiedenen Farbstufen erhalten müssen, ist $f_{max} = (r+e)d$.

Schritt 1. Wir zeigen: $\forall s \in \{0, \dots, r+e-1\} : |\{v \mid v \in V_s \wedge f(v) > sd\}| \geq a_1$. Angenommen, es gibt in V_s genau $a_1 - i, i > 0$, Knoten mit einem Label $> sd$ und somit $a_0 + i$ Knoten mit dem Label sd . Wir bezeichnen die Knoten aus V_s , $s \in \{0, \dots, r+e-1\}$, im Uhrzeigersinn mit $w_1^s, \dots, w_{a_0+a_1}^s$ und die Menge der Knoten zwischen w_i^s und $w_{(i+1) \bmod (a_0+a_1)}^s$ jeweils mit N_i^s . Ferner bezeichne u_s die Anzahl der Indizes j mit $f(w_j^s) = f(w_{(j+1) \bmod (a_0+a_1)}^s) = sd$, $j \in \{1, \dots, a_0+a_1\}$.

Es muß $|N_i^s| \geq r$ für $f(w_i^s) \neq f(w_{i+1 \bmod (a_0+a_1)}^s)$ und $|N_i^s| \geq 2r$ für $f(w_i^s) = f(w_{(i+1) \bmod (a_0+a_1)}^s)$ erfüllt sein, damit die Knoten w_i^s und w_{i+1}^s im ersten Fall wenigstens Abstand 2, im zweiten Fall wenigstens Abstand 3 haben. Damit ergibt sich als notwendige Bedingung für n :

$$\begin{aligned} n &\geq [a_0 + i - (a_1 - i)](2r + 1) + (2a_1 - 2i)(r + 1) = a_0(2r + 1) + a_1 + 2ir \\ &= (a_0 + a_1 + 1)(r + 1) + (a_0 - a_1 + 2i - 1)r - 1. \end{aligned}$$

Wegen $n = q(r + 1) + a$, $a_0 > a_1$ und $a_0 + a_1 \in \{q - 1, q\}$ folgt $i \leq 0$. \swarrow

Schritt 2. Wir zeigen $n \geq a_0(2r + 1) + 2a_1$.

Wir betrachten die Mengen V_{r+e} und V_{r+e-1} . Offensichtlich ist $|V_{r+e}| = a_0$ und $|V_{r+e-1}| = a_0 + a_1$, und alle Knoten aus V_{r+e} haben das Label $(r + e)d$. Wie im Schritt 1 festgestellt, gibt es mindestens a_1 Knoten aus V_{r+e-1} mit einem Label $> (r + e - 1)d$. Angenommen, dies sind genau a_1 Knoten und sie sind im Uhrzeigersinn mit v_1, \dots, v_{a_1} bezeichnet. Ferner sei M_i , $i = 1, \dots, a_1$, die Menge der Knoten zwischen v_i und $v_{(i+1) \bmod a_1}$ allerdings ohne die ersten r Knoten und die letzten r Knoten (da diese zu v_i bzw. $v_{(i+1) \bmod a_1}$ adjazent sind). Damit gilt vorerst: $n \geq a_1(2r + 1) + |\bigcup_{i=1}^{a_1} M_i|$. Offensichtlich dürfen weder die restlichen a_0 Knoten aus V_{r+e-1} (bezeichnet mit V_{r+e-1}^*) noch die a_0 Knoten aus V_{r+e} zu einem v_i adjazent sein. Damit liegen alle diese Knoten in $\bigcup_{i=1}^{a_1} M_i$. Da $|\bigcup_{i=1}^{a_1} M_i|$ minimiert werden soll, kann man davon ausgehen, daß gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, a_1\} : |V_{r+e-1}^* \cap M_i| = |V_{r+e} \cap M_i| \geq 1.$$

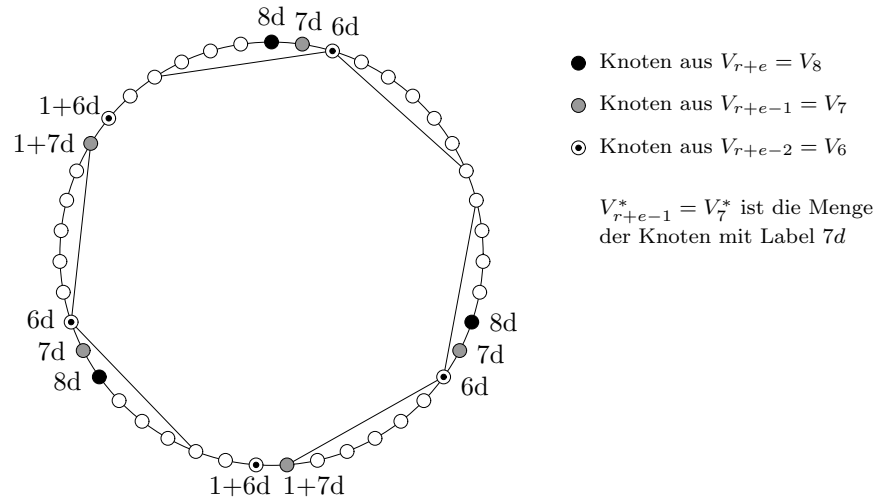
Dies läßt sich daraus ableiten, daß erstens Knoten aus verschiedenen M_i stets einen Abstand ≥ 3 haben und zweitens Knoten innerhalb derselben Menge M_i nur dann Abstand ≥ 3 haben können, wenn mindestens $2r$ Knoten zwischen ihnen liegen. Da ferner $a_0 > a_1$ ist, erhält man relativ einfach die notwendige Bedingung:

$$n \geq a_1(2r + 1) + 2a_1 + (a_0 - a_1)(2r + 1) = a_0(2r + 1) + 2a_1.$$

Der Vollständigkeit halber muß noch der Fall betrachtet werden, daß $a_1 + i$, $i > 0$, Knoten aus V_{r+e-1} mit Label $> (r + e - 1)d$ existieren. Hier zeigt sich jedoch mit analoger Argumentation, daß $n \geq a_0(2r + 1) + 2(a_1 + i)$ gelten muß.

Schritt 3. Wir zeigen $n \geq a_0(2r + 1) + 2a_1 + 1$.

Gelte $n = a_0(2r + 1) + 2a_1$. Gemäß Schritt 2 gibt es in V_{r+e-1} genau a_0 Knoten mit Label $(r + e - 1)d$ und a_1 Knoten mit Label $> (r + e - 1)d$. Damit kommen nur $n - a_0(2r + 1) - a_1 = a_1$ Knoten aus dem Graphen für die Knoten aus V_{r+e-2} mit Label $> (r + e - 2)d$ in Frage. Aus Schritt 1 wissen wir, daß es nicht weniger als a_1 sein dürfen. Demzufolge müssen genau die verbliebenen a_1 Knoten dafür verwendet werden. Dies ist nur möglich, wenn diese paarweise mindestens den Abstand 2 haben. Um dies zu gewährleisten, müssen die Knoten


 Abbildung 3.7.: Ausschnitt eines $L(d,1)$ -Labellings des C_{43}^6 , wobei $e = 2, a_0 = 3, a_1 = 2$

aus V_{r+e-1}^* und V_{r+e} innerhalb der Mengen M_i immer nach demselben Prinzip angeordnet sein: Ist der erste Knoten in M_1 aus V_{r+e} und der zweite aus V_{r+e-1}^* , so muß diese Reihenfolge bei den $M_i, i > 1$, beibehalten werden, umgekehrt genauso. Bestimmt man anschließend die Lage der Knoten aus V_{r+e-2} , so stellt man fest, daß diese genau wie die Knoten aus V_{r+e-1} angeordnet sind, nur um einen Knoten im Uhrzeigersinn verschoben (siehe auch Abb. 3.7). Dieses Prinzip setzt sich bei den $V_s, s < r + e - 2$, fort, was zwangsläufig zu einem Widerspruch führen muß, da in der Menge der Knoten zwischen zwei Knoten mit Label $(r + e - 1)d$ nicht alle Knoten ein Label erhalten können. Daher kann n nicht gleich $a_0(2r + 1) + 2a_1$ sein. \square

▷▷ **Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für $d \geq r+1 \geq 3$:**

Satz 3.10 Ist $n \leq 2r + 1$, so ist $\lambda_{d,1}(C_n^r) = (n - 1)d$. Ansonsten gilt für $d \geq r + 1 \geq 3$:

$\lambda_{d,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p, q, a und r
$1 + (d + 1)r$	$p = 0 \wedge 2 \mid q$
$2 + (d + 1)r$	$p = 0 \wedge 2 \nmid q \wedge [q < 2r + 3 \vee (q \geq 2r + 3 \wedge d > r + 1)]$
$(r + 1)d$	$p = 0 \wedge 2 \nmid q \wedge q \geq 2r + 3 \wedge d = r + 1$
$(\chi - 1)d$	$0 < 2a \leq q$
$1 + (\chi - 1)d$	$(p \neq 0 = a \wedge 2 \mid q) \vee (0 < a < q < 2a)$
$2 + (\chi - 1)d$	$p \neq 0 = a \wedge 2 \nmid q$

Beweis. Für $n \leq 2r + 1$ ist $C_n^r \cong K_n$ und damit $\lambda_{d,1}(C_n^r) = (n - 1)d$.

Für größere n bilden je $r + 1$ aufeinanderfolgende Knoten eine maximale Clique. Die Idee ist nun, für jeden r -Kreis eine geeignete Zerlegung der Knotenmenge in Knotenreihen zu finden. Wurde eine solche Zerlegung ermittelt, erhält jede Knotenreihe $\{v_0, \dots, v_s\}$ eine *Label-Sequenz* $[l_0, \dots, l_s]$ derart, daß der Knoten v_i das Label l_i bekommt. Grundlegend dabei ist, daß alle l_i aus verschiedenen Farbstufen stammen. Dieses Labelling mag vielleicht nicht immer für den durch die Knotenreihe induzierten Untergraphen optimal sein, jedoch für den gesamten r -Kreis schon. Mit dem Ziel, jeweils eine geeignete Zerlegung von $V(C_n^r)$ zu bestimmen, müssen wir zwischen den verschiedenen Fällen unterscheiden, die bei der Division von n durch $r + 1$ auftreten.

Fall 1. $p = 0$.

Hier gibt es die Zerlegung $\mathcal{Z}_1 : n = q\langle r + 1 \rangle = q\langle \chi \rangle$. Daher entspricht das Labelling des r -Kreises dem Labelling von r -Wegen, da wir die Knotenmenge in Knotenreihen zu je $r + 1$ Knoten zerlegen können. Der einzige Unterschied besteht darin, daß das abfallende Labelling-Schema nicht verwendet werden kann. Dies läßt sich wieder dadurch erklären, daß dieses spezielle Labelling nach rechts nicht erweitert werden kann, was jedoch bei einem r -Kreis im Sinne eines unendlich langen r -Weges notwendig ist (siehe auch Beweis von Lemma 3.7).

Fall 1.1. q gerade.

Wir wählen ein alternierendes Labelling-Schema, z.B. $[0, 1+d, \dots, r+rd]$; $[1, 2+d, \dots, (r+1)+rd]$. Diese beiden Label-Sequenzen wenden wir auf zwei benachbarte Knotenreihen an. Dies wiederholen wir so oft – insgesamt $\frac{q}{2}$ -mal – bis sich ein komplettes Labelling f des C_n^r mit $f_{max} = r + 1 + rd$ ergibt. Da – wie schon angesprochen – der r -Kreis als unendlich langer r -Weg angesehen werden kann, folgt $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = r + 1 + rd$ aus Satz 3.8.

Fall 1.2. q ungerade.

Hier kommt dieselbe Methode wie im vorherigen Fall zum Einsatz. Jedoch treffen dabei zwei Knotenreihen mit derselben Label-Sequenz aufeinander, was aufgrund der Abstand-2-Bedingung nicht erlaubt ist. Dies umgehen wir, indem die letzte Knotenreihe die Label-Sequenz $[2, 3+d, \dots, (r+2)+rd]$ bekommt. Damit erhalten wir ein Labelling f mit $f_{max} = r + 2 + rd$, welches laut Lemma 3.7 für die Zerlegung nicht verbessert werden kann. Folglich ist $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = r + 2 + rd$. Nun muß noch die Frage beantwortet werden, ob die verwendete Zerlegung und somit auch das Labelling optimal ist.

In jeder von \mathcal{Z}_1 verschiedenen Zerlegung muß wenigstens eine Knotenreihe der Mächtigkeit $\geq r + 2$ vorkommen. Damit wäre das maximale verwendete Label auf jeden Fall $\geq (r+1)d$. Im Vergleich zu $r+2+rd$ ist also nur eine Verbesserung der Schranke für $r + 1 = d$ denkbar, da ansonsten $d > r + 1$ und somit $(r + 1)d \geq r + 2 + rd$ gelten würde. Diese Verbesserung läßt sich jedoch nur erreichen, wenn ein Labelling f mit $f_{max} = (r + 1)d$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z}_2 : n = a_0\langle r + 2 \rangle + a_1\langle r + 1 \rangle$ mit $a_0 \leq a_1$ gibt.

Unterfall 1.2.a. $q \leq 2(r+1)$.

Gemäß Lemma 3.5 ist $a_0 \leq a_1$ für \mathcal{Z}_2 nicht möglich. So kann die aus Lemma 3.9 bekannte notwendige Bedingung für die Existenz eines Labellings f mit $f_{max} = (r+1)d$ nicht eingehalten werden, da

$$\begin{aligned} n &= a_0(r+2) + a_1(r+1) = a_0(2r+1) + (a_1 - a_0)(r-1) + 2a_1 \\ &\leq a_0(2r+1) + 2a_1 - (r-1) < a_0(2r+1) + 2a_1 + 1 \end{aligned}$$

ist. Demnach wäre hier $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) \geq \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}(C_n^r)$.

Unterfall 1.2.b. $q > 2(r+1)$.

Lemma 3.5 zeigt, daß es hier stets eine Zerlegung \mathcal{Z}_2 mit $a_0 \leq a_1$ gibt (siehe Zerlegungen im Beweis von Lemma 3.5, $a_1 \leq (d-1)a_0$ muß nicht erfüllt sein).

Dann können die Knotenreihen derart angeordnet werden, daß keine zwei $(r+2)$ -Knotenreihen benachbart sind. So dürfen wir allen $(r+2)$ -Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, d, \dots, (r+1)d]$ zuweisen. Die dazwischen liegenden Folgen von $(r+1)$ -Knotenreihen behandeln wir als r -Wege, weshalb die Labelling-Techniken aus dem Beweis von Satz 3.8 zum Einsatz kommen können. Jedoch muß darauf geachtet werden, daß aufgrund der Abstand-2-Bedingung und wegen $d = r+1$ ein Labelling-Schema verwendet wird, welches nicht die Label 0 und $r+1+rd$ einer Knotenreihe zuteilt, welche direkt neben einer $(r+2)$ -Knotenreihe liegt. Dies vermeiden wir folgendermaßen:

- Liegt eine ungerade Anzahl von $(r+1)$ -Knotenreihen zwischen zwei $(r+2)$ -Knotenreihen, so verwenden wir alternierend

$$[1, 1+d, 2+2d, \dots, j+jd, \dots, r+rd], [0, 2+d, 3+2d, \dots, j+1+jd, \dots, r+1+rd].$$

- Liegt eine gerade Anzahl von $(r+1)$ -Knotenreihen zwischen zwei $(r+2)$ -Knotenreihen, so realisieren wir das Labelling wie folgt: Die erste (direkt im Uhrzeigersinn auf die $(r+2)$ -Knotenreihe folgende) $(r+1)$ -Knotenreihe erhält die Sequenz $[2, 2+d, 2+2d, \dots, j+jd, \dots, r+rd]$, die letzte (direkt vor der nächsten $(r+2)$ -Knotenreihe liegende) erhält die Label $[1, 1+d, 1+2d, \dots, j-1+jd, \dots, r-1+rd]$, alle dazwischen liegenden Knotenreihen erhalten paarweise

$$[1, 1+d, 3+2d, \dots, j+1+jd, \dots, r+1+rd], [0, 2+d, 2+2d, \dots, j+jd, \dots, r+rd].$$

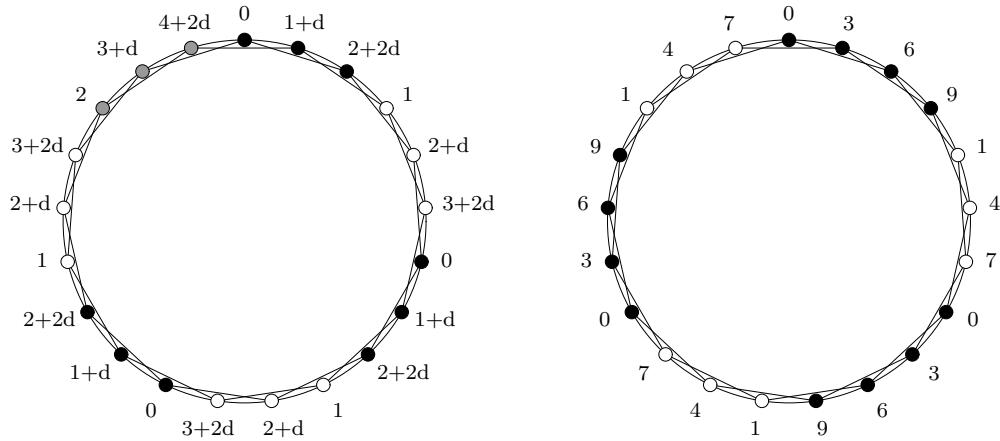
Damit ist also $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = (r+1)d$.

Insgesamt ergibt sich $\lambda_{d,1}(C_n^r) = (r+1)d$ wenn $q \geq 2r+3 \wedge d = r+1$ und $\lambda_{d,1}(C_n^r) = r+2+rd$ sonst.

Als Beispiel für den Fall 1.2. betrachten wir den Graphen C_{21}^2 . Offensichtlich gilt hier $q = 7 = 2r+3$. Somit ist $\lambda_{d,1}(C_{21}^2) = 4+2d$ für $d > 3 = r+1$, sowie $\lambda_{3,1}(C_{21}^2) = 9$ (vgl. Bild 3.8).

Fall 2. $p \neq 0 \wedge a \neq 0$.

Gemäß Lemma 3.6 (i) existiert die Zerlegung $\mathcal{Z} : n = a\langle\chi\rangle + (q-a)\langle\chi-1\rangle$. Es müssen nun noch die Knotenreihen in geeigneter Weise geordnet werden.


 Abbildung 3.8.: $L(d, 1)$ -Labelling des C_{21}^2 für $d > 3$ und $d = 3$

Fall 2.1. $2a \leq q$.

Wegen $a \leq q - a$ gelingt es, die Knotenreihen so anzuordnen, daß zwischen je zwei χ -Knotenreihen wenigstens eine $(\chi - 1)$ -Knotenreihe vorkommt. Damit ist es erlaubt, allen χ -Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, d, \dots, (\chi - 1)d]$ zuzuweisen.

Unterfall 2.1.a. $p = a$ (d.h. $\chi = r + 2$).

Die dazwischen liegenden Folgen von $(r + 1)$ -Knotenreihen sind wieder r -Wege. So kann das Labelling dieser Folgen analog zu Unterfall 1.2.b. vonstatten gehen.

Es soll dieses Labelling noch einmal anhand eines Beispiels gezeigt werden. Wir betrachten die Graphen C_{17}^3 und C_{21}^3 . Dies sind Graphen mit $n = \langle r + 2 \rangle + (q - 1)\langle r + 1 \rangle$, wobei $r = 3$ und $q = 4$ bzw. $q = 5$ ist. Bild 3.9 zeigt die Labellings dieser beiden Graphen.

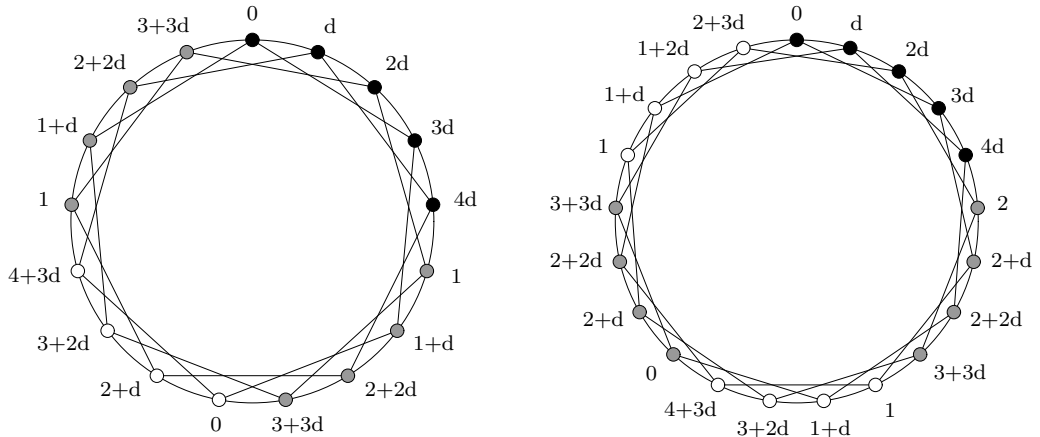
Unterfall 2.1.b. $p > a$ (d.h. $\chi > r + 2$).

Es werden den $(\chi - 1)$ -Knotenreihen sukzessive die Label-Sequenzen $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi - 2)d]$ und $[2, 2 + d, \dots, 2 + (\chi - 2)d]$ zugewiesen.

Diese Methoden auf alle Folgen von $(\chi - 1)$ -Knotenreihen angewendet, liefert ein komplettes Labelling f des Graphen mit $f_{max} = (\chi - 1)d$. Dieses Labelling ist bereits optimal, da für jeden Graphen G die untere Schranke $\lambda_{d,1}(G) \geq \lambda_d(G) = d(\chi(G) - 1)$ gilt (vgl. Satz 3.1).

Fall 2.2. $a < q < 2a$.

Wir zerlegen die Knotenmenge wie gehabt, ordnen jedoch die Knotenreihen so an, daß keine zwei $(\chi - 1)$ -Knotenreihen benachbart sind. Diesmal läßt sich nicht vermeiden, daß wenigstens zwei χ -Knotenreihen nebeneinander liegen. Wir geben den besagten Knotenreihen die Label-Sequenzen $[0, d, \dots, (\chi - 1)d]$ und $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi - 1)d]$. Durch geeignete Label-Sequenzen für die $(\chi - 1)$ -Knotenreihen erhalten wir relativ einfach ein Labelling des gesamten Gra-



(Der Übersichtlichkeit halber wurde eine Vielzahl von Kanten weggelassen)

Abbildung 3.9.: $L(d, 1)$ -Labelling des C_{17}^3 und des C_{21}^3

phen. Damit gilt vorerst $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) \leq 1 + (\chi - 1)d$.

Um die Optimalität dieses Labellings zu beweisen, ziehen wir Lemma 3.6 (ii) hinzu. Dort wurde gezeigt, daß es keine Zerlegung in Knotenreihen der Größen $r + 1, \dots, \chi$ gibt, so daß die Anzahl der χ -Knotenreihen kleiner ist als a . Dies auf Lemma 3.9 bezogen, bedeutet, daß der r -Kreis für die gegebene Zerlegung nur dann ein Labelling f mit $f_{max} = (\chi - 1)d$ besitzen kann, wenn $n \geq a(2r + 1) + 2(q - a) + 1$ erfüllt ist. Diese Bedingung gilt wegen

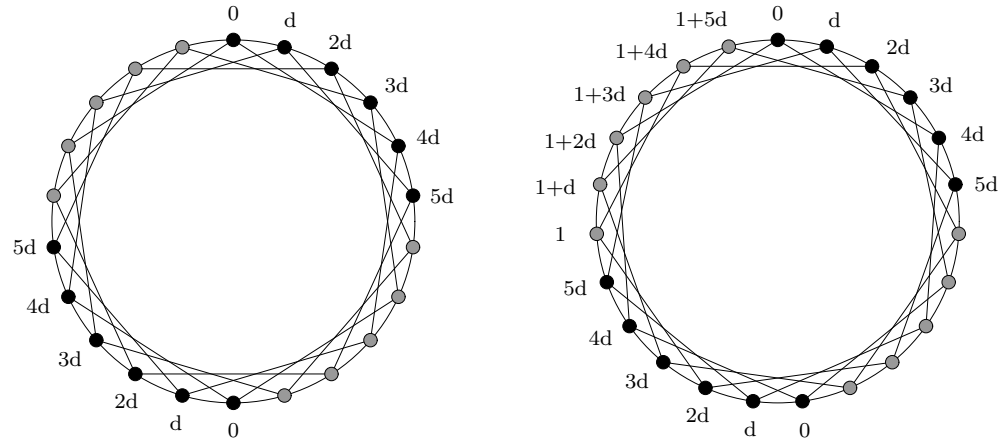
$$\begin{aligned} n = q(r + 1) + p &\geq a(2r + 1) + 2(q - a) + 1 > a(2r - 1) + 2q \\ &\geq \frac{q + 1}{2}(2r - 1) + 2q > q(r + 1) + r \geq q(r + 1) + p \quad \not\leq \end{aligned}$$

aber nicht. Als letzte Möglichkeit kämen noch Zerlegungen in Betracht, die Knotenreihen mit mehr als χ Knoten enthalten. Jedoch wäre hier das maximale Label $\geq \chi d > 1 + (\chi - 1)d$, da $d > 2$. Somit ist $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) = 1 + (\chi - 1)d$.

Zum besseren Verständnis werden diese Techniken am Beispiel des C_{22}^4 und des C_{23}^4 veranschaulicht. Beide 4-Kreise haben die chromatische Zahl 6 und sind dem Fall 2 zuzuordnen. Speziell gehört der Graph C_{22}^4 zum Fall 2.1, da $22 = 4 \cdot 5 + 2$ und damit $2a = 4 = q$ gilt. Der Graph C_{23}^4 hingegen ist wegen $23 = 4 \cdot 5 + 3$ und damit $2a = 6 > 4 = q$ ein Vertreter vom Fall 2.2. Die Abbildung 3.10 zeigt eine optimale Zerlegung für den jeweiligen 4-Kreis, sowie das daraus entstehende Labelling der χ -Knotenreihen. Den verbleibenden $(\chi - 1)$ -Knotenreihen können anschließend sehr einfach zulässige Label zugewiesen werden.

Fall 3. $p \neq 0 \wedge a = 0$.

Als Zerlegung wird $\mathcal{Z} : n = q(r + 1 + k) = q\langle \chi \rangle$ verwendet. Für gerades q weisen wir sukzessive den Knotenreihen die Label-Sequenzen $[0, d, \dots, (\chi - 1)d]$ und $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi - 1)d]$ zu, für ungerades q erhält die letzte Knotenreihe die



(Der Übersichtlichkeit halber wurde eine Vielzahl von Kanten weggelassen)

Abbildung 3.10.: $L(d, 1)$ -Labelling der χ -Knotenreihen beim C_{22}^4 und C_{23}^4

Label-Sequenz $[2, 2+d, \dots, 2+(\chi-1)d]$. Daß diese Labellings für die verwendete Zerlegung bereits optimal sind, zeigt sich anhand von Lemma 3.8. Es gilt dabei $a_0 = q$ und $e = k = \frac{p}{q} \leq \frac{r}{2} < r$ und $n = q(r+1) + p < q(r+1) + r + \frac{q+1}{2}$. Angenommen, die Zerlegung selbst wäre nicht optimal. In Lemma 3.6 (ii) wurde gezeigt, daß jede andere Zerlegung mindestens eine Knotenreihe mit mehr als χ Knoten enthalten muß. Somit wäre das maximale verwendete Label $\geq \chi d$, was wegen $d > 2$ ein schlechteres Resultat liefert als $2 + (\chi - 1)d$.

Auch der Fall 3 soll an zwei speziellen Kreispotenzen verdeutlicht werden. Sowohl der C_{18}^4 als auch der Graph C_{24}^4 gehören zu diesem Fall, da jeweils $p = q$ gilt. Beide haben die chromatische Zahl 6. Optimale Labellings für diese Graphen sind in Abbildung 3.11 angegeben. ■

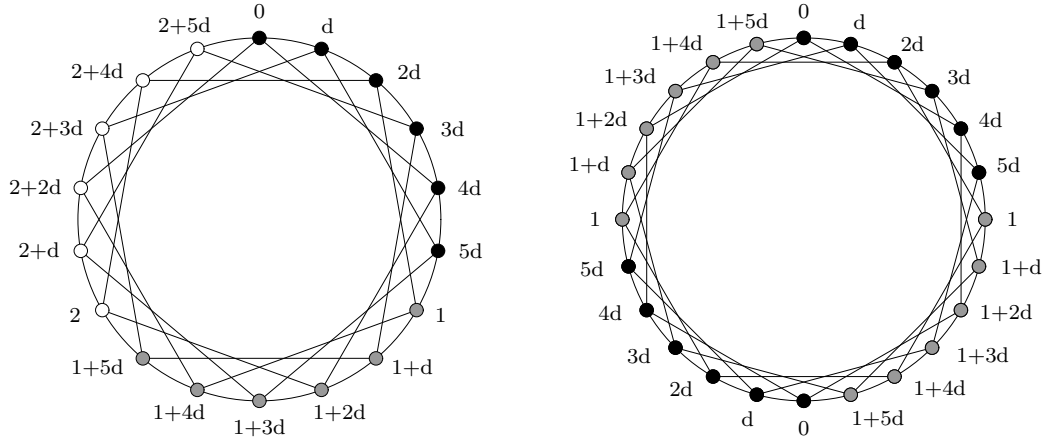
▷▷ **Weitere Zerlegungseigenschaften von Kreispotenzen:** Wie wir bei der Berechnung von $\lambda_{d,1}(C_n^r)$ für $2 < d < r + 1$ sehen werden, müssen für einzelne Fälle neben den bereits bekannten Zerlegungen weitere betrachtet werden. Daher greifen wir auf Lemma 3.5 zurück und stellen nun weitere Lemmata bereit.

Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen vom Anfang dieses Abschnittes:

$$\chi = \chi(C_n^r), \quad n = q(r+1) + p, \quad 0 \leq p \leq r \quad \text{und} \quad p = kq + a, \quad 0 \leq a \leq q - 1.$$

Zusätzlich sei nun noch

$$r + 1 = l(q - 1) + b, \quad 0 \leq b < q - 1.$$



(Der Übersichtlichkeit halber wurde eine Vielzahl von Kanten weggelassen)

Abbildung 3.11.: $L(d, 1)$ -Labelling des C_{18}^4 und des C_{24}^4

Lemma 3.10 Seien $p = a$ und $d \cdot a < q \leq r + 2 + a$, d.h. es gibt bereits die Zerlegung $n = a\langle r + 2 \rangle + (q - a)\langle r + 1 \rangle$.

(i) Dann existiert außerdem eine Zerlegung der Knotenmenge $V(C_n^r)$ derart, daß

$$n = a_0\langle r + 1 + e \rangle + a_1\langle r + e \rangle, \quad e > 1, \quad a_0 + a_1 = q - 1, \quad r + 1 + e = \chi(C_n^{r+1}).$$

Dabei gilt

- $a_0 = q - 1, a_1 = 0, e = l$ für $a + b = 0$,
- $a_0 = a + b, a_1 = q - 1 - a - b, e = l + 1$ für $0 < a + b < q - 1$,
- $a_0 = a + b, a_1 = 0, e = l + 1$ für $a + b = q - 1$,
- $a_0 = a + b + 1 - q, a_1 = 2q - 2 - a - b, e = l + 2$ für $a + b > q - 1$.

(ii) Es existiert jedoch keine Zerlegung der Knotenmenge $V(C_n^r)$ mit

$$n = \sum_{i=0}^e a'_i \langle r + 1 + e - i \rangle, \quad a'_0 < a_0, \quad a'_e < q - a.$$

Beweis. Zu (i): Wir formen n wie folgt um:

$$\begin{aligned} n &= q(r + 1) + a = (q - 1)(r + 1) + (r + 1) + a \\ &= (q - 1)(r + 1) + \underbrace{l(q - 1) + b + a}_{=r+1} = (q - 1)(r + 1 + l) + a + b. \end{aligned}$$

Gilt dabei $a + b \leq q - 1$, so zerlegen wir n in der Art:

$$n = (a + b)\langle r + 2 + l \rangle + (q - 1 - a - b)\langle r + 1 + l \rangle.$$

Andernfalls erhalten wir

$$\begin{aligned} n &= (q-1)(r+2+l) + a + b - (q-1) \\ &= (a+b+1-q)\langle r+3+l \rangle + (2q-2-a-b)\langle r+2+l \rangle. \end{aligned}$$

Bemerkt sei dabei, daß wegen $a \leq q-1$ und $b \leq q-2$ der Koeffizient $2q-2-a-b$ niemals kleiner als 1 ist.

Um die Behauptung $r+1+e = \chi(C_n^{r+1})$ zu beweisen, wählen wir als Ansatz $n = q'(r+2) + p'$, $0 \leq p' < r+2$. Dann gilt $\chi(C_n^{r+1}) = r+2 + \left\lceil \frac{p'}{q'} \right\rceil$. Aufgrund von

$$\begin{aligned} n = q(r+1) + a &\geq q(r+1) + q - r - 2 = (q-1)(r+2) \quad \text{und} \\ n = q(r+1) + a &\leq q(r+1) + q - 1 = (q-1)(r+2) + r + 1, \end{aligned}$$

ist $(q-1)(r+2) \leq q'(r+2) + p' \leq (q-1)(r+2) + r + 1$, d.h. es muß $q' = q-1$ gelten. Außerdem ergibt sich $p' = a + r + 2 - q$. Somit können wir nun die chromatische Zahl von C_n^{r+1} berechnen:

$$\begin{aligned} \chi(C_n^{r+1}) &= r+2 + \left\lceil \frac{p'}{q'} \right\rceil = r+2 + \left\lceil \frac{a+r+2-q}{q-1} \right\rceil \\ &= r+2 + \left\lceil \frac{a+(r+1)-(q-1)}{q-1} \right\rceil = r+1 + \left\lceil \frac{a+(r+1)}{q-1} \right\rceil \\ &= r+1 + \left\lceil \frac{a+l(q-1)+b}{q-1} \right\rceil = r+1+l + \left\lceil \frac{a+b}{q-1} \right\rceil. \end{aligned}$$

Beachtet man dabei die Konstellation von $a+b$ und $q-1$, so ergeben sich gerade die im Lemma angegebenen Werte.

Zu (ii): Angenommen, es gäbe die angegebene Zerlegung. Dann ist wegen

$$n = a\langle r+2 \rangle + (q-a)\langle r+1 \rangle = \sum_{i=0}^e a'_i(r+1+e-i)$$

und $a'_e < q-a$ auf jeden Fall $\sum_{i=0}^e a'_i \leq q-a-1$. Somit ergäbe sich zusammen mit $a'_0 < a_0$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^e a'_i(r+1+e-i) \leq \sum_{i=0}^e a'_i(r+e) + a'_0 \leq (q-a-1)(r+e) + a'_0 \\ &< (q-a-1)(r+e) + a_0 \leq (q-1)(r+e) + a_0 = n. \quad \not\leq \end{aligned} \quad \square$$

Im Lemma 3.5 wurden Zerlegungen der Art $n = a_0\langle r+2 \rangle + a_1\langle r+1 \rangle$ mit $a_0 \leq a_1 \leq (d-1)a_0$ betrachtet. Wie wir außerdem gesehen haben, gibt es nicht für jede Konstellation von d und q eine derartige Zerlegung, sondern nur Zerlegungen mit entweder $a_0 > a_1 \wedge a_1 \leq (d-1)a_0$ oder $a_0 \leq a_1 \wedge a_1 > (d-1)a_0$. Das nächste Lemma wird zeigen, daß die Zerlegungen mit $a_0 \leq a_1 \wedge a_1 > (d-1)a_0$ beiseite gelassen werden können.

Lemma 3.11 *Seien $p = a$, $r + 1 > d \geq 3$ und $q > \max\{da, r + 2 + a\}$. Gibt es nur Zerlegungen $n = a_0\langle r + 2 \rangle + a_1\langle r + 1 \rangle$ mit entweder $a_0 \leq a_1$ oder $a_1 \leq (d - 1)a_0$, so reicht es bei der Berechnung von $\lambda_{d,1}(C_n^r)$ aus, nur diejenigen Zerlegungen mit $a_1 \leq (d - 1)a_0$, d.h. mit $a_0 > a_1$, zu betrachten.*

Beweis. Angenommen es gelte $a_0 \leq a_1 \wedge a_1 > (d - 1)a_0$. Numeriert man die Knoten aus V_{r+1} im Uhrzeigersinn mit v_1, \dots, v_{a_0} , so gibt es ein i , so daß zwischen v_i und $v_{i+1 \bmod a_0}$ mindestens $(r + 1)d + 1$ Knoten liegen. Dies resultiert aus dem Schubfachprinzip, da $(a_0 + a_1)(r + 1)$ Knoten auf a_0 "Lücken" verteilt werden müssen:

$$\left\lceil \frac{(a_0 + a_1)(r + 1)}{a_0} \right\rceil = r + 1 + \left\lceil \frac{a_1(r + 1)}{a_0} \right\rceil > r + 1 + \left\lceil \frac{(d - 1)a_0(r + 1)}{a_0} \right\rceil = (r + 1)d.$$

Weiterhin ist aus Satz 3.8 bekannt, daß $\lambda_{d,1}(P_n^r) = (r + 1)d$ für $n \geq (r + 1)d + 1$ gilt. Wie man allerdings im Beweis von Satz 3.8 sehen konnte, erreichte man diesen Wert nur, indem man $(r + 2)$ -Knotenreihen zuließ. Folglich müßte zwischen v_i und $v_{i+1 \bmod a_0}$ eine weitere $(r + 2)$ -Knotenreihe liegen. Damit hätte man in Wirklichkeit eine Zerlegung $n = a'_0\langle r + 2 \rangle + a'_1\langle r + 1 \rangle$ mit $a'_0 > a_0$, für welche offensichtlich $n \leq a'_0 + (r + 1)da'_0 = a'_0(r + 2) + a'_0(d - 1)(r + 1)$ gilt. Dann wäre aber auch $a'_1 \leq (d - 1)a'_0$ und damit $a'_0 > a'_1$. Läßt man keine $(r + 2)$ -Knotenreihen zwischen v_i und $v_{i+1 \bmod a_0}$ zu, so gilt $\lambda_{d,1}(P_n^r) = r + 1 + d$ für den r -Weg zwischen diesen beiden Knoten. Dies wäre wegen $r + 1 > d$ nicht besser als $1 + (r + 1)d$. \square

▷▷ **Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für $2 < d < r + 1$:** Für den Fall $2 < d < r + 1$ ergeben sich dieselben Werte wie in Satz 3.10, bis auf die zwei Ausnahmen $p = 0$ und $0 < 2a \leq q$, $p = a$. Der Grund für die Andersartigkeit dieser beiden Fälle ist, daß Folgen von r -Wegen bei der Zerlegung der Knotenmenge in Knotenreihen auftreten. Dies hat den Nachteil, daß die Abstand-2-Bedingung besonders zum Tragen kommt und speziell bei sehr langen Wegen die Anzahl der benötigten Label in die Höhe treibt. Dieser Effekt kann vermieden werden, indem neue Zerlegungen definiert werden, welche möglichst kurze oder gar keine r -Wege enthalten, so daß auf alternierende Labelling-Schemen verzichtet werden kann. Damit ergeben sich folgende Resultate:

Satz 3.11 *Ist $n \leq 2r + 1$, so ist $\lambda_{d,1}(C_n^r) = (n - 1)d$. Ansonsten gilt für $2 < d < r + 1$, wobei $\chi_2 = \chi(C_n^{r+1})$:*

$\lambda_{d,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p , q , a , b und r
$(r + 1)d$	$p = a \wedge q > \max\{da, 2(r + 1 + a)\} \wedge$ $[d > 3 \vee q \notin \{3r + 3a + 5, \dots, 4r + 2a + 5\}] \vee$ $p = a > 0 \wedge (2a \leq q \leq da)$

$1 + (r + 1)d$	$p = a \wedge [\max\{da, r + 2 + a\} < q \leq 2(r + 1 + a) \vee (3r + 3a + 5 \leq q \leq 4r + 2a + 5 \wedge d = 3)]$
$(\chi - 1)d$	$p \neq a > 0 \wedge 2a \leq q$
$1 + (\chi - 1)d$	$(p \neq a = 0 \wedge 2 \mid q) \vee (0 < a < q < 2a)$
$2 + (\chi - 1)d$	$p \neq a = 0 \wedge 2 \nmid q$
$\min \left\{ \begin{array}{l} r + 2 + rd, \\ 1 + (\chi_2 - 1)d \end{array} \right\}$	$p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \nmid q \wedge [b = 0 \vee 2b > q - 1]$
$\min \left\{ \begin{array}{l} r + 2 + rd, \\ (\chi_2 - 1)d \end{array} \right\}$	$p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \nmid q \wedge 0 < 2b \leq q - 1$
$\min \left\{ \begin{array}{l} r + 1 + rd, \\ 2 + (\chi_2 - 1)d \end{array} \right\}$	$p = a \wedge da < q \leq r + 2 + a \wedge 2 \mid q \wedge [a + b = 0 \vee a + b = q - 1]$
$\min \left\{ \begin{array}{l} r + 1 + rd, \\ 1 + (\chi_2 - 1)d \end{array} \right\}$	$(p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \mid q \wedge 2b > q - 1) \vee (p = a \neq 0 \wedge da < q \leq r + 2 + a) \wedge [(q - 1 = a + b \wedge 2 \nmid q) \vee a + b < q - 1 < 2(a + b) \vee 2(a + b) > 3(q - 1)]$
$\min \left\{ \begin{array}{l} r + 1 + rd, \\ (\chi_2 - 1)d \end{array} \right\}$	$(p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \mid q \wedge 0 < 2b \leq q - 1) \vee (p = a \neq 0 \wedge da < q \leq r + 2 + a) \wedge [q - 1 \geq 2(a + b) \vee q - 1 < a + b \wedge 2(a + b) \leq 3(q - 1)]$

Beweis. Für $p = a$ (und damit $\chi = r + 2$) verwendeten wir bisher die Zerlegung

$$\mathcal{Z}_1 : n = a\langle r + 2 \rangle + (q - a)\langle r + 1 \rangle.$$

Damit ergab sich

$$\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = \begin{cases} r + 1 + rd & , \text{für } p = 0 \wedge 2 \mid q \\ r + 2 + rd & , \text{für } p = 0 \wedge 2 \nmid q \\ r + 1 + rd \text{ oder } (r + 1)d & , \text{für } p = a > 0 \wedge 2a \leq q \end{cases}. \quad (3.3)$$

Der letzte Wert hängt davon ab, welche Knotenanzahlen die r -Wege bei der Zerlegung haben. Warum die Länge der r -Wege relevant ist, wird bei den folgenden Fallunterscheidungen deutlich.

Fall 1. $p = a > 0 \wedge 2a \leq q \leq da$.

In diesem Fall gilt $a \leq q - a \leq (d - 1)a$ für die Zerlegung \mathcal{Z}_1 . Daher ist es möglich, die Knotenreihen so anzuordnen, daß alle $(r + 2)$ -Knotenreihen durch mindestens eine und höchstens $d - 1$ $(r + 1)$ -Knotenreihen voneinander getrennt sind. Somit können alle $(r + 2)$ -Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, d, \dots, (r + 1)d]$ erhalten, und den dazwischen liegenden Folgen von $(r + 1)$ -Knotenreihen

können Label-Sequenzen gemäß dem abfallenden Labelling-Schema in der Art: $[d-1, 2d-1, \dots, (r+1)d-1]$, $[d-2, 2d-2, \dots, (r+1)d-2]$, \dots , $[1, 1+d, \dots, 1+rd]$ zugewiesen werden. Folglich gilt $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = (r+1)d$.

Fall 2. $p = a \wedge da < q \leq r + 2 + a$.

Ist $p = 0$, so wissen wir bereits, daß $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = r + 1 + rd$, wenn q gerade, und $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = r + 2 + rd$, wenn q ungerade. Sei nun $p = a > 0$. Hier handelt es sich bei \mathcal{Z}_1 um eine Zerlegung mit $q - a > (d - 1)a$, d.h. in jeder möglichen Anordnung der Knotenreihen gibt es zwei $(r+2)$ -Knotenreihen, zwischen denen eine Folge von mindestens $d(r+1)$ -Knotenreihen liegt. Bei dieser Folge muß ein alternierendes Labelling-Schema zum Einsatz kommen (vgl. auch Lemma 3.11). Ferner muß dieses Labelling zulässig auf die benachbarten $(r+2)$ -Knotenreihen und anschließend auf den gesamten Graphen erweitert werden. Dies geschieht folgendermaßen: Die Folgen von $(r+1)$ -Knotenreihen erhalten ihre Label durch das Schema aus dem Unterfall 1.2.b vom Beweis des Satzes 3.10. Bei diesen alternierenden Labelling-Schemen kommt es dabei wegen $r + 1 > d$ beim Label $d + (d - 1)d = 0 + dd$ zum Wechsel der Farbstufe. Dies muß beim Labelling der $(r + 2)$ -Knotenreihen berücksichtigt werden. Die ersten $d + 1$ Knoten der $(r + 2)$ -Knotenreihe können wie gewohnt die Label $0, d, \dots, dd$ erhalten, ab dem nächsten Knoten aber müssen die Label mit dem alternierenden Schema quasi "mitwachsen", wie in Abbildung 3.12 dargestellt.

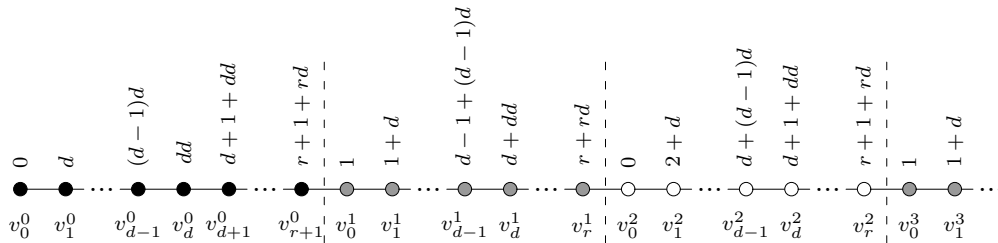


Abbildung 3.12.: Übertragen eines alternierenden Labellings auf eine $(r + 2)$ -Knotenreihe

Damit erhalten wir für \mathcal{Z}_1 relativ einfach ein Labelling f des gesamten r -Kreises mit $f_{max} = r + 1 + rd$. Dieses ist wegen Satz 3.8 für die vorliegende Zerlegung bestmöglich, so daß $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = r + 1 + d$ resultiert. Es stellt sich nun die Frage, wann die Zerlegung \mathcal{Z}_1 bereits optimal ist. Um das zu klären, müssen noch die Zerlegungen mit verringerter Anzahl von $(r + 1)$ -Knotenreihen untersucht werden, welche in Lemma 3.10 (i) aufgelistet wurden.

Fall 2.1. $0 \neq a + b \neq q - 1$.

Aufgrund von Lemma 3.10 (i) zerlegen wir die Knotenmenge in \mathcal{Z}_2 : $n = a_0 \langle \chi_2 \rangle + a_1 \langle \chi_2 - 1 \rangle$, $a_0 + a_1 = q - 1$, $a_0, a_1 \neq 0$. Dabei seien a_0 und a_1 wie im Lemma angegeben.

Unterfall 2.1.a. $a_0 \leq a_1$.

Es lassen sich alle χ_2 -Knotenreihen voneinander trennen. Damit kann allen diesen Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, d, \dots, (\chi_2 - 1)d]$ zugewiesen werden. Die dazwischen liegenden Folgen von $(\chi_2 - 1)$ -Knotenreihen erhalten abwechselnd die Label-Sequenzen $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi_2 - 2)d]$ und $[2, 2 + d, \dots, 2 + (\chi_2 - 2)d]$. Folglich ist $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = (\chi_2 - 1)d$.

Jede von \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 verschiedene Zerlegung würde eine Knotenreihe der Mächtigkeit $\geq \chi_2 + 1$ enthalten und damit ein maximales Label $\geq \chi_2 d$ nach sich ziehen. Demzufolge ist hier $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \min\{\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r), \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)\}$.

Insgesamt ergibt sich für den Unterfall 2.1.a., wobei $p = a \wedge da < q \leq r + 2 + a$:

$$\lambda_{d,1}(C_n^r) = \begin{cases} \min\{r + 2 + rd, (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } p = 0 \wedge 0 < 2b \leq q - 1 \wedge 2 \nmid q \\ \min\{r + 1 + rd, (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } p = 0 \wedge 0 < 2b \leq q - 1 \wedge 2 \mid q \\ & \text{oder } p \neq 0 \wedge [q - 1 \geq 2(a + b) \\ & \vee a + b > q - 1 \wedge 2(a + b) \leq 3(q - 1)] \end{cases}$$

Unterfall 2.1.b. $a_0 > a_1$.

Hier sind mindestens zwei χ_2 -Knotenreihen benachbart, also bekommt eine davon die Label-Sequenz $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi_2 - 1)d]$. Die $(\chi_2 - 1)$ -Knotenreihen werden so angeordnet, daß zwischen zwei von ihnen jeweils mindestens eine größere Knotenreihe vorkommt, so daß jeder $(\chi_2 - 1)$ -Knotenreihe die Label-Sequenz $[2, 2 + d, \dots, 2 + (\chi_2 - 2)d]$ gegeben werden kann. Es resultiert $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) \leq 1 + (\chi_2 - 1)d$. In Lemma 3.10 (ii) wurde gezeigt, daß es für diesen Fall keine Möglichkeit gibt, die Anzahl der χ_2 -Knotenreihen zu verringern ohne die Mächtigkeit der größten vorkommenden Knotenreihe zu erhöhen. Angewendet auf Lemma 3.9 heißt das, daß $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = (\chi_2 - 1)d$ lediglich für $n \geq a_0(2r + 1) + 2a_1 + 1$ möglich wäre. Wegen

$$\begin{aligned} n = q(r + 1) + a &\geq a_0(2r + 1) + 2(q - 1 - a_0) + 1 = a_0(2r - 1) + 2q - 1 \\ &\geq \frac{q}{2}(2r - 1) + 2q - 1 = q(r + 1) + \frac{q}{2} - 1 \end{aligned}$$

und $da + 1 \leq q$ kommen nur $a = 0 \wedge q \leq 2$ bzw. $a = 1 \wedge d = 3 \wedge q \leq 4$ in Frage. Diese Möglichkeiten können jedoch vernachlässigt werden, da für $q \leq 4$ die Zerlegung \mathcal{Z}_2 kein besseres Ergebnis als \mathcal{Z}_1 liefert:

$$\begin{aligned} \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) &\leq r + 2 + rd = l(q - 1) + b + 1 + rd \leq (q - 1)(l + 1) + rd \\ &\leq 3(l + 1) + rd \leq (r + 1 + l)d \leq (\chi_2 - 1)d = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r). \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + (\chi_2 - 1)d$ für $q \geq 5$ und $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) \geq \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r)$ für $q \leq 4$.

Analog zum Unterfall 2.1.a. gilt wieder $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \min\{\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r), \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)\}$.

Zusammenfassend ergibt sich für den Unterfall 2.1.b., wobei $p = a \wedge da < q \leq r + 2 + a$:

$$\lambda_{d,1}(C_n^r) = \begin{cases} \min\{r + 2 + rd, 1 + (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } p = 0 \wedge 2b > q - 1 \wedge 2 \nmid q \\ \min\{r + 1 + rd, 1 + (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } p = 0 \wedge 2b > q - 1 \wedge 2 \mid q \\ & \text{oder } p \neq 0 \wedge [2(a + b) > 3(q - 1) \\ & \vee a + b < q - 1 < 2(a + b)] \end{cases}$$

Fall 2.2. $a + b = 0 \vee a + b = q - 1$.

Hier ist $\mathcal{Z}_2 : n = (q - 1)\langle\chi_2\rangle$. Für ungerades q weisen wir sukzessive den Knotenreihen die Label-Sequenzen $[0, d, \dots, (\chi_2 - 1)d]$ und $[1, 1 + d, \dots, 1 + (\chi_2 - 1)d]$ zu, für gerades q erhält die letzte Knotenreihe die Label-Sequenz $[2, 2 + d, \dots, 2 + (\chi_2 - 1)d]$. Für $q = 2$ würde $[0, d, \dots, (\chi_2 - 1)d]$ bereits ausreichen. Nun muß noch die Optimalität dieser Labellings überprüft werden. Ist $q \geq 5$, so gilt $1 + l = 1 + \left\lfloor \frac{r+1}{q-1} \right\rfloor < r$. Demzufolge können wir Lemma 3.8 mit $a_0 = q - 1$, $e \leq 1 + l$ anwenden. Folglich gibt es für $2 \nmid q$ kein Labelling f mit $f_{max} \leq (\chi_2 - 1)d$ und für $2 \mid q$ kann es nur ein Labelling f mit $f_{max} \leq 1 + (\chi_2 - 1)d$ geben, wenn die notwendige Bedingung $n \geq (q - 1)(r + 1) + r + \frac{q}{2}$ erfüllt ist. Dies ist nur für $q \leq 2(a + 1)$ möglich. Da außerdem noch die Bedingungen $da + 1 \leq q$ und $q \geq 5$ erfüllt sein müssen, ergibt sich ein Widerspruch.

Sei nun $q \leq 4$. Dann liefert \mathcal{Z}_2 kein besseres Ergebnis als \mathcal{Z}_1 , denn für $a + b = q - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) &\leq r + 2 + rd = l(q - 1) + b + 1 + rd \leq (l + 1)(q - 1) + rd \\ &\leq 3(l + 1) + rd \leq (r + 1 + l)d \leq \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r), \end{aligned}$$

und für $a + b = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) &\leq r + 2 + rd = l(q - 1) + 1 + rd = (r + l)d + 1 - l(d + 1 - q) \\ &\leq (r + l)d + 1 - l \leq (r + 1)d \leq \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r), \quad \text{für } q \leq 3, \\ \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) &\leq r + 1 + rd = 3l + rd \leq (r + l)d < \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r), \quad \text{für } q = 4. \end{aligned}$$

Es gilt also $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) \geq \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r)$ für $q \leq 4$. Für $q \geq 5$ ist $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + (\chi_2 - 1)d$, wenn $2 \nmid q$, und $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 2 + (\chi_2 - 1)d$, wenn $2 \mid q$.

Ferner hat Lemma 3.10 (ii) gezeigt, daß außer den beiden Zerlegungen \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 keine weiteren Zerlegungen in Knotenreihen der Mächtigkeiten $r + 1, \dots, \chi_2$ existieren. Alle anderen möglichen Zerlegungen würden mindestens eine Knotenreihe mit $\geq \chi_2 + 1$ Knoten besitzen, so daß hier das maximale Label $\geq \chi_2 d > 2 + (\chi_2 - 1)d$ wäre. Daher gilt $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \min\{\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r), \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)\}$. Explizit bedeutet das für den Fall 2.2., wobei $p = a \wedge da < q \leq r + 2 + a$:

$$\lambda_{d,1}(C_n^r) = \begin{cases} \min\{r + 2 + rd, 1 + (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } a + b = 0 \wedge 2 \nmid q \\ \min\{r + 1 + rd, 2 + (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } a + b = 0 \wedge 2 \mid q \\ & \text{ oder } a + b = q - 1 \wedge 2 \mid q \\ \min\{r + 1 + rd, 1 + (\chi_2 - 1)d\} & , \text{ für } a + b = q - 1 \wedge 2 \nmid q \end{cases}$$

Fall 3. $p = a \wedge q > \max\{da, r + 2 + a\}$.

Wir wählen als Zerlegung $\mathcal{Z}_2 : n = a_0\langle r + 2 \rangle + a_1\langle r + 1 \rangle$ mit $a_0 \leq a_1$ oder $a_1 \leq (d - 1)a_0$.

Fall 3.1. $q > 2(r + 1 + a) \wedge [d > 3 \vee q \notin \{3r + 3a + 5, \dots, 4r + 2a + 5\}]$.

Lemma 3.5 hat gezeigt, daß hier für \mathcal{Z}_2 die Relation $a_0 \leq a_1 \leq (d - 1)a_0$ möglich ist. Daher kann das Labelling analog zu Fall 1 erfolgen. Es ergibt sich $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = (r + 1)d$.

Dieser Fall soll an einem Beispiel demonstriert werden. Für $d = r = 3$ ist der r -Kreis C_{52}^3 ein Vertreter vom Fall 3.1. Er besitzt wegen $n = 52 = 13 \cdot 4 = 4 \cdot \langle 5 \rangle + 8 \cdot \langle 4 \rangle$ eine Zerlegung, in der die 5-Knotenreihen immer durch ein Paar von 4-Knotenreihen getrennt werden. Somit erhalten alle 5-Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, 3, 6, 9, 12]$ und jeweils die zwei dazwischen liegenden 4-Knotenreihen die Label-Sequenzen $[2, 5, 8, 11]$; $[1, 4, 7, 10]$ gemäß dem abfallenden Labelling-Schema (siehe Abb. 3.13).

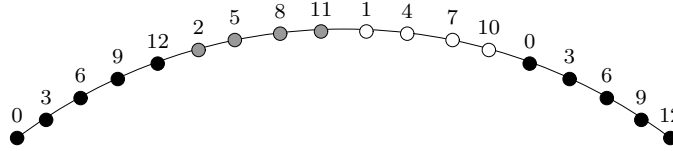


Abbildung 3.13.: Ausschnitt aus dem $L(3,1)$ -Labelling des C_{52}^3

Fall 3.2. $q \leq 2(r + 1 + a) \vee [d = 3 \wedge q \in \{3r + 3a + 5, \dots, 4r + 2a + 5\}]$.

Hier gibt es nur Zerlegungen \mathcal{Z}_2 mit $a_0 > a_1 \wedge a_1 \leq (d - 1)a_0$ oder $a_0 \leq a_1 \wedge a_1 > (d - 1)a_0$. Aufgrund von Lemma 3.11 reicht es aus, die Zerlegungen mit $a_1 \leq (d - 1)a_0$ zu betrachten. Damit gilt nun aber auch $a_0 > a_1$. Somit gibt es auf jeden Fall zwei größere Knotenreihen, welche direkt aufeinanderfolgen. Damit benötigen wir für eine dieser Knotenreihen die Label-Sequenz $[1, 1 + d, \dots, 1 + (r + 1)d]$. Alle anderen Knotenreihen können wie gewohnt ihre Label-Sequenzen erhalten. Somit haben wir vorerst $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) \leq 1 + (r + 1)d$. Weiterhin läßt sich n wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} n &= a_0(r + 2) + a_1(r + 1) = a_0(2r + 1) + (a_1 - a_0)(r - 1) + 2a_1 \\ &\leq a_0(2r + 1) + 2a_1 - (r - 1) < a_0(2r + 1) + 2a_1 + 1. \end{aligned}$$

D.h. n erfüllt nicht die aus Lemma 3.9 bekannte notwendige Bedingung für die Existenz eines Labellings f mit $f_{max} \leq (r + 1)d$. Demzufolge ist $\lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + (r + 1)d$.

Auch hier soll ein Beispiel zum Verständnis beitragen. Für $d = r = 3$ gehört der r -Kreis C_{56}^3 zum Fall 3.2. Bei diesem Graphen ist das Vorgehen wie beim r -Kreis C_{52}^3 wegen $n = 56 = 14 \cdot 4 = 4 \cdot \langle 5 \rangle + 9 \cdot \langle 4 \rangle = 8 \cdot \langle 5 \rangle + 4 \cdot \langle 4 \rangle$ nicht möglich. In der ersten möglichen Zerlegung gäbe es zwei 5-Knotenreihen zwischen denen drei 4-Knotenreihen auftreten, so daß gemäß dem abfallendem Labelling-Schema die dritte dieser 4-Knotenreihen die Label-Sequenz $[0, 3, 6, 9]$ bekommen müßte, was aufgrund der Nachbarschaft zu einer 5-Knotenreihe

nicht zulässig ist. Da demnach ein alternierendes Labelling-Schema genommen werden muß, ergibt sich als maximales Label $r + 1 + rd = 13$. Zu diesem maximalem Label führt auch die zweite mögliche Zerlegung, in welcher mindestens zwei 5-Knotenreihen benachbart sind. Bild 3.14 zeigt Ausschnitte aus dem Labelling für beide möglichen Zerlegungen.

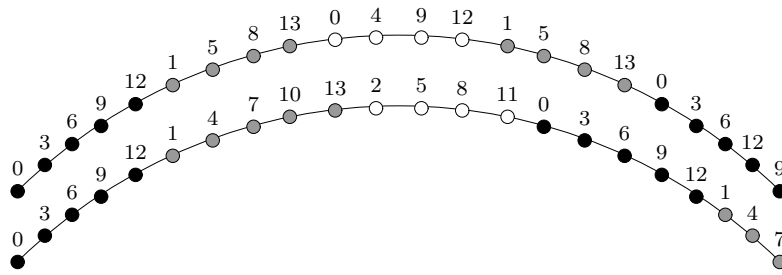


Abbildung 3.14.: Ausschnitte aus dem $L(3,1)$ -Labelling des C_{56}^3

Zur Optimalität läßt sich folgendes sagen: Zerlegungen, bei denen Knotenreihen der Mächtigkeit $\geq r + 3$ auftreten, liefern offensichtlich schlechtere Ergebnisse. Folglich sind nur die Zerlegungen \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 relevant. Da ferner $1 + (r + 1)d \leq r + 1 + rd$ gilt, ist die Zerlegung \mathcal{Z}_2 stets besser als \mathcal{Z}_1 . Damit ergibt sich $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \lambda_{d,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)$. ■

Tabelle 3.3 faßt die Ergebnisse der letzten beiden Sätze zusammen.

▷▷ **Abschätzung von $\lambda_{2,1}$:** Wie wir bereits im letzten Abschnitt gesehen haben, ist die Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für kleine d sehr umfangreich. Der größte Aufwand ist sicherlich bei $d = 2$ zu erwarten. Daher verzichten wir hier in den meisten Fällen auf die exakte Berechnung von $\lambda_{2,1}$ und geben obere Schranken an. Für die im Vergleich zu $d > 2$ problematischen Fälle bei $d = 2$ zeigen wir Lösungsansätze für die Ermittlung von $\lambda_{2,1}$.

Anders als bei den Fällen für $d > 2$ bereiten bei $d = 2$ die Zerlegungen in eine ungerade Anzahl von Knotenreihen Probleme. Dies resultiert aus der Tatsache, daß in der Farbstufe F_i , $i \geq 0$, nur die zwei Werte $2i, 2i + 1$ vorhanden sind, wir aber bei einer ungeraden Knotenreihenanzahl meistens einen dritten Wert aus der Farbstufe brauchen.

Da die Fälle mit einer geraden Knotenreihenanzahl davon nicht betroffen sind, lassen sich folgende Ergebnisse aus früheren Untersuchungen ableiten:

$\lambda_{2,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p , q , a und r
$2(\chi - 1)$	$[p \neq a \neq 0 \wedge q > 2a \wedge 2 \mid q] \vee q = 2a$
$1 + 2(\chi - 1)$	$[p \neq a = 0 \vee a < q < 2a] \wedge 2 \mid q$

3.3 Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen

Bedingungen für d, p, q, a, b und r ($n = q(r+1) + p, p = kq + a, r+1 = l(q-1) + b$)			$\lambda_{d,1}$ ($l_i = r + i + rd, i = 1, 2$) ($\chi_2 = \chi(C_n^{r+1})$)			
$q < 2$			$(\chi - 1)d = (n - 1)d$			
$r+1 \leq d \neq 2$	$p = 0$	$2 \mid q$	l_1			
		$2 \nmid q$	$q < 2r + 3$	l_2		
			$q \geq 2r + 3$	$\min\{l_2, \chi d\}$		
	$p, a \neq 0$	$2a \leq q$	$(\chi - 1)d$			
		$a < q < 2a$	$1 + (\chi - 1)d$			
	$p \neq a = 0$	$2 \mid q$	$2 + (\chi - 1)d$			
	$2 \nmid q$	$2 + (\chi - 1)d$				
$2 < d < r+1$	$p = 0$	$q \leq r+2$	$b = 0$	$2 \mid q$	$\min\{l_1, 2 + (\chi_2 - 1)d\}$	
				$2 \nmid q$	$\min\{l_2, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$	
			$0 < 2b \leq q-1$	$2 \mid q$	$\min\{l_1, (\chi_2 - 1)d\}$	
				$2 \nmid q$	$\min\{l_2, (\chi_2 - 1)d\}$	
			$2b > q-1$	$2 \mid q$	$\min\{l_1, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$	
		$2 \nmid q$		$\min\{l_2, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$		
		$q > r+2$	$q \leq 2(r+1)$		$1 + \chi d$	
			$2(r+1) < q < 3r+5$		χd	
			$3r+5 \leq q \leq 4r+5$	$d > 3$	$1 + \chi d$	
				$d = 3$	χd	
	$q > 4r+5$		χd			
	$p = a \neq 0$	$2a \leq q \leq da$			$(\chi - 1)d$	
		$q > da$	$q \leq r+2+a$	$a+b < q-1$	$2(a+b) \leq q-1$	$\min\{l_1, (\chi_2 - 1)d\}$
					$2(a+b) > q-1$	$\min\{l_1, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$
				$a+b = q-1$	$2 \nmid q$	$\min\{l_1, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$
				$2 \mid q$	$\min\{l_1, 2 + (\chi_2 - 1)d\}$	
			$a+b > q-1$	$2(a+b) \leq 3(q-1)$	$\min\{l_1, (\chi_2 - 1)d\}$	
				$2(a+b) > 3(q-1)$	$\min\{l_1, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$	
		$q > r+2+a$	$q \leq 2(r+1+a)$		$1 + (\chi - 1)d$	
			$2(r+1+a) < q < 3r+3a+5$		$(\chi - 1)d$	
			$3r+3a+5 \leq q \leq 4r+2a+5$	$d > 3$	$1 + (\chi - 1)d$	
				$d = 3$	$1 + (\chi - 1)d$	
$q > 4r+2a+5$			$(\chi - 1)d$			
$p \neq a \neq 0$		$2a \leq q$			$(\chi - 1)d$	
$p, a \neq 0$		$a < q < 2a$			$1 + (\chi - 1)d$	
$p \neq a = 0$		$2 \mid q$			$1 + (\chi - 1)d$	
	$2 \nmid q$			$2 + (\chi - 1)d$		

Tabelle 3.3.: $\lambda_{d,1}(C_n^r), d \geq 3$

• Haben wir eine ungerade Knotenreihenanzahl in der Zerlegung, so ist eine Möglichkeit zur Behebung dieses Problems, statt der bisherigen Farbstufen F_i nun die neuen Farbstufen $F'_i = \{3i, 3i + 1, 3i + 2\}$, $i \geq 0$, zu verwenden. Damit können wir beispielsweise im Fall $p \neq a = 0 \wedge 2 \nmid q$ bei der Zerlegung $\mathcal{Z} : n = q \langle \chi \rangle = q \langle r + 1 + k \rangle$ den Knotenreihen nun alternierend die Label-Sequenzen $[0, 3, \dots, 3(r+k)]$ und $[1, 4, \dots, 1+3(r+k)]$ zuweisen und die letzte Knotenreihe erhält die Sequenz $[2, 5, \dots, 2+3(r+k)]$. Daraus würde sich $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}}(C_n^r) \leq 2+3(\chi-1) = 3\chi-1$ ergeben. Dieser Wert weicht jedoch sehr von der allgemeinen unteren Schranke $\lambda_{2,1}(G) \geq 2(\chi(G) - 1)$ ab. Daher ist sicherlich eine Verbesserung möglich, wenn eine andere Zerlegung verwendet wird.

Neben der bereits bekannten unteren Schranke $\lambda_{2,1}(C_n^r) \geq 2(\chi - 1)$ erhalten wir durch Anwendung der Farbstufen F'_i vorerst folgende obere Schranken:

$\lambda_{2,1}(C_n^r) \leq$	Bedingungen für p , q , a und r
$3(\chi - 1)$	$(0 < 2a < q \wedge 2 \nmid q) \vee (p = a \neq 0 \wedge 2a < q \wedge 2 \mid q)$
$1 + 3(\chi - 1)$	$(a < q < 2a \wedge 2 \nmid q) \vee (p = 0 \wedge 2 \mid q)$
$2 + 3(\chi - 1)$	$a = 0 \wedge 2 \nmid q$

Bemerkt sei, daß bei $p = 0$ wieder das bekannte alternierende Labelling-Schema $[0, 1 + d, 2 + 2d, \dots, r + rd]$; $[1, 2 + d, 3 + 2d, \dots, r + 1 + rd]$ (bei ungeradem q erhält die letzte Knotenreihe $[2, 3 + d, 4 + 2d, \dots, r + 2 + rd]$) verwendet wird. Da dies aber für $d = 2$ gerade die Label-Sequenzen

$$[0, 3, 6, \dots, 3r]; [1, 4, 7, \dots, 3r + 1] \quad \text{und ggf. } [2, 5, 8, \dots, 3r + 2]$$

ergibt, führt das alternierende Labelling-Schema auf dasselbe Resultat wie die Verwendung der Farbstufen F'_i .

• Eine andere Möglichkeit ist, eine der Knotenreihen aus der Zerlegung herauszunehmen und ihre Knoten auf die verbleibenden Knotenreihen zu verteilen. Damit ergeben sich natürlich größere Kardinalitäten der Knotenreihen, trotzdem wird dies in den meisten Fällen die besseren Schranken für $\lambda_{2,1}$ liefern. Dieses Vorgehen wurde schon bei den Fällen $2 < d < r + 1$ für $p = a$, $q \leq r + 2 + a$ demonstriert. Ist q ungerade, so hätten wir nun eine gerade Anzahl von Knotenreihen. Auf diese Art lassen sich die folgenden Ergebnisse erzielen:

$\lambda_{2,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p , q , a und r
$2(\chi_2 - 1)$	$p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \nmid q \wedge 0 < 2b \leq q - 1$
$1 + 2(\chi_2 - 1)$	$p = 0 \wedge q \leq r + 2 \wedge 2 \nmid q \wedge [b = 0 \vee 2b > q - 1]$

Für $d > 2$ ergab sich bei diesen Fällen $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \min\{r + 2 + rd, (\chi_2 - 1)d\}$ bzw. $\lambda_{d,1}(C_n^r) = \min\{r + 2 + rd, 1 + (\chi_2 - 1)d\}$. Bei $d = 2$ läßt sich dieses Minimum aber direkt bestimmen:

- Ist $p = 0$, $q \leq r + 2$ und $b > 0$, so gilt laut Lemma 3.10 $\chi_2 = r + 2 + l$. Folglich ist

$$\begin{aligned} 2(\chi_2 - 1) &= 2(r + 1 + l) = 2(r + 1) + 2\frac{r + 1 - b}{q - 1} \\ &\leq 2(r + 1) + r + 1 - b = 3(r + 1) - b \leq 3r + 2. \end{aligned}$$

Ist zusätzlich $2b > q - 1$, so muß $b \geq 2$ wegen $q \geq 3$ gelten. Damit wäre dann auch $1 + 2(\chi_2 - 1) \leq 3r + 2$.

- Ist $p = 0$, $q \leq r + 2$ und $b = 0$, so gilt laut Lemma 3.10 $\chi_2 = r + 1 + l$. Es folgt

$$1 + 2(\chi_2 - 1) = 1 + 2(r + l) = 1 + 2r + 2\frac{r + 1}{q - 1} \leq 3r + 2.$$

Für $p = a \neq 0$ und q ungerade ergeben sich analog zum Fall $2 < d < r + 1$:

$\lambda_{d,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p, q, a, b und r
$\min \left\{ \begin{array}{l} 3(r + 1), \\ 1 + 2(\chi_2 - 1) \end{array} \right\}$	$(p = a \neq 0 \wedge 2a < q \leq r + 2 + a) \wedge 2 \nmid q \wedge [(q - 1 = a + b) \vee a + b < q - 1 < 2(a + b) \vee 2(a + b) > 3(q - 1)]$
$\min \left\{ \begin{array}{l} 3(r + 1), \\ 2(\chi_2 - 1) \end{array} \right\}$	$(p = a \neq 0 \wedge 2a < q \leq r + 2 + a) \wedge 2 \nmid q \wedge [q - 1 \geq 2(a + b) \vee q - 1 < a + b \wedge 2(a + b) \leq 3(q - 1)]$

Auch hier kann man das Minimum für $a + b \leq q - 1$, d.h. $\chi_2 = r + 2 + l$, direkt bestimmen. Für $q \geq 5$ ist:

$$\begin{aligned} 1 + 2(\chi_2 - 1) &= 1 + 2(r + 1 + l) = 3 + 2r + 2\frac{r + 1 - b}{q - 1} \\ &\leq 3 + 2r + \frac{r + 1 - b}{2} \leq 4 + 2r + \frac{r}{2} \leq 3r + 3. \end{aligned}$$

Für $q = 3$ ist $a = 1$ wegen $q > 2a$, so daß $n = 3(r + 1) + 1$ ist. Ist $r \geq 3$, so gilt $n \leq 4r + 1$, d.h. alle Knoten müssen paarweise verschiedene Label erhalten. Damit wäre $3(r + 1) \geq \lambda_{2,1}(C_n^r) \geq n - 1 = 3(r + 1)$, also $\lambda_{2,1}(C_n^r) = 3(r + 1)$. Für $r = 2$ ist $n = 10 = 2\langle 5 \rangle$ die nächstkleinste Zerlegung mit maximalem Label $9 = 3(r + 1)$.

Als nächstes wollen wir auch für andere Fälle mit ungerader Knotenreihenanzahl neue Schranken durch Wegnahme einer Knotenreihe erzielen. Dazu seien neben den bekannten Bezeichnungen nun noch:

$$\chi = l'(q-1) + b', \quad 0 \leq b' < q-1, \quad \chi - q + a = l''(q-1) + b'', \quad 0 \leq b'' < q-1.$$

Den Fall $q = 3$ können wir dabei außer acht lassen, da sich die oberen Schranken mit dieser Methode nicht verbessern lassen.

Satz 3.12 *Ist $n \leq 2r + 1$, so ist $\lambda_{2,1}(C_n^r) = 2(n - 1)$. Ansonsten gilt für $2 \nmid q$, $q \geq 5$ und $r \geq 2$:*

$\lambda_{2,1}(C_n^r) \leq$	Bedingungen für p , q , a , b' und r
2χ	$p \neq a = 0 \wedge q \geq 2\chi + 1$
$1 + 2\chi$	$p \neq a = 0 \wedge \chi + 1 < q < 2\chi + 1$
$2 \lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor - 1$	$p \neq a = 0 \wedge b' = 0$
$2 \lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor$	$p \neq a = 0 \wedge 0 < 2b' \leq q - 1$
$2 \lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor + 1$	$p \neq a = 0 \wedge 2b' > q - 1$
$2(\chi - 1)$	$a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a) \wedge q \geq 2a + 2\chi - 1$
$1 + 2(\chi - 1)$	$a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a) \wedge \chi + a < q < 2a + 2\chi - 1$
$2 \lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor - 1$	$a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a) \wedge q < 2a + 2\chi - 1 \wedge b'' = 0$
$2 \lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor$	$a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a) \wedge q < 2a + 2\chi - 1 \wedge 0 < 2b'' \leq q - 1$
$2 \lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor + 1$	$a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a) \wedge q < 2a + 2\chi - 1 \wedge 2b'' > q - 1$

Beweis. Da die hier verwendeten Methoden analog zum Fall $2 < d < r + 1$ sind, wird der Beweis nur stichpunktartig ausgeführt.

Fall 1. $p \neq a = 0$.

Bisher verwendeten wir die Zerlegung $\mathcal{Z}_1 : n = q\langle\chi\rangle$. Nun nehmen wir eine Knotenreihe aus der Zerlegung heraus und verteilen ihre Knoten gleichmäßig auf die verbleibenden $q - 1$ Knotenreihen.

Fall 1.1. $q - 1 > \chi$.

Hier ist die Zerlegung $\mathcal{Z}_2 : n = \chi\langle\chi+1\rangle + (q-1-\chi)\langle\chi\rangle$, so daß $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 2\chi$, wenn $q \geq 2\chi + 1$, und $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + 2\chi$, wenn $q < 2\chi + 1$ folgt. Da alle von \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 verschiedenen Zerlegungen eine Knotenreihe der Mächtigkeit $\geq \chi + 2$ enthalten und damit ein Label $\geq 2(\chi + 1)$ nach sich ziehen würden, ist $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)$ hier sogar optimal.

Fall 1.2. $q - 1 < \chi$.

Wir erhalten die Zerlegung $\mathcal{Z}_2 : n = b'\langle\chi + l' + 1\rangle + (q - 1 - b')\langle\chi + l'\rangle$. Daher ist $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + 2(\chi + l' - 1)$, wenn $b' = 0$, $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 2(\chi + l')$, wenn $0 < 2b' \leq q - 1$, und $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + 2(\chi + l')$, wenn $2b' > q - 1$. Da außerdem $l' = \lfloor \frac{\chi}{q-1} \rfloor$ gilt, folgen die Behauptungen.

In beiden Fällen ist $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)$ besser als $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_1}(C_n^r) = 2 + 3(\chi - 1)$, denn für $p \neq a = 0$ ist $\chi = r + 1 + k \geq r + 2 \geq 4$ und daher

$$1 + 2 \left\lfloor \frac{q\chi}{q-1} \right\rfloor = 1 + 2\chi + 2 \left\lfloor \frac{\chi}{q-1} \right\rfloor \leq 1 + 2\chi + \frac{\chi}{2} \leq 3\chi - 1.$$

Fall 2. $a \neq 0 \wedge (p \neq a \vee a < q < 2a)$.

Es gibt bereits die Zerlegung $\mathcal{Z}_1 : n = a\langle\chi\rangle + (q - a)\langle\chi - 1\rangle$. Nun verteilen wir eine χ -Knotenreihe auf die anderen $q - 1$ Knotenreihen. Die im Satz angegebenen Resultate lassen sich analog zum Fall 1 erzielen. ■

Ist q gerade, so wäre nun $q - 1$ ungerade, so daß sich mit den üblichen Farbstufen F_i wieder Probleme bei der Zulässigkeit des Labellings ergeben können. Daher wäre hier womöglich die bessere Alternative, zwei Knotenreihen aus der Zerlegung zu nehmen und ihre Knoten auf die restlichen Knotenreihen gleichmäßig zu verteilen. Dies soll hier aber nicht ausgeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit der Schrankenverbesserung gibt es für den Fall $p = a$, $q > r + 2 + a$ in ausgewählten Fällen. Dies wird im nächsten Satz deutlich:

Satz 3.13 Für $r \geq 2$ und $q > r + a + 2$ gilt:

$\lambda_{2,1}(C_n^r)$	Bedingungen für p , q , a und r
$2r + 2$	$p = a \wedge q - 2a = i(2r + 3)$, $i \geq 1$
$2r + 3$	$p = a \wedge (i - 1)(2r + 3) < q - 2a < i(2r + 3)$, $i \geq 1$, $\wedge q \equiv i \pmod{2}$

Beweis. Hier gilt vorerst die Zerlegung $\mathcal{Z}_1 : n = a\langle r + 2\rangle + (q - a)\langle r + 1\rangle$. Für $i \geq 1$ ist eine weitere mögliche Zerlegung:

$$\mathcal{Z}_2 : n = \underbrace{[a + i(r + 1)]}_{=a_0} \langle r + 2 \rangle + \underbrace{[q - a - i(r + 2)]}_{=a_1} \langle r + 1 \rangle.$$

Ist $q = 2a + i(2r + 3)$, dann gilt $a_0 = a_1$. Somit wäre hier $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 2(r + 1)$. Ist $(i - 1)(2r + 3) < q - 2a < i(2r + 3)$, dann gilt $a_0 < a_1$. Da wir eine gerade Knotenreihenanzahl benötigen, muß $a_0 + a_1$ bzw. $q - i$ gerade sein. Dies ist der Fall, wenn $q \equiv i \pmod{2}$ ist. Dann gilt $\lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r) = 1 + 2(r + 1)$.

Mit analogen Überlegungen zum Fall $2 < d < r + 1$ läßt sich die Optimalität zeigen, also $\lambda_{2,1}(C_n^r) = \lambda_{2,1}^{\mathcal{Z}_2}(C_n^r)$. ■

3.3 Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen

Bedingungen für d, p, q, a, b, b', b'' und r ($n = q(r+1) + p, p = kq + a, r+1 = l(q-1) + b$) ($\chi = l'(q-1) + b', \chi - q + a = l''(q-1) + b''$)		$\lambda_{2,1}$ ($\chi_2 = \chi(C_n^{r+1})$)			
	$q < 2$	$= 2(\chi - 1)$			
	$q = 2a$				
$p = 0$	$2 \mid q$		$\leq 1 + 3(\chi - 1) = 3r + 1$ (*)		
	$2 \nmid q$	$q \leq r + 2$	$0 < 2b \leq q - 1$	$= 2(\chi_2 - 1)$	
			$b = 0$	$= 1 + 2(\chi_2 - 1)$	
		$2b > q - 1$			
$q > r + 2$		$\leq 2 + 3(\chi - 1) = 3r + 2$ (*)			
$p = a \neq 0 \wedge q > 2a$	$2 \mid q$		$\leq 3(\chi - 1) = 3r + 3$ (*)		
	$2 \nmid q$	$q = 3$	$= 3(\chi - 1) = 3r + 3$		
		$a + 2 \leq r + 1$	$a + b < q - 1$	$2(a + b) \leq q - 1$ $2(a + b) > q - 1$	$= 2(\chi_2 - 1)$
			$a + b = q - 1$		$= 1 + 2(\chi_2 - 1)$
		$5 \leq q \leq r + 1$	$a + b > q - 1$	$2(a + b) \leq 3(q - 1)$	$= \min\{3r + 3, 2(\chi_2 - 1)\}$
				$2(a + b) > 3(q - 1)$	$= \min\{3r + 3, 1 + 2(\chi_2 - 1)\}$
		$q > r + 2 + a$		$\leq 3(\chi - 1) = 3r + 3$ (*)	
	$p \neq a \neq 0 \wedge q > 2a$	$2 \mid q$		$= 2(\chi - 1)$	
$2 \nmid q$		$q \geq 2\chi + 2a - 1$			
		$\chi + a < q \leq 2(\chi + a - 1)$		$= 1 + 2(\chi - 1)$	
		$q \leq 2(\chi + a - 1)$	$b'' = 0$	$\leq \min\{3\chi - 3, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor - 1\}$	
			$0 < 2b'' \leq q - 1$	$\leq \min\{3\chi - 3, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor\}$	
$2b'' > q - 1$		$\leq \min\{3\chi - 3, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor + 1\}$			
$a < q < 2a$	$2 \mid q$		$= 1 + 2(\chi - 1)$		
	$2 \nmid q$	$b'' = 0$	$\leq \min\{3\chi - 2, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor - 1\}$		
		$0 < 2b'' \leq q - 1$	$\leq \min\{3\chi - 2, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor\}$		
		$2b'' > q - 1$	$\leq \min\{3\chi - 2, 2\lfloor \frac{q(\chi-1)+a}{q-1} \rfloor + 1\}$		
$p \neq a = 0$	$2 \mid q$		$= 1 + 2(\chi - 1)$		
	$2 \nmid q$	$q \geq 2\chi + 1$	$= 2\chi$		
		$\chi + 1 < q \leq 2\chi$	$= 1 + 2\chi$		
		$5 \leq q \leq \chi + 1$	$b' = 0$	$\leq 2\lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor - 1$	
			$0 < 2b' \leq q - 1$	$\leq 2\lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor$	
			$2b' > q - 1$	$\leq 1 + 2\lfloor \frac{q\chi}{q-1} \rfloor$	
$q = 3$		$\leq 3\chi - 1$			

 Tabelle 3.4.: Schranken für $\lambda_{2,1}(C_n^r)$

 (*) \doteq Es existieren bessere Schranken in bestimmten Fällen, siehe Satz 3.13)

3.4. Abschätzung von $\lambda_{d,1}$ für spezielle Graphenklassen

3.4.1. Graphen vom Durchmesser 2

Der *Durchmesser* eines Graphen G gibt den größten Abstand zweier Knoten an. Somit haben je zwei Knoten eines *Graphen mit Durchmesser 2* Abstand 1 oder 2 zueinander. Damit müssen natürlich sämtliche Knoten des Graphen verschiedene Label erhalten. Zusammen mit der schon bekannten unteren Schranke $\lambda_{d,1} \geq (\chi - 1)d$ ergibt sich für alle Durchmesser-2-Graphen:

$$\lambda_{d,1}(G) \geq \max\{n - 1, d(\chi - 1)\}. \quad (3.4)$$

▷▷ **Existenz und Eigenschaften:** Sei $n_{\max}(G)$ die größtmögliche Ordnung eines Graphen G vom Durchmesser 2, Maximalgrad Δ und ggf. weiteren Bedingungen. Da von einem beliebigen Knoten des Graphen ausgehend jeder andere Knoten im Abstand 1 oder 2 zu diesem Knoten liegen muß, kann jeder Graph mit Durchmesser 2 höchstens $n_{\max} \leq \Delta^2 + 1 =: N_{\max}$ Knoten besitzen. Die nächsten beiden Lemmata zeigen sogar, daß Durchmesser-2-Graphen der Ordnung N_{\max} und $N_{\max} - 1$ bis auf wenige Ausnahmen nicht existieren.

Lemma 3.12 (Hoffman, Singleton, [57]) *Ein Graph vom Durchmesser 2 mit Maximalgrad Δ und Ordnung $\Delta^2 + 1$ – auch bekannt als $(\Delta, 2)$ –Moore-Graph – kann nur für $\Delta = 2, 3, 7$ und möglicherweise $\Delta = 57$ existieren.*

Die hier genannten $(2, 2)$ –, $(3, 2)$ – und $(7, 2)$ –Moore-Graphen sind explizit bekannt: Es handelt sich um den Kreis der Länge 5, den Petersen-Graphen und den Hoffman-Singleton-Graphen. Die Existenz des $(57, 2)$ –Moore-Graphen, welcher gelegentlich als *Aschbacher-Graph* bezeichnet wird, ist immer noch offen. Es wird jedoch stark vermutet [62], daß es diesen Graphen nicht gibt.

Der Hoffman-Singleton-Graph, der wegen seiner 50 Knoten und 175 Kanten recht unübersichtlich ist, hat jedoch eine schöne Konstruktion, die von Robertson (vgl. [88]) eingeführt wurde. Er ordnete die Knoten in 5 Pentagone P_0, \dots, P_4 und 5 Pentagramme Q_0, \dots, Q_4 an, so daß – neben der Adjazenz innerhalb eines Pentagons oder Pentagramms – gilt:

für $i, j, k = 0, \dots, 4$ ist Knoten i aus Pentagon P_j adjazent zu
Knoten $i + jk \pmod{5}$ aus Pentagramm Q_k .

Die chromatische Zahl des Hoffman-Singleton-Graphen ist 4. In Bild 3.15 ist sowohl die Knotenbezeichnung zu sehen, auf die sich die vorangehende Definition bezieht, als auch eine optimale Knotenfärbung.

Lemma 3.13 (Erdős et al., [33]) *Mit Ausnahme des C_4 gibt es keinen Graphen vom Durchmesser 2 mit Maximalgrad Δ und Ordnung Δ^2 .*

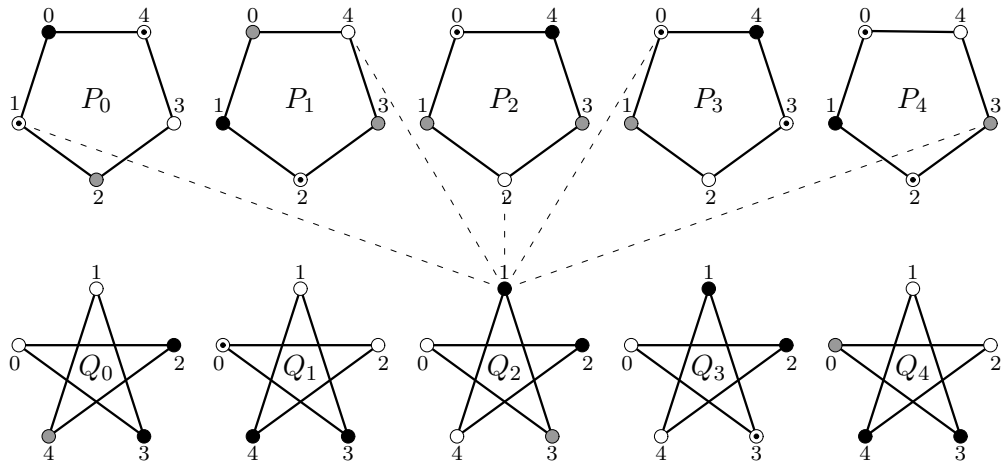


Abbildung 3.15.: Konstruktionsschema und eine optimale Knotenfärbung des Hoffman-Singleton Graphen

Lemma 3.14 *Ein Graph G vom Durchmesser 2 mit Maximalgrad Δ und Ordnung $n \geq \Delta(\Delta - 1) + 2$ ist Δ -regulär. Für Δ und n ungerade, existiert ein derartiger Graph nicht.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein Knoten $v \in V(G)$ mit $\deg(v) \leq \Delta - 1$. Dann gilt für die maximale Knotenanzahl, welche der Graph haben kann, $n_{\max}(G) \leq 1 + \deg(v) + \deg(v)(\Delta - 1) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$, was ein Widerspruch ist. Die zweite Aussage folgt direkt aus dem Handschlaglemma. \square

Lemma 3.15 *Ein Graph G vom Durchmesser 2 mit Maximalgrad Δ und Ordnung $\Delta^2 - 1$, welcher einen C_3 enthält, ist $(\Delta - 1)$ -färbbar, wenn $\Delta \geq 4$. Für $\Delta = 3$ ist solch ein Graph 3-färbbar.*

Beweis. Wir wählen einen Knoten $x \in V(G)$, welcher zu dem C_3 gehört, und bezeichnen seine Nachbarn mit v_1, \dots, v_Δ , so daß v_1 und v_2 die beiden anderen zum C_3 gehörenden Knoten sind. Ferner seien $L_1 = N(v_1) - \{x, v_2\}$, $L_2 = N(v_2) - \{x, v_1\}$ und $L_i = N(v_i) - \{x\}$ für $i = 3, \dots, \Delta$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

Fakt 1. $L_1 \cup L_2$ ist eine unabhängige Menge.

Angenommen, diese Aussage stimmt nicht. Dann gehört o.B.d.A. v_1 zu einem anderen C_3 oder C_4 . Zählen wir anschließend die maximale Anzahl von Knoten im Abstand ≤ 2 zu v_1 , erhalten wir $\Delta^2 - 4$ bzw. $\Delta^2 - 3$, was ein Widerspruch zur Ordnung des Graphen ist.

Fakt 2. L_i ist eine unabhängige Menge für $i = 3, \dots, \Delta$.

Jeder Knoten $w \in L_i$ muß einen Nachbarn in jedem L_j , $j \neq i$ besitzen, andernfalls ist w nicht im Abstand ≤ 2 zu v_j . Damit ist die Anzahl an möglichen Nachbarn bereits ausgeschöpft.

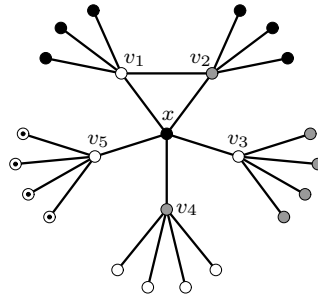


Abbildung 3.16.: $(\Delta - 1)$ -Färbung eines Graphen vom Durchmesser 2 und Ordnung $\Delta^2 - 1$ (Kanten zwischen zwei Knoten im Abstand 2 zu x wurden weggelassen)

Mit Hilfe dieser Aussagen sind wir in der Lage, den Graphen auf folgende Weise zu färben: Färbe x und alle Knoten aus $L_1 \cup L_2$ mit der ersten Farbe. Färbe die Knoten aus $L_4 \cup N(x) - \{v_2, v_4\}$ mit der zweiten und diejenigen aus L_3 sowie v_2 und v_4 mit der dritten Farbe (analog für $\Delta = 3$ ohne v_4 und L_4). Für $\Delta \geq 5$ färbe die Knoten aus L_i , $i = 5, \dots, \Delta$ mit der $(i - 1)$ -ten Farbe. Dies liefert eine $(\Delta - 1)$ -Färbung, außer für $\Delta = 3$.

Bild 3.16 zeigt die Färbungstechnik für den Fall $\Delta = 5$. Der Übersichtlichkeit halber wurden dabei die Kanten zwischen verschiedenen L_i weggelassen. \square

Bemerkung 3.2 Falls $\Delta = 3$, so ist diese Färbung offensichtlich optimal. Für $\Delta \geq 4$ erhalten wir die obere Schranke $\chi \leq \Delta - 1$. Diese erwies sich für zwei – je einer für $\Delta = 4$ und $\Delta = 5$ – getestete Graphen der oben genannten Eigenschaften als scharf. Leider sind für $\Delta \geq 6$ noch keine derartigen Graphen explizit bekannt (siehe [94]).

▷▷ **Labelling-Algorithmen:** Um eine Schranke für $\lambda_{d,1}$ anzugeben, werden wir eine Labelling-Heuristik anwenden und nach oben hin abschätzen, wie groß das maximale verwendete Label sein kann.

Es existiert bereits ein Labelling-Algorithmus von Chang und Kuo [25]. Dieser war ursprünglich dafür gedacht gewesen, ein zulässiges $L(2, 1)$ -Labelling mit maximalem Label $\Delta^2 + \Delta$ für jeden beliebigen Graphen zu finden. Kurze Zeit später wurde er jedoch von Chang et al. [24] dahingehend verallgemeinert, $\Delta^2 + (d - 1)\Delta$ für alle $d \geq 2$ als eine allgemeine Schranke zu beweisen. Wir werden den besagten Algorithmus nun ebenfalls verwenden, jedoch schneiden wir ihn ganz speziell auf die Eigenschaften eines Graphen vom Durchmesser 2 zu. Es ergibt sich folgende Labelling-Methode:

Algorithmus 3.1

Eingabe: Ein Graph G mit Durchmesser 2

Ausgabe: Ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling f

- *Anfänglich seien alle Knoten ohne Label.*
- *Ein Label soll leer genannt werden, wenn es keinem Knoten zugewiesen werden kann. Aus technischen Gründen bezeichnen wir die Zahlen $-d + 1, -d + 2, \dots, -1$ auch als leere Label.*
- *Für $i = 0, 1, \dots$, sei, falls alle Label $< i$ zugewiesen oder leer sind, aber immer noch Knoten ohne Label in G existieren,*

$$F_i = \{y \in V(G) : y \text{ ist ohne Label und } \text{dist}(y, z) = 2 \\ \text{für alle } z \text{ mit } f(z) \in \{i - d + 1, \dots, i - 1\}\}.$$

- *Wähle einen Knoten $y \in F_i$ und setze $f(y) = i$. Im Falle $F_i = \emptyset$ bleibt das Label i leer.*
- *Fahre mit diesem Prozeß fort, bis allen Knoten Label zugewiesen sind.*

Angenommen, k ist das größte vom Algorithmus benötigte Label, und x sei der Knoten mit $f(x) = k$. Wir definieren

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i : 0 \leq i \leq k - 1, i = f(y) \text{ und } \text{dist}(x, y) = 1\}, \\ I_2 &= \{i : 0 \leq i \leq k - 1, i = f(y) \text{ und } \text{dist}(x, y) = 2\}, \\ I_3 &= \{i : 0 \leq i \leq k - 1 \text{ und } i \text{ ist leer}\}. \end{aligned}$$

Dann ist $k = |I_1| + |I_2| + |I_3|$. Da der Graph vom Durchmesser 2 ist, müssen alle anderen Knoten Abstand 1 oder 2 zu x haben. Ebenso ist klar, daß alle Knoten paarweise verschiedene Label erhalten haben. Somit folgt $|I_1| + |I_2| = n - 1$ bzw. $k = n - 1 + |I_3|$. Ist $i \in I_3$, dann gilt $x \notin F_i$, andernfalls hätte x das Label i bekommen. Demzufolge muß mindestens einer der Nachbarn von x ein Label aus der Menge $\{i - d + 1, \dots, i - 1\}$ erhalten haben, d.h. es gibt ein $j \in I_1$, so daß $i - d + 1 \leq j \leq i - 1$. Ein Label $j \in I_1$ kann schlimmstenfalls $d - 1$ leere Label aus I_3 nach sich ziehen, womit wir zu der Abschätzung $|I_3| \leq (d - 1)|I_1|$ gelangen. Insgesamt liefert das

$$k \leq n - 1 + (d - 1)\text{deg}(x). \quad (3.5)$$

Mit $n_{\max} \leq N_{\max}$ erhalten wir für Graphen vom Durchmesser 2 vorerst nur die bereits erwähnte obere Schranke $\lambda_{d,1} \leq \Delta^2 + (d - 1)\Delta$. Diese wird jedoch im nächsten Satz durch eine genauere Abschätzung von k verbessert.

Für den nächsten Algorithmus benötigen wir die folgende Definition: Sei $l \geq \chi(G)$. Weiterhin sei $c_t : V(G) \rightarrow \{1, \dots, l\}$ eine l -Färbung des Graphen G , für welche die zugehörigen Farbklassen V_1, \dots, V_l die Eigenschaft haben, daß

die Knoten innerhalb der Farbklassen derart geordnet werden können, daß für $i = 1, \dots, l - 1$ die letzten $t - 1$ Knoten von V_i und die ersten $t - 1$ von V_{i+1} im Komplementärgraphen \overline{G} eine Wegpotenz $P_{2(t-1)}^{t-1}$ mit ggf. weiteren Kanten induzieren. $t_l(G)$ sei die größte ganze Zahl t , für welche eine zulässige l -Färbung c_t existiert.

Beispiel 3.3 Für den Petersen-Graphen, welcher 3-färbbar ist, seien $V_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}\}$, $V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}\}$ und $V_3 = \{v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}\}$ die Farbklassen wie im Bild dargestellt. Betrachtet man den Komplementärgraphen, so erkennt man, daß sowohl die Knoten $v_{1,3}, v_{1,4}, v_{2,1}, v_{2,2}$ als auch die Knoten $v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}$ jeweils einen P_4^2 induzieren. Folglich ist $t_3 = 3$.

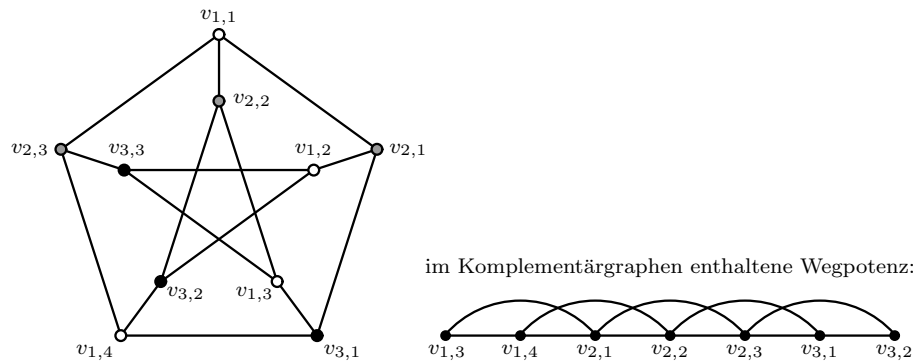


Abbildung 3.17.: Günstige Knotenordnung im Petersen-Graphen

Für $t = 1$, wie es z.B. beim vollständig l -partiten Graphen der Fall ist (da jeder Knoten zu allen anderen Knoten außerhalb seiner Farbkategorie adjazent ist), kann die Knotenordnung beliebig gewählt werden.

Algorithmus 3.2

Eingabe: Ein Graph G mit Durchmesser 2, $l \geq \chi(G)$, $t \leq t_l(G)$ und eine l -Färbung c_t

Ausgabe: Ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling f

- Zerlege die Knotenmenge in die Farbklassen V_1, \dots, V_l und definiere $n_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, l$.
- Für $t > 1$ bezeichne die Knoten von V_i mit $v_{i,1} \dots v_{i,n_i}$, $i = 1, \dots, l$, derart, daß Knoten $v_{i+1,j}$ nicht adjazent zu den Knoten $v_{i,n_i-(t-j)+1}, \dots, v_{i,n_i}$ für alle $i = 1, \dots, l - 1$ und $j = 1, \dots, t - 1$ ist. Für $t = 1$ verwende eine beliebige Knotenordnung innerhalb jeder Farbkategorie.
- Unter Verwendung der gegebenen Knotenordnung gib jedem Knoten ein Label nach folgender Vorschrift:

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} j - 1 & , \text{für } i = 1 \\ j - 1 + (i - 1)(d - t) + \sum_{r=1}^{i-1} n_r & , \text{für } 2 \leq i \leq l \end{cases} .$$

Das größte verwendete Label ist demzufolge $k = n - 1 + (l - 1)(d - t)$.

▷▷ **Abschätzung von $\lambda_{d,1}$:** Es genügt, Durchmesser-2-Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$ zu betrachten, da die Ergebnisse für $\Delta \leq 2$ der Tabelle 3.2 zu entnehmen sind.

Satz 3.14 *Ist G ein Graph vom Durchmesser 2 mit $\Delta \geq 3$, $n \leq \Delta^2 - 1$ und $d \geq 2$, so gilt*

$$\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta^2 + (d - 2)\Delta - 1.$$

Beweis. Wir verwenden den Algorithmus 3.1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen.

Angenommen $n \leq \Delta(\Delta - 1)$. Eingesetzt in Ungleichung (3.5) läßt sich k sofort durch $k \leq \Delta(\Delta - 1) - 1 + (d - 1)\Delta = \Delta^2 + (d - 2)\Delta - 1$ abschätzen, da $\deg(x) \leq \Delta$.

Sei nun $n = \Delta(\Delta - 1) + 1 + a$, $0 \leq a \leq \Delta - 2$. Nach Lemma 3.14 muß der Graph Δ -regulär sein, außer für $a = 0$. Gilt in diesem Spezialfall $\deg(x) \leq \Delta - 1$, so erhalten wir sofort $k \leq \Delta(\Delta - 1) + (d - 1)(\Delta - 1) \leq \Delta^2 + (d - 2)\Delta - 1$, da $d \geq 2$.

Deshalb werden wir im folgenden nur $\deg(x) = \Delta$ betrachten. Wir definieren $D_1 := N(x)$ und $D_2 := V(G) - N[x]$. Damit gilt $|D_2| = \Delta(\Delta - 2) + a$. Sei m' die Anzahl der Kanten, deren Endknoten beide zu D_1 gehören. Es ist leicht einzusehen, daß dann $\Delta(\Delta - 1) - 2m' \geq |D_2|$ gelten muß, d.h.

$$2m' \leq \Delta - a. \tag{3.6}$$

Fall 1. $\Delta - a$ ist ungerade.

D.h. Δ und n sind entweder beide gerade oder beide ungerade. Ist Δ ungerade und $a > 0$, so existiert solch ein Graph nicht (vgl. Lemma 3.14). Für alle anderen jedoch läßt sich die Ungleichung (3.6) auf $2m' \leq \Delta - a - 1$ verbessern. Daraus läßt sich schließen, daß es wenigstens $a + 1$ Knoten in D_1 gibt, welche keinerlei Nachbarn in D_1 besitzen. Die Menge Y' dieser Knoten ist also unabhängig und kann durch einen Knoten aus $D_1 - Y'$ zu einer unabhängigen Menge $Y \subseteq D_1$ der Mächtigkeit $|Y| = a + 2$ erweitert werden. Dies ist stets möglich, weil $a \leq \Delta - 2$ und deshalb $|Y| \leq \Delta = |D_1|$ gilt.

Fall 2. $\Delta - a$ ist gerade.

Ist $2m' \leq \Delta - a - 2$, dann haben wenigstens $a + 2$ Knoten aus D_1 keinen Nachbarn in D_1 . So können wir wieder eine unabhängige Menge $Y \subseteq D_1$ der Größe $\geq a + 2$ finden. Betrachten wir nun $2m' = \Delta - a$.

Unterfall 2.1. $\exists y \in D_1 : |N(y) \cap D_1| = b \geq 2$.

Dann kann es maximal $2m' - (b - 1) = \Delta - a - b + 1$ Knoten in D_1 geben, welche Nachbarn in D_1 besitzen. Also gibt es eine Menge $Y' \subseteq D_1$ von Knoten ohne Nachbarn in D_1 , so daß $|Y'| = a + b - 1 \geq a + 1$ erfüllt ist. Wieder kann diese Menge durch Hinzunahme eines Knotens aus $D_1 - Y'$ zu einer unabhängigen Menge Y der Mächtigkeit $\geq a + 2$ erweitert werden.

Unterfall 2.2. $\forall y \in D_1 : |N(y) \cap D_1| \leq 1$.

Somit existiert eine Menge Y' mit genau a Knoten aus D_1 , welche zu keinem Knoten aus D_1 adjazent sind. Ferner bildet die Kantenmenge innerhalb von D_1 ein perfektes Matching von $G[D_1 - Y']$ der Größe $\frac{1}{2}(\Delta - a)$. Nehmen wir nun von jeder dieser Matchingkanten genau einen Endknoten, erhalten wir $\frac{1}{2}(\Delta - a)$ unabhängige Knoten. Offensichtlich ist die Vereinigung Y dieser Knoten und der Knoten aus Y' eine unabhängige Menge mit $a + \frac{1}{2}(\Delta - a)$ Knoten. Für $a \leq \Delta - 4$ folgt außerdem $|Y| \geq a + 2$. Der Fall $a = \Delta - 3$ ist nicht möglich, weil $\Delta - a$ gerade sein soll. Folglich bleibt nur ein Ausnahmefall – nämlich $a = \Delta - 2$ – für welchen keine unabhängige Menge in D_1 mit $a + 2$ Knoten angegeben werden kann. Hier findet man nur $|Y| = a + 1$ zusammen mit $m' = 1$. Diesen Spezialfall werden wir zuletzt behandeln.

Betrachten wir nun alle Fälle, in denen wir eine unabhängige Menge Y der Mächtigkeit $a+2$ gefunden haben. Sei $y \in Y$, so daß $j := f(y)$ maximal ist. Dann gab es also zu jedem Zeitpunkt des Algorithmus, an dem gerade einem Knoten $z \in Y$ mit $f(z) < j$ sein Label zugewiesen wurde, einen Knoten $w \in V(G)$ ohne Label, der nicht adjazent to z ist. Folglich konnte z höchstens $d - 2$ leere Label nach sich ziehen, weil spätestens $f(z) + d - 1$ für $f(w)$ verwendet werden konnte. Da es außerdem wenigstens $a + 1$ solcher Knoten $z \in Y$ mit $f(z) < j$ gibt, gilt $|I_3| \leq (d - 2)(a + 1) + (d - 1)(\Delta - a - 1)$ und eingesetzt in Ungleichung (3.5) folgt $k \leq \Delta(\Delta - 1) + a + (d - 2)(a + 1) + (d - 1)(\Delta - a - 1) = \Delta^2 + (d - 2)\Delta - 1$.

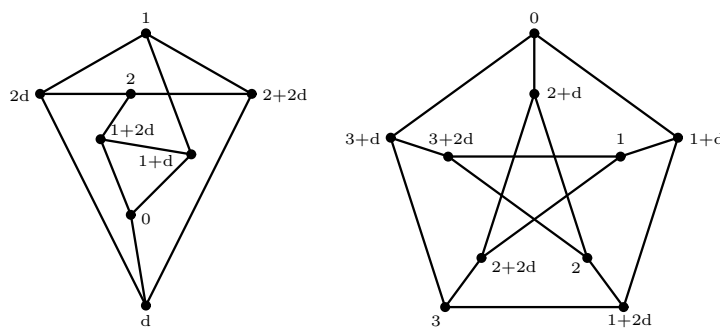


Abbildung 3.18.: Optimales $L(d,1)$ -Labelling, $d \geq 3$, zweier Durchmesser-2-Graphen

Als letztes müssen wir uns dem Sonderfall für $a = \Delta - 2$ und $m' = 1$ zuwenden. Die zugehörigen Graphen sind von der Ordnung $\Delta^2 - 1$ und haben mindestens ein Dreieck. Gemäß Lemma 3.15 besitzen derartige Graphen eine

l -Knotenfärbung, wobei $l = \max\{\Delta - 1, 3\}$. Verwendet man im Falle $l = \Delta - 1$ eine Knotenfärbung wie in Lemma 3.15 beschrieben und zerlegt die Knotenmenge in die Farbklassen $V_1, \dots, V_{\Delta-1}$, so ist es recht einfach, eine Knotenordnung zu bestimmen, in der Art, daß jeweils der letzte Knoten der Farbklasse V_i nicht adjazent zum ersten Knoten der Farbklasse V_{i+1} für alle $i = 1, \dots, \Delta - 2$ ist. Damit ist es uns möglich, den Algorithmus 3.2 mit den Eingaben $l = \Delta - 1$ und $t = 2$ aufzurufen. So erhalten wir $\Delta^2 - 2 + (\Delta - 2)(d - 2) < \Delta^2 + (d - 2)\Delta - 1$ als obere Schranke für $\lambda_{d,1}$. Für $l = \Delta = 3$ ist der Graph links in der Abbildung 3.18 der einzige Graph mit Ordnung $\Delta^2 - 1$, der ein Dreieck enthält. Für diesen Graphen ist $\lambda_{2,1} = 7$ und $\lambda_{d,1} = 2 + 2d$ für $d \geq 3$. ■

Im vorangegangenen Satz wurden alle Durchmesser-2-Graphen der Ordnung $n \leq \Delta^2 - 1$ betrachtet. Gemäß Lemma 3.13 müssen nur noch die Graphen der Ordnung $\Delta^2 + 1$ untersucht werden. Wie bereits erwähnt, gibt es nur zwei solche Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$, wenn wir den Aschbacher-Graphen außen vor lassen.

1. Der Petersen-Graph P : Hier ist $\lambda_{2,1}(P) = 9$, was bereits von Griggs und Yeh [51] bewiesen wurde. Für $d \geq 3$ gilt $\lambda_{d,1}(P) = 3 + 2d$ (siehe Bild 3.18 auf der rechten Seite).

2. Der Hoffman-Singleton-Graph H : Bild 3.19 zeigt ein $L(d, 1)$ -Labelling mit maximalem Label $19 + 3d$, welches zulässig ist für alle $d \geq 10$. Dieses Labelling wurde durch Anwendung von Algorithmus 3.2 erhalten. Als Eingabe dienten dabei die bereits in Abbildung 3.15 präsentierte 4-Färbung und $t = 10$. Der Wert für t wurde durch eine heuristische Suche ermittelt.

Zusammen mit der unteren Schranke (3.4) ist $\max\{49, 3d\} \leq \lambda_{d,1}(H) \leq 19 + 3d$ für $d \geq 10$. Weiterhin ist für $d = 10$ das maximale Label gleich 49, also optimal. Da für $d \leq 10$ jedes $L(10, 1)$ -Labelling gleichzeitig auch ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling ist, gilt generell $\lambda_{d,1}(H) = 49$ für $d \leq 10$.

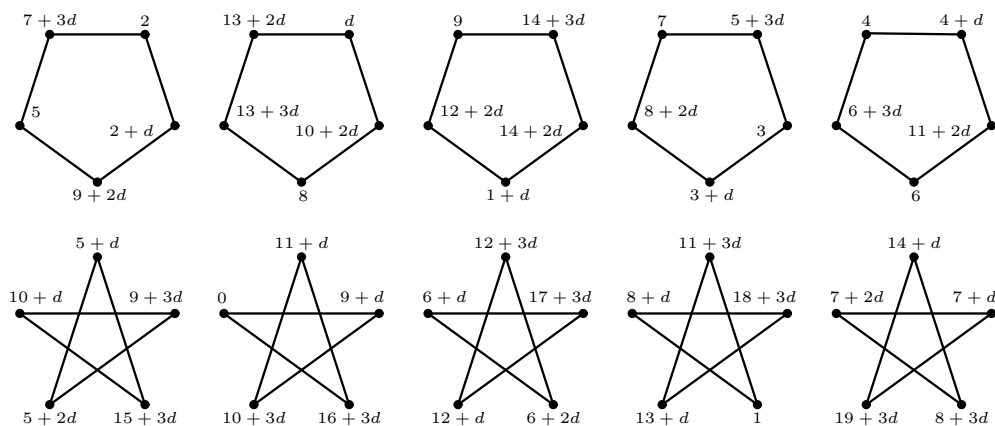


Abbildung 3.19.: $L(d, 1)$ -Labelling des Hoffman-Singleton Graphen für $d \geq 10$

3.4.2. Bäume

Griggs und Yeh [51] untersuchten bereits 1992 $L(2, 1)$ -Labellings für Bäume und bewiesen $\lambda_{2,1}(T) \in \{\Delta + 1, \Delta + 2\}$ für jeden Baum T . Ferner zeigten sie, daß für die Bäume in Abbildung 3.20 $\lambda_{2,1} = \Delta + 2$ gilt.

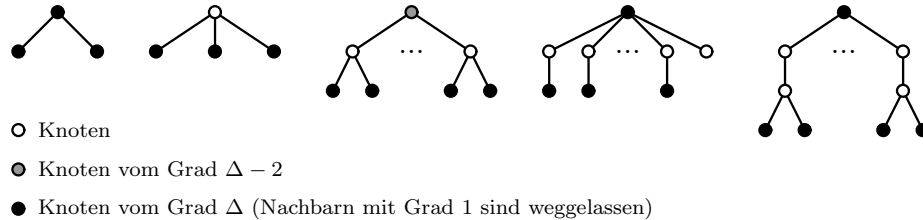


Abbildung 3.20.: Bäume mit $\lambda_{2,1} = \Delta + 2$, $\Delta \geq 3$

Ein Baum T wird $\lambda_{2,1}$ -kritisch genannt, wenn für jeden echten Untergraphen $H \subset T$ die Bedingung $\lambda_{2,1}(H) < \lambda_{2,1}(T)$ gilt. Georges und Mauro [43] studierten 5-kritische Bäume mit Maximalgrad $\Delta = 3$ durch Untersuchen ihrer wegähnlichen Struktur. Ferner ermittelten sie eine unendliche Familie von 5-kritischen Bäumen mit $\Delta = 3$. Diese Resultate wurden von Sakai Troxell [87] auf $\lambda_{2,1}$ -kritische Bäume mit Maximalgrad $\Delta \geq 4$ verallgemeinert. Im Jahr 2006 präsentierte Wang [98] eine hinreichende Bedingung für Bäume mit $\lambda_{2,1} = \Delta + 1$. Diese lautet

Satz 3.15 (Wang, [98]) *Ist T ein Baum mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$, so daß keine zwei Δ -Knoten x, y mit $\text{dist}(x, y) \in \{1, 2, 4\}$ existieren, dann gilt $\lambda_{2,1}(T) = \Delta + 1$.*

Weitere Ergebnisse für Bäume erzielten Georges und Mauro [46], die $\lambda_{d,s}$ für den unendlichen Δ -regulären Baum ermittelten; sowie Calamoneri et al. [20], welche das eher untypische Konzept der $L(d, s)$ -Labellings mit $d < s$ untersuchten. Sie konstruierten optimale $L(d, s)$ -Labellings für Bäume für sämtliche Parameter d, s, Δ mit $d < s$. Betrachtet man $L(d, 1)$ -Labellings für $d \geq 1$, so kennt man für $\lambda_{d,1}$ folgende Schranken:

Satz 3.16 (Chang et al., [24]) *Für einen Baum T mit Maximalgrad Δ gilt:*

$$\Delta + d - 1 \leq \lambda_{d,1}(T) \leq \Delta + d - 2 + \min\{d, \Delta\}$$

Die obere Schranke dieses Satzes ist scharf für Bäume, welche einen Knoten vom Grad Δ haben, dessen Nachbarn wiederum alle Grad Δ haben. Dies kann aus Satz 3.3 gefolgert werden. Die Aussage von Satz 3.3 soll dahingehend verallgemeinert werden, daß sie für sämtliche Bäume eine untere Schranke für $\lambda_{d,1}$ liefert. Dazu betrachten wir eine neue Grapheninvariante *Delta*grad, welche die

maximale Anzahl von Nachbarn vom Grad Δ eines Knotens angibt:

$$\Delta^*(G) := \max_{v \in V(G)} |\{u \mid u \in N(v) \wedge \deg(u) = \Delta(G)\}|.$$

Eine weitere neue Kenngröße, welche die Knotengrade der Nachbarn eines Δ -Knotens verwendet, soll der *Nachbargrad* sein, definiert durch:

$$\delta^*(G) := \max_{v \in V(G), \deg(v) = \Delta} \min_{u \in N(v)} \deg(u).$$

Mit Hilfe dieser beiden Invarianten werden wir im nächsten Satz eine untere Schranke angeben. Jedoch ist für den Beweis dieses Satzes folgendes Lemma erforderlich.

Lemma 3.16 *Sei S ein Stern mit Mittelknoten x und den Blättern y_1, \dots, y_l . Ferner sei f ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling von S und $f_{\max} := \max_{v \in V(S)} f(v)$. Ist das Label von x maximal oder minimal in S , dann gilt $f_{\max} \geq d + l - 1$. Andernfalls ist $f_{\max} \geq 2d + l - 2$.*

Beweis. Angenommen, x hat das größte oder kleinste Label erhalten. O.B.d.A. sei $0 = f(x) < f(y_1) < \dots < f(y_l)$. Dann erhält man direkt $f(y_l) \geq d + l - 1$. Nehmen wir im Gegenzug an, daß $f(y_1) < \dots < f(y_i) < f(x) < f(y_{i+1}) < \dots < f(y_l)$. Dann folgt wegen $|f(x) - f(y_i)| \geq d$ und $|f(x) - f(y_{i+1})| \geq d$, daß $f(y_i) \geq 2d + l - 2$ gelten muß. \square

Satz 3.17 *Sei T ein Baum mit Maximalgrad Δ , Deltagrad Δ^* und Nachbargrad δ^* . Dann gilt*

$$\lambda_{d,1}(T) \geq \max\{\Delta^*, \delta^*\} + \min\{d, \Delta\} + d - 2.$$

Beweis. Sei $u \in V(T)$ ein Knoten, welcher Δ^* Nachbarn v_1, \dots, v_{Δ^*} vom Grad Δ besitzt. Nun betrachten wir ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling f des induzierten Untergraphen $T' = T[\{u, N[v_1], \dots, N[v_{\Delta^*}]\}]$. Der Knoten v_1 formt zusammen mit seinen Nachbarn einen Stern $K_{1,\Delta}$. Existieren $w_1, w_2 \in N(v_1)$ mit $f(w_1) < f(v_1) < f(w_2)$, so erhalten wir entsprechend dem Lemma 3.16 sofort $f_{\max} \geq 2d + \Delta - 2 \geq \Delta^* + \min\{d, \Delta\} + d - 2$. Daher genügt es, o.B.d.A. $\forall w \in N(v_1) : f(v_1) > f(w)$ zu betrachten.

Fall 1.1. $\forall i \in \{2, \dots, \Delta^*\} \forall w \in N(v_i) : f(v_i) > f(w)$.

Dann folgt $f(v_i) \geq \Delta + d - 1$ für alle $i = 1, \dots, \Delta^*$. Wegen $f(v_i) \neq f(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq \Delta^*$ ergibt sich außerdem $\max_{i=1, \dots, \Delta^*} f(v_i) \geq \Delta + d - 1 + (\Delta^* - 1) = \Delta + \Delta^* + d - 2$.

Fall 1.2. $\exists j \in \{2, \dots, \Delta^*\} \exists w \in N(v_j) : f(v_j) < f(w)$.

Ist $w = u$, erhalten wir $f(v_1) > f(u) > f(v_j)$. Lemma 3.16, angewandt auf den Stern mit Mittelknoten u , liefert $\lambda_{d,1}(T[N[u]]) \geq 2d + \Delta^* - 2$. Ist $w \neq u$, erhalten

wir $f(w) > f(v_j) > f(u)$, was zusammen mit Lemma 3.16 zu $\lambda_{d,1}(T[N[v_j]]) \geq 2d + \Delta - 2 \geq 2d + \Delta^* - 2$ führt.

Folglich gilt stets $\lambda_{d,1}(T') \geq \Delta^* + d - 2 + \min\{d, \Delta\}$.

Sei nun $u \in V(T)$ ein Δ -Knoten, dessen Nachbarn v_1, \dots, v_Δ alle mindestens Grad δ^* haben. Ferner sei f ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling des induzierten Untergraphen $T'' = T[N_2[u]]$, wobei $N_2[u]$ die Menge aller Knoten im Abstand ≤ 2 zu u (inklusive u) sei. Laut Lemma 3.16 erhalten wir $f_{\max} \geq 2d + \Delta - 2 \geq 2d + \delta^* - 2$ falls i, j mit $1 \leq i < j \leq \Delta$ sowie $f(v_i) < f(u) < f(v_j)$ existieren. Daher gelte o.B.d.A. $\forall v_i \in N(u) : f(u) < f(v_i)$.

Fall 2.1. $\forall i \in \{1, \dots, \Delta\} \forall w \in N(v_i) - \{u\} : f(v_i) > f(w)$.

Man erhält $\forall v_i \in N(u) : f(v_i) \geq \delta^* + d - 1$ und wegen $f(v_i) \neq f(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq \Delta$ ergibt sich sofort $\max_{i=1, \dots, \Delta} f(v_i) \geq \delta^* + d - 1 + (\Delta - 1) = \Delta + \delta^* + d - 2$.

Fall 2.2. $\exists j \in \{1, \dots, \Delta\} \exists w \in N(v_j) - \{u\} : f(v_j) < f(w)$.

Dann können wir sofort $f_{\max} \geq 2d + \delta^* - 2$ schließen.

Folglich gilt stets $\lambda_{d,1}(T'') \geq \delta^* + d - 2 + \min\{d, \Delta\}$. Da $T' \subseteq T$ und $T'' \subseteq T$, gelten diese Schranken natürlich auch für T . \blacksquare

Bemerkung 3.3 *Ist $\Delta \leq d$, dann ist die Schranke scharf für Raupen. Eine Raupe ist ein Baum mit der Eigenschaft, daß nach Löschen sämtlicher Blätter ein Weg übrigbleibt. Zu den Raupen gehören auch die Doppelsterne. Ein Doppelstern ist ein Baum, der genau zwei Knoten enthält, die keine Blätter sind.*

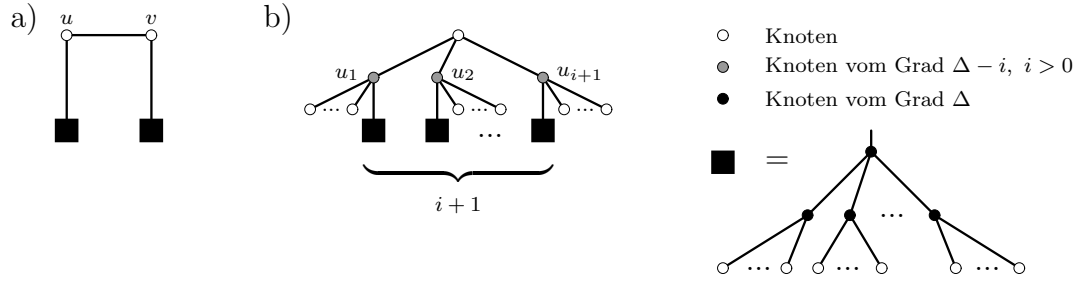
Folgerung 3.2 *Gilt $\max\{\Delta^*, \delta^*\} = \Delta$, dann ist $\lambda_{d,1}(T) = \Delta + d - 2 + \min\{d, \Delta\}$. Die Voraussetzung ist genau dann erfüllt, wenn es einen Δ -Knoten gibt, dessen Nachbarn alle Grad Δ haben.*

Betrachten wir nun Bäume T mit Maximalgrad Δ , für welche $\Delta \leq d$ und $\max\{\Delta^*(T), \delta^*(T)\} = \Delta - 1$ ist. Für T gilt dann $2\Delta + d - 3 \leq \lambda_{d,1}(T) \leq 2\Delta + d - 2$.

Beobachtung 3.1 *Es existieren Bäume T mit Maximalgrad Δ , $\Delta^*(T) = \Delta - 1$ und $\Delta \leq d$, für welche $\lambda_{d,1}(T) = 2\Delta + d - 2$ gilt.*

Beweis. Enthält T den Baum aus Bild 3.21 a) als Untergraphen, so ist $\lambda_{d,1}(T) = 2\Delta + d - 2$. Angenommen, es gibt ein Labelling f mit $f_{\max} = 2\Delta + d - 3$. Bestimmt man zuerst ein zulässiges Labelling für die Knoten in den schwarzen Kästchen, so muß $f(u), f(v) \in \{\Delta - 1, \dots, 2\Delta - 3\} \cup \{d, \dots, \Delta - 2 + d\}$ gelten. Da keine zwei Label innerhalb dieser Menge eine Differenz $\geq d$ haben können, ist stets die Abstand-1-Bedingung verletzt.

Ist $d \geq \Delta + i$ für ein $i > 0$, dann gilt auch $\lambda_{d,1}(T) = 2\Delta + d - 2$ für jeden Baum T , welcher den Baum aus Bild 3.21 b) als Untergraphen enthält. Angenommen, es existiert ein Labelling f mit $f_{\max} = 2\Delta + d - 3$. Analog zu oben führt das


 Abbildung 3.21.: Bäume mit $\lambda_{d,1} = 2\Delta + d - 2$ und $\Delta^* = \Delta - 1$

Labelling der Knoten in den schwarzen Kästchen zu $f(u_j) \in \{\Delta - 1, \dots, 2\Delta - 3\} \cup \{d, \dots, \Delta - 2 + d\}$ für $j = 1, \dots, i + 1$. Gibt es ein $j \in \{1, \dots, i + 1\}$, so daß Knoten $w_1, w_2 \in N(u_j)$ mit $f(w_1) < f(u_j) < f(w_2)$ existieren, so wäre $f_{\max} \geq 2d - 2 + (\Delta - i) = d + \Delta - 2 + (d - i) \geq 2\Delta + d - 2$ nach Lemma 3.16. Daher genügt es, o.B.d.A. $\forall j \in \{1, \dots, i + 1\} \forall w \in N(u_j) : f(w) < f(u_j)$ anzunehmen. Damit folgt $f(v_j) \geq \Delta - i - 1 + d$ für alle $j = 1, \dots, i + 1$. Es müssen folglich $i + 1$ Knoten mit paarweise verschiedenen Labeln aus der Menge $\{\Delta - i - 1 + d, \dots, \Delta + d - 2\}$ versehen werden. Da die Menge aber nur i Label enthält, ergibt sich stets eine Verletzung der Abstand-2-Bedingung. \square

Der nun folgende Satz zeigt sogar, daß $\Delta^* \geq \Delta - 1$ ein notwendiges Kriterium für $\lambda_{d,1} = 2\Delta + d - 2$ ist.

Satz 3.18 *Ist $\Delta^*(T) \leq \Delta - 2$ und $\Delta \leq d$ für einen Baum T mit Maximalgrad Δ , dann gilt*

$$\lambda_{d,1}(T) < 2\Delta + d - 2.$$

Der Beweis dieses Satzes erfolgt konstruktiv durch Anwendung des folgenden Algorithmus.

Algorithmus 3.3 (Labelling-Strategie für spezielle Bäume)

Eingabe: Ein Baum T mit $\Delta^* \leq \Delta - 2$

Ausgabe: Ein $L(d, 1)$ -Labelling f

Wähle einen Δ -Knoten $x \in V(T)$ als Wurzel. Sei $e := e(x)$ die Exzentrizität des Knotens x , d.h. $e(x) = \max_{v \in V(T)} \text{dist}(x, v)$. Damit seien die Schichten

$$S_0 = \{x\} \quad \text{und} \quad S_i := \{v \mid v \in V(T), \text{dist}(x, v) = i\}, \quad i = 1, \dots, e,$$

des Wurzelbaumes definiert.

Schritt 1: Anfänglich seien alle Knoten ohne Label. Wähle einen Knoten $u \in S_1$ mit $\deg(u) < \Delta$ und weise ihm das Label $\Delta + d - 2$ zu. Für $j = 2, \dots, e - 1$ gehe schichtenweise wie folgt vor: Ist $u \in S_j$ ein Δ -Knoten und hat der Vater

von u kein Label, so wähle einen Sohn v von u mit $\deg(v) < \Delta$. Gib ihm ein Label nach der Vorschrift

$$f(v) = \begin{cases} \Delta - 1 & , \text{ für } v \in S_{2i} \\ \Delta + d - 2 & , \text{ für } v \in S_{2i+1} \end{cases} , \quad i \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Schritt 2: Weise den restlichen Knoten w schichtenweise, beginnend mit S_0 , durch einen Greedy-Algorithmus Label zu, so daß $f(w) \in \{0, \dots, \Delta - 2\}$, wenn $w \in S_{2i}$, und $f(w) \in \{\Delta + d - 1, \dots, 2\Delta + d - 3\}$, wenn $w \in S_{2i+1}$, für alle $i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{e}{2} \rfloor\}$ erfüllt ist.

Der Algorithmus liefert für T immer ein zulässiges $L(d, 1)$ -Labelling f mit $\max_{v \in V(T)} f(v) \leq 2\Delta + d - 3$. Dies kann mit Hilfe der folgenden Argumente gezeigt werden:

Beweis. Sei V_j , $j = 1, 2$, die Menge der Knoten, welche ihr Label im Schritt j des Algorithmus erhalten haben. Offensichtlich muß der Vater von jedem Knoten aus V_1 ein Δ -Knoten sein. Da außerdem nur jeweils ein Knoten in der Nachbarschaft eines Δ -Knotens sein Label im Schritt 1 erhalten hat, gilt $\text{dist}(x, y) > 2$ für je zwei Knoten $x, y \in V_1$. Damit können die Knoten aus V_1 nicht die Abstandsbedingungen verletzen.

Untersuchen wir nun das Labelling eines Knotens $v \in V_2 \cap S_{2i}$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{e}{2} \rfloor$ (der Fall $v \in V_2 \cap S_{2i+1}$ ist analog). Da der Greedy-Algorithmus den Knoten schichtenweise Label zuweist, müssen wir nur den Vater u von v und alle Knoten in $N(u)$ betrachten. Offenbar gilt $f(u) \in \{\Delta + d - 2, \dots, 2\Delta + d - 3\}$. Ist $\deg(u) < \Delta$, dann haben die Knoten $N(u) - \{v\}$ paarweise verschiedene Label aus $\{0, \dots, \Delta - 2\}$ erhalten. Aufgrund von $|N(u) - \{v\}| \leq \Delta - 2$ gibt es also stets ein Label, welches dem Knoten v zugewiesen werden kann. Angenommen, $\deg(u) = \Delta$. Jeder Δ -Knoten hat wenigstens einen Sohn vom Grad kleiner als Δ , wegen $\Delta^* \leq \Delta - 2$. Dies garantiert die Existenz eines Knotens in $(N(u) - \{v\}) \cap V_1$. Demzufolge ist $|(N(u) - \{v\}) \cap V_2| \leq \Delta - 2$, so daß ein zulässiges Label für v übrig ist. \square

Folgerung 3.3 Für einen Baum T mit Maximalgrad Δ , $\delta^*(T) = \Delta - 1$, $\Delta^*(T) < \Delta - 1$ und $\Delta \leq d$ gilt $\lambda_{d,1}(T) = 2\Delta + d - 3$.

Bemerkung 3.4 Enthält ein Baum T mit Maximalgrad Δ , $\Delta^*(T) = \Delta - 1$ und $\Delta \leq d$ eine Knotenteilmenge M mit den Eigenschaften

1. $\forall v \in M : \deg(v) < \Delta$,
2. $\text{dist}(x, y) > 2$ für je zwei Knoten $x, y \in M$ und
3. jeder Δ -Knoten von T besitzt einen Nachbarn in M ,

dann gilt $\lambda_{d,1}(T) = 2\Delta + d - 3$.

Dies läßt sich anhand der Vorgehensweise von Algorithmus 3.3 nachvollziehen.

3.4.3. Outerplanare und K_4 -Minor-freie Graphen

Ein *outerplanarer Graph* ist ein planarer Graph, welcher eine überkreuzungsfreie Einbettung in die Ebene besitzt, so daß alle Knoten auf derselben Fläche liegen. Ferner werden outerplanare Graphen als diejenigen Graphen charakterisiert, die weder K_4 noch $K_{2,3}$ als Minor enthalten (vgl. [15]). K_4 -Minor-freie Graphen sind auch als *partielle 2-Bäume* bekannt (siehe z.B. [15]).

Auf Seite 29 wurden bereits Schranken für $\lambda_{1,1}$ für outerplanare bzw. K_4 -Minor-freie Graphen angegeben. Resultate zu $\lambda_{2,1}$ von outerplanaren Graphen bieten die Arbeiten [11],[22],[75] (siehe auch Tabelle 3.1).

Die Ausführungen zu $\lambda_{d,1}$ von diesen Graphen sollen hier nur kurz ausfallen, da sich die Methoden zur Abschätzung von $\lambda_{1,1}$ aus [72],[70] relativ einfach zur Abschätzung von $\lambda_{d,1}$ verwenden lassen. Das wichtigste Hilfsmittel dazu ist:

Lemma 3.17 (Lih, Wang, [70]) *Sei G ein K_4 -Minor-freier Graph und $S(u) = \{x \mid \deg(x) \geq 3 \wedge [(u \text{ ist adjazent zu } x) \vee (\text{es gibt einen } 2\text{-Knoten } z, \text{ der zu } u \text{ und } x \text{ adjazent ist})]\}$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

(i) $\delta(G) \leq 1$;

(ii) *Es existieren zwei adjazente 2-Knoten;*

(iii) *Es existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \geq 3$ und $|S(u)| \leq 2$.*

Folgerung 3.4 *Ein Graph G enthält einen Knoten x mit $\deg(x) \leq 2$ und maximal $\Delta + 1$ Knoten im Abstand 2 zu x , wenn G outerplanar ist bzw. maximal $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor - 1$ Knoten im Abstand 2 zu x , wenn G K_4 -Minor-frei ist.*

Gilt (i) oder (ii) aus Lemma 3.17 für einen K_4 -Minor-freien Graphen G , so ist die Richtigkeit dieser Folgerung leicht nachzuvollziehen. Gilt für G nur (iii) aus Lemma 3.17, müssen sämtliche nichtisomorphen Graphen H betrachtet werden, welche durch die Knotenmenge $\{u\} \cup S(u)$ und aller dazu adjazenten Knoten induziert werden könnten. In H läßt sich stets ein Knoten x mit den geforderten Eigenschaften finden.

Satz 3.19

(i) *Für einen outerplanaren Graphen G gilt $\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta + 4d - 1$.*

(ii) *Für einen K_4 -Minor-freien Graphen G gilt $\lambda_{d,1}(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 4d - 3$.*

Beweis. Im folgenden sei $a_{\Delta(G)} = \Delta(G) + 1$, wenn G outerplanar, und $a_{\Delta(G)} = \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \rfloor - 1$, wenn G K_4 -Minor-frei ist. Angenommen, es gibt einen outerplanaren bzw. K_4 -Minor-freien Graphen G_0 mit minimaler Ordnung, für den kein $L(d, 1)$ -Labelling mit maximalem Label $\leq 2(2d - 1) + a_{\Delta(G_0)}$ existiert. Gemäß der Folgerung 3.4 besitzt G_0 einen Knoten x mit $\deg(x) \leq 2$ und maximal $a_{\Delta(G_0)}$

Knoten im Abstand 2.

– Ist $\deg(x) = 1$, so gibt es für $H := G_0 - \{x\}$ ein $L(d, 1)$ -Labelling f mit maximalem Label $\leq 2(2d-1) + a_{\Delta(H)} \leq 2(2d-1) + a_{\Delta(G_0)}$ (aufgrund der Minimalität von G_0). Da f jedoch nur maximal $2d - 1 + \Delta(G_0) - 1 \leq 2(2d - 1) + a_{\Delta(G_0)}$ Label für x verbietet, kann f stets auf den Knoten x erweitert werden. ⚡

– Ist $\deg(x) = 2$, dann seien v_1, v_2 die Nachbarn von x . Sind v_1 und v_2 adjazent, so setzen wir $H := G_0 - \{x\}$; sind sie nicht adjazent, dann setzen wir $H := G_0 - \{x\} + \{v_1, v_2\}$ (d.h. die Kante $\{v_1, v_2\}$ wird eingefügt). Offensichtlich ist H ebenfalls outerplanar bzw. K_4 -Minor-frei und es gilt sowohl $\Delta(H) \leq \Delta(G_0)$ als auch $\text{dist}_H(u, w) \leq \text{dist}_{G_0}(u, w)$ für alle Knoten $u, w \in V(G_0) - \{x\}$. Aufgrund der Minimalität von G_0 existiert für H ein $L(d, 1)$ -Labelling f mit maximalem Label $\leq 2(2d - 1) + a_{\Delta(H)} \leq 2(2d - 1) + a_{\Delta(G_0)}$. Dieses verbietet maximal $2(2d-1) + a_{\Delta(G_0)}$ Label für x und ist damit ebenfalls zu einem $L(d, 1)$ -Labelling für G_0 erweiterbar. ⚡ ■

3.4.4. Schranken für $\lambda_{d,1}$ wichtiger Graphenklassen

Graphenklasse	Schranken für $\lambda_{d,1}$, $\Delta \geq 3$ (Es gilt stets auch $\lambda_{d,1} \geq \Delta + d - 1$.)	
Parkettierungen	(Calamoneri, [18])	
Hexagonale	$\lambda_{d,1} = 4 + d$, für $d \geq 3$	(Satz 3.5)
Quadratische	$\lambda_{d,1} = 6 + d$, für $d \geq 4$	(Satz 3.6)
Trianguläre	$\lambda_{d,1} = 6 + 2d$, für $d \geq 4$	(Satz 3.7)
Bäume	$\lambda_{d,1} \leq \min\{2d + \Delta - 2, 2\Delta + d - 2\}$	(Satz 3.16)
t -Bäume	$\lambda_{d,1} \leq (2d + \Delta - 1 - t)t$	(Chang et al., [24])
Kakteen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta + 3d - 3$, für $d \geq 2$	(Satz 4.22)
Outerplanare Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta + 4d - 1$	(Satz 3.19)
K_4 -Minor-freie Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 4d - 3$	(Satz 3.19)
Einheitsintervallgraphen	$\lambda_{d,1} \leq \min\{d\omega, \omega + d(\omega - 1)\}$, für $d \geq 2$	(Kohl, [65])
Planare Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 12d + 65$	(Molloy, Salvatipour, [78])
Stark Chordale Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta + (2d - 2)(\omega - 1)$	(Chang et al., [24])
Chordale Graphen	$\lambda_{d,1} \leq (2d + \Delta - 1)^2/4$	(Chang et al., [24])
	$\lambda_{d,1} = O(\Delta^{1.5} + d\Delta)$	(Kráľ, [68])
Kreisgraphen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta(2d + 1) - 2$	(Kohl, [65])
Durchmesser-2-Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta^2 + (d - 2)\Delta$, für $d \geq 2$	(Satz 3.14)
Allgemeine Graphen	$\lambda_{d,1} \leq \Delta^2 + (d - 1)\Delta - 2$, für $d \geq 2$	(Gonçalves, [48])

Tabelle 3.5.: Schranken für $\lambda_{d,1}$ wichtiger Graphenklassen

4. Listenfärbungen mit maximal zwei Abstandsbedingungen

In diesem Kapitel behandeln wir die Listenversion der Färbungen mit Abstandsbedingungen. Neben den Abstand-1- und 2-Bedingungen besteht nun zusätzlich die Restriktion, den Knoten aus vorgegebenen Mengen Label zuzuweisen.

Definition 4.1 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$, zwei nichtnegative, ganze Zahlen d und s und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$. Ein $L(d, s)$ -List Labelling von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{N}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\forall v \in V : f(v) \in L(v)$,
2. $|f(v) - f(w)| \geq d$, wenn $\text{dist}(v, w) = 1$,
3. $|f(v) - f(w)| \geq s$, wenn $\text{dist}(v, w) = 2$.

Die $L(d, s)$ -Listenzahl von G , geschrieben $\chi_\ell^{d,s}(G)$, ist die kleinste natürliche Zahl k , so daß G für jede k -Listenzuweisung ein $L(d, s)$ -List Labelling besitzt.

Für $s = 0$ schreiben wir χ_ℓ^d statt $\chi_\ell^{d,0}$. Ferner gelte $d > 0$ und $d \geq s$.

Der folgende Abschnitt 4.1 behandelt den Fall $s = 0$, d.h. die Listenfärbungen ohne Abstand-2-Bedingung. Im Abschnitt 4.2 betrachten wir einige Eigenschaften von $L(d, s)$ -List Labellings bzw. fassen zusammen, was bisher zu diesem Thema erarbeitet wurde. Anschließend werden für Bäume, besonders Sterne und Wege, und für Kreise Schranken für $\chi_\ell^{d,s}$ mit Hauptaugenmerk auf $s = 1$ und $s = d$ berechnet. Im Abschnitt 4.3 betrachten wir ferner die Fälle $s = 0, 1$ für Kakteen und geben Schranken für χ_ℓ^d und $\chi_\ell^{d,1}$ an. Im darauffolgenden Abschnitt untersuchen wir einige Graphen, für welche $\chi_\ell^{2,1} = \lambda_{2,1} + 1$ gilt.

4.1. $L(d, 0)$ -List Labellings

Im Gegensatz zu den $L(d, 0)$ -Labellings, für welche $\lambda_d = d \cdot \lambda_1$ ist, läßt sich χ_ℓ^d nicht einfach aus χ_ℓ^1 berechnen. Als obere Schranke gilt wieder ein dem Satz von Brooks äquivalentes Resultat, welches aus den Sätzen 2.19 und 2.20 durch Setzen von $T = \{0, \dots, d - 1\}$ gewonnen werden kann. Weiterhin gelten die folgenden Schranken, wobei die untere Schranke von Alon und Zaks und die obere Schranke von Waters gezeigt wurde.

Satz 4.1 (Alon und Zaks, [5], Waters, [99])

Für jeden Graphen G und $d \geq 1$ gilt stets

$$d(\chi_\ell^1(G) - 1) + 1 \leq \chi_\ell^d(G) \leq (2d - 1)(\text{col}(G) - 1) + 1.$$

Vermutung 4.1 (Waters, [99]) Für jeden Graphen G und $d \geq 1$ gilt

$$\chi_\ell^d(G) \leq (2d - 1)(\chi_\ell^1(G) - 1) + 1.$$

Natürlich ist die Vermutung richtig für Graphen G mit $\chi_\ell^1(G) = \text{col}(G)$, wie z.B. die chordalen Graphen. Schon Tesman [91] konnte zeigen, daß für jeden chordalen Graphen G die Beziehung $\chi_\ell^d(G) \leq (2d - 1)(\chi(G) - 1) + 1$ gilt (vgl. auch Abschnitt 2.2.2). Darüber hinaus konnte Waters seine Behauptung bereits für alle 2-listenfärbbaren Graphen beweisen:

Satz 4.2 (Waters, [99]) Für alle Graphen G mit $\chi_\ell^1(G) = 2$ und $d \geq 1$ gilt $\chi_\ell^d(G) \leq 2d$.

Zur Vermutung 4.1 läßt sich weiterhin feststellen:

Satz 4.3 Für jeden K_4 -Minor-freien Graphen G und $d \geq 1$ gilt $\chi_\ell^d(G) \leq (2d - 1)(\chi_\ell^1(G) - 1) + 1$.

Beweis. Es ist bekannt, daß $\delta(G) \leq 2$ für jeden K_4 -Minor-freien Graphen G gilt. Daher ist $\chi_\ell^1(G) \leq 3$. Wenn $G \cong K_1$, so gilt $\chi_\ell^d = \chi_\ell^1(G) = 1$. Aufgrund von Satz 4.2 muß nur noch der Fall $\chi_\ell^1(G) = 3$ betrachtet werden. Angenommen, G_0 sei ein K_4 -Minor-freier Graph minimaler Ordnung, so daß $\chi_\ell^1(G_0) = 3$ gilt und eine $(4d - 1)$ -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ existiert, für die G_0 kein $L(d, 0)$ -List Labelling besitzt. Wir wählen einen Knoten $u \in V(G)$ mit $\text{deg}(u) \leq 2$. Aufgrund der Minimalität von G_0 ist entweder $\chi_\ell^1(G_0 - \{u\}) = 3$ und es existiert für $G_0 - \{u\}$ und \mathcal{L} ein $L(d, 0)$ -List Labelling f ; oder es gilt $\chi_\ell^1(G_0 - \{u\}) \leq 2$, so daß wegen $\chi_\ell^d(G_0 - \{u\}) \leq 2d$ ebenfalls das gewünschte Labelling f existiert. Da die Label aus $f(N(u))$ maximal $2(2d - 1)$ Label für u verbieten, enthält $L(u)$ mindestens ein zulässiges Label, mit dem f zu einem $L(d, 0)$ -List Labelling von G erweitert werden kann. ζ ■

Bemerkung 4.1 Für nichttriviale K_4 -Minor-freie Graphen G läßt sich der Satz 4.3 auch aus den vorherigen Sätzen schließen. Ist $\chi_\ell^1(G) = 2$, so verwenden wir Satz 4.2; ist $\chi_\ell^1(G) = 3$, so gilt $\chi_\ell^1(G) = \text{col}(G)$ und wir verwenden Satz 4.1.

Satz 4.4 (Alon und Zaks, [5]) Sei $p := 2d - 1$ eine Primzahl. Hat G eine Orientierung D mit $EE(D) \not\equiv EO(D) \pmod{p}$, dann existiert für jede Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ mit $|L(v)| \geq p \cdot d_D^-(v) + 1$ ein $L(d, 0)$ -List Labelling für G . Folglich ist $\chi_\ell^d(G) \leq p \cdot \max_{v \in V(D)} d_D^-(v) + 1$.

Wir geben nun einen Beweis an, der einfacher als der Originalbeweis aus [5] ist.

Beweis. Als erstes konstruieren wir eine Orientierung D' für $G^{(d)}$, indem wir jeden Bogen in D durch $p := 2d-1$ parallele Bögen mit derselben Richtung ersetzen. Damit ist $d_{D'}^-(v) = p \cdot d_D^-(v)$ für alle $v \in V(D')$. Weiterhin ist offensichtlich, daß durch dieses Ersetzen keine grundsätzlich neuen Zyklen entstehen, jedoch können die bereits in D vorhandenen Zyklen nun sozusagen p -fach verwendet werden. Zählen wir die Eulerschen Unterdigraphen von D' , so unterscheiden wir dabei zwei verschiedene Arten von Eulerschen Unterdigraphen $H' \subseteq D'$:

Fall 1. Zwischen je zwei Knoten aus $V(H')$ existieren entweder 0 oder p Bögen. Jedem dieser Unterdigraphen H' entspricht eineindeutig ein Eulerscher Unterdigraph $H \subseteq D$, nämlich derjenige, der entsteht, indem man jeweils p parallele Bögen wieder zu einem Bogen zusammenfaßt. Ist $|E(H)|$ ungerade, so ist auch $|E(H')| = p \cdot |E(H)|$ ungerade. Analog ist $|E(H')|$ gerade, wenn $|E(H)|$ gerade ist. Demzufolge gibt es genau $EE(D)$ gerade und $EO(D)$ ungerade Eulersche Unterdigraphen dieses Typs.

Fall 2. Es existieren zwei Knoten in $V(H')$, zwischen denen b Bögen, $0 < b < p$, verlaufen.

Sei M die Menge aller Eulerschen Unterdigraphen, die zwischen je zwei Knoten aus V dieselbe Anzahl von Bögen wie H' besitzen.

Die Anzahl der Möglichkeiten, die b Bögen aus den p vorhandenen Bögen in D' auszuwählen, beträgt $\binom{p}{b} = \frac{p(p-1)!}{(p-b)!b!}$. Da p eine Primzahl ist, kann sie sich niemals aus diesem Term wegekürzen. Multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, die restlichen Bögen für H' zu wählen, ergibt sich also stets ein Vielfaches von p . Folglich ist die Mächtigkeit von M durch p teilbar; daher sind Eulersche Unterdigraphen dieses Typs bei der Modulo p Rechnung nicht relevant.

Insgesamt bedeutet dies, daß $EE(D') \not\equiv EO(D') \pmod{p}$ ist, da $EE(D') \equiv EE(D) \pmod{p}$ und $EO(D') \equiv EO(D) \pmod{p}$ gelten und laut Voraussetzung $EE(D) \not\equiv EO(D) \pmod{p}$ ist. Nach Satz 2.31 hat G für jede Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ mit $|L(v)| \geq d_{D'}^-(v) + 1 = p \cdot d_D^-(v) + 1$ ein $L(d, 0)$ –List Labelling. Damit ist $\chi_{\mathcal{L}}^d(G) \leq p \cdot \max_{v \in V(D)} d_D^-(v) + 1$. ■

Folgerung 4.1 *Besitzt die Orientierung D für G die Eigenschaft, daß $\max_{v \in V(D)} d_D^-(v) \leq \chi_{\mathcal{L}}^1(G) - 1$ ist, so stimmt die Vermutung 4.1 für G .*

4.2. $L(d, s)$ –List Labellings

Wie bereits erwähnt, wurden Färbungen mit einer Abstandsbedingung erstmals von Tesman [91] im Jahre 1993 mit Listenfärbungen in Verbindung gebracht. Das verallgemeinerte Konzept der Listenfärbungen mit mehreren Abstandsbedingungen ist relativ jung und wurde unabhängig von Fiala und Škrekovski [39] sowie Kohl et al. [66] eingeführt. In [39] wurden der Satz 2.31 bewiesen

und $\chi_\ell^{2,1}$ für Wege und Kreise berechnet. In [66] stehen Schranken für Bäume – hauptsächlich Wege und Sterne – im Vordergrund (siehe Kapitel 4.2.2).

4.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Resultate

$L(d, s)$ –List Labellings sind L_P –List Labellings für $P = (d, s)$. Es gelten daher alle im Abschnitt 2.2.3 genannten Eigenschaften. Zusammenfassend ergeben sich vorerst als allgemeine Schranken:

Satz 4.5 *Für jeden Graphen G mit Maximalgrad Δ gilt*

$$(i) \quad \chi_\ell^{d,s}(G) - 1 \geq \lambda_{d,s}(G), \quad (\text{Satz 2.27})$$

$$(ii) \quad \chi_\ell^{d,s}(G) - 1 \geq \max\{d(\chi_\ell(G) - 1), s(\chi_\ell(G^2) - 1)\}, \quad (\text{Satz 2.27})$$

$$(iii) \quad \chi_\ell^{d,s}(G) - 1 \leq (2d - 1)(\text{col}(G^2) - 1) \leq (2d - 1)\Delta^2, \quad (\text{Sätze 2.28 \& 2.1})$$

$$(iv) \quad \chi_\ell^{d,s}(G) - 1 \leq d\Delta + s\Delta(\Delta - 1). \quad (\text{Satz 2.29})$$

Komplexität

Wie wir bereits im Kapitel 3.2.1 gesehen haben, ist $L(2, 1)$ –Labelling im allgemeinen Fall \mathcal{NP} –vollständig. Wir können daher nicht erwarten, daß die Listenversion dieses Problems eine geringere Komplexität besitzt. Konkret wurde für das algorithmische Problem

Problem: $L(d, s)$ –List Labelling

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Listenzuweisung \mathcal{L}

Frage: Gibt es für \mathcal{L} ein $L(d, s)$ –List Labelling?

gezeigt, daß es sowohl bei Wegen für beliebiges $s \geq 1$ als auch bei allgemeinen Bäumen für $s = 1$ in \mathcal{P} ist (Tuza und Voigt [66]), und daß es bei Bäumen für $s > 1$ bereits \mathcal{NP} –vollständig ist (Fiala et al. [38]).

Technische Hilfsmittel für die folgenden Abschnitte

Definition 4.2 *Gegeben seien ein Graph G , eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$ sowie zwei adjazente Knoten $v, w \in V(G)$.*

Ein Label $c \in L(w)$ i –eliminiert die Liste $L(v)$, wenn es keine i Label $c'_j \in L(v)$, $j = 1, \dots, i$, mit $|c'_j - c| \geq d$ gibt. Ist $i = 1$, so ist $L(v) \subseteq \{c - d + 1, \dots, c + d - 1\}$ und wir sagen: c eliminiert die Liste $L(v)$.

Lemma 4.1 *Gegeben seien ein Graph G und eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(G)\}$. Ferner seien $\{v, w\} \in E(G)$, $i \geq 1$ sowie $k := |L(v)|$. Dann gilt:*

(i) *Ist $k \geq 2d - 1 + i$, so gibt es in $L(w)$ kein Label, welches $L(v)$ i –eliminiert.*

(ii) Ist $i \leq k < 2d - 1 + i$, so gibt es maximal $2d + 2(i - 1) - k$ Label $c \in L(w)$, die $L(v)$ i –eliminieren.

Beweis.

Zu (i): Für ein Label $c \in L(w)$ gibt es maximal $2d - 1$ Label $c' \in L(v)$ mit $|c - c'| < d$, nämlich die Label $c - d + 1, \dots, c + d - 1$. Da $k - (2d - 1) \geq i$, folgt die Behauptung.

Zu (ii): Seien m_1, \dots, m_i , $m_1 < \dots < m_i$, bzw. M_1, \dots, M_i , $M_1 > \dots > M_i$, die i kleinsten bzw. größten Label aus $L(v)$. Folglich ist $M_j - m_j \geq k - 2j + 1$ für alle $j \in \{1, \dots, i\}$. Gilt für ein Label $c \in L(w)$ die Bedingung $c \leq M_i - d$, so gibt es stets mindestens i Label $c'_j \in L(v)$, $j = 1, \dots, i$, mit $|c - c'_j| \geq d$ (nämlich die Label M_i, \dots, M_1). Analog dazu läßt sich der Fall $c \in L(w)$ mit $c \geq m_i + d$ behandeln. Demzufolge müssen wir nur diejenigen Label aus $L(w)$ betrachten, die keine der beiden Bedingungen erfüllen. Dies sind die Label c mit $M_i - d < c < m_i + d$. Deren Anzahl beträgt

$$2d - (M_i - m_i) - 1 \leq 2d - (k - 2i + 1) - 1 = 2d + 2(i - 1) - k. \quad \square$$

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich $L(d, 1)$ –List Labellings für Wege konstruieren und es kann abgeschätzt werden, welche Listengrößen erforderlich sind, um diese Labelling-Methoden anwenden zu können.

Definition 4.3 Ein Weg mit kleinen Randlisten ist ein Weg (v_1, v_2, \dots, v_n) mit $n \geq 3$ Knoten, für den eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ mit $k_i := |L(v_i)|$ und $k := \max_{i=1, \dots, n} k_i$ gegeben ist; sowie für $n \geq 4$ mit den Eigenschaften

1. $\forall i \in \{3, \dots, n - 2\} : k_i = k$,
2. $\forall i \in \{1, 2, n - 1, n\} : 1 \leq k_i \leq k, \quad k_1 \leq k_2, \quad k_n \leq k_{n-1}$,

und für $n = 3$ mit den Eigenschaften $k_1, k_3 \leq k_2 = k$.

▷▷ **Labelling-Strategien für Wege:**

Algorithmus 4.1 (Konstruktion eines $L(d, 1)$ –List Labellings)

Eingabe: Ein Weg $P_n = (v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 3$, sowie eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$

Ausgabe: Ein $L(d, 1)$ –Labelling f

Setze $L'(v_1) := L(v_1)$. Für $i = 2, \dots, n - 1$ lösche alle Label aus $L(v_i)$, welche $L'(v_{i-1})$ 2–eliminieren, und erhalte die neue Liste $L'(v_i)$. Lösche anschließend aus $L(v_n)$ alle Label, die $L'(v_{n-1})$ eliminieren und bezeichne die verbleibende Liste mit $L'(v_n)$.

Nun weise den Knoten in umgekehrter Reihenfolge auf folgende Art Label zu: Teile dem Knoten v_n ein beliebiges Label $f(v_n)$ aus $L'(v_n)$ und dem Knoten v_{n-1} ein Label $f(v_{n-1}) \in L'(v_{n-1})$ mit $|f(v_n) - f(v_{n-1})| \geq d$ zu. Sind bereits die Knoten v_n, v_{n-1}, \dots, v_i , $i \geq 2$, mit einem Label versehen worden, so enthält die Liste $L'(v_{i-1})$ mindestens zwei Label mit einer Differenz $\geq d$ zu $f(v_i)$. Wähle $f(v_{i-1})$ aus diesen beiden Labeln so, daß es verschieden von $f(v_{i+1})$ ist.

Lemma 4.2 Sei (v_1, v_2, \dots, v_n) , $n \geq 3$, ein Weg mit kleinen Randlisten und $\mathcal{L} = \{L(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ mit $k_i := |L(v_i)|$ für $i = 1, \dots, n$ die zugehörige Listenzuweisung. Der Algorithmus 4.1 liefert ein zulässiges $L(d, 1)$ –List Labelling, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$\sum_{j=1}^n k_j > (2d+2)(n-1) - 2 \quad (*) \quad \text{und} \quad k_1 \geq 2, k_{n-1} + k_n \geq 2d+1, k_n \leq 2d,$$

$$\text{sowie } k_1 + k_2 \geq 2d+4, \quad \text{für } n \geq 4.$$

Beweis. Sei $L'(v_i)$ wie in Algorithmus 4.1 definiert, sowie $k'_i := |L'(v_i)|$. Es ist zu zeigen, daß $k'_i \geq 2$ für $i = 1, \dots, n-2$ und $k'_{n-1}, k'_n \geq 1$ gilt.

Offenbar gilt $k'_1 = k_1 \geq 2$. Laut Lemma 4.1 (ii) werden aus $L(v_i)$, $i = 2, \dots, n-1$ höchstens $2d+2 - k'_{i-1}$ Label gelöscht. Ist $2d+2 - k'_{i-1} \leq 0$, so gilt $k'_i = k_i$, andernfalls $k'_i \geq k_i - (2d+2 - k'_{i-1})$.

Existiert ein $l \in \{2, \dots, n-1\}$ mit $2d+2 - k'_{l-1} \leq 0$, so sei l^* das kleinste l mit dieser Eigenschaft. Existiert kein solches l , so sei $l^* := n$. Dann läßt sich mittels Induktion $k'_i \geq \sum_{j=1}^i k_j - (2d+2)(i-1)$ für $i = 2, \dots, l^* - 1$ zeigen. Ferner ist $k'_i \geq 2$ für $i = 2, \dots, \min\{l^* - 1, n-2\}$, wegen:

$$\sum_{j=1}^i k_j - (2d+2)(i-1) \underset{(*), k_n \leq 2d}{\geq} \sum_{j=i+1}^n (2d+2 - k_j) - 1 \geq n - i + 1 - 1 \geq 2,$$

für $k < 2d+2$,

$$\sum_{j=1}^i k_j - (2d+2)(i-1) \underset{(k_1 + k_2 \geq 2d+4)}{\geq} (i-2)(k - 2d - 2) + 2 \geq 2, \text{ für } k \geq 2d+2.$$

Für die restlichen Fälle $i > \min\{l^* - 1, n-2\}$ resultiert:

– Ist $l^* \leq n-2$, dann ist wegen $2d+2 \leq k'_{l^*-1} \leq k_{l^*-1} \leq k_{l^*} \leq k$ stets $k'_i = k_i \geq k_1 \geq 2$ für alle $i = l^*, \dots, n-1$, denn es werden keine Label aus $L(v_i)$ gelöscht. Für k'_n folgt dann $k'_n \geq \min\{k_n, k_{n-1} + k_n - 2d\} \geq 1$.

– Ist $l^* = n-1$, dann gilt $k'_{n-1} = k_{n-1} \geq 1$ aufgrund der Definition von l^* , sowie $k'_n \geq \min\{k_n, k_{n-1} + k_n - 2d\} \geq 1$.

– Ist $l^* = n$, so ist $k'_{n-1} \geq \sum_{j=1}^{n-1} k_j - (2d+2)(n-2)$. Daraus folgt $k'_n \geq \min\{k_n, k_n - (2d - k'_{n-1})\} \geq \min\{k_n, \sum_{j=1}^n k_j - (2d+2)(n-1) + 2\} \geq 1$. Man erkennt ferner $k'_{n-1} \geq \sum_{j=1}^{n-1} k_j - (2d+2)(n-2) \geq 2d - k_n + 1 \geq 1$.

Demzufolge ist $k'_i \geq 2$ für alle $i = 1, \dots, n - 2$ und $k'_{n-1}, k'_n \geq 1$; daher liefert der Algorithmus ein zulässiges $L(d, 1)$ –List Labelling. \square

Algorithmus 4.2

(Konstruktion eines $L(d, 1)$ –List Labellings f mit $f(v_1) \neq f(v_n)$)

Eingabe: Ein Weg $P_n = (v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 4$, sowie eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$

Ausgabe: Ein $L(d, 1)$ –Labelling f mit $f(v_1) \neq f(v_n)$

Setze $L'(v_1) := L(v_1)$. Lösche alle Label aus $L(v_2)$, die $L'(v_1)$ 3–eliminieren und erhalte die neue Liste $L'(v_2)$. Für $i = 3, \dots, n - 1$ lösche alle Label aus $L(v_i)$, welche $L'(v_{i-1})$ 2–eliminieren und erhalte die neue Liste $L'(v_i)$. Zuletzt lösche aus $L(v_n)$ alle diejenigen Label, welche die Liste $L'(v_{n-1})$ eliminieren und bezeichne die entstandene Liste mit $L'(v_n)$.

Weise den Knoten v_n, v_{n-1}, \dots, v_2 wie in Algorithmus 4.1 ihre Label zu. Als letztes weise dem Knoten v_1 ein Label $f(v_1) \in L'(v_1)$ zu, so daß die Bedingungen $|f(v_2) - f(v_1)| \geq d$, $f(v_1) \neq f(v_3)$ und $f(v_1) \neq f(v_n)$ erfüllt sind.

Lemma 4.3 Sei (v_1, v_2, \dots, v_n) , $n \geq 4$, ein Weg mit kleinen Randlisten und $\mathcal{L} = \{L(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ mit $k_i := |L(v_i)|$ für $i = 1, \dots, n$ die zugehörige Listenzuweisung. Der Algorithmus 4.2 liefert ein zulässiges $L(d, 1)$ –List Labelling f mit $f(v_1) \neq f(v_n)$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$\sum_{j=1}^n k_j > (2d + 2)(n - 1), \quad (\diamond)$$

$$\text{und } k_1 \geq 3, k_1 + k_2 \geq 2d + 6, k_{n-1} + k_n \geq 2d + 1, k_n \leq 2d.$$

Beweis. Sei $L'(v_i)$ wie in Algorithmus 4.2 definiert, sowie $k'_i := |L'(v_i)|$. Zu zeigen ist, daß $k'_1 \geq 3$, $k'_i \geq 2$ für $i = 2, \dots, n - 2$ und $k'_{n-1}, k'_n \geq 1$ gilt.

$k'_1 = k_1 \geq 3$ ist nach Voraussetzung bereits erfüllt. Es werden aus $L(v_2)$ maximal $2d + 4 - k'_1$ Label gelöscht. Ist $k_1 \geq 2d + 4$, dann würden wegen $k \geq k_2 \geq k_1 \geq 2d + 4$ aus den Listen $L(v_2), \dots, L(v_{n-1})$ keine Label gelöscht, d.h. $k'_i = k_i \geq 2$ für $i = 2, \dots, n - 1$. Für die letzte Liste ergibt sich dann $k'_n \geq \min\{k_n, k_{n-1} + k_n - 2d\} \geq 1$. Damit wären in diesem Fall alle Bedingungen erfüllt.

Sei nun $k_1 < 2d + 4$ und damit $k'_2 \geq k_1 + k_2 - 2d - 4$. Der Algorithmus 4.2 bestimmt für die Knoten v_2, \dots, v_n auf dieselbe Weise wie der Algorithmus 4.1 ein $L(d, 1)$ –List Labelling. Folglich genügt es nachzuweisen, daß der Weg (v_2, \dots, v_n) mit einer Listenzuweisung $\mathcal{L}^* = \{L^*(v_i) \mid i = 2, \dots, n\}$, wobei $|L^*(v_2)| := k_1 + k_2 - 2d - 4$ und $|L^*(v_i)| := k_i$ für $i = 3, \dots, n$, die hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.2 erfüllt. Sei $k^*_i := |L^*(v_i)|$ für $i = 2, \dots, n$. Die zwei Bedingungen $k^*_{n-1} + k^*_n \geq 2d + 1$ und $k^*_n \leq 2d$ sind laut Voraussetzung schon gegeben. Es muß nun noch gezeigt werden:

$$\sum_{j=2}^n k_j^* > (2d+2)(n-2) - 2, \quad k_2^* \geq 2 \quad \text{und} \quad k_2^* + k_3^* \geq 2d+4, \quad \text{falls } n \geq 5.$$

Es gilt $k_2^* = k_1 + k_2 - 2d - 4 \geq 2$, denn gemäß der Voraussetzung ist $k_1 + k_2 \geq 2d + 6$. Weiterhin ist:

$$\sum_{j=2}^n k_j^* = \sum_{j=1}^n k_j - 2d - 4 \stackrel{(\diamond)}{>} (2d+2)(n-1) - 2d - 4 = (2d+2)(n-2) - 2.$$

Ist $k \geq 2d+2$, so gilt $k_2^* + k_3^* = (k_1 + k_2) + k_3 - 2d - 4 \geq (2d+6) - 2 = 2d+4$ wegen $k_3 = k$. Für $k \leq 2d+1$ folgern wir aus $k_{n-1}^* = k_{n-1} \leq k$ und $k_n^* = k_n \leq 2d$:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &\geq (2d+2)(n-1) + 1 - (n-4)k - k_n \\ &\stackrel{(\diamond)}{\geq} (2d+2)(n-1) + 1 - (n-4)(2d+1) - 2d = 4d + n + 3, \end{aligned}$$

d.h. $k_2^* + k_3^* = k_1 + k_2 + k_3 - 2d - 4 \geq 2d + n - 1 \geq 2d + 4$, für $n \geq 5$.

Folglich sind alle Bedingungen erfüllt; daher existiert für den durch die Knoten v_2, \dots, v_n bestimmten Weg stets ein $L(d, 1)$ –List Labelling f . Dieses kann wegen $k'_1 \geq 3$ um den Knoten v_1 mit der Bedingung $f(v_1) \neq f(v_n)$ erweitert werden. Daher liefert der Algorithmus unter den gegebenen Bedingungen stets das gewünschte $L(d, 1)$ –List Labelling. \square

Bemerkt sei, daß die beiden Algorithmen auch im Fall $k_n > 2d$ angewendet werden können, jedoch genügt es für unsere Belange, $k_n \leq 2d$ zu betrachten.

4.2.2. Schranken für $\chi_\ell^{d,s}$ von Bäumen und Kreisen

Es gibt bereits eine geschlossene Formel für χ_ℓ^d für Bäume:

Satz 4.6 (Tesman, [91]) *Für einen Baum T_n der Ordnung n gilt*

$$\chi_\ell^d(T_n) = \left\lfloor \frac{2d(n-1)}{n} \right\rfloor + 1.$$

Damit ist $\chi_\ell^d(T_n) < 2d$ für $n < 2d$ und $\chi_\ell^d(T_n) = 2d = \chi_\ell^1 \cdot d$ für $n \geq 2d$. Stellt man sich die Frage, wieviele Label aus einer $2d$ –Listenzuweisung entfernt werden können, so daß trotzdem noch die Existenz eines zulässigen $L(d, 0)$ –List Labellings gewährleistet ist, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz 4.7 *Gegeben sei ein Baum T_n mit n Knoten. Ferner definieren wir $\sigma^d(T_n)$ als die kleinste natürliche Zahl, so daß T_n für jede Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T_n)\}$ mit den Eigenschaften*

$$\sum_{v \in V(T_n)} |L(v)| \geq \sigma^d(T_n) \quad \text{und} \quad \forall v \in V(T_n) : |L(v)| \leq 2d$$

ein zulässiges $L(d, 0)$ –List Labelling besitzt. Dann gilt $\sigma^d(T_n) = 2d(n-1) + 1$.

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß die Bedingung hinreichend für die Existenz eines $L(d, 0)$ –List Labellings ist. Dies geschieht mittels vollständiger Induktion über n :

IA: $n = 1$. Es gilt $\chi_\ell^d(T_1) = 1$. ✓

IV: Die Behauptung gelte für alle Bäume T_n mit $n \leq N - 1$.

IS: $n = N \geq 2$.

Gegeben sei eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T_N)\}$ mit $\sum_{v \in V(T_N)} |L(v)| \geq 2d(N - 1) + 1$ und $\forall v \in V(T_N) : |L(v)| \leq 2d$. Ferner sei u ein Blatt des Baumes T_N ; u existiert stets, da jeder Baum mit mehr als einem Knoten mindestens zwei Blätter besitzt. Sei w der Nachbar von u und $l := |L(u)|$. Aufgrund der Voraussetzung gelten $1 \leq l \leq 2d$ und $\sum_{v \in V(T_N - \{u\})} |L(v)| \geq 2d(N - 1) + 1 - l$. Weiterhin wissen wir aus Lemma 4.1 (ii), daß maximal $2d - l$ Label aus $L(w)$ die Liste $L(u)$ eliminieren können. Löschen wir diese Label aus $L(w)$, so gilt nun $\sum_{v \in V(T_N - \{u\})} |L(v)| \geq 2d(N - 1) + 1 - l - (2d - l) = 2d(N - 2) + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für $T_N - \{u\}$ ein zulässiges $L(d, 0)$ –List Labelling. Da außerdem das dem Knoten w zugewiesene Label die Liste $L(u)$ nicht eliminiert, kann dieses Labelling stets auf u erweitert werden. Folglich existiert auch ein $L(d, 0)$ –List Labelling für T_N . ✓

Die Notwendigkeit der Summenbedingung beweisen wir, indem wir eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T_n)\}$ für T_n mit $\sum_{v \in V(T_n)} |L(v)| = 2d(n - 1) = \sigma^d(T_n) - 1$ konstruieren, die kein $L(d, 0)$ –List Labelling zuläßt. Dabei bezeichne $E(v)$ die Liste der Label, welche die Liste $L(v)$ des Knotens v eliminieren.

Sei $V_0 := \emptyset$. Wir wählen einen beliebigen Knoten $x \in V(T_n)$ als Wurzel und setzen $V_1 = N_1 := \{x\}$. Anfangs habe x die Liste $L(x) := \emptyset$ und es sei $h := 2$.

1. Wähle einen Knoten $u \in V_{h-1}$ und setze $N_h := N(u) \cap (V(T_n) - V_{h-1})$.
2. Seien $w_1, \dots, w_{|N_h|}$ die Knoten aus N_h . Weise jedem Knoten w_i eine Liste $L(w_i)$ zu, so daß folgende Eigenschaften gelten:
 - $L(w_i) = \{l_i + 1, l_i + 2, \dots, l_i + 2d - s_i\}$ mit $l_i, s_i \in \mathbb{N}$,
 - $E(w_i) \cap L(u) = \emptyset$ für $i \in \{1, \dots, |N_h|\}$,
 - $E(w_i) \cap E(w_j) = \emptyset$ für $i, j \in \{1, \dots, |N_h|\}$ mit $i \neq j$.
3. Setze $L(u) := L(u) \cup \bigcup_{i=1}^{|N_h|} E(w_i)$.
4. Ist $V_h := V_{h-1} \cup N_h \neq V(T_n)$, so setze $h := h + 1$ und gehe zu 1. Sonst, STOPP.

Betrachten wir einen Knoten $v \in V(T_n)$. Dazu sei $h^* \in \mathbb{N}$ mit $v \in N_{h^*}$. Im h^* –ten Schritt des Algorithmus erhielt v eine Startliste $L(v)$. Galt $N(v) - V_{h^*-1} \neq \emptyset$, so wurden in einem späteren Schritt h , $h > h^*$, ggf. weitere Label zu $L(v)$ hinzugefügt; jedoch nur solche, welche die Liste eines Nachbarn von v eliminieren. Da v bei einem $L(d, 0)$ –List Labelling keines dieser Label haben kann, genügt es anzunehmen, daß v nur die Label der Startliste zur Verfügung hat. Da die Startliste der Wurzel x leer ist, kann diesem Knoten kein Label zugewiesen werden. Daher kann für die so konstruierte Listenzuweisung \mathcal{L} kein $L(d, 0)$ –List Labelling für T_n existieren.

Sei h_{\max} mit $V_{h_{\max}} = V(T_n)$. Wir zeigen als nächstes $\sum_{v \in V_h} |L(v)| = 2d \cdot (|V_h| - 1)$ für $1 \leq h \leq h_{\max}$ mittels vollständiger Induktion über h .

IA: $h = 1$. Es gilt $|V_1| = 1$ und $|L(x)| = 0 = 2d \cdot (|V_1| - 1)$. ✓

IV: Es gelte $\sum_{v \in V_h} |L(v)| = 2d \cdot (|V_h| - 1)$ für $h \leq H - 1$.

IS: $h = H \geq 2$. Im H –ten Schritt werden die Knoten aus N_H zu V_{H-1} hinzugefügt. Seien $w_1, \dots, w_{|N_H|}$ die Knoten aus N_H . Der Knoten w_i erhält dabei eine Liste $L(w_i) = \{l_i + 1, l_i + 2, \dots, l_i + 2d - s_i\}$ mit $l_i, s_i \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $|L(w_i)| = 2d - s_i$ und $E(w_i) = \{l_i + d, \dots, l_i + d - s_i + 1\}$, d.h. $|E(w_i)| = s_i$. Da die eliminierenden Listen $E(w_i)$ paarweise disjunkt sind, gilt außerdem $\bigcup_{i=1}^{|N_H|} E(w_i) = \sum_{i=1}^{|N_H|} s_i$, d.h. zur Liste $L(u)$ werden $\sum_{i=1}^{|N_H|} s_i$ Label hinzugefügt. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V_H} |L(v)| &= \sum_{v \in V_{H-1}} |L(v)| + \sum_{i=1}^{|N_H|} (2d - s_i) + \sum_{i=1}^{|N_H|} s_i \\ &= 2d \cdot (|V_{H-1}| - 1) + 2d \cdot |N_H| = 2d \cdot (|V_H| - 1). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Daher ist $\sum_{v \in V(T_n)} |L(v)| = 2d \cdot (|V_{h_{\max}}| - 1) = 2d(n - 1) = \sigma^d(T_n) - 1$. ■

Folgerung 4.2 *Aus diesem Satz läßt sich ebenfalls χ_ℓ^d für Bäume ableiten, als die kleinste natürliche Zahl, welche der Bedingung $\chi_\ell^d \cdot n \geq \sigma^d = 2d(n - 1) + 1$ genügt. Also*

$$\chi_\ell^d = \left\lceil \frac{2d(n - 1) + 1}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2d(n - 1)}{n} \right\rfloor + 1.$$

Bemerkung 4.2 *Der Satz liefert auch dann ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines $L(d, 0)$ –List Labellings, wenn Listen der Mächtigkeit $> 2d$ existieren. In dem Fall genügt es, die zu großen Listen durch Löschen von Labeln auf die Mächtigkeit $2d$ zu reduzieren, und erst dann die Summe der Mächtigkeiten zu berechnen.*

Bemerkung 4.3 Die Idee, ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines $L(d, s)$ –List Labellings nur durch Summation der Listengrößen zu gewinnen, läßt sich im allgemeinen weder auf Graphen mit Kreisen noch auf $L(d, s)$ –List Labellings mit $s > 0$ erweitern. In diesen Fällen ist die Verteilung der Label auf die einzelnen Knoten relevant.

Beim P_2 ist dies natürlich nicht der Fall: Für zwei adjazente Knoten u und v , deren Listen $L(u)$ bzw. $L(v)$ die Eigenschaften $|L(u)| + |L(v)| \geq \sigma^d(P_2) = 2d + 1$ sowie $|L(u)|, |L(v)| \leq 2d$ aufweisen, existiert stets ein $L(d, s)$ –List Labelling.

Beispiel 4.1 Als Beispiel zur letzten Bemerkung betrachten wir für den Kreis (v_1, v_2, v_3, v_1) der Länge 3 zwei Listenzuweisungen mit $\sum_{i=1}^3 |L(v_i)| = 6d$. Die Listenzuweisung $L(v_i) = \{1, 2, \dots, 2d\}$, $i = 1, 2, 3$ erfüllt diese Bedingung, aber es existiert dafür kein $L(d, 0)$ –List Labelling. Wählt man hingegen eine beliebige Listenzuweisung mit $|L(v_1)| = 2d - 1$, $|L(v_2)| = 2d$ und $|L(v_3)| = 2d + 1$, so existiert stets ein $L(d, 0)$ –List Labelling. Dies kann man sich wie folgt überlegen: Sei $c_{\min} := \min \bigcup_{i=1}^3 L(v_i)$ und $L'(v_i) := L(v_i) - \{c_{\min}, \dots, c_{\min} + d - 1\}$.

1. $c_{\min} \in L(v_1) \Rightarrow |L'(v_2)| + |L'(v_3)| \geq d + (d + 1) = 2d + 1$
2. $c_{\min} \in L(v_2) \wedge c_{\min} \notin L(v_1) \Rightarrow |L'(v_1)| + |L'(v_3)| \geq 2d + 1$
3. $c_{\min} \in L(v_3) \wedge c_{\min} \notin L(v_1), L(v_2) \Rightarrow |L'(v_1)| + |L'(v_2)| \geq 2d + 1$

Damit ist es unabhängig von der konkreten Listenzuweisung stets möglich, einem Knoten das Label c_{\min} zuzuweisen, so daß die verbleibenden beiden Knoten zusammen mindestens $2d + 1 = \sigma^d(P_2)$ Label in ihren Listen haben.

Betrachtet man $L(d, s)$ –List Labellings mit $s > 0$, so werden in gewissem Sinne durch die Abstandsbedingungen Kreise induziert, da je zwei Knoten im Abstand 2 zusammen mit ihrem gemeinsamen Nachbarn paarweise Abstandsbedingungen einzuhalten haben.

Für $\chi_\ell^{d,s}$, $s > 0$, von Bäumen gibt es bisher noch keine geschlossene Formel zur Berechnung. Aufgrund von $\chi_\ell^{d,s} \geq \chi_\ell^d$ und $\chi_\ell^{d,s} \geq \lambda_{d,1} + 1$ liefern die Sätze 3.17 und 4.6 untere Schranken. Als beste allgemeine obere Schranke gilt:

Satz 4.8 (Voigt, [66]) Für jeden Baum T und $d, s \geq 1$ gilt

$$\chi_\ell^{d,s}(T) \leq s\Delta + 2d - 1.$$

Für Sterne und Wege lassen sich diese Schranken wie folgt verbessern.

►► Sterne

Es gibt bereits einige Resultate für $\chi_\ell^{d,1}$ bzw. $\chi_\ell^{d,s}$ von Sternen, welche im nächsten Satz aufgelistet sind. Zu beachten ist, daß n nicht wie sonst für die Ordnung des Graphen steht, sondern für die Anzahl der Blätter.

Satz 4.9 Für den Stern $K_{1,n}$ gilt $\chi_\ell^{1,1}(K_{1,n}) = n + 1$, sowie für $d \geq 2$:

$$(i) \quad \chi_\ell^{d,s}(K_{1,n}) \leq 2d - 1 + s(n - 1), \quad (\text{Voigt, [66]})$$

$$(ii) \quad \chi_\ell^{d,s}(K_{1,n}) \geq \left\lfloor \frac{2dn}{n+1} \right\rfloor + 1, \quad (\text{Lemma 2.8 \& Satz 4.6})$$

$$(iii) \quad \chi_\ell^{d,s}(K_{1,n}) \geq d + s(n - 1) + 1, \quad (\text{Satz 2.27 \& Tabelle 3.2})$$

$$(iv) \quad \chi_\ell^{d,1}(K_{1,n}) \geq \left\lceil (2d - 1) \frac{a}{a+1} \right\rceil + n - 1, \text{ wobei } a := \left\lfloor \frac{n}{2d} \right\rfloor. \quad (\text{Tuza, [66]})$$

Es werden nun zwei weitere Schranken für $\chi_\ell^{d,1}$ bzw. $\chi_\ell^{d,s}$ präsentiert, beginnend mit einer unteren Schranke für $\chi_\ell^{d,1}$. Besonders für große n ist diese Schranke besser als die im vorherigen Satz genannten.

Satz 4.10 Ist $n \geq \left\lceil \frac{2a}{d-a-1} \right\rceil (d+a) + 1$ für ein $a \in \{0, 1, \dots, d-2\}$, so gilt $\chi_\ell^{d,1}(K_{1,n}) \geq d + a + n$.

Beweis. Seien w der Mittelknoten vom Grad n und v_1, \dots, v_n die Blätter des Sterns $K_{1,n}$. Ferner sei eine Listenzuweisung \mathcal{L} gegeben, die jedem Knoten eine Liste der Mächtigkeit $k := n - 1 + d + a$ zuordnet. Es sei

$$L_1 \cup I_1 \cup L_2 \cup I_2 \cup \dots \cup L_l \cup I_l \cup L_{l+1} \quad (4.1)$$

eine Zerlegung der Menge $\{c + 1 - (d - 1), \dots, c + k + (d - 1)\}$ in disjunkte Intervalle, so daß gilt:

1. $\max L_i + 1 = \min I_i$ und $\max I_i + 1 = \min L_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$,
2. $\sum_{i=1}^{l+1} |L_i| = 2(d - 1)$ und $|L_i| \leq d - 1 - a$, $i = 1, \dots, l + 1$,
3. $\sum_{i=1}^l |I_i| = k$ und $|I_i| \geq d + a$, $i = 1, \dots, l$.

Damit läßt sich die Listenzuweisung \mathcal{L} wie folgt definieren:

$$L(w) = \{c + 1, \dots, c + k\}, \quad L(v_i) = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_l, \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Offensichtlich ist $|L(w)| = |L(v_1)| = \dots = |L(v_n)| = k$. Aufgrund der speziellen Listenkonstruktion gilt außerdem für jedes $j \in L(w)$ die Bedingung $|\{j - (d - 1), \dots, j + (d - 1)\} \cap \bigcup_{i=1}^l I_i| \geq d + a$. Weist man demnach dem Knoten w ein beliebiges Label aus $L(w)$ zu, so verbleiben in $L(v_i)$, $i = 1, \dots, n$ maximal $k - (d + a) = n - 1$ Label, so daß nicht alle Blätter ein Label erhalten können.

Es verbleibt zu untersuchen, für welche n die Zerlegung (4.1) existiert. Die 2. Bedingung liefert $l + 1 \geq \left\lceil \frac{2(d-1)}{d-1-a} \right\rceil$, aus der 3. Bedingung erhalten wir $k \geq l(d+a)$ und damit $n \geq (l - 1)(d + a) + 1$. Folglich existiert die Zerlegung (4.1) für

$$n \geq \left(\left\lceil \frac{2(d-1)}{d-1-a} \right\rceil - 2 \right) (d + a) + 1 = \left\lceil \frac{2a}{d-1-a} \right\rceil (d + a) + 1. \quad \blacksquare$$

Folgerung 4.3 *Ist $n \geq 2d(2d - 6) + 9$, so gilt $\chi_\ell^{d,1}(K_{1,n}) = 2d - 2 + n$.*

Dies ist eine Verbesserung zu Satz 4.9 (iv), wo erst ab $n \geq 2d(2d - 1)$ die Beziehung $\chi_\ell^{d,1}(K_{1,n}) = 2d - 2 + n$ folgt.

Für kleine n (im Vergleich zu d) läßt sich auf folgende Weise eine Verbesserung der oberen Schranke erreichen.

Satz 4.11 $\chi_\ell^{d,s}(K_{1,n}) \leq \left\lfloor \frac{[2d+s(n-1)]n}{n+1} \right\rfloor + 1$ für $d \geq s$.

Beweis. Seien w der Mittelknoten vom Grad n und v_1, \dots, v_n die Blätter des Sterns $K_{1,n}$. Ferner sei eine Listenzuweisung \mathcal{L} gegeben, die jedem Knoten eine Liste der Mächtigkeit k zuordnet. Sei $h \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben und $i := 1$. Es werden den Knoten Label nach folgendem Verfahren zugewiesen:

1. Bestimme $c_{\min} := \min \bigcup_{v \in V} L(v)$.
2. Ist $w \in V$ und $c_w := \min L(w) \leq c_{\min} + h$, weise dem Knoten w das Label c_w zu; lösche die Label $\{c_{\min}, c_{\min} + 1, \dots, c_w + d - 1\}$ aus $L(v)$, $v \in V - \{w\}$. Setze $u_i := w$.
3. Ist $w \in V$ und $c_w := \min L(w) > c_{\min} + h$, wähle $u_i \in V - \{w\}$ mit $c_{\min} \in L(v)$ und weise u_i das Label c_{\min} zu. Lösche die Label $\{c_{\min}, c_{\min} + 1, \dots, c_{\min} + s - 1\}$ aus $L(v)$, $v \in V - \{w, u_i\}$ und die Label $\{c_{\min} + h + 1, \dots, c_{\min} + d - 1\}$ aus $L(w)$.
4. Ist $w \notin V$, wähle $u_i \in V$ mit $c_{\min} \in L(v)$ und weise u_i das Label c_{\min} zu. Lösche die Label $\{c_{\min}, c_{\min} + 1, \dots, c_{\min} + s - 1\}$ aus $L(v)$, $v \in V - \{u_i\}$.
5. Setze $V := V - \{u_i\}$ und $i := i + 1$.
6. Ist $V \neq \emptyset$, gehe zu 1. Sonst, STOPP.

Daß der Algorithmus die Abstandsbedingungen eines $L(d, s)$ -List Labellings einhält, ist offensichtlich. Daher muß nur noch die notwendige Listengröße k bestimmt werden, damit stets jedem Knoten ein Label auf diese Weise zugewiesen werden kann.

Angenommen, im $(j + 1)$ -ten Durchgang, $j \in \{0, \dots, n\}$, wurde w sein Label zugewiesen, d.h. $u_{j+1} = w$. Daher muß $k - j(d - 1 - h) > 0$ angesetzt werden, denn vor dem Labelling von w wurde j -mal der Schritt 3 durchlaufen und dabei wurden jeweils bis zu $d - 1 - h$ Label aus $L(w)$ gelöscht. Ist $j = n$, so muß also $k > n(d - 1 - h)$ gelten. Ist $j < n$, so muß im schlimmsten Fall die Bedingung $k - [s(n - 1) + h + d] > 0$ erfüllt sein, denn bevor der letzte Knoten u_{n+1} sein Label erhielt, wurden $(n - 1)$ -mal jeweils bis zu s Label aus seiner Liste $L(u_{n+1})$ gelöscht und einmal maximal $h + d$ Label wegen der Zuweisung von c_w

im Schritt 2. Da beide Situationen für j eintreffen können, muß k beide Bedingungen erfüllen. Es folgt daraus $k > n(d-1-h) \geq n[d-1-(k-s(n-1)-d-1)] = n[2d + s(n-1) - k]$ und damit:

$$k > \frac{[2d + s(n-1)]n}{n+1} \quad \text{bzw.} \quad k \geq \left\lfloor \frac{[2d + s(n-1)]n}{n+1} \right\rfloor + 1. \quad \blacksquare$$

Bemerkung 4.4 Die im Satz angegebene Schranke ist in dem Sinne bestmöglich, daß sie für einige Konstellationen der Größen d, s und n scharf ist. Dazu gehören $d = 1, 2$ und der Fall $d = s$, denn es gilt $\chi_\ell^{d,d}(K_{1,n}) = \chi_\ell^d(K_{n+1}) = dn+1$.

Folgerung 4.4 Zusammen mit Satz 4.9 (iii) läßt sich schließen:

1. $\chi_\ell^{d,d-1}(K_{1,n}) = (d-1)n + 2$ für alle $n \geq 1$,
2. $(d-2)n + 3 \leq \chi_\ell^{d,d-2}(K_{1,n}) \leq (d-2)n + 5 - \lceil \frac{4}{n+1} \rceil$ für alle $n \geq 1$.
D.h. es gilt $\chi_\ell^{d,d-2}(K_{1,2}) = \chi_\ell^{d,d-2}(P_3) = 2d-1$ und für $n \geq 3$ unterscheiden sich obere und untere Schranke nur um 1.
3. Allgemein beträgt die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke $\left\lfloor \frac{(d-s)(n-1)}{n+1} \right\rfloor$.
4. Es gilt stets $\chi_\ell^{d,s}(K_{1,n}) \leq 2d + s(n-2)$ für $d > s$.

►► Wege

Es läßt sich recht einfach zeigen, daß für jede Wegpotenz die listenchromatische Zahl gleich der chromatischen Zahl ist, d.h. $\chi_\ell^1(P_n^r) = \chi(P_n^r) = \min\{n, r+1\}$. Fiala und Škrekovski [39] zeigten außerdem die Beziehung $\chi_\ell^{2,1}(P_n) = \lambda_{2,1}(P_n) + 1$. Weitere Resultate sind die folgenden:

Satz 4.12 Für den Weg P_n gilt $\chi_\ell^{1,1}(P_n) = \min\{n, 3\}$, $\chi_\ell^{d,s}(P_1) = 1$, $\chi_\ell^{d,s}(P_2) = 1 + d$, sowie für $d \geq 2$, $n \geq 3$:

$$(i) \quad \chi_\ell^{d,s}(P_n) \geq \left\lfloor \frac{2d(n-1)}{n} \right\rfloor + 1, \quad (\text{Lemma 2.8 \& Satz 4.6})$$

$$(ii) \quad \chi_\ell^{d,s}(P_n) \geq 1 + d + s, \text{ für } n = 3, 4, \quad (\text{Satz 2.27 \& Tabelle 3.2})$$

$$\geq 1 + d + \min\{d, 2s\}, \text{ für } n \geq 5,$$

$$(iii) \quad \chi_\ell^{d,s}(P_n) \leq 2d + 2s - 1, \quad (\text{Voigt, [66]})$$

$$(iv) \quad \chi_\ell^{d,1}(P_n) \leq \left\lfloor \frac{2d(n-1)}{n} \right\rfloor + 3. \quad (\text{Voigt, [66]})$$

Für kleine Werte n läßt sich die Schranke (iv) des letzten Satzes verbessern:

Satz 4.13 $\chi_\ell^{d,1}(P_n) \leq \left\lfloor \frac{(2d+2)(n-1)-2}{n} \right\rfloor + 1$ für $3 \leq n < d+2$ und $d \geq 2$.

Beweis. Dieser Satz folgt aus Lemma 4.2. Dazu sei $k := \lfloor \frac{(2d+2)(n-1)-2}{n} \rfloor + 1$ und $k_i := k$ für $i = 1, \dots, n$. Offensichtlich erfüllt k die hinreichende Bedingung $\sum_{j=1}^n k_j = nk > (2d+2)(n-1)-2$. Weiterhin ist ersichtlich, daß für $d \geq 2$, $n \geq 3$ stets $k \geq d + 2$ gilt, denn:

$$\left\lfloor \frac{(2d+2)(n-1)-2}{n} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{4d+5}{3} \right\rfloor \geq d + \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = d + 2.$$

Damit ist auch die Bedingung $k_1 + k_2 = 2k \geq 2d + 4$ immer erfüllt, sowie natürlich $k_1 = k \geq 2$ und $k_{n-1} + k_n = 2k \geq 2d + 1$. Außerdem gilt $k = 2d + 3 - \lceil \frac{2(d+2)}{n} \rceil \leq 2d$, wegen $n < d + 2$.

Da sämtliche hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.2 erfüllt sind, existiert für jede k -Listenzuweisung ein $L(d, 1)$ -List Labelling. ■

Betrachten wir nun den Fall $d = s$. Aus Satz 4.12 (ii) und (iii) ergibt sich $1 + 2d \leq \chi_\ell^{d,d}(P_n) \leq 4d - 1$ für $n \geq 4$.

Vermutung 4.2 Für den Weg P_n und $d \geq 2$ gilt $\chi_\ell^{d,d}(P_n) \leq \left\lfloor \frac{3d(n-1)}{n} \right\rfloor + 1$.

Mit vielen Fallunterscheidungen lassen sich die folgenden Ergebnisse ermitteln:

- a) $\chi_\ell^{d,d}(P_4) = 1 + 2d = \lfloor \frac{9d}{4} \rfloor + 1$, für $d = 2, 3$,
- b) $\chi_\ell^{d,d}(P_4) = 2 + 2d = \lfloor \frac{9d}{4} \rfloor + 1$, für $d = 4, 5$,
- c) $\chi_\ell^{2,2}(P_n) = \left\lfloor \frac{6(n-1)}{n} \right\rfloor + 1$, für $n \leq 5$.

Für diese Spezialfälle gilt demzufolge die Vermutung. Weiterhin läßt sich feststellen:

Satz 4.14 Gegeben seien der Weg P_n , $n \geq 4$, und eine k -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(P_n)\}$. Ferner seien $c_{\min} := \min \bigcup_{v \in V(P_n)} L(v)$ und c_{\max} analog. Dann existiert für $d \geq 2$ stets ein $L(d, d)$ -List Labelling f , wenn $k = \lfloor 3d(1 - \frac{1}{n}) \rfloor + 1$ und $(\forall u \in V(P_n) : c_{\min} \in L(u)) \vee (\forall u \in V(P_n) : c_{\max} \in L(u))$.

Beweis. Sei (v_0, \dots, v_{n-1}) ein Weg mit n Knoten. O.B.d.A. gelte $c_{\min} \in L(v_i)$, $i = 0, \dots, n-1$. Wir setzen $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$. Löschen wir die dadurch verbotenen Label aus den Listen $L(v)$ der restlichen Knoten, neue Listen $L'(v)$ erhaltend, so gilt nun $|L'(v_i)| \geq k - d$ für $3 \nmid i$.

Ein $L(d, d)$ -List Labelling von P_n ist äquivalent zu einem $L(d, 0)$ -List Labelling von P_n^2 . Löschen wir aus P_n^2 alle Knoten v_{3j} , die bereits ein Label haben, so induzieren die restlichen Knoten einen Weg mit $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ Knoten. Daher muß nur noch gezeigt werden, daß $k - d \geq \chi_\ell^d(P_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor})$ gilt, d.h.:

$$k \geq d + \chi_\ell^d(P_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}) = d + \left\lfloor 2d \left(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \right) \right\rfloor + 1 = 3d + 1 - \left\lfloor \frac{2d}{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \right\rfloor.$$

Dies folgt aus $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor \leq \frac{2n}{3}$ und $k = 3d + 1 - \lfloor \frac{3d}{n} \rfloor$. ■

Satz 4.15 *Gegeben seien der Weg P_n , $n \geq 4$, und eine k –Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(P_n)\}$ mit der Eigenschaft, daß jede Liste $L(v)$ aus aufeinanderfolgenden Labeln (d.h. $L(v) = \{a_v + 1, a_v + 2, \dots, a_v + k\}$ für ein $a_v \in \mathbb{N}$) besteht. Dann existiert für $d \geq 2$ stets ein $L(d, d)$ –List Labelling f , wenn $k = \lfloor 3d(1 - \frac{1}{n}) \rfloor + 1$ gilt.*

Beweis. Dieser Satz ist eine Folgerung des Satzes 5.6 aus Kapitel 5. Dort werden k –Listenzuweisungen betrachtet, bei denen sämtliche Listen aus aufeinanderfolgenden Labeln bestehen. Der Satz 5.6 sagt aus, daß für jede solche k –Listenzuweisung mit $k = d\chi(G) - \lceil \frac{d\chi(G)}{n} \rceil + 1$ ein $L(d, 0)$ –List Labelling für den Graphen G existiert. Da ein $L(d, d)$ –List Labelling von P_n einem $L(d, 0)$ –List Labelling von P_n^2 entspricht und $\chi(P_n^2) = 3$ für $n \geq 3$ gilt, folgt die Behauptung. ■

►► Kreise

Für Kreise ist χ_ℓ^d bereits bekannt: Tesman [91] berechnete χ_ℓ^d für ungerade Kreise; Alon und Zaks [5] lieferten eine untere Schranke für χ_ℓ^d für gerade Kreise, deren Schärfe von Sitters [89] gezeigt wurde.

Satz 4.16 (Tesman, [91], Sitters, [89]) *Für einen Kreis C_n gilt*

$$\chi_\ell^d(C_n) = \begin{cases} 2d + 1 & , \text{für } n \text{ ungerade} \\ \lfloor 2d(1 - \frac{1}{2n-1}) \rfloor + 1 & , \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Von Prowse und Woodall [80] stammt der Beweis, daß die listenchromatische Zahl gleich der chromatischen Zahl für sämtliche Kreispotenzen ist, d.h. $\chi_\ell^1(C_n^r) = \chi(C_n^r)$. Daher kann $\chi_\ell^{1,1}(C_n)$ aus Lemma 3.4 gewonnen werden. Bekannt ist außerdem $\chi_\ell^{2,1}(C_n) = \lambda_{2,1}(C_n) + 1 = 5$; dies wurde von Fiala und Škrekovski [39] mit Hilfe von Satz 2.31 gezeigt. Weitere Resultate sind:

Satz 4.17 *Für den Kreis C_n gilt $\chi_\ell^{1,1}(C_n) = \lceil \frac{n}{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \rceil$, $\chi_\ell^{d,s}(C_3) = 2d + 1$, sowie für $d \geq 2$, $n \geq 4$:*

$$(i) \quad \chi_\ell^{d,s}(C_n) \geq 2d + 1, \text{ für } 2 \nmid n \quad (\text{Lemma 2.8 \& Satz 4.16}) \\ \geq \lfloor 2d(1 - \frac{1}{2n-1}) \rfloor + 1, \text{ für } 2 \mid n,$$

$$(ii) \quad \chi_\ell^{d,s}(C_n) \geq \lambda_{d,s}(C_n) + 1 \quad (\text{siehe Werte in Tabelle 3.2}), \quad (\text{Satz 2.27})$$

$$(iii) \quad d + 2s + 1 \leq \chi_\ell^{d,s}(C_4) \leq 2d + s + 1, \quad (\text{Tabelle 3.2 \& Satz 2.29}) \\ \max\{2d, 4s\} + 1 \leq \chi_\ell^{d,s}(C_5) \leq 2d + 2s + 1,$$

$$(iv) \quad \chi_\ell^{d,s}(C_n) \leq 2d + 2s, \text{ für } n \geq 6. \quad (\text{Satz 2.30})$$

Für $s = 1$ können die oberen Schranken (iii) und (iv) des letzten Satzes auf $2d + 1$ verbessert werden, wenn man Zusatzbedingungen an n und d oder an die Listenzuweisung stellt. Der nächste Satz ist ein Beispiel dafür und bietet gleichzeitig einen alternativen Beweis für $\chi_\ell^{d,1}(C_n) \leq 2d + 2$ bei $d \geq 3$.

Satz 4.18 *Gegeben seien der Kreis C_n , $n \geq 4$, und eine k -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(C_n)\}$. Ferner seien $c_{\min} := \min \bigcup_{v \in V(C_n)} L(v)$ und c_{\max} analog. Dann existiert für $d \geq 3$ stets ein $L(d, 1)$ -List Labelling f , wenn*

- (i) $k = 2d + 1$ und $(\forall u \in V(C_n) : c_{\min} \in L(u)) \vee (\forall u \in V(C_n) : c_{\max} \in L(u))$,
- (ii) $k = 2d + 2$ und $(\exists u \in V(C_n) : c_{\min} \notin L(u)) \wedge (\exists u \in V(C_n) : c_{\max} \notin L(u))$.

Beweis. Es seien die Knoten des Kreises im Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n-1} numeriert. Ferner seien sämtliche Indizes Modulo n zu verstehen.

Zu (i): Sei $k := 2d + 1$ und o.B.d.A. gelte $\forall u \in V(C_n) : c_{\min} \in L(u)$.

Fall 1.1. $n \equiv 0 \pmod{3} \wedge \exists u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \notin L(u)$.

O.B.d.A. sei $c_{\min} + 1 \notin L(v_{n-1})$. Wir setzen $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, \dots, \frac{n}{3} - 1$. Für die Listen $L'(v_i) := L(v_i) - \{c_{\min}, \dots, c_{\min} + d - 1\}$ aller verbleibenden Knoten gilt $|L'(v_i)| \geq d + 1$, sowie $|L'(v_{n-1})| \geq d + 2$.

Für $j = 0, \dots, \frac{n}{3} - 1$ weisen wir den Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} Label $f(v_{3j+1})$ und $f(v_{3j+2})$ mit Differenz $\geq d$ zu. Ist $0 \leq j \leq \dots, \frac{n}{3} - 2$, so wird ggf. $f(v_{3j+2})$ aus $L'(v_{3(j+1)+1})$ gelöscht, sowie bei $j = 0$ das Label $f(v_1)$ aus $L'(v_{n-1})$. Da für alle j die beiden Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} einen P_2 induzieren und $|L'(v_{3j+1})| + |L'(v_{3j+2})| \geq d + (d + 1) = \sigma^d(P_2)$ gilt, erhalten wir auf diese Weise stets ein zulässiges $L(d, 1)$ -List Labelling f .

Fall 1.2. $n \equiv 0 \pmod{3} \wedge \forall u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \in L(u)$.

Unterfall 1.2.a. $n \geq 9$.

Wir setzen $f(v_0) = f(v_{n-4}) = c_{\min} + 1$, $f(v_{n-2}) = c_{\min}$, sowie $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 1, \dots, \frac{n}{3} - 2$. Daraus folgt $|L'(v_i)| \geq d$ für $i \in \{1, n - 5, n - 3, n - 1\}$ und $|L'(v)| \geq d + 1$ für alle verbleibenden Knoten $v \in V(C_n)$ ohne Label. Analog zum vorherigen Fall weisen wir für $j = 0, \dots, \frac{n}{3} - 3$ den Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} Label $f(v_{3j+1})$ und $f(v_{3j+2})$ mit Differenz $\geq d$ zu und löschen daraus resultierende verbotene Label aus den anderen Listen. Aufgrund von $|L'(v_{3j+1})| + |L'(v_{3j+2})| \geq d + (d + 1) = \sigma^d(P_2)$ ist diese Strategie stets anwendbar. Anschließend weisen wir den Knoten $v_{n-5}, v_{n-3}, v_{n-1}$ in dieser Reihenfolge jeweils ein zulässiges Label zu. Wegen $|L'(v_{n-5})|, |L'(v_{n-3})| \geq d - 1$ und $|L'(v_{n-1})| \geq d - 2 \geq 1$ ist dies immer möglich. Somit erhalten wir ein zulässiges $L(d, 1)$ -List Labelling f .

Unterfall 1.2.b. $n = 6$.

Angenommen, $\exists v \in V(C_6) : c_{\min} + 2 \in L(v)$.

O.B.d.A. gelte $c_{\min} + 2 \in L(v_4)$. Wir setzen $f(v_0) = c_{\min}$, $f(v_2) = c_{\min} + 1$ und $f(v_4) = c_{\min} + 2$. Daraus ergeben sich $|L'(v_1)| \geq d$ und $|L'(v_3)|, |L'(v_5)| \geq d - 1$.

Folglich ist es möglich, den Knoten v_3, v_5, v_1 in dieser Reihenfolge jeweils das kleinste mögliche Label aus ihrer verbliebenen Liste zuzuweisen.

Angenommen, $\forall v \in V(C_6) : c_{\min} + 2 \notin L(v)$.

Wir setzen $f(v_0) = f(v_3) = c_{\min}$. Damit gilt nun $|L'(v_i)| \geq d + 2$ für $i \in \{1, 2, 4, 5\}$. Wir weisen den Knoten v_1 und v_2 zulässig Label zu. Es ergibt sich $|L'(v_4)| + |L'(v_5)| \geq 2(d + 1) > \sigma^d(P_2)$, so daß auch diesen beiden Knoten stets Label zugewiesen werden können.

Fall 2.1. $n \equiv 1 \pmod{3} \wedge \exists u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \in L(u)$.

O.B.d.A. sei $c_{\min} + 1 \in L(v_{n-2})$. Wir setzen $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 1$ und $f(v_{n-2}) = c_{\min} + 1$. Für die verbleibenden Listen gilt nun $|L'(v_{3j+1})|, |L'(v_{3j+2})| \geq d + 1$ für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 2$ und $|L'(v_{n-3})|, |L'(v_{n-1})| \geq d$. Für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 2$ weisen wir wieder den Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} Label $f(v_{3j+1})$ und $f(v_{3j+2})$ mit Differenz $\geq d$ zu und löschen ggf. die verbotenen Label aus den Listen der verbleibenden Knoten. Danach weisen wir den Knoten v_{n-3} und v_{n-1} zulässig Label zu. Analog zum Unterfall 1.2.a. können wir hier die Zulässigkeit dieser Labelling-Strategie beweisen. Wir erhalten ein $L(d, 1)$ –List Labelling f .

Fall 2.2. $n \equiv 1 \pmod{3} \wedge \forall u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \notin L(u)$.

Wir setzen $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 1$. Somit ist nun $|L'(v_{3j+1})|, |L'(v_{3j+2})| \geq d + 2$ für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 2$, $|L'(v_{n-3})|, |L'(v_{n-1})| \geq d + 2$ und $|L'(v_{n-2})| \geq 2d$. Mit Hilfe des Algorithmus 4.1 bestimmen wir für den Weg $(v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$ ein $L(d, 1)$ –List Labelling f . Dies ist stets möglich, denn es werden die dafür nötigen Voraussetzungen (siehe Lemma 4.2) erfüllt:

$$\sum_{i=n-3}^{n-1} |L'(v_i)| \geq 4d + 4 > 2(2d + 2) - 2, \quad |L'(v_{n-3})| \geq d + 2 \geq 2$$

$$\text{und } |L'(v_{n-3})| + |L'(v_{n-2})|, |L'(v_{n-2})| + |L'(v_{n-1})| \geq 3d + 2 \geq 2d + 4.$$

Für $j = 0, \dots, \frac{n-1}{3} - 2$ weisen wir den Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} Label $f(v_{3j+1})$ und $f(v_{3j+2})$ mit Differenz $\geq d$ zu. Ist $0 \leq j \leq \frac{n-1}{3} - 3$, so wird wenn nötig $f(v_{3j+2})$ aus $L'(v_{3(j+1)+1})$ gelöscht. Diese Labelling-Strategie ist stets anwendbar, da jeweils die beiden Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} einen P_2 induzieren und $|L'(v_{3j+1})| + |L'(v_{3j+2})| \geq 2(1 + d) > \sigma^d(P_2)$ gilt.

Fall 3.1. $n \equiv 2 \pmod{3} \wedge \exists u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \in L(u)$.

O.B.d.A. sei $c_{\min} + 1 \in L(v_0)$. Wir setzen $f(v_0) = c_{\min} + 1$, sowie $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 1, \dots, \frac{n-2}{3}$. Es ergeben sich $|L'(v_1)|, |L'(v_{n-1})| \geq d$ und $|L'(v_i)| \geq d + 1$ für $i \notin \{1, n - 1\}$. Analog zum Unterfall 1.2.a. weisen wir für $j = 0, \dots, \frac{n-2}{3} - 1$ den Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} Label $f(v_{3j+1})$ und $f(v_{3j+2})$ mit Differenz $\geq d$ zu, und danach erhält der Knoten v_{n-1} ein Label. Dies ist wegen $|L'(v_{n-1})| \geq d - 2 \geq 1$ immer möglich. Wir erhalten folglich ein zulässiges $L(d, 1)$ –List Labelling f .

Fall 3.2. $n \equiv 2 \pmod{3} \wedge \forall u \in V(C_n) : c_{\min} + 1 \notin L(u)$.

Unterfall 3.2.a. $n \geq 11$.

Wir setzen $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, \dots, \frac{n-2}{3} - 2$ und $f(v_{n-4}) = c_{\min}$. Somit ist

nun $|L'(v_{n-6})|, |L'(v_{n-2})| \geq 2d$ und für alle anderen Knoten $v \in V(C_n)$ ohne Label gilt $|L'(v)| \geq d + 2$. Man bestimmt nun Labellings für die beiden induzierten Wege der Länge 3, zuerst denjenigen mit den Knoten $v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}$, danach denjenigen induziert durch die Knoten $v_{n-7}, v_{n-6}, v_{n-5}$. Analog zum Fall 2.2. kann man mit Hilfe von Lemma 4.2 zeigen, daß dies stets möglich ist. Anschließend weisen wir ebenfalls wie im Fall 2.2. für $j = 0, \dots, \frac{n-2}{3} - 3$ den durch die Knoten v_{3j+1} und v_{3j+2} induzierten Wegen der Länge 2 zulässig Label zu. Dies ist möglich, da wieder $|L'(v_{3j+1})| + |L'(v_{3j+2})| \geq 2(1+d) > \sigma^d(P_2)$ gilt.

Unterfall 3.2.b. $n = 8$.

Angenommen, $\exists v \in V(C_8) : c_{\min} + 2 \in L(v)$.

O.B.d.A. gelte $c_{\min} + 2 \in L(v_6)$. Wir setzen $f(v_6) = c_{\min} + 2$ und $f(v_{3j}) = c_{\min}$ für $j = 0, 1$. Damit erhalten wir $|L'(v_5)|, |L'(v_7)| \geq d$ und $|L'(v_i)| \geq d + 2$ für $i \in \{1, 2, 4\}$. Wir weisen nun den beiden Knoten v_1, v_2 Label mit Differenz $\geq d$ zu, danach den Knoten v_4, v_5 . Zuletzt weisen wir dem Knoten v_7 ein zulässiges Label zu. Die Zulässigkeit dieser Labelling-Strategie läßt sich analog zu den vorherigen Fällen zeigen.

Angenommen, $\forall v \in V(C_8) : c_{\min} + 2 \notin L(v)$.

Wir setzen $f(v_0) = f(v_4) = c_{\min}$. Damit gelten nun $|L'(v_i)| \geq d + 3$ für $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ und $|L'(v_i)| \geq 2d$ für $i \in \{2, 6\}$. Analog zum Unterfall 3.2.a. weisen wir mit Hilfe von Algorithmus 4.1 zuerst den Knoten des Weges (v_5, v_6, v_7) , dann den Knoten des Weges (v_1, v_2, v_3) zulässig Label zu. Mit Lemma 4.2 kann gezeigt werden, daß wir auf diese Weise immer ein zulässiges Labelling erhalten.

Unterfall 3.2.c. $n = 5$.

Angenommen, $\exists j \in \{2, \dots, d-1\} \exists u \in V(C_n) : c_{\min} + j \in L(u)$.

Sei j^* das kleinste j mit dieser Eigenschaft. D.h. es gilt $\forall i \in \{1, \dots, j^* - 1\} \forall u \in V(C_n) : c_{\min} + i \notin L(u)$. O.B.d.A. sei $c_{\min} + j^* \in L(v_2)$. Wir setzen $f(v_0) = c_{\min}$ und $f(v_2) = c_{\min} + j^*$. Dann gilt für die Listen nach Löschen der verbotenen Label $|L'(v_1)|, |L'(v_3)| \geq d$ und $|L'(v_4)| \geq d + j^* \geq d + 1$. Wegen $|L'(v_3)| + |L'(v_4)| \geq 2d + 1 = \sigma^d(P_2)$ können wir den Knoten v_3 und v_4 zulässig Label geben. Damit sind nun für v_1 noch maximal zwei weitere Label verboten und es gilt jetzt $|L'(v_1)| \geq d - 2 \geq 1$. Daher kann auch v_1 stets ein Label erhalten.

Angenommen, $\forall j \in \{1, \dots, d-1\} \forall u \in V(C_n) : c_{\min} + j \notin L(u)$.

Wir setzen $f(v_0) = c_{\min}$. Da deswegen nur das Label c_{\min} für die anderen Knoten verboten wird, gilt nun $|L'(v_i)| = 2d$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Ist $d > 3$, so wissen wir aus Lemma 4.3, daß für den durch die Knoten v_1, \dots, v_4 induzierten Weg ein $L(d, 1)$ –List Labelling f mit $f(v_1) \neq f(v_4)$ existiert, denn

$$\sum_{j=1}^4 |L'(v_j)| = 8d > 3(2d + 2), \quad |L'(v_1)| = 2d \geq 3$$

$$\text{und } |L'(v_1)| + |L'(v_2)| = |L'(v_3)| + |L'(v_4)| = 4d \geq 2d + 6.$$

Betrachten wir nun $d = 3$. Es sei $c_1 := \min \bigcup_{i=1}^4 L'(v_i)$.

Es gelte $c_1 \in L(v_2)$ oder $c_1 \in L(v_3)$. O.B.d.A. sei $c_1 \in L(v_2)$. Wir setzen $f(v_2) = c_1$. Löschen wir die verbotenen Label aus den verbleibenden Listen, so gilt nun $|L'(v_1)|, |L'(v_3)| \geq 3$ und $|L'(v_4)| \geq 5$. Wegen $|L'(v_3)| + |L'(v_4)| \geq 8 > \sigma^3(P_2)$, können den Knoten v_3 und v_4 zulässig Label gegeben werden. Dadurch gilt jetzt $|L'(v_1)| \geq 1$, d.h. auch der Knoten v_1 kann ein Label erhalten.

Es gelte $c_1 \notin L(v_2), L(v_3)$. O.B.d.A. sei $c_1 \in L(v_4)$. Wir setzen $f(v_4) = c_1$. Dann gilt $|L'(v_1)| \geq 5, |L'(v_2)| \geq 6$ und $|L'(v_3)| \geq 4$. Für den durch die Knoten v_1, v_2, v_3 induzierten Weg existiert ein $L(3, 1)$ -List Labelling, denn er erfüllt die Bedingungen aus Lemma 4.2:

$$\sum_{j=1}^3 |L'(v_j)| \geq 15 > 8 \cdot 2 - 2, \quad |L'(v_1)| \geq 5 > 2, \quad |L'(v_2)| + |L'(v_3)| \geq 10 > 7.$$

Zu (ii): Sei $k := 2d + 2$ und o.B.d.A. $c_{\min} \in L(v_0) \wedge c_{\min} \notin L(v_{n-1})$. Wir weisen dem Knoten v_0 das Label c_{\min} zu. Löschen wir die damit verbundenen verbotenen Label aus den Listen der restlichen Knoten, so ergibt sich für die verbleibenden Listen $|L'(v_1)| \geq d+2, |L'(v_{n-1})| \geq d+3, |L'(v_2)|, |L'(v_{n-2})| \geq 2d+1$ und $|L'(v_i)| = 2d+2$ für $i = 3, \dots, n-3$. Sei $\mathcal{L}' := \{L'(v_i) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ und $k_i := |L'(v_i)|$ für $i = 1, \dots, n-1$. Es genügt den Fall zu betrachten, daß die Größen k_i minimal sind, d.h. $k_1 = d+2, k_{n-1} = d+3, k_2 = k_{n-2} = 2d+1$ und $k_i = 2d+2$ für $i = 3, \dots, n-3$.

Offensichtlich induzieren die Knoten v_1, \dots, v_{n-1} einen Weg mit kleinen Randlisten, wobei \mathcal{L}' die zugehörige Listenzuweisung ist. Laut Lemma 4.3 gibt es für diesen Weg ein $L(d, 1)$ -List Labelling f mit $f(v_1) \neq f(v_{n-1})$, denn es gelten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} k_i &= (d+2) + (d+3) + 2(2d+1) + (n-5)(2d+2) \\ &= (2d+2)(n-2) + 1 > (2d+2)(n-2), \quad \text{für } n \geq 5, \\ \sum_{i=1}^3 k_i &= (d+2) + (d+3) + 2d+1 > 2(2d+2), \quad \text{für } n = 4, \end{aligned}$$

$k_1 \geq d+2 \geq 3$ und $k_{n-2} + k_{n-1} \geq 2d+1$. Ferner sind $k_1 + k_2 \geq (d+2) + (2d+1) = 3d+3 \geq 2d+6$ und $k_{n-1} = d+3 \leq 2d$, da $d \geq 3$. ■

Folgerung 4.5 *Für ungerade Kreise gilt $2d+1 \leq \chi_\ell^{d,1}(C_{2l+1}) \leq 2d+2$. Ferner ist $2d \leq \chi_\ell^{d,1}(C_{2l}) \leq 2d+2$ für gerade Kreise mit einer Länge größer als d .*

Satz 4.19 *Sei $d \geq 2$ und $p := 2d-1$ eine Primzahl. Dann gilt $\chi_\ell^{d,1}(C_n) \leq 2d+1$, wenn $n \equiv 0 \pmod{4}$.*

Beweis. Zum Beweis ziehen wir Satz 2.31 hinzu. Dazu konstruieren wir eine Orientierung D für $C_n^{(d,1)}$ mit $EE(D) \neq EO(D)$ und $\max d_D^-(v) = 2d$.

Sei $n \geq 8$. Es seien die Knoten des Kreises im Uhrzeigersinn mit v_0, \dots, v_{n-1} bezeichnet. Für $C_n^{(d,1)}$ konstruieren wir eine Orientierung D derart, daß alle Kanten im Uhrzeigersinn gerichtet werden, d.h. es gibt p parallele Bögen (v_i, v_{i+1}) und einen Bogen (v_i, v_{i+2}) für $i = 0, \dots, n-1$, wobei die Indizes hier und auch im folgenden stets Modulo n gerechnet werden. Bögen der Art (v_i, v_{i+1}) wollen wir als *kurz*, Bögen der Art (v_i, v_{i+2}) als *lang* bezeichnen. Es gilt $d_D^-(v) = 2d$ für alle $v \in V(D)$. Nun muß gezeigt werden, daß D die Bedingung $EE(D) \neq EO(D)$ erfüllt, dann folgt der Satz direkt aus dem Satz 2.31. Dazu zählen wir die Eulerschen Unterdigraphen $H \subseteq D$, wobei mit k_H die Anzahl der kurzen Bögen in H bezeichnet werden soll:

Fall 1. $k_H = 0 \vee k_H = pn$.

Offenbar ist H gerade, da $|E(H)|$ nur die Werte $0, \frac{n}{2}, n$ für $k_H = 0$ und $pn, pn + \frac{n}{2}, (p+1)n$ für $k_H = pn$ annehmen kann. Es ergeben sich 8 Eulersche Unterdigraphen, da jeweils zwei Zyklen der Länge $\frac{n}{2}$ aus den langen Bögen gebildet werden können, ansonsten aber die Unterdigraphen eindeutig bestimmt sind.

Fall 2. $0 < k_H < pn$.

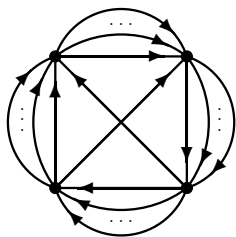
Es existiert mindestens ein $i \in \{0, \dots, n-1\}$, so daß in H b parallele Bögen (v_i, v_{i+1}) vorhanden sind, wobei $0 < b < p$.

Angenommen, dies wäre falsch. Dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$, daß genau 0 oder p Bögen (v_i, v_{i+1}) in H existieren. Wegen $0 < k_H < pn$ gibt es in H ein $j \in \{0, \dots, n-1\}$ mit 0 Bögen (v_j, v_{j+1}) und p Bögen (v_{j+1}, v_{j+2}) . Da demnach $d_H^-(v_{j+1}) \geq p$ gelten muß, jedoch nur ein langer Bogen (v_{j-1}, v_{j+1}) vorhanden ist, muß es wenigstens $p-1 \geq 2$ kurze Bögen (v_j, v_{j+1}) geben. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von j .

Die Anzahl der Möglichkeiten, die b Bögen (v_i, v_{i+1}) aus den p vorhandenen Bögen in D auszuwählen, beträgt $\binom{p}{b}$. Wie schon im Beweis von Satz 4.4 festgestellt, kürzt sich p nicht aus dem Term weg. Zählt man also die Anzahl der (un)geraden Eulerschen Unterdigraphen, so ergeben sich stets Vielfache von p .

Daraus resultieren $EO(D) \equiv 0 \pmod{p}$ und $EE(D) \equiv 8 \pmod{p}$. Wegen $8 = 2^3$ und $p \geq 3$ ist p niemals Teiler von 8, weswegen $EE(D) \not\equiv 0 \pmod{p}$ geschlußfolgert werden kann. Demzufolge können $EE(D)$ und $EO(D)$ nicht gleich sein.

Sei $n = 4$. Die nachfolgende Grafik zeigt eine Orientierung für $C_4^{(d,1)}$.



Es gibt nur zwei Eulersche Unterdigraphen H mit $k_H = 0$ bzw. $k_H = 4p$; diese sind gerade. Die Anzahlen der geraden bzw. ungeraden Unterdigraphen H mit $0 < k_H < 4p$ sind analog zum Fall 2 wieder Vielfache von p . Damit ist auch hier $EE(D) \not\equiv EO(D) \pmod{p}$ und daher $EE(D) \neq EO(D)$. ■

Beobachtung 4.1 Für den Kreis C_n gilt $\chi_\ell^{d,d}(C_n) = d(n-1) + 1$ wenn $n = 3, 4, 5$ ist; andernfalls

$$\chi_\ell^{d,d}(C_n) > \begin{cases} 3d & , \text{für } n \not\equiv 0 \pmod{3} \\ 2d & , \text{für } n \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} .$$

Beweis. Es gilt $\chi_\ell^{d,d}(C_n) = \chi_\ell^d(C_n^2) = \chi_\ell^d(K_n) = d(n-1) + 1$ für $n = 3, 4, 5$. Da der Satz 4.1 auf jede Potenz eines Graphen G angewandt werden kann, erhält man stets $\chi_\ell^{d,d}(G) > d(\chi_\ell^{1,1}(G) - 1)$. Für einen Kreis C_n , $n \geq 6$, gilt somit $\chi_\ell^{d,d}(C_n) > d(\chi_\ell^{1,1}(C_n) - 1) = d(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)$, d.h. $\chi_\ell^{d,d}(C_n) > 3d$ falls $3 \nmid n$ und $\chi_\ell^{d,d}(C_n) > 2d$ falls $3 \mid n$. \square

Folgerung 4.6 Zusammen mit Satz 4.17 (iv) ergeben sich für $n \geq 6$ die Schranken $1 + 3d \leq \chi_\ell^{d,d}(C_n) \leq 4d$, für $3 \nmid n$, und $1 + 2d \leq \chi_\ell^{d,d}(C_n) \leq 4d$, für $3 \mid n$.

4.3. Abschätzung von χ_ℓ^d und $\chi_\ell^{d,1}$ für Kakteen

Ein zusammenhängender, endlicher Graph ist ein *Kaktus*, genau dann, wenn jede Kante in höchstens einem Kreis enthalten ist. Es ist bekannt (vgl. [15]), daß ein Kaktus Baumweite ≤ 2 besitzt und daher ein partieller 2-Baum ist.

▷▷ **Vorbetrachtungen:** Besitzt der Kaktus einen Kreis C , der durch eine Artikulation (trennender Knoten) mit dem Restgraphen verbunden ist, so nennen wir C einen *Endkreis*. Endkreise der Länge l sollen der Kürze halber mit EC_l bezeichnet werden.

Lemma 4.4 Ein Kaktus der Ordnung mindestens 3, welcher keine Blätter (Endknoten) besitzt, enthält einen Endkreis.

Beweis. Sei G , $n(G) \geq 3$, ein Kaktus ohne Blätter, d.h. $\delta(G) \geq 2$. Ist G selbst ein Kreis, so ist das Lemma erfüllt. Angenommen, G besitze nun mindestens zwei Kreise, und keiner seiner Kreise ist ein Endkreis. Dann ist jeder Kreis C^k durch eine trennende Knotenmenge $U^k = \{u_1^k, \dots, u_{l_k}^k\}$, $l_k \geq 2$, mit dem Restgraphen verbunden. Wir wählen nun einen beliebigen Kreis aus und starten in ihm eine Tour T durch den Graphen. Diese Tour soll die Eigenschaft haben, daß wann immer wir einen Kreis C^k durch einen Knoten u_a^k betreten, wir ihn durch einen anderen Knoten u_e^k , $a \neq e$, wieder verlassen.

Angenommen, $T = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l)$ enthält einen geschlossenen Kantenzug. Sei $Z = (v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j = v_i)$ ein solcher Kantenzug minimaler Länge. Aufgrund der Minimalität müssen die Knoten v_i, \dots, v_{j-1} paarweise verschieden sein, d.h. Z ist ein Kreis. Das würde bedeuten, daß wir in T den Kreis Z durch den Knoten v_i betreten und auch verlassen haben. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Tour. Damit ist T sogar ein Weg in G .

Da T ein Weg ist, werden wir in der Tour niemals einen Kreis doppelt betreten. Da ferner $l_k \geq 2$ gilt, ist es stets möglich, einen Kreis C^k wieder zu verlassen, so daß diese Tour unendlich fortgeführt werden kann. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Endlichkeit des Kaktus. Folglich muß die Tour in einem Endkreis zum Stillstand kommen. \square

Für Kakteen möchten wir eine spezielle Graphenoperation definieren und zwar die *Kontraktion eines Endkreises*. Dabei wird ein Endkreis mit der Artikulation x zu einem Superknoten s zusammengezogen, und s erhält die Liste $L(s) := L(x)$. Ferner soll als nächstes das grobe Vorgehen beschrieben werden, wie man ein Labelling für einen Kaktus mit mindestens einem Kreis konstruieren kann. Dessen Nützlichkeit wird sich im weiteren Verlauf der Untersuchung von Kakteen zeigen.

Algorithmus 4.3 (Reduktion-Labelling-Methode für Kakteen)

Eingabe: Ein Kaktus K , der mindestens einen Kreis enthält sowie eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(K)\}$

Ausgabe: Ein Labelling f für den Kaktus

Schritt 1: Setze zunächst $K =: G_2^{[0]}$. Im i -ten Reduktionsschritt, $i \geq 1$, lösche erstens sämtliche Blätter aus dem Graphen $G_2^{[i-1]}$ und erhalte so den Graphen $G_1^{[i]}$. Zweitens kontrahiere jeden Endkreis in $G_1^{[i]}$ zu einem Superknoten und erhalte $G_2^{[i]}$. Die Reduktion bricht ab, sobald $G_2^{[i]}$ für ein $i =: i_{max}$ kreisfrei ist. (Während der gesamten Reduktion ist es wichtig, die Reihenfolge der Knotenlöschungen bzw. Endkreiscontraktionen zu speichern, um die Reduktion später in umgekehrter Reihenfolge wieder rückgängig machen zu können.)

Schritt 2: Bestimme ein zulässiges List Labelling für den entstandenen Baum $G_2^{[i_{max}]}$. In umgekehrter Reihenfolge entfalte die Endkreise und füge gelöschte Blätter wieder ein, und erweitere im i -ten Labellingschritt, $1 \leq i \leq i_{max}$, das Labelling des Graphen $G_2^{[i_{max}-i+1]}$ zu einem zulässigen Labelling von $G_1^{[i_{max}-i+1]}$ und dann zu einem von $G_2^{[i_{max}-i]}$. Dies führt zu einem List Labelling f des ursprünglichen Graphen K .

Sei G ein Graph mit Tailenweite 3. Der Abstand $dist(x, C)$ eines Knotens $x \in V(G)$ von einem Kreis $C \subseteq G$ beträgt $\min_{v \in V(C)} dist(x, v)$. Ferner sei die Exzentrizität $e(C)$ eines Kreises C definiert als $\max_{x \in V(G)} dist(x, C)$. Weiterhin wollen wir einen Kreis der Länge 3 als *zentrales Dreieck* $Z := Z(G)$ von G bezeichnen, wenn $e(Z)$ minimal ist.

Mit Hilfe dieser Begriffe werden nun spezielle Kakteen charakterisiert, welche später in Hinblick auf $\lambda_{d,1}$ untersucht werden sollen.

Definition 4.4 Der Kaktus $K(\Delta, e)$ sei derjenige Kaktus mit Maximalgrad Δ , so daß gilt:

1. es existiert ein zentrales Dreieck Z mit $e(Z) = e$,
2. ist $\text{dist}(x, C) < e$, so gilt $\text{deg}(x) = \Delta$,
3. die Anzahl der Kreise ist maximal.

Man kann sich nun Eigenschaften des Kaktus $K(\Delta, e)$ überlegen:

Da bei einem Kaktus jede Kante in höchstens einem Kreis enthalten sein darf, kann ein Knoten x in maximal $\lfloor \frac{d(x)}{2} \rfloor$ Kreisen liegen. Möchte man die Anzahl der Kreise maximieren, ist offensichtlich, daß x zu genau $\lfloor \frac{d(x)}{2} \rfloor$ Kreisen gehört und alle Kreise die Länge 3 haben müssen. Als Beispiele solcher Kakteen seien die beiden folgenden aufgeführt:

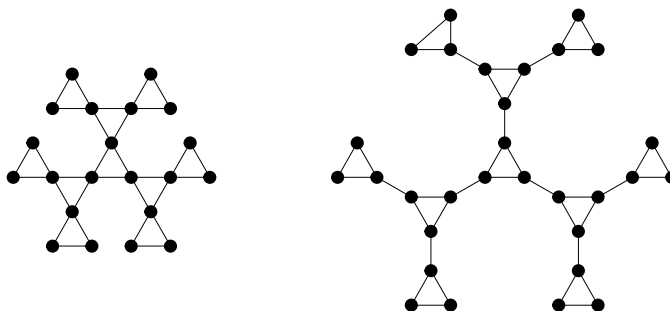


Abbildung 4.1.: Kakteen $K(4, 2)$ und $K(3, 4)$

▷▷ **Abschätzung von χ_ℓ^d :** Da χ_ℓ^d für Bäume bereits bekannt ist, wollen wir uns im folgenden auf Kakteen mit mindestens einem Kreis beschränken.

Satz 4.20 Sei K ein Kaktus mit genau einem Kreis. g sei die Länge dieses Kreises. Dann gilt $\chi_\ell^d(K) = 2d + 1$ für g ungerade und für g gerade ergibt sich $2d + 1 - \min\{\lceil \frac{2d}{g} \rceil, \lceil \frac{2d}{2g-1} \rceil\} \leq \chi_\ell^d(K) \leq 2d$.

Beweis. Sei K ein Kaktus, der genau einen Kreis $C = (v_1, v_2, \dots, v_g, v_1)$ enthält. Als erstes weisen wir allen Knoten aus C auf optimale Weise ihre Label zu. Anschließend löschen wir sämtliche Kreiskanten aus C und betrachten für jedes v_i , $i = 1, \dots, g$, den Baum T_i mit der Wurzel v_i . Die Knoten $w_1^i = v_i, w_2^i, \dots, w_{|V(T_i)|}^i$ dieses Wurzelbaumes seien so geordnet, daß $\text{dist}(v_i, w_{j-1}^i) \leq \text{dist}(v_i, w_j^i)$ für $j = 2, \dots, |V(T_i)|$ erfüllt ist. In dieser Reihenfolge, beginnend mit w_2^i , weisen wir nun den Knoten auf Greedy-Art ihre Label zu. Angenommen, die Knoten w_1^i, \dots, w_{j-1}^i , $j \in \{2, \dots, |V(T_i)|\}$, haben bereits ein Label. Da $|N(w_j^i) \cap \{w_1^i, \dots, w_{j-1}^i\}| = 1$ ist, hat w_j^i genau einen Nachbarn, der bereits ein

Label hat. Folglich sind höchstens $2d - 1$ Label für w_j^i verboten, so daß insgesamt $2d$ Label für das Labelling des Wurzelbaumes T_i genügen. Da ein Kaktus stets zusammenhängend ist, gilt $V(K) = \bigcup_{i=1}^g V(T_i)$, d.h. jeder Knoten von K hat ein Label erhalten. Demzufolge ist $\chi_\ell^d(K) \leq \max\{\chi_\ell^d(C), 2d\}$.

Ferner sind offensichtlich $\chi_\ell^d(K) \geq \chi_\ell^d(C)$ und $\chi_\ell^d(K) \geq \chi_\ell^d(H)$ für jedes Gerüst H von K . Damit ergibt sich aus den Sätzen 4.16 und 4.6 die untere Schranke. Für ungerade Kreise stimmen obere und untere Schranke überein. ■

Folgerung 4.7 *Enthält ein Kaktus K der Ordnung n genau einen Kreis C_g , und sind g gerade und $\max\{n, 2g - 1\} \geq 2d$, so ist $\chi_\ell^d(K) = 2d$.*

Satz 4.21 *Sei K ein Kaktus mit Tailenweite $g \geq 3$ und mindestens zwei Kreisen. Dann gilt*

$$\chi_\ell^d(K) \leq \left\lceil \frac{2dg - 1}{g - 1} \right\rceil.$$

Beweis. Sei $k_j := \lceil \frac{2dj-1}{j-1} \rceil$, $j \geq 3$. Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe von Satz 2.31. Dazu konstruieren wir für den Multigraphen $K^{(d)}$ eine Orientierung D mit $EE(D) \neq EO(D)$ und $\max_{v \in V(D)} d_D^-(v) \leq k_g - 1$. Dies geschieht auf folgende Weise:

Zuerst reduzieren wir den Kaktus gemäß dem Schritt 1 von Algorithmus 4.3 zu einem Baum T . Für den Multigraphen $T^{(d)}$ wird eine Orientierung wie folgt festgelegt: Wir wählen einen beliebigen Knoten $x \in V(T^{(d)})$ als Wurzel und richten alle Bögen von x aus gesehen nach außen. D.h. für je zwei adjazente Knoten $u, v \in V(T)$ mit $dist(x, u) < dist(x, v)$ existieren in $T^{(d)}$ genau $2d - 1$ parallele Bögen (u, v) . Nun erweitern wir schrittweise die Orientierung von $T^{(d)}$ zu einer Orientierung von $K^{(d)}$:

Fall 1. Wiedereinfügen eines Blattes v .

Ist u der Nachbar von v , so fügen wir v und $2d - 1$ parallele Bögen (u, v) hinzu.

Fall 2. Entfalten eines Superknotens s , der ein EC_l mit $l \geq g$ war.

Sei v_1 die Artikulation des ursprünglichen Endkreises und die restlichen Knoten im Uhrzeigersinn mit v_2, \dots, v_l numeriert. v_1 wird mit s identifiziert. Es werden die Knoten v_2, \dots, v_l hinzugefügt, jeweils $2d - 1$ parallele Bögen (v_1, v_2) und (v_1, v_l) , sowie für $i = 2, \dots, l - 1$ jeweils $\min\{(k_l - 2d)(i - 1), 2d - 1\}$ Bögen (v_{i+1}, v_i) und $\max\{k_l + i(2d - k_l) - 1, 0\}$ Bögen (v_i, v_{i+1}) .

Dies liefert eine Orientierung D für $K^{(d)}$. D kann keine ungeraden Zyklen enthalten, da jeder induzierte Kreis C der Länge mindestens 3 einen Knoten v mit $d_C^-(v) = 0$ besitzt. Damit gilt sofort $EE(D) \neq EO(D)$. Wesentlich ist weiterhin, daß das Wiedereinfügen von einem Blatt oder das Entfalten eines Endkreises die Innengrade der bereits vorhandenen Knoten nicht verändert. Daher genügt es zu untersuchen, welchen Innengrad ein Knoten aus $V(T^{(d)})$ hat bzw. welchen Innengrad ein Knoten direkt bei seiner Wiedereinfügung bekommt. Knoten,

welche bereits in $T^{(d)}$ vorhanden waren oder als Blätter wieder eingefügt wurden, haben maximal Innengrad $2d-1 < k_g-1$. Für Knoten, die innerhalb eines Endkreises $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ wieder eingefügt wurden, gilt $d_{\bar{C}}(v_i) = k_l - 1$ für $i = 2, \dots, l-1$ und $d_{\bar{C}}(v_l) = l(2d - k_l) + 2(k_l - 1) \leq k_l - 1$. Der Knoten v_1 muß nicht berücksichtigt werden, da er schon vorher vorhanden war.

Da offensichtlich $k_l \leq k_g$ für alle $l \geq g$ ist, folgt der Satz. \blacksquare

Folgerung 4.8 *Mit Hilfe der Sätze 4.16 und 4.6 läßt sich feststellen:*

1. *Für einen Kaktus, welcher einen ungeraden Kreis enthält, gilt die Beziehung $2d + 1 \leq \chi_\ell^d(K) \leq \lceil \frac{2dg-1}{g-1} \rceil = 2d + \lceil \frac{2d-1}{g-1} \rceil$. Insbesondere für $g \geq 2d$ folgt also Gleichheit.*
2. *Ist der Kaktus bipartit und gilt $n \geq 2g - 1$, so liefert Satz 4.6 eine bessere untere Schranke als Satz 4.16 und es gilt $2d + 1 - \lceil \frac{2d}{n} \rceil \leq \chi_\ell^d(K) \leq 2d + \lceil \frac{2d-1}{g-1} \rceil$. Für $g \geq 2d$ unterscheiden sich die obere und untere Schranke lediglich um 1.*
3. *Ist der Kaktus bipartit und gilt $n < 2g - 1$, so liefert Satz 4.16 eine bessere untere Schranke als Satz 4.6. Außerdem kann der Kaktus nur einen Kreis enthalten und es wird Satz 4.20 angewendet. Dies folgt aus der Tatsache, daß jeder Kreis mindestens g Knoten besitzen muß und zwei verschiedene Kreise höchstens einen Knoten gemeinsam haben können. Daher ist hier $2d + 1 - \lceil \frac{2d}{2g-1} \rceil \leq \chi_\ell^d(K) \leq 2d$. Für $g \geq d + 1$ besteht Gleichheit.*

Folgerung 4.9 *Ein Kaktus K erfüllt stets die Ungleichung $\chi_\ell^d(K) \leq d \cdot \chi_\ell^1(K)$.*

Beweis. Ein nichttrivialer Kaktus ist 2- bzw. 3-listenfärbbar. Für Kakteen mit $\chi_\ell^1 = 2$ folgt die Behauptung direkt aus Satz 4.2. Für Kakteen mit $\chi_\ell^1 = 3$ (inklusive solcher mit nur einem Kreis) ist $\chi_\ell^d \leq \lceil \frac{2dg-1}{g-1} \rceil \leq \lceil \frac{6d-1}{2} \rceil = 3d$. \square

Bemerkung 4.5 *Es existieren Kakteen mit Tailenweite 3, für welche die im Satz angegebene Schranke scharf ist.*

Beispiel 4.2 Als Beispiel für die letzte Bemerkung soll der Graph G mit Tailenweite 3 dienen, der aus $2d$ Endkreisen C^1, \dots, C^{2d} der Länge 3 besteht, welche durch eine gemeinsame Artikulation v miteinander verbunden sind. Angenommen, es gelte $\chi_\ell^d(G) \leq 3d - 1$. Für $i = 1, \dots, 2d$ weisen wir den Knoten aus $C^i - \{v\}$ die Liste $\{i - d + 1, \dots, i + 2d - 1\}$ zu. Wie man leicht sieht, darf v nicht das Label i oder $i + d$ erhalten, da mit diesen Labeln kein zulässiges $L(d, 0)$ -List Labelling für C^i möglich ist. Durchläuft i alle Werte von 1 bis $2d$, so zeigt sich, daß v kein Label aus der Menge $\{1, \dots, 1 + 3d\}$ erhalten darf. Weist man also dem Knoten v eine Liste von $3d - 1$ Labeln aus der Menge der verbotenen Label zu, so kann kein $L(d, 0)$ -List Labelling für G existieren.

Bemerkung 4.6 *Im Beweis von Satz 4.21 wurde nur die Existenz eines $L(d, 0)$ –List Labellings bei gegebener k_g –Zuweisung nachgewiesen. Ein explizites Labelling läßt sich mit Hilfe von Algorithmus 2.1 ermitteln. Als Eingabe dient die im Beweis konstruierte Orientierung D für $K^{(d)}$.*

▷▷ **Labelling von Wegen mit speziellen Listenzuweisungen:** Dieser und der nächste Abschnitt stellen weitere Hilfsmittel bereit, die zur Abschätzung von $\chi_\ell^{d,1}$ von Kakteen benötigt werden.

Lemma 4.5 *Ist für den Weg (v_1, \dots, v_n) , $n \geq 4$, eine Listenzuweisung \mathcal{L} mit*

$$n = 4: |L(v_1)|, |L(v_4)| \geq 2, |L(v_2)|, |L(v_3)| \geq 3,$$

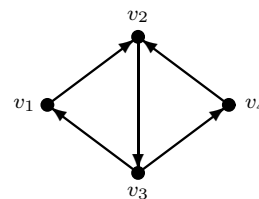
$$n \geq 5: |L(v_1)|, |L(v_n)| \geq 2, |L(v_2)|, |L(v_{n-1})| \geq 3, |L(v_3)|, \dots, |L(v_{n-2})| \geq 4$$

gegeben, so existiert stets ein $L(1, 1)$ –List Labelling.

Beweis. (vollständige Induktion über n):

IA: $n = 4$.

Wir bestimmen für den Graphen $P_4^{(1,1)}$ eine Orientierung D mit $EE(D) \neq EO(D)$ und $d_D^-(v_1), d_D^-(v_4) \leq 1$, $d_D^-(v_2), d_D^-(v_3) \leq 2$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 2.31. Das Bild rechts zeigt die gewünschte Orientierung D mit $EE(D) = 1 \neq EO(D) = 2$. ✓



IV: Die Behauptung gelte für alle $n \leq n_0 - 1$.

IS: $n = n_0 \geq 5$.

Wir weisen dem Knoten v_1 ein beliebiges Label $f(v_1) \in L(v_1)$ zu. Dies ist wegen $|L(v_1)| \geq 2$ stets möglich. Sei $L'(v_i)$, $i = 2, \dots, n$, die Liste, welche aus $L(v_i)$ durch Löschen der wegen $f(v_1)$ verbotenen Label hervorgeht. Dann ist $L'(v_i) = L(v_i)$ für $i = 4, \dots, n$, sowie $|L'(v_2)| \geq 2$ und $|L'(v_3)| \geq 3$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt der Weg (v_2, \dots, v_n) für die Listenzuweisung $\mathcal{L}' = \{L'(v_i) \mid i \in \{2, \dots, n\}\}$ ein $L(1, 1)$ –List Labelling. □

Lemma 4.6 *Ist für den Weg (v_1, \dots, v_n) , $n \geq 3$, eine Listenzuweisung \mathcal{L} mit*

$$n = 3: |L(v_1)| \geq 2, |L(v_2)| \geq 4, |L(v_3)| \geq 3,$$

$$n = 4: |L(v_1)| \geq 2, |L(v_2)|, |L(v_3)| \geq 5, |L(v_4)| \geq 3,$$

$$n \geq 5: |L(v_1)| \geq 2, |L(v_2)|, |L(v_{n-1})| \geq 5, |L(v_n)| \geq 3, \\ |L(v_3)|, \dots, |L(v_{n-2})| \geq 6$$

gegeben, so existiert stets ein $L(2, 1)$ –List Labelling.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zuerst für den Fall $n = 3$, um anschließend vollständige Induktion anwenden zu können.

Es genügt, $|L(v_1)| = 2$, $|L(v_2)| = 4$, $|L(v_3)| = 3$ anzunehmen. Ferner seien $c_1 := \min \bigcup_{i=1}^3 L(v_i)$, $c_2 := \max \bigcup_{i=1}^3 L(v_i)$ und $L'(v_i)$ sei die Liste, die aus $L(v_i)$ durch Löschen verbotener Label hervorgeht.

Fall 1. $c_1 \notin L(v_2) \vee c_2 \notin L(v_2)$.

O.B.d.A. sei $c_1 \notin L(v_2)$. Ist $c_1 \in L(v_1)$, so weisen wir dem Knoten v_1 das Label c_1 zu. Es gilt dann $|L'(v_2)| + |L'(v_3)| \geq 3 + 2 = \sigma^2(P_2)$, daher existiert ein $L(2, 1)$ -List Labelling. Ist $c_1 \in L(v_3)$ und $c_1 \notin L(v_1)$, so weisen wir dem Knoten v_3 das Label c_1 zu. Dann ist $|L'(v_1)| + |L'(v_2)| \geq 2 + 3 = \sigma^2(P_2)$.

Fall 2. $c_1, c_2 \in L(v_2)$.

Seien $M_1 := \{c_1, c_1 + 1\}$ und $M_2 := \{c_2 - 1, c_2\}$. Diese beiden Mengen sind disjunkt, denn $|L(v_2)| = 4$.

Fall 2.1. $|L(v_1) \cap M_1| = 2 \vee |L(v_1) \cap M_2| = 2$.

O.B.d.A. sei $|L(v_1) \cap M_2| = 2$, d.h. $|L(v_1) \cap M_1| = \emptyset$. Weisen wir das Label c_1 dem Knoten v_2 zu, so ergeben sich $|L'(v_1)| = 2$ und $|L'(v_3)| \geq 1$. Damit kann man zulässig v_3 und dann v_1 ein Label zuweisen.

Fall 2.2. $|L(v_1) \cap M_1| \leq 1 \wedge |L(v_1) \cap M_2| \leq 1$.

Nach dem Schubfachprinzip existiert ein $j \in \{1, 2\}$ mit $|L(v_3) \cap M_j| \leq 1$. O.B.d.A. sei $j = 1$. Weisen wir nun das Label c_1 dem Knoten v_2 zu, so erhalten wir $|L'(v_1)| \geq 1$ und $|L'(v_3)| \geq 2$. Daher kann man hier dem Knoten v_1 und anschließend dem Knoten v_3 zulässig ein Label zuweisen.

Damit ist das Lemma für $n = 3$ gezeigt.

(vollständige Induktion über n):

IA: $n = 3$. ✓

IV: Die Behauptung gelte für alle $n \leq n_0 - 1$.

IS: $n = n_0 \geq 4$.

Wir weisen dem Knoten v_1 ein beliebiges Label $f(v_1) \in L(v_1)$ zu. Wegen $|L(v_1)| \geq 2$ ist dies immer möglich. Sei $L'(v_i)$, $i = 2, \dots, n$, die Liste, welche aus $L(v_i)$ durch Löschen der wegen $f(v_1)$ verbotenen Label hervorgeht. Offensichtlich gilt dann $L'(v_i) = L(v_i)$ für $i = 4, \dots, n$, sowie $|L'(v_2)| \geq 2$ und $|L'(v_3)| \geq 4$ für $n = 4$ und $|L'(v_3)| \geq 5$ für $n \geq 5$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt der Weg (v_2, \dots, v_n) für die Listenzuweisung $\mathcal{L}' = \{L'(v_i) \mid i \in \{2, \dots, n\}\}$ ein $L(2, 1)$ -List Labelling. □

Lemma 4.7 *Ist für den Weg (v_1, v_2, v_3) eine Listenzuweisung \mathcal{L} mit*

$$|L(v_1)| \geq d - 1, \quad |L(v_2)| \geq 2d + 2, \quad |L(v_3)| \geq 4$$

gegeben, so existiert für $d \in \{3, 4\}$ stets ein $L(d, 1)$ -List Labelling.

Beweis. Es reicht aus, die Aussage für den Fall $|L(v_1)| = d - 1$, $|L(v_2)| = 2d + 2$, $|L(v_3)| = 4$ zu zeigen. Es seien $c_1 := \min \bigcup_{i=1}^3 L(v_i)$, $c_2 := \max \bigcup_{i=1}^3 L(v_i)$ und $L'(v_i)$ sei die Liste, die aus $L(v_i)$ durch Löschen verbotener Label hervorgeht.

Fall 1. $c_1 \in L(v_1) \vee c_2 \in L(v_1)$.

O.B.d.A. sei $c_1 \in L(v_1)$. Wir weisen dem Knoten v_1 das Label c_1 zu. Es gilt dann $|L'(v_2)| + |L'(v_3)| \geq (d + 2) + 3 \geq 2d + 1 = \sigma^2(P_2)$ für $d \leq 4$. Daher können den Knoten v_2 und v_3 stets Label zugewiesen werden.

Fall 2. $[c_1 \in L(v_3) \wedge c_1 \notin L(v_1)] \vee [c_2 \in L(v_3) \wedge c_2 \notin L(v_1)]$.

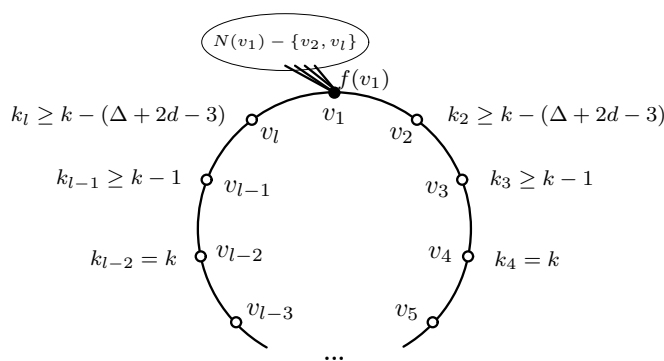
O.B.d.A. gelte $c_1 \in L(v_3) \wedge c_1 \notin L(v_1)$. Wir weisen das Label c_1 dem Knoten v_3 zu. Für die verbleibenden Listen gilt nun $|L'(v_1)| \geq d - 1$ und $|L'(v_2)| \geq d + 2$ und folglich $|L'(v_1)| + |L'(v_2)| \geq 2d + 1 = \sigma^2(P_2)$.

Fall 3. $c_1, c_2 \notin L(v_1) \cup L(v_3)$.

Es muß $c_1, c_2 \in L(v_2)$ gelten. Seien $M_1 := \{c_1, \dots, c_1 + d - 1\}$ und $M_2 := \{c_2 - d + 1, \dots, c_2\}$. Nach dem Schubfachprinzip existiert ein $j \in \{1, 2\}$ mit $|L(v_1) \cap M_j| \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$. O.B.d.A. sei $j = 1$. Wir weisen das Label c_1 dem Knoten v_2 zu. Dies führt zur Löschung von maximal $d - 1$ Labeln aus $L(v_3)$ und maximal $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Labeln aus $L(v_1)$. Daher gilt für die verbleibenden Listen $|L'(v_1)| \geq \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$ bzw. $|L'(v_3)| \geq 5 - d$. Ist $d = 3$, so kann man wegen $|L'(v_1)| \geq 1$, $|L'(v_3)| \geq 2$ zuerst dem Knoten v_1 und dann dem Knoten v_2 ein Label zuweisen. Ist $d = 4$, weist man den beiden Knoten in umgekehrter Reihenfolge Label zu. \square

▷▷ **Labelling-Strategien für Endkreise:** Möchte man die Reduktion-Labelling-Methode für $L(d, 1)$ -List Labellings von Kakteen verwenden, so muß genau untersucht werden, wie ein Labelling auf einen zu entfaltenden Endkreis erweitert werden kann.

Es sei eine k -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(K)\}$ für den Kaktus K gegeben. f sei ein $L(d, 1)$ -List Labelling für den bisherigen Graphen. Angenommen, wir entfalten einen Superknoten s , der ursprünglich ein Endkreis der Länge l war. Seien v_1, v_2, \dots, v_l die Knoten dieses Kreises im Uhrzeigersinn, so daß v_1 der trennende Knoten ist. Folglich ist v_1 der einzige Knoten des Kreises, der adjazent zu Knoten sein könnte, die bereits ein Label haben. Wir weisen dem Knoten v_1 das Label $f(s)$ des Superknotens zu. Sei $L'(v_i)$, $i = 2, \dots, l$, die Liste von Labeln, die nach dem Labelling von v_1 dem Knoten v_i zugewiesen werden können, und setze $k_i := |L'(v_i)|$. Da v_2 und v_l adjazent zu v_1 sind, kann diesen Knoten kein Label aus $\{f(v_1) - (d - 1), \dots, f(v_1) + (d - 1)\}$ zugewiesen werden. Ferner muß $f(v_2), f(v_l) \notin f(N(v_1) - \{v_2, v_l\})$ wegen der Abstand-2-Bedingung gelten. Daher sind für diese beiden Knoten jeweils bis zu $(2d - 1) + (\Delta - 2)$ Label verboten, so daß $k_2, k_l \geq k - (2d - 1) - (\Delta - 2) = k - 2d - \Delta + 3$ folgt. Ist $l \geq 4$, so haben die Knoten v_3 und v_{l-1} Abstand 2 zu v_1 , weshalb sie nicht das Label $f(v_1)$ erhalten können. Also ist $k_3, k_{l-1} \geq k - 1$. Für $l \geq 6$ und $i \in \{4, \dots, l - 2\}$ gilt $k_i = k$. Es ergibt sich die Situation wie im Bild 4.2 dargestellt.


 Abbildung 4.2.: Listengrößen nach dem Entfalten eines EC_l , $l \geq 4$

Für unsere Untersuchungen genügt es anzunehmen, daß die Größen k_i minimal sind. D.h. wir setzen $k_2 = k_l = k - 2d - \Delta + 3$, $k_3 = k_{l-1} = k - 1$.

Betrachten wir die Summe der Listengrößen k_2, \dots, k_l , so gilt:

$$l = 4 : \sum_{i=2}^4 k_i = 2(k - 2d - \Delta + 3) + (k - 1) = 3k - 4d - 2\Delta + 5, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} l \geq 5 : \sum_{i=2}^l k_i &= 2(k - 2d - \Delta + 3) + 2(k - 1) + (l - 5)k \\ &= (l - 1)k - 4d - 2\Delta + 4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

1. Verfahren

Sei $l = 4$. Wir bestimmen für den durch die Knoten v_2, v_3, v_4 induzierten Weg und die Listenzuweisung $\mathcal{L}' = \{L'(v_2), L'(v_3), L'(v_4)\}$ mit dem Algorithmus 4.1 ein $L(d, 1)$ -List Labelling f . Dies ist stets möglich, wenn die hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.2 erfüllt sind. Daher fordern wir für k :

1. $\sum_{j=2}^4 k_j \stackrel{(4.2)}{=} 3k - 4d - 2\Delta + 5 > 4d + 2$,
2. $k_2 = k - 2d - \Delta + 3 \geq 2$ und $k_4 = k - 2d - \Delta + 3 \leq 2d$,
3. $k_3 + k_4 = 2k - 2d - \Delta + 2 \geq 2d + 1$.

Sei $l \geq 5$. Für den durch die Knoten v_2, \dots, v_l induzierten Weg mit kleinen Randlisten ($\mathcal{L}' = \{L'(v_i) \mid i \in \{2, \dots, l\}\}$ ist die zugehörige Listenzuweisung) können wir mit Hilfe von Algorithmus 4.2 ein $L(d, 1)$ -List Labelling f mit $f(v_2) \neq f(v_l)$ bestimmen, sofern die hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.3 erfüllt sind. Dies ist der Fall, wenn folgende Bedingungen gelten:

1. $\sum_{j=2}^l k_j \stackrel{(4.3)}{=} (l - 1)k - 4d - 2\Delta + 4 > (2d + 2)(l - 2)$,
2. $k_2 = k - 2d - \Delta + 3 \geq 3$ und $k_l = k - 2d - \Delta + 3 \leq 2d$,

3. $k_2 + k_3 = 2k - 2d - \Delta + 2 \geq 2d + 6$ (damit ist auch $k_{l-1} + k_l \geq 2d + 1$).

Demzufolge kann für jede k -Listenzuweisung ein Endkreis der Länge $l \geq 4$ entfaltet und den Knoten können Label gegeben werden, wenn gilt:

Hinreichende Bedingung für das 1. Verfahren

$$\begin{aligned} k &\geq \max \left\{ \left\lfloor \frac{8d + 2\Delta}{3} \right\rfloor, \Delta + 2d - 1 \right\}, & \text{für } l = 4 \\ k &\geq \max \left\{ \left\lfloor \frac{2dl + 2\Delta - 6}{l - 1} \right\rfloor + 3, \Delta + 2d, 2d + 2 + \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil \right\}, & \text{für } l \geq 5 \end{aligned} \quad (4.4)$$

2. Verfahren

Betrachten wir nun für $l \geq 5$ eine weitere Möglichkeit, den Knoten v_2, \dots, v_l des Endkreises Label zuzuweisen. Wir weisen zuerst dem Knoten v_2 und dann dem Knoten v_l zulässig ein Label $f(v_2) \in L'(v_2)$ bzw. $f(v_l) \in L'(v_l)$ zu. Damit dies immer möglich ist, muß $k_2 \geq 1$ und $k_l \geq 2$ gelten. Dies ist für $k - 2d - \Delta + 3 \geq 2$, d.h. $k \geq \Delta + 2d - 1$, stets der Fall.

Sei $L''(v_i)$ für $i = 3, \dots, l - 1$ die Liste, welche aus $L'(v_i)$ durch Löschen der nun verbotenen Label hervorgeht. Wir setzen $k'_i := |L''(v_i)|$ für $i = 3, \dots, l - 1$. Das Labelling der Knoten v_2 und v_l führt zur Löschung von maximal $2d - 1$ Labeln aus den Listen $L'(v_3)$ und $L'(v_{l-1})$. Außerdem muß wegen der Abstand-2-Bedingung ggf. das Label $f(v_2)$ bzw. $f(v_l)$ aus der Liste $L'(v_4)$ bzw. $L'(v_{l-2})$ gelöscht werden. Konkret bedeutet das:

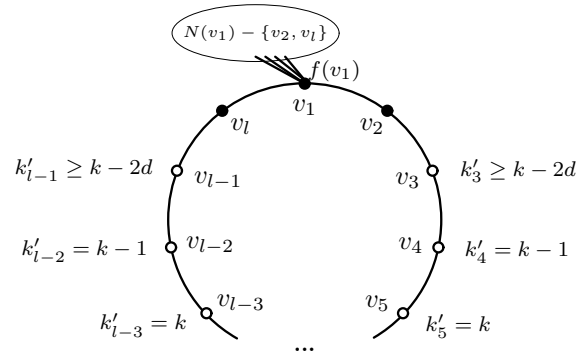
- für $l = 5$: $k'_3, k'_4 \geq k - (2d - 1) - 2$
- für $l = 6$: $k'_3, k'_5 \geq k - 2d, k'_4 \geq k - 2$
- für $l = 7$: $k'_3, k'_6 \geq k - 2d, k'_4, k'_5 \geq k - 1$
- für $l \geq 8$: $k'_3, k'_{l-1} \geq k - 2d, k'_4, k'_{l-2} \geq k - 1, k'_5 = \dots = k'_{l-3} = k$

Dies führt zu der Situation wie in der Abbildung 4.3 dargestellt.

Auch hier reicht es aus anzunehmen, daß die Größen k'_i minimal sind. D.h. wir ersetzen in der obigen Auflistung alle Ungleichungen der Form " $k'_i \geq$ " durch " $k'_i =$ ". Für die Summe der Listengrößen k'_3, \dots, k'_{l-1} , $l \geq 5$, resultiert:

$$\sum_{i=3}^{l-1} k'_i = (l - 3)k - 2 - 2(2d - 1) - 2 = (l - 3)k - 4d - 2. \quad (4.5)$$

Sei $l = 5$. Wir löschen aus $L''(v_3)$ alle Label, welche $L''(v_4)$ eliminieren, und wählen aus der verbleibenden Liste ein Label für v_3 und anschließend aus $L''(v_4)$ ein zulässiges Label für v_4 aus. Dies ist stets möglich, wenn $k'_3 + k'_4 = 2(k - 2d - 1) \geq \sigma^d(P_2) = 2d + 1$, d.h. $k \geq 3d + 2$, ist.


 Abbildung 4.3.: Listengrößen nach dem Entfalten eines EC_l , $l \geq 7$

Sei $l = 6$. Wir bestimmen für den durch die Knoten v_3, v_4, v_5 induzierten Weg und die Listenzuweisung $\mathcal{L}'' = \{L''(v_3), L''(v_4), L''(v_5)\}$ mit dem Algorithmus 4.1 ein $L(d, 1)$ -List Labelling f . Die dazu hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.2 sind stets erfüllt, wenn für k gilt:

1. $\sum_{j=3}^5 k'_j \stackrel{(4.5)}{=} 3k - 4d - 2 > 4d + 2$,
2. $k'_3 = k - 2d \geq 2$ und $k'_5 = k - 2d \leq 2d$,
3. $k'_4 + k'_5 = 2k - 2d - 2 \geq 2d + 1$.

Sei $l \geq 7$. Für den durch die Knoten v_3, \dots, v_{l-1} induzierten Weg mit kleinen Randlisten ($\mathcal{L}'' = \{L''(v_i) \mid i \in \{3, \dots, l-1\}\}$ ist die zugehörige Listenzuweisung) können wir mit Hilfe von Algorithmus 4.1 ein $L(d, 1)$ -List Labelling f bestimmen, wenn die hinreichenden Bedingungen aus Lemma 4.2 erfüllt sind. Dazu fordern wir für k :

1. $\sum_{j=3}^{l-1} k'_j \stackrel{(4.5)}{=} (l-3)k - 4d - 2 > (2d+2)(l-4) - 2$,
2. $k'_3 = k - 2d \geq 2$ und $k'_{l-1} = k - 2d \leq 2d$,
3. $k'_3 + k'_4 = 2k - 2d - 1 \geq 2d + 4$ (damit ist auch $k'_{l-2} + k'_{l-1} \geq 2d + 1$).

Für jede gegebene k -Listenzuweisung kann ein Endkreis der Länge $l \geq 5$ entfaltet werden und es können den Knoten zulässig Label gegeben werden, wenn k sämtliche der obigen Forderungen erfüllt. Dies ist der Fall, wenn gilt:

Hinreichende Bedingung für das 2. Verfahren

$$k \geq \max \left\{ 2d + 3 + \left\lfloor \frac{2d-2}{l-3} \right\rfloor, \Delta + 2d - 1 \right\}, \quad \text{für } l \geq 5 \quad (4.6)$$

Für $l \geq 6$ muß außerdem noch $k \leq 4d$ sein. Diese Bedingung können wir jedoch vernachlässigen, da wir im Falle $k > 4d$ das 1. Verfahren verwenden.

▷▷ **Hinreichende Bedingungen für die Reduktion-Labeling-Methode:**

Lemma 4.8 *Angenommen, für einen Kaktus K mit Maximalgrad Δ und gegebener k -Listenzuweisung soll ein $L(d, 1)$ -Labelling mit Hilfe von Algorithmus 4.3 bestimmt werden. Dann kann ein Blatt stets zulässig wiedereingefügt und mit einem Label versehen werden, wenn $k \geq \Delta + 2d - 1$ gilt. Ferner kann ein EC_l zulässig entfaltet und seinen Knoten können Label zugewiesen werden, falls*

$$k \geq \begin{cases} \Delta + 3d - 2 & , \text{ für } l = 3 \\ \Delta + 2d - 1 & , \text{ für } l = 4 \wedge \Delta \geq 2d + 1 \\ & \text{oder } l \geq 5 \wedge \Delta \geq 4 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor \\ \Delta + 2d & , \text{ für } l \geq 5 \wedge \Delta = 3 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor \\ \lfloor \frac{8d+2\Delta}{3} \rfloor & , \text{ für } l = 4 \wedge \Delta \leq 2d \\ \lfloor \frac{2d+2\Delta-6}{l-1} \rfloor + 3 & , \text{ für } l \geq 5 \wedge \Delta \leq 2 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor \end{cases} .$$

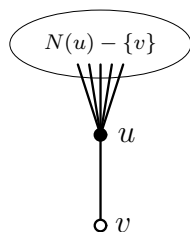
Ist $l = 5$, so kann dies in speziellen Fällen verbessert werden auf

$$k \geq \begin{cases} 7 = \Delta + 3d - 2 & , \text{ für } d = 2 \wedge \Delta = 3 \\ 2d + 4 = \lfloor \frac{8d+2\Delta}{3} \rfloor & , \text{ für } d = 3 \wedge \Delta = 4 \\ & \text{oder } d = 4 \wedge \Delta = 3 \end{cases} .$$

Ist $l \geq 6$, $\Delta = 3$ und $d = 1$, so genügt bereits $k \geq \Delta + 1 = 4$.

Beweis. Sei $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(K)\}$ eine k -Listenzuweisung.

Betrachten wir zuerst das Wiedereinfügen eines Blattes v :



Seien $k := \Delta + 2d - 1$ und u der Nachbar von v . $f(u)$ verbietet maximal $2d - 1$ Label für v , nämlich die Label $f(u) - (d - 1), \dots, f(u) + (d - 1)$. Ferner muß $f(v) \notin f(N(u) - \{v\})$ wegen der Abstand-2-Bedingung gelten. Daher beträgt die maximale Anzahl verbotener Label $(2d - 1) + (\Delta - 1)$, so daß dem Knoten v stets ein Label (z.B. das kleinstmögliche) aus seiner Liste zugewiesen werden kann.

Als nächstes untersuchen wir das Entfalten eines Superknotens s , der ein Endkreis der Länge l war:

Bei der Entfaltung eines Superknotens s zu seinem ursprünglichen Endkreis EC_l , werden wir im folgenden stets die Artikulation des Endkreises mit v_1 bezeichnen, und die restlichen Knoten im Uhrzeigersinn mit v_2, \dots, v_l numerieren. Außerdem erhält v_1 immer das Label $f(v_1) := f(s)$. $L'(v_i)$ sei wieder die Liste, welche aus $L(v_i)$ durch Löschen verbotener Label nach Zuweisung von $f(v_1)$ hervorgeht (wie auf Seite 115). Ferner sei erneut $k_i := |L'(v_i)|$.

Sei $l = 3$ und $k := \Delta + 3d - 2$. Für die Knoten v_2 und v_3 sind jeweils maximal $2d - 1$ Label wegen $f(v_1)$ und maximal $\Delta - 2$ Label wegen $f(N(v_1) - \{v_2, v_3\})$

verboten. Folglich gilt $k_2, k_3 \geq k - (2d - 1) - (\Delta - 2) = d + 1$. Da v_2 und v_3 einen Weg P_2 induzieren, für welchen $\chi_\ell^{d,1}(P_2) = 1 + d$ gilt, ist es stets möglich, $f(v_2)$ und $f(v_3)$ mit $|f(v_2) - f(v_3)| \geq d$ zu wählen.

Sei $l = 4$. Es wird das 1. Verfahren angewendet. Gemäß der Bedingung (4.4), genügt $k = \Delta + 2d - 1$, wenn $\Delta \geq 2d + 1$, und $k = \lfloor \frac{8d+2\Delta}{3} \rfloor$, wenn $\Delta \leq 2d$.

Sei $l \geq 5$. Das 2. Verfahren kann angewandt werden, wenn k die Bedingung (4.6) erfüllt. Offensichtlich genügen $\Delta + 2d - 1$, wenn $\Delta \geq 4 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor$ gilt, und $k = \Delta + 2d$ ist hinreichend für $\Delta = 3 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor$.

Ist $\Delta \leq 2 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor$, so verwenden wir das 1. Verfahren, da es in diesem Fall die bessere Schranke liefert, aufgrund von $2d + 3 + \lfloor \frac{2d+2\Delta-6}{l-1} \rfloor \leq 2d + 3 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor$. Dies folgt aus $\Delta(l-3) \leq 2(l+d-4)$ und:

$$\begin{aligned} \frac{2d + 2\Delta - 6}{l - 1} &= \frac{2(l-3)(d + \Delta - 3)}{(l-3)(l-1)} \leq \frac{2(l-3)(d-3) + 4(l+d-4)}{(l-3)(l-1)} \\ &= \frac{2dl - 2l - 2d + 2}{(l-3)(l-1)} = \frac{2d-2}{l-3}. \end{aligned}$$

Das Maximum in der Bedingung (4.4) ist $\lfloor \frac{2dl+2\Delta-6}{l-1} \rfloor + 3$, denn $-(\Delta-3)(l-3) \geq l-2d-1$ und:

$$\begin{aligned} \Delta = 3 : \quad & \left\lfloor \frac{2dl + 2\Delta - 6}{l - 1} \right\rfloor + 3 - \left(2d + 2 + \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil \right) = \left\lfloor \frac{2d}{l-1} \right\rfloor - 1 \geq 0 \\ \Delta > 3 : \quad & \left\lfloor \frac{2dl + 2\Delta - 6}{l - 1} \right\rfloor + 3 - (\Delta + 2d) = \left\lfloor \frac{2d - (\Delta - 3)(l - 3)}{l - 1} \right\rfloor \\ & \geq \left\lfloor \frac{2d + (l - 2d - 1)}{l - 1} \right\rfloor = 1 \end{aligned}$$

Daher genügt $k = \lfloor \frac{2dl+2\Delta-6}{l-1} \rfloor + 3$, wenn $\Delta \leq 2 + \lfloor \frac{2d-2}{l-3} \rfloor$.

Als letztes untersuchen wir die im Lemma aufgeführten Sonderfälle:

Sei $l = 5$ und $d = 2, \Delta = 3$ sowie $k := 7$.

Wir weisen dem Knoten v_5 ein beliebiges Label aus $L'(v_5)$ zu. Wegen $k_5 \geq 3$ ist dies immer möglich. Anschließend entfernen wir die daraus resultierenden verbotenen Label aus der Liste $L'(v_i)$, $i = 2, 3, 4$ und erhalten eine neue Liste $L''(v_i)$, $i = 2, 3, 4$ der Mächtigkeit k'_i . Es gilt $k'_2 \geq 2, k'_3 \geq 5, k'_4 \geq 3$. Laut Lemma 4.6 existiert unter diesen Voraussetzungen für den durch die Knoten v_2, v_3, v_4 induzierten Weg ein $L(2, 1)$ -List Labelling.

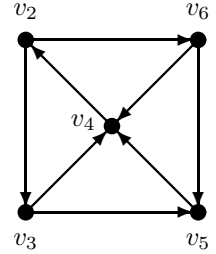
Sei $l = 5$ und $(d = 3 \wedge \Delta = 4) \vee (d = 4 \wedge \Delta = 3)$ sowie $k := 2d + 4$.

Wir weisen dem Knoten v_5 wieder ein beliebiges Label aus $L'(v_5)$ zu. Dies ist wegen $k_5 \geq 7 - \Delta \geq 3$ stets möglich. Für die resultierenden Listen der verbleibenden Knoten gilt nun $k'_2 \geq 6 - \Delta, k'_3 \geq 2d + 2, k'_4 \geq 4$. Ist $d = 3, \Delta = 4$, so gilt $k'_2 \geq 2 = d - 1$. Ist $d = 4, \Delta = 3$, so folgt ebenfalls $k'_2 \geq 3 = d - 1$. Gemäß

Lemma 4.7 existiert für den durch die Knoten v_2, v_3, v_4 induzierten Weg stets ein $L(d, 1)$ -List Labelling.

Sei $l \geq 6$ und $d = 1, \Delta = 3$ sowie $k := 4$.

Betrachten wir zuerst $l = 6$. Sei P der durch die Knoten v_2, \dots, v_6 induzierte Weg. Offenbar gelten $k_2, k_6 \geq 2, k_3, k_5 \geq 3$ und $k_4 = 4$. Wir zeigen die Existenz eines $L(1, 1)$ -List Labellings durch Anwendung von Satz 2.31. Dazu geben wir für den Graphen $P^{(1,1)}$ eine Orientierung D mit $EE(D) \neq EO(D)$ und $d_D^-(v_2), d_D^-(v_6) \leq 1, d_D^-(v_3), d_D^-(v_5) \leq 2$ und $d_D^-(v_4) \leq 3$ an. Die Abbildung rechts zeigt die gewünschte Orientierung D . Dabei ist $EE(D) = 3 \neq EO(D) = 2$.



Ist $l \geq 7$, so weisen wir zuerst dem Knoten v_2 und dann dem Knoten v_l ein beliebiges Label aus ihren Listen $L'(v_2)$ bzw. $L'(v_l)$ zu. Dies ist stets möglich, da $k_2, k_l \geq 2$. Für die verbleibenden Listen gilt anschließend $k'_3, k'_{l-1} \geq 2, k'_4, k'_{l-2} \geq 3$ und $k'_5 = \dots = k'_{l-3} = 4$, wenn $l \geq 8$. Gemäß Lemma 4.5 existiert bei diesen Listengrößen für den durch die Knoten v_3, \dots, v_{l-1} induzierten Weg stets ein $L(1, 1)$ -List Labelling. \square

\triangleright **Abschätzung von $\chi_\ell^{d,1}$:** Da Bäume und Kreise bereits im letzten Abschnitt bezüglich $\chi_\ell^{d,1}$ untersucht worden sind, betrachten wir hier nur Kakteen mit mindestens einem Kreis und Maximalgrad $\Delta \geq 3$.

Satz 4.22 Sei K ein Kaktus mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$, Tailenweite g und $d \geq 2$. Weiterhin sei $a := \lfloor \frac{2d-2}{g-3} \rfloor$. Dann gilt

$$\chi_\ell^{d,1}(K) \leq \begin{cases} \Delta + 3d - 2 & , \text{ für } g = 3 \\ \Delta + 2d - 1 & , \text{ für } g = 4 \wedge \Delta \geq 2d + 1 \\ \lfloor \frac{8d+2\Delta}{3} \rfloor & , \text{ für } g = 4 \wedge \Delta \leq 2d \\ \Delta + 2\bar{d} - 1 & , \text{ für } g \geq 5 \wedge \Delta \geq 4 + a \\ \Delta + 2d & , \text{ für } g \geq 5 \wedge \Delta = 3 + a \\ \lfloor \frac{2dg+2\Delta-6}{g-1} \rfloor + 3 & , \text{ für } g \geq 5 \wedge \Delta \leq 2 + a \end{cases} .$$

Beweis. Sei K ein Kaktus mit Maximalgrad Δ und Tailenweite $g \geq 3$. Ferner sei eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(K)\}$ mit $\forall v \in V(K) : |L(v)| = k_g$ gegeben, wobei k_g für den oben angegebenen Wert für die jeweilige Tailenweite g steht. Es wird die Reduktion-Labeling-Methode aus Algorithmus 4.3 angewendet. Nach Schritt 1 entsteht der Baum $G_2^{(i_{max})}$. Für diesen gibt es stets ein $L(d, 1)$ -List Labelling, aufgrund von $\chi_\ell^{d,1}(G_2^{(i_{max})}) \leq \Delta + 2d - 1 \leq k_g$ für alle $g \geq 3$ (vgl. Satz 4.8). Im Schritt 2 wird die Reduktion wieder rückgängig gemacht, indem sukzessive Blätter eingefügt bzw. Endkreise entfaltet werden, wobei jeweils das Labelling auf die hinzugenommenen Elemente erweitert wird,

bis letztendlich ein $L(d, 1)$ -List Labelling f des ursprünglichen Graphen K entsteht. In Lemma 4.8 wurde bereits untersucht, welche Listengrößen dafür notwendig sind. Da, wie schon festgestellt, $k_g \geq \Delta + 2d - 1$ gilt, können Blätter stets zulässig wiedereingefügt werden. Daher muß nur noch untersucht werden, ob alle in K enthaltenen Kreise der Länge $l > g$ auch bei einer k_g -Listenzuweisung zulässig entfaltet werden können.

Sei $g = 3$. $k_3 = \Delta + 3d - 2$ genügt zum Entfalten von Endkreisen der Länge $l \geq 4$, denn es gilt $k_3 \geq \Delta + 2d$, da $d \geq 2$, und ferner:

$$k_3 - \left\lfloor \frac{8d + 2\Delta}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\Delta + d - 6}{3} \right\rfloor \stackrel{(\Delta \geq 3, d \geq 2)}{\geq} \left\lfloor \frac{-1}{3} \right\rfloor = 0$$

$$k_3 - \left(\left\lfloor \frac{2dl + 2\Delta - 6}{l - 1} \right\rfloor + 3 \right) = \left\lfloor \frac{(l - 3)(\Delta + d - 5) - 4}{l - 1} \right\rfloor \geq 0,$$

für $\Delta + d \geq 6$ oder $l \geq 6$.

Für den verbleibenden Spezialfall $d = 2, \Delta = 3, l = 5$ wurde in Lemma 4.8 explizit gezeigt, daß $k_3 = 7$ genügt.

Sei $g = 4$. Ist $\Delta \leq 2d$, dann gilt $k_4 = \left\lfloor \frac{8d + 2\Delta}{3} \right\rfloor$. Diese Listengröße reicht auch bei Endkreisen der Länge $l \geq 5$, da $k_4 \geq \left\lfloor \frac{6d + 3\Delta}{3} \right\rfloor = \Delta + 2d$, und:

$$k_4 - \left(\left\lfloor \frac{2dl + 2\Delta - 6}{l - 1} \right\rfloor + 3 \right)$$

$$= \left\lfloor \frac{(2d + 2\Delta - 9)(l - 4) - 9 + 6(d + \Delta - 3)}{3(l - 1)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6(d + \Delta - 3)}{3(l - 1)} \right\rfloor \geq 0,$$

für $\Delta + d \geq 9$ oder $l \geq 6$.

Für $l \geq 6$ läßt sich das mit wenigen Fallunterscheidungen nachprüfen. Die Differenz beträgt ebenso ≥ 0 , wenn $l = 5$ und $d + \Delta \in \{6, 8\}$ gilt. Ist $l = 5, d + \Delta = 5$ (d.h. $d = 2, \Delta = 3$), so wissen wir bereits, daß $7 = k_4$ als Listengröße genügt. Ist $l = 5, d + \Delta = 7$, so müssen wir wegen $\Delta \leq 2d$ nur die Möglichkeiten $d = 3, \Delta = 4$ und $d = 4, \Delta = 3$ betrachten. In Lemma 4.8 wurde gezeigt, daß auch für diese k_4 ausreicht.

Alle anderen Fälle sind leicht nachzuprüfen und werden daher weggelassen. Insgesamt ergibt sich, daß k_g sowohl für das Einfügen von Blättern als auch für das Entfalten aller Endkreise in K als Listengröße genügt. Daher kann mit der Reduktion-Labeling-Methode für jede k_g -Listenzuweisung ein $L(d, 1)$ -List Labelling für K konstruiert werden. Daraus folgt $\chi_\ell^{d,1}(K) \leq k_g$. ■

Folgerung 4.10 *Enthält der Kaktus K einen Δ -Knoten dessen sämtliche Nachbarn Δ -Knoten sind, so wissen wir bereits aus Folgerung 3.2, daß $\chi_\ell^{d,1}(K) \geq \Delta + 2d - 1$ ist. Damit ist die obere Schranke für manche g und Δ bestmöglich.*

Bemerkung 4.7 *Es existieren Kakteen mit Tailenweite 3 und Maximalgrad $\Delta \geq 3$, bei denen für $d \geq 2$ die untere Schranke $\lambda_{d,1} \geq \min \{ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor - 3 + 2d, 3d \}$ gilt. Gemäß dem letzten Satz ist für diese Graphen*

$$\min \left\{ \left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor - 2 + 2d, 1 + 3d \right\} \leq \chi_\ell^{d,1} \leq \Delta + 3d - 2,$$

so daß die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke höchstens $\max \{ d - \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor, \Delta - 3 \}$ beträgt.

Beispiel 4.3 Als Beispiel zur letzten Bemerkung betrachten wir die im Vorfeld charakterisierten Kakteen $K(\Delta, e) =: K$, wobei e hinreichend groß sein soll. Diese Graphen haben chromatische Zahl 3. Es seien die Farbstufen $F_i = \{id, 1 + id, \dots, d-1 + id\}$ für $i \geq 0$ gegeben. Verwendet man bei einem $L(d, 1)$ -Labelling ein Label aus F_j , $j \geq 3$, so ist natürlich das maximale Label $\geq 3d$. Sei nun f ein Labelling für K mit $f(v) \in \bigcup_{i=0}^2 F_i$ für alle $v \in V(K)$. Ordnet man jedem Knoten mit einem Label aus der Farbstufe i , $i = 0, 1, 2$, die Farbe i zu, so muß sich offensichtlich eine 3-Färbung der Knotenmenge ergeben. Seien V_i , $i = 0, 1, 2$, die zugehörigen Farbklassen. Als erstes bemerkt man, daß es stets ein $j \in \{0, 1, 2\}$ gibt, so daß in V_j eine Menge von $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ Knoten enthalten ist, die paarweise Abstand 2 haben. O.B.d.A. sei $j = 0$. Damit existiert ein Knoten $u \in V_0$ mit $f(u) \geq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil - 1$. Aufgrund von $|N(u) \cap V_1| \geq \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor$ muß ein Knoten $v \in N(u) \cap V_1$ mit $f(v) \geq (\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil - 1) + d + (\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor - 1) = \Delta - 2 + d$ vorhanden sein. Analog schließt man auf die Existenz eines Knotens $w \in N(v) \cap V_2$ mit $f(w) \geq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor - 3 + 2d$. Daraus resultiert $\max_{v \in V(K)} f(v) \geq \min \{ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor - 3 + 2d, 3d \}$.

Satz 4.23 *Enthält ein Kaktus K mit Maximalgrad $\Delta = 3$ einen Kreis der Länge 5, dann gilt $\chi_\ell^{1,1}(K) = 5$. Ansonsten ist $\chi_\ell^{1,1}(K) = \Delta + 1$ für $\Delta \geq 3$.*

Beweis. Es wird die Reduktion-Labelling-Methode aus dem Algorithmus 4.3 verwendet. Lemma 4.8 zeigt, daß diese Methode ein $L(1, 1)$ -List Labelling für jede $(\Delta + 1)$ -Listenzuweisung erzeugen kann; es sei denn, $\Delta = 3$ und es muß ein Endkreis der Länge 5 entfaltet werden. In diesem Fall würde eine 5-Listenzuweisung genügen. Demzufolge gilt $\chi_\ell^{1,1}(K) \leq 5 = \Delta + 2$ für jeden Kaktus K mit $\Delta = 3$, der einen Kreis der Länge 5 als Untergraphen enthält. Ferner gilt $\chi_\ell^{1,1}(K) \leq \Delta + 1$ für einen Kaktus K mit $\Delta > 3$ oder $C_5 \not\subseteq K$. Da K immer den Stern $K_{1,\Delta}$ als Untergraphen enthält, gilt $\chi_\ell^{1,1}(K) \geq \chi_\ell^{1,1}(K_{1,\Delta}) = \Delta + 1$ (siehe Satz 4.9). Existiert in K ein Kreis der Länge 5, so ist $\chi_\ell^{1,1}(K) \geq \chi_\ell^{1,1}(C_5) = 5$. Folglich sind die oberen Schranken scharf. ■

Aufgrund von $\chi_\ell^{1,1}(C_5) = \chi(K_5)$ und $\chi_\ell^{1,1}(K_{1,\Delta}) = \chi(K_{\Delta+1})$ ergibt sich damit:

Folgerung 4.11 *Für jeden Kaktus K gilt $\chi_\ell^{1,1}(K) = \chi_\ell^1(K^2) = \chi(K^2)$.*

4.4. Graphen mit $\chi_\ell^{2,1} = \lambda_{2,1} + 1$

Sei $\chi^P(G) := \lambda_P(G) + 1$. Angeregt durch folgende, in einer früheren Version von [39] geäußerte, Vermutung

Vermutung 4.3 (Fiala, Škrekovski) *Für alle Abstandsbedingungen P und alle $n > 0$ gelten*

$$\chi^P(P_n) = \chi_\ell^P(P_n) \quad \text{und} \quad \chi^P(C_n) = \chi_\ell^P(C_n).$$

wollen wir uns nun ein wenig mit der Beziehung zwischen L_P -Labellings und ihren Listenversionen beschäftigen. Trivialerweise gilt $\chi^P(G) \leq \chi_\ell^P(G)$ für jeden Graphen G . Doch wann gilt sogar $\chi^P(G) = \chi_\ell^P(G)$? Wie sich bereits in den vergangenen Kapiteln herausgestellt hat, war die Vermutung von Fiala und Škrekovski zu optimistisch, da bereits χ^d und χ_ℓ^d bei Wegen und Kreisen voneinander abweichen. Interessant ist jedoch, daß bei manchen Abstandsbedingungen P relativ häufig Gleichheit zwischen χ^P und χ_ℓ^P gilt.

Besonders deutlich wird das bei $P = (2, 1)$, denn es gilt $\chi^{2,1} = \chi_\ell^{2,1}$ für Wege, Sterne, Kreise und natürlich vollständige Graphen. Außerdem stellte Chen [26] fest, daß auch

$$\begin{aligned} \chi^{2,1}(K_{2,n}) &= \chi_\ell^{2,1}(K_{2,n}) = n + 3, \quad \text{für alle } n \geq 2 \quad \text{und} \\ \chi^{2,1}(S_{m,n}) &= \chi_\ell^{2,1}(S_{m,n}) = 2m + n, \quad \text{für alle } m, n \geq 1 \end{aligned}$$

gelten, wobei $S_{m,n} = K_m + \overline{K}_n$ die Verbindung (engl.: join, siehe Definition auf Seite 133) einer Clique K_m mit einer unabhängigen Menge \overline{K}_n ist. Weiterhin wissen wir bereits, daß für jeden Baum T die Beziehung

$$\Delta + 2 \leq \chi^{2,1}(T) \leq \chi_\ell^{2,1}(T) \leq \Delta + 3$$

gilt. Damit liegt

Vermutung 4.4 *Ist T ein Baum, so gilt $\chi^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$.*

nahe. Um dieser Vermutung auf den Grund zu gehen, müßte man untersuchen, ob für alle Bäume mit $\chi^{2,1} = \Delta + 2$ auch $\chi_\ell^{2,1} = \Delta + 2$ erfüllt ist. Ein erster Schritt in diese Richtung ist das Betrachten weiterer spezieller Bäume. Da für Wege und Sterne die Gleichheit schon gezeigt ist, bieten sich Raupen (siehe Bemerkung 3.3) und Kometen an. Ein *Komet* ist ein Baum mit der Eigenschaft, daß nach Löschen sämtlicher Blätter ein Stern übrigbleibt. D.h. Kometen sind Bäume mit Radius höchstens 2. Zu den Kometen und Raupen zählen auch Doppelsterne (vgl. Bemerkung 3.3) und Doppelstern-ähnliche Bäume, die wir *Zweisterne* nennen wollen. Diese entstehen aus zwei Sternen durch Verschmelzen eines Blattes des ersten Sternes mit einem Blatt des zweiten Sternes. Solche Bäume werden nun untersucht, wofür die folgenden zwei Lemmata sehr hilfreich sind:

Lemma 4.9 *Ist für einen Baum T eine Listenzuweisung \mathcal{L} mit $|L(v)| \geq n + 2$ für alle $v \in V(T)$ gegeben, und v ein Blatt, für dessen Nachbarn w gilt $\deg(w) < n$, so kann dem Knoten v stets ein Label aus seiner Liste zugewiesen werden.*

Beweis. Seien v und w wie im Lemma definiert. Dann sind für v höchstens $3 + (n - 2) = n + 1$ Label verboten, aufgrund der Label der Knoten aus $N[w] - \{v\}$. Folglich existiert in $L(v)$ stets ein zulässiges Label. \square

Lemma 4.10 *Sei S ein Stern mit dem Mittelknoten w und den Blättern v_1, \dots, v_n . Ferner sei eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(S)\}$ mit $|L(w)| \geq n + 1$, $|L(v_i)| \geq i + 3$ für $i = 1, \dots, n - 1$ und $|L(v_n)| \geq n + 2$ gegeben. Dann existiert stets ein zulässiges $L(2, 1)$ -List Labelling für S .*

Beweis. Aus Lemma 4.1 (ii) wissen wir, daß es maximal $4 + 2(n - 1) - (n + 2) = n$ Label $c \in L(w)$ gibt, die $L(v_n)$ n -eliminieren. Da $|L(w)| \geq n + 1$ ist, gibt es also stets ein Label $c^* \in L(w)$, welches maximal zwei Label in $L(v_n)$ löscht. Dieses Label wir w zugewiesen. Löscht man die daraus entstehenden verbotenen Label aus der Liste $L(v_i)$, $i = 1, \dots, n$, eine neue Liste $L'(v_i)$ erhaltend, so gelten $|L'(v_i)| \geq i$ für $i = 1, \dots, n$. Damit ist es möglich, den Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge jeweils das kleinste mögliche Label aus ihrer Liste zuzuweisen. \square

Satz 4.24 *Ist T ein Doppelstern oder Zweistern, so gilt $\chi_\ell^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$.*

Beweis. Sei T ein Doppelstern bzw. Zweistern mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$ (für $\Delta \leq 2$ siehe Resultate für Wege auf Seite 100). Aufgrund von Lemma 4.9 können wir annehmen, daß T zwei Δ -Knoten enthält, da sich andernfalls das Problem auf die Berechnung von $\chi_\ell^{2,1}$ von Sternen reduziert.

Es ist bekannt bzw. leicht verifizierbar, daß $\chi_\ell^{2,1}(T) = \Delta + 2$ gilt. Folglich muß $\chi_\ell^{2,1}(T) = \Delta + 2$ gezeigt werden.

Im folgenden sei $L'(v)$ die Liste, welche aus $L(v)$ durch Löschen verbotener Label hervorgeht, nachdem anderen Knoten Label zugewiesen worden sind.

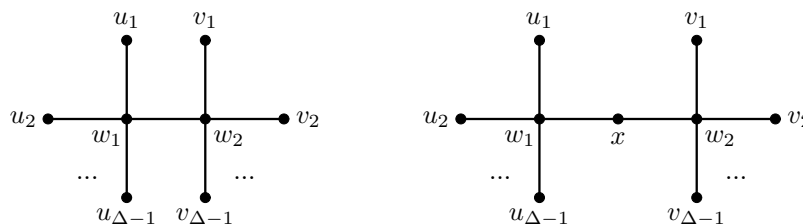


Abbildung 4.4.: Doppelstern und Zweistern

Fall 1. T ist ein Doppelstern.

Die Knoten von T seien wie in Bild 4.4 links bezeichnet. Ferner seien eine $(\Delta + 2)$ -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T)\}$ gegeben, $c_1 := \min \bigcup_{v \in N[w_1] - \{w_2\}} L(v)$ und $c_2 := \min \bigcup_{v \in N[w_2] - \{w_1\}} L(v)$, wobei o.B.d.A. $c_1 \leq c_2$ gelte.

(vollständige Induktion über Δ):

IA: $\Delta = 1$: $T \cong P_2$ und es gilt $\chi_\ell^{2,1}(T) = 3 = \Delta + 2$. ✓
 $\Delta = 2$: $T \cong P_4$ und es gilt $\chi_\ell^{2,1}(T) = 4 = \Delta + 2$. ✓

IV: Die Behauptung gelte für alle $\Delta \leq \Delta_0 - 1$.

IS: $\Delta = \Delta_0 \geq 3$.

Fall 1.1. $c_1 \in L(w_1)$.

Wir weisen dem Knoten w_1 das Label c_1 zu. Folglich gelten $|L'(w_2)| \geq \Delta$, sowie $|L'(u_i)| \geq \Delta$ und $|L'(v_i)| \geq \Delta + 1$ für alle $i = 1, \dots, \Delta - 1$. Die Knoten $w_2, v_1, \dots, v_{\Delta-1}$ induzieren einen Stern mit $\Delta - 1$ Blättern, für den laut Lemma 4.10 ein $L(2, 1)$ -List Labelling existiert. Nach Zuweisung dieser Label gilt nun $|L'(u_i)| \geq \Delta - 1$ für alle $i = 1, \dots, \Delta - 1$, so daß es stets möglich ist, den Knoten u_i paarweise verschiedene Label zuzuweisen.

Da der Fall $c_1 = c_2 \in L(w_2)$ analog ist, wird dieser vernachlässigt.

Fall 1.2. $c_1 \notin L(w_j)$ ($j = 1, 2$) $\wedge c_1 = c_2$.

Folglich gilt o.B.d.A. $c_1 \in L(u_1)$ und $c_1 \in L(v_1)$. Wir weisen den Knoten u_1 und v_1 das Label c_1 zu. Die Knoten ohne Label induzieren einen Doppelstern mit Maximalgrad $\Delta - 1$ und es gelten $|L'(w_1)|, |L'(w_2)| \geq \Delta + 1$, sowie $|L'(u_i)|, |L'(v_i)| \geq \Delta + 1$ für alle $i = 2, \dots, \Delta - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $L(2, 1)$ -List Labelling.

Fall 1.3. $c_1 \notin L(w_1) \wedge c_2 = c_1 + 1$.

Unterfall 1.3.a. $c_2 \in L(w_2)$.

O.B.d.A. ist $c_1 \in L(u_1)$. Wir weisen dem Knoten u_1 das Label c_1 und dem Knoten w_2 das Label $c_1 + 1$ zu. Es ergeben sich $|L'(w_1)| \geq \Delta$, sowie $|L'(u_i)| \geq \Delta$ für $i = 2, \dots, \Delta - 1$ und $|L'(v_i)| \geq \Delta$ für alle $i = 1, \dots, \Delta - 1$. Die Knoten $w_1, u_2, \dots, u_{\Delta-1}$ induzieren einen Stern mit Maximalgrad $\Delta - 2$. Wegen $\chi_\ell^{2,1}(K_{1, \Delta-2}) = \Delta$, existiert für diesen Stern ein $L(2, 1)$ -List Labelling. Nach Zuweisung der Label gilt $|L'(v_i)| \geq \Delta - 1$ für alle $i = 1, \dots, \Delta - 1$. Damit können auch diesen Knoten zulässig Label gegeben werden.

Unterfall 1.3.b. $c_2 \notin L(w_2)$.

O.B.d.A. ist $c_1 \in L(u_1)$ und $c_1 + 1 \in L(v_1)$. Wir weisen dem Knoten u_1 das Label c_1 und dem Knoten v_1 das Label $c_1 + 1$ zu. Die Knoten ohne Label induzieren einen Doppelstern mit Maximalgrad $\Delta - 1$ und es gelten $|L'(w_1)|, |L'(w_2)| \geq \Delta + 1$, sowie $|L'(u_i)|, |L'(v_i)| \geq \Delta + 1$ für alle $i = 2, \dots, \Delta - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $L(2, 1)$ -List Labelling.

Fall 1.4. $c_1 \notin L(w_1) \wedge c_2 \geq c_1 + 2$.

Unterfall 1.4.a. $c_1 + 1 \in L(w_1)$.

Wir weisen dem Knoten w_1 das Label $c_1 + 1$ zu. Es ergeben sich $|L'(w_2)| \geq \Delta + 1$, $|L'(u_i)| \geq \Delta - 1$ und $|L'(v_i)| = |L(v_i)| = \Delta + 2$ für $i = 1, \dots, \Delta - 1$. Nun weisen

wir den Knoten $u_1, \dots, u_{\Delta-1}$ auf Greedy-Art Label zu; dies ist stets möglich, da jeder dieser Knoten mindestens noch $\Delta - 1$ Label zur Verfügung hat. Aufgrund des Labellings dieser Knoten gilt nun $|L'(w_2)| \geq 2$. Weisen wir nun dem Knoten w_2 ein Label zu, resultiert daraus $|L'(v_i)| \geq \Delta - 1$ für $i = 1, \dots, \Delta - 1$. Somit sind auch den restlichen Knoten zulässig Label zuweisbar.

Unterfall 1.4.b. $c_1 + 1 \notin L(w_1)$.

O.B.d.A. ist $c_1 \in L(u_1)$. Wir weisen dem Knoten u_1 das Label c_1 zu. Dies ändert höchstens die Listengröße der anderen Knoten u_i , nämlich in $|L'(u_i)| \geq \Delta + 1$ für alle $i = 2, \dots, \Delta - 1$. Aufgrund von Lemma 4.1 (ii) gibt es in $L(w_2)$ höchstens $4 + 2(\Delta - 1) - (\Delta + 2) = \Delta$ Label, die $L(v_{\Delta-1})$ Δ -eliminieren. Somit können wir w_2 ein Label zuweisen, welches mindestens Δ Label mit Differenz ≥ 2 in $L(v_{\Delta-1})$ hat. Damit gelten nun $|L'(u_i)| \geq \Delta$ für alle $i = 2, \dots, \Delta - 1$, $|L'(w_1)| \geq \Delta - 1$, $|L'(v_{\Delta-1})| \geq \Delta$ sowie $|L'(v_i)| \geq \Delta - 1$ für $i = 1, \dots, \Delta - 2$. Die Knoten $w_1, u_2, \dots, u_{\Delta-1}$ induzieren einen Stern mit $\Delta - 2$ Blättern. Gemäß Lemma 4.10 existiert für diesen Stern eine zulässige Listenzuweisung. Aufgrund des Labellings dieser Knoten gilt nun $|L'(v_i)| \geq \Delta - 2$ für $i = 1, \dots, \Delta - 2$ und $|L'(v_{\Delta-1})| \geq \Delta - 1$, so daß es immer möglich ist, diesen Knoten paarweise verschiedene Label zuzuweisen.

Da bei jeder möglichen $(\Delta + 2)$ -Listenzuweisung ein zulässiges $L(2, 1)$ -List Labelling für den Doppelstern T existiert, gilt $\chi_\ell^{2,1}(T) = \Delta + 2$.

Fall 2. T ist ein Zweistern.

Die Knoten von T seien wie in Bild 4.4 rechts bezeichnet. Ferner sei eine $(\Delta + 2)$ -Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T)\}$ gegeben.

Sei $\Delta = 3$. Um zu zeigen, daß für jede 5-Listenzuweisung ein $L(2, 1)$ -List Labelling für T existiert, genügt die Angabe einer Orientierung D des Multigraphen $T^{(2,1)}$ mit maximalem Innengrad 4 und $EE(D) \neq EO(D)$:

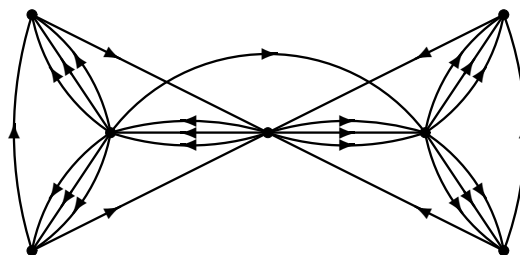


Abbildung 4.5.: Orientierung des Multigraphen $T^{(2,1)}$, wobei T Zweistern mit $\Delta = 3$ ist

Es läßt sich recht schnell überprüfen, daß für jeden nichtleeren Eulerschen Unterdigraphen H ein Cluster von drei parallelen Bögen in D existiert, von dem ein Bogen oder zwei Bögen zu H gehören. Aufgrund der Wahlmöglichkeit $\binom{3}{1}$ bzw. $\binom{3}{2}$ ergeben sich stets Vielfache von 3 für die Anzahl der Eulerschen Unterdigraphen. Demzufolge gilt $EE(D) \equiv 1 \pmod{3}$ (da der leere Unterdigraph dazugezählt wird) und $EO(D) \equiv 0 \pmod{3}$, woraus $EE(D) \neq EO(D)$ resultiert.

Sei $\Delta = 4$ und eine 6–Listenzuweisung gegeben. Gemäß Lemma 4.1 (ii) existieren in $L(w_1)$ zwei Label c_1^i , $i = 1, 2$, so daß in $L(u_3)$ mindestens Δ Label mit Differenz ≥ 2 zu c_1^i vorhanden sind. Wir weisen eins davon dem Knoten w_1 zu. Damit gelten jetzt $|L'(x)| \geq 3$, $|L'(w_2)| \geq 5$, $|L'(v_i)| = |L(v_i)| = 6$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $|L'(u_i)| \geq 3$ für $i = 1, 2$ und $|L'(u_3)| \geq 4$. Betrachten wir nun den induzierten Stern $T[N[w_2]]$. Sei $c_1 := \min \bigcup_{v \in N[w_2]} L'(v)$.

Fall 2.1. $c_1 \in L'(w_2)$.

Wir weisen dem Knoten w_2 das Label c_1 zu. Folglich gelten $|L'(x)| \geq 1$ sowie $|L'(v_i)| \geq 4$ für $i = 1, 2, 3$. Damit ist es möglich den Knoten x, v_1, v_2, v_3 in dieser Reihenfolge zulässig Label zuzuweisen.

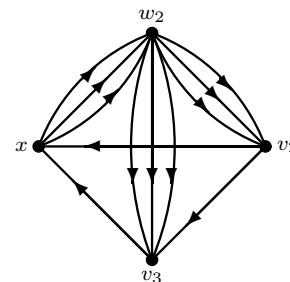
Fall 2.2. $c_1 \notin L'(w_2) \wedge c_1 \in L'(x)$.

Wir weisen dem Knoten x das Label c_1 zu. Damit ist nun $|L'(w_2)| \geq 4$ und $|L'(v_i)| \geq 5$ für $i = 1, 2, 3$. Gemäß Lemma 4.10 existiert für den durch die Knoten w_2, v_1, v_2, v_3 induzierten Stern ein $L(2, 1)$ –List Labelling.

Fall 2.3. $c_1 \notin L'(x), L'(w_2)$.

O.B.d.A. gelte $c_1 \in L'(v_1)$. Wir weisen das Label c_1 dem Knoten v_1 zu. Daraus folgt $|L'(x)| \geq 3$, $|L'(w_2)| \geq 4$ und $|L'(v_i)| \geq 5$ für $i = 2, 3$.

Für den durch die Knoten x, w_2, v_2, v_3 induzierten Stern S stellen wir den Multigraphen $S^{(2,1)}$ auf und bestimmen eine Orientierung D für $S^{(2,1)}$ mit $EE(D) \neq EO(D)$ und $d^-(x) \leq 2$, $d^-(w_2) \leq 3$ sowie $d^-(v_i) \leq 4$ für $i = 2, 3$. Die im Bild rechts gezeigte Orientierung erfüllt die Kriterien, denn es gelten $EE(D) \equiv 1 \pmod 3$ und $EO(D) \equiv 0 \pmod 3$ (dies läßt sich analog zum Fall $\Delta = 3$ zeigen).



Folglich existiert für den Stern $T[N[w_2]]$ stets ein zulässiges $L(2, 1)$ –List Labelling. Weisen wir diese Label zu, gilt nun $|L'(u_i)| \geq 2$ für $i = 1, 2$ und $|L'(u_3)| \geq 3$. Damit können auch diesen Knoten in der Reihenfolge u_1, u_2, u_3 Label gegeben werden.

Sei $\Delta \geq 5$. Aufgrund von Lemma 4.1 (ii) existieren in $L(w_1)$ zwei Label c_1^i , $i = 1, 2$, so daß in $L(u_{\Delta-1})$ mindestens Δ Label mit Differenz ≥ 2 zu c_1^i vorhanden sind. Analog existieren in $L(w_2)$ zwei Label c_2^i , $i = 1, 2$, mit derselben Eigenschaft bezüglich $L(v_{\Delta-1})$. Wir weisen dem Knoten w_1 das Label c_1^1 und dem Knoten w_2 ein Label c_2^i , $i = 1, 2$ mit $c_2^i \neq c_1^1$ zu. Damit gelten nun $|L'(u_i)|, |L'(v_i)| \geq \Delta - 1$ für alle $i = 1, \dots, \Delta - 2$, $|L'(u_{\Delta-1})|, |L'(v_{\Delta-1})| \geq \Delta$ sowie $|L'(x)| \geq \Delta - 4 \geq 1$. Daher ist es möglich, den Knoten $x, u_1, \dots, u_{\Delta-1}, v_1, \dots, v_{\Delta-1}$ in dieser Reihenfolge mit einem Greedy-Algorithmus ihre Label zuzuweisen.

Da bei jeder möglichen $(\Delta + 2)$ –Listenzuweisung ein zulässiges $L(2, 1)$ –List Labelling für den Zweistern T existiert, gilt $\chi_\ell^{2,1}(T) = \Delta + 2$. ■

Satz 4.25 *Ist T ein Komet, so gilt $\chi^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$.*

Beweis. Sei T ein Komet mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$. Gilt $\chi^{2,1}(T) = \Delta + 3$, so ist die Gleichheit wegen $\chi_\ell^{2,1}(T) \leq \Delta + 3$ bereits gegeben. Sei T nun ein Komet mit $\chi^{2,1}(T) = \Delta + 2$. Aus [51] ist bekannt, daß es dann in T weder einen Δ -Knoten geben kann, der zu zwei Δ -Knoten adjazent ist, noch einen Knoten, der zu drei Δ -Knoten adjazent ist (siehe auch Bild 3.20). Da in einem Kometen Δ -Knoten paarweise höchstens Abstand 2 haben können und es ferner aufgrund von Lemma 4.9 genügt, Δ -Knoten und alle zu Δ -Knoten adjazenten Knoten zu betrachten, müssen nur drei mögliche Konfigurationen untersucht werden:

- es existiert nur ein Δ -Knoten \rightarrow Stern
- zwei Δ -Knoten sind benachbart \rightarrow Doppelstern
- zwei Δ -Knoten haben Abstand 2 \rightarrow Zweistern

Da $\chi_\ell^{2,1} = \Delta + 2$ bereits im Satz 4.9 für Sterne und im Satz 4.24 für Doppel- und Zweisterne gezeigt wurde, folgt $\chi^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$ für jeden Kometen T . ■

Satz 4.26 *Sei T eine Raupe mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$ und $a := \min\{\text{dist}(v, w) \mid v, w \in V(T) \wedge \text{deg}(v) = \text{deg}(w) = \Delta\}$. Dann ist $\chi^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (i) $\Delta = 4, a \geq 4$, (ii) $\Delta = 5, a \geq 3$, (iii) $\Delta \geq 6, a \geq 2$.

Beweis. Wegen Lemma 4.9 genügt es, die Raupe T' zu betrachten, die aus T durch sukzessives Löschen aller Blätter hervorgeht, welche nicht zu einem Δ -Knoten adjazent sind. Es seien $\Delta \geq 4$ und $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V(T')\}$ eine $(\Delta + 2)$ -Listenzuweisung. Die Δ -Knoten von T' seien der Reihenfolge nach (von links nach rechts) mit w_1, \dots, w_l bezeichnet. Ferner seien $u_1^i, \dots, u_\Delta^i, i = 1, \dots, l$ die Nachbarn von w_i , so daß $\text{deg}(u_1^i) \geq \text{deg}(u_2^i) \geq \dots \geq \text{deg}(u_\Delta^i)$ gilt. Aufgrund von $\Delta > 3$ ist stets $\text{deg}(u_\Delta^i) = 1$. Für $i = 1, \dots, l$ weisen wir nun jedem Knoten w_i ein Label $f(w_i) \in L(w_i)$ zu, welches maximal zwei Label aus $L(u_\Delta^i)$ löscht. Dies ist stets möglich, denn es gibt mindestens $(\Delta + 2) - [4 + 2(\Delta - 1) - (\Delta + 2)] = 2$ Label in $L(w_i)$, die $L(u_\Delta^i)$ nicht Δ -eliminieren (vgl. Lemma 4.1 (ii)). Ist $i \geq 2$ und $\text{dist}(w_{i-1}, w_i) = 2$, so wird $f(w_i)$ verschieden von $f(w_{i-1})$ gewählt. Für jeden Knoten x vom Grad kleiner als Δ löschen wir aus $L(x)$ alle jetzt verbotenen Label und bezeichnen die verbleibende Liste mit $L'(x)$. Offenbar gilt dann $|L'(u_j^i)| \geq \Delta - 1, j = 3, \dots, \Delta - 1$, und $|L'(u_\Delta^i)| \geq \Delta$ für alle $i = 1, \dots, l$. D.h., sind den Knoten u_1^i und u_2^i bereits Label zugewiesen worden, so kann man den Knoten u_3^i, \dots, u_Δ^i in dieser Reihenfolge stets mit einem Greedy-Algorithmus ihre Label zuteilen. Daher müssen wir die Knoten u_3^i, \dots, u_Δ^i für $i = 1, \dots, l$ nicht länger betrachten, sondern nur noch diejenigen

Knoten, die das "Rückgrat" T'' der Raupe bilden. Löscht man aus T'' sämtliche Δ -Knoten, so entsteht ein Wald, dessen Komponenten alle Wege mit kleinen Randlisten sind. Diese Wege seien mit P^0, \dots, P^l bezeichnet, wobei P^i , $i = 1, \dots, l - 1$, jeweils für den Weg zwischen den Knoten w_i und w_{i+1} steht und $P^0 = (u_2^1)$, $P^l = (u_2^l)$ gesetzt werden.

Es gilt $|L'(u_2^1)| \geq \Delta - 1 \geq 3$, d.h. wir können dem Knoten aus P^0 zulässig ein Label geben. Angenommen, $i \geq 1$ und den Knoten der Wege P^0, \dots, P^{i-1} seien bereits Label zugewiesen worden. Ferner seien $t := |V(P^i)|$ und $P^i := (v_1, \dots, v_t)$ (von links nach rechts numeriert). Ist $t \geq 5$, so gilt:

$$\begin{aligned} |L'(v_1)| &\geq \Delta - 2, & |L'(v_2)| &\geq \Delta + 1, & |L'(v_3)| &= \dots = |L'(v_{t-2})| = \Delta + 2, \\ |L'(v_{t-1})| &\geq \Delta + 1, & |L'(v_t)| &\geq \Delta - 1. \end{aligned}$$

Für $t \leq 4$ zeigt die Abbildung 4.6 jeweils die Mindestgröße von $L'(v_i)$.

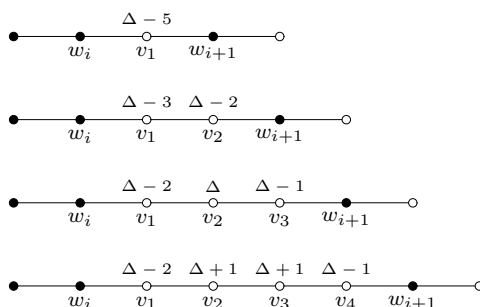


Abbildung 4.6.: Mindestgrößen der Listen von den Knoten des Weges P^i

- Ist $t \geq 3$ und $\Delta \geq 4$, so wissen wir aus Lemma 4.6, daß für P^i ein zulässiges $L(2, 1)$ -List Labelling existiert.
- Ist $t = 2$ und $\Delta \geq 5$, so gilt $|L'(v_1)| + |L'(v_2)| \geq 2\Delta - 5 \geq 5 = \sigma^2(P_2)$, d.h. auch hier gibt es ein zulässiges $L(2, 1)$ -List Labelling.
- Ist $t = 1$ und $\Delta \geq 6$, so kann dem Knoten v_1 wegen $|L'(v_1)| \geq \Delta - 5 \geq 1$ stets ein Label zugewiesen werden.

Damit kann das Labelling der Δ -Knoten zulässig auf die Knoten vom Grad kleiner Δ erweitert werden, und es ergibt sich ein $L(2, 1)$ -List Labelling für T'' und damit auch für T . ■

Bemerkung 4.8 *Es gilt $\chi^{2,1}(T) = \chi_\ell^{2,1}(T)$ für jeden Baum T , welcher einen der Bäume aus Abbildung 3.20 als Untergraphen besitzt.*

Beweis. Für jeden Baum H in Abbildung 3.20 gilt $\chi^{2,1}(H) = \lambda_{2,1}(H) + 1 = \Delta + 3$. Ist $H \subseteq T$, so folgt die Gleichheit aus $\chi^{2,1}(H) \leq \chi_\ell^{2,1}(T) \leq \Delta + 3$. □

Neben den Kreisen und den soeben betrachteten speziellen Bäumen gibt es weitere Kakteen, für die $\chi^{2,1} = \chi_\ell^{2,1}$ gilt.

Beobachtung 4.2 Für jedes $g \geq 3$ existieren Kakteen mit Tailleweite g , für welche $\chi^{2,1} = \chi_\ell^{2,1}$ gilt.

Beweis. Es gilt $\chi^{2,1} = \chi_\ell^{2,1} = \Delta + 3$ für alle Kakteen K mit Tailleweite $g \geq 4$ und Maximalgrad $\Delta \geq 5$, welche einen induzierten Untergraphen besitzen, der isomorph zu einem Baum aus Abbildung 3.20 ist. Dies folgt einerseits aus $\chi^{2,1}(K) = \lambda_{2,1}(K) + 1 \geq \Delta + 3$ und andererseits aus $\chi_\ell^{2,1}(K) \leq \Delta + 3$, bekannt aus Satz 4.22.

Ebenfalls aus Satz 4.22 wissen wir, daß $\chi_\ell^{2,1}(K) \leq \Delta + 4$ für einen Kaktus K mit Tailleweite 3 ist. Für den Existenznachweis genügt daher die Angabe eines konkreten Kaktus K mit Tailleweite 3 und $\lambda_{2,1} > \Delta + 2$. Dazu betrachten wir den im nächsten Bild dargestellten Kaktus $K(4,3)$. Dieser besitzt kein zulässiges $L(2,1)$ -Labelling mit maximalem Label $\Delta + 2 = 6$. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen:

Angenommen, es ist möglich, allen Knoten Label aus $\{0, 1, \dots, 6\}$ zuzuweisen. Dann muß das zentrale Dreieck A eine der Label-Sequenzen $0, 2, 4 / 0, 2, 5 / 0, 2, 6 / 0, 3, 5 / 0, 3, 6$ oder $1, 3, 5$ erhalten. Alle weiteren Möglichkeiten ergeben sich aus den bereits genannten durch Abziehen von der 6, z.B.: $1, 4, 6 \doteq 0, 2, 5$, da $1, 4, 6 = 6 - 5, 6 - 2, 6 - 0$. Wenn wir also zeigen können, daß die obigen sechs Label-Sequenzen in keinem zulässigen Labelling enthalten sein dürfen, so ergibt sich ein Widerspruch. Testet man alle sechs, so zeigt sich, daß die Sequenzen $0, 2, 4 / 0, 2, 6 / 0, 3, 5$ bereits in einem Dreieck B "in einer Sackgasse" enden; das bedeutet mindestens einem Knoten eines Dreiecks B kann kein Label mehr zugewiesen werden. Setzt man $0, 2, 5$ ein, so erhält ein Dreieck B zwingend die Label $2, 4, 6 \doteq 0, 2, 4$, so daß wir also in einem Dreieck C stagnieren. Ebenso führt $1, 3, 5$ nicht zum Erfolg, da hier ein Dreieck B zwingend die Label $0, 2, 5$ erhalten muß, so daß wir demnach in einem Dreieck D zum Stillstand kommen. Die letzte Sequenz $0, 3, 6$ ist auch nicht möglich, was die Abbildung 4.7 verdeutlicht. Somit kann es kein zulässiges $L(2,1)$ -Labelling mit maximalem Label 6 geben.

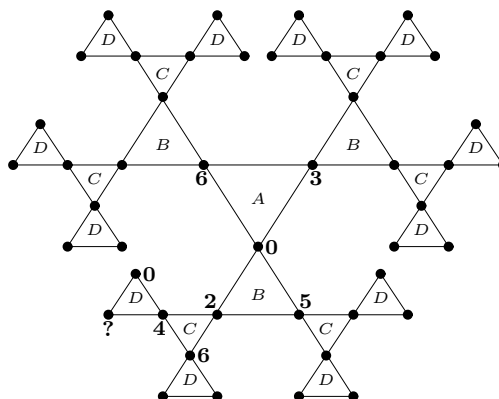


Abbildung 4.7.: Kaktus $K(4,3)$ mit $\lambda_{2,1} > \Delta + 2$

5. Weitere Färbungskonzepte

Natürlich konnten in dieser Arbeit nicht alle Knotenfärbungen mit Abstandsbedingungen vorgestellt werden, dafür ist das Angebot an solchen Konzepten einfach zu reichhaltig. Oftmals bilden die vorgestellten Probleme aber die Grundlage für weiterführende Untersuchungen. Beispielsweise untersuchten Griggs und Jin [50] $L(d, s)$ -Labellings, bei denen sowohl d und s als auch die Label reelle Zahlen sein dürfen. Ferner wurden auch $L(d, s)$ -Labellings mit $d < s$ betrachtet (Bodlaender et al. [11], Calamoneri et al. [20]), obwohl diese relativ praxisfremd sind. Fiala et al. [38] untersuchten die Möglichkeit, $L(d, s)$ -Labellings zu konstruieren, wenn bereits im Vorfeld einige Knoten Label erhalten haben und diese nicht mehr veränderlich sind (engl.: precoloring extension). Ebenso wurde das $L(d, s)$ -Labelling-Problem bereits auf Digraphen verallgemeinert (Chang et al. [23]). Viele neue Fragestellungen ergeben sich auch, wenn man aus der Abbildungstheorie bekannte Begriffe wie Injektivität und Surjektivität ins Spiel bringt, oder einen anderen Abstands begriff verwendet. Surjektive $L(d, s)$ -Labellings – auch bekannt als Lückenlose $L(d, s)$ -Labellings – wurden beispielsweise von Fishburn und Roberts [40],[41] sowie von Georges und Mauro [47] und Král et al. [69] untersucht. Drei weitere Variationen sollen nun kurz vorgestellt werden.

5.1. s -separierte $L(d, s)$ -Labellings

Georges und Mauro [44] führten 1995 die folgende Definition ein:

Definition 5.1 *Ein s -separiertes $L(d, s)$ -Labelling für einen Graphen $G = (V, E)$ ist ein $L(d, s)$ -Labelling f mit der Eigenschaft*

$$\forall x, y \in V : x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq s.$$

$\Lambda_{d,s}(G)$ ist die kleinste Zahl m , für die G ein s -separiertes $L(d, s)$ -Labelling f mit $\max\{f(x) \mid x \in V\} = m$ besitzt.

Für $s = 1$ können wir ein 1-separiertes $L(d, 1)$ -Labelling auch als injektives $L(d, 1)$ -Labelling bezeichnen.

Offensichtlich muß jedes $L(d, s)$ -Labelling eines Graphen G mit Durchmesser 2 gleichzeitig auch ein s -separiertes $L(d, s)$ -Labelling sein, d.h. $\lambda_{d,s}(G) = \Lambda_{d,s}(G)$. Zusammen mit Satz 3.2 (iii) gilt damit insgesamt

$$s(n - 1) = s(\chi(G^2) - 1) \leq \Lambda_{d,s}(G) = \lambda_{d,s}(G) \leq s(n - 1) + (d - s)(\chi(G) - 1).$$

Bereits Chang und Kuo [25] betrachteten injektive $L(2, 1)$ -Labellings für spezielle Graphen mit Durchmesser 2, die durch Verbinden von Graphen hervorgehen. Die *Verbindung* zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, bezeichnet mit $G_1 + G_2$, ist der Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ und der Kantenmenge $E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$. Bekannte Vertreter solcher Verbindungen sind vollständige r -partite Graphen und Räder. In [25] wurde gezeigt, daß $\lambda_{2,1}(G+H) = \Lambda_{2,1}(G+H) = \Lambda_{2,1}(G) + \Lambda_{2,1}(H) + 2$ für beliebige Graphen G und H ist. Georges und Mauro [44] konnten diese Aussage auf s -separierte $L(d, s)$ -Labellings verallgemeinern:

Satz 5.1 (Georges, Mauro, [44]) *Für $r \geq 2$ seien die Graphen G_i , $1 \leq i \leq r$ gegeben. Dann gilt $\lambda_{d,s}(G_1 + \dots + G_r) = d(r-1) + \sum_{i=1}^r \Lambda_{d,s}(G_i)$.*

Da offensichtlich $\Lambda_{d,s}(\overline{K}_n) = s(n-1)$ gilt, erhält man aus diesem Satz das bereits in Tabelle 3.2 aufgeführte Resultat $\lambda_{d,s}(K_{n_1, \dots, n_r}) = d(r-1) + s(n-r)$ für die vollständigen r -partiten Graphen mit n Knoten. Georges und Mauro [44] untersuchten weiterhin s -separierte $L(d, s)$ -Labellings für Wege und Kreise und ermittelten die Resultate aus dem folgenden Satz:

Satz 5.2 (Georges, Mauro, [44]) *Für den Weg P_n bzw. Kreis C_n mit n Knoten gilt:*

$$\Lambda_{d,s}(P_n) = \begin{cases} s(n-1) & , \text{für } \frac{d}{s} \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ d + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor s & , \text{für } \frac{d}{s} > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{cases} ,$$

$$\Lambda_{d,s}(C_n) = \begin{cases} s(n-1) & , \text{für } \frac{d}{s} \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ d + \frac{n}{2}s & , \text{für } 2 \mid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-2}{2} \\ 2d & , \text{für } 2 \nmid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-1}{2} \end{cases} .$$

Folgerung 5.1 *Aus den Sätzen 5.1 und 5.2 ergibt sich für das Rad $W_n = K_1 + C_n$ und für die im Abschnitt 4.4 eingeführten Graphen $S_{m,n} = K_m + \overline{K}_n$:*

$$\Lambda_{d,s}(W_n) = \begin{cases} d + s(n-1) & , \text{für } \frac{d}{s} \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ 2d + \frac{n}{2}s & , \text{für } 2 \mid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-2}{2} \\ 3d & , \text{für } 2 \nmid n \wedge \frac{d}{s} > \frac{n-1}{2} \end{cases} ,$$

$$\Lambda_{d,s}(S_{m,n}) = dm + s(n-1).$$

5.2. Zirkuläre $L(d, s)$ -Labellings

Von Liu und Zhu [74] stammt aus dem Jahre 2003 die folgende Abwandlung der $L(d, s)$ -Labellings, welche die Menge von Labeln als zyklisches Intervall interpretiert.

Definition 5.2 Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und zwei nichtnegative, ganze Zahlen d und s mit $d \geq s$. Ein m -zirkuläres $L(d, s)$ -Labelling von G ist eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$, so daß für je zwei Knoten x und y gilt:

1. $|f(x) - f(y)|_m \geq d$, falls $\text{dist}(x, y) = 1$ und
2. $|f(x) - f(y)|_m \geq s$, falls $\text{dist}(x, y) = 2$,

wobei $|a|_m := \min\{|a|, m - |a|\}$. $\sigma_{d,s}(G)$ ist die kleinste Zahl m , für die G ein m -zirkuläres $L(d, s)$ -Labelling besitzt.

$\sigma_{d,0}(G)$ ist kein völlig neuer Parameter, denn er steht in engem Zusammenhang zur kreischromatischen Zahl $\chi_c(G)$. Diese soll erst einmal definiert werden:

Definition 5.3 Seien a, b positive ganze Zahlen mit $a \geq 2b$. Eine (a, b) -Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, a-1\}$, so daß $|f(x) - f(y)|_a \geq b$ für je zwei adjazente Knoten x und y gilt. Die Größe

$$\chi_c(G) = \inf \left\{ \frac{a}{b} \mid G \text{ besitzt eine } (a, b) \text{-Färbung} \right\}$$

heißt kreischromatische Zahl von G .

Satz 5.3 (Liu, Zhu, [74]) Für jeden Graphen G und jede positive ganze Zahl d gilt $\sigma_{d,0}(G) = \lceil d\chi_c(G) \rceil$.

Interessanter ist der Fall $s > 0$, für den jedoch relativ wenig bekannt ist, u.a. die nun folgenden Resultate für Bäume und Kreise:

Satz 5.4 (Liu, Zhu, [74]) Sei T ein Baum mit Maximalgrad Δ . Dann gilt $\sigma_{d,s}(T) = 2d + s(\Delta - 1)$.

Satz 5.5 (Liu, Zhu, [74]) Für den Kreis C_n mit n Knoten und $d \geq 2$ gilt $\sigma_{d,1}(C_3) = 3d$ und für $n \geq 4$:

$$\sigma_{d,1}(C_n) = \begin{cases} 2d + 1 & , \text{für } n \equiv 0 \pmod{2d + 1} \\ 2d + 2 & , \text{für } n \not\equiv 0 \pmod{2d + 1} \wedge [2 \mid n \vee (2 \nmid n \wedge d < n)] \\ 2d + \lceil \frac{2d}{n-1} \rceil & , \text{für } n \not\equiv 0 \pmod{2d + 1} \wedge d \geq n \wedge 2 \nmid n \end{cases}$$

Ferner gilt stets $\sigma_{d,s}(C_n) \geq 2d + s$ und Gleichheit besteht genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod{\frac{2d+s}{r}}$ ist, wobei r der größte gemeinsame Teiler von $2d + s$ und d ist.

5.3. Consecutive $L(d, 0)$ –List Labellings

Im Jahre 2004 führte Waters [100] die sogenannte *Consecutive Choosability* ein. Diese behandelt Listenfärbungen, wobei sämtliche Listen aus aufeinanderfolgenden Farben bestehen.

Definition 5.4 *Gegeben seien ein Graph $G = (V, E)$ und eine positive, ganze Zahl d . Eine aufeinanderfolgende k –Listenzuweisung sei eine Listenzuweisung $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$ mit $|L(v)| = k$ für alle $v \in V$ und mit der Eigenschaft, daß jede Liste $L(v)$ von der Form $\{a_v + 1, a_v + 2, \dots, a_v + k\}$, $a_v \in \mathbb{N}$ ist. Die kleinste Zahl k , so daß G ein $L(d, 0)$ –List Labelling für jede aufeinanderfolgende k –Listenzuweisung besitzt, wird mit $cch_d(G)$ bezeichnet.*

Für $d = 1$ ergibt sich keine neue Grapheninvariante, denn es gilt $cch_1(G) = \chi(G)$ für jeden Graphen G . Für $d > 1$ ist dieses Konzept einerseits eine Verallgemeinerung der $L(d, 0)$ –Labellings, andererseits eine Abschwächung der $L(d, 0)$ –List Labellings. Damit ergibt sich

$$\lambda_d(G) + 1 = d(\chi(G) - 1) + 1 \leq cch_d(G) \leq \chi_\ell^d(G).$$

Waters konnte sogar eine obere Schranke mit Bezug auf die chromatische Zahl angeben, was bei χ_ℓ^d nicht möglich war:

Satz 5.6 (Waters, [100]) *Ist G ein Graph der Ordnung n und $d \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$cch_d(G) \leq d\chi(G) - \left\lceil \frac{d\chi(G)}{n} \right\rceil + 1.$$

Folgerung 5.2 *Es gilt $\chi(G) - 1 < \frac{cch_d(G)}{d} \leq \chi(G)$ für jeden Graphen G .*

6. Zusammenfassung und Ausblick

Knotenfärbungen mit Abstandsbedingungen sind ein aktuelles und – in Hinblick auf den praktischen Hintergrund der Frequenzzuweisung – auch sehr nützliches Gebiet der Graphentheorie. Die bekanntesten Vertreter dieser Färbungen sind Teil der vorliegenden Arbeit. In Kapitel 2 werden die drei Hauptkonzepte Listenfärbung, T -Färbung und Färbung mit Abstandsbedingungen vorgestellt. Dazu wurden allgemeine Eigenschaften und bekannte Resultate zusammengetragen und an manchen Stellen durch eigene Untersuchungen vervollständigt. Speziell für L_P -Labellings bzw. L_P -List Labellings mit $P = (p_1, \dots, p_r)$ konnten Ergebnisse für den Fall $r = 2$ auf $r \geq 2$ verallgemeinert werden.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit $L(d, s)$ -Labellings, hauptsächlich für $s = 1$. Die in den Abschnitten 3.3 und 3.4 durchgeführte Berechnung bzw. Abschätzung von $\lambda_{d,1}$ für ausgewählte Graphenklassen bildet den Hauptteil dieses Kapitels. Eigene Ergebnisse wurden dabei zu folgenden Graphenklassen erzielt:

Graphenklasse	Exakte Werte oder Schranken für $\lambda_{d,1}$
Reguläre Parkettierungen	Sätze 3.5, 3.6, 3.7
Wegpotenzen	Satz 3.8
Kreispotenzen	Sätze 3.10 – 3.13 & Tabellen 3.3, 3.4
Durchmesser-2-Graphen	Satz 3.14
Bäume	Satz 3.17
Outerplanare Graphen	Satz 3.19
K_4 -Minor-freie Graphen	Satz 3.19

Am umfangreichsten gestaltete sich die Berechnung von $\lambda_{d,1}$ für Kreispotenzen, hauptsächlich aufgrund der intensiven Untersuchung der Zerlegungseigenschaften von C_n^r für sämtliche n und r . Die dabei gewonnenen Resultate können sicherlich bei anderen Fragestellungen in der Graphentheorie eingesetzt werden. Denkbar wäre beispielsweise eine Anwendung beim Konzept der beliebig Knoten-zerlegbaren Graphen (engl.: *arbitrarily vertex-decomposable graphs*). Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *beliebig Knoten-zerlegbar*, wenn für jede beliebige Sequenz (n_1, \dots, n_t) positiver ganzer Zahlen mit $\sum_{i=1}^t n_i = |V|$ eine Partition (V_1, \dots, V_t) der Knotenmenge V existiert, so daß $G[V_i]$ zusammenhängend und $|V_i| = n_i$ ist (siehe z.B. [58]).

Griggs und Yeh [51] zeigten $\lambda_{2,1}(G) = \Delta^2(G)$ für Durchmesser-2-Graphen G der Ordnung $n = \Delta^2(G) + 1$ sowie $\lambda_{2,1} \leq \Delta^2(G) - 1$ für Durchmesser-2-Graphen G der Ordnung $n \leq \Delta^2(G)$. Dies motivierte sie dazu, die Vermutung 3.1 aufzustellen. In Satz 3.14 verallgemeinerten wir ihr Ergebnis auf $d \geq 2$ und bewiesen $\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta^2(G) + (d-2)\Delta(G) - 1$ für Durchmesser-2-Graphen G der Ordnung $n \leq \Delta^2(G)$ und $\Delta(G) \geq 3$. Es ist daher sinnvoll, eine Verallgemeinerung der Vermutung 3.1 zu formulieren:

Vermutung 6.1 *Für jeden Graphen G mit Maximalgrad $\Delta \geq 2$ und $d \geq 2$ gilt $\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta^2 + (d-2)\Delta$.*

Diese obere Schranke ist beispielsweise scharf für den Kreis C_5 . Die derzeit beste allgemeine Schranke ist $\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta^2 + (d-1)\Delta - 2$, $d \geq 2$ (Gonçalves, [48]).

$L(d, s)$ -List Labellings – die Listenversion der $L(d, s)$ -Labellings – sind Thema des Kapitels 4. Anders als bei den $L(d, 0)$ -Labellings, für die $\lambda_d = d \cdot \lambda_1 = d(\chi - 1)$ gilt, gibt es bei den $L(d, 0)$ -List Labellings keine offenkundige Beziehung zwischen χ_ℓ^d und χ_ℓ^1 . Von Interesse ist daher die Vermutung 4.1, welche besagt, daß für jeden Graphen G und alle $d \geq 1$ die Ungleichung $\chi_\ell^d(G) \leq (2d-1)(\chi_\ell^1(G) - 1) + 1$ gilt.

Waters stellte diese Vermutung in [99] auf und bewies sie zudem für alle 2-listenfärbbaren Graphen. Richtig ist sie außerdem für sämtliche Graphen G mit $\chi_\ell^1(G) = \text{col}(G)$ (vgl. Satz 4.1). Daher gilt für Wegpotenzen $\chi_\ell^d(P_n^r) \leq (2d-1)(\chi_\ell^1(P_n^r) - 1) + 1 = (2d-1)r + 1$, da Wegpotenzen chordal sind. Diese obere Schranke für $\chi_\ell^d(P_n^r)$ läßt sich ebenso mit einem Greedy-Algorithmus gewinnen: Weist man den Knoten v_1, \dots, v_n (von links nach rechts numeriert) der Wegpotenz in dieser Reihenfolge Label zu, so sind für den Knoten v_i maximal $(2d-1)r$ Label durch die Label der Knoten v_{i-r}, \dots, v_{i-1} verboten. Folglich existiert für jede $[(2d-1)r + 1]$ -Listenzuweisung ein $L(d, 0)$ -List Labelling für P_n^r .

Unbeantwortet ist die Frage, ob die Vermutung 4.1 auch für alle Kreispotenzen gilt. Aus Satz 2.29 läßt sich $\chi_\ell^d(C_n^r) \leq 2rd + 1$ ableiten. Demnach ist die Behauptung richtig, wenn $\chi(C_n^r) \geq r + 1 + \lceil \frac{r}{2d-1} \rceil$ gilt. Offen sind alle Fälle mit $r + 1 \leq \chi(C_n^r) \leq r + \lceil \frac{r}{2d-1} \rceil$.

In Satz 4.3 wurde die Vermutung 4.1 für K_4 -Minor-freie Graphen bestätigt. Als weitere zu untersuchende Graphenklasse bieten sich daher die planaren Graphen an. Da jeder planare Graph 5-listenfärbbar ist, und die Vermutung bereits für alle 2-listenfärbbaren Graphen gezeigt wurde (Satz 4.2), müßten noch die Fälle $\chi_\ell^1 \in \{3, 4, 5\}$ untersucht werden.

Für Kakteen, welche ebenfalls K_4 -Minor-frei sind, konnte sogar die bessere Schranke $\chi_\ell^d \leq d\chi_\ell^1$ gezeigt werden (siehe Folgerung 4.9). Zusammen mit Satz 2.26 ergibt sich $d(\chi_\ell^1(K) - 1) + 1 \leq \chi_\ell^d(K) \leq d\chi_\ell^1(K)$ für jeden Kaktus K , d.h. eine Differenz von $d-1$ zwischen oberer und unterer Schranke. Vermutlich kann ein ähnliches Resultat auch für outerplanare bzw. K_4 -Minor-freie Graphen erzielt werden. Nimmt man das Lemma 3.17 und den Satz 4.7 zu Hilfe, so

sollte mit wenig Aufwand gezeigt werden können, daß ab einer genügend großen Tailenweite g ($g = 5?$) $\chi_\ell^d \leq 3d$ für K_4 -Minor-freie Graphen mit $\chi_\ell^1 = 3$ gilt. Daher wäre neben der Vermutung 4.1 eine weitere interessante Frage:

Problem 6.1 *Für welche Graphen G und $d \geq 2$ gilt $\chi_\ell^d(G) \leq d \cdot \chi_\ell^1(G)$?*

Als untere Abschätzung gilt $\chi_\ell^d(G) - 1 \geq d(\chi_\ell^1(G) - 1)$ bzw. allgemeiner $\chi_\ell^{dP}(G) - 1 \geq d(\chi_\ell^P(G) - 1)$ für jeden Graphen G und sämtliche Abstandsbedingungen P (Satz 2.26). Eine herausfordernde Aufgabe ist hier die Bestimmung notwendiger oder hinreichender Kriterien, wann diese untere Schranke scharf ist:

Problem 6.2 (Fiala und Škrekovski, [39]) *Für welche Graphen G und Abstandsbedingungen P gilt $\chi_\ell^{dP}(G) - 1 = d(\chi_\ell^P(G) - 1)$?*

Für $L(d, s)$ -List Labellings mit $s > 0$ ist noch relativ wenig bekannt. Daher wurden in Abschnitt 4.2.2. einfache Graphen, wie Sterne, Wege und Kreise untersucht. Trotz ihrer einfachen Struktur ist die Berechnung und selbst die Abschätzung von $\chi_\ell^{d,s}$ für diese Graphen keineswegs trivial. Abgesehen von Einzelfällen gibt es für $d > 2$, $s > 0$ noch keine geschlossenen Formeln zur Berechnung von $\chi_\ell^{d,s}(K_{1,n})$, $\chi_\ell^{d,s}(P_n)$ und $\chi_\ell^{d,s}(C_n)$. Daher sind hier weitere Untersuchungen erforderlich.

Ein Problem aus der enumerativen Kombinatorik, welches in engem Zusammenhang zur Berechnung von $\chi_\ell^P(G)$ steht, ist das Abzählen von Eulerschen Unterdigraphen, wenn eine Orientierung D für den Multigraphen G^P gegeben ist. Wie wir aus Satz 2.31 wissen, kann man damit für $\chi_\ell^P(G)$ die obere Schranke $\chi_\ell^P(G) \leq \max_{v \in V(D)} d_D^-(v) + 1$ gewinnen, sofern $EE(D) \neq EO(D)$ für die Orientierung D gilt. Bei Wegen und Kreisen lassen sich meistens sehr schnell gute (z.B. drehsymmetrische oder rekursiv definierbare) Orientierungen D für P_n^P bzw. C_n^P angeben. Jedoch scheitert man oft am Beweis von $EE(D) \neq EO(D)$. Es ist daher sinnvoll, weitere Überlegungen in die Entwicklung von Methoden zu investieren, mit denen man möglichst schnell und elegant $EE(D) \neq EO(D)$ zeigen kann. Ein erster Schritt in diese Richtung ist die im Beweis von Satz 4.4 eingeführte Idee, $EE(D) \not\equiv EO(D) \pmod{p}$ für eine Primzahl p zu zeigen. Diese Methode erwies sich beim Beweis von Satz 4.19 und an weiteren Stellen des 4. Kapitels als nützlich.

Ist D eine Orientierung ohne ungerade Zyklen, so gilt stets $EE(D) \neq EO(D)$. Diese Tatsache machen wir uns im Abschnitt 4.3. zunutze. Mit Hilfe der in Algorithmus 4.3 eingeführten Reduktion-Labeling-Methode gelingt es, für jeden Kaktus K eine Orientierung D für $K^{(d)}$ ohne ungerade Zyklen zu konstruieren und daraus eine obere Schranke für $\chi_\ell^d(K)$ zu bestimmen (siehe Satz 4.21). Diese Schranke wird für Kakteen, welche nur einen Kreis besitzen, in Satz 4.20 verbessert.

Bei der anschließenden Abschätzung von $\chi_\ell^{d,1}$ für Kakteen wurde ebenfalls die Reduktion-Labeling-Methode angewandt. Sehr wahrscheinlich kann sie auch

bei anderen Färbungsarten erfolgreich eingesetzt werden. Geeignet wäre sie beispielsweise zur Konstruktion von $[r, s, t]$ -Färbungen von Kakteen. Eine $[r, s, t]$ -Färbung eines Graphen G ist eine Totalfärbung von G mit den Abstandsbedingungen r für adjazente Knoten, s für adjazente Kanten und t für inzidente Knoten und Kanten (siehe [63] für weitere Informationen). Möchte man jedoch $\chi_{r,s,t}(K)$, die Mindestanzahl benötigter Farben für eine $[r, s, t]$ -Färbung des Kaktus K , abschätzen, so sind mit der Reduktion-Labeling-Methode nur bei relativ kleinen Werten für s gute Schranken zu erreichen.

Weitere nützliche Werkzeuge bei der Abschätzung von $\chi_\ell^{d,1}$ für Kakteen waren die beiden in Abschnitt 4.2.1. beschriebenen Labeling-Algorithmen 4.1 und 4.2 für Wege (mit kleinen Randlisten) und die dafür hinreichenden Bedingungen aus den Lemmata 4.2 und 4.3. Ebenso wie der Satz 4.7 könnten diese möglicherweise bei Untersuchungen zur Fortführbarkeit von Vorfärbungen mit Abstandsbedingungen (engl.: precoloring extension) Anwendung finden. Enthält ein Graph G einen Weg (v_1, \dots, v_l) , so daß $\{v_1, v_l\}$ eine trennende Knotenmenge bildet, so kann man den Weg (v_2, \dots, v_{l-1}) aus G "herausschneiden" und Aussagen treffen, ob eine Vorfärbung von $G - \{v_2, \dots, v_{l-1}\}$ auf die Knoten v_2, \dots, v_{l-1} erweitert werden kann. Ebenso könnte man bei einem in G vorhandenen Kreis (v_1, \dots, v_l, v_1) den Weg (v_2, \dots, v_l) herausnehmen und gesondert betrachten, wenn v_1 eine Artikulation wäre. Dieses Vorgehen wurde beim Labeling von Endkreisen demonstriert.

Mit den obigen Techniken konnten wir für Kakteen eine obere Schranke für $\chi_\ell^{d,1}$, $d \geq 2$, angeben (Satz 4.22), welche für manche Werte von Δ und g scharf ist. Ferner wurde $\chi_\ell^{1,1}$ in Satz 4.23 exakt berechnet. Da χ_ℓ^d für Bäume und Kreise bereits bekannt ist, könnten weitere Untersuchungen dahin gehen, χ_ℓ^d für Kakteen genau zu berechnen. Eine andere interessante Frage in Verbindung mit Kakteen ist die folgende:

Aus [35] ist bekannt, daß schon die Berechnung von $\lambda_{2,1}$ für Graphen mit Baumweite 2 \mathcal{NP} -vollständig ist. Jedoch existiert laut [66] ein polynomialer Algorithmus zur Berechnung von $\chi_\ell^{d,1}$ für Bäume. Daher wäre es schön zu wissen, ob auch für Kakteen noch ein polynomialer Algorithmus existiert. In Satz 4.22 zeigte sich, daß $\chi_\ell^{d,1}(K) \leq \Delta + 2d - 1$ für einen Kaktus K mit großem Maximalgrad Δ oder großer Tailenweite g ist. Da dies auch die beste allgemeine obere Schranke für Bäume ist (vgl. Satz 4.8), könnte man vermuten, daß sich das Labeling-Verhalten eines Kaktus bei genügend großem Maximalgrad bzw. großer Tailenweite dem Verhalten eines Baumes angleicht und daher möglicherweise ein polynomialer Algorithmus existiert.

Wie wir festgestellt haben, gilt $\chi_\ell^{1,1} = \chi^{1,1}$ für Kakteen. In [2] wurde gezeigt, daß $\chi_\ell^{1,1} = \chi^{1,1}$ auch für outerplanare Graphen mit Maximalgrad $\Delta \geq 7$ gilt. Ferner gelten $\chi_\ell^1(P_n^r) = \chi(P_n^r)$ und $\chi_\ell^1(C_n^r) = \chi(C_n^r)$. Daher ist $P = (1, \dots, 1)$ sicherlich ein guter Kandidat bei der Frage:

Problem 6.3 Für welche Graphen G und Abstandsbedingungen P gilt $\chi_\ell^P(G) = \chi^P(G)$?

Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im Abschnitt 4.4 für den Fall $P = (2, 1)$. Im Vordergrund steht dabei die Vermutung 4.4, daß $\chi_\ell^{2,1}(T) = \chi^{2,1}(T)$ für jeden Baum T gilt. Die Richtigkeit dieser Vermutung wird bewiesen für:

- Doppelsterne und Zweisterne (Satz 4.24),
- Kometen (Satz 4.25),
- Raupen mit Maximalgrad $\Delta \geq i$ und $a \geq 8 - i$, wobei $i \in \{4, 5, 6\}$ und a der minimale Abstand zweier Δ -Knoten ist (Satz 4.26),
- Bäume, welche einen der Bäume aus Abbildung 3.20 als Untergraphen besitzen (Bemerkung 4.8).

Der nächste Schritt wäre sicherlich, $\chi_\ell^{2,1} = \chi^{2,1}$ für alle Raupen zu zeigen. Ferner wäre natürlich wichtig, Graphen mit $\chi_\ell^{2,1} \neq \chi^{2,1}$ zu untersuchen, um Aussagen machen zu können, welche Bedingungen notwendig bzw. hinreichend für die Gleichheit von $\chi_\ell^{2,1}$ und $\chi^{2,1}$ sind. Dabei stellt sich beispielsweise die Frage, ob auch bei Rädern Gleichheit besteht. Für Räder gilt $\chi^{2,1}(K_1 + C_n) = 7$, wenn $n = 3, 4$, und $\chi^{2,1}(K_1 + C_n) = n + 2$ für $n \geq 5$ (vgl. Tabelle 3.2). Würde $\chi_\ell^{2,1} = \chi^{2,1}$ gelten, so wäre $\chi_\ell^{2,1}(K_1 + C_n) = n + 2 = \chi_\ell^{2,1}(K_{1,n})$ für $n \geq 5$. Dies ist eher unwahrscheinlich.

Neben den hier explizit aufgeführten Problemen gibt es eine Vielzahl weiterer offener Fragen und Aufgaben bei den Färbungen mit Abstandsbedingungen. Generell erstrebenswert sind die Verbesserung schon existierender Schranken für allgemeine oder spezielle Graphen, die Untersuchung anderer Graphenklassen und das Betrachten weiterer Abstandsbedingungen P . Besonders wünschenswert sind natürlich innovative Ideen, welche die Theorie der Färbungen mit Abstandsbedingungen entscheidend voranbringen.

A. Literaturverzeichnis

- [1] G. Agnarsson, M.M. Halldórsson, *Coloring Powers of Planar Graphs*, SIAM J. Disc. Math. 16 (4) (2003), 651-662.
- [2] G. Agnarsson, M.M. Halldórsson, *On Colorings of Squares of Outerplanar Graphs*, SODA 2004, 244-253.
- [3] M. Aigner, *Graphentheorie – Eine Entwicklung aus dem 4–Farben Problem*, Springer-Verlag (1984).
- [4] N. Alon, M. Tarsi, *Colorings and Orientations of Graphs*, Combinatorica 12 (2) (1992), 125-134.
- [5] N. Alon, A. Zaks, *T-choosability in graphs*, Discrete Applied Math. 82 (1998), 1-13.
- [6] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four-colorable, Part I: Discharging*, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.
- [7] K. Appel, W. Haken, J. Koch, *Every planar map is four-colorable, Part II: Reducibility*, Illinois J. Math. 21 (1977), 491-567.
- [8] C. Berge, *Perfect graphs*, Six papers on graph theory, Indian Statistical Institute, Kalkutta (1963), 1-21.
- [9] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, Dunod, Paris (1970).
- [10] A.A. Bertossi, M.A. Bonuccelli, *Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks*, IEEE/ACM Trans. on Networking 3 (1995), 441-449.
- [11] H.L. Bodlaender, T. Kloks, R.B. Tan, J. van Leeuwen, *Approximations for λ –Coloring of Graphs*, Technical Report, Utrecht University (2000).
- [12] J.A. Bondy, R. Boppana, A. Siegel, Private Kommunikation mit Alon und Tarsi.
- [13] I. Bonias, *T–Colorings of complete graphs*, PhD Thesis, Department of Mathematics, Northeastern University, Boston, MA (1991).

- [14] O.V. Borodin, H.J. Broersma, A. Glebov, J. van den Heuvel, *Stars and Bunches in Planar Graphs. Part II: General Planar Graphs and Colorings*, CDAM Research Report Series Centre for Discrete and Applicable Mathematics, LSE 2002-05 (2002).
- [15] A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad, *Graph Classes - A Survey*, SIAM monographs on discrete mathematics and applications (1999).
- [16] R. Brooks, *On coloring the nodes of a network*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 37 (1941), 194-197.
- [17] T. Calamoneri, *A Bibliographical Note on $L(h, 1)$ -Labeling of Graphs*, Manuscript (2002).
- [18] T. Calamoneri, *Exact Solution of a Class of Frequency Assignment Problems in Cellular Networks (Extended Abstract)*, 8th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS'03), Lect. Notes in Comp. Science 2841 (2003), 163-173.
- [19] T. Calamoneri, *The $L(h, k)$ -Labelling Problem: a Survey*, Technical Report 04/2004, Dept. of Comp. Sci. Univ. of Rome "La Sapienza" (2004).
- [20] T. Calamoneri, A. Pelc, R. Petreschi, *Labeling trees with a condition at distance two*, Discrete Math. 306 (14) (2006), 1534-1539.
- [21] T. Calamoneri, R. Petreschi, *λ -Coloring of Regular Tiling (Extended Abstract)*, Proc. of First Cologne-Twente Workshop (CTW), Electronic Notes in Discrete Math. 8 (2001).
- [22] T. Calamoneri, R. Petreschi, *$L(h, 1)$ -Labeling Subclasses of Planar Graphs*, Journal on Parallel and Distributed Computing 64 (3) (2004), 414-426.
- [23] G.J. Chang, J.-J. Chen, D. Kuo, S.-C. Liaw, *Distance-two labelings of digraphs*, Technical Report 2004-011, Mathematics division, National Center for Theoretical Science at Taipei (2004).
- [24] G.J. Chang, W.-T. Ke, D. Kuo, D.D.-F. Liu, R.K. Yeh, *On $L(d, 1)$ -Labelings of Graphs*, Discrete Math. 220 (2000), 57-66.
- [25] G.J. Chang, D. Kuo, *The $L(2, 1)$ -Labeling on Graphs*, SIAM J. Disc. Math. 9 (1996), 309-316.
- [26] Y. Chen, *The list- $L(2, 1)$ -labeling problem of graphs*, Manuscript.
- [27] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics 164 (2006), 51-229.

- [28] O. Cogis, J.-C. König, J. Palysi, *On the list colouring problem*, Lecture Notes in Computer Science 2550 (2002), 47-56.
- [29] M.B. Cozzens, F.S. Roberts, *T-colorings of graphs and the channel assignment problem*, Congressus Numerantium 35 (1982), 191-208.
- [30] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer-Verlag Heidelberg (2006).
- [31] Z. Dvorak, D. Král, P. Nejedlý, R. Škrekovski, *Coloring squares of planar graphs with no short cycles*, eingereicht (2005).
- [32] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math. 11 (1959), 34-38.
- [33] P. Erdős, S. Fajtlowicz, A. J. Hoffman, *Maximum degree in graphs of diameter 2*, Networks 10 (1980), 87-90.
- [34] P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congressus Numerantium 26 (1979), 125-157.
- [35] J. Fiala, P.A. Golovach, J. Kratochvíl, *Distance constrained labelings of graphs of bounded treewidth*, Lecture Notes in Computer Science 3580 (2005), 360-372.
- [36] J. Fiala, D. Král, R. Škrekovski, *A Brooks-Type Theorem for the Generalized List T-Coloring*, SIAM J. Disc. Math. 19 (3) (2005) , 588-609.
- [37] J. Fiala, J. Kratochvíl, *On the Computational Complexity of the $L(2, 1)$ -Labeling Problem for Regular Graphs*, Lecture Notes in Computer Science 3701 (2005), 228-236.
- [38] J. Fiala , J. Kratochvíl, A. Proskurowski, *Distance Constrained Labeling of Precolored Trees*, Lecture Notes in Computer Science 2202 (2001), 285-292.
- [39] J. Fiala, R. Škrekovski, *List distance-labelings of graphs*, Discrete Applied Math. 148 (1) (2005), 13-25.
- [40] P.C. Fishburn, F.S. Roberts, *Full Color Theorems for $L(2, 1)$ -colorings*, DIMACS Technical Report 2000-08 (2000).
- [41] P.C. Fishburn, F.S. Roberts, *No-hole $L(2, 1)$ -colorings*, Discrete Applied Math. 130 (3) (2003), 513-519.
- [42] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combinatorial Theory, Series B 63 (1995), 153-158.
- [43] J.P. Georges, D.W. Mauro, *On the Criticality of Graphs Labelled with a Condition at Distance Two*, Congressus Numerantium 101 (1994), 33-49.

- [44] J.P. Georges, D.W. Mauro, *Generalized Vertex Labelings with a Condition at Distance Two*, Congressus Numerantium 109 (1995), 141-159.
- [45] J.P. Georges, D.W. Mauro, *On regular graphs optimally labeled with a condition at distance two*, SIAM J. Disc. Math. 17 (2) (2003), 320-331.
- [46] J.P. Georges, D.W. Mauro, *Labelling trees with a condition at distance two*, Discrete Math. 269 (2003), 127-148.
- [47] J.P. Georges, D.W. Mauro, *On the structure of graphs with non-surjektive $L(2, 1)$ -labelings*, SIAM J. Disc. Math. 19 (1) (2005), 208-223.
- [48] D. Gonçalves, *On the $L(p, 1)$ -labelling of graphs*, DMTCS Conference Volume AE (2005), 81-86.
- [49] S. Gravier, F. Maffray, *Graphs whose choice number is equal to their chromatic number*, J. Graph Theory 27 (1998), 87-97.
- [50] J.R. Griggs, X.T. Jin, *Real number graph labellings with distance conditions*, SIAM J. Disc. Math. 20 (2) (2006), 302-327.
- [51] J.R. Griggs, R.K. Yeh, *Labelling Graphs with a Condition at Distance 2*, SIAM J. Disc. Math. 5 (4) (1992), 586-595.
- [52] J.L. Gross (Hrsg.), *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton (2004).
- [53] A. Hackmann, *Kanten- und Totalfärbungen von Graphen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig (2002).
- [54] W.K. Hale, *Frequency assignment: theory and applications*, Proc. IEEE 68 (1980), 1497-1514.
- [55] P.J. Heawood, *Map-colour theorem*, Quart. J. Pure Appl. Math (Oxford) 24 (1890), 332-338.
- [56] J. van den Heuvel, S. McGuinness, *Coloring the square of a planar graph*, J. Graph Theory 42 (2003), 110-124.
- [57] J. Hoffman, R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameters 2 and 3*, IBM J. Res. Develop. 4 (1960), 497-504.
- [58] M. Hornák, M. Woźniak, *On arbitrarily vertex-decomposable trees*, Preprint MD 001 (2004).
- [59] K. Jansen, *A rainbow about T -colorings for complete graphs*, Discrete Math. 154 (1996), 129-140.

- [60] S. Jendrol', Z. Skupień, *Local structures in plane maps and distance colorings*, Discrete Math. 236 (2001), 167-177.
- [61] K. Jonas, *Graph colorings analogues with a condition at distance two: $L(2, 1)$ -labelings and list λ -labelings*, PhD thesis, University of South Carolina (1993).
- [62] M. Junker, *Moore graphs, latin squares and outer automorphisms*, Preprint, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Germany (2003).
- [63] A. Kemnitz, M. Marangio, $[r, s, t]$ -Colorings of Graphs, Discrete Math. 307 (2) (2007), 199-207.
- [64] A.B. Kempe, *On the geographical problem of four colours*, Amer. J. Math. 2 (1879), 193-200.
- [65] A. Kohl, *Bounds for the $L(d, 1)$ -number for special classes of graphs*, Preprint 2004-02 (2004), TU Freiberg.
- [66] A. Kohl, J. Schreyer, Zs. Tuza, M. Voigt, *List version of $L(d, s)$ -labelings*, Theoretical Computer Science 349 (1) (2005), 92-98.
- [67] A.V. Kostochka, M. Stiebitz, B. Wirth, *The colour theorems of Brooks and Gallai extended*, Discrete Math. 162 (1996), 299-303.
- [68] D. Král, *Coloring powers of chordal graphs*, SIAM J. Disc. Math. 18 (3) (2004), 451-461.
- [69] D. Král, R. Škrekovski, M. Tancer, *Construction of large graphs with no optimal surjective $L(2, 1)$ -labelings*, SIAM J. Disc. Math. 20 (2) (2006), 536-543.
- [70] K.-W. Lih, W.-F. Wang, *Coloring the Square of a K_4 -minor Free Graph*, Discrete Math. 269 (2003), 303-309.
- [71] K.-W. Lih, W.-F. Wang, *Labeling Planar Graphs with Conditions on Girth and Distance Two*, SIAM J. Disc. Math. 17 (2) (2004), 264-275.
- [72] K.-W. Lih, W.-F. Wang, *Coloring the Square of an Outerplanar Graph*, Taiwanese Journal of Mathematics 10 (4) (2006), 1015-1023.
- [73] D.D.-F. Liu, *T -colorings of graphs*, Discrete Math. 101 (1992), 203-212.
- [74] D.D.-F. Liu, X. Zhu, *Circular Distance Two Labelings and Circular Chromatic Numbers*, Ars Combinatoria 69 (2003), 177-183.
- [75] D.D.-F. Liu, X. Zhu, *The Circular Distance Two Labeling and the λ -Number for Outerplanar Graphs*, SIAM J. Disc. Math. 19 (2) (2005), 281-293.

- [76] W.-D. Materna, *Algorithmen zum Färben von Graphen*, Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin (1998).
- [77] C. McDiarmid, *On the span in channel assignment problems: bounds, computing and counting*, Discrete Math. 266 (2003), 387-397.
- [78] M. Molloy, M.R. Salavatipour, *A Bound on the Chromatic Number of the Square of a Planar Graph*, J. Combinatorial Theory, Series B 94 (2) (2005), 189-213.
- [79] R.A. Murphey, P.M. Pardalos, M.G.C. Resende, *Frequency Assignment Problems*, Handbook of Combinatorial Optimization, vol. Supplement vol. A (2000), 295-377.
- [80] A. Prowse, D.R. Woodall, *Choosability of Powers of Circuits*, Graphs and Combinatorics 19 (2003), 137-144.
- [81] B. Randerath, I. Schiermeyer, *Vertex colouring and forbidden subgraphs – a survey*, Graphs and Combinatorics 20 (2004), 1-40.
- [82] A. Raychaudhuri, *Further results on T -coloring and frequency assignment problems*, SIAM J. Disc. Math. 7 (4) (1994), 605-613.
- [83] B. Reed, ω , Δ , and χ , J. Graph Theory 27 (4) (1998), 177-212.
- [84] F.S. Roberts, *T -colorings of graphs: recent results and open problems*, Discrete Math. 93 (1991), 229-245.
- [85] N. Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour, R. Thomas, *A new proof of the four colour theorem*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996), 17-25.
- [86] D. Sakai, *Labeling Chordal Graphs: Distance Two Condition*, SIAM J. Disc. Math 7 (1994), 133-140.
- [87] D. Sakai Troxell, *On critical trees labeled with a condition at distance two*, Discrete Math. 295 (2005), 173-189.
- [88] R. Simanjuntak, *Distance-Related Problems in Graph Theory*, PhD Thesis, University of Newcastle, Australia (2003).
- [89] R.A. Sitters, *A short proof of a conjecture on the T_r -choice number of even cycles*, Discrete Applied Math. 92 (1999), 243-246.
- [90] B.A. Tesman, *Application of Forbidden Difference Graphs to T -Colorings*, Congressus Numerantium 74 (1990), 15-24.

- [91] B.A. Tesman, *List T -colorings of graphs*, Discrete Applied Math. 45 (1993), 277-289.
- [92] Zs. Tuza, *Graph colorings with local constraints – a survey*, Discuss. Math. Graph Theory 17 (1997), 161-228.
- [93] Zs. Tuza, M. Voigt, *On a conjecture of Erdős, Rubin and Taylor*, Tatra Mountains Mathematical Publications 9 (1996), 69-82.
- [94] Universitat Politcnica de Catalunya (Hrsg.), *The (Degree, Diameter) Problem for Graphs*, http://www-mat.upc.es/grup_de_grafs/grafs/taula_delta_d.html, verfügbar am 11.06.2006.
- [95] V.G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors* (in Russian), Diskret. Analiz. 29, Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Schem 101 (1976), 3-10.
- [96] M. Voigt, *On List Colourings and Choosability of Graphs*, Habilitationsschrift, Technische Universität Ilmenau, Germany (1997).
- [97] A.O. Waller, *Some results on list T -colourings*, Discrete Math. 174 (1997), 357-363.
- [98] W.-F. Wang, *The $L(2, 1)$ -labelling of trees*, Discrete Applied Math. 154 (3) (2006), 598-603.
- [99] R.J. Waters, *Some new bounds on T_r -choosability*, Preprint 2004, erscheint in Discrete Math.
- [100] R.J. Waters, *Consecutive choosability and a new graph invariant*, J. London Math. Soc. 73 (2006), 565-585.
- [101] G. Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, Technical Report, University of Dortmund (1977).
- [102] M.A. Whittlesey, J.P. Georges, D.W. Mauro, *On the λ -number of Q_n and related graphs*, SIAM J. Disc. Math. 8 (4) (1995), 499-506.

B. Symbolverzeichnis

$col(G)$	Reihenzahl (coloring number) von G
$deg(v)$	Knotengrad von v
$d^-(v), d^+(v)$	Innen- bzw. Außengrad von v
$\delta(G), \Delta(G)$	Minimal- bzw. Maximalgrad von G
$\delta^*(G)$	Deltagrad von G
$\Delta^*(G)$	Nachbargrad von G
$dist(x, y)$	Abstand der Knoten x und y
$EE(D), EO(D)$	Anzahl der geraden bzw. ungeraden Eulerschen Unterdigraphen von D
$g(G)$	Taillenweite von G
G^r	r -te Potenz von G
G^P	Multigraph zu G , siehe Definition in Satz 2.31
$\lambda_P(G)$	L_P -Zahl von G
$n(G)$	Ordnung von G
$N(v)$	Nachbarschaft von v
$N[v]$	Nachbarschaft von v vereinigt mit v
$N_j(v)$	Menge der Knoten im Abstand j zu v
$sp_T(G)$	T -Spannweite von G
$T - ch(G)$	T -listenchromatische Zahl von G
$\chi(G)$	chromatische Zahl von G
$\chi_c(G)$	kreischromatische Zahl von G
$\chi^P(G)$	$\lambda_P(G) + 1$
$\chi_\ell(G), \chi_\ell^1(G), ch(G)$	listenchromatische Zahl von G
$\chi_\ell^P(G)$	L_P -Listenzahl von G
$\omega(G)$	Cliquenzahl von G

C. Definitionen

1. Eine **Artikulation** $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein trennender Knoten, d.h. das Löschen von v erhöht die Komponentenanzahl des Graphen.
2. Der **Außengrad** $d^+(v)$ eines Knotens $v \in V$ in einem Digraphen $D = (V, E)$ ist die Anzahl der Bögen aus E , deren Anfangsknoten v ist.
3. Ein **Blatt** ist ein Endknoten, d.h. ein Knoten vom Grad 1.
4. Ein **Block** eines Graphen G ist ein maximaler 2-fach zusammenhängender Untergraph von G .
5. Ein **Bogen** (x, y) ist eine gerichtete Kante mit dem Anfangsknoten x und dem Endknoten y .
6. Ein Graph heißt **chordal**, wenn er keinen Kreis C_l , $l \geq 4$, als induzierten Untergraphen enthält.
7. Eine **Clique** in einem Graphen G ist ein vollständiger Untergraph. Die **Cliquenzahl** $\omega(G)$ ist die Mächtigkeit einer größten Clique von G .
8. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Untergraph $H \subseteq G$ wird von einer Menge $E' \subseteq E$ **erzeugt**, wenn $E(H) = E'$ und $V(H) = \{u \mid \exists \{u, v\} \in E'\} \cap V(G)$. Ein Untergraph $H \subseteq G$ wird von einer Menge $V' \subseteq V$ **induziert**, wenn $V(H) = V'$ und $E(H) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V'\} \cap E(G)$. Man schreibt für H dann auch $G[E']$ bzw. $G[V']$.
9. Der **Innengrad** $d^-(v)$ eines Knotens $v \in V$ in einem Digraphen $D = (V, E)$ ist die Anzahl der Bögen aus E , deren Endknoten v ist.
10. Der **Kantengraph** $L(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph mit der Knotenmenge E , in dem $x, y \in E$ genau dann als Knoten adjazent sind, wenn sie es als Kanten in G sind.
11. Ein **Kantenzug** $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ ist eine Folge von Knoten und Kanten mit $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \dots, k$, paarweise verschieden.
12. Ein Graph heißt **klauenfrei**, wenn er nicht $K_{1,3}$ als induzierten Untergraphen enthält.

-
13. Das **Komplement** bzw. der **Komplementärgraph** \overline{G} eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph mit der Knotenmenge V , in dem zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn sie in G nicht adjazent sind.
 14. Ein **Minor** H eines Graphen G geht aus G durch eine endliche Folge von Kantenlöschungen und Kantenkontraktionen hervor.
 15. Eine **Orientierung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, der aus G hervorgeht, indem jede Kante $\{x, y\} \in E$ durch genau einen der Bögen (x, y) und (y, x) ersetzt wird.
 16. Die r -te **Potenz** G^r eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph mit der Knotenmenge V , so daß zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn ihr Abstand in G höchstens r beträgt.
 17. Die Länge eines kürzesten Kreises in einem Graphen G wird als **Tailenweite** von G bezeichnet.
 18. Eine **Tour** ist in dieser Arbeit äquivalent zu einem Kantenzug.
 19. Ein **Untergraph** H von einem Graphen G , geschrieben $H \subseteq G$, ist ein Graph mit $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$.
 20. Ersetzt man in einem Graphen G jede Kante $\{x, y\}$ durch einen (x, y) -Weg, so daß die Ersetzungswege keine inneren Knoten mit $V(G)$ oder miteinander gemeinsam haben, so ist der entstandene Graph H eine **Unterteilung** von G .

D. Index

- abfallendes Labelling-Schema, 40
- alternierendes Labelling-Schema, 40
- arithmetische Menge, 23
- Artikulation, 149
- Aschbacher-Graph, 72
- Außengrad, 149

- beliebig Knoten-zerlegbar, 136
- Berge-Graph, 10
- Blatt, 149
- Block, 149
- Bogen, 149

- choosability, 15
- chordaler Graph, 149
- chromatische Zahl, 8
- Chvátal-Graph, 9
- Clique, 9, 149
- Cliquenzahl, 9, 149
- coloring number, 9
- consecutive choosability, 135

- D -Listenfärbbarkeit, 16
- $D - P$ -Listenfärbbarkeit, 26
- $D - T$ -Listenfärbbarkeit, 22
- degeneriert, 9
- Deltagrad, 80
- Doppelstern, 82
- Dualgraph, 8
- Durchmesser, 72

- eliminiert, 90
 - i -eliminiert, 90
- Endkreis, 108

- erzeugter Untergraph, 149
- Eulerscher Unterdigraph, 17
 - gerader, 17
 - ungerader, 17
- Exzentrizität, 83

- Farbstufe, 35
- Frequenzzuweisungsproblem, 1
- Färbung, 8
 - (a, b) -Färbung, 134
 - $[r, s, t]$ -Färbung, 139
 - T -Färbung, 10

- Gallai-Baum, 17
- gewichteter Grad, 15
 - maximaler gewichteter Grad, 15

- Hoffman-Singleton-Graph, 72

- induzierter Untergraph, 149
- Initialmengen, 11
- Innengrad, 149

- K_4 -Minor-freier Graph, 85
- Kaktus, 108
- Kantengraph, 149
- Kantenzug, 149
- Kern, 18
- klauenfreier Graph, 149
- Knotenreihe, 35, 42
 - k -Knotenreihe, 42
- Komet, 124
- Komplement, 150
- Komplementärgraph, 150
- Kontraktion eines Endkreises, 109

-
- kreischromatische Zahl, 134
Körper, 20
- $L(d, s)$ -Labelling, 27
 lückenloses, 132
 s -separiertes, 132
 zirkuläres, 133
- $L(d, s)$ -List Labelling, 87
 $L(d, s)$ -Listenzahl, 87
 $L(d, s)$ -Zahl, 27
- listenchromatische Zahl, 15
Listenfärbung, 15
 T -Listenfärbung, 21
Listenzuweisung, 15
 k -Listenzuweisung, 15
- L_P -Labelling, 12
 L_P -List Labelling, 24
 L_P -Listenzahl, 24
 L_P -Zahl, 12
- Minor, 150
Moore-Graph, 72
- Nachbargrad, 81
- Orientierung, 150
outerplanarer Graph, 85
- Parkettierung, 32
 reguläre, 32
- perfekter Graph, 10
Petersen-Graph, 72
planarer Graph, 8
Potenz, 150
precoloring extension, 132, 139
- r -Kreise, 41
 r -Wege, 35
Raupe, 82
Reduktion-Labelling-Methode, 109
Reihenzahl, 9
- T -chromatische Zahl, 10
 T -Färbung, 10
 T -listenchromatische Zahl, 21
- T -Listenfärbung, 21
 T -Spannweite, 10
Tailenweite, 150
Theta-Graph, 20
Tour, 108, 150
- Untergraph, 150
 erzeugter, 149
 induzierter, 149
Unterteilung, 20, 150
- Verbindung, 133
- Weg mit kleinen Randlisten, 91
- zentrales Dreieck, 109
Zerlegung in Knotenreihen, 42
Zweistern, 124